Глава I. Понятие о солитонах. Кинк.

Солитоны – решения классических ур-й движения в теории поля с конечной энергией.

Рассмотрим простейшую модель, в которой возникают солитоны.

$D = 1+1 \qquad \eta^{\mu\nu} = diag(+1, -1)$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2$, $\phi \in Re$, Z_2-симметрия

$[\lambda] = m^2 \qquad [\phi] = [v] = 1$

$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2$

Тогда

$$E = \int dx\, T^{00} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 \phi)^2 + \frac{1}{2}\lambda (\phi^2 - v^2)^2 \right) \geq 0$$

в предположении $\lambda > 0$.

Чтобы $E < \infty$ необходимо, чтобы $\mathcal{H} = T^{00} \to 0$ при $x \to \pm\infty$

Для этого $\phi \to const = \pm v$

N	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$	Решение
1	$\phi \to v$	$\phi \to v$	$\phi = v$ - вакуум
2	$\phi \to -v$	$\phi \to -v$	$\phi = -v$ - вакуум
3	$\phi \to -v$	$\phi \to +v$	кинк
4	$\phi \to +v$	$\phi \to -v$	антикинк

Уравнения движения:

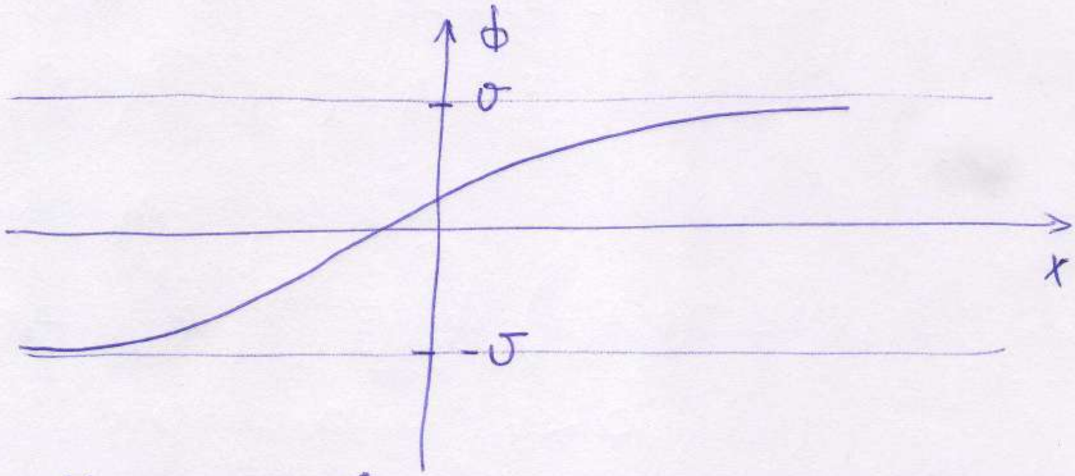
$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\phi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\lambda\,(\phi^2-v^2)\cdot 2\phi$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \partial_\mu^2\phi + 2\lambda\phi\,(\phi^2-v^2) = 0 \\ \phi\big|_{x\to\pm\infty} = \pm v \end{cases}$$

Видно, что $\phi = \pm v$ – тривиальное решение



Исследуем вначале статические решения, которые не зависят от t, т.е. $\phi(x,t)\to\phi(x)$. Тогда

$$\begin{cases} -\phi'' + 2\lambda\phi\,(\phi^2-v^2) = 0 \\ \phi(-\infty) = -v \\ \phi(+\infty) = +v \end{cases} \quad (\text{кинк})$$

$$0 = -\phi''\phi' + 2\lambda\phi(\phi^2 - v^2)\phi' = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\phi'^2\right) +$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$-\phi'^2 + \lambda(\phi^2 - v^2)^2 = const = 0 \quad (\text{из гр. условий})$$

$$\phi' = \pm\sqrt{\lambda}(\phi^2 - v^2)$$

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - v^2} = \pm\sqrt{\lambda}(x - x_0)$$

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - v^2} = \frac{1}{2v}\int d\phi\left(\frac{1}{\phi - v} - \frac{1}{\phi + v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2v}\ln\left|\frac{\phi - v}{\phi + v}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{\phi - v}{\phi + v}\right| = \pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)$$

$$\frac{v - \phi}{v + \phi} = \exp\left(\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)\right)$$

$$v - \phi = (v + \phi)\, e^{\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)}$$

$$\phi\left(1 + e^{\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)}\right) = v\left(1 - e^{\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)}\right)$$

$$\phi = v\,\frac{1 - e^{\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)}}{1 + e^{\pm 2v\sqrt{\lambda}(x - x_0)}}$$

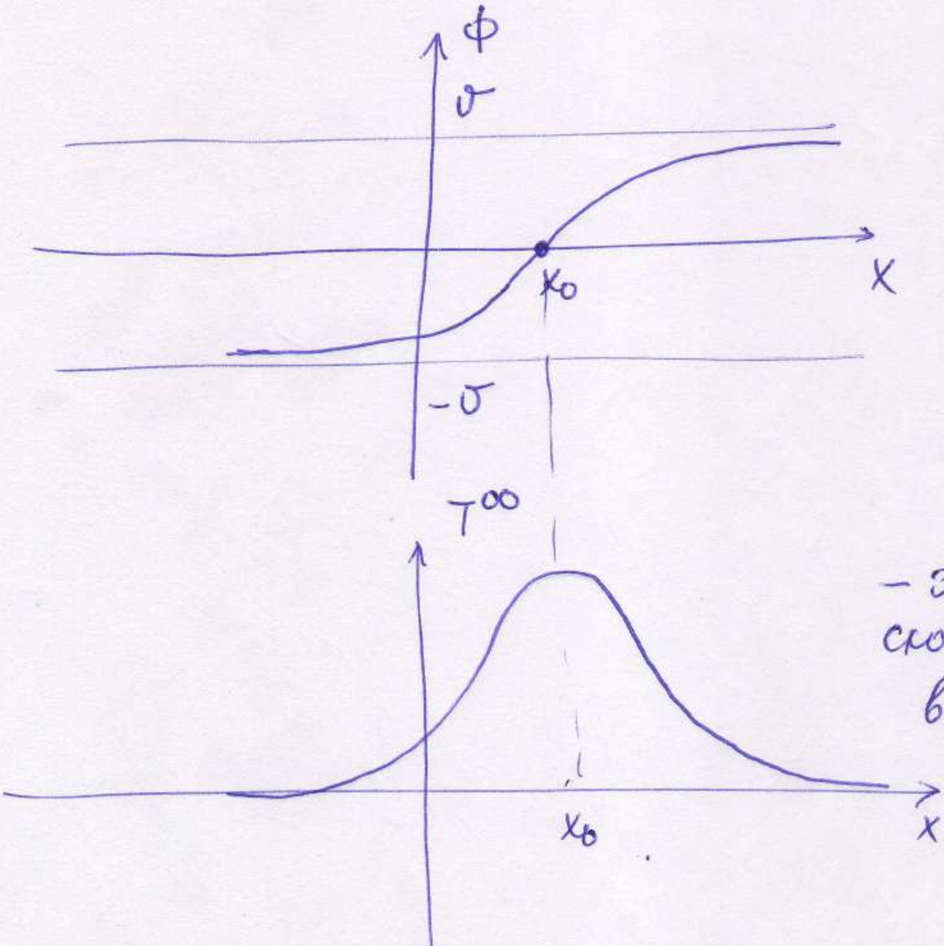
$$\phi = v\,\frac{e^{\mp v\sqrt{\lambda}(x-x_0)} - e^{\pm v\sqrt{\lambda}(x-x_0)}}{e^{\mp v\sqrt{\lambda}(x-x_0)} + e^{\pm v\sqrt{\lambda}(x-x_0)}} =$$

$$= \mp v\,\frac{e^{v\sqrt{\lambda}(x-x_0)} - e^{-v\sqrt{\lambda}(x-x_0)}}{e^{v\sqrt{\lambda}(x-x_0)} + e^{v\sqrt{\lambda}(x-x_0)}} = \mp v\, th\left[v\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]$$

т.о. окончательно

$$\phi(x) = v\, th\left[v\sqrt{\lambda}\,(x-x_0)\right] \quad \text{– кинк}$$

$$\phi(x) = -v\, th\left[v\sqrt{\lambda}\,(x-x_0)\right] \quad \text{– антикинк}$$



– энергия сконцентрирована вблизи т. x_0

$$T^{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2$$

Движущийся кинк:

В силу Лоренц-инвариантности имеется решение

$$\phi(x,t) = v\, th\left[v\sqrt{\lambda}\,\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right] \qquad \left(x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

где u - скорость.

Действительно, если $\phi(x,t) \equiv f\left(\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, то

$$\partial_\mu^2\phi = \ddot{\phi} - \phi'' = \frac{u^2}{(1-u^2)} f'' - \frac{1}{(1-u^2)} f'' = -f''$$

и уравнение

$$\partial_\mu^2\phi + 2\lambda\phi(\phi^2-v^2) = 0$$

сводится к уже исследованному уравнению

$$-f'' + 2\lambda f(f^2-v^2) = 0.$$

т.о. кинк - частицеподобное решение.

Оценим массу кинка:

$$M = E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + \frac{1}{2}\lambda(\phi^2-v^2)^2\right)$$

$$\sim \Delta x \cdot \lambda v^4 \quad , \text{ где } \Delta x \sim \frac{1}{v\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \quad M \simeq \frac{1}{v\sqrt{\lambda}}\cdot\lambda v^4 = \sqrt{\lambda}\, v^3$$

$\boxed{\text{Д/З – вычислить массу движущегося кинка.}}$

Сравним массу кинка и массу частицы теории:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2 = [\phi \equiv v + \varphi]$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + 2v\varphi)^2 \simeq \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - 2\lambda v^2 \varphi^2$$

$$\Rightarrow \quad m = 2\sqrt{\lambda}\, v \neq M.$$

Однако

$$\operatorname{th}\alpha = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 + e^{-2\alpha}} \simeq 1 - 2e^{-2\alpha} \quad \text{при } \alpha \to \infty$$

$\Rightarrow$ при $x \to \infty$

$$\phi(x) \simeq v\left[1 - 2e^{-v\sqrt{\lambda}(x - x_0)\cdot 2}\right]$$

и решение приближается к асимптотике как $\exp(-mx)$

Глава II. Вихревые линии Абрикосова

Рассмотрим модель в $D = 1+3$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\mathcal{D}_\mu \phi^*)(\mathcal{D}_\mu \phi) - \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$$

инвариантную относительно группы $U(1)$.

Здесь $\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi^* = \partial_\mu \phi^* + ie A_\mu \phi^*$$

а преобразования симметрии имеют вид

$$\begin{cases} A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha \\ \phi \to e^{-ie\alpha}\phi \\ \phi^* \to e^{+ie\alpha}\phi^* \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha(x)$ – параметр преобразований.

Очевидно, что $U(1)$ симметрия теории спонтанно нарушена, а

$$E = \int d^3x\, \Theta^{00} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{H}^2 + |\mathcal{D}_0\phi|^2 + |\mathcal{D}_i\phi|^2 + \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 \right\} \geq 0$$

в предположении, что $\lambda > 0$.

$$\Big(\Theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha}F_{\nu\cdot}^{\ \alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^2 + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}_\nu\phi + \mathcal{D}_\nu\phi^*\mathcal{D}_\mu\phi - |\mathcal{D}_\alpha\phi|^2\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 \Big)$$

Исследуем статическое решение, не зависящее от z:

$$\Phi = \Phi(x,y) \qquad \Phi \neq \Phi(t,z)$$

$$A_\mu = A_\mu(x,y) \qquad A_\mu \neq A_\mu(t,z)$$

и выберем калибровку $A_0 = 0$

тогда

$$\mathcal{D}_0\Phi = \cancel{\partial_0}\Phi - ie\cancel{A_0}\Phi = 0$$

0 статичность   0 калибровка

$$F_{0i} = \cancel{\partial_0}A_i - \partial_i\cancel{A_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0.$$

Потребуем конечность плотности энергии по оси z:

$$\frac{\Delta E}{\Delta z} = \int dx\,dy \left\{ \frac{1}{2}\vec{H}^2 + |\mathcal{D}_i\Phi|^2 + \lambda(\Phi^*\Phi - \sigma^2)^2 \right\} < \infty$$

Как следствие, при $\rho \to \infty$ $\quad (\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2})$

$$\begin{cases} \Phi^*\Phi \to \sigma^2 \\ \mathcal{D}_i\Phi \to 0 \qquad , \quad \rho \to \infty \\ H_i \to 0 \end{cases}$$

Из первого условия $\Phi \to \sigma e^{i\alpha(\varphi)}$, причём

$$\sigma e^{i\alpha(\varphi=2\pi)} = \sigma e^{i\alpha(\varphi=0)}$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha(2\pi) - i\alpha(0)} = 1 \Rightarrow \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

– решение характеризуется целым числом.

Условие $\mathcal{D}_i\Phi \to 0$ при $\rho\to\infty$ позволяет найти асимптотику A_i:

$$0 = \mathcal{D}_i\Phi = \partial_i\Phi - ieA_i\Phi$$

$$\Rightarrow A_i = \frac{1}{ie\Phi}\partial_i\Phi = \frac{\cancel{v}}{ie\cancel{v}e^{i\alpha}}\partial_i e^{i\alpha} = \frac{1}{e}\partial_i\alpha$$

(Напомним, что $A_\mu = (A_0, -\vec{A})$)

Поэтому при $\rho\to\infty$ $\vec{A}\to -\frac{1}{e}\overline{\nabla}\alpha$ - чистая калибровка

$\Rightarrow$ условие $\vec{H}\to 0$ при $\rho\to\infty$ выполняется автоматически.

Вычислим теперь магнитный поток через плоскость xy: $(\overline{H} = \mathrm{rot}\,\overline{A})$

$$\Phi \equiv \int \vec{H}\,d\vec{S} = \oint \vec{A}\,d\vec{\ell} = -\frac{1}{e}\oint d\vec{\ell}\,\overline{\nabla}\alpha =$$

$$= -\frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\cancel{\rho}\,d\varphi\cdot\frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = -\frac{1}{e}\left(\alpha(2\pi)-\alpha(0)\right) = -\frac{2\pi n}{e}$$

где $n\in\mathbb{Z}$.

– магнитный поток квантуется.

Найдём теперь явный вид вихревой линии:

Для этого нужно выбрать самую простую функцию $\alpha(\varphi)$. Это возможно из-за калибровочной инвариантности:

$$\phi \to e^{-ie\alpha_0}\phi$$

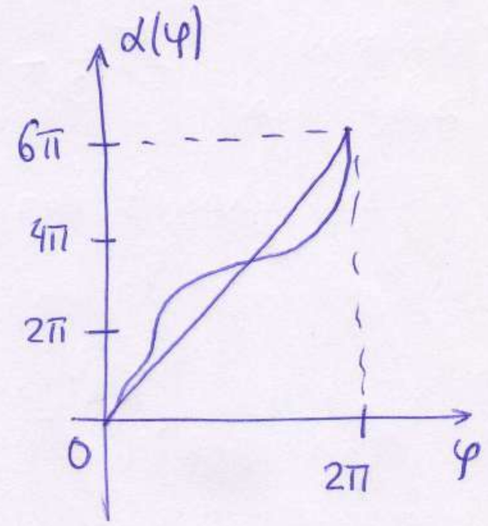
$\Rightarrow$ на бесконечности, где $\phi = \sigma e^{i\alpha(\varphi)}$

$$\alpha(\varphi) \to \alpha(\varphi) - e\alpha_0(\varphi) \equiv \alpha'(\varphi)$$

Если преобразование однозначно, то $\alpha_0(0) = \alpha_0(2\pi)$

т.ч. $\alpha'(2\pi) - \alpha'(0) = 2\pi n$ — не меняется.

Самый простой вариант



$$\alpha(\varphi) = n\varphi$$

тогда при $\rho \to \infty$

$$\phi \to \sigma e^{in\varphi}$$

$$\vec{A} \to -\frac{1}{e}\bar{\nabla}\alpha =$$

$$= -\frac{1}{e}\left(\bar{e}_\rho \cancel{\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}} + \bar{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + \bar{e}_z \cancel{\frac{\partial\alpha}{\partial z}}\right) = -\frac{n}{e\rho}\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Предположим, что при конечных ρ решение отличается от асимптотик на множитель, зависящий от ρ:

$$\begin{cases} \phi(\rho,\varphi) = R(\rho)e^{in\varphi} \\ \vec{A}(\rho,\varphi) \equiv \vec{e}_\varphi A(\rho) \equiv \vec{e}_\varphi\left(-\frac{n}{e\rho}\right)(1 - F(\rho)) \end{cases}$$

Чтобы проверить это предположение (анзац) нужно эти формулы подставить в ур-я движения

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\mathcal{D}_\mu\phi^*)(\mathcal{D}^\mu\phi) - \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$$

$$\underbrace{\mathcal{D}_\mu^2\phi + 2\lambda\phi(\phi^*\phi - v^2) = 0}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = +ie(\phi^*\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}^\nu\phi^*)$$

$$\underbrace{\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie(\phi^*\mathcal{D}^\nu\phi - \phi\mathcal{D}^\nu\phi^*) = 0}$$

Есть 5 уравнений и 2 неизвестные ф-и R и F.

$$0 = \mathcal{D}_\mu^2\phi + 2\lambda\phi(\phi^*\phi - v^2) = -\mathcal{D}_i^2\phi + 2\lambda\phi(R^2 - v^2) =$$

$$= -(\partial_i - ieA_i)^2\phi + 2\lambda\phi(R^2 - v^2) =$$

$$= -(\vec{\nabla} + ie\vec{A})^2\phi + 2\lambda\phi(R^2 - v^2)$$

При этом

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \left(\bar{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \bar{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cancel{\bar{e}_z\frac{\partial}{\partial z}}^{\,0}\right)\vec{e}_\varphi A(\rho) =$$

$$= \underbrace{\cancel{(\bar{e}_\rho\bar{e}_\varphi)}}_{0}\cdot A'(\rho) + \underbrace{\bar{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi^{\,2} = 0}\frac{1}{\rho}A(\rho) = 0$$

Поэтому

$$0 = \vec{\nabla}^2\phi + 2ie\vec{A}\vec{\nabla}\phi - e^2\vec{A}^2\phi - 2\lambda\phi(R^2 - v^2)$$

$$0 = \left(\vec e_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 \cdot R e^{in\varphi} + 2ie\cdot \cancel{\vec e_\varphi} \left(-\frac{n}{e\rho}\right)\cdot$$

$$\cdot(1-F)\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Re^{in\varphi}\right)\cancel{\vec e_\varphi} - e^2\frac{n^2}{e^2\rho^2}(1-F)^2 R\, e^{in\varphi} -$$

$$- 2\lambda R e^{in\varphi}(R^2-v^2)$$

Очевидно, что $e^{in\varphi}$ сократится

$\Rightarrow$

$$0 = R''(\rho) + \frac{1}{\rho^2}(-n^2)R + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho} \overbrace{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial\varphi}}^{\vec e_\varphi}\cdot R'(\rho)$$

$$+ 2i\cancel{e}\left(-\frac{n}{\cancel{e}\rho}\right)(1-F)\frac{1}{\rho}\cdot \cancel{i}n\cdot R - \frac{n^2}{\rho^2}(1-2F+F^2)R$$

$$- 2\lambda R(R^2-v^2)$$

$$0 = R'' + \frac{1}{\rho}R' - \cancel{\frac{n^2}{\rho^2}R} + \frac{2n^2}{\rho^2}(\cancel{1}-\cancel{F})R - \frac{n^2}{\rho^2}(\cancel{1}-\cancel{2F}+F^2)R$$

$$- 2\lambda R(R^2-v^2)$$

$$\boxed{0 = R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{n^2}{\rho^2}F^2R - 2\lambda R(R^2-v^2)}$$

Уравнение движения для калибровочного поля:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie(\phi^* D^\nu\phi - \phi D^\nu\phi^*) = 0$$

При $\partial = 0$ это уравнение удовлетворяется тождественно – очевидно. (13)

Если $\partial = i$, имеем:

$$0 = \partial^\mu F_{\mu i} + ie(\phi^* \mathcal{D}_i \phi - \phi \mathcal{D}_i \phi^*) = -\partial_j F_{ji} +$$

$$+ ie(\phi^* \mathcal{D}_i \phi - \phi \mathcal{D}_i \phi^*) = -\partial_j(\partial_j A_i - \cancel{\partial_i A_j}) +$$

$$+ ie(\phi^*(\partial_i - ieA_i)\phi - \phi(\partial_i + ieA_i)\phi^*)$$

$$0 = +\vec{\nabla}^2 \vec{A} + ie\left[\phi^*(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\phi - \phi(\bar{\nabla} - ie\bar{A})\phi^*\right]$$

$$= \left(\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \bar{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot \vec{e}_\varphi A(\rho) + ie\left[R e^{-in\varphi} \cdot \left(\cancel{\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho}}\right.\right.$$

$$+ \bar{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + ie\,\vec{e}_\varphi A(\rho)\Big) \cdot R e^{in\varphi} - R e^{+in\varphi}\Big(\cancel{\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho}}$$

$$\left.+ \bar{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} - ie \cdot \bar{e}_\varphi A(\rho)\Big) \cdot R e^{-in\varphi}\right]$$

$$0 = A''(\rho) \cdot \vec{e}_\varphi + \left(\bar{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\bar{e}_\rho\right) \cdot \bar{e}_\varphi A'(\rho) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\vec{e}_\varphi A$$

$$+2ieR^2\left[\frac{1}{\rho} \cdot in + ieA(\rho)\right]\vec{e}_\varphi$$

– видно, что остаются только слагаемые, пропорциональные $\bar{e}_\varphi$.

$$\bar{e}_\varphi \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \varphi} = 1\ ; \qquad \frac{\partial^2 \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi^2} = -\vec{e}_\varphi$$

$$0 = A'' + \frac{1}{\rho}A' - \frac{1}{\rho^2}A - 2eR^2\left(\frac{n}{\rho} + eA\right)$$

где $\quad A(\rho) = -\frac{n}{e\rho}\left(1 - F(\rho)\right)$

$$A' = \frac{n}{e\rho^2}(1-F) + \frac{n}{e\rho}F'$$

$$A'' = -\frac{2n}{e\rho^3}(1-F) - \frac{2nF'}{e\rho^2} + \frac{n}{e\rho}F''$$

Поэтому

$$0 = \frac{n}{e\rho}F'' - \underline{\frac{2nF'}{e\rho^2}} - \frac{2n}{e\rho^3}(\cancel{1}-\cancel{F}) + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{n}{e\rho^2}(\cancel{1}-\cancel{F}) + \underline{\frac{1}{\rho}\frac{n}{e\rho}F'}$$

$$+ \frac{n}{e\rho^3}(\cancel{1}-\cancel{F}) - 2eR^2\left(\cancel{\frac{n}{\rho}} - \frac{n}{\rho}(\cancel{1}-F)\right)$$

$$0 = \frac{n}{e\rho}F'' - \frac{nF'}{e\rho^2} - 2eR^2F\cdot\frac{n}{\rho} \quad \Big| \; \frac{e\rho}{n}$$

$$\boxed{0 = F'' - \frac{1}{\rho}F' - 2e^2R^2F}$$

т.о. для функций $F(\rho)$ и $R(\rho)$ получилась система уравнений

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{n^2}{\rho^2}F^2R - 2\lambda R(R^2 - \sigma^2) = 0 \\ F'' - \frac{1}{\rho}F' - 2e^2R^2F = 0 \end{cases}$$

— 2 ур-я и 2 неизвестных.

Дополнительное условие:

Граница $\rho \to \infty$: $R \to \vartheta$; $F \to 0$

Граница $\rho \to 0$: $R \to 0$; $F \to 1$

(При $\rho \to 0$ это получается из условия отсутствия сингулярностей)

	$\rho \to \infty$	$\rho \to 0$
R	ϑ	0
F	0	1

Более точно оценим асимптотики решения:

При $\underline{\rho \to 0}$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{n^2}{\rho^2} R \simeq 0$$

$$R = c \cdot \rho^\alpha \implies \alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$$

$$\alpha = \pm n$$

$$\implies \underline{R \simeq const \cdot \rho^{|n|}}$$

$$F'' - \frac{1}{\rho} F' \simeq 0 \qquad F = c \cdot \rho^\alpha \implies \alpha(\alpha-1) - \alpha = 0$$

$$\implies \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 2$$

$$\implies \underline{F \simeq 1 - const \cdot \rho^2}$$

При $\rho \to \infty$

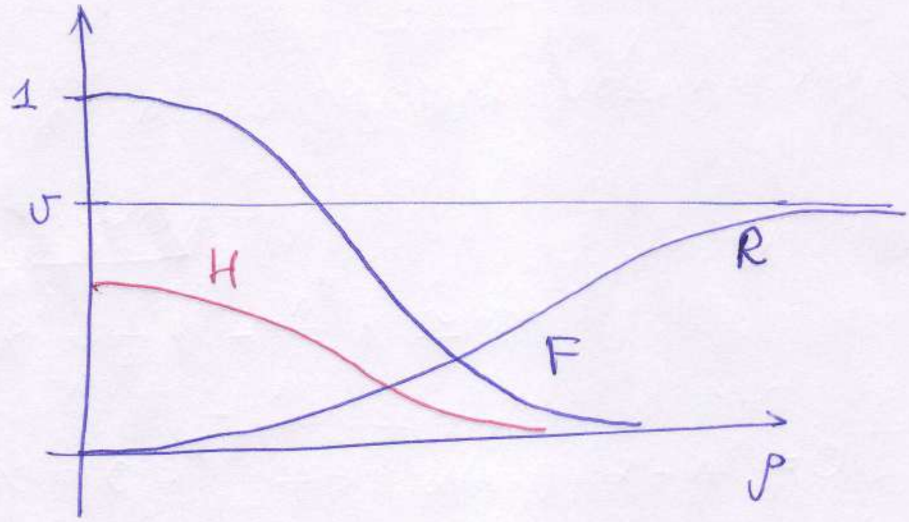
$$F'' - 2e^2 v^2 F \simeq 0$$

$$F \simeq const \cdot e^{-\sqrt{2} e v \rho} \qquad \Big| \; F \simeq const \cdot e^{-m_A \cdot \rho}$$

$$R \equiv v + P$$

$$P'' - 2\lambda v \cdot 2vP \simeq 0$$

$$R \simeq -const \cdot e^{-2\sqrt{\lambda} v \rho} + v \qquad \Big| \; R \simeq v - const\, e^{-m_P \rho}$$



Заметим, что

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - \lambda \left(|\phi|^2 - v^2 \right)^2$$

в спектре частиц содержит массивное векторное поле массы

$$m_A = \sqrt{2}\, e v$$

и вещественный скаляр массы

$$m_P = 2v\sqrt{\lambda}$$

Магнитное поле

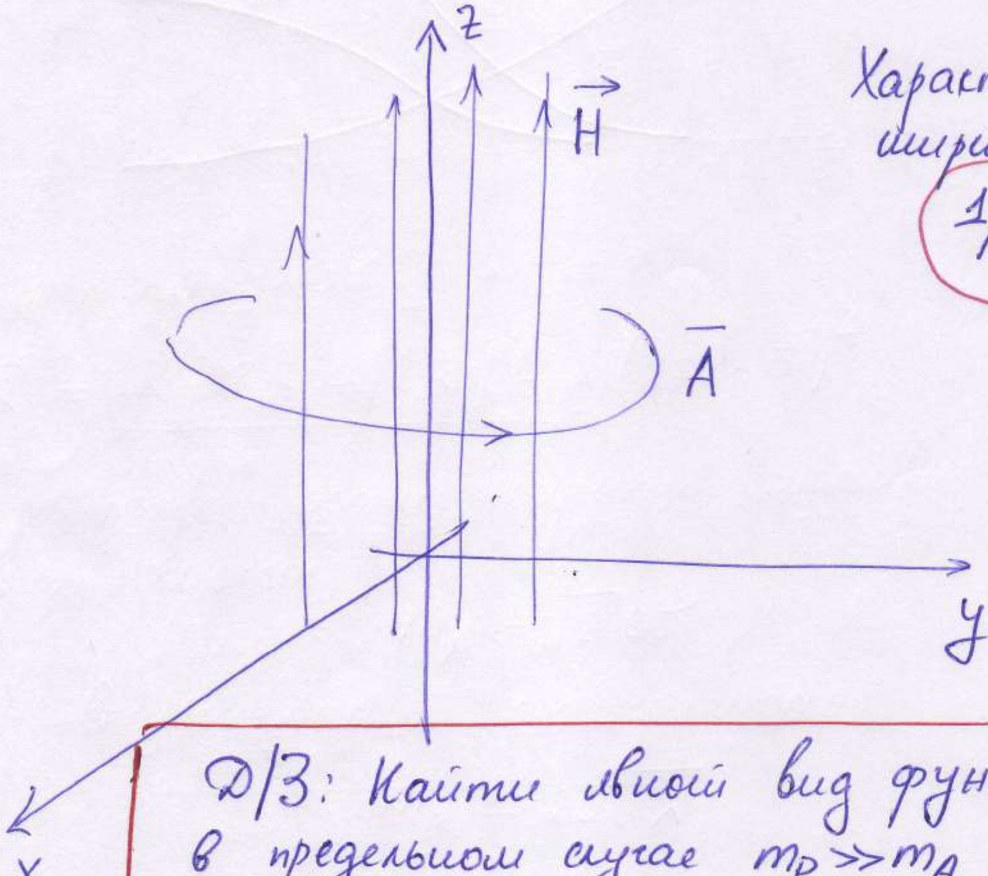
$$\vec H = \mathrm{rot}\,\vec A = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \bar e_\rho & \rho \bar e_\varphi & \bar e_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \cancel{\partial/\partial z} \\ \cancel{A_\rho} & \rho A_\varphi & \cancel{A_z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\cdot \bar e_z \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A) = \vec e_z \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[-\frac{n}{e\cancel{\rho}}(1-F)\cdot\cancel{\rho}\right]$$

$= \vec e_z \frac{1}{\rho}\cdot\frac{n}{e}F'$ – направлено по оси z.

При $\rho \to \infty$ $\quad H \sim e^{-m_A\rho}\cdot \mathrm{const}$

При $\rho \to 0$ $\quad F' \simeq \mathrm{const}\cdot\rho \Rightarrow H \simeq \mathrm{const}$.



Характерная ширина $1/m_A$

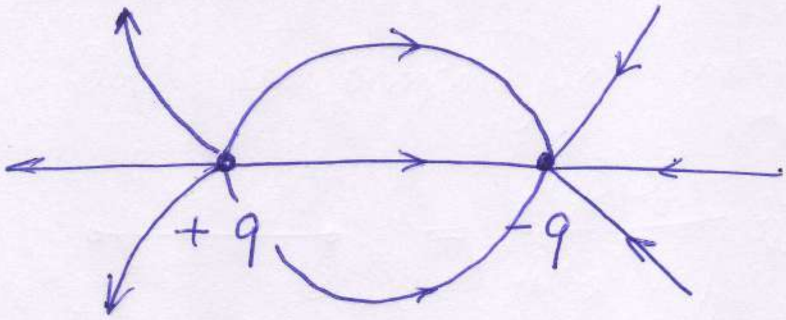
Д/З: Найти явный вид функций R и F в предельном случае $m_P \gg m_A$ и в логарифм. приближении оценить $\Delta E/\Delta z$

Магнитный поток через плоскость xy:

$$\int \bar{H}\,d\bar{S} = \int\limits_0^\infty \cancel{\rho}\,d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{\cancel{\rho}} \cdot \frac{n}{e} F'(\rho) = \frac{2\pi n}{e}\Big(F(\infty) -$$

$$- F(0)\Big) = \frac{2\pi n}{e}(0-1) = -\frac{2\pi n}{e} \quad \text{- верно.}$$

Вихревые линии Абрикосова и конфайнмент:



- заряды в эл/д.

- кварки

- возникает линейно растущий потенциал.

Отличие:

1) Электрическое поле, а не магнитное

2) Другая модель, причём важна неабелевость.

Глава III. Магнитный монополь Дирака

Магнитный заряд (монополь)

$$\vec{H} = g\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \qquad (\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,\ \hbar = c = 1)$$

Вычислим $\operatorname{div}\vec{H}$ и сравним с ур-ем $\operatorname{div}\vec{H} = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{H} = \vec{\nabla}\left(g\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}\right) = \frac{g}{4\pi}\left[\frac{\vec{\nabla}\vec{r}}{r^3} + \vec{r}\,\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right] =$$

$$= \frac{g}{4\pi}\left[\frac{3}{r^3} + \vec{r}\,\frac{(-3)}{r^4}\vec{\nabla}r\right] = \left[\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}\right] =$$

$$= \frac{g}{4\pi}\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\cdot r^2\right] = 0$$

Однако

$$\int dV \operatorname{div}\vec{H} = \oint \vec{H}\,d\vec{S} = 4\pi r^2\cdot\frac{g}{4\pi r^2} = g$$

$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{H} \neq 0$ из-за сингулярности при $\vec{r} = 0$.

Аккуратно $\operatorname{div}\vec{H} = g\,\delta^3(\vec{r})$.

– отклонения от $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ только на очень малых расстояниях, где эл./д. может не работать.

Поскольку $\operatorname{div} \bar{H} = 0$ почти везде, то можно попробовать вычислить векторный потенциал:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} =$$

$$= \vec{e}_r \frac{g}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi \end{vmatrix}$$

Сравнивая коэффициенты при векторах локального базиса, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\varphi) - \cancel{\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)} = \dfrac{g}{4\pi}\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,A_\varphi) - \cancel{\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi}} = 0 \\ \cancel{\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)} - \cancel{\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}} = 0 \end{cases}$$

Поскольку решение определено с точностью до калибровочного преобразования, то можно попробовать занулить некоторые компоненты:

Положим $A_r = A_\theta = 0$ – третье ур-е верно

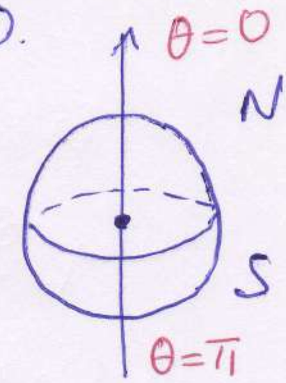
Из первого $r\sin\theta\,A_\varphi = \dfrac{g}{4\pi}(-\cos\theta + c)$

где $c = const$

– тогда и 2-е автоматически верно.

т.о. решением будет

$$A_\varphi = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(c-\cos\theta) \qquad A_r = A_\theta = 0.$$



В векторном виде

$$\vec{A} = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(c-\cos\theta)\vec{e_\varphi}$$

— это решение имеет сингулярности при $\theta = 0, \pi$, т.е. на оси z.

Сингулярность при $\theta = 0$ можно устранить выбором константы c: Если $c = 1$, то

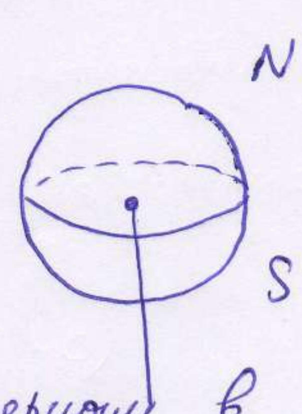
$$\vec{A_N} = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(1-\cos\theta)\vec{e_\varphi}$$

при $\theta \to 0$ ведёт себя как

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \simeq \frac{1-(1-\theta^2/2)}{\theta} \simeq \theta/2 \to 0$$

— сингулярность исчезает.

Однако при $\theta \to \pi$



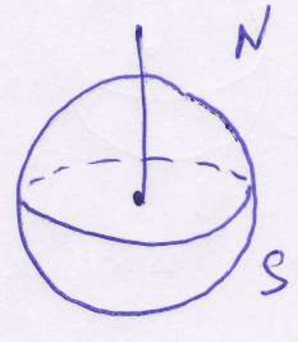
$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \simeq \frac{2}{\pi-\theta} \to \infty$$

— решение $\bar{A}_N$ оказывается регулярным в верхней полусфере и сингулярной на нижней полуоси оси z.

Аналогичным образом можно взять $c=-1$.

тогда $\vec{A}_S = -\frac{g}{4\pi r\sin\theta}(1+\cos\theta)\vec{e}_\varphi$

— сингулярно при $\theta=0$, гладко при $\theta=\pi$



$$\vec{A}_N - \vec{A}_S = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(1-\cancel{\cos\theta})\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(1+\cancel{\cos\theta})\vec{e}_\varphi = \frac{g}{2\pi r\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$

Эту величину можно представить в виде градиента:

$$\bar{A}_N - \bar{A}_S = \frac{g}{2\pi}\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\alpha \quad \text{, где } \alpha = \frac{g}{2\pi}\cdot\varphi,$$

поскольку

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\bar{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \bar{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \overset{?}{=} 0$ Как получить правильный магнитный поток?

$$\oint \bar{H}d\bar{S} = \int_N \bar{H}d\bar{S} + \int_S \bar{H}d\bar{S} = \oint_{\text{экв.}}(\bar{A}_N - \bar{A}_S)d\vec{l} =$$

$$= \oint d\vec{l}\,\vec{\nabla}\alpha = \alpha(2\pi) - \alpha(0) = \frac{g}{2\pi}(2\pi - 0) = g \text{ — верно.}$$

Предположим, что в теории также имеется скалярное поле. Тогда

$$\phi \to e^{-ie\alpha}\phi$$

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha = A_\mu - \frac{1}{ie} e^{-ie\alpha} \partial_\mu e^{i\alpha e}$$

Чтобы скалярное поле оставалось бы однозначным при преобразовании от $\bar{A}_N$ к $\bar{A}_S$ нужно, чтобы

$$e^{-ie\alpha(2\pi)} = e^{-ie\alpha(0)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-ie(\alpha(2\pi)-\alpha(0))} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = \frac{2\pi n}{e}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ - целое число.

Но $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = g \Rightarrow$

$$\boxed{ge = 2\pi n}$$ - условие квантования магнитного заряда Дирака.

Д/З Построить функцию Лагранжа заряженной частицы в поле тяжелого магнитного монополя и найти закон движения в квадратурах.

Глава IV. Некоторые сведения об отображениях сфер

В теории классических решений часто возникают отображения сферы в сферу. Например, для вихревой линии

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta z} = \int dx dy \left(\frac{1}{2} \bar{H}^2 + |\mathcal{D}_i \phi|^2 + \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 \right) < \infty$$

если $\partial/\partial t = 0$ и $A_0 = 0$

$\Rightarrow$ при $\rho \to \infty$ $\phi^*\phi = v^2$

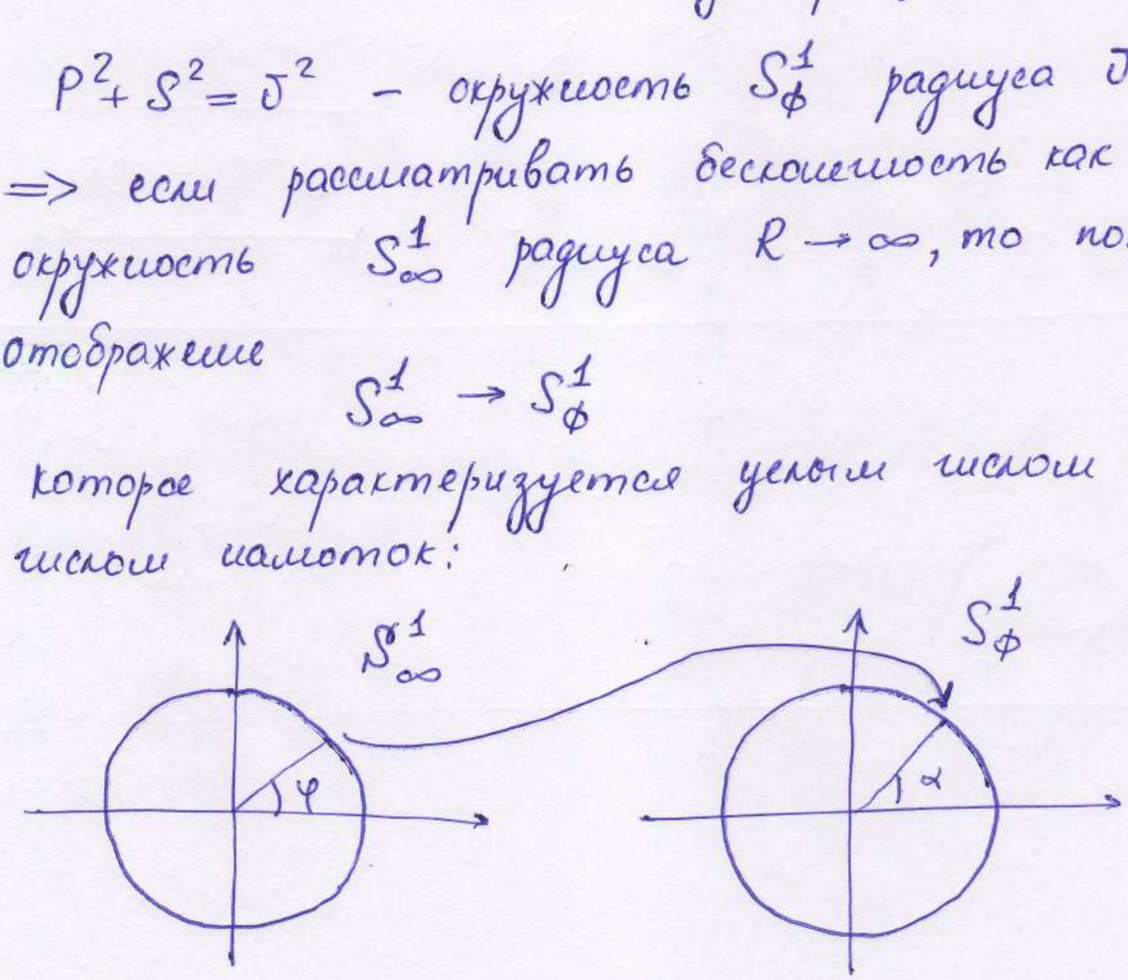
Положим $\phi \equiv P + iS$. Тогда при $\rho \to \infty$

$P^2 + S^2 = v^2$ – окружность S^1_ϕ радиуса v.

$\Rightarrow$ если рассматривать бесконечность как окружность S^1_∞ радиуса $R \to \infty$, то получим отображение

$$S^1_\infty \to S^1_\phi$$

которое характеризуется целым числом – числом намоток:

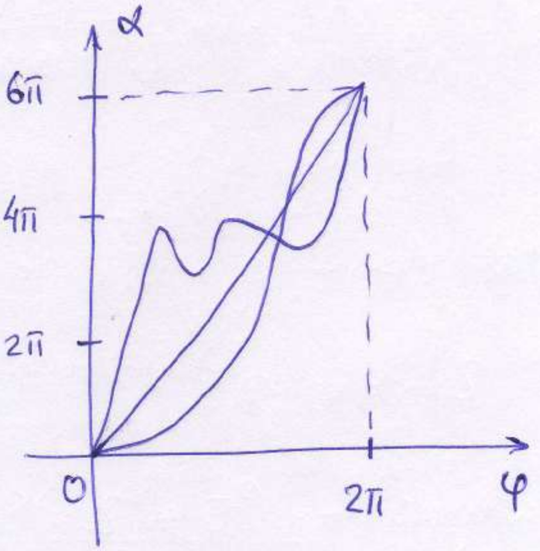


Отображение $\alpha = \alpha(\varphi)$ очевидно должно удовлетворять условию

$$e^{i\alpha(2\pi)} = e^{i\alpha(0)} \quad \text{и} \Rightarrow \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi n$$

Важно, что калибровочные преобразования соответствуют гладким деформациям

$$\phi \to e^{-ie\alpha_0(\varphi)}\phi \quad \sim \quad \alpha(\varphi) \to \alpha(\varphi) - e\alpha_0(\varphi)$$



При этом

$$n = \frac{1}{2\pi}\left[\alpha(2\pi) - \alpha(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{d\alpha}{d\varphi} =$$

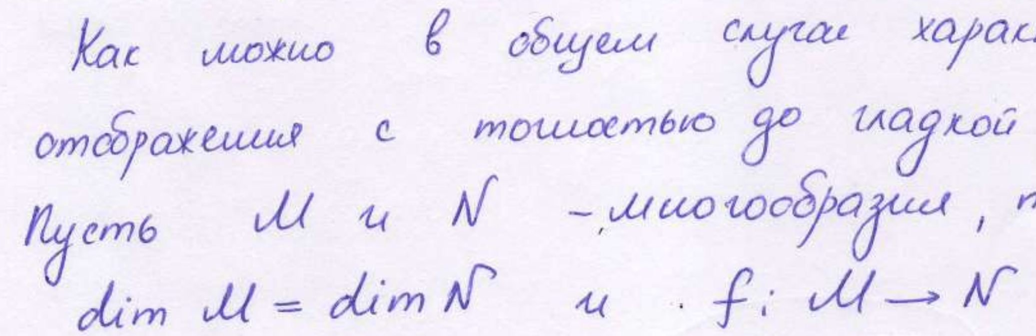
$$= \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{d\alpha}{d\varphi}$$

— эта формула не случайна.

Как можно в общем случае характеризовать отображения с точностью до гладкой деформации?

Пусть M и N — многообразия, т.ч.

$$\dim M = \dim N \quad \text{и} \quad f: M \to N$$



x — координаты в M $\qquad$ y — координаты в N.

Рассмотрим т. $y_0 \in N$. Она может иметь несколько прообразов x_i

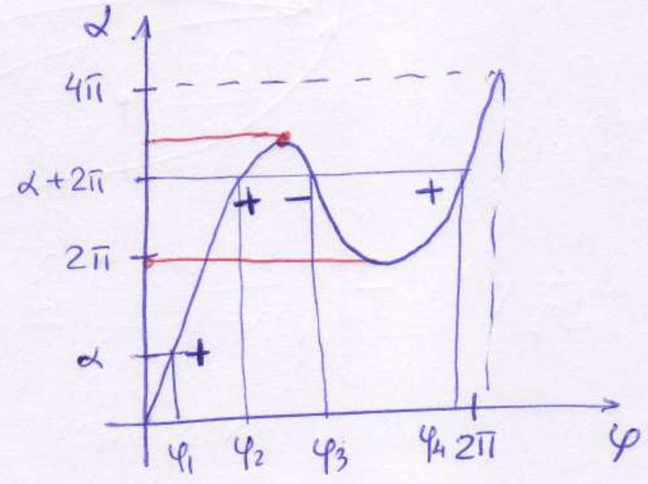
т. y_0 называется регулярной т. отображения f, если $\forall\, i$ $\det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(x_i) \neq 0$.

Опред. Степень отображения

$$\deg f \equiv \sum_{x_i:\, f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(x_i), \text{ где}$$

y_0 – регулярная т. отображения f.

Пример.



Утв. Нерегулярные точки имеют меру 0 в N. (см. рис.)

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \operatorname{sgn} \frac{d\alpha}{d\varphi}$$

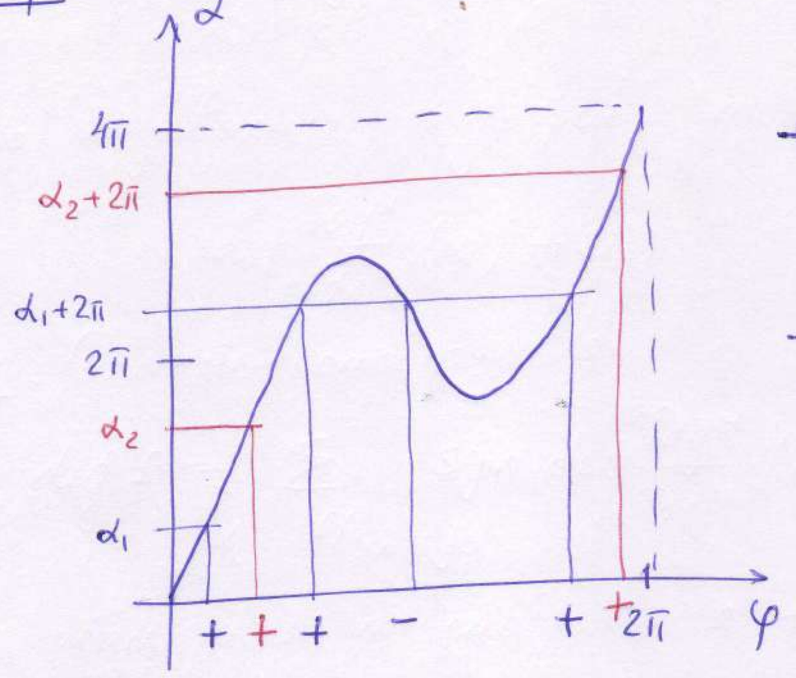
$$\deg f = +1+1-1+1 = 2 \quad \left(= \frac{1}{2\pi}\big(\alpha(2\pi) - \alpha(0)\big)\right)$$

Утв. 1. Степень отображения не зависит от выбора регулярной точки

2. Степень отображения не меняется при гладких деформациях

(Без доказательства)

Пример



$+1+1-1+1=$

$=+1+1$

– независимость от регулярной точки

Независимость от гладкой деформации – всегда получается $\frac{1}{2\pi}\left[\alpha(2\pi)-\alpha(0)\right]=n$.

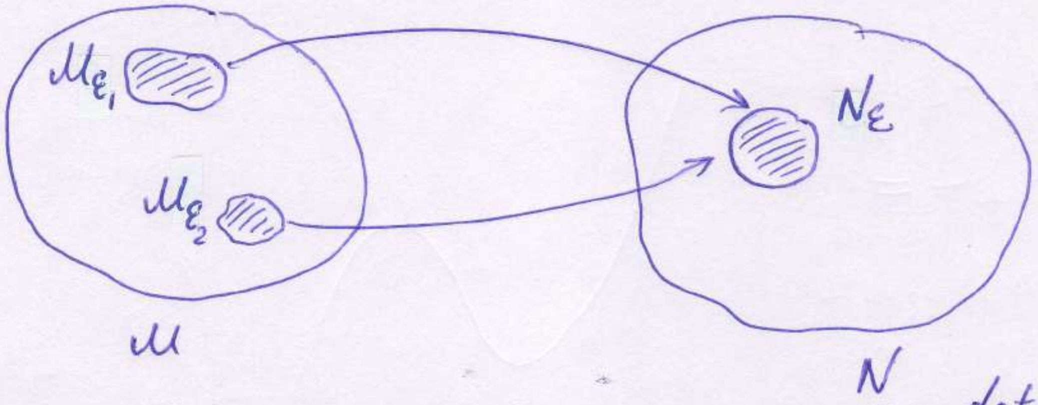
Утв. Два гладких отображения f_1 и $f_2: M\to S^n$ где M – n-мерное ориентированное замкнутое многообразие связаны гладкой деформацией $\Longleftrightarrow$ их степени совпадают.

В частности отображения $S^n\to S^n$ с точностью до гладкой деформации однозначно характеризуются степенью отображения $\deg f$.

Как вычислять степень отображения?

Рассмотрим отображение $f: \underset{(x)}{M}\to \underset{(y)}{N}$

$y^\alpha=y^\alpha(x^\beta)$



Пусть ε – ок-сть рег. т. y_0, т.ч. $\det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \neq 0$ в этой ок-сти.

Там где отображение однозначно

$$\int\limits_{M_{\varepsilon_i}} d^n x \left|\det\frac{\partial y}{\partial x}\right| = \int\limits_{N_\varepsilon} d^n y$$

Но $\operatorname{sgn}\det\frac{\partial y}{\partial x}$ везде одинаков, т.ч.

$$\int\limits_{M_{\varepsilon_i}} d^n x \det\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{sgn}\det\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\int\limits_{N_\varepsilon} d^n y$$

Суммируем по всем прообразам.

$$\sum_i \int\limits_{M_{\varepsilon_i}} d^n x \det\frac{\partial y}{\partial x} = \sum_i \operatorname{sgn}\det\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\int\limits_{N_\varepsilon} d^n y =$$

$$= \deg f\cdot\int\limits_{N_\varepsilon} d^n y$$

Затем, используя независимость $\deg f$ от выбора регулярной точки, суммируем по окрестностям:

$$\int\limits_{M} d^n x \det\frac{\partial y}{\partial x} = \deg f\cdot\int\limits_{N} d^n y$$

т.о.

$$\deg f = \frac{\int\limits_M d^n x \det \frac{\partial y}{\partial x}}{\int\limits_N d^n y}$$

<u>Пример:</u> $S^1 \to S^1$

$$\deg f = \frac{1}{\int\limits_0^{2\pi} d\alpha} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha(2\pi) - \alpha(0)\right) = n$$

Далее нам потребуются отображения сфер $S^n \to S^n$.

Вычислим объём S^n (т.е. площадь поверхности)

Рассмотрим

$$I \equiv \int d^{n+1}x\, e^{-\vec{x}^2} = \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right)^{n+1} = \left(\sqrt{\pi}\right)^{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}.$$

С другой стороны, если Ω_n – объём S^n, то

$$I = \Omega_n \int\limits_0^{\infty} dx \cdot x^n e^{-x^2} = \left[t = x^2;\ dt = 2x\,dx\right]$$

$$= \Omega_n \int\limits_0^{\infty} dt \cdot \frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Omega_n \int\limits_0^{\infty} dt \cdot t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} =$$

$$= \frac{1}{2}\Omega_n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \text{и} \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

<u>Примеры</u> 1) Окружность S^1:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi^{(1+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)} = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$$

2) Сфера S^2:

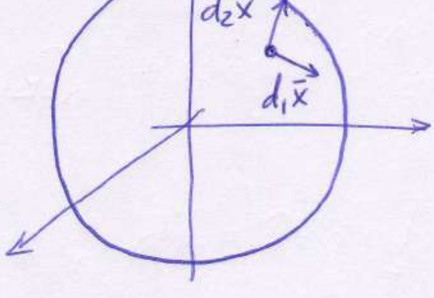
$$\Omega_2 = \frac{2\pi^{(2+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}}{1/2\,\Gamma(1/2)} = \frac{4\pi^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = 4\pi$$

3) Сфера S^3:

$$\Omega_3 = \frac{2\pi^{(3+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi^2}{1\cdot\Gamma(1)} = 2\pi^2.$$

Запишем теперь элемент объёма (площади поверхности) на сфере S^n в <u>декартовых</u> координатах.

Начинаем с S^2:



Пусть $d_1\vec{x}$ и $d_2\vec{x}$ — бесконечно малые вектора в касательной плоскости.

Тогда $dS = \left|[d_1\vec{x} \times d_2\vec{x}]\right|$, а $d\vec{S} = [d_1\vec{x} \times d_2\vec{x}]$

$$dS_i = \varepsilon_{ijk}\, d_1x_j\, d_2x_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(d_1x_j\, d_2x_k - d_1x_k\, d_2x_j\right)$$

$$\equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\, dx_j \wedge dx_k \quad \text{где}$$

$$dx_j \wedge dx_k \equiv d_1 x_j \, d_2 x_k - d_1 x_k \, d_2 x_j = - dx_k \wedge dx_j$$

$$\varepsilon_{imn} \Big| \; dS_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \, dx_j \wedge dx_k$$

$$\varepsilon_{imn} \, dS_i = \frac{1}{2} \left(\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj} \right) dx_j \wedge dx_k =$$

$$= \frac{1}{2} \left(dx_m \wedge dx_n - dx_n \wedge dx_m \right) = dx_m \wedge dx_n$$

$$dS' = \frac{x_i}{R} \, dS_i = \frac{1}{2R} \varepsilon_{ijk} \, x_i \, dx_j \wedge dx_k .$$

Аналогичным образом для S^n строим $d_1 \vec{x} \ldots d_n \vec{x}$

$$dS_i = \varepsilon_{ij_1 \ldots j_n} \, d_1 x_{j_1} \, d_2 x_{j_2} \ldots dx_{j_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij_1 \ldots j_n} \, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n}$$

где $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n} \equiv \sum\limits_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \, d_1 x_{\sigma(j_1} \, d_2 x_{j_2} \ldots d_n x_{j_n)}$

Обратная формула:

$$\varepsilon_{ij_1 \ldots j_n} \, dS_i = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n}$$

$$dS = \frac{x^i}{n! \, R} \varepsilon_{ij_1 \ldots j_n} \, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n}$$

Примеры 1) Окружность S^1:

$$dS = \frac{x^i}{R} \varepsilon_{ij} \, dx_j = \frac{1}{R} \left(x \, dy - y \, dx \right)$$

$x = \rho \cos\varphi \qquad dx = d\rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi \, d\varphi$

$y = \rho \sin\varphi \qquad dy = d\rho \sin\varphi + \rho \cos\varphi \, d\varphi$

$$dS = \frac{1}{R}\Big[\rho\cos\varphi\,(\cancel{d\rho\sin\varphi} + \rho\cos\varphi\,d\varphi) - \rho\sin\varphi\,\cdot$$

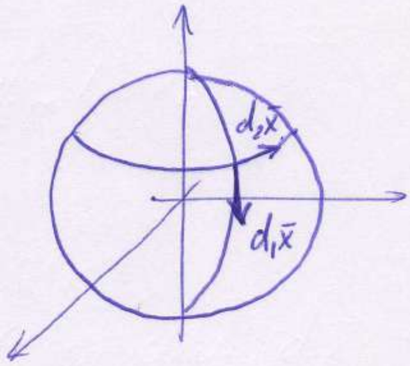
$$\cdot(\cancel{d\rho\cos\varphi} - \rho\sin\varphi\,d\varphi)\Big] = \frac{\rho^2}{R}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi\Big|_{\rho=R} =$$

$$= R\,d\varphi$$

---

2) Сфера S^2:

$$d_{\alpha}S = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{x_i}{R}\,dx_j\wedge dx_k$$



Возьмём

$$\begin{cases} d_1\vec{x} = \vec{e}_\theta\,R\,d\theta \\ d_2\vec{x} = \vec{e}_\varphi\,R\sin\theta\,d\varphi \end{cases}$$

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{e}_r\cdot 2\left[\bar{e}_\theta R\,d\theta\times\bar{e}_\varphi R\sin\theta\,d\varphi\right] = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Д/З: Найти меру интегрирования на сфере S^n в обобщённых сферических координатах

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cos\theta_n \\ x_{n+1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n \end{cases}$$

Глава V. Магнитный монополь т'Хофта-Полякова

§1. Рассматриваемая теория

Рассмотрим теорию Янга-Миллса с калибровочной группой $G = SU(2)$ и скалярным полем в Adj.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi_a)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_a^2 - v^2)^2$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = ie F^a_{\mu\nu} t^a$$

$$A_\mu = ie A^a_\mu t^a \qquad [t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$$

$$\Rightarrow F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - e f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Для группы $SU(2)$ $t^a = \sigma^a/2$, $a = \overline{1,3}$, $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$

поэтому

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - e\,\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Ковариантная производная:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie A^a_\mu (T^a_{Adj})\phi$$

где $(T^a_{Adj})_{bc} = -i f_{abc} \overset{SU(2)}{=} -i\varepsilon_{abc}$

Поэтому

$$\mathcal{D}_\mu \phi_b = \partial_\mu \phi_b + ie A^a_\mu (T^a_{Adj})_{bc} \phi_c$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_b = \partial_\mu \phi_b + e A_\mu^a f^{abc} \phi_c$$

Переименовывая индексы, получаем, что для группы $SU(2)$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a - e\,\varepsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c$$

В теории имеет место СНС. Действительно, выбираем вакуум в виде

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \qquad H = U(1),\ \text{т.е.}\ SU(2) \to U(1)$$

тогда в унитарной калибровке $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix}$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \begin{pmatrix} -e A_\mu^1 v \\ +e A_\mu^2 v \\ \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} + \text{малые величины следующих порядков.}$$

Поэтому в квадратичном приближении

$$\mathcal{L} \simeq -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^3 - \right.$$

$$\left. - \partial_\nu A_\mu^3\right)^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 \left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2\right) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - 2\lambda v^2 \varphi^2$$

т.е. $m_{A^1}^2 = e^2 v^2$; $m_{A^2}^2 = e^2 v^2$

$$m_\varphi^2 = 4\lambda v^2$$

а поле A_μ^3 остаётся безмассовым и соответствует ненарушенной $U(1)$.

При низких энергиях, когда можно удалить все массивные поля

$$\mathcal{L} \Longrightarrow -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3\right)^2$$

– получается эл/д.

т.о. при низких энергиях рассматриваемая теория сводится к электродинамике.

Если $\Phi_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то безмассовым полем будет A_μ^1

Если $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$, то безмассовое поле – A_μ^2.

Если $\Phi_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ где $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2$, то

безмассовым полем будет $\frac{1}{v} v^a A_\mu^a$.

Действительно,

$$\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \Phi_a)^2 \longrightarrow e^2 \cdot \varepsilon_{abc} A_\mu^b v^c \cdot \varepsilon_{ade} A_\mu^d v^e =$$

$$= e^2 \left(\delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}\right) A_\mu^b v^c A_\mu^d v^e =$$

$$= e^2 \left(\delta_{bd} v^2 - v_b v_d\right) A_\mu^b A_\mu^d$$ – видно, что массу приобретают только поперечные компоненты калибровочного поля:

$$A_\mu^a = \frac{1}{v^2} v^a v^b A_\mu^b + \left(\delta^{ab} - \frac{1}{v^2} v^a v^b\right) A_\mu^b \equiv A_\mu^{\parallel a} + A_\mu^{\perp a}$$

Что будет представлять собой напряженность (36)
низкоэнергетического поля?

Рассмотрим величину

$$\underset{u(1)}{F_{\mu\nu}} \equiv n^a F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{e}\varepsilon^{abc} n^a \mathcal{D}_\mu n^b \mathcal{D}_\nu n^c$$

где $n^a \equiv \phi^a/\phi$ где $\phi \equiv \sqrt{\phi_a^2}$

– единичный вектор направленный по ϕ.

Если $n \equiv ie n^a t^a$, $F_{\mu\nu} \equiv ie F^a_{\mu\nu} t^a$, то

$$\underset{u(1)}{F_{\mu\nu}} = -\frac{2}{e^2}\operatorname{tr}(nF_{\mu\nu}) + \frac{2}{e^4}\operatorname{tr}\left(n[\mathcal{D}_\mu n, \mathcal{D}_\nu n]\right) =$$

$$= \cancel{-}\frac{2}{\cancel{e^2}}\operatorname{tr}\left(\cancel{ie}n^a t^a \cdot \cancel{ie}F^b_{\mu\nu} t^b\right) + \frac{2}{\cancel{e^4}}\operatorname{tr}\left(i\cancel{e}n^a t^a \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[i\cancel{e}\mathcal{D}_\mu n^b t^b, i\cancel{e}\mathcal{D}_\nu n^c t^c\right]\right) = n^a F^a_{\mu\nu} + \frac{i^4 \cdot 2}{2e} n^a \cdot \mathcal{D}_\mu n^b \cdot$$

$$\cdot \mathcal{D}_\nu n^c \cdot \varepsilon^{abc} = n^a F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{e}\varepsilon^{abc} n^a \mathcal{D}_\mu n^b \mathcal{D}_\nu n^c$$ – верно.

$\Rightarrow \underset{u(1)}{F_{\mu\nu}}$ – калибровочно инвариантная величина.

Если $n_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $\mathcal{D}_\mu n_a = \partial_\mu n_a - e\,\varepsilon_{abc} A^b_\mu n_c$

$$= \begin{pmatrix} -eA^2_\mu \\ eA^1_\mu \\ 0 \end{pmatrix}$$ и $\Rightarrow$ $\boxed{\underset{u(1)}{F_{\mu\nu}}} = \partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu - e\,\varepsilon^{3ab} \cdot$

$$\cdot A^a_\mu A^b_\nu + \frac{1}{e}\varepsilon^{3ab}\mathcal{D}_\mu n^a \mathcal{D}_\nu n^b =$$

$$= \boxed{\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu} - e\left(\cancel{A^1_\mu A^2_\nu} - \cancel{A^2_\mu A^1_\nu}\right) - e\left(\cancel{A^2_\mu A^1_\nu} - \cancel{A^1_\mu A^2_\nu}\right)$$

§2. Топологическая классификация монопольных решений и квантование магнитного заряда

Будем искать статические солитонные решения ($\partial/\partial t = 0$) в калибровке $A_0^a = 0$

Тогда

$$F_{0i}^a = \cancel{\partial_0 A_i^a} - \cancel{\partial_i A_0^a} - e\varepsilon^{abc}\cancel{A_0^b} A_i^c$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

(статичность) (калибровка)

$$\mathcal{D}_0\phi^a = \cancel{\partial_0\phi^a} - e\varepsilon^{abc}\cancel{A_0^b}\phi^c$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4}\left(F_{ij}^a\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}\left(F_{0i}^a\right)^2} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_0\phi^a\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_i\phi^a\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\phi_a^2 - v^2\right)^2 \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int d^3x \left\{ \frac{1}{4}\left(F_{ij}^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_i\phi^a\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\phi_a^2 - v^2\right)^2 \right\} < \infty$$

Поэтому при $r \to \infty$ $\quad \phi_a^2 - v^2 \to 0$

т.е. на S^2_∞ $\quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = v^2$ – точка на S^2_ϕ

$\Rightarrow$ получается отображение $S^2_\infty \to S^2_\phi$, которое характеризуется степенью отображения $n \equiv \deg f$.

Ранее было показано, что для отображения $f: \mathcal{M} \to N$

$$\deg f = \frac{1}{\int\limits_N d^n y} \int\limits_{\mathcal{M}} d^n x \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = [\text{формально}]$$

$$= \frac{1}{\int\limits_N d^n y} \int\limits_{\mathcal{M}} d^n y$$, где в последнем интеграле нужно выразить y через x.

т.к. $N = S^2_\phi$ имеет радиус v, то

$$\int\limits_N d^n y = 4\pi v^2$$

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d^n y = \int\limits_{S^2_\infty} d_i S_\phi = \int\limits_{S^2_\infty} \frac{1}{2v} \varepsilon^{abc} \phi^a d\phi^b \wedge d\phi^c$$

Поэтому формально

$$\deg f = \frac{1}{8\pi v^3} \int\limits_{S^2_\infty} \varepsilon^{abc} \phi^a d\phi^b \wedge d\phi^c = \frac{1}{8\pi v^3} \int\limits_{S^2_\infty} \varepsilon^{abc} \phi^a \cdot$$

$$\cdot \partial_i \phi^b dx^i \wedge \partial_j \phi^c dx^j = \frac{1}{8\pi v^3} \int\limits_{S^2_\infty} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c dx^i \wedge dx^j$$

$$= [dx^i \wedge dx^j = \varepsilon^{kij} dS_k] =$$

$$= \frac{1}{8\pi v^3} \int\limits_{S^2_\infty} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c \varepsilon^{kij} dS_k$$

Т.о. окончательно

$$\boxed{n = \deg f = \frac{1}{8\pi v^3}\int_{S^2_\infty} dS_k\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{abc}\phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c}$$

Вернёмся теперь к условию конечности энергии:
Очевидно, что при $r \to \infty$ $\quad \mathcal{D}_i \phi_a \to 0$

Решим это уравнение относительно калибровочного поля:

$$0 = \mathcal{D}_i\phi_a = \partial_i \phi_a - e\,\varepsilon_{abc} A_i^b \phi^c \quad \Big|\ \varepsilon^{ade}$$

$$0 = \varepsilon^{ade}\partial_i\phi_a - e\left(\delta^d_b \delta^e_c - \delta^e_b \delta^d_c\right) A_i^b \phi^c$$

$$0 = \varepsilon^{ade}\partial_i\phi_a - e\left(A_i^d \phi^e - A_i^e \phi^d\right) \quad \Big|\ \phi^d$$

$$0 = \varepsilon^{ade}\partial_i\phi_a\cdot\phi_d - e\left(\phi^d A_i^d \phi^e - A_i^e v^2\right)$$

Определим вектор $\quad A_i \equiv \frac{1}{v} A_i^a \phi^a$. Тогда

$$0 = e v^2 A_i^e - e v A_i \phi^e + \varepsilon^{ade}\partial_i \phi_a \cdot \phi_d$$

$$\Longrightarrow \quad A_i^e = \frac{1}{e v^2}\left[e v A_i \phi^e - \varepsilon^{ade}\partial_i \phi_a \phi_d\right]$$

$$\boxed{A_i^a = \frac{1}{e v^2}\varepsilon^{abc}\phi^b \partial_i \phi^c + \frac{1}{v} A_i \phi^a}$$

При произвольном A_i это будет решение, действительно,

$$0 \overset{?}{=} \partial_i \phi_a - e\varepsilon_{abc}\phi^c\left[\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{bde}\phi^d\partial_i\phi^e + \cancelto{0}{\frac{1}{v}A_i\phi^b}\right]$$

$$= \partial_i\phi_a + \frac{1}{v^2}\left(\delta_{ad}\delta_{ce} - \delta_{ae}\delta_{cd}\right)\phi^c\phi^d\partial_i\phi^e =$$

$$= \partial_i\phi_a + \frac{1}{v^2}\left(\phi_a\phi_e\partial_i\phi_e - v^2\partial_i\phi_a\right) = \frac{1}{2v^2}\phi_a\cdot\partial_i\left(\phi_e^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2v^2}\phi_a\partial_i v^2 = 0$$

Подставим полученное выражение для A_i^a в низкоэнергетический тензор поля $\underset{u(1)}{F_{ij}}$ $\left(\underset{u(1)}{F_{0i}} = 0\right)$

При $r\to\infty$

$$\underset{u(1)}{F_{ij}} = n^aF_{ij}^a + \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}n^a\mathcal{D}_in^b\mathcal{D}_jn^c \rightleftharpoons n^aF_{ij}^a =$$

$$= \frac{1}{v}\phi^aF_{ij}^a = \frac{1}{v}\phi^a\left(\partial_iA_j^a - \partial_jA_i^a - e\varepsilon^{abc}A_i^bA_j^c\right)$$

$$= \frac{1}{v}\phi^a\left[\partial_i\left(\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{abc}\phi^b\partial_j\phi^c + \frac{1}{v}A_j\phi^a\right) - \partial_j\left(\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{abc}\right.\right.$$

$$\left.\cdot\phi^b\partial_i\phi^c + \frac{1}{v}A_i\phi^a\right) - e\varepsilon^{abc}\left(\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{bef}\phi^e\partial_i\phi^f + \cancelto{0}{\frac{1}{v}A_i\phi^b}\right)$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{cmn}\phi^m\partial_j\phi^n + \cancelto{0}{\frac{1}{v}A_j\phi^c}\right)\right] =$$

[где было учтено, что $\partial_i\phi^a\cdot\phi^a = \frac{1}{2}\partial_i(\phi_a^2) = 0$]

$$= \frac{1}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c - \frac{1}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_j \phi^b \partial_i \phi^c$$

$$- \frac{1}{e v^5} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{bef} \varepsilon^{cmn} \phi^a \phi^e \partial_i \phi^f \phi^m \partial_j \phi^n + \partial_i A_j - \partial_j A_i =$$

$$= \frac{2}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c + \frac{1}{e v^5} \left(\delta_{ae} \delta_{cf} - \cancel{\delta_{af}} \delta_{ce} \right) \varepsilon^{cmn}$$

$$\underline{\phi^a} \phi^e \phi^m \underline{\partial_i \phi^f} \partial_j \phi^n + \partial_i A_j - \partial_j A_i =$$

$$= \frac{2}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c + \frac{1}{e v^3} \varepsilon^{cmn} \phi^m \partial_i \phi^c \partial_j \phi^n + \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

$$= \frac{1}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c + \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

т.о. при $r \to \infty$

$$\boxed{\underset{u(1)}{F_{ij}} = \frac{1}{e v^3} \varepsilon^{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c + \partial_i A_j - \partial_j A_i}$$

Магнитное поле низкоэнергетической теории имеет вид

$$\underset{u(1)}{H_i} = - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \underset{u(1)}{F_{jk}} = - \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - \frac{1}{2 e v^3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \cdot$$

$$\cdot \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c = - (\operatorname{rot} \vec{A})_i - \frac{1}{2 e v^3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c$$

Магнитный заряд представляет собой поток $\underset{u(1)}{\vec{H}}$ через S^2_∞:

$$\underline{g} = \oint_{S^2_\infty} d\vec{S}\,\vec{H}_{u(1)} = \underbrace{\oint_{S^2_\infty} d\vec{S}\,(-\operatorname{rot}\vec{A})}_{0} - \frac{1}{2ev^3}\int_{S^2_\infty} dS_i \,\cdot$$

$$\cdot\, \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\,\phi^a\partial_j\phi^b\partial_k\phi^c = \underline{-\frac{4\pi}{e}n}$$

где n - топологическое число.

Это согласуется с условием квантования магнитного заряда Дирака $ge = 2\pi n_g$ при $n_g = -2n = -2\deg f$.

§3. Структура солитонного решения

Рассмотрим частный случай $n=1$, где $n = \deg f$, $\quad f: S^2_\infty \to S^2_\phi$.

Частным случаем отображения с $n=1$ является тождественное отображение, при котором

$$\phi^a = v\,\frac{x^a}{r} \quad \text{при } r\to\infty$$

Убедимся, что действительно $n=1$:

$$n = \frac{1}{8\pi v^3}\int_{S^2_\infty} dS_i\, \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{abc}\,\phi^a\partial_j\phi^b\partial_k\phi^c =$$

$$= \frac{1}{8\pi \cancel{v^3}} \int\limits_{S^2_\infty} dS_i\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{abc} \cancel{v} \frac{x^a}{r} \cdot \partial_j \left(\cancel{v} \frac{x^b}{r} \right) \partial_k \left(\cancel{v} \frac{x^c}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2_\infty} dS_i\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{abc} \frac{x^a}{r} \cdot \frac{\delta^b_j}{r} \cdot \frac{\delta^c_k}{r} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int\limits_{S^2_\infty} dS_i\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ajk} \frac{x^a}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2_\infty} dS_i \frac{x_i}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2_\infty} dS \cdot \frac{1}{r^2} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi r^2} = 1. \text{ - верно.}$$

Найдём теперь асимптотику калибровочного поля в этом случае:

Ранее было получено, что при $r \to \infty$

$$A^a_i = \frac{1}{ev^2} \varepsilon^{abc} \phi^b \partial_i \phi^c + \frac{1}{v} A_i \phi^a,$$ где A_i - произвольный вектор.

Положим $A_i = 0$; $\phi^a = v \frac{x^a}{r}$. тогда

$$\underline{A^a_i} = \frac{1}{e\cancel{v^2}} \varepsilon^{abc} \cancel{v} \frac{x^b}{r} \cdot \partial_i \left(\cancel{v} \frac{x^c}{r} \right) = \frac{1}{er^2} \cdot \varepsilon_{abc} x^b \delta_{ic} =$$

$$= \frac{1}{er^2} \varepsilon_{aji} x^j = \underline{- \frac{1}{er^2} \varepsilon_{aij} x^j}$$

Предположим теперь, что решение отличается от асимптотик только множителями, зависящими от r:

$$\begin{cases} \phi^a = \dfrac{x^a}{er^2} H(v e \cdot r) \\ A_i^a = -\dfrac{1}{er^2} \varepsilon_{aij} x^j \left(1 - K(v e \cdot r)\right) \end{cases}$$

При этом $y \equiv v \cdot e \cdot r$ – безразмерная постоянная. Очевидными граничными условиями в этом случае будут

$H(y) \to y$; $K(y) \to 0$ если $y \to \infty$

$H(y) \to 0$; $K(y) \to 1$ если $y \to 0$

(На бесконечности должны получаться известные асимптотики, а в 0 – отсутствовать сингулярности)

Д/З Подставить получившийся анзац в ур-я движения для лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi^a)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_a^2 - v^2)^2$$

и получить ответ

$$\begin{cases} y^2 K'' = -K(1-K^2) + H^2 K \\ y^2 H'' = 2HK^2 + \dfrac{2\lambda}{e^2} H(H^2 - y^2) \end{cases}$$

– аналитически не решается в общем случае, но в пределе $\lambda/e^2 \to 0$ решение можно найти.

§ 4. Ограничение Богомольного на массу магнитного монополя. Решение Прасада-Зоммерфельда.

Для статического решения в калибровке $A_0^a = 0$

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(H_i^a)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_i \phi^a)^2 + \frac{1}{2}\lambda(\phi_a^2 - \sigma^2)^2 \right] \geqslant$$

$$\geqslant \int d^3x \left[\frac{1}{2}(H_i^a)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_i \phi^a)^2 \right] = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(H_i^a \mp \mathcal{D}_i \phi^a)^2 \right.$$

$$\left. \pm H_i^a \mathcal{D}_i \phi^a \right] \geqslant \pm \int d^3x \, H_i^a \mathcal{D}_i \phi^a .$$

При этом

$$\int d^3x \, H_i^a \mathcal{D}_i \phi^a = \int d^3x \, H_i^a (\partial_i \phi^a - e\varepsilon^{abc} A_i^b \phi^c) =$$

$$= \int d^3x \left[\partial_i (H_i^a \phi^a) - \partial_i H_i^a \phi^a - e\varepsilon^{abc} H_i^a A_i^b \phi^c \right] =$$

$$= \int d^3x \left[\partial_i (H_i^a \phi^a) - (\partial_i H_i^a - e\varepsilon^{abc} A_i^b H_i^c) \phi^a \right] =$$

$$= \int d^3x \left[\partial_i (H_i^a \phi^a) - \mathcal{D}_i H_i^a \phi^a \right]$$ – формула интегрирования по частям.

(Заметим, что $\mathcal{D}_i (H_i^a \phi^a) = \partial_i (H_i^a \phi^a)$ в силу калибровочной инвариантности дифференцируемого выражения)

В силу тождества Бьянки в неабелевом случае

$$0 = \mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow \text{при } \nu = 0 \quad \mathcal{D}_i H_i^a = 0$$

Поэтому

$$\int d^3x\, H_i^a \mathcal{D}_i \phi^a = \int d^3x\, \partial_i (H_i^a \phi^a) = \int_{S^2_\infty} dS_i\, H_i^a \phi^a =$$

$$= v \int_{S^2_\infty} dS_i\, H_i^{u(1)} = vg$$, где g - магнитный заряд по отношению к низкоэнергетической теории.

$\Longrightarrow$

$$E \geqslant \pm vg$$

или, эквивалентно, $\boxed{E \geqslant v|g|}$ - ограничение Богомольного.

Когда достигается равенство? $\boxed{\lambda \to 0}$

а) $g \geqslant 0 \quad (n \leqslant 0)$

$E \geqslant vg$ (верхний знак)

$\Longrightarrow \boxed{H_i^a = \mathcal{D}_i \phi^a}$

б) $g \leqslant 0 \quad (n \geqslant 0)$

$E \geqslant -vg$ (нижний знак)

$\Longrightarrow \boxed{H_i^a = -\mathcal{D}_i \phi^a}$

уравнения Богомольного

- дают решение в пределе $\lambda \to 0$ для которого $E = v|g|$. Действительно, для статического решения в калибровке $A_0^a = 0$

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi^a)^2 - \frac{1}{2}\lambda(\phi_a^2 - \sigma^2)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^3x \int_{t_1}^{t_2} dt \left[(H^a_i)^2 + (\mathcal{D}_i \phi^a)^2 + \lambda(\phi_a^2 - \sigma^2)^2 \right] =$$

$$= -E(t_2 - t_1)$$

$\Rightarrow$ экстремум действия совпадает с экстремумом энергии. При $\lambda \to 0$ экстремум энергии даётся ур-ями Богомольного

$$\begin{cases} H^a_i = \mathcal{D}_i \phi^a & \text{при } g \geq 0 \\ H^a_i = -\mathcal{D}_i \phi^a & \text{при } g \leq 0 \end{cases}, \quad E = \sigma |g|.$$

Д/З а) Подставить анзац с $n=1$ в ур-е Богомольного $H^a_i = -\mathcal{D}_i \phi^a$ и получить ур-я

$$\begin{cases} yH' = H - K^2 + 1 \\ yK' = -KH \end{cases}$$

б) Убедиться, что решением являются ф-и

$$\begin{cases} H(y) = y \cdot \operatorname{cth} y - 1 \\ K(y) = \dfrac{y}{\operatorname{sh} y} \end{cases}$$ – решение Прасада-Зоммерфельда

При этом все граничные условия выполнены. Действительно, Если $y \to \infty$, то

$$\begin{cases} H(y) = y \cdot \mathrm{cth}\, y - 1 \longrightarrow y \\ K(y) \to 0 \end{cases}$$

Если $y \to 0$

$$\begin{cases} H(y) \longrightarrow y \cdot \frac{1}{y} - 1 = 0 \\ K(y) \to 1 \end{cases}$$

Поэтому при $n=1$ и $\lambda \to 0$ решение, описывающее монополь имеет вид

$$\begin{cases} \phi^a = \frac{x^a}{er^2}\left[\upsilon er \cdot \mathrm{cth}(\upsilon er) - 1 \right] = \frac{x^a \upsilon}{r}\,\mathrm{cth}(\upsilon er) - \frac{x^a}{er^2} \\ A_i^a = -\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2}\left(1 - \frac{\upsilon er}{\mathrm{sh}(\upsilon er)}\right) \end{cases}$$

Д/З Проверить, что при $\lambda \to 0$ из ур-й Богомольного получаются ур-я движения

а) В общем виде

б) Для ур-й для H и K

<u>Пример</u>: $H_i^a = \pm \mathcal{D}_i \phi^a$ после применения $\mathcal{D}_i$

даёт $0 = \mathcal{D}_i^2 \phi^a = -\mathcal{D}_\mu^2 \phi^a$, а ур-е движения будет

$$0 = \mathcal{D}_\mu^2 \phi^a + 2\lambda \phi^a (\phi_b^2 - \upsilon^2) \underset{\lambda \to 0}{=} \mathcal{D}_\mu^2 \phi^a$$

§ 5. Магнитный монополь Ву-Янга и его связь с монополем Дирака

Если $n = 1$, то в пределе $r \to \infty$ (вне зависимости от λ) магнитный монополь т'Хофта-Полякова принимает вид

$$\begin{cases} \Phi^a = \dfrac{x^a}{r} \cdot v \\ A_i^a = -\varepsilon_{aij} \dfrac{x^j}{er^2} \end{cases}$$ – магнитный монополь Ву-Янга.

Но большие расстояния соответствуют малым энергиям, при которых $SU(2) \to U(1)$.

Чему соответствует монополь Ву-Янга в $U(1)$ теории?

При $r \to \infty$ $\mathcal{D}_i \Phi^a \to 0$; $\Phi_a^2 \to v^2$, т.ч.

$$\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}} = \frac{1}{v} \Phi^a F_{\mu\nu}^a$$

Чему же будет равно A_μ?

Сделаем калибровочное преобразование, приводящее Φ^a к виду

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$ – ясно, что тогда безмассовое поле – A_μ^3, а массивные – A_μ^1 и A_μ^2.

При калибровочных преобразованиях

$$\begin{cases} A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \\ \phi \to \omega \phi \omega^{-1} \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{matrix} A_\mu = ie A_\mu^a t^a \\ \phi = ie \phi^a t^a \end{matrix}$$

Действительно,

$$[t^a, \phi] = +ie\phi^c [t^a, t^c] = ie\phi^c \cdot if^{acb} t^b =$$

$$= +ef^{abc} t^b \phi^c = ie (T^a_{Adj})_{bc} \phi_c t^b$$

где $(T^a_{Adj})_{bc} = -if_{abc}$

$$\Rightarrow \quad \phi \to \omega \phi \omega^{-1} \iff \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \to \Omega \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \exp(-ie\alpha^a t^a) \qquad \Omega = \exp(-ie\alpha^a T^a_{Adj})$$

$\Rightarrow$ необходимо подобрать некоторую $SU(2)$-матрицу ω, т.ч.

$$\omega \left(\cancel{ie} \frac{x^a}{r} \cancel{v} \cdot \frac{\sigma^a}{\cancel{2}} \right) \omega^{-1} = \cancel{iev} \frac{\sigma_3}{\cancel{2}}$$

$$\omega \frac{x^a}{r} \sigma^a \omega^{-1} = \sigma_3 \iff \omega^{-1} \sigma_3 \omega = \frac{x^a \sigma^a}{r}$$

Удобно записывать матрицу ω в сферических координатах. Рассмотрим

$$\omega_N \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

– унитарность очевидна, $\det \omega_N = 1$

В силу унитарности

$$\omega_N^{-1} = \omega_N^{+} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

тогда

$$\omega_N^{-1} \sigma_3 \omega_N = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ +\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & -\cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \cdot \sigma_3 + \sin\theta\cos\varphi\, \sigma_1 +$$

$$+ \sin\theta \sin\varphi\, \sigma_2$$

$$= \frac{x^a \sigma^a}{r} \implies \text{при таких преобразованиях}$$

$$\phi_a = \frac{x^a}{r} v \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Важно: ω_N регулярно при $\theta = 0$, но сингулярно при $\theta = \pi$. Поэтому его можно использовать в верхней полусфере (полупространстве)

Преобразуем теперь надлежащим образом поле A_μ^a:

$$A_i^a = -\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2} \qquad (\vec{A})_i^a = +\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2}$$

При этом $A_\mu^a = (A_0^a, -\vec{A}^a)$

$$A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

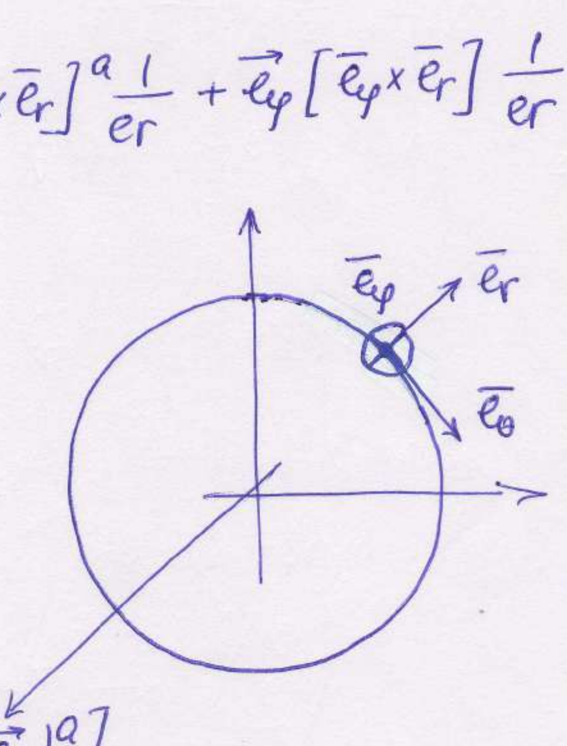
$$\vec{A} \longrightarrow \omega \vec{A} \omega^{-1} - \omega \vec{\nabla} \omega^{-1} \quad \text{где } \vec{A} \equiv ie\vec{A}^a \frac{\sigma^a}{2}$$

При этом

$$\vec{A}^a = \bar{e}_r(\bar{e}_r \vec{A}^a) + \bar{e}_\theta(\bar{e}_\theta \vec{A}^a) + \bar{e}_\varphi(\bar{e}_\varphi \vec{A}^a) =$$

$$= \cancel{\bar{e}_r[\bar{e}_r \times \bar{e}_r]^a \frac{1}{er}}^{\,0} + \bar{e}_\theta[\bar{e}_\theta \times \bar{e}_r]^a \frac{1}{er} + \vec{e}_\varphi[\bar{e}_\varphi \times \bar{e}_r]\frac{1}{er}$$

При этом (см. рис.)



$$[\bar{e}_\theta \times \bar{e}_r] = -\bar{e}_\varphi$$

$$[\bar{e}_\varphi \times \bar{e}_r] = +\bar{e}_\theta$$

Поэтому

$$\vec{A}^a = \frac{1}{er}\left[\vec{e}_\theta(-\bar{e}_\varphi)^a + \vec{e}_\varphi(\vec{e}_\theta)^a\right]$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \bar{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{r}}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\ \bar{e}_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \bar{r}}{\partial\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

Поэтому

$$ie\vec{A}^a\frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{\cancel{e}r}\cdot\frac{i\cancel{e}}{2}\Big[\vec{e}_\theta\left(\sin\varphi\,\sigma_1 - \cos\varphi\,\sigma_2 + 0\cdot\sigma_3\right)$$

$$+\vec{e}_\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\,\sigma_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\sigma_2 - \sin\theta\,\sigma_3\right)\Big]$$

$$=\frac{i}{2r}\left\{\vec{e}_\theta\begin{pmatrix}0 & \sin\varphi + i\cos\varphi\\ \sin\varphi - i\cos\varphi & 0\end{pmatrix} + \vec{e}_\varphi\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\varphi}\\ \cos\theta\, e^{i\varphi} & \sin\theta\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2r}\left\{\vec{e}_\theta\begin{pmatrix}0 & -e^{-i\varphi}\\ e^{i\varphi} & 0\end{pmatrix} + \vec{e}_\varphi\cdot i\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\varphi}\\ \cos\theta\, e^{i\varphi} & \sin\theta\end{pmatrix}\right\}$$

Совершаем теперь калибровочное преобразование:

$$\vec{A}^a \to \omega_N\vec{A}^a\omega_N^{-1} - \omega_N\vec{\nabla}\omega_N^{-1} = \omega_N\left\{\frac{1}{2r}\bar{e}_\theta\begin{pmatrix}0 & -e^{-i\varphi}\\ e^{i\varphi} & 0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2r}\vec{e}_\varphi\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\varphi}\\ \cos\theta\, e^{i\varphi} & \sin\theta\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi}\\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2\end{pmatrix}$$

$$-\omega_N\left(\cancelto{0}{\bar{e}_r\frac{\partial}{\partial r}} + \bar{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}, & -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}, & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\omega_N\left\{\cancel{\frac{1}{2r}\vec{e}_\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta/2 & -\cos\theta/2\, e^{-i\varphi}\\ \cos\theta/2\, e^{i\varphi} & -\sin\theta/2\end{pmatrix}} + \frac{i}{2r}\vec{e}_\varphi\,\cdot\right.$$

$$\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\theta/2 + \cos\theta\sin\theta/2 & \left(\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi}\\ \left(\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2r}\bar{e}_\theta \cancel{\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & -\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} - \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & i\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}\Bigg\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{i}{2r}\bar{e}_\varphi \Bigg\{ \begin{pmatrix} -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \cos\theta/2\, e^{-i\varphi} & \sin\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\cancel{\sin\theta/2}\cos\theta/2}\begin{pmatrix} 0 & \cancel{\sin\theta/2}\, e^{-i\varphi} \\ \cancel{\sin\theta/2}\, e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}\Bigg\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \frac{i}{2r\cos\theta/2}\bar{e}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin\theta/2\cos\theta/2 & (\cos^2\frac{\theta}{2}-1)e^{-i\varphi} \\ (\cos^2\theta/2-1)e^{i\varphi} & +\sin\theta/2\cos\theta/2 \end{pmatrix} = \frac{i\sin\theta/2}{2r\cos\theta/2}\bar{e}_\varphi \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} -\cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \frac{i\sin\theta/2}{2r\cos\theta/2}\bar{e}_\varphi \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} -\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2 & (\cancel{-\sin\theta/2\cos\theta/2} + \cancel{\sin\theta/2\cos\theta/2})e^{-i\varphi} \\ (\cancel{+\sin\theta/2\cos\theta/2} - \cancel{\cos\theta/2\sin\theta/2})e^{i\varphi} & \sin^2\theta/2 + \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{i\sin\theta/2}{2r\cos\theta/2}\vec{e}_\varphi \cdot \sigma_3 = -\frac{i\sin^2\theta/2}{2r\cos\theta/2\,\sin\theta/2}\vec{e}_\varphi\sigma_3 =$$

$$= -\frac{i(1-\cos\theta)}{2r\sin\theta}\vec{e}_\varphi\sigma_3 = ie\vec{A}^{a'}\frac{\sigma^a}{2}$$

$$\Longrightarrow \vec{A}^{1'} = 0 \quad ; \quad \vec{A}^{2'} = 0$$

$$\vec{A}^{3'} = -\frac{1-\cos\theta}{er\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$

Сравним полученную конфигурацию с полем магнитного монополя Дирака:

$$\vec{A}_N = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(1-\cos\theta)\vec{e}_\varphi$$

В нашем случае $g = -\frac{4\pi}{e}$ $(n=1) \Rightarrow$

$$\vec{A}_N = -\frac{1-\cos\theta}{er\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$ – верно.

$$\boxed{\text{Д/З Рассмотреть } \omega_S = \begin{pmatrix} \cos\theta/2\, e^{i\varphi} & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\, e^{-i\varphi} \end{pmatrix}}$$

которая регулярна в южной полусфере. Проверить, что ω_S переводит монополь Ву-Янга в $\vec{A}_S$ для монополя Дирака.

Глава VI. Дионы

Дионы – полевые конфигурации, обладающие как электрическим, так и магнитным зарядами:

§1. Дионы в эл/д.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$$

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\ \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A} \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi r^3} \\ \vec{H} = \dfrac{g\vec{r}}{4\pi r^3} \end{cases}$

Тогда соответствующие потенциалы имеют вид

$$\begin{cases} \vec{A}_N = \dfrac{g}{4\pi r\sin\theta}(1-\cos\theta)\vec{e}_\varphi \\ \vec{A}_S = \dfrac{g}{4\pi r\sin\theta}(-1-\cos\theta)\vec{e}_\varphi \\ A_0 = \varphi = \dfrac{q}{4\pi r} \qquad \left(\text{т.к. } \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0\right) \end{cases}$$

– простейшее решение, имеющее как электрический, так и магнитный заряды.

§ 2. Дионы в шабелевых теориях

Рассмотрим теорию с группой $G = SU(2)$ и $\phi_a \in Adj$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi_a)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_a^2 - v^2)^2$$

Ясно, что чтобы $\vec{E}^a \neq 0$ нужно либо $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ либо $A^a_0 \neq 0$.

Удобнее взять $\partial/\partial t = 0$, но $A^a_0 \neq 0$.

По аналогии с магнитным монополем т'Хофта-Полякова (с $n=1$) можно попробовать искать решение в виде

$$\begin{cases} \phi^a = \dfrac{x^a}{er^2} H(v e r) \\ A^a_i = -\dfrac{1}{er^2} \varepsilon_{aij} x^j \left(1 - K(v e r)\right) \\ A^a_0 = \dfrac{x^a}{er^2} J(v e r) \end{cases}$$

Д/З Подставить этот анзац в уравнения движения и получить уравнения для функций H, K, J:

$$\begin{cases} y^2 K'' = K(-1 + K^2 + H^2 - J^2) \\ y^2 H'' = 2HK^2 + \dfrac{2\lambda}{e^2} H (H^2 - y^2) \\ y^2 J'' = 2JK^2 \end{cases}$$

Граничные условия:

$r \to 0$ – отсутствие сингулярностей

$K \to 1; \quad H \to 0; \quad J \to 0$

$r \to \infty$ – конечность энергии

$K \to 0; \quad H(y) \to y; \quad J - ?$

Выясним как ведёт себя функция J при $y \to \infty$. Оказывается, что эта асимптотика связана с величиной электрического заряда (по отношению к низкоэнергетической группе $U(1)$).

При $r \to \infty$ $\mathcal{D}_i \phi^a \to 0$. Поэтому $(n^a = \phi^a/\phi \simeq \phi^a/v)$

$$\underset{U(1)}{F_{0i}} = \underset{U(1)}{E_i} = n^a F^a_{0i} + \frac{1}{e}\varepsilon^{abc} n^a \mathcal{D}_0 n^b \cancelto{0}{\mathcal{D}_i n^c} = \frac{1}{v}\phi^a F^a_{0i}$$

$$= \frac{1}{v}\phi^a\left[\cancelto{0}{\partial_0 A^a_i} - \partial_i A^a_0 - e\varepsilon^{abc} A^b_0 A^c_i\right] =$$

$$= -\frac{1}{v}\phi^a\left(\partial_i A^a_0 - e\varepsilon^{abc} A^b_i A^c_0\right)$$

Подставим сюда решение для A^a_i, которое ранее было получено из условия $\mathcal{D}_i \phi^a \to 0$:

$$A^a_i = \frac{1}{ev^2}\varepsilon^{abc}\phi^b \partial_i \phi^c + \frac{1}{v} A_i \phi^a$$, где A_i – произвольный вектор.

Тогда

$$\underset{U(1)}{E_i} = -\frac{1}{v}\phi^a\left[\partial_i A^a_0 - e\varepsilon^{abc}\left(\frac{1}{ev^2}\varepsilon^{bde}\phi^d \partial_i \phi^e + \cancelto{0}{\frac{1}{v} A_i \phi^b}\right) A^c_0\right]$$

$$= -\frac{1}{v}\phi^a\left[\partial_i A_0^a + \frac{1}{v^2}\left(\delta^{ad}\delta^{ce} - \cancel{\delta^{ae}\delta^{cd}}\right)\phi^d\partial_i\phi^e A_0^c\right]$$

$$= -\frac{1}{v}\left[\phi^a\partial_i A_0^a + \partial_i\phi^a A_0^a\right] = -\frac{1}{v}\partial_i\left(\phi^a A_0^a\right)$$

Электрический заряд решения (по отношению к низкоэнергетической $U(1)$)

$$q = \int d\vec{S}\,\vec{E}_{U(1)} = \int dS_i E_i$$

Для рассматриваемого решения

$$\vec{E}_{U(1)} = -\frac{1}{v}\vec{\nabla}\left(\frac{\cancel{x^a}}{e\cancel{r^2}}H\cdot\frac{x^a}{er^2}J\right) = -\frac{1}{v}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{e^2r^2}H\cdot J\right) =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{v}}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{e^2r^2}\cdot\cancel{v}\cancel{e}\cancel{r}\cdot J\right) = -v\vec{\nabla}\left(\frac{J}{y}\right) = \left[\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right]$$

$$= -v^2e\cdot\left(\frac{J}{y}\right)'\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Longrightarrow\quad q = \int d\vec{S}\,\vec{E}_{U(1)} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2(-v^2e)\left(\frac{J}{y}\right)' =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{4\pi y^2}{e}\left(\frac{J}{y}\right)'\right) = \lim_{y\to\infty}\left[-\frac{4\pi yJ'}{e} + \frac{4\pi J}{e}\right]$$

Поэтому недостающее граничное условие имеет вид

$$yJ' - J\Big|_{r\to\infty} = -\frac{qe}{4\pi}$$

т.о. граничные условия имеют вид

	$y\to 0$	$y\to\infty$
K	1	0
H	0	y
J	0	$yJ'-J=-\frac{qe}{4\pi}$

§3. Ограничение Богомольного на массу диона

$$E=\int d^3x\left\{\frac{1}{2}(E_i^a)^2+\frac{1}{2}(H_i^a)^2+\frac{1}{2}(\mathcal{D}_i\phi_a)^2+\underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{D}_0\phi_a)^2}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\frac{1}{2}\lambda(\phi_a^2-\sigma^2)^2}\right\}\geqslant\int d^3x\left\{\frac{1}{2}(E_i^a)^2+\frac{1}{2}(H_i^a)^2+\frac{1}{2}(\mathcal{D}_i\phi^a)^2\right\}$$

Имеем:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\quad\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

Возьмём

$$a=\int d^3x\,(\mathcal{D}_i\phi^a)^2$$

$$b=\int d^3x\,\left((E_i^a)^2+(H_i^a)^2\right)$$

Тогда

$$E\geqslant\sqrt{\int d^3x\,(\mathcal{D}_i\phi^a)^2\cdot\int d^3x\,\left((E_i^a)^2+(H_i^a)^2\right)}$$

Имеем: $\forall \alpha \in Re$

$$0 \leqslant \int d^3x \left(H_i^a - \alpha \mathcal{D}_i \phi^a\right)^2 = \alpha^2 \int d^3x \left(\mathcal{D}_i \phi^a\right)^2 - 2\alpha \underbrace{\int d^3x\, H_i^a \mathcal{D}_i \phi^a}_{v\cdot g}$$

$$+ \int d^3x \left(H_i^a\right)^2$$

Поэтому $\mathcal{D} \leqslant 0$, т.е.

$$0 \geqslant \mathcal{D} = 4v^2 g^2 - 4\int d^3x \left(\mathcal{D}_i \phi^a\right)^2 \cdot \int d^3x \left(H_i^a\right)^2$$

$$\Longrightarrow \int d^3x \left(\mathcal{D}_i \phi^a\right)^2 \cdot \int d^3x \left(H_i^a\right)^2 \geqslant v^2 g^2$$

Аналогичным образом

$$\int d^3x \left(\mathcal{D}_i \phi^a\right)^2 \cdot \int d^3x \left(E_i^a\right)^2 \geqslant \left[\int d^3x\, E_i^a \mathcal{D}_i \phi^a\right]^2$$

Преобразуем величину

$$\int d^3x\, E_i^a \mathcal{D}_i \phi^a = \int d^3x \left[\partial_i \left(E_i^a \phi^a\right) - \mathcal{D}_i E_i^a \phi^a\right]$$

Уравнения движения имеют вид

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a} = -\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}^a - \frac{\partial}{\partial A_\nu^a}\left(\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\alpha \phi_b\right)^2\right)$$

$$= -\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}^a - \mathcal{D}_\nu \phi^b \cdot (-e)\, \varepsilon^{bac} \phi^c = -\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}^a + e\varepsilon^{abc} \phi^b \mathcal{D}_\nu \phi^c$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}^a = e\,\varepsilon^{abc} \phi^b \mathcal{D}_\nu \phi^c$$

Поэтому

$$\mathcal{D}_i E_i^a = e\varepsilon^{abc}\phi^b \mathcal{D}_0 \phi^c$$

т.к. $\mathcal{D}_\mu F_{\mu 0}^a = -\mathcal{D}_i F_{i0}^a = \mathcal{D}_i E_i^a$

Но

$$\mathcal{D}_i E_i^a \phi^a = \phi^a \cdot e\varepsilon^{abc}\phi^b \mathcal{D}_0 \phi^c = 0 \text{ , т.ч.}$$

$$\int d^3x\, E_i^a \mathcal{D}_i \phi^a = \int d^3x\, \partial_i (E_i^a \phi^a) = \int_{S^2_\infty} dS_i\, E_i^a \phi^a = v \int_{S^2_\infty} d\vec{S}\, \vec{E}_{u(1)} =$$

$= vq$ и $\Rightarrow$

$$\int d^3x\, (\mathcal{D}_i \phi^a)^2 \int d^3x\, (E_i^a)^2 \geqslant v^2 q^2.$$

Собирая всё вместе окончательно получаем ограничение Богомольного на массу диона

$$\boxed{E \geqslant v\sqrt{q^2 + g^2}}$$

§ 4. Явный вид дионного решения при $\lambda \to 0$

Найдём явный вид дионного решения с $n = 1$ в пределе $\lambda \to 0$.

Для этого необходимо решить уравнения

$$\begin{cases} y^2 K'' = K(-1+K^2+H^2-J^2) \\ y^2 H'' = 2HK^2 \\ y^2 J'' = 2JK^2 \end{cases}$$

Если $J=0$, то BPS решение имеет вид

$$K(y) = \frac{y}{sh\, y} \qquad H(y) = y\, cth\, y - 1.$$

Если $K(y) \to K(\alpha y)$; $H(y) \to H(\alpha y)$, то ур-я по прежнему верны.

Ур-я для H и J совпадают и линейны по этим функциям. $\Rightarrow$ решением будет

$$\begin{cases} K(y) = \dfrac{y}{sh\, y} \\ H(y) = ch\gamma \cdot (y\, cth\, y - 1) \\ J(y) = sh\gamma \cdot (y\, cth\, y - 1) \end{cases} \qquad \text{т.к. } ch^2\gamma - sh^2\gamma = 1.$$

Но граничные условия не будут выполнены, т.к. при $y \to \infty$ $H(y) \to ch\gamma \cdot y$

Поэтому верное решение имеет вид

$$\begin{cases} K(y) = \dfrac{\tilde{y}}{sh\, \tilde{y}} \\ H(y) = ch\gamma\, (\tilde{y}\, cth\, \tilde{y} - 1) \\ J(y) = sh\gamma\, (\tilde{y}\, cth\, \tilde{y} - 1) \end{cases} \qquad \text{где } \tilde{y} \equiv \frac{y}{ch\gamma} = \frac{v \cdot e \cdot r}{ch\gamma}.$$

При этом электрический заряд решения связан с параметром γ:

$$yJ'(y) - J\Big|_{y\to\infty} = -\frac{qe}{4\pi}$$

$$\parallel$$

$$y \cdot sh\gamma \cdot \frac{1}{ch\gamma}\left(\cancel{cth\tilde{y}} - \cancel{\frac{\tilde{y}}{sh^2\tilde{y}}}^{\to 0}\right) - sh\gamma\left(\tilde{y}\cancel{cth\tilde{y}} - 1\right)\Big|_{y\to\infty}$$

$$= sh\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{q = -\frac{4\pi}{e} sh\gamma}$$

Заметим, что для рассматриваемой конфигурации

$$\mathcal{D}_0\phi_a = \partial_0\phi^a - e\varepsilon^{abc}A_0^b\phi^c = 0 \quad , \text{ т.к. } A_0^b \sim x^b, \text{ а } \phi^c \sim x^c$$

Д/З Проверить, что рассматриваемое решение удовлетворяет уравнениям

$$H_i^a = -\frac{1}{ch\gamma}\mathcal{D}_i\phi^a \qquad E_i^a = -\frac{sh\gamma}{ch\gamma}\mathcal{D}_i\phi^a$$

и выполняется равенство в ограничении Богомольного:

$$E = v\sqrt{g^2 + q^2} = v \cdot \frac{4\pi}{e}\sqrt{1 + sh^2\gamma} = v\frac{4\pi}{e}ch\gamma$$

§1. Теория поля в пространстве Евклида

$(+---)$ – пространство Минковского

$(++++)$ – пространство Евклида.

$$S_{ЯМ} = \frac{1}{2e^2}\, tr \int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}\int d^4x\, (F_{\mu\nu}^a)^2$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = ie F_{\mu\nu}^a t^a$

$$tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}.$$

Совершим поворот Вика

$$x_4 = ix_0\,; \qquad (x_\mu x^\mu)_E = x_4^2 + \vec{x}^{\,2} = -x_0^2 + \vec{x}^{\,2} = -(x_\mu x^\mu)_M$$

$$S_E' = -\frac{1}{2e^2}\, tr \int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4}\int d^4x\, (F_{\mu\nu}^a)^2 \geqslant 0$$

Инстантоны – классические решения евклидовых уравнений движения с конечным евклидовым действием.

§2. Топологическая классификация инстантонных решений

Рассмотрим наиболее простой случай калибровочной группы $G = SU(2)$.

Если $\omega \in SU(2)$, то

$$\omega = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} \equiv a_b e_b \quad \text{где} \quad b = \overline{1,4}$$

$$e_b = (i\vec{\sigma}, 1_2)$$

и

$$1 = \det \omega = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 .$$

Если $\omega \in SU(2)$, то

$$\omega^{-1} = \omega^+ = \begin{pmatrix} a_4 - ia_3 & -ia_1 - a_2 \\ -ia_1 + a_2 & a_4 + ia_3 \end{pmatrix} = a_b e_b^+$$

где $e_b^+ = (-i\vec{\sigma}, 1_2)$

Мы видим, что в координатах $a_1, \dots, a_4$ группа $SU(2)$ есть сфера S^3 радиуса 1:

$$S^3_{SU(2)}: \; a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 .$$

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x \, (F^a_{\mu\nu})^2 \geq 0$$ (в отличие от случая пространства Минковского)

$\Rightarrow S_E < \infty$ если $F^a_{\mu\nu} \to 0$ при $x \to \infty$,

где $x \equiv \sqrt{x_\mu^2}$ – радиальная координата в 4-х мерном пространстве.

$\Leftrightarrow F_{\mu\nu} \to 0$ при $x \to \infty$

Но для этого не обязательно, чтобы $A_\mu \to 0$, действительно, При калибровочных преобразованиях

$$\begin{cases} A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \equiv A'_\mu \\ F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1} \equiv F'_{\mu\nu} \end{cases}$$

Если $A_\mu = 0$, то $F_{\mu\nu} = 0$. Тогда

$$A'_\mu = \omega \partial_\mu \omega^{-1}, \text{ а } F'_{\mu\nu} = 0.$$

$\Longrightarrow$ $F_{\mu\nu} = 0$ даже если $A_\mu = \omega\partial_\mu \omega^{-1}$ – чистая калибровка.

т.о. из условия $S_E < \infty$ получаем, что

$$A_\mu \to \omega \partial_\mu \omega^{-1} \quad \text{при } x \to \infty$$

где $\omega \in SU(2)$.

$\Longrightarrow$ получается отображение $f: S^3_\infty \to S^3_{SU(2)}$, которое характеризуется степенью отображения (топологическим числом) $n = \deg f$.

При этом калибровочные преобразования соответствуют гладким деформациям.

Вычислим степень отображения по формуле

$$\deg f = \frac{1}{\int\limits_N d^n y} \int\limits_M d^n x \cdot \det \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\int\limits_N d^n y} \cdot \int\limits_M d^n y.$$

формально

$$\left(f: \underset{(x)}{M} \to \underset{(y)}{N}\right)$$

Ранее было показано, что объём единичной сферы S^3 равен $2\pi^2$, т.е.

$$\int_N d^n y \Longrightarrow 2\pi^2. \qquad (N = S^3_{SU(2)})$$

$$\int_M d^n y = \int_{S^3_\infty} dS$$

Ранее было показано, что для сферы S^n

$$dS = \frac{1}{n!R}\,\varepsilon^{j i_1 \dots i_n} x_j\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

В нашем случае $n = 3$; $R = 1$; $x_i \to a_b$.
Поэтому

$$\int_M d^n y \Longrightarrow \int_{S^3_\infty} \frac{1}{3!}\,\varepsilon^{abcd} a_a\, da_b \wedge da_c \wedge da_d$$

а степень отображение формально представляется в виде

$$n = \deg f = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3_\infty} \varepsilon^{abcd} a_a\, da_b \wedge da_c \wedge da_d$$

Вернёмся в этом выражении к интегрированию по координатам:

$$n = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3_\infty} \varepsilon^{abcd} a_a (\partial_\nu a_b\, dx^\nu) \wedge (\partial_\alpha a_c\, dx^\alpha) \wedge (\partial_\beta a_d\, dx^\beta)$$

$$= \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3_\infty} \varepsilon^{abcd} a_a\, \partial_\nu a_b\, \partial_\alpha a_c\, \partial_\beta a_d\, dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Ранее было показано, что

$$dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\ldots\wedge dx^{j_n} = \varepsilon^{ij_1j_2\ldots j_n}\, dS_i \,.$$

Поэтому окончательно степень отображения можно переписать в виде

$$\boxed{n = \frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} \varepsilon^{abcd}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, dS_\mu\, a^a\partial_\nu a^b \partial_\alpha a^c \partial_\beta a^d}$$

Попробуем переписать это выражение в более красивом виде. Вначале вместо a_b попробуем получить формулу, в которой стоит ω.

Имеем: $\quad e_a = (i\vec{\sigma}, 1_2)$; $\quad e_a^+ = (-i\vec{\sigma}, 1_2)$

$tr(e_a^+ e_b) = 2\delta_{ab}$. Действительно,

1) $a, b = 4$; $\quad tr(1_2) = 2$ - верно

2) $a = 4$; $b = \overline{1,3}$ $\quad tr(1_2\cdot i\sigma_b) = 0$
   $a = \overline{1,3}$; $b = 4$ $\quad tr(-i\sigma_a\cdot 1_2) = 0$ } - верно

3) $a = \overline{1,3}$, $b = \overline{1,3}$ $\quad tr(-i\sigma_a\cdot i\sigma_b) = tr(\sigma_a\sigma_b) = 2\delta_{ab}$ - верно.

Аналогичным образом проверяется равенство

$$tr(e_n^+ e_a e_m^+ e_b) = 2\,(\varepsilon_{namb} + \delta_{na}\delta_{mb} - \delta_{mn}\delta_{ab} + \delta_{nb}\delta_{ma})$$

Почему получается ε-символ?

$$\mathrm{tr}(e_1^+ e_2 e_3^+ e_4) = \mathrm{tr}(-i\sigma_1 \cdot i\sigma_2 \cdot (-i)\sigma_3 \cdot 1_2) = -i\,\mathrm{tr}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$$

$$= -i \cdot \mathrm{tr}(i\sigma_3 \cdot \sigma_3) = \mathrm{tr}(\sigma_3^2) = \mathrm{tr}(1_2) = 2 = 2\varepsilon_{1234}$$

— верно.

Утв. $$n = +\frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\int_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \omega\partial_\nu\omega^{-1} \cdot \omega\partial_\alpha\omega^{-1} \cdot \omega\partial_\beta\omega^{-1}$$

Доказательство:

$$\frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\int_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \omega\partial_\nu\omega^{-1} \cdot \omega\partial_\alpha\omega^{-1} \cdot \omega\partial_\beta\omega^{-1} =$$

$$\left[\, 0 = \partial_\mu 1_2 = \partial_\mu(\omega\omega^{-1}) = \partial_\mu\omega \cdot \omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1} \,\right]$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\int_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \cancel{\omega}\partial_\nu\omega^{-1} \cdot \omega\partial_\alpha\omega^{-1}\partial_\beta\omega \cdot \cancel{\omega^{-1}}$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\int_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \cdot \underline{e_n^+} \cdot \partial_\nu a_n \cdot \underline{e_a}\, a_a \cdot \underline{e_m^+}\,\partial_\alpha a_m\, \underline{e_b}\,\partial_\beta a_b$$

$$= -\frac{1}{\cancel{24}\pi^2}{}_{12} \int_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial_\nu a_n \cdot \underline{a_a} \cdot \partial_\alpha a_m \partial_\beta a_b\, (\cancel{2}\varepsilon_{namb} +$$

$$+ \cancel{2}\delta_{na}\delta_{mb} - \cancel{2}\delta_{mn}\underline{\delta_{ab}} + \cancel{2}\delta_{nb}\delta_{ma})$$

$$\left[\, 0 = \partial_\mu 1 = \partial_\mu(a_b a_b) = 2a_b\partial_\mu a_b \right.$$ — уходят все δ-символы $\left.\right]$

$$= -\frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\cdot \varepsilon_{namb}\, a_a\, \partial_\nu a_n\, \partial_\alpha a_m\, \partial_\beta a_b =$$

$$\begin{array}{ccc} b & c & d \end{array}$$

"−"

$$= +\frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\cdot \varepsilon_{acdb}\, a_a\, \partial_\nu a_b\, \partial_\alpha a_c\, \partial_\beta a_d =$$

$$= +\frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3_\infty} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \varepsilon_{abcd}\, a_a\, \partial_\nu a_b\, \partial_\alpha a_c\, \partial_\beta a_d = \deg f$$

– верно.

Утв. доказано.

Утв. $n = -\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$

Доказательство:

$$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \mathrm{tr}\left(2\partial_\mu A_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} + [A_\mu, A_\nu]\tilde{F}_{\mu\nu}\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left\{2\partial_\mu(A_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}) - 2A_\nu\partial_\mu\tilde{F}_{\mu\nu} - [A_\nu, A_\mu]\tilde{F}_{\mu\nu}\right\} =$$

$$= \mathrm{tr}\left\{2\partial_\mu(A_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}) - 2A_\nu\partial_\mu\tilde{F}_{\mu\nu} - A_\nu[A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}]\right\}$$

Используем тождество Бьянки

$$0 = \mathcal{D}_\mu\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{F}_{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}]$$

Тогда

$$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \mathrm{tr}\left\{2\partial_\mu(A_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}) - A_\nu\partial_\mu\tilde{F}_{\mu\nu}\right\}$$

Имеем:

$$\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu \left(\cancel{\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ [A_\alpha, A_\beta]\right)\right) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu (A_\alpha A_\beta)\right) =$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu A_\alpha A_\beta + A_\nu A_\alpha \partial_\mu A_\beta\right)$$

Оба этих слагаемых равны и могут быть представлены в виде полной производной:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu A_\alpha A_\beta\right) = \varepsilon_{\mu \underset{\alpha}{\nu} \underset{\beta}{\alpha} \underset{\nu}{\beta}}\,\mathrm{tr}\left(A_{\underset{\nu}{\beta}} A_{\underset{\alpha}{\nu}} \partial_\mu A_{\underset{\beta}{\alpha}}\right) =$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(A_\nu A_\alpha \partial_\mu A_\beta\right) = \varepsilon_{\mu \underset{\alpha}{\nu} \underset{\beta}{\alpha} \underset{\nu}{\beta}}\,\mathrm{tr}\left(\partial_\mu A_{\underset{\nu}{\beta}} A_{\underset{\alpha}{\nu}} A_{\underset{\beta}{\alpha}}\right)$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left(\partial_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\left[\partial_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta + A_\nu \partial_\mu A_\alpha A_\beta + A_\nu A_\alpha \partial_\mu A_\beta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left[A_\nu A_\alpha A_\beta\right]$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\left(A_\nu \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left(A_\nu A_\alpha A_\beta\right) \quad и \Rightarrow$$

$$\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left[A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right]$$

Поэтому

$$-\frac{1}{16\pi^2}\,tr\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi^2}\,tr\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\int_{S^3_\infty} dS_\mu \Big(A_\nu F_{\alpha\beta} -$$

$$-\frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\Big) =$$

Поскольку при $x\to\infty$ $F_{\alpha\beta}\to 0$, то первое слагаемое обращается в 0.

$$= \frac{1}{24\pi^2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,tr\int_{S^3_\infty} dS_\mu\, A_\nu A_\alpha A_\beta = \left[A_\mu \to \omega\partial_\mu\omega^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{24\pi^2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,tr\int_{S^3_\infty} dS_\mu\; \omega\partial_\nu\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\alpha\omega^{-1}\cdot\omega\partial_\beta\omega^{-1}$$

Утв. доказано.

Т.о. мы получаем, что топологическое число может быть записано в виде

$$\boxed{n = -\frac{1}{16\pi^2}\,tr\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}$$

§3. Уравнения самодуальности и антисамодуальности

Уравнения $\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}=0$ являются дифференциальными ур-ями второго порядка. Но для полевых конфигураций с конечным действием их можно свести к ур-ям 1-го порядка: (74)

$$0 \leq \frac{e^2}{2}\int d^4x\,\left(F^a_{\mu\nu} \pm \tilde{F}^a_{\mu\nu}\right)^2 = -\int d^4x\,\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}\right)^2 =$$

$\left(\text{т.к. } F_{\mu\nu} = ie F^a_{\mu\nu} t^a \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}\right)$

$$= -\int d^4x\,\mathrm{tr}\left[F^2_{\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \tilde{F}^2_{\mu\nu}\right]$$

Имеем:

$$\tilde{F}^2_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = (\text{Евклид}) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = F^2_{\alpha\beta} = F^2_{\mu\nu}$$

Поэтому

$$0 \leq -2\,\mathrm{tr}\int d^4x\,F^2_{\mu\nu} \mp 2\,\mathrm{tr}\int d^4x\,F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

При этом

$$S_E = -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,F^2_{\mu\nu}$$

$$n = -\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

$$0 \leq 4e^2 S_E \mp (-32\pi^2)\,n$$

$$S_E \geq \mp\frac{8\pi^2}{e^2}n \implies \boxed{S_E \geq \frac{8\pi^2}{e^2}|n|}$$

Выясним, когда в этом неравенстве достигается знак равенства:

Если $n \geq 0$, то

$S_E = \frac{8\pi^2}{e^2} n$ – нижний знак

$\Rightarrow \quad F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}}$ – уравнение самодуальности

Если $n < 0$, то

$S_E = -\frac{8\pi^2}{e^2} n$ – верхний знак

$\Rightarrow \quad F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$

$\boxed{F_{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu}}$ – уравнение антисамодуальности.

При фиксированном n это – минимум действия, а $\Rightarrow$ ур-я движения сводятся к ур-ям (анти)самодуальности для решений с конечным действием.

Очевидно, что если $F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}$, то

$\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = \pm \mathcal{D}_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ в силу тождества Бьянки.

Почему не может быть $F_{\mu\nu} = \lambda \tilde{F}_{\mu\nu}$ где $\lambda \neq \pm 1$?

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \lambda \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}$$

Но $$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\left(\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\delta} - \delta_{\mu\delta}\delta_{\nu\gamma}\right)F_{\gamma\delta} = F_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \lambda F_{\mu\nu} = \lambda^2 \tilde{F}_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

§4. Явный вид инстантонных решений

Для того, чтобы решить ур-я (анти) самодуальности, нам потребуются некоторые новые объекты: Построим матрицы

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i}\left(e_\mu e_\nu^+ - e_\nu e_\mu^+\right) \qquad \bar{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i}\left(e_\mu^+ e_\nu - e_\nu^+ e_\mu\right)$$

где $e_\mu \equiv (i\vec{\sigma}, 1_2)$; $\quad e_\mu^+ = (-i\vec{\sigma}, 1_2)$

Несложно убедиться, что

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu a}\sigma^a \qquad \bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\bar{\sigma}_{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}\bar{\eta}_{\mu\nu a}\sigma^a, \text{ где}$$

$$\eta_{\mu\nu a} = \begin{cases} \varepsilon_{\mu\nu a}, & \mu,\nu = \overline{1,3} \\ \delta_{a\mu}, & \nu = 4 \end{cases} \qquad \bar{\eta}_{\mu\nu a} = \begin{cases} \varepsilon_{\mu\nu a}, & \mu,\nu = \overline{1,3} \\ -\delta_{a\mu}, & \nu = 4 \end{cases}$$

$$e_\mu e_\nu^+ + e_\nu e_\mu^+ = 2\delta_{\mu\nu}\cdot 1_2 \qquad e_\mu^+ e_\nu + e_\nu^+ e_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\cdot 1_2$$

Действительно,

если $\mu, \nu = \overline{1,3}$, то

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i}\left(i\sigma_\mu \cdot (-i)\sigma_\nu - i\sigma_\nu \cdot (-i)\sigma_\mu\right) = \frac{1}{4i}\left[\sigma_\mu, \sigma_\nu\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu a}\sigma_a \quad \text{– верно}$$

$$\sigma_{\mu 4} = \frac{1}{4i}\left(i\sigma_\mu \cdot 1_2 - (-i)\sigma_\mu \cdot 1_2\right) = \frac{1}{2}\sigma_\mu = \frac{1}{2}\delta_{\mu a}\sigma_a$$

– верно

$\bar{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu a}\sigma_a$ – аналогично, но

$$\bar{\sigma}_{\mu 4} = \frac{1}{4i}\left(-i\sigma_\mu \cdot 1_2 - i\sigma_\mu \cdot 1_2\right) = -\frac{1}{2}\delta_{\mu a}\sigma_a$$

Как следствие

$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\mu\nu}$	$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = -\bar{\sigma}_{\mu\nu}$
$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\beta\gamma} = -(\delta_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\gamma}\sigma_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\sigma_{\mu\nu})$	$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\beta\gamma} = +(\delta_{\mu\gamma}\bar{\sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\gamma}\bar{\sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\bar{\sigma}_{\mu\nu})$

Действительно, если $\mu, \nu = \overline{1,3}$, то

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu a}\sigma_a \overset{?}{=} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha 4}\sigma_{\alpha 4} + \varepsilon_{\mu\nu 4\alpha}\sigma_{4\alpha}\right) =$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sigma_\alpha \quad \text{– верно}$$

если $\nu = 4$, то

$$\sigma_{\mu 4} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu 4\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta a}\sigma_a = \frac{1}{2}\sigma_\mu \quad \text{– верно}$$

Аналогично доказывается, что $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\sigma_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma\sigma\rho}\sigma_{\sigma\rho} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta_{\mu\gamma} & \delta_{\mu\sigma} & \delta_{\mu\rho} \\ \delta_{\nu\gamma} & \delta_{\nu\sigma} & \delta_{\nu\rho} \\ \delta_{\alpha\gamma} & \delta_{\alpha\sigma} & \delta_{\alpha\rho} \end{vmatrix}\sigma_{\sigma\rho} =$$

$$= -\left(\delta_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\gamma}\sigma_{\mu\alpha} + \delta_{\alpha\gamma}\sigma_{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\left(\delta_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\gamma}\sigma_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\sigma_{\mu\nu}\right)$$

Тождество для $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ доказывается аналогично.

Также несложно проверить равенства

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = i\left(\delta_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} + \delta_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha} - \delta_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} - \delta_{\alpha\nu}\sigma_{\mu\beta}\right)$$

$$[\bar{\sigma}_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\alpha\beta}] = i\left(\delta_{\mu\alpha}\bar{\sigma}_{\nu\beta} + \delta_{\nu\beta}\bar{\sigma}_{\mu\alpha} - \delta_{\mu\beta}\bar{\sigma}_{\nu\alpha} - \delta_{\alpha\nu}\bar{\sigma}_{\mu\beta}\right)$$

Проверяется аналогичным образом, перебирая все возможности. Например, если $\mu, \nu, \alpha = \overline{1,3}$, $\beta = 4$, то

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha 4}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu a}[\sigma_a, \sigma_\alpha] = i\,\varepsilon_{\mu\nu a}\,\varepsilon_{a\alpha b}\,\sigma_b =$$

$$= i\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu b} - \delta_{\mu b}\delta_{\nu\alpha}\right)\sigma_b = i\left(\delta_{\mu\alpha}\sigma_\nu - \delta_{\nu\alpha}\sigma_\mu\right)$$

$$i\left(\delta_{\mu\alpha}\sigma_{\nu 4} + \cancel{\delta_{\nu 4}\sigma_{\mu\alpha}} - \cancel{\delta_{\mu 4}\sigma_{\nu\alpha}} - \delta_{\alpha\nu}\sigma_{\mu 4}\right) =$$

$$= i\left(\delta_{\mu\alpha}\sigma_\nu - \delta_{\nu\alpha}\sigma_\mu\right) \quad \text{— верно.}$$

Рассмотрим случай $n \geq 0$ и будем искать решение ур-я самодуальности $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ в виде

$$A_\mu = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu \varphi(x)$$

где $\varphi(x)$ - некоторая функция. Тогда

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial_\alpha\varphi - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha\varphi$$

$$-[\bar{\sigma}_{\mu\alpha}, \bar{\sigma}_{\nu\beta}]\partial_\alpha\varphi\cdot\partial_\beta\varphi = i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}\underline{\partial_\mu\partial_\alpha}\varphi - i\underline{\underline{\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha}}\varphi$$

$$-i(\cancelto{0}{\delta_{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\alpha\beta}} + \delta_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\mu\nu} - \underline{\delta_{\mu\beta}\bar{\sigma}_{\alpha\nu}} - \underline{\underline{\delta_{\alpha\nu}\bar{\sigma}_{\mu\beta}}})\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi =$$

$$= -i\bar{\sigma}_{\mu\nu}(\partial_\alpha\varphi)^2 + i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}(\partial_\mu\partial_\alpha\varphi - \partial_\alpha\varphi\partial_\mu\varphi) - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\cdot$$

$$\cdot(\partial_\nu\partial_\alpha\varphi - \partial_\alpha\varphi\cdot\partial_\nu\varphi)$$

Затем вычислим дуальный тензор поля:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = +i\bar{\sigma}_{\mu\nu}(\partial_\alpha\varphi)^2 + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\cdot\bar{\sigma}_{\beta\gamma}$$

$$\cdot(\partial_\alpha\partial_\gamma\varphi - \partial_\alpha\varphi\cdot\partial_\gamma\varphi) = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\underline{(\partial_\alpha\varphi)^2} + i(\delta_{\mu\gamma}\bar{\sigma}_{\nu\alpha} +$$

$$+\delta_{\nu\gamma}\bar{\sigma}_{\alpha\mu} + \underline{\delta_{\alpha\gamma}}\bar{\sigma}_{\mu\nu})(\partial_\alpha\partial_\gamma\varphi - \partial_\alpha\varphi\partial_\gamma\varphi) =$$

$$= i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha\varphi + i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}(\partial_\alpha\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi\partial_\alpha\varphi) - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\cdot$$

$$\cdot(\partial_\alpha\partial_\nu\varphi - \partial_\alpha\varphi\partial_\nu\varphi)$$

Составляем ур-е самодуальности

$$-i\bar{\sigma}_{\mu\nu}(\partial_\alpha\varphi)^2 + i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}\cancel{(\partial_\mu\partial_\alpha\varphi - \partial_\alpha\varphi\,\partial_\mu\varphi)} - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\cancel{(\partial_\nu\partial_\alpha\varphi -}$$

$$\cancel{- \partial_\alpha\varphi\,\partial_\nu\varphi)} = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\alpha^2\varphi + i\bar{\sigma}_{\nu\alpha}\cancel{(\partial_\alpha\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi\,\partial_\alpha\varphi)} - i\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\cdot$$

$$\cdot\cancel{(\partial_\nu\partial_\alpha\varphi - \partial_\alpha\varphi\,\partial_\nu\varphi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = (\partial_\alpha\varphi)^2 + \partial_\alpha^2\varphi} \iff F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

Сделаем замену функции $\varphi = \ln f$. Тогда

$$\partial_\alpha\varphi = \frac{1}{f}\partial_\alpha f$$

$$\partial_\alpha^2\varphi = \partial_\alpha\left(\frac{1}{f}\partial_\alpha f\right) = -\frac{1}{f^2}(\partial_\alpha f)^2 + \frac{1}{f}\partial_\alpha^2 f$$

и рассматриваемое уравнение можно переписать в виде

$$0 = \cancel{\frac{1}{f^2}(\partial_\alpha f)^2} - \cancel{\frac{1}{f^2}(\partial_\alpha f)^2} + \frac{1}{f}\partial_\alpha^2 f$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \frac{1}{f}\partial_\alpha^2 f}$$

Рассмотрим вначале $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда

$$\partial_\alpha f = -\frac{2x^\alpha}{x^4}$$

$$\partial_\alpha^2 f = -\partial_\alpha\left(\frac{2x_\alpha}{x^4}\right) = -\frac{8}{x^4} - \frac{2x_\alpha \cdot (-4x_\alpha)}{x^6} = 0$$

Однако

$$\int d^4x\, \partial_\alpha^2 f = \int dS_\alpha \cdot \partial_\alpha f = \int dS_\alpha \cdot \frac{(-2x_\alpha)}{x^4} = -2\cdot 2\pi^2 = -4\pi^2$$

Поэтому

$$\partial_\alpha^2 f = -4\pi^2 \delta^4(x) \neq 0$$

Однако

$$\frac{1}{f}\partial_\alpha^2 f = x^2 \cdot (-4\pi^2)\delta^4(x) = 0$$

Поэтому можно выбрать

$$f = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^2}{(x_\mu - a_{\mu k})^2} \quad , \text{т.е.}$$

$$\varphi(x) = \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^2}{(x_\mu - a_{\mu k})^2}\right)$$

$$A_\mu(x) = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^2}{(x_\mu - a_{\mu k})^2}\right]$$

Число слагаемых в данной сумме совпадает с топологическим числом инстантонного решения. – будет показано далее.

§5. Одноинстантонное решение

— частный случай предыдущего решения при $n=1$:

$$A_\mu(x) = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu \ln\left(1+\frac{\rho^2}{(x_\mu-a_\mu)^2}\right) = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\frac{(x-a)_\nu\rho^2}{\left(1+\frac{\rho^2}{(x-a)^2}\right)(x-a)^4}$$

$$= -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\frac{(x-a)_\nu\rho^2}{(x-a)^2\left((x-a)^2+\rho^2\right)}$$

— видно, что такое решение имеет сингулярность в точке $x_\mu = a_\mu$.

Убедимся, что топологическое число такого решения

$$n = -\frac{1}{16\pi^2}\operatorname{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \overset{?}{=} 1$$

Ранее было доказано, что

$$n = -\frac{1}{16\pi^2}\operatorname{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi^2}\operatorname{tr}\int d^4x\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$\partial_\mu\left(A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right) = -\frac{1}{16\pi^2}\operatorname{tr}\int\limits_{S^3_\infty + S^3_\varepsilon} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

где S^3_ε — сфера радиуса $\varepsilon \to 0$ вокруг т. $x^\mu = a^\mu$.

При $x \to \infty$ $A_\mu(x) \sim \frac{1}{x^3}$ и $\Rightarrow \int\limits_{S^3_\infty} = 0$

в силу достаточно быстрого убывания подынтегрального выражения.

Однако ненулевым оказывается интеграл по S^3_ε.

Действительно, если $x^\mu \simeq a^\mu$, то

$$A_\mu(x) \simeq -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{(x-a)_\nu \cancel{\rho^2}}{(x-a)^2 \cancel{\rho^2}} \equiv -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{z_\nu}{z^2}$$

где $z^\mu \equiv x^\mu - a^\mu$.

Это выражение является чистой калибровкой,

$$A_\mu(x) \simeq -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{z_\nu}{z^2} = \omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1}$$

где $\omega_1 \equiv \frac{e^+_\mu z^\mu}{z} \in SU(2)$.

Действительно,

$$\omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1} = \frac{e^+_\alpha z^\alpha}{z} \partial_\mu \left(\frac{e_\beta z^\beta}{z}\right) = \frac{e^+_\alpha z^\alpha}{z}\left(\frac{e_\mu}{z} - \frac{e_\beta z^\beta z^\mu}{z^3}\right)$$

$$= \frac{e^+_\alpha e_\mu z^\alpha}{z^2} - \frac{z_\mu}{z^2}.$$

Имеем: $e^+_\alpha e_\mu + e^+_\mu e_\alpha = 2\delta_{\alpha\mu} \cdot 1_2$

$e_\alpha e^+_\mu + e_\mu e^+_\alpha = 2\delta_{\alpha\mu} \cdot 1_2$

Поэтому

$$\omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1} = \frac{e_\alpha^+ e_\mu z^\alpha}{z^2} - \underbrace{\frac{1}{2}(e_\alpha^+ e_\mu + e_\mu^+ e_\alpha)}_{\delta_{\alpha\mu}} \frac{z^\alpha}{z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(e_\alpha^+ e_\mu - e_\mu^+ e_\alpha) \frac{z^\alpha}{z^2} = \frac{1}{2} \cdot 4i \bar{\sigma}_{\alpha\mu} \frac{z^\alpha}{z^2} = -2i \bar{\sigma}_{\mu\alpha} \frac{z^\alpha}{z^2}$$

– верно.

Как следствие, вблизи $x^\mu \simeq a^\mu$ $F_{\mu\nu} \simeq 0$.

$\Longrightarrow$

$$n = + \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{tr} \int_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta =$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \operatorname{tr} \int_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \omega_1 \partial_\nu \omega_1^{-1} \cdot \omega_1 \partial_\alpha \omega_1^{-1} \cdot \omega_1 \partial_\beta \omega_1^{-1}$$

"–"

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \operatorname{tr} \int_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \partial_\nu \omega_1 \cdot \partial_\alpha \omega_1^{-1} \cdot \omega_1 \partial_\beta \omega_1^{-1} =$$

Учитывая, что $dS_\mu \sim z_\mu$, мы видим, что производные не действуют на z в знаменателе:

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \operatorname{tr} \int_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \partial_\nu \left(\frac{e_a^+ z_a}{z}\right) \partial_\alpha \left(\frac{e_b z_b}{z}\right) \frac{e_c^+ z_c}{z} \cdot$$

$$\cdot \partial_\beta \left(\frac{e_d z_d}{z}\right) = -\frac{1}{24\pi^2} \operatorname{tr} \int_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \frac{e_\nu^+}{z} \cdot \frac{e_\alpha}{z} \cdot \frac{e_\gamma^+ z_\gamma}{z} \cdot \frac{e_\beta}{z}$$

$$= -\frac{1}{12\,\cancel{24}\pi^2}\int\limits_{S^3_\varepsilon} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\frac{1}{z^4}\, z_\gamma\, \cancel{2}\left(\underset{\text{"+"}}{\varepsilon_{\nu\alpha\gamma\beta}} + \cancel{\delta_{\nu\alpha}}\,\delta_{\gamma\beta} - \cancel{\delta_{\nu\gamma}}\,\delta_{\alpha\beta}\right.$$

$$\left. + \delta_{\nu\beta}\,\cancel{\delta_{\alpha\gamma}}\right) = \left[\,3! = 6;\;\; dS_\mu \sim z_\mu\,\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^3_\varepsilon} dS_\mu \cdot \frac{z_\mu}{z^4} = +\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^3_\varepsilon} dS \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{1}{2\pi^2}\cdot 2\pi^2 = 1$$

— действительно, топологическое число одноинстантонного решения оказалось равным 1.

В общем случае топологическое число вычисляется аналогичным образом:

$$A_\mu = i\bar\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i^2}{(x_\mu - a_{\mu i})^2}\right] =$$

$$= i\bar\sigma_{\mu\nu}\,\frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\rho_i^2}{(x_\mu - a_{\mu i})^2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(-2)\rho_i^2 (x-a_i)_\nu}{(x-a_i)^4}$$

Вблизи $a_{\mu i}$

$$A_\mu \simeq -2i\bar\sigma_{\mu\nu}\,\frac{1}{\rho_i^2/(x-a_i)^2}\cdot\frac{\rho_i^2 (x-a_i)_\nu}{(x-a_i)^4} =$$

$$= -2i\bar\sigma_{\mu\nu}\,\frac{(x-a_i)_\nu}{(x-a_i)^2} = \omega_{1i}\,\partial_\mu\,\omega_{1i}^{-1} \quad \text{где}\quad \omega_{1i} \equiv \frac{e^+_\mu z^\mu_i}{z_i}\,;$$

$$z^\mu_i \equiv x^\mu - a^\mu_i\,.$$

Поэтому вблизи $a_{\mu i}$ решение также представляет собой чистую калибровку, такую же, как и в одноинстантонном случае. Поэтому

$$n = -\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\int\limits_{S^3_\infty + S^3_{\varepsilon_1} + \ldots + S^3_{\varepsilon_n}} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Big(A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\int\limits_{S^3_{\varepsilon_i}} dS_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, A_\nu A_\alpha A_\beta = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

— действительно, топологическое число совпадает с числом слагаемых в сумме.

Вернёмся к одноинстантонному решению

$$A_\mu = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\frac{z_\nu \rho^2}{z^2(z^2+\rho^2)} \qquad \text{где} \quad z^\mu = x^\mu - a^\mu$$

— сингулярно при $x^\mu = a^\mu$.

Однако сингулярность при $z=0$ можно устранить с помощью сингулярного калибровочного преобразования

$$A_\mu \longrightarrow \omega_1^{-1}A_\mu\,\omega_1 + \omega_1^{-1}\partial_\mu\,\omega_1 .$$

Действительно,

$$\omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1} = -2i\,\bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{z^\nu}{z^2}$$

Поэтому

$$A_\mu = \omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1} \cdot \frac{\rho^2}{z^2+\rho^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cancel{\omega_1^{-1}} \cdot \cancel{\omega_1} \partial_\mu \omega_1^{-1} \cdot \omega_1 \cdot \frac{\rho^2}{z^2+\rho^2} + \omega_1^{-1} \partial_\mu \omega_1$$

$$= \omega_1^{-1} \partial_\mu \omega_1 \left[-\frac{\rho^2}{z^2+\rho^2} + 1 \right] = \omega_1^{-1} \partial_\mu \omega_1 \cdot \frac{z^2 + \cancel{\rho^2} - \cancel{\rho^2}}{z^2+\rho^2} =$$

$$= \omega_1^{-1} \partial_\mu \omega_1 \cdot \frac{z^2}{z^2+\rho^2}$$

При этом, аналогично предыдущему случаю,

$$\omega_1^{-1} \partial_\mu \omega_1 = \frac{e_\alpha z^\alpha}{z} \partial_\mu \left(\frac{e_\beta^+ z_\beta}{z} \right) = \frac{e_\alpha z^\alpha}{z} \left(\frac{e_\mu^+}{z} - \frac{e_\beta^+ z_\beta z_\mu}{z^3} \right)$$

$$= e_\alpha e_\mu^+ \frac{z^\alpha}{z^2} - \frac{z_\mu}{z^2} = \frac{1}{2} \left(e_\alpha e_\mu^+ - e_\mu e_\alpha^+ \right) \frac{z_\alpha}{z^2} = 2i\,\sigma_{\alpha\mu} \frac{z_\alpha}{z^2}$$

$$= -2i\,\sigma_{\mu\alpha} \frac{z_\alpha}{z^2}$$

Поэтому

$$A_\mu \longrightarrow -2i\,\sigma_{\mu\alpha} \frac{z_\alpha}{z^2} \cdot \frac{z^2}{z^2+\rho^2} = -2i\,\sigma_{\mu\alpha} \frac{z_\alpha}{z^2+\rho^2}$$

– сингулярность при $z=0$ исчезает.

Тогда вклад в топ. число даст S^3_∞ (а не S^3_ε)

Калибровка, в которой $A_\mu = -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\dfrac{z^\nu\rho^2}{z^2(z^2+\rho^2)}$

называется сингулярной,

а калибровка – в которой $A_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu}\dfrac{z^\nu}{z^2+\rho^2}$

– регулярной.

Вычислим теперь тензор поля одноинстантонного решения в регулярной калибровке:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = -2i\sigma_{\nu\alpha}\partial_\mu\left(\frac{z^\alpha}{z^2+\rho^2}\right)$$

$$+ 2i\sigma_{\mu\alpha}\partial_\nu\left(\frac{z^\alpha}{z^2+\rho^2}\right) - 4[\sigma_{\mu\alpha},\sigma_{\nu\beta}]\frac{z^\alpha z^\beta}{(z^2+\rho^2)^2} =$$

$$= -2i\sigma_{\nu\alpha}\left(\frac{\delta_{\mu\alpha}}{z^2+\rho^2} - \cancel{\frac{2z_\mu z_\alpha}{(z^2+\rho^2)^2}}\right) + 2i\sigma_{\mu\alpha}\left(\frac{\delta_{\nu\alpha}}{z^2+\rho^2}\right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{2z_\nu z_\alpha}{(z^2+\rho^2)^2}}\right) - 4i\left(\sigma_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + \cancelto{0}{\sigma_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}} - \cancel{\sigma_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu}} - \cancel{\sigma_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta}}\right)$$

$$\cdot\frac{z_\alpha z_\beta}{(z^2+\rho^2)^2} = 4i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{z^2+\rho^2} - 4i\sigma_{\mu\nu}\frac{z^2}{(z^2+\rho^2)^2} =$$

$$= 4i\sigma_{\mu\nu}\frac{\cancel{z^2}+\rho^2-\cancel{z^2}}{(z^2+\rho^2)^2} = 4i\sigma_{\mu\nu}\frac{\rho^2}{(z^2+\rho^2)^2}$$

– тензор поля оказался пропорционален само-дуальной матрице $\sigma_{\mu\nu}$ и $\Rightarrow$ удовлетворяет уравнению самодуальности.

Для перехода к сингулярной калибровке совершаем преобразование

$$(A_\mu)_{\text{синг.}} = \omega_1 (A_\mu)_{\text{рег.}}\, \omega_1^{-1} + \omega_1 \partial_\mu \omega_1^{-1}$$

при котором

$$(F_{\mu\nu})_{\text{синг.}} = \omega_1 (F_{\mu\nu})_{\text{рег.}}\, \omega_1^{-1} = \omega_1 \sigma_{\mu\nu} \omega_1^{-1} \cdot \frac{4i\rho^2}{(z^2+\rho^2)^2}$$

Д/З Вычислить действие и топологическое число этого решения на основе этого выражения:

$$S = -\frac{1}{2e^2} \operatorname{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 \overset{?}{=} \frac{8\pi^2}{e^2}$$

$$n = -\frac{1}{16\pi^2} \operatorname{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \overset{?}{=} 1$$

Д/З Найти явный вид антиинстантонного решения, подставляя анзац

$$A_\mu = i\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu \varphi(x)$$

в ур-е антисамодуальности.

§6. Число параметров инстантонного решения

Ранее мы получили решение

$$A_\mu = i\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu \ln\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^2}{(x^\mu - a_k^\mu)^2}\right]$$

Очевидно, что можно сделать калибровочное преобразование с $\omega \neq \omega(x)$, которое переведёт решение ур-я $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ в другое решение:

$$A_\mu = i\,\omega\bar{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{-1}\partial_\nu \ln\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^2}{(x^\mu - a_k^\mu)^2}\right]$$

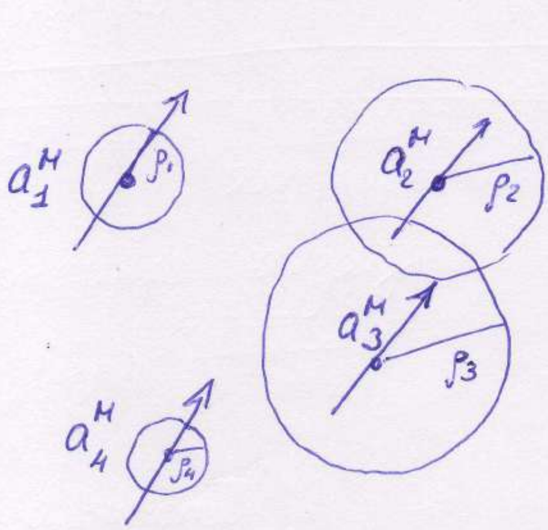
Это решение имеет $5n+3$ параметров,

$$\left.\begin{array}{l} \rho_k - n \text{ шт} \\ a_k^\mu - 4n \text{ шт} \\ \omega - 3 \text{ шт} \end{array}\right\} \text{всего } 5n+3.$$

a_k^μ – положения сингулярностей

ρ_k – характерный размер области где решение $\neq 0$

ω – направление в 4-х мерном пр-ве



Одноинстантонное $(n=1)$ решение

$$A_\mu = -2i\,\omega\bar{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{-1}\frac{z_\nu \rho^2}{z^2(z^2+\rho^2)}, \quad z^\mu \equiv x^\mu - a^\mu.$$

имеет 8 параметров

Предположим, что $\forall\, k, l \quad |a_k^\mu - a_l^\mu| \ll \rho_k; \rho_l$ $(k \neq l)$. Тогда вблизи a_i^μ

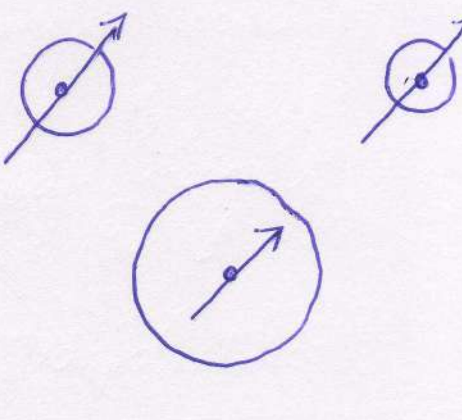
$$A_\mu = i\omega\bar{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{-1}\partial_\nu \ln\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k^2}{(x^\mu-a_k^\mu)^2}\right] \approx$$

$$\approx i\omega\bar{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{-1}\partial_\nu \ln\left[1+\frac{\rho_i^2}{(x^\mu-a_i^\mu)^2}\right]$$

все остальные слагаемые малы по сравнению с 1.

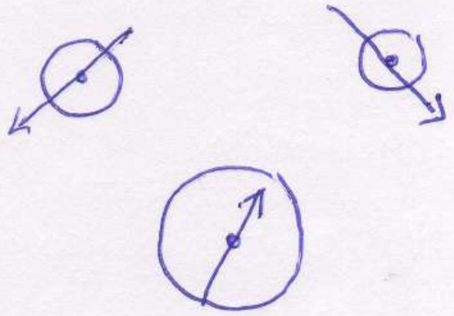
Одноинстантонное решение

— получается суперпозиция отдельных инстантонов — они не чувствуют друг друга.



Но почему они все смотрят в одну сторону?

Более разумная картинка:

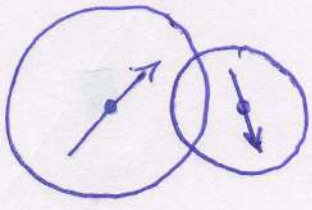


— все инстантоны смотрят в свою сторону.

— получается $8n$ параметров

Как будет выглядеть $8n$-параметрическое решение если $\exists$ k и l т.ч.

$$|a_k^\mu - a_l^\mu| \text{ сравнимо с } \rho_k \text{ и } \rho_l ?$$



Ответ даёт т.н. АДХМ формализм.

Глава VIII. Инстантонные решения в формализме Атьи-Дринфельда-Хитчина-Манина (АДХМ)

§1. Кватернионы.

a — кватернион, если $a = e_\mu a^\mu$, $\mu = \overline{1,4}$, $a_\mu \in Re$.

$e_\mu = (i\vec{\sigma}, 1_2)$ и $\Rightarrow$

$$a = e_\mu a^\mu = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix}$$

Это выражение похоже на элемент $SU(2)$, но теперь $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ может принимать любые значения.

Очевидно, что $\forall$ кватернион можно представить в виде $a=\rho\omega$, где $\rho \in Re$ - число, а $\omega \in SU(2)$ т.к.

$$\rho \begin{pmatrix} a_4+ia_3 & ia_1+a_2 \\ ia_1-a_2 & a_4-ia_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_4+i\tilde{a}_3 & i\tilde{a}_1+\tilde{a}_2 \\ i\tilde{a}_1-\tilde{a}_2 & \tilde{a}_4-i\tilde{a}_3 \end{pmatrix}$$

где $\tilde{a}_1^2+\tilde{a}_2^2+\tilde{a}_3^2+\tilde{a}_4^2=\rho^2$ - отсюда находим ρ.

Поэтому произведение 2-х кватернионов - снова кватернион:

$$a_1 \cdot a_2 = \rho_1\omega_1 \cdot \rho_2\omega_2 = \underbrace{(\rho_1\rho_2)}_{Re\text{-число}} \cdot \underbrace{(\omega_1\omega_2)}_{\in SU(2)}$$

§2. Решение АДХМ

Будем искать решение ур-я самодуальности в виде

$$A_\mu = \Omega_K^+ \partial_\mu \Omega_K$$

где $K=\overline{0,n}$ (как и все большие буквы) и $\forall K$ Ω_K - кватернион.

При этом будем накладывать условия

1) $\Omega_k^+ \Omega_k = 1_2$

2) $\Delta_{kk}^+ \Omega_k = 0$, $k = \overline{1,n}$ (как и все маленькие буквы)

где

3) $\Delta_{kk}^+ = A_{kk}^+ + e_\mu^+ x^\mu \cdot B_{kk}^+$

$\left(\Delta_{kk}^+ \equiv (\Delta_{kk})^+ ; \quad \Delta_{kk} = A_{kk} + B_{kk} e_\mu x^\mu \right)$

причем $A \neq A(x)$; $B \neq B(x)$.

4) $\Delta_{\ell k}^+ \Delta_{kk} = (R^{-1})_{\ell k} \cdot 1_2$

где R - числовая матрица.

<u>Теорема (АДХМ)</u> Если выполнены условия 1) - 4), то $A_\mu = \Omega_k^+ \partial_\mu \Omega_k$ принадлежит алгебре Ли группы $SU(2)$ и является решением ур-я самодуальности $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ (а $\Rightarrow$ и уравнений движения)

Доказательство.

Вначале докажем, что $A_\mu = \Omega_k^+ \partial_\mu \Omega_k$ принадлежит алгебре Ли группы $SU(2)$, т.е. является антиэрмитовой бесследовой матрицей. Имеем:

$$A_\mu^+ = \partial_\mu \Omega_k^+ \cdot \Omega_k = \partial_\mu\left(\Omega_k^+ \Omega_k\right) - \Omega_k^+ \partial_\mu \Omega_k \overset{1)}{=}$$

$$= \cancelto{0}{\partial_\mu(1_2)} - A_\mu = - A_\mu .$$

Пусть $\Omega_k = \rho_k \omega_k$, $\rho_k \in Re$; $\omega_k \in SU(2)$.

Тогда

$$\operatorname{tr} A_\mu = \operatorname{tr}\left(\rho_k \omega_k^{-1} \partial_\mu (\rho_k \omega_k)\right) = \operatorname{tr}\left(\cancelto{0}{\rho_k^2 \omega_k^{-1} \partial_\mu \omega_k} + \right.$$

$$\left. + \rho_k \partial_\mu \rho_k\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\, \partial_\mu \left(\rho_k^2\right)$$

т.к. $\omega_k^{-1} \partial_\mu \omega_k \in su(2)$

Но $1_2 = \Omega_k^+ \Omega_k = \rho_k^2 \cdot 1_2 \Rightarrow \rho_k^2 = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} A_\mu = \partial_\mu 1 = 0$$

Поэтому A_μ действительно принадлежит $su(2)$.

Перейдём теперь к доказательству того, что $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$. Для этого потребуется

<u>Лемма</u> $\delta_{KM} - \Omega_K \Omega_M^+ = \Delta_{Kk} R_{km} \Delta_{mM}^+$

Док-во леммы:

Левая часть этого равенства удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \Delta^+_{\ell k}(\delta_{kM} - \Omega_k \Omega^+_M) \overset{2)}{=} \Delta^+_{\ell M} \\ \Omega^+_k(\delta_{kM} - \Omega_k \Omega^+_M) \overset{1)}{=} \Omega^+_M - \Omega^+_M = 0 \end{cases}$$

Правая часть также удовлетворяет этим ур-ям:

$$\begin{cases} \Delta^+_{\ell k}(\Delta_{kk} R_{km} \Delta^+_{mM}) \overset{4)}{=} (R^{-1})_{\ell k} R_{km} \Delta^+_{mM} = \Delta^+_{\ell M} \\ \Omega^+_k(\Delta_{kk} R_{km} \Delta^+_{mM}) \overset{2)}{=} 0 \end{cases}$$

В этой системе $4(n+1)^2$ неизвестных (в 1-м кватернионе 4 Re числа) и

$$4[n(n+1) + (n+1)] = 4(n+1)^2 \text{ уравнений}$$

Можно убедиться, что эта система невырождена т.е. она имеет единственное решение и =>

$$\delta_{kM} - \Omega_k \Omega^+_M = \Delta_{Kk} R_{km} \Delta^+_{mM}$$

Для этого Δ^+_{kK} должно иметь ранг n + ортогональность к Ω^+_K

Лемма доказана.

Перейдём теперь к доказательству теоремы:

Вычислим тензор поля $F_{\mu\nu}$ для $A_\mu = \Omega^+_K \partial_\mu \Omega_K$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

$$= \partial_\mu(\Omega_K^+ \partial_\nu \Omega_K) - \partial_\nu(\Omega_K^+ \partial_\mu \Omega_K) + \Omega_K^+ \partial_\mu \Omega_K \cdot \Omega_L^+ \partial_\nu \Omega_L$$

$$- \Omega_K^+ \partial_\nu \Omega_K \Omega_L^+ \partial_\mu \Omega_K \overset{1)}{=} \left[\Omega_K^+ \partial_\mu \Omega_K = - \partial_\mu \Omega_K^+ \Omega_K \right]$$

$$= \partial_\mu \Omega_K^+ \partial_\nu \Omega_K + \cancel{\Omega_K^+ \partial_\mu \partial_\nu \Omega_K} - \partial_\mu \Omega_K^+ \Omega_K \Omega_L^+ \partial_\nu \Omega_L$$

$$-(\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= \partial_\mu \Omega_K^+ (\delta_{KL} - \Omega_K \Omega_L^+) \partial_\nu \Omega_L - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

(используем лемму)

$$= \partial_\mu \Omega_K^+ \cdot \Delta_{Kk} R_{kl} \Delta^+_{lL} \partial_\nu \Omega_L - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

Имеем:

$$0 = \partial_\nu (\Delta^+_{lL} \Omega_L) = \partial_\nu \Delta^+_{lL} \cdot \Omega_L + \Delta^+_{lL} \partial_\nu \Omega_L =$$

$$= \left[\Delta^+_{lL} = A^+_{lL} + e^+_\alpha x^\alpha B^+_{lL} \right] = e^+_\nu B^+_{lL} \Omega_L + \Delta^+_{lL} \partial_\nu \Omega_L$$

$$\Rightarrow \Delta^+_{lL} \partial_\nu \Omega_L = - e^+_\nu B^+_{lL} \Omega_L$$

Аналогичным образом

$$\partial_\mu \Omega_K^+ \cdot \Delta_{Kk} = - \Omega_K^+ B_{Kk} e_\mu \text{ , т.е.}$$

$$F_{\mu\nu} = \Omega_K^+ B_{Kk} e_\mu R_{ke} e_\nu^+ B_{eL}^+ \Omega_L - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

Поскольку R_{ke} - числовая матрица, то она коммутирует с e_μ или (и) e_ν^+. Поэтому

$$F_{\mu\nu} = \Omega_K^+ B_{Kk} R_{ke} (e_\mu e_\nu^+ - e_\nu e_\mu^+) B_{eL}^+ \Omega_L =$$

$$= 4i\, \Omega_K^+ B_{Kk} R_{ke} \sigma_{\mu\nu} B_{eL}^+ \Omega_L$$

и утверждение теоремы следует из самодуальности матриц $\sigma_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$.

Теорема доказана.

§ 3. Одноинстантонное решение в формализме АДХМ

Выберем матрицу Δ_{Hm} (размера 2×1) в виде

$$\Delta_{Hm} = \begin{pmatrix} \rho\omega \\ e_\mu z^\mu \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad z^\mu \equiv x^\mu - a^\mu.$$

Она удовлетворяет всем требуемым условиям:

$$\Delta_{Hm} = A_{Hm} + B_{Hm} e_\mu x^\mu \quad \text{где}$$

$$A_{Hm} = \begin{pmatrix} \rho\omega \\ -e_\mu a^\mu \end{pmatrix} \qquad B_{Hm} = \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_2 \end{pmatrix}$$

При этом

$$\Delta^+_{mM}\Delta_{Mk} = (\rho\omega^+, e^+_\mu z^\mu)\begin{pmatrix}\rho\omega \\ e_\nu z^\nu\end{pmatrix} = (\rho^2+z^2)\cdot 1_2$$

$$\Rightarrow \quad R^{-1} = \rho^2 + z^2 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{1}{\rho^2+z^2}$$

Найдём теперь Ω_k, решая уравнения

$$\begin{cases} \Delta^+_{mM}\Omega_M = 0 \\ \Omega^+_M \Omega_M = 1_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (\rho\omega^+, e^+_\mu z^\mu)\begin{pmatrix}\Omega_0 \\ \Omega_1\end{pmatrix} = \rho\omega^+\Omega_0 + e^+_\mu z^\mu \Omega_1 \\ 0 = \Omega^+_0\Omega_0 + \Omega^+_1\Omega_1 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим Ω_1:

$$\Omega_1 = -\frac{e_\mu z^\mu}{z^2}\,\rho\omega^+\Omega_0$$

и подставляем во второе:

$$0 = \Omega^+_0\Omega_0 + \Omega^+_0\rho\omega\cdot\frac{e^+_\nu z^\nu}{z^2}\cdot\frac{e_\mu z^\mu}{z^2}\rho\omega^{-1}\Omega_0 =$$

$$= \Omega^+_0\Omega_0\left(1+\frac{\rho^2}{z^2}\right)$$

$\Rightarrow$ можно выбрать $\Omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\cdot 1_2$.

Поэтому одним из решений будет

$$\begin{cases} \Omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}} \cdot 1_2 \\[2ex] \Omega_1 = -\dfrac{e_\mu z^\mu \rho \omega^+}{z^2\sqrt{1+\rho^2/z^2}} \end{cases}$$

После этого вычисляем калибровочное поле A_μ:

$$A_\mu = \Omega_k^+ \partial_\mu \Omega_k = \Omega_0^+ \partial_\mu \Omega_0 + \Omega_1^+ \partial_\mu \Omega_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\, \partial_\mu \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}} + \frac{\omega \rho\, e_\alpha^+ z^\alpha}{z^2\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\, \partial_\mu \left(\frac{e_\beta z^\beta \rho\, \omega^{-1}}{z^2\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\left(\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2/z^2}}\right)\cdot\left(1+\rho^2/z^2\right) + \frac{\rho^2\omega}{z^2(1+\rho^2/z^2)}\, e_\alpha^+ z^\alpha \cdot$$

$$\cdot\, \partial_\mu\left(\frac{z^\beta}{z^2}\right)\cdot e_\beta \cdot \omega^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu \ln\left(1+\rho^2/z^2\right) + \frac{\rho^2}{z^2(1+\rho^2/z^2)}\cdot \omega\, e_\alpha^+ z^\alpha \left(e_\mu \frac{1}{z^2} - \right.$$

$$\left. -2 e_\beta \frac{z_\beta z_\mu}{z^4}\right)\omega^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\rho^2/z^2)}\left(-\frac{2\rho^2 z_\mu}{z^4}\right) + \frac{\rho^2 z_\alpha}{z^4(1+\rho^2/z^2)}\,\omega\, e_\alpha^+ e_\mu\, \omega^{-1}$$

$$- \frac{\cancel{2}\rho^2 z_\mu}{z^4(1+\rho^2/z^2)} = \frac{\rho^2 z_\alpha}{z^2(\rho^2+z^2)}\,\omega\left(e_\alpha^+ e_\mu - \frac{1}{2}\left(e_\alpha^+ e_\mu + e_\mu^+ e_\alpha\right)\right)\omega^{-1}$$

$$= \frac{\rho^2 z_\alpha}{2z^2(z^2+\rho^2)}\, \omega\left(e_\alpha^+ e_\mu - e_\mu^+ e_\alpha\right)\omega^{-1} =$$

$$= -2i\omega\bar{\sigma}_{\mu\alpha}\omega^{-1}\frac{\rho^2 z_\alpha}{z^2(z^2+\rho^2)} = i\omega\bar{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{-1}\partial_\nu \ln\left(1+\rho^2/z^2\right)$$

– получилось одноинстантонное решение в сингулярной калибровке.

§4. $5n+3$-параметрическое решение как частный случай решения АДХМ

В этом случае матрица Δ_{Kk} имеет размер $(n+1)\times n$ и может быть записана в виде

$$\Delta_{Kk} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega & \rho_2\omega & \cdots & \rho_n\omega \\ e_\mu z_1^\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_\mu z_2^\mu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_\mu z_n^\mu \end{pmatrix} \quad \text{где } z_k^\mu \equiv x^\mu - a_k^\mu .$$

Важно, что при этом все ω – одинаковые.

Тогда

$$A_{Kk} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega & \rho_2\omega & \cdots & \rho_n\omega \\ -e_\mu a_1^\mu & & & \\ & -e_\mu a_2^\mu & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -e_\mu a_n^\mu \end{pmatrix} \qquad B_{Kk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$\overset{+}{\Delta}_{kK}\Delta_{ke} = \begin{bmatrix} \rho_1\omega^{-1} & e_\mu^+ z_1^\mu & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_n\omega^{-1} & 0 & & e_\mu^+ z_n^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1\omega & \cdots & \rho_n\omega \\ e_\nu z_1^\nu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_\nu z_n^\nu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho_1^2+z_1^2 & \rho_1\rho_2 & \cdots & \rho_1\rho_n \\ \rho_1\rho_2 & \rho_2^2+z_2^2 & \cdots & \rho_2\rho_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_1\rho_n & \rho_2\rho_n & \cdots & \rho_n^2+z_n^2 \end{bmatrix} \cdot 1_2$$

Но если ω были бы разные, то результат не был бы пропорционален 1_2.

Уравнения для Ω_K:

$$\begin{cases} 0 = \overset{+}{\Delta}_{kK}\Omega_K \\ 1_2 = \Omega_K^+\Omega_K \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = \rho_k\omega^{-1}\Omega_0 + e_\mu^+ z_k^\mu \Omega_k \\ 1_2 = \Omega_0^+\Omega_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \Omega_k^+\Omega_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega_k = -\frac{e_\mu z_k^\mu \cdot \rho_k \omega^{-1}}{z_k^2}\Omega_0 \qquad \forall\ k=\overline{1,n}$$

$$1_2 = \Omega_0^+\Omega_0 + \sum_{k=1}^{n} \Omega_0^+ \frac{\rho_k\omega}{z_k^2} e_\mu^+ z_k^\mu \cdot e_\nu z_k^\nu \cdot \frac{\rho_k\omega^{-1}}{z_k^2}\Omega_0 =$$

$$= \Omega_0^+\Omega_0\left(1 + \sum_k \rho_k^2/z_k^2\right).$$

$$\Rightarrow \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_k \rho_k^2/z_k^2}} \cdot 1_2\,; \qquad \Omega_i = -\frac{e_\mu z_i^\mu \rho_i \omega^{-1}}{z_i^2\sqrt{1+\sum\limits_k \rho_k^2/z_k^2}}$$

После этого вычисляем калибровочное поле:

$$A_\mu = \Omega_0^+ \partial_\mu \Omega_0 + \sum_i \Omega_i^+ \partial_\mu \Omega_i =$$

$$= \Omega_0^+ \partial_\mu \Omega_0 \left(1 + \sum_i \rho_i^2/z_i^2\right) + \sum_i \frac{1}{\left(1+\sum_k \rho_k^2/z_k^2\right)}\, \omega \frac{e_\alpha^+ z_i^\alpha}{z_i^2} \cdot$$

$$\cdot \partial_\mu \left(\frac{e_\beta z_i^\beta}{z_i^2}\right) \omega^{-1} \cdot \rho_i^2 =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\partial_\mu \ln\left(1 + \sum_i \rho_i^2/z_i^2\right)} + \sum_i \frac{1}{1+\sum_k \rho_k^2/z_k^2}\, \rho_i^2 \cdot \omega \Big(\frac{1}{z_i^2} \cdot$$

$$\overset{(-1)}{\cancel{(-2)}}\, z_\mu + \frac{e_\alpha^+ z_i^\alpha}{z_i^4} e_\mu \Big)\, \omega^{-1}$$

$$= \frac{1}{1+\sum_k \rho_k^2/z_k^2} \cdot \sum_i \frac{\rho_i^2}{z_i^4}\, \omega \left(e_\alpha^+ e_\mu - \frac{1}{2}\left(e_\alpha^+ e_\mu + e_\mu^+ e_\alpha\right)\right) \omega^{-1} z_{\alpha i}$$

$$= \frac{1}{1+\sum_i \rho_i^2/z_i^2} \cdot \sum_i (-2i)\, \omega\, \bar{\sigma}_{\mu\alpha}\, \omega^{-1} \frac{z_i^\alpha}{z_i^4} \rho_i^2 =$$

$$= i\, \omega \bar{\sigma}_{\mu\nu}\, \omega^{-1} \partial_\nu \ln\left(1 + \sum_i \rho_i^2/z_i^2\right)$$

— действительно получается $5n+3$-параметрическое инстантонное решение.

§ 5. Наиболее общее 2-х инстантонное решение

Если попробовать взять

$$\Delta_{Kk} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega_1 & \rho_2\omega_2 \\ e_\mu z_1^\mu & 0 \\ 0 & e_\mu z_2^\mu \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\Delta^+_{eK}\Delta_{Kk} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega_1^{-1} & e_\mu^+ z_1^\mu & 0 \\ \rho_2\omega_2^{-1} & 0 & e_\mu^+ z_2^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1\omega_1 & \rho_2\omega_2 \\ e_\nu z_1^\nu & 0 \\ 0 & e_\nu z_2^\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_1^2 + z_1^2 & \rho_1\rho_2\,\omega_1^{-1}\omega_2 \\ \rho_1\rho_2\,\omega_2^{-1}\omega_1 & \rho_2^2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$ — результат не будет пропорционален 1_2.

Попробуем исправить ситуацию, взяв

$$\Delta_{Kk} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega_1 & \rho_2\omega_2 \\ e_\mu z_1^\mu & a_{12} \\ a_{21} & e_\mu z_2^\mu \end{pmatrix}$$ и подберём a_{12} и a_{21} т.ч. $\Delta^+_{kK}\Delta_{Ke} \sim 1_2$.

Тогда если $\varpi_1 \equiv \rho_1\omega_1$; $\varpi_2 \equiv \rho_2\omega_2$, то

$$\Delta^+_{kK}\Delta_{Ke} = \begin{pmatrix} \varpi_1^+ & e_\mu^+ z_1^\mu & a_{21}^+ \\ \varpi_2^+ & a_{12}^+ & e_\mu^+ z_2^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_1 & \varpi_2 \\ e_\nu z_1^\nu & a_{12} \\ a_{21} & e_\nu z_2^\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \rho_1^2 + z_1^2 + a_{21}^+ a_{21} & \omega_1^+ \omega_2 + e_\mu^+ z_1^\mu \cdot a_{12} + a_{21}^+ e_\mu z_2^\mu \\ \hline \omega_2^+ \omega_1 + a_{12}^+ e_\mu z_1^\mu + e_\mu^+ z_2^\mu a_{21} & \rho_2^2 + z_2^2 + a_{12}^+ a_{12} \end{array} \right)$$

Очевидно, что диагональные элементы пропорциональны 1_2, т.к. если $a = e_\mu a_\mu$, то

$$a^+ a = e_\mu^+ a_\mu \cdot e_\nu a_\nu = a_\mu^2 \cdot 1_2$$

Недиагональные элементы отличаются на эрмитово сопряжение. При этом если

$$a = e_\mu a_\mu = i\vec{\sigma}\vec{a} + a_4 \cdot 1_2 \sim 1_2 \quad , \text{то } \vec{a} = 0$$

и обратно. Но если

$a^+ = a$, то

$$-i\vec{\sigma}\vec{a} + a_4 \cdot 1_2 = i\vec{\sigma}\vec{a} + a_4 \cdot 1_2 \quad \text{и} \quad \Rightarrow \vec{a} = 0$$

а a_4 - произвольн

$\Rightarrow$ условие $a \sim 1_2$ эквивалентно $a^+ = a$.

т.о. нам необходимо наложить условие

$$\omega_2^+ \omega_1 + a_{12}^+ e_\mu z_1^\mu + e_\mu^+ z_2^\mu \cdot a_{21} = \omega_1^+ \omega_2 + e_\mu^+ z_1^\mu \cdot a_{12} + a_{21}^+ e_\mu z_2^\mu$$

которое должно выполняться во всех точках 4-х мерного евклидова пространства.

В рассматриваемом равенстве есть слагаемые 1-го и 0-го порядка по координатам.

Рассмотрим вначале слагаемые, содержащие x^μ.

$$a_{12}^+ e_\mu x^\mu + e_\mu^+ x^\mu \cdot a_{21} = e_\mu^+ x^\mu \cdot a_{12} + a_{21}^+ e_\mu x^\mu.$$

Это равенство очевидно выполняется если

$a_{12} = a_{21}$.

Слагаемые, не зависящие от координат дают равенство

$$\omega_2^+ \omega_1 - a_{12}^+ e_\mu a_1^\mu - e_\mu^+ a_2^\mu \cdot a_{12} = \omega_1^+ \omega_2 - e_\mu^+ a_1^\mu \cdot a_{12} - a_{12}^+ e_\mu a_2^\mu.$$

Эквивалентно

$$\omega_1^+ \omega_2 - \omega_2^+ \omega_1 = -a_{12}^+ e_\mu (a_1^\mu - a_2^\mu) + e_\mu^+ (a_1^\mu - a_2^\mu) a_{12}$$

Поэтому

$$e_\mu^+ (a_1^\mu - a_2^\mu) \cdot a_{12} = \frac{1}{2}(\omega_1^+ \omega_2 - \omega_2^+ \omega_1) + \frac{1}{2} \cdot \Sigma \cdot 1_2$$

где Σ – произвольное Re число.

Умножая на $e_\nu (a_1^\nu - a_2^\nu)$, получаем, что

$$a_{12} = \frac{e_\mu (a_1^\mu - a_2^\mu)}{2|a_1 - a_2|^2} (\omega_1^+ \omega_2 - \omega_2^+ \omega_1 + \Sigma \cdot 1_2)$$

После этого можно определить Ω_k из уравнений

$$\Delta^+_{kk}\Omega_k = 0$$

, которые линейны по Ω_k

и найти Ω_0 из условия

$$1_2 = \Omega_k^+\Omega_k$$

После этого вычисляется $A_\mu = \Omega_k^+\partial_\mu\Omega_k$

– получаются большие выражения, но всё можно вычислить до конца.

§6. Проблемы при построении решений с $n \geqslant 3$

Попробуем обобщить полученное решение на случай $n \geqslant 3$, взяв (например, при $n=3$)

$$\Delta_{k_k} = \begin{pmatrix} \rho_1\omega_1 & \rho_2\omega_2 & \rho_3\omega_3 \\ e_\mu z_1^\mu & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & e_\mu z_2^\mu & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & e_\mu z_3^\mu \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \varpi_1 &\equiv \rho_1\omega_1 \\ \varpi_2 &\equiv \rho_2\omega_2 \\ \varpi_3 &\equiv \rho_3\omega_3 \end{aligned}$$

и потребуем, чтобы

$$1_2 \sim \Delta^+\Delta = \begin{pmatrix} \varpi_1^+ & e_\mu^+ z_1^\mu & a_{21}^+ & a_{31}^+ \\ \varpi_2^+ & a_{12}^+ & e_\mu^+ z_2^\mu & a_{32}^+ \\ \varpi_3^+ & a_{13}^+ & a_{23}^+ & e_\mu^+ z_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \\ e_\nu z_1^\nu & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & e_\nu z_2^\nu & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & e_\nu z_3^\nu \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы $\sim 1_2$, например, 11-элемент равен

$$w_1^+ w_1 + (z_1)^2 + a_{21}^+ a_{21} + a_{31}^+ a_{31} \sim 1_2 \quad \text{т.к.}$$

$$a^+ a = a_\mu^2 \cdot 1_2 \quad \forall \text{ кватерниона } a.$$

Но недиагональные элементы этому условию не удовлетворяют:

$$\text{Элемент } 12 = w_1^+ w_2 + e_\mu^+ z_1^\mu \cdot a_{12} + a_{21}^+ e_\mu z_2^\mu + a_{31}^+ a_{32}$$

Он пропорционален единичной матрице, если

$$w_1^+ w_2 + e_\mu^+ z_1^\mu \cdot a_{12} + a_{21}^+ e_\mu z_2^\mu + a_{31}^+ a_{32} =$$

$$= w_2^+ w_1 + a_{12}^+ e_\mu z_1^\mu + e_\mu^+ z_2^\mu \cdot a_{21} + a_{32}^+ a_{31}$$

Члены $\sim x^\mu$ совпадают если $a_{21} = a_{12}$, но для слагаемых без x^μ получаются нелинейные ур-я, которые легко не решаются.

Поэтому при $n \geq 3$ в общем случае найти явный вид инстантонного решения не удаётся.

Однако можно вычислить число его параметров.

§7. Число параметров решения АДХМ

Утв. АДХМ условия

1) $\Omega_K^+ \Omega_K = 1_2$

2) $\Delta_{kK}^+ \Omega_K = 0$

3) $\Delta_{Kk} = A_{Kk} + B_{Kk} e_\mu x^\mu$, $A \neq A(x)$, $B \neq B(x)$

4) $\Delta_{kK}^+ \Delta_{Kl} = (R^{-1})_{kl} \cdot 1_2$ и $A_\mu = \Omega_K^+ \partial_\mu \Omega_K$

инвариантны относительно преобразований

$$\begin{cases} \Delta_{Kk} \longrightarrow Q_{KM} \Delta_{Mm} P_{mk} \ ; & Q_{KM}^+ \cdot Q_{ML} = \delta_{KL} \cdot 1_2 \\ \Omega_K \longrightarrow Q_{KM} \Omega_M & Q \neq Q(x); \ P \neq P(x) \end{cases}$$

где Q_{KM} – $(n+1) \times (n+1)$ - матрица из кватернионов,

а P_{mk} – $n \times n$ Re числовая матрица.

Доказательство:

1) $\Omega_K^+ \Omega_K \longrightarrow \Omega_M^+ Q_{MK}^+ Q_{KN} \Omega_N = \Omega_M^+ \Omega_M = 1_2$.

2) $\Delta_{kK}^+ \Omega_K \longrightarrow P_{km} \Delta_{mM}^+ Q_{MK}^+ Q_{KN} \Omega_N = P_{km} \Delta_{mM}^+ \Omega_M = 0$

3) $\Delta_{Kk} \longrightarrow Q_{KM} (A_{Mm} + B_{Mm} e_\mu x^\mu) P_{mk} =$ (P-числовая матрица)

$$= (Q_{KM} A_{Mm} P_{mk}) + (Q_{KM} B_{Mm} P_{mk}) e_\mu x^\mu$$

4) $\Delta^+_{kK} \Delta_{Kl} \to P_{km} \Delta^+_{mM} Q^+_{MK} \cdot Q_{KN} \Delta_{Nn} P_{nl} =$

$$= P_{km} \Delta^+_{mM} \Delta_{Mn} P_{nl} = \left(P_{km} (R^{-1})_{mn} P_{nl}\right) \cdot 1_2$$

$$A_\mu = \Omega^+_K \partial_\mu \Omega_K \to \Omega^+_M Q^+_{MK} \partial_\mu (Q_{KL} \Omega_L) = \Omega^+_M \partial_\mu \Omega_M = A_\mu$$

Утв. доказано.

т.о. $\exists$ преобразования, которые меняют матрицу Δ, но оставляют инвариантным A_μ (чем-то похоже на калибровочные преобразования, но, конечно, не одно и тоже)

Утв. Матрицы Q и P можно выбрать т.ч.

$$B_{Kk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \Omega_0^+ = \Omega_0.$$

Доказательство.

Рассмотрим условие $\Delta^+_{kK} \Delta_{Kl} = (R^{-1})_{kl} \cdot 1_2$.

В нём есть слагаемые 0-го, 1-го и 2-го порядков по x^μ. Рассмотрим слагаемые 2-го порядка:

$$e_\mu^+ x^\mu \cdot B_{kk}^+ \cdot B_{kl} e_\nu x^\nu \sim 1_2$$

Умножая слева на $\frac{1}{x^2} e_\alpha x^\alpha$ и справа на $\frac{1}{x^2} e_\beta^+ x^\beta$, получим, что

$$B_{kk}^+ B_{kl} = (\Gamma^{-1})_{kl} \cdot 1_2$$ где Γ^{-1} - числовая матрица.

При этом она эрмитова и Re и => симметрична.
$(\Gamma^{-1})_{kl} = (\Gamma^{-1})_{lk} \in Re$.

Построим числовую матрицу P размера $n \times n$, т.ч.

$$P_{mk} (\Gamma^{-1})_{ml} P_{ln} = \delta_{kn} \quad (\Leftrightarrow P^T \Gamma^{-1} P = 1)$$

(Ортогональным преобразованием диагонализуем, потом масштабируем)

$$\Rightarrow \quad P_{mk} \cdot B_{mk}^+ B_{kl} P_{ln} = \delta_{kn} \cdot 1_2 . \qquad (*)$$

Положим по определению

$\underline{Q_{kn}^+ \equiv B_{kl} P_{ln}}$. Тогда формулу (*) можно переписать в виде ($P \in Re$ и $\Rightarrow P^+ = P^T$)

$$Q_{kk} Q_{kn}^+ = \delta_{kn} \cdot 1_2$$

Затем строим величины Q^+_{K0} $(=(Q_{0K})^+)$, определяя их из системы уравнений

$$Q_{KL}Q^+_{L0} = \delta_{K0}\cdot 1_2 .$$

При этом имеется $4(n+1)$ неизвестных и $4n+1$ ур-е, поскольку при $K=0$

$Q_{0L}Q^+_{L0} = 1_2$ даёт только 1 числовое ур-е.

$\Longrightarrow$ имеется ещё произвол в 3 Re параметра.

т.о. у нас есть Q_{KL} : $Q_{KL}Q^+_{LM} = \delta_{KM}\cdot 1_2$

и $\Rightarrow$ $Q^+_{KL}Q_{LM} = \delta_{KM}\cdot 1_2$.

Вернёмся теперь к равенству $Q^+_{Kn} = B_{Kl}P_{ln}$ и умножим его слева на Q_{LK}. Тогда

$$\delta_{Ln}\cdot 1_2 = Q_{LK}Q^+_{Kn} = Q_{LK}B_{Kl}P_{ln} = B'_{Ln}$$

т.о. новая матрица B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \ \ddots \ 1 \end{pmatrix}$.

Но при этом Q определено неоднозначно. Если

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \omega & 0 \\ \hline 0 & 1_n\cdot 1_2 \end{array}\right] \text{, то } Q^+_{KL}Q_{LM} = \delta_{KM}\cdot 1_2$$

(недостающие 3 степени свободы)

но при этом вид B сохраняется:

$$\left[\begin{array}{c|c} \omega & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

Однако Ω_0 при таких преобразованиях изменится:

$$Q\Omega = \left[\begin{array}{c|c} \omega & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Omega_0 \\ \hline \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \omega\Omega_0 \\ \hline \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_n \end{array}\right]$$

Очевидно, что выбрав ω специальным образом можно добиться, чтобы $\Omega_0' \sim 1_2 \iff \Omega_0'^{+} = \Omega_0'$.

Утв. доказано.

В „калибровке" $B_{kk} = \delta_{kk}$ условие $\Delta_{kk}^{+}\Delta_{kl} \sim 1_2$ записывается в виде

$$\left(A_{kk}^{+} + e_\mu^{+}x^\mu B_{kk}^{+}\right)\left(A_{kl} + B_{kl}e_\nu x^\nu\right) \sim 1_2 .$$

Члены $\sim x^2$:

$$e_\mu^{+}x^\mu \cdot \delta_{kk}\cdot\delta_{kl}\, e_\nu x^\nu = x^2 \cdot \delta_{kl}\cdot 1_2 \quad \text{- верно.}$$

Члены $\sim x^1$:

$$e_\mu^+ x^\mu \delta_{kK} A_{Kl} + A^+_{kK} \delta_{Kl} e_\mu x^\mu \sim 1_2$$

$$e_\mu^+ x^\mu A_{Kl} + A^+_{Kl} e_\mu x^\mu \sim 1_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad e_\mu^+ x^\mu A_{Kl} + A^+_{Kl} e_\mu x^\mu = A^+_{lK} e_\mu x^\mu + e_\mu^+ x^\mu A_{lK}$$

Это условие выполнено в случае, если $A_{Kl} = A_{lK}$, т.е. внизу матрицы $A =$  стоит симметричная матрица.

Члены $\sim x^0$:

$$A^+_{kK} A_{Kl} \sim 1_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A^+_{kK} A_{Kl} = A^+_{lK} A_{Kk}$$

В „калибровке" $B_{Kk} = \delta_{Kk}$; $\Omega_0^+ = \Omega_0$ существует остаточная инвариантность

$$\begin{cases} \Delta_{Kk} \to Q_{KM} \Delta_{Mm} P_{mk} \\ \Omega_K \to Q_{KM} \Omega_M \end{cases}$$

где $P^T P = 1$ (P- ортогональная матрица)

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} 1_2 & 0 \\ \hline 0 & P^T \circ 1_2 \end{array}\right)$$

поскольку

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) P = \left(\begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

в силу ортогональности P.

Теперь всё готово для вычисления числа параметров решения АДХМ:

В матрице A будет $4\left[n+\frac{n(n+1)}{2}\right]$ параметров

на которые наложены $3\,\frac{n(n-1)}{2}$ связей

$$A^+_{kK}A_{Kl}-A^+_{lK}A_{Kk}=0$$

(т.к. $a^+-a=-2i\vec{\sigma}\vec{a}=0$ даёт 3 условие $\vec{a}=0$)

Ещё есть произвол в выборе $P\in SO(n)$ - ещё $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров уходят.

Остаётся

$$4\left[n+\frac{n(n+1)}{2}\right]-\frac{3n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=$$

$$=4n+2n^2+2n-2n^2+2n=8n \text{ - параметров.}$$

Глава VII. Мероное решение

Не все классические решения евклидовых уравнений движения имеют конечное действие.

Приведём пример решения с бесконечным S_E.

$(++++)$ – Евклид

$$S_E = -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 \equiv S$$

Уравнения движения записываются в виде

$\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = 0$.

Будем искать решение в виде

$A_\mu = -i\sigma_{\mu\nu}\, a(x^2)\cdot x^\nu$, где $a(x^2)$ – некоторая функция.

В частности, если $a(x^2) = \dfrac{2}{x^2+\rho^2}$, то

получается

$$A_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{x^2+\rho^2}$$

– инстантонное решение в регулярной калибровке.

Попробуем выяснить, нет ли ещё каких-либо решений уравнений движения.

Вначале вычисляем тензор поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

$$= \partial_\mu\left(-i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha a(x^2)\right) - \partial_\nu\left(-i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha a(x^2)\right) +$$

$$+ \left[-i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha, -i\sigma_{\nu\beta} x_\beta\right] \cdot a^2(x^2) =$$

$$= -i\sigma_{\nu\mu} a(x^2) - 2i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha a'(x^2)\cdot x_\mu + i\sigma_{\mu\nu} a(x^2)$$

$$+ 2i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha a'(x^2)\cdot x_\nu - i\left(\sigma_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta} - \sigma_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu} +\right.$$

$$\left. + \cancelto{0}{\sigma_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}}\right) x_\alpha x_\beta \cdot a^2(x^2) =$$

$$= i\sigma_{\mu\nu}\left(2a - x^2a^2\right) + i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha x_\nu \left(2a' + a^2\right) -$$

$$- i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha x_\mu \left(2a' + a^2\right)$$

Затем вычисляем величину, стоящую в ур-ях движения:

$$0 = \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] =$$

$$= \partial_\mu\left[i\sigma_{\mu\nu}\left(2a - x^2a^2\right) + i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha x_\nu\left(2a' + a^2\right) - \right.$$

$$- i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha x_\mu (2a'+a^2)\Big] + \Big[-i\sigma_{\mu\beta} x_\beta \cdot a,\; i\sigma_{\mu\nu}(2a - x^2a^2)$$

$$+ i\sigma_{\mu\alpha} \cancel{x_\alpha} x_\nu (2a'+a^2) - i\sigma_{\nu\alpha} \cancel{x_\alpha x_\mu}(2a'+a^2)\Big] =$$

0 (коммутатор одинаковых матриц)

0 (свёртка симметричного и антисимметричного тензоров)

$$= 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(2a' - a^2 - 2x^2 aa'\right) + \cancel{i\sigma_{\mu\alpha}\delta_{\mu\alpha} x_\nu (2a'+a^2)} \to 0$$

$$+ \cancel{i\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha \delta_{\mu\nu}(2a'+a^2)} + \cancel{2\sigma_{\mu\alpha} x_\alpha x_\nu x_\mu (2a''+2aa')} \to 0$$

$$- \cancel{i\sigma_{\nu\alpha}\delta_{\alpha\mu} x_\mu (2a'+a^2)} - i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha \cdot 4(2a'+a^2) - i\sigma_{\nu\alpha} x_\alpha x_\mu \cdot$$

"−" "−"

$$\cdot 2x_\mu (2a''+2aa') + [\sigma_{\mu\beta}, \sigma_{\mu\nu}] x_\beta a (2a - x^2a^2) =$$

$$= 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(2a' - a^2 - \cancel{2x^2 aa'}\right) + 4i\sigma_{\mu\nu} x_\mu (2a'+a^2)$$

$$+ 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \cdot x^2 (2a'' + \cancel{2aa'}) + [\sigma_{\mu\beta}, \sigma_{\mu\nu}] x_\beta a (2a - x^2a^2)$$

Имеем:

$$[\sigma_{\mu\beta}, \sigma_{\mu\nu}] = \delta_{\mu\alpha}[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\mu\nu}] = i\delta_{\mu\alpha}\big(\cancel{\sigma_{\alpha\mu}}\,\delta_{\beta\nu} -$$

$$- \sigma_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} - \sigma_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \sigma_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu}\big) = 2i\sigma_{\beta\nu}$$

Поэтому

$$0 = \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(\underline{2a'} - \underline{\underline{a^2}}\right) + 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(\underline{4a'} + \underline{\underline{2a^2}}\right)$$

$$+ 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(2x^2 a''\right) + 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left(\underline{\underline{2a^2}} - x^2 a^3\right) =$$

$$= 2i\sigma_{\mu\nu} x_\mu \left[2x^2 a'' + 6a' + 3a^2 - x^2 a^3\right]$$

Положим $\xi \equiv x^2$. тогда $a' = \frac{da}{d\xi}$ и ур-е движения может быть записано в виде

$$\boxed{2\xi a'' + 6a' + 3a^2 - \xi a^3 = 0}$$

Для проверки убедимся, что ему удовлетворяет функция

$$a(\xi) = \frac{2}{\xi + \rho^2}$$ (инстантон в регулярной калибровке)

$$a'(\xi) = -\frac{2}{(\xi+\rho^2)^2}$$

$$a''(\xi) = \frac{4}{(\xi+\rho^2)^3}$$

$$0 \stackrel{?}{=} 2\xi a'' + 6a' + 3a^2 - \xi a^3 = \frac{8\xi}{(\xi+\rho^2)^3} - \cancel{\frac{12}{(\xi+\rho^2)^2}}$$

$$+\cancel{\frac{12}{(\xi+\rho^2)^2}}-\cancel{\frac{8\xi}{(\xi+\rho^2)^3}}=0$$ − верно

Но есть и другое нетривиальное решение,

$a(\xi)=\frac{1}{\xi}$. Действительно, $a'=-\frac{1}{\xi^2}$; $a''=\frac{2}{\xi^3}$.

$$0\overset{?}{=}2\xi a''+6a'+3a^2-\xi a^2=\frac{4}{\xi^2}-\frac{6}{\xi^2}+\frac{3}{\xi^2}-\frac{1}{\xi^2}=0$$

− верно.

т.о. получено меронное решение

$$\boxed{A_\mu(x)=-i\sigma_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{x^2}}$$

Убедимся, что меронное решение и является (анти) самодуальным.

$$F_{\mu\nu}=i\sigma_{\mu\nu}(2a-x^2a^2)+i\sigma_{\mu\alpha}x_\alpha x_\nu(2a'+a^2)-i\sigma_{\nu\alpha}x_\alpha x_\mu\cdot$$

$$\cdot(2a'+a^2)=i\sigma_{\mu\nu}\cdot\frac{1}{x^2}-i\sigma_{\mu\alpha}x_\alpha x_\nu\frac{1}{x^4}+i\sigma_{\nu\alpha}x_\alpha x_\mu\frac{1}{x^4}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2}-\varepsilon_{\mu\nu\underline{\alpha}\beta}\cdot i\sigma_{\underline{\alpha}\gamma}x_\gamma x_\beta\frac{1}{x^4}$$

Ранее было доказано, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\underline{\beta}}\sigma_{\underline{\beta}\gamma}=-(\delta_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\alpha}+\delta_{\nu\gamma}\sigma_{\alpha\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\sigma_{\mu\nu}).$$

Поэтому

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = i\sigma_{\mu\nu}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{ix_\gamma x_\beta}{x^4}\cdot\left(\delta_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\beta} + \delta_{\nu\gamma}\sigma_{\beta\mu} + \delta_{\beta\gamma}\sigma_{\mu\nu}\right) =$$

$$= \cancel{i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2}} - \frac{i\sigma_{\nu\alpha}x_\mu x_\alpha}{x^4} + \frac{i\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha}{x^4} - \cancel{i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2}}$$

$$= -i\sigma_{\nu\alpha}\frac{x_\mu x_\alpha}{x^4} + i\sigma_{\mu\alpha}\frac{x_\nu x_\alpha}{x^4}$$

Сравнивая $F_{\mu\nu}$ с $\tilde{F}_{\mu\nu}$ мы видим, что

$$i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2} - i\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4} + i\sigma_{\nu\alpha}x_\mu x_\alpha\frac{1}{x^4} = F_{\mu\nu} \neq$$

$$\neq \tilde{F}_{\mu\nu} = +i\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4} - i\sigma_{\nu\alpha}x_\mu x_\alpha\frac{1}{x^4}$$

Мероное решение имеет бесконечное действие. Действительно,

$$S = -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big(i\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2} -$$

$$- i\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4} + i\sigma_{\nu\alpha}x_\mu x_\alpha\frac{1}{x^4}\Big)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big\{-(\sigma_{\mu\nu})^2\frac{1}{x^4} + 4\sigma_{\mu\nu}\frac{1}{x^2}\cdot\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4}$$

$$- 2\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4}\cdot\sigma_{\mu\beta}x_\nu x_\beta\frac{1}{x^4} + \cancelto{0}{2\sigma_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha\frac{1}{x^4}\cdot\sigma_{\nu\beta}x_\mu x_\beta\frac{1}{x^4}}\Big\}$$

$$= -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big\{-(\sigma_{\mu\nu})^2\frac{1}{x^4} + \cancel{4\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\mu\alpha}\frac{x_\nu x_\alpha}{x^6}}$$

$$\cancel{-}\,+\,2\sigma_{\mu\alpha}\sigma_{\mu\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{x^6}\Big\} =$$

$$= -\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big\{-(\sigma_{\mu\nu})^2\frac{1}{x^4} + \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^2\frac{1}{x^4}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4e^2}\,\mathrm{tr}\,(\sigma_{\mu\nu})^2\int\frac{d^4x}{x^4}$$

При этом

$$\mathrm{tr}\,(\sigma_{\mu\nu})^2 = \mathrm{tr}\left[2(\sigma_{i4})^2 + (\sigma_{ij})^2\right] =$$

$$= \mathrm{tr}\left[2\left(\frac{1}{2}\sigma_i\right)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\sigma_l\right] =$$

$$= \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}(\sigma_i)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_i)^2\right] = \mathrm{tr}\,(\sigma_i)^2 = 3\,\mathrm{tr}\,1_2 = 6$$

$\Longrightarrow$

$$S_E = \frac{3}{2e^2}\int\frac{d^4x}{x^4} \neq 0$$

Видно, что это выражение расходится как на верхнем, так и на нижнем пределе и $\Rightarrow$ является бесконечным.

Глава VIII. Классические решения и масштабные преобразования.

§ 1. Теории со скалярными полями

В $D=1+1$ ранее был получен кинк в теории с

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2 \quad , \quad \phi \in Re$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 \phi)^2 + \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)^2 \right]$$

Для статического решения $\phi \neq \phi(t)$, т.ч. ур-е движения имеют вид

$$0 = -\partial_\mu^2 \phi - 2\lambda\phi(\phi^2 - v^2) = \phi'' - 2\lambda\phi(\phi^2 - v^2)$$

Нетривиальные решения с конечной энергией имеют вид $\phi = \pm v\, th\left[v\sqrt{\lambda}(x - x_0) \right]$ - кинк и антикинк.

Выясним в каких размерностях могут существовать солитоны типа кинка.

Пусть $D = 1 + d$, где d - число пространственных измерений. Тогда если

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)^2 - V(\phi_a) \quad , \text{ то}$$

$$E = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial_i \phi_a)^2 + V(\phi_a) \right)$$

Для статического решения

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^d x\, \mathcal{L} = -(t_2 - t_1) \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_i \Phi_a)^2 + V(\Phi_a) \right)$$

$= -(t_2 - t_1) E$ $\Rightarrow$ экстремум действия совпадает с экстремумом энергии.

Поэтому классическое решение соответствует минимуму энергии (в статическом случае)

Пусть $\Phi_a(x)$ – классическое решение.

Совершим масштабное преобразование

$\Phi_a(x) \to \Phi_a(\alpha x)$ где $\alpha = const$.

Очевидно, что $E[\Phi_a(\alpha x)] \equiv E(\alpha)$ должно иметь минимум при $\alpha = 1$. Имеем:

$$E(\alpha) = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \alpha^2 (\partial_i \Phi_a(\alpha x))^2 + V(\Phi_a(\alpha x)) \right] =$$

$$= [y = \alpha x] = \int d^d y \cdot \alpha^{-d} \left[\frac{1}{2} \alpha^2 (\partial_i \Phi_a(y))^2 + V(\Phi_a(y)) \right]$$

$$= [y \to x] = \alpha^{2-d} \int d^d x\, (\partial_i \Phi_a)^2 + \alpha^{-d} \int d^d x\, V(\Phi_a(x))$$

т.к. $\alpha = 1$ – минимум, то

$$0 = \left. \frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} = (2-d) \int d^d x\, (\partial_i \Phi_a)^2 - d \int d^d x\, V(\Phi_a(x))$$

Будем предполагать, что $V(\phi_a) \geq 0$. Тогда

$$0 = (2-d)\underbrace{\int d^d x\, (\partial_i \phi_a)^2}_{\geq 0} - d\underbrace{\int d^d x\, V(\phi_a)}_{\geq 0}$$

Видно, что при $d \geq 2$ может $\exists$ только вакуумное решение, для которого оба слагаемых равны 0.

$\Rightarrow$ В рассматриваемых теориях нетривиальные солитонные решения могут $\exists$ только при $d=2$ (теорема Деррика)

§2. Калибровочные теории

Рассмотрим теперь

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi_a)^2 - V(\phi_a)$$

в $D = 1+d$ измерениях.

Для статического решения с $A_0^A = 0$

$$E = \int d^d x \left[\frac{1}{4}(F^A_{ij})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_i \phi_a)^2 + V(\phi_a)\right]$$

а действие

$$S = -(t_2 - t_1)\int d^d x \left[\frac{1}{4}(F^A_{ij})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_i \phi_a)^2 + V(\phi_a)\right]$$

$$= -(t_2 - t_1) E$$

Поэтому экстремумы действия и энергии вновь совпадают.

В этом случае совершаем масштабное преобразование вида

$$\phi_a(x) \to \phi_a(\alpha x)$$

$$A_i^A(x) \to \alpha A_i^A(\alpha x)$$

тогда

$$\mathcal{D}_i \phi = \partial_i \phi + A_i \phi = \partial_i \phi + ie A_i^A T^A \phi \longrightarrow \alpha \mathcal{D}_i \phi(\alpha x)$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j] \longrightarrow \alpha^2 F_{ij}(\alpha x)$$

Следовательно,

$$E(\alpha) \equiv E[\phi_a(\alpha x); \alpha A_i^A(\alpha x)] = \text{(аналогично предыдущему случаю)}$$

$$= \alpha^{4-d} \int d^d x \, \frac{1}{4} (F_{ij}^A)^2 + \alpha^{2-d} \int d^d x \cdot \frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \phi_a)^2 +$$

$$+ \alpha^{-d} \int d^d x \, V(\phi_a)$$

В точке минимума $\alpha = 1$

$$0 = \left.\frac{dE(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = (4-d) \underbrace{\int d^d x \, \frac{1}{4} (F_{ij}^A)^2}_{\geqslant 0} +$$

$$+ (2-d) \underbrace{\int d^d x \cdot \frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \phi_a)^2}_{\geqslant 0} - d \underbrace{\int d^d x \, V(\phi_a)}_{\geqslant 0}$$

Если $d \geq 5$, то равенство возможно только для тривиального решения

$A_i = 0$; Φ_a - вакуум

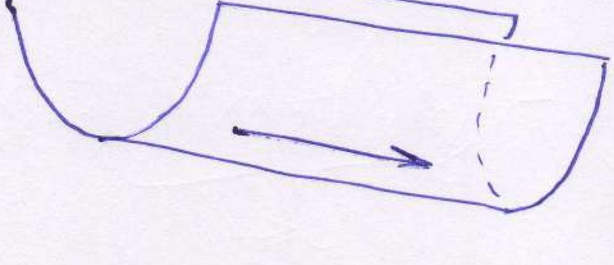
(или решения, отличающегося на калибровочное преобразование)

Если $d = 4$, то нет решений с нетривиальными полями материи.

Но для чистого Янга-Миллса решение может быть. (Статическое решение в $D = 1+4$ $\sim$ решению в 4-х мерном евклидовом пространстве)

Если $d \leq 3$, то решения могут быть.

Но в больших d могут $\exists$ аналоги классических решений.



стрелкой показана масштабная мода.

Глава IX. Классические решения и фермионы (на примере кинка)

§1. Нулевые моды оператора Дирака на топологически нетривиальном фоне

Рассмотрим простейшую модель в $D=1+1$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2) + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - y \cdot \bar{\psi}\psi \cdot \phi$$

юкавское взаимодействие

где y - константа юкавского взаимодействия. ($y > 0$ для определённости)

В $D=1+1$ γ-матрицы имеют размер 2×2:

Можно выбрать

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1_2 .$$

Спинор имеет 2 компоненты:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Уравнения движения для рассматриваемой модели имеют вид

$$\begin{cases} 0 = -\partial_\mu^2 \phi - 2\lambda\phi(\phi^2 - v^2) - y\bar{\psi}\psi \\ 0 = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - y\phi \cdot \psi \end{cases}$$

Уравнение для ψ линейно. Поэтому если считать, что ψ мало, то получится система

$$\begin{cases} 0 = -\partial_\mu^2 \phi - 2\lambda\phi(\phi^2 - v^2) \\ 0 = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - y\phi\psi \end{cases}$$

– в этом пределе уравнения расщепляются.

Решением первого ур-я является кинк

$$\phi(x) = v\, th\left[v\sqrt{\lambda}(x - x_0)\right]$$

и антикинк

$$\phi(x) = -v\, th\left[v\sqrt{\lambda}(x - x_0)\right]$$

Будем, для определённости, рассматривать случай кинка. Тогда ур-е для ψ примет вид

$$i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - y v\, th\left[v\sqrt{\lambda}(x - x_0)\right].$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Будем искать решение с помощью метода разделения переменных:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi(x,t) = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

Тогда для φ_1 и φ_2 получаем уравнения

$$0 = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega\varphi_2 + i\dfrac{d\varphi_2}{dx} - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\varphi_1 = 0 \\ \omega\varphi_1 - i\dfrac{d\varphi_1}{dx} - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Если выразить φ_2 из 2-го ур-я и подставить в 1-е, то получится ур-е типа УШ, спектр которого можно анализировать. Но есть важная особенность: $\exists$ решение с $\omega = 0$. Действительно, тогда

$$+ \begin{cases} i\dfrac{d\varphi_2}{dx} - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\varphi_1 = 0 \\ -i\dfrac{d\varphi_1}{dx} - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\varphi_2 = 0 \quad \Big/ \, i \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\varphi_1 + i\varphi_2) - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right](\varphi_1 + i\varphi_2) = 0$$

$$\ln(\varphi_1 + i\varphi_2) = y\sigma \int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] + const.$$

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = C_+ \exp\left\{ y\sigma \int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \right\}$$

Аналогичным образом, если второе уравнение умножить не на i, а на $-i$, то получится

$$-\frac{d}{dx}(\varphi_1 - i\varphi_2) - y\sigma\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right](\varphi_1 - i\varphi_2) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_1 - i\varphi_2 = C_- \exp\left\{-y\sigma\int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\right\}$$

Имеем:

При $x \to \infty$ $\quad th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \longrightarrow 1$. Тогда (если $y > 0$)

$$y\sigma\int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \longrightarrow \infty \quad \text{при } x \to \infty$$

Аналогично при $x \to -\infty$ $\quad th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \to -1$, т.ч.

$$y\sigma\int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] \to +\infty$$

Действительно,

$$y\sigma\int dx\, th\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right] = y\sigma\int dx\, \frac{sh\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]}{ch\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]} =$$

$$= \frac{y\sigma}{\sigma\sqrt{\lambda}}\int \frac{d\, ch\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]}{ch\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]} = \frac{y}{\sqrt{\lambda}} \ln ch\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = C_+\left(ch\left[\sigma\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\right)^{y/\sqrt{\lambda}}$$

неограниченно возрастает при $x \to \pm\infty$
$\Longrightarrow C_+ = 0$ если мы хотим получить квадратично интегрируемое решение.

Поэтому

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = 0 \quad \text{и} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -i\varphi_2$$

$$\Leftarrow\!\!\Rightarrow \quad \varphi_2 = i\varphi_1$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 - i\varphi_2 = 2\varphi_1 = C_-\left(\mathrm{ch}\left[v\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\right)^{-y/\sqrt{\lambda}}$$

Обозначая $C \equiv \frac{1}{2}C_-$, получаем, что

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\left(\mathrm{ch}\left[v\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\right)^{-y/\sqrt{\lambda}} \equiv \psi_0$$

– видно, что такое решение быстро убывает при $x \to \pm\infty$.

В случае антикинка $C_- = 0$, а $C_+ \neq 0$ и нулевая мода имеет вид

$$\psi_0 = C\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\left(\mathrm{ch}\left[v\sqrt{\lambda}(x-x_0)\right]\right)^{-y/\sqrt{\lambda}}$$

(При этом, конечно, предполагается, что $y > 0$)

$\exists$ нулевых мод оператора Дирака – характерная особенность в случае топологически нетривиальных фоновых полевых конфигураций.

Все ненулевые моды появляются парами: Если есть мода $\varphi_n^{(+)}$ с $\omega_n > 0$, то

$$\omega_n \gamma^0 \varphi_n^{(+)} + i\gamma^1 \frac{\partial \varphi_n^{(+)}}{\partial x} - y\phi \cdot \varphi_n^{(+)} = 0$$

Определим величину $\varphi_n^{(-)} \equiv \gamma^1 \varphi_n^{(+)}$. Тогда

$$\gamma^1 \Big| \quad \omega_n \gamma^0 \varphi_n^{(+)} + i\gamma^1 \frac{\partial \varphi_n^{(+)}}{\partial x} - y\phi \cdot \varphi_n^{(+)} = 0$$

$$-\omega_n \gamma^0 (\gamma^1 \varphi_n^{(+)}) + i\gamma^1 \frac{\partial (\gamma^1 \varphi_n^{(+)})}{\partial x} - y\phi \cdot (\gamma^1 \varphi_n^{(+)}) = 0$$

$$-\omega_n \gamma^0 \varphi_n^{(-)} + i\gamma^1 \frac{\partial \varphi_n^{(-)}}{\partial x} - y\phi\, \varphi_n^{(-)} = 0$$

– удовлетворяет тому же самому ур-ю, но с частотой $-\omega_n < 0$

$\Rightarrow$ Все ненулевые моды появляются парами.

Для нулевой моды

$$\gamma^1 \psi_0 \sim \gamma^1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

– нового решения не получается, получается просто переопределение нормировочной постоянной.

Как нормировать полученные решения?

Решения с различными ω ортогональны, поэтому можно наложить условие нормировки т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_n^{(+)+}(x)\, \varphi_m^{(+)}(x) = \delta_{mn} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_0^+(x)\, \varphi_0(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_n^{(+)}(x)\, \varphi_m^{(-)}(x) = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_0^+(x)\, \varphi_n^{(+)}(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_n^{(-)}(x)^+\, \varphi_m^{(-)}(x) = \delta_{mn} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_0^+(x)\, \varphi_n^{(-)}(x) = 0$$

§2. Дробление электрического заряда фермионов в поле кинка

В классической теории поля решение ур-я Дирака можно записать в виде

$$\psi(t,x) = \sum_n \left[a_n e^{-i\omega_n t} \varphi_n^{(+)}(x) + b_n^* e^{i\omega_n t} \varphi_n^{(-)}(x) \right]$$

$$+ a_0 \varphi_0(x)$$

В квантовой теории поля $a_n \longrightarrow \hat{a}_n$

$$b_n^* \longrightarrow \hat{b}_n^+$$

и накладываются канонические коммутационные соотношения (ККС)

$$\{ \hat{\pi}^i(t,x), \hat{\psi}_j(t,y) \} = -i\delta^i_j\, \delta(x-y)$$

(Время одинаково, а простр. координаты – разные)

При этом

$$\pi^i(t,x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_i)} = \text{(с учётом антикоммутации)}$$

$$= (-i\bar{\psi}\gamma^0)^i = -i\psi^{+i}$$

ККС будут выполняться, если

$$\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^+\} = \delta_{mn} \quad (m,n = \overline{0,\infty})$$

$$\{\hat{a}_n, \hat{a}_m\} = 0$$

$$\{\hat{b}_n, \hat{b}_m^+\} = \delta_{mn} \quad (m,n = \overline{1,\infty})$$

$$\{\hat{b}_n, \hat{b}_m\} = 0$$

$$\{\hat{a}_n, \hat{b}_m\} = \{\hat{a}_n, \hat{b}_m^+\} = \{\hat{a}_n^+, \hat{b}_m\} = \{\hat{a}_n^+, \hat{b}_m^+\} = 0$$

Действительно, тогда

$$\{\hat{\pi}^i(t,x), \hat{\psi}_j(t,y)\} = -i\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n^+ e^{i\omega_n t} \varphi_n^{(+)+}(x)^i +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n e^{-i\omega_n t} \varphi_n^{(-)}(x)^{+i}, \sum_{m=0}^{\infty} \hat{a}_m e^{-i\omega_m t} \varphi_m^{(+)}(y)_j +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m^+ e^{i\omega_m t} \varphi_m^{(-)}(y)_j \Big\} = -i\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(+)+}(x)^i \varphi_n^{(+)}(y)_j$$

$$-i\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(-)+}(x)^i \varphi_n^{(-)}(y)_j = -i\sum_n |n\rangle\langle n| =$$

$$= -i\delta_j^i \delta(x-y) \quad \text{в силу соотношения полноты}$$

Найдём теперь оператор заряда.

В классической теории поля $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, т.ч.

$$Q = -e\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^{+i}\psi_i$$

, но в квантовой теории поля это не годится

$$Q = -\frac{e}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\psi^{+i}\psi_i - \psi_i\psi^{+i}\right)$$

– в классической теории поля нет различий

В КТП

$$\hat{Q} \equiv -\frac{e}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\hat{\psi}^{+i}\hat{\psi}_i - \hat{\psi}_i\hat{\psi}^{+i}\right) = -\frac{e}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\Big\{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\cdot\hat{a}_n^+ e^{+i\omega_n t}\varphi_n^{(+)+}(x)^i + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{b}_n e^{-i\omega_n t}\varphi_n^{(-)+}(x)^i\Big]\cdot\Big[\sum_{m=0}^{\infty}$$

$$\cdot\hat{a}_m e^{-i\omega_m t}\varphi_m^{(+)}(x)_i + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{b}_m^+ e^{i\omega_m t}\varphi_m^{(-)+}(x)_i\Big] -$$

– обратный порядок$\Big\}$ = (используем условие нормировки)

$$= -\frac{e}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_n^+\hat{a}_n - \hat{a}_n\hat{a}_n^+\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{b}_n\hat{b}_n^+ - \hat{b}_n^+\hat{b}_n\right)\Big]$$

$$= -e\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_n^+\hat{a}_n - \frac{1}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{b}_n^+\hat{b}_n - \frac{1}{2}\right)\Big] =$$

– все ½ сокращаются кроме нулевой моды

$$= -e\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{a}_n^+\hat{a}_n - \hat{b}_n^+\hat{b}_n\right) + \hat{a}_0^+\hat{a}_0 - \frac{1}{2}\Big]$$

$|0\rangle$ имеет заряд $-\frac{1}{2}$, а $\hat{a}_0|0\rangle$ – $+\frac{1}{2}$.