

## **ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЁЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ**

**А.С. Кулешов, Г.А. Черняков**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
механико-математический факультет  
119991 Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ,  
e-mail: [kuleshov@mech.math.msu.su](mailto:kuleshov@mech.math.msu.su)

Рассматривается классическая задача механики неголономных систем – задача о движении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью алгоритма Ковачича [1] указываются новые случаи, когда удаётся выразить решение данной задачи с помощью квадратур.

*Ключевые слова:* тело вращения; неголономные связи; алгоритм Ковачича; лиувиллевы решения.

### **Введение**

Задача о качении без скольжения тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости является одной из классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С.А. Чаплыгин в работе [2] показал, что решение данной задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. Однако не всегда удаётся отыскать решение данного дифференциального уравнения. В случае, когда движущееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, решение соответствующего уравнения выражается через элементарные функции [2]. При движении по горизонтальной плоскости круглого диска или обруча решение указанного уравнения выражается через гипергеометрические ряды [2]. В работе Х.М. Муштари [3] было продолжено исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на форму поверхности тела и распределение масс в нём, были найдены два новых частных случая, когда движение тела можно исследовать полностью. В первом случае движущееся твёрдое тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через её фокус, а во втором случае движущееся твёрдое тело представляет собой параболоид вращения.

В 1986 году американский математик Дж. Ковачич предложил алгоритм, позволяющий получить общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в случае, если это решение выражается через так называемые лиувиллевы функции [1]. Напомним, что лиувиллевыми функциями называются такие функции, которые могут быть получены при помощи конечного числа следующих действий над рациональными функциями: выполнение алгебраических операций, вычисление неопределённого интеграла и нахождение экспоненты от неопределённого интеграла. В случае, когда линейное дифференциальное уравнение не имеет лиувиллевых решений, алгоритм Ковачича также позволяет установить этот факт.

В данной работе обсуждается применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Получены выводы о существовании лиувиллевых решений задачи в случае движения по горизонтальной плоскости динамически симметричного тора, параболоида вращения, а также веретенообразного тела, рассматривавшегося в работе Х.М. Муштари [3].

### **Постановка задачи**

Пусть твёрдое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси  $G\zeta$ , проходящей через центр тяжести  $G$  тела, катится без проскальзывания по неподвижной

горизонтальной плоскости  $Oxy$ . Обозначим через  $M$  точку касания тела и плоскости. Предполагаем, что моменты инерции относительно главных центральных осей инерции  $G\xi$  и  $G\eta$ , перпендикулярных  $G\zeta$ , равны между собой. Движение происходит в однородном поле тяжести.

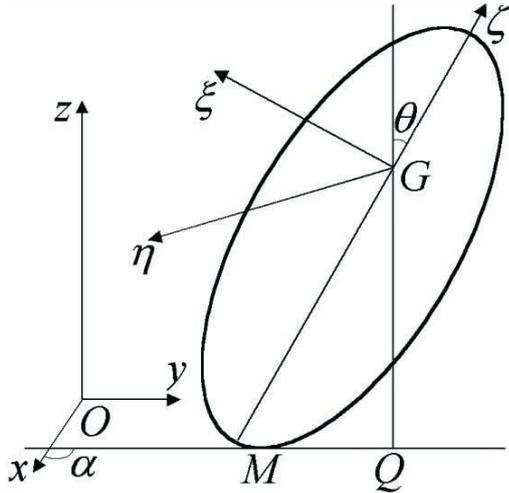


Рис. 1.

Обозначим через  $\theta$  угол между осью симметрии тела и вертикалью. Расстояние  $GQ$  от центра тяжести до плоскости  $Oxy$  будет функцией только угла  $\theta$  (см. [2, 3]):

$$GQ = f(\theta). \quad (1)$$

Теперь конкретизируем расположение осей системы координат  $G\xi\eta\zeta$ . Пусть ось  $G\xi$  всё время лежит в плоскости вертикального меридиана  $M\zeta$ , а ось  $G\eta$  перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Очевидно, что система координат  $G\xi\eta\zeta$  движется и в пространстве и в теле. Пусть  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты точки касания  $M$  тела и плоскости в системе координат  $G\xi\eta\zeta$ . Тогда имеем (см. [2, 3]):

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta, \quad (2)$$

где штрихом обозначена производная функции  $f(\theta)$  по  $\theta$ . Таким образом, функция  $f(\theta)$  полностью характеризует форму поверхности движущегося тела.

Пусть  $m$  – масса тела,  $A_1$  – его момент инерции относительно осей  $G\xi$  и  $G\eta$ , а  $A_3$  – момент инерции относительно оси симметрии. Обозначим через  $r$  проекцию вектора угловой скорости  $\omega$  тела на ось симметрии. В работах [2, 3] было показано, что решение данной задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \left[ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{3m(A_1\xi\xi' + A_3\zeta\zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin\theta} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{(A_1\xi' - A_3\zeta)\sin\theta}{(\xi + \zeta')} \right) - A_3 \sin\theta \right] r = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta = A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2$ . Общее решение линейного дифференциального уравнения (3) выражается через элементарные функции в случае, когда движущееся твёрдое тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар [2, 3]. В случае, когда движущееся тело представляет собой круглый диск или обруч, общее решение данного уравнения выражается с помощью гипергеометрических функций [2, 4].

Мы будем рассматривать движение по горизонтальной плоскости различных тел, для каждого из которых будем выписывать соответствующее уравнение вида (3) и, используя алгоритм Ковачича, выяснять, допускает ли полученное линейное уравнение второго порядка решение, выражающееся через лиувиллевы функции.

### Особенности применения алгоритма Ковачича к дифференциальным уравнениям

В этом параграфе обсуждаются особенности применения алгоритма Ковачича к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Данный алгоритм позволяет получить в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, выраженное через лиувиллевы функции [1], или показать, что уравнение не имеет такого реше-

ния. Последовательное выполнение всех шагов алгоритма сопряжено с громоздкими, хотя и не сложными, вычислениями. Поэтому не будем углубляться в детали алгоритма: они подробно изложены в оригинальной работе Дж. Ковачича [1] (см. также [5]). Сообщим здесь лишь первоначальные сведения.

Предполагается, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому может быть применён алгоритм Ковачича, имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0, \quad (4)$$

где  $a(x), b(x)$  – рациональные функции независимой переменной  $x$ . При помощи замены

$$z = \exp\left(\frac{1}{2} \int a(x) dx\right) y \quad (5)$$

уравнение (4) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = R(x)z, \quad R(x) = \frac{1}{2} \frac{d(a(x))}{dx} + \frac{1}{4} a^2(x) - b(x). \quad (6)$$

В дальнейшем рациональная функция  $R(x)$  раскладывается в сумму простых дробей и производится анализ её конечных полюсов, а также полюса в бесконечности. На основании полученных данных делается вывод о существовании у уравнения (6) лиувиллевых решений.

Для каждого из тел, катящихся по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости, мы будем получать соответствующее уравнение (3) и приводить его к виду (6). После этого мы будем лишь кратко сообщать, какие результаты относительно существования у дифференциального уравнения лиувиллевых решений были получены при помощи алгоритма Ковачича.

### Качение тора

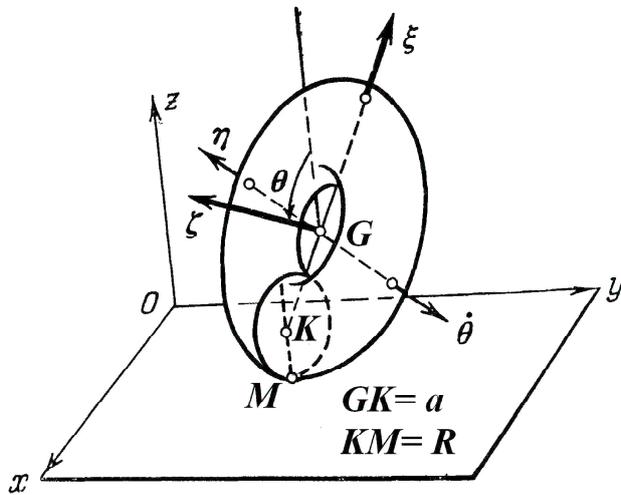


Рис. 2

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Пусть  $R$  – радиус меридиана тора на экваторе, и  $a + R$  – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора. Тогда высота центра масс тора над опорной плоскостью выражается формулой:

$$f(\theta) = R + a \sin \theta.$$

По формулам (2) имеем:

$$\xi = -a - R \sin \theta, \quad \zeta = -R \cos \theta.$$

Линейное дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{a \cos \theta}{(R \sin \theta + a) \sin \theta} + \frac{3mR((A_1 - A_3)R \sin \theta + A_1 a) \cos \theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m(R \sin \theta + a)(R(A_1 - A_3)(1 - 2 \sin^2 \theta) - A_3 a \sin \theta)}{\Delta \sin \theta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2 \sin^2 \theta + 2A_1 m R a \sin \theta + A_1 A_3 + A_1 m a^2 + A_3 m R^2.$$

Сделаем в уравнении (7) замену независимой переменной по формуле  $\sin \theta = x$  и введём обозначения:

$$B = \frac{a}{R}, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

Поскольку  $a > R$ , то  $B > 1$ . В результате уравнение (7) переписывается в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (8)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2((A_1 - A_3)x + A_1B)}{\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{mR^2(x+B)((A_1 - A_3)(2x^2 - 1) + A_3Bx)}{x(x^2 - 1)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2x^2 + 2A_1BmR^2x + A_1A_3 + A_1B^2mR^2 + A_3mR^2.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (8) к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = T(x)z, \quad (9)$$

$$T(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2} +$$

$$+ \frac{\beta_5}{x+B} + \frac{\alpha_5}{(x+B)^2} + \frac{\beta_6}{x} + \frac{\alpha_6}{x^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 + 2)B^2 + (5x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)B + x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 5}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 - 2)B^2 + (5x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9)B - x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 - 5}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)},$$

$$\beta_3 = \frac{8x_1B^3 + 4(x_1^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_1^3 - 4x_1^2x_2 + x_1 + 6x_2)B + (3x_1^2 - 2x_1x_2 - 1)x_1^2}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)},$$

$$\beta_4 = \frac{8x_2B^3 + 4(x_2^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_2^3 - 4x_1x_2^2 + 6x_1 + x_2)B + (3x_2^2 - 2x_1x_2 - 1)x_2^2}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)},$$

$$\beta_5 = \frac{10B^4 + 7(x_1 + x_2)B^3 + 4(x_1x_2 - 2)B^2 - 5(x_1 + x_2)B - 2x_1x_2}{4B(B - 1)(B + 1)(x_1 + B)(x_2 + B)},$$

$$\beta_6 = -\frac{4B^2 + 3(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2}{4x_1x_2B}.$$

Разложение функции  $T(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$T(x)|_{x=\infty} = \frac{12B^2 + 4(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8}{16x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (9) даёт следующий результат (подробности см. в [5]):

**Теорема 1.** Для почти всех физически допустимых значений параметров задачи уравнение (9) не имеет лиувиллевых решений.

### Качение параболоида

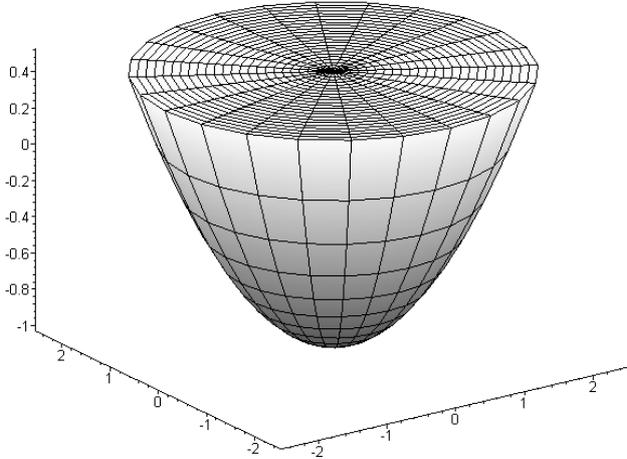


Рис. 3

Уравнение (3) в случае качения по плоскости динамически симметричного параболоида вращения принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (10)$$

$$b_1 = \frac{\cos^2 \theta - 4}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{6m\lambda^2 (A_3 - 2(A_3 - A_1)\cos^2 \theta)\sin \theta}{K_2(\theta)\cos \theta}, \quad b_2 = \frac{2m\lambda^2 (A_3 - 2A_1)(1 + \cos^2 \theta)}{K_2(\theta)},$$

$$K_2(\theta) = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)m\lambda^2)\cos^4 \theta - 4(A_3 - A_1)m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3 m\lambda^2.$$

Видно, что при  $A_3 = 2A_1$  уравнение (10) имеет простое частное решение  $r = r_0 = \text{const}$ . Это обстоятельство было впервые отмечено в работе Х.М. Муштари [3].

В уравнении (10) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\cos^2 \theta = x$ . Введём также следующие обозначения:

$$B = m\lambda^2, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (10) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (11)$$

$$d_1(x) = \frac{5-3x}{2x(1-x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta}, \quad d_2(x) = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x+1)}{2x\Delta(1-x)},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3 B.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (11) к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \Pi(x)z, \quad (12)$$

$$\Pi(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{16}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16},$$

$$\beta_1 = \frac{4x_1 + 4x_2 - 3x_1x_2 - 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \quad \beta_2 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_1x_2}{8x_1x_2},$$

$$\beta_3 = -\frac{4x_1 + x_2 - 7x_1x_2 - 2x_1^2 + 4x_1^2x_2}{8x_1(x_1 - x_2)(x_1 - 1)}, \quad \beta_4 = \frac{x_1 + 4x_2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2^2}{8x_2(x_1 - x_2)(x_2 - 1)}.$$

Разложение функции  $\Pi(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$\Pi(x)|_{x=\infty} = -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (12) приводит к следующему результату (подробности см. в [5]):

**Теорема 2.** При любых физически допустимых значениях параметров задачи все решения уравнения (12) являются лиувиллевыми.

Впервые тот факт, что решение задачи о качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости приводится к квадратурам, был отмечен в работе А.С. Кулешова [6]. В явном виде общее решение исходного уравнения (10) записывается следующим образом:

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi)\sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1A_3(A_3 + 4m\lambda^2)(2A_1 - A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1A_3 + 4A_1m\lambda^2) \cos^4 \theta - 2A_3m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2.$$

Здесь  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные, а функция  $\Phi(\theta)$  выражается через эллиптические интегралы.

### Качение веретенообразного тела

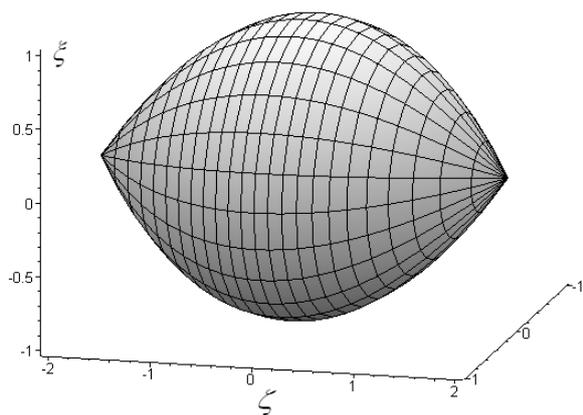


Рис. 4

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тела, поверхность которого образована вращением дуги параболы вокруг оси, параллельной директрисе и проходящей через фокус параболы. Такое тело напоминает по форме веретено, за что оно и получило своё название (Рис. 4). Задача о движении веретенообразного тела рассматривалась Х.М. Муштари [3], который дал полное решение соответствующей задачи при дополнительном ограничении на моменты инерции тела:

$$3A_3 = 2A_1 \quad (13)$$

Для рассматриваемого тела высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Пользуясь формулами (2), находим координаты  $\xi$  и  $\zeta$  точки касания тела с опорной плоскостью:

$$\xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}$$

В результате уравнение (3) в случае качения по плоскости веретенообразного тела принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in \left( \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right), \quad (14)$$

$$b_1 = \frac{(4 \sin^4 \theta - 24 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta}{(1 - 2 \sin^2 \theta)(3 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta} - \frac{6m\lambda^2 (A_1 - 2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta) \cos \theta}{K(\theta) \sin \theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1)m\lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta)^2}{(3 - 2 \sin^2 \theta)K(\theta)},$$

$$K(\theta) = (A_1 A_3 + 4(A_1 - A_3)m\lambda^2) \sin^4 \theta - 4(A_1 - A_3)m\lambda^2 \sin^2 \theta + A_1 m\lambda^2.$$

Если  $3A_3 = 2A_1$ , то уравнение (14) допускает решение (см. [3])  $r = r_0 = \text{const}$ . В уравнении (14) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\sin^2 \theta = x$ . Введём также следующие обозначения:

$$B = m\lambda^2, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (14) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (15)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x\Delta(1-x)(3-2x)},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (15) к уравнению

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = S(x)z, \quad (16)$$

$$S(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_1} + \frac{\alpha_4}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_5}{x-x_2} + \frac{\alpha_5}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4},$$

$$\beta_0 = \frac{3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2}{48x_1x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1x_2 - 9(x_1 + x_2) + 12}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$\beta_2 = \frac{3(x_1 + x_2 - 1)}{(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)}, \quad \beta_3 = \frac{15(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 27}{3(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)},$$

$$\beta_4 = -\frac{(8x_1^3 - 36x_1^2 + 51x_1 - 25)(4x_2 - 3)x_1 + 15(x_1 - 1)x_1 + 3(x_2 - x_1)}{16x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)(2x_1 - 3)(x_1 - x_2)},$$

$$\beta_5 = \frac{(8x_2^3 - 36x_2^2 + 51x_2 - 25)(4x_1 - 3)x_2 + 15(x_2 - 1)x_2 + 3(x_1 - x_2)}{16x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1)(2x_2 - 3)(x_1 - x_2)}.$$

Разложение функции  $S(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$S(x)|_{x=\infty} = -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (16) даёт следующий результат (подробности см. в [5]):

**Теорема 3.** *Дифференциальное уравнение (16) не имеет лиувиллевых решений при почти всех значениях параметров задачи, не связанных условием Х.М. Муштари (13).*

Таким образом, доказано существование или отсутствие лиувиллевых решений в задачах о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора, параболоида вращения, а также веретенообразного тела, движение которого впервые изучалось в работе [3]. Доказанные утверждения дополняют известные ранее результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 14-01-00380 и 16-01-00338).

### Список литературы

1. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V.2. P.3-43.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжёлого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10-16.
3. Муштари Х.М. О катании тяжёлого твёрдого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
4. Appell P. Sur l'integration des equations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau // Rendiconto del circolo matematico di Palermo. 1900. V. XIV. P. 1-6.
5. Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости методом Ковачича. Диссертация на соискания учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2016. <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0112diss.pdf>
6. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. Т. 400. № 1. С. 46-48.