УДК 517.95

Н.В. Зайцева[1]

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Для гиперболического уравнения с оператором Бесселя поставлена начально-граничная задача с интегральным нелокальным условием первого рода в прямоугольной области.

В работе поставленная задача с нелокальным интегральным условием первого рода эквивалентно сведена к локальной задаче с граничными условиями второго рода.

Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения эквивалентной задачи. Решение построено в явном виде в виде ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

Затем показана однозначная разрешимость первоначальной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, нелокальное интегральное условие, единственность, существование, ряд Фурье — Бесселя.

Введение

Пусть $D = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ – заданные действительные числа. Обозначим часть границы области через $\Gamma_l = \{(x,t)|x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Рассмотрим в области D гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$ – заданное действительное число.

Уравнение (1) возникает, например, при переходе от декартовых координат к цилиндрическим в волновом уравнении при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке, также при переходе к сферическим координатам при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы [1,

Зайцева Наталья Владимировна (n.v.zaiceva@yandex.ru), кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

с.185, 191]. В работе [2, с.164 – 225] впервые и обстоятельно изучены краевые задачи Коши и Коши-Гурса для уравнения (1) при всех $k \geqslant 1$ в характеристическом треугольнике, а в [3] показана некорректность постановки этих задач при $k < 0$.

Работы [4], [5] посвящены изучению задачи Трикоми для уравнения смешанного типа, у которого гиперболическая часть совпадает с уравнением (1).

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_l) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0+0} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = A = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

где A – заданное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\, x^k\, dx = A, \quad \int\limits_0^l \psi(x)\, x^k\, dx = 0. \tag{7}$$

Из постановки задачи (2) – (7) видно, что граничное условие (6) является нелокальным. Такое интегральное условие ранее возникло в работах [6] – [8] для уравнения теплопроводности, например, в [8] при изучении вопроса об устойчивости разрежения плазмы. Физически нелокальное условие (6) означает постоянство внутренней энергии системы.

В работах [9], [10] впервые методами функционального анализа изучены краевые задачи с интегральными условиями типа (6) и более сложными условиями для уравнения (1) при $k = 0$, для телеграфного уравнения и для более общих уравнений гиперболического типа с гладкими коэффициентами.

В работе [11] впервые исследована краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области с нелокальным условием (6).

Исследованию нелокальных задач для уравнений с оператором Бесселя посвящены работы [12] – [16] и других авторов.

В данной работе методом спектрального анализа [11], [17] – [20] доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (2) – (7). При этом решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений (2) и (3).

Если умножить уравнение (1) на x^k и проинтегрировать при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, то получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt} x^k\, dx - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\,dx - \left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0. \tag{8}$$

В силу условий (2), (5) и (6) в равенстве (8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon \to 0$. В результате получим локальное граничное условие

$$u_x(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

В дальнейшем вместо задачи (2) – (7) будем рассматривать задачу (2) – (5), (9).

1. Единственность решения

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2), (5) и (9) будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя данную функцию в уравнение (1) и граничные условия (5) и (9), после разделения переменных получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0+0} x^k X'(x) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{11}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Известно, что общее решение уравнения (10) имеет вид

$$X(x) = C_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{12}$$

где $J_\nu(\xi)$, $J_{-\nu}(\xi)$– функции Бесселя первого рода не целых порядков, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для того, чтобы функция (12) удовлетворяла первому условию из (11), положим $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Таким образом, решение уравнения (10), удовлетворяющее первому условию из (11), имеет вид

$$X(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{13}$$

Потребуем теперь, чтобы функция (13) удовлетворяла второму граничному условию из (11):

$$\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=l} = \left(-\lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x)\right)\Big|_{x=l} = -\lambda l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l) = 0,$$

откуда получим

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{14}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (10) и (11) имеет вид

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \ n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

а собственные значения μ_n определяются как нули уравнения (14).

Известно [21, с.633], что система собственных функций (15) ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k.

Также, согласно [22, с.317] для собственных значений задачи (10) и (11) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4}k + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Далее, следуя [11], [17] – [20], рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int\limits_0^l u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (15). На основании (17) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Продифференцируем равенство (18) по переменной t дважды при $0 < t < T$, и, с учетом уравнения (1), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k X_n(x)\,dx = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\left(u_{xx} + \frac{k}{x}u_x\right)x^k X_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)X_n(x)\,dx = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx. \tag{19}$$

Из (18), в силу уравнения (10), будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\left[X''_n(x) + \frac{k}{x}X'_n(x)\right]dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\frac{d}{dx}\left(x^k X'_n(x)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx\right],$$

откуда находим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{21}$$

Из формулы (13) следует, что $X_n(x) = O(1)$, $X'_n(x) = O(x)$ при $x \to 0$. Тогда с учетом условий (2), (5), (9) и (11), переходя в равенстве (21) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим для определения функций $u_n(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{22}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t, \tag{23}$$

где a_n, b_n – произвольные постоянные, требующие определения. С этой целью сначала функции (17) удовлетворим начальным условиям (4):

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \tag{24}$$

$$u_n'(0) = \int_0^l u_t(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \psi(x)x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \tag{25}$$

С учетом (24) и (25) из (23) будем иметь

$$u_n(0) = a_n = \varphi_n, \quad u_n'(0) = b_n\lambda_n = \psi_n,$$

откуда находим

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n}. \tag{26}$$

Подставляя значения (26) в (23), найдем окончательный вид функции

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{27}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2) – (5), (9). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, тогда из (24) и (25) при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Из (27) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (17) при любом $t \in [0,T]$ имеем

$$\int_0^l u(x,t)x^k X_n(x)\,dx = 0. \tag{28}$$

Отсюда, в силу полноты системы (15) в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку, согласно (2), функция $u(x,t) \in C(\overline{D})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2) – (5), (9), то оно единственно.*

2. Существование решения

На основании найденных частных решений (15) и (27) решение задачи (2) – (5), (9) запишем в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{29}$$

где функции $u_n(t)$ определяются по формуле (27), а функции $X_n(x)$ – по формуле (15).

Рассмотрим следующие ряды, полученные формально из ряда (29) почленным дифференцированием:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x), \quad u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n'(x). \tag{30}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)X_n(x),\quad u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n''(x). \tag{31}$$

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в начальные условия (4) задачи, ряд (29) и ряды (30), (31) сходятся равномерно в области $\overline{D}$.

Лемма 1. *Для достаточно больших n и при любом $t\in[0,T]$ справедливы оценки:*

$$|u_n(t)|\leqslant C_1\left(|\varphi_n|+\frac{|\psi_n|}{n}\right), \tag{32}$$

$$|u_n'(t)|\leqslant C_2\left(n|\varphi_n|+|\psi_n|\right), \tag{33}$$

$$|u_n''(t)|\leqslant C_3\left(n^2|\varphi_n|+n|\psi_n|\right), \tag{34}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство оценок (32) – (34) непосредственно следует из формул (27) и (16).

Лемма 2. *Для достаточно больших n и при всех $x\in[0,l]$ выполнены оценки:*

$$|X_n(x)|\leqslant C_4n^{-\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

$$|X_n'(x)|\leqslant C_5n^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

$$|X_n''(x)|\leqslant C_6n^{\frac{3}{2}}. \tag{37}$$

Доказательство. Функция $X_n(x)=x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_nx)\in C^2[0,l]$ и при больших ξ справедлива оценка

$$J_\nu(\xi)=O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right). \tag{38}$$

Тогда из (38) следует справедливость оценки (35). Вычислим теперь

$$X_n'(x)=-\lambda_nx^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_nx). \tag{39}$$

Тогда из (38) и (39) следует справедливость оценки (36).

Из уравнения (10) запишем

$$X_n''(x)=-\frac{k}{x}X_n'(x)-\lambda_n^2X_n(x).$$

Отсюда в силу неравенств (35) и (36) следует справедливость оценки (37). ∎

Согласно леммам 1 и 2 при любом $(x,t)\in\overline{D}$ ряд (29) мажорируется рядом

$$C_7\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\frac{1}{2}}|\varphi_n|+n^{-\frac{3}{2}}|\psi_n|\right), \tag{40}$$

ряды (30) и (31) мажорируются соответственно рядами

$$C_8\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{2}}|\varphi_n|+n^{-\frac{1}{2}}|\psi_n|\right), \tag{41}$$

$$C_9\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{3}{2}}|\varphi_n|+n^{\frac{1}{2}}|\psi_n|\right). \tag{42}$$

Исследуем ряды (40) – (42) на сходимость.

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$ и*

$$\varphi'(0)=\psi'(0)=\varphi'(l)=\psi'(l)=0,$$

то выполняются оценки:

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_{10}}{n^4}, \qquad |\psi_n| \leqslant \frac{C_{11}}{n^2}. \tag{43}$$

Доказательство. С учетом (10), (11) и условий $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ из (24) будем иметь

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi(x)(x^k X_n'(x))' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[\varphi(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x) dx \right] = \frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\varphi'(x) x^k X_n(x) \Big|_0^l - \int\limits_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x) dx \right] = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx - \frac{k}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \frac{\varphi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx, \qquad \varphi_{1n} = \int\limits_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x) dx, \qquad \varphi_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{x}, \tag{44}$$

в результате чего получим

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2} \varphi_{1n}. \tag{45}$$

В силу (10) и (11) первый интеграл из (44) преобразуем к виду:

$$\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi''(x) \left(x^k X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[\varphi''(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx \right] = \frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx = \frac{\varphi_n^{(3)}}{\lambda_n^2}, \tag{46}$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx.$$

Аналогично на основании (10), (11) и $\varphi'(l) = 0$ проинтегрируем по частям два раза второй интеграл из (44):

$$\varphi_{1n} = \int\limits_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi_1(x) \left(x^k X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[\varphi_1(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx \right] = \frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx = \frac{\varphi_{1n}^{(1)}}{\lambda_n^2}, \tag{47}$$

где

$$\varphi_{1n}^{(1)} = \int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx,$$

и этот интеграл в силу (39) сходится.

Подставив (46) и (47) в равенство (45), найдем

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^4}\varphi_n^{(3)} - \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{1n}^{(1)}. \quad (48)$$

Из (48) следует первая оценка из (43).

На основании (25) при $\psi'(0) = \psi'(l) = 0$, производя аналогичные вычисления, получим

$$\psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \psi''(x) x^k X_n(x) dx - \frac{k}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \frac{\psi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\psi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\psi_{1n}, \quad (49)$$

где

$$\psi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \psi''(x) x^k X_n(x) dx, \quad \psi_{1n} = \int\limits_0^l \frac{\psi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx.$$

Из (49) следует вторая оценка из (43). ■

Согласно лемме 3, ряды (40) – (42) мажорируются числовым рядом

$$C_{12}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}. \quad (50)$$

А, следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряды (29) – (31) в области $\overline{D}$ сходятся равномерно.

Таким образом, построена функция $u(x,t)$, определяемая рядом (29), которая удовлетворяет всем условиям задачи (2) – (5), (9). Тем самым доказана

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2) – (5), (9), определяемое рядом (29), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теперь покажем, что функция $u(x,t)$, заданная рядом (29), является решением задачи (2) – (7).

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и условиям (7), то существует единственное решение задачи (2) – (7), определяемое рядом (29), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2) – (5), (9) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда уравнение (1) выполняется всюду в области D. Умножим уравнение (1) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t) x^k \, dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0.$$

В последнем равенстве, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий (5) и (9), будем иметь

$$\int\limits_0^l u_{tt}(x,t)x^k\,dx = 0. \tag{51}$$

Проинтегрируем равенство (51) по переменной t, в результате имеем

$$\int\limits_0^l u_t(x,t)x^k\,dx = C_1 = \mathrm{const}. \tag{52}$$

Полученное равенство (52) проинтегрируем еще раз по переменной t. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k\,dx = C_1t + C_2, \quad C_2 = \mathrm{const}. \tag{53}$$

Полагая в равенстве (52) $t = 0$, с учетом условий (4) и (7), найдем

$$\int\limits_0^l u_t(x,0)x^k\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)x^k\,dx = C_1 = 0.$$

Положим теперь $t = 0$ в равенстве (53), откуда с учетом условий (4) и (7), и найденного значения $C_1 = 0$, получим

$$\int\limits_0^l u(x,0)x^k\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)x^k\,dx = C_2 = A.$$

Подставляя найденные значения констант $C_1 = 0$ и $C_2 = A$ в равенство (53), имеем

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k\,dx = A. \tag{54}$$

Тем самым, мы показали, что при выполнении условий согласования (7) условия (6) и (9) эквивалентны. А, значит, эквивалентны и задачи (2) – (7) и (2) – (5), (9). ■

Литература

[1] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа. 1970. 712 с.

[2] Пулькин С.П. Избранные труды. Самара: Изд-во «Универс групп», 2007. 264 с.

[3] Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстетда// Изв. вузов. Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.

[4] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений// Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 59–63.

[5] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2. С. 64–71.

[6] Cannon I.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. T. 21. № 2. P. 155–160.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. ВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.

[8] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 276–304.

[9] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений// Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.

[10] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2012. 194 с.

[11] Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием// Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.

[12] Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.

[13] Бенуар Н.Э., Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2094–2098.

[14] Bouziani A., Mesloub S. A strong solution of an envolution problem with integral condition // Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 12. P. 149–159.

[15] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. № 76. P. 1–8.

[16] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики. ИМ СО РАН. Новосибирск. 2005. С. 37–43.

[17] Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т. 9. Вып. 4. С. 596–602.

[18] Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 49–58.

[19] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[20] Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 3. С. 393–406.

[21] Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

[22] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Изд-во Мир, 1986. 381 с.

References

[1] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations of mathematical physics in partial derivatives. Moscow: Vysshaya shkola. 1970. - 712 p. (in Russ.)

[2] Pulkin S.P. Selected Works. Samara: Univers Group Publishers, 2007. 264 p. (in Russ.)

[3] Pulkin S.P. On uniqueness of solution of singular Hellerstedt problem// Izv. vuzov. Mathem. 1960. No 6(19). P. 214–225. (in Russ.)

[4] Sabitov K.B., Ilyasov R.R. Ill-posed boundary value problems for certain class of hyperbolic equations// Izv. vuzov. Mathem. 2001. No 5. P. 59–63. (in Russ.)

[5] Sabitov K.B., Ilyasov R.R. Solution of Tricomi problem for equation of mixed type with singular coefficient by spectral method// Izv. vuzov. Mathem. 2004. No 2. – P. 64–71. (in Russ.)

[6] Cannon I.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy// Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. No 2. P. 155–160.

[7] Kamynin L.I. Certain boundary value problem of heat-conductivity theory with non-classical boundary conditions// Journ, Vych. Math. i Math. Phys. 1964. Vol. 4. No 6. P. 1006–1024. (in Russ.)

[8] Ionkin N.I. Solution of certain boundary value problem on heat-conductivity with non-classical boundary condition// Differ. Uravn. 1977. Vol. 13. No 2. P. 276–304. (in Russ.)

[9] Pulkina L.S. Non-local problem with integral condition for hyperbolic equations// Differ. Uravn. 2004. Vol. 40. No 7. P. 887–892. (in Russ.)

[10] Pulkina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations. Samara: Samara University Publishers, 2012. 194 p. (in Russ.)

[11] Sabitov K.B. Boundary value problem for equation of parabolic – hyperbolic type with nonlocal integral condition// Differ. Uravn. 2010. Vol. 46. No 10. P. 1468 – 1478. (in Russ.)

[12] Yurchuk N.I. Mixed problem with integral condition for some hyperbolic eqyations// Differ. Uravn. 1986. Vol. 22. № 12. P. 2117–2126. (in Russ.)

[13] Benouar N.E., Yurchuk N.I. Mixed problem with integral condition for a parabolic eqyations with Bessel operator// Differ. Uravn. 1991. Vol. 27. № 12. P. 2094–2098. (in Russ.)

[14] Bouziani A., Mesloub S. A strong solution of an envolution problem with integral condition// Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 12. P. 149–159.

[15] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions// Electronic Journal of Differential Equations. 2001. № 76. P. 1-8.

[16] Beilin S.A. Mixed problem with integral condition for wave equation// Nonclassical equations of mathematical phisics. Sobolev Institute of Mathematics. Novosibirsk. 2005. P. 37–43. (in Russ.)

[17] Sabitov K.B. Nonlocal problem for equation of parabolic – hyperbolic type in rectangular domain// Mathem. Zametki. 2011. Vol. 89. No 4. P. 596–602. (in Russ.)

[18] Sabitiva Yu.K. Non-local initial–boundary value problems for degenerate hyperbolic equation// Izv. vuzov. Mathem. 2009. No 12. P. 49–58. (in Russ.)

[19] Sabitov K.B., Vagapova E.V. Dirichlet problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain, Differential equations, 2013, Vol. 49, No. 1, P. 68–78. (in Russ.)

[20] Sabitiva Yu.K. Boundary value problem with non-local integral condition for equations of mixed type with degeneration on transfer line// Mathem. Zametki. 2015. Vol. 98. No 3. P. 393–406. (in Russ.)

[21] Watson G.N. Theory of Bessel functions. Part I. Moccow: Inostr. Literature, 1949. 799 p. (in Russ.)

[22] Olver F.W.J. Introduction to asymptotics and special functions. Moscow: Mir, 1986. 381 p. (in Russ.)

N.V. Zaitseva[2]

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR IN A RECTANGULAR DOMAIN WITH INTEGRAL BOUNDARY VALUE CONDITION OF THE FIRST KIND

We consider a boundary value problem with integral nonlocal boundary condition of the first kind for a hyperbolic equation with Bessel differential operator in a rectangular domain.

The equivalence of this problem and a local problem with boundary conditions of the second kind is established.

The existence and uniqueness of solution of the equivalent problem are proved by means of the spectral method. The solution of the problem is obtained in the form of the Fourier-Bessel series. Convergence is proved in the class of regular solutions.

Key words: hyperbolic equation, Bessel differential operator, non-local boundary value condition, Fourier — Bessel series, uniqueness, existence.

Статья поступила в редакцию 18/ V/2016.

The article received 18/ V/2016.

[2] *Zaitseva Natalya Vladimirovna* (n.v.zaiceva@yandex.ru), Dept. ofhigher mathematics and mathematical modeling, Lobachevskii Institute of mathematics and mechanics, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation.