

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМАМ  
МАШИНОВЕДЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ РАН  
– ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО  
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**ТРУДЫ**  
**X ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**  
**им. Ю.И. Неймарка**

Нижегород, 26 – 29 сентября 2016 года

Конференция проводится при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект 16-08-20664-г)

Нижегород  
2016

ББК В161.6  
УДК 517

Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – 867 с.

ISBN 978-5-211-0628945

В трудах излагаются различные аспекты теории нелинейных колебаний и динамических управляемых систем и их приложения в различных областях науки и техники.

Основной тематикой конференции являются:

- моделирование динамических систем,
- аналитические, качественные и численные методы теории колебаний,
- теория бифуркаций,
- регулярные и хаотические колебания,
- волновая динамика машин и конструкций,
- управление колебаниями механических систем,
- прикладные задачи теории колебаний.

ISBN 978-5-211-0628945

ББК В161.6

© Авторы, 2016  
© ИД «Наш дом» – издание, 2016



Научные конференции «Нелинейные колебания механических систем» традиционно проводятся в Нижнем Новгороде, начиная с 1987 г. Нынешняя конференция – уже десятая. Работа конференции проходит в трех основных направлениях:

– модели и методы теории колебаний (математическое моделирование динамических систем, аналитические, качественные и численные методы теории колебаний, теория бифуркаций);

– колебания в динамических и управляемых системах (регулярные и хаотические колебания, управление колебаниями механических систем, прикладные задачи теории колебаний);

– волновая динамика машин и конструкций (волны в стержнях, пластинах и оболочках, волны в твердых и жидких средах, волновая техника и технологии, акустическая диагностика и неразрушающий контроль).

Среди участников конференции – представители 18 городов Российской Федерации (Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Казань, Уфа, Пермь, Саратов, Севастополь, Волгоград, Ульяновск, Тверь, Орел, Ярославль, Тюмень, Томск, Петропавловск-Камчатский, Саров, Сызрань), а также представители Армении, Белоруссии, Казахстана, Узбекистана и Украины.

Нынешняя конференция проходит под знаком двух юбилеев, отмечаемых ее организаторами: в 2016 году празднует 100-летие Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, а Институт проблем машиностроения РАН – свое 30-летие.

**Программный комитет конференции:** Акуленко Л.Д., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Асташев В.К., д.т.н., профессор (Москва); Баландин Д.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород) — сопредседатель; Белых В.Н., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Блехман И.И., д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург); Болотник Н.Н., член-корр. РАН (Москва); Ганиев Р.Ф., академик РАН (Москва); Герасимов С.И., д.ф.-м.н. (Саров); Губайдуллин Д.А., член-корр. РАН (Казань); Дерендяев Н.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Ерофеев В.И., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород) — сопредседатель; Журавлёв В.Ф., академик РАН (Москва); Игумнов Л.А., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Индейцев Д.А., член-корр. РАН (Санкт-Петербург); Казанцев В.Б., д.ф.-м.н. (Нижний Новгород); Карапетян А.В., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Митенков Ф.М., академик РАН (Нижний Новгород); Некоркин В.И., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Новиков В.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Павлов И.С., д.ф.-м.н. (Нижний Новгород) – ученый секретарь; Перевезенцев В.Н., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Пономаренко В.П., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Поляк Б.Т., д.т.н., профессор (Москва); Сергеев А.М., член-корр. РАН (Нижний Новгород); Смирнов Л.В., д.т.н., профессор (Нижний Новгород); Стронгин Р.Г., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Тарлаковский Д.В., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Трубецков Д.И., член-корр. РАН (Саратов); Черноусько Ф.Л., академик РАН (Москва).

**Организационный комитет:** Павлов И.С., д.ф.-м.н. (председатель); Грезина А.В., к.ф.-м.н.; Мальханов А.О., к.ф.-м.н.; Мотова Е.А., к.т.н.; Никитина Е.А., к.т.н.; Панасенко А.Г., к.ф.-м.н.; Пономаренко В.П., д.ф.-м.н., профессор; Пономаренко С.В.; Стребуляев С.Н., к.т.н.; Эгамов А.И., к.ф.-м.н.



$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2R_2\delta_0}{R_1(R_1 + R_2)}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2R_1\delta_0}{R_2(R_1 + R_2)}} \quad (3)$$

Подставив  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в неравенство (1), после преобразований получим зависимость предельной начальной толщины слоя материала от радиусов валов и коэффициента трения, в виде

$$\delta_0 \leq \frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)} v^2. \quad (4)$$

В технологическом процессе обрабатываемый материал с начальной толщиной  $\delta_0$ , деформируется между валами. Деформация происходит до тех пор, пока вертикальная составляющая упругой силы материала приравняется с давлением верхнего вала на обрабатываемый материал [2].

Пусть в момент равенства указанных выше сил толщина обрабатываемого материала равна  $h_0$  и углы начала переходного процесса  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$ . Дальнейший проход слоя материала между валами сопровождается подъемом верхнего вала.

При этом  $\cos \varphi_{10}$  и  $\varphi_{10}$  определяются по формулам

$$\cos \varphi_{10} = \frac{h_0^2 + 2(R_1 + R_2)(R_1 - h_0)}{2R_1(R_1 + R_2 - h_0)}, \quad (5)$$

$$\varphi_{10} = \arccos\left(\frac{h_0^2 + 2(R_1 + R_2)(R_1 - h_0)}{2R_1(R_1 + R_2 - h_0)}\right). \quad (6)$$

Установлено [3], что в процессе обработки материала в валковых машинах между ее начальной и минимальной толщиной имеется линейная связь:

$$h_0 = k\delta_0, \quad (7)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

В последующем прохождении обрабатываемого материала между валами верхний вал согласно закону (1) будет подниматься или опускаться. При этом выполняется условия

$$h(t) = kH(t)$$

или

$$h(t) = h_0 + k\delta(t). \quad (8)$$

Согласно рис.1 толщину  $h(t)$  в верхнем валке соответствует угол  $\varphi_1(t)$ . При этом  $\cos \varphi_1(t)$  имеет вид:

$$\cos \varphi_1(t) = \frac{h^2(t) + 2(R_1 + R_2)(R_1 - h(t))}{2R_1(R_1 + R_2 - h(t))}. \quad (9)$$

Преобразуя разность косинусов (5) и (8), имеем

$$\cos \varphi_{10} - \cos \varphi_1(t) = \frac{(h(t) - h_0)(h(t)h_0 + (R_1 + R_2)(2R_2 - h(t) - h_0))}{2R_1(R_1 + R_2 - h(t))(R_1 + R_2 - h_0)}.$$

Принимая здесь  $\cos \varphi_{10} \approx 1 - \frac{\varphi_{10}^2}{2}$  и  $\cos \varphi_1(t) \approx 1 - \frac{\varphi_1^2(t)}{2}$ , получаем:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\varphi_{10}^2 + \frac{(h(t) - h_0)(h(t)h_0 + (R_1 + R_2)(2R_2 - h(t) - h_0))}{2R_1(R_1 + R_2 - h(t))(R_1 + R_2 - h_0)}}. \quad (10)$$

Таким образом, при прохождении обрабатываемого материала между валами по закону (1) угол переходного процесса верхнего вала изменяется по закону (10). При этом верхний

вал перемещается по закону (8).

Когда толщина обрабатываемого материала в жале валов изменяется по закону (1) в упругой системе верхнего вала возбуждаются колебания и давления верхнего вала изменяется по закону [3]

$$Q = Q_0 + m\ddot{h}(t)$$

или

$$Q = Q_0 + km\ddot{\delta}(t), \quad (11)$$

где  $Q_0$  – давления прижимных устройств верхнего вала;  $m$  – масса верхнего вала.

В работе [4] установлена связь между силами, приложенными к валам и напряжениями, распределенными по поверхности контакта валов, в виде

$$t = \frac{Q \sin \theta + F \cos \theta}{Q \cos \theta - F \sin \theta} n, \quad (12)$$

где  $F$  – горизонтальная реакция опор верхнего вала;  $t, n$  – касательные и нормальные напряжения, соответственно;  $\theta$  – полярный угол.

С учетом выражения (11) формула (12) имеет вид

$$t = \frac{(Q_0 + km\ddot{\delta}(t)) \sin \theta + F \cos \theta}{(Q_0 + km\ddot{\delta}(t)) \cos \theta - F \sin \theta} n. \quad (12)$$

Принимаем обозначения:  $tg \psi = \frac{F}{Q}$  и  $\frac{t}{n} = f(t)$ , где  $f(t)$  – коэффициент трения в зоне контакта валов.

Подставляя принятые обозначения в формулу (12), после преобразований имеем:

$$f(t) = \frac{Q_0 \sin(\theta + \psi) + km\ddot{\delta}(t) \sin \theta \cos \psi}{Q_0 \cos(\theta + \psi) + km\ddot{\delta}(t) \cos \theta \cos \psi} \quad (13)$$

Таким образом, при прохождении обрабатываемого материала между валами по закону (1) коэффициент трения в зоне контакта валов изменяется по закону (13).

### Список литературы

1. Грудев А.П. Теория прокатки. М.: Металлургия, 1988, 240с.
2. Абдукаримов А. Анализ и синтез передаточных механизмов валковых машин с переменным межосевым расстоянием рабочих валов: Дис. ... канд. техн. наук., Ташкент: ИМСС, 1995. – 158 с.
3. Кузнецов Г.К. Исследование и методика проектирования валковых отжимных устройств текстильных машин. Дис. ... докт. техн. наук., Кострома, 1970.-287с.
4. Хуррамов Ш.Р. Оптимизация конструктивных параметров отжимных машин. Дис. канд. техн. наук., Ташкент, 1989. –148с.

## **КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ПЕРВИЧНОГО ВАКУУМА И ЕГО УПРУГИЕ СВОЙСТВА**

**А.А. Абрашкин**

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики,  
603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12, e-mail: [aabrashkin@hse.ru](mailto:aabrashkin@hse.ru)

Предложена модель гипотетического первичного вакуума как континуума, состоящего из частиц с планковскими масштабами длины, времени и массы (эфиронов). Они образуют бозе-конденсат, и их описание сводится к системе уравнений гидродинамики для потенциальных течений сжимаемой жидкости. Уравнение состояния такого планковского конденсата содержит постоянную Планка и является нелокальным. Показано, что в конденсате могут распространяться продольные колебания плотности эфиронов, которые интерпретируются как квантовые гравитационные волны. Найдено их дисперсионное уравнение. Дана интерпретация гравитона, как квазичастицы, соответствующей упругим колебаниям первичного вакуума. Обсуждаются некоторые следствия предложенной модели.

Ключевые слова: вакуум, планковские масштабы, гравитационные волны

### **1. Введение**

Теория вакуума – одна из центральных проблем современного естествознания. Создание его универсальной модели крайне важно для понимания изначальных основ материального мира и природы действующих в нем сил. В настоящее время активно обсуждается идея космологического вакуума с отрицательным давлением  $p = -\rho c^2$ , где  $\rho$  - плотность, а  $c$  - скорость света. Это уравнение состояния получено Глинером, как следствие общей теории относительности (ОТО) [1]. Такая “вакуумоподобная среда” обладает свойствами антигравитации, она могла возникнуть в результате Большого Взрыва и “ответственна” за расширение Вселенной. Но какое начальное состояние Вселенной предшествовало Большому Взрыву? Что можно сказать о свойствах первичного вакуума – “первоматериала” нашего мира?

С геометрофизической точки зрения его представляет, как хаотические колебания метрики пространства (пространственно-временную пену) на планковских масштабах длины  $l_{pl}$  и времени  $t_{pl}$ . Это область действия квантовой гравитации, где уравнения ОТО уже несправедливы. Все попытки их квантования пока не привели к успеху. К проблеме первичного вакуума можно подойти, однако, с другой, чисто физической точки зрения, когда пространство предполагается равномерно заполненным первичной субстанцией, способной переносить гравитационные волны. По существу это поиски модели эфира, но только не классического, отвергнутого после создания специальной теории относительности, а квантового. При этом уравнения, описывающие квантовый “гравитационный эфир”, вовсе не обязаны быть лоренц-инвариантными, но они и не должны противоречить основному выводу специальной теории относительности (СТО) – ограниченности скорости распространения взаимодействий скоростью света.

Подчеркнем особо важность этого утверждения. Возможны два принципиально разных пути построения теории квантовой гравитации. Первый предполагает запись уравнений гравитации в четырехмерном пространстве Минковского и требует, чтобы они были лоренц-инвариантными. Второй же допускает описание в обычном трехмерном пространстве на основе галилеево-инвариантных уравнений: но при формулировке результатов требует учета законов релятивистской физики (постулатов и следствий СТО). Если в первом случае свойства гравитационного поля объясняются эффектами кривизны пространства-времени, то во втором особым характером той первичной среды, которая сплошным образом заполняет Вселенную. При корректном проведении рассуждений оба подхода, очевидно, должны при-

вести к одинаковым результатам. Другое дело, что какой-то из путей в какой-то конкретной задаче может оказаться проще. В настоящей статье показано, что применительно к проблеме первичного вакуума таковым оказывается второй путь.

## 2. Эфирон – первочастица Вселенной

Будем исходить из традиционного представления о вакууме, как “океане” виртуальных частиц. Для первичного вакуума из соображений наибольшей простоты его устройства естественно принять, что он представляет бозе-конденсат тождественных свободных частиц. Но какую из частиц следует выбрать в качестве первочастицы?

Примем, что теория первичного вакуума должна быть релятивистской, квантовой и включать гравитацию. Это означает, что в теорию должны войти три мировые константы – скорость света  $c$ , постоянная Планка  $\hbar$  и гравитационная постоянная  $G$ , а характеристики первочастицы выражаться через них. Как заметил еще Макс Планк, из трех этих мировых постоянных по формулам

$$l_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,7 \cdot 10^{-33} \text{ см}; \quad t_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 6 \cdot 10^{-44} \text{ с}; \quad m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

можно составить единицу длины  $l_{pl}$ , времени  $t_{pl}$  и массы  $m_{pl}$ . Их называют планковские масштабы. Исходя из этого, будем считать, что первочастица обладает планковской массой  $m_{pl}$ , характерным размером, равным планковской длине  $l_{pl}$ , и живет отрезок времени, совпадающий с планковским масштабом времени  $t_{pl}$ . Назовем эту частицу эфироном.

Поскольку  $l_{pl}/t_{pl} = c$ , то следует принять, что эфирон движется со скоростью света. Этот факт противоречит специальной теории относительности, запрещающей частице, имеющей конечную массу покоя, двигаться со световой скоростью. Но здесь самое время постулировать (с этим сейчас согласно большинство физиков), что планковские масштабы длины и времени выступают в качестве элементарных интервалов длины и времени, существующих в природе. Они обозначают границы установленные закономерностям природы и экспериментальным возможностям человека. Исследователь не вправе заглянуть внутрь планковских интервалов времени и пространства, законы физики имеют здесь свой предел, поэтому движение эфирона со скоростью света в течение элементарного временного отрезка на протяжении элементарной длины ничему не противоречит. Точно так же внутренняя структура эфирона останется принципиально неопределенной для нас.

Эфирон выступает реально существующим объектом, задающим пределы нашему проникновению в микромир. Погрешность в измерении импульса эфирона  $\Delta p$  по порядку величины равна величине его импульса  $p = m_{pl} \cdot c$ . Но тогда, согласно принципу неопределенности, погрешность в измерении координаты эфирона  $\Delta l$  удовлетворяет неравенству  $\Delta l \geq \hbar/\Delta p \sim \hbar/m_{pl} \cdot c = l_{pl}$ . В случае измерения местоположения измерения принципиально невозможно указать, где внутри отрезка планковской длины находился эфирон.

Схожий расчет можно провести и для времени жизни эфирона. Погрешность в определении энергии  $\Delta E$  будет порядка  $m_{pl} \cdot c^2$ , и тогда для времени жизни виртуальной частицы справедлива оценка  $\Delta t \geq \hbar/m_{pl} \cdot c^2 \sim t_{pl}$ . Таким образом, эфирон не только является бесструктурной частицей, но его еще и нельзя зафиксировать.

Частицы с планковской массой уже рассматривались ранее М.А. Марковым [2] и К.П. Станюковичем [3], которые называли их соответственно максимоном (элементарной частицей с максимально возможной массой) и планкеоном<sup>1</sup> (в честь М. Планка). Но оба они счи-

<sup>1</sup> Масса планкеона вдвое меньше планковской

тали свои частицы стабильными и движущимися с досветовыми скоростями. В качестве параметров частицы они выбирали только два из трех планковских масштабов – массу и линейный размер. В отличие от них эфироны характеризуются всеми тремя масштабами.

## 2. Модель упругого континуума

Пусть эфироны образуют бозе-конденсат, который описывается следующей системой уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \frac{\hbar^2}{2m_p^2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 0. \quad (2)$$

Она получается из уравнения Шредингера для системы свободных, тождественных, невзаимодействующих между собой частиц, где  $\rho = |\psi|^2$ ,  $\vec{v} = (\hbar/m_p) \nabla \arg \psi$ ,  $\psi$  - волновая функция частицы. Уравнение (1) представляет уравнение непрерывности для сплошной среды, поэтому величину  $\rho$  естественно принять за плотность вакуума. Вектор  $\vec{v}$  описывает скорость его движения. Уравнение (2) представляет уравнение Эйлера, правда, теперь в нем присутствует квантовомеханическое давление  $P$ , определяемое формулой

$$\nabla P = - \frac{\hbar^2}{2m_p^2} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \quad (3)$$

Его необычность заключается, в том, что оно нелокально связано с плотностью. С точки зрения классической гидродинамики система (1), (2) описывает потенциальные течения идеальной сжимаемой жидкости с нелокальной зависимостью давления от плотности.

Рассмотрим одномерные линейные колебания плотности первичного вакуума на фоне его однородного состояния покоя ( $\rho = \rho_0$ ,  $v = v_0 = 0$ ). Уравнение для возмущений плотности  $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \frac{\hbar^2}{4m_p^2} \frac{\partial^4 \tilde{\rho}}{\partial x^4} = 0, \quad (4)$$

а соответствующее ему дисперсионное уравнение записывается так:

$$\omega = \pm \frac{\hbar k^2}{2m_p} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar G}{c}} k^2. \quad (5)$$

В него входит гравитационная постоянная, поэтому колебания плотности первичного вакуума - это гравитационные волны. Они являются продольными.

Групповая скорость найденных волн равна  $V_g = \hbar k / m_p = c k l_p$ . Формально волновое число изменяется от нуля до бесконечности, а значит, и скорость найденных волн не ограничена. Но поскольку планковский масштаб выступает в качестве минимально возможной длины, то максимально возможное волновое число равно обратной планковской длине  $k_{\max} = l_p^{-1}$ , откуда следует, что  $V_g$  не может превышать скорости света  $c$  (в полном согласии со специальной теорией относительности).

Согласно принципу корпускулярно-волнового дуализма, гравитационной волне можно поставить в соответствие частицу с импульсом  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  и энергией  $\varepsilon = \hbar \omega$ , где  $\varepsilon = \pm p^2 / 2m_p$ . В случае выбора положительного знака это выражение представляет кинетическую энергию свободной частицы с массой  $m_p$ . Это та самая “корпускула”, которая фигурирует в кинетической теории гравитации Лесажа, объясняющей природу закона всемирного

тяготения. Слово корпускула взято в кавычки, поскольку это волновое возбуждение в среде: оно переносит импульс, но не массу. Она соответствует гравитону теории элементарных частиц – частице с нулевой массой. Волновые возбуждения первичного вакуума пронизывают все материальные тела и в силу квантового характера не испытывают затухания. Два этих свойства, которыми Лесаж наделял свои гипотетические корпускулы, объясняют прямую пропорциональность силы взаимодействия двух тел их массам и обратную пропорциональность квадрату расстояния между ними.

Возможность физической интерпретации волновых возмущений, соответствующих отрицательному знаку в выражении, требует отдельного обсуждения. Отрицательность энергии, по-видимому, следует соотносить с антигравитацией (вакуумоподобным состоянием Глинера). Если это так, то гравитацию, равно как и антигравитацию, можно объяснять как силы, порождаемые возбужденным первичным вакуумом.

ОТО - теория не квантовая, и потому не описывает найденную нами квантовую ветвь гравитационных колебаний. В отличие от них, волны в ОТО подобны электромагнитным: они поперечные, бездисперсионные и распространяются с постоянной скоростью  $c$ . Квантовая и “эйнштейновская” ветви колебаний осуществляются на разных масштабах и имеют разную физическую природу. Первая связана с существованием первичного вакуума (гравитационного эфира) и объясняет природу ньютоновской гравитации, вторая дает возможность определить релятивистские поправки к нему. Предлагаемый квантовый и традиционный эйнштейновский подходы, таким образом, непротиворечиво дополняют друг друга.

### **3. Некоторые следствия модели**

Постулат о предельности скорости света традиционно соотносят с преобразованиями Лоренца и формулами специальной теории относительности. Но смысл его существенно глубже. Это скорость элементарных частичек первичного вакуума. Так как все физические взаимодействия передаются через их посредство, то величина  $c$  - это предельная скорость распространения взаимодействий.

Первичная эфиронная среда предшествовала Большому Взрыву и первым проявлениям электромагнетизма. В силу этого для скорости  $c$  более естественной становится интерпретация ее как скорости движения элементарных частичек первичного вакуума. При этом проясняется и физический смысл эйнштейновской формулы  $E = Mc^2$  для полной энергии тела массы  $M$ . Присутствие в ней квадрата скорости света связано отнюдь не с процессами электромагнитной природы, а с тем, что все материальные тела выступают конечными продуктами связанных особым образом систем эфиронов, каждый из которых движется со скоростью  $c$ .

Как заметил М.А. Марков, для частицы с планковской массой покоя радиус Шварцшильда вдвое больше планковской длины [2]. Это означает, что максимон – черная дыра. Предположим теперь, что в результате квантовой флуктуации некоторый эфирон просуществовал дольше “положенного” ему планковского времени. В этом случае он на время, превышающее  $t_{pl}$ , обретает свойства стабильной частицы с планковской массой. Можно сказать, что эфирон превращается в максимон, и, как всякая черная дыра, становится центром притяжения для окружающей его первичной среды.

Плотность внутри стабильного эфирона порядка планковской плотности  $\rho_{pl} \sim m_{pl}/l_{pl}^3 \sim 10^{94} \text{ г/см}^3$ . Его можно отождествить с точкой сингулярности, которая вводится в теории Большого Взрыва. Материализовавшийся максимон нарушает симметрию однородного мира и создает условия для появления новых подобных ему частиц. В нашей интерпретации Большой Взрыв, таким образом, сводится к цепной реакции рождения максимонов и разрастанию области пространства планковской плотности. Внутри нее начинается процесс рождения первых элементарных частиц. Закон сохранения энергии требует, чтобы



одновременно с этим возникала и вакуумоподобная среда Глинера, соответствующая состояниям с отрицательной энергией. Антигравитирующая по природе, она “запускает” и поддерживает расширение Вселенной.

#### **4. Выводы**

Построена физическая модель изначального состояния Вселенной (первичного вакуума). Введена его элементарная частица – виртуальная частица с планковскими масштабами времени, линейного размера и массы (эфирон). Показано, что ансамбль эфиронов обладает упругими свойствами и способен переносить колебания со скоростью, не превышающей скорость света. Найденные волны соотносятся с квантовыми гравитационными волнами, а соответствующая им квазичастица с гравитоном. Дана оригинальная концепция возникновения Большого Взрыва.

#### **Список литературы**

1. Глинер Э.Б. Алгебраические свойства тензора энергии-импульса и вакуумоподобные состояния вещества // ЖЭТФ, 1965. Т. 49. Вып. 2(8). С.542-548.
2. Марков М.А. Элементарные частицы максимально больших масс (кварки, максимоны) // ЖЭТФ, 1966. Т.51. Вып 3(9). С.878.
3. Станюкович К.П. К вопросу о существовании устойчивых частиц в метagalактике // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Т. 1. М.: Атомиздат, 1966.
4. Madelung E.. // Zeitschr. f. Phys., 1926. Vol.40. № 3- 4. P. 327.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В СИСТЕМАХ ДЕМПФИРОВАНИЯ И ГАШЕНИЯ ВИБРАЦИЙ

Айнбиндер Р.М., Гордеев Б.А.

ННГАСУ, Россия, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65,  
Тел.: (831) 430-69-84; [romain@inbox.ru](mailto:romain@inbox.ru)

В докладе рассматриваются вопросы снижения уровней вибрации энергоемких электротехнических комплексов, к которым можно отнести единые электростанции автономных мобильных объектов, например дизель-генераторные установки переменной частоты вращения. Приводятся результаты исследований амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) газогидравлических виброопор и тросовых виброизоляторов.

Ключевые слова: вибрация, гидравлические опоры, демпфирование, спектр, гашение

Критерием, принятым для оценки интенсивности вибрации машин с частотой вращения 600 об/мин и выше, является среднее квадратическое значение виброскорости  $v_e$  (мм/с).  $v_e$  определяют непосредственным измерением или по результатам спектрального анализа в диапазоне от частоты вращения, на которой проводят измерения, до 2000 Гц по формуле:

$$v_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_{ei}^2},$$

где  $v_{ei}$  - среднее квадратическое значение виброскорости, полученное при спектральном анализе для  $i$ -й полосы фильтра,  $i = 1, 2 \dots n$ , при этом первая и  $n$ -я полосы фильтра должны включать соответственно нижнюю и верхнюю граничные частоты заданной для измерения полосы частот.

Для электромеханических комплексов характерно наличие не менее двух степеней свободы. Структура такой системы при общепринятых допущениях в теории электропривода приведена на рис. 1. Эта система является гетерогенной, в ней имеют различную природу силы (моменты), жесткости и демпферы:  $M_1$  – мгновенное значение электромагнитного момента на валу электрической машины;  $M_2$  – механический момент, противодействующий электромагнитному моменту;  $k_1$  – механический аналог эквивалентной реакции на перетоки составляющих неактивной мощности, потребляемой из сети при создании момента  $M_1$ ;  $k_2$  – жесткость валопровода и соединительных элементов;  $k_3$  – жесткость элементов крепления и вязкоупругого основания;  $b_1$  – механический аналог эквивалента электрических потерь в электроприводе;  $b_2$  – коэффициент демпфирования валопровода и соединительных элементов;  $b_3$  – коэффициент демпфирования вязкоупругого основания [1].

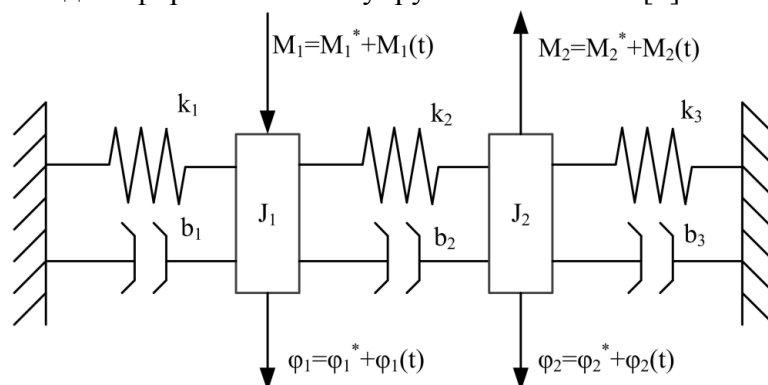


Рисунок 1- Структура системы с двумя степенями свободы и подсистемами активной виброзащиты

Анализ такой системы облегчается при допущении линейности элементов и использовании матричного метода:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1'' \\ \varphi_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 + b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Если  $M_1$  и  $M_2$  являются источниками сложных колебаний, то решение осуществляется численными методами для множества реализаций с целью выявления средних статистических значений виброперемещений, виброскорости и виброускорения. При периодическом режиме возбуждения колебаний, когда заданная скорость электропривода остается неизменной, а рассматриваются только вибрации, необходимо анализировать гармонический спектр моментов при допущении постоянства их технологических значений  $M_1^*$  и  $M_2^*$ .

Исследование этой модели (рис. 1), а также других моделей с большей размерностью позволило получить АЧХ электромеханических комплексов, согласующиеся с [2]. На рисунке 2 показаны АЧХ вибраций электрических машин.

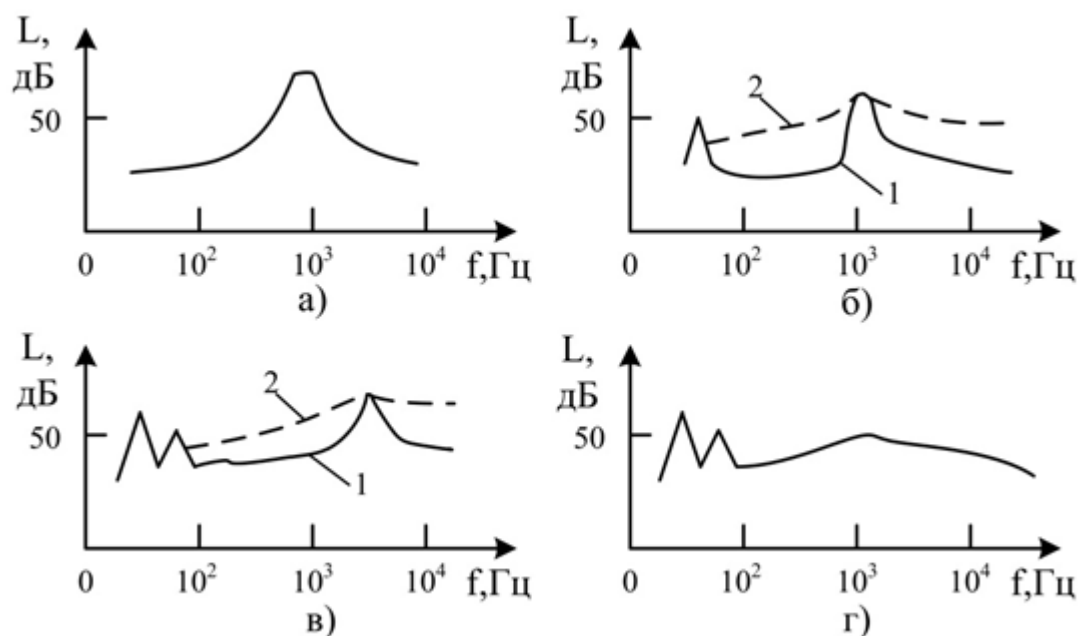


Рисунок 2 - АЧХ вибрации электрических машин: а) крупные ЭД постоянного и переменного тока частотой вращения до 1000 об/мин; б) ЭД постоянного и переменного тока средней мощности частотой вращения 1500 об/мин: 1 – с подшипником скольжения; 2 – с подшипником качения; в) ЭД постоянного и переменного тока средней мощности частотой вращения 3000 об/мин: 1 – с подшипником скольжения; 2 – с подшипником качения; г) крупные турбогенераторы частотой вращения 3000 об/мин.

В теории динамики машин выделяют два основных класса систем виброзащиты: это системы пассивной виброзащиты (СПВ) и системы активной виброзащиты (САВ). Среди СПВ наиболее простыми, доступными и распространёнными являются упругие элементы. На достаточно высоких частотах они обеспечивают отражение большей части колебательной энергии обратно в источник. Механики представляют работу САВ как введение или изменение эквивалентных параметров пассивного объекта – массы, жесткости и демпфирования [2].

Гидравлические виброопоры (гидроопоры) объединяют в себе упругий резиновый элемент и магнитогидравлический гаситель колебаний. В конструкции нет трущихся частей с фрикционным сухим контактом. Изменение объемов полостей с магнитореологической жидкостью происходит за счет изменения формы гидроопоры при ее деформации [3,4]. В

качестве компонентов трения выступает конструкционное трение в эластичных элементах и магнитогидравлическое вязкое сопротивление жидкости [5,6]. В Нф ИМАШ РАН были разработаны и изготовлены различные типы гидроопор, предназначенные для использования в автомобильной промышленности, железнодорожном транспорте, а также для военно-морского флота [7,8]. Поскольку конструкции последних разработок гидроопор позволяют использовать входные вибросигналы как управляющие ее параметрами, рассмотрим вариант гидроопоры, предназначенной для статической нагрузки до 5000 Н, [6].

Гидравлическая виброопора работает следующим образом. При запуске электротехнического комплекса, например дизель-генераторной установки, возбуждающей вибрации с широким спектром гармонических составляющих, на гидравлическую виброопору действует знакопеременное давление. Работающий, например, двигатель внутреннего сгорания возбуждает основную гармонику на частоте вращения коленвала, которая энергетически превышает остальные на 15-20 децибел. Следовательно, процесс изменения внешнего давления при стационарной работе силового агрегата можно считать гармоническим. При действии на опорную плату 4 статической нагрузки от установки электротехнического комплекса эластичная обечайка 2 деформируется, и объем рабочей камеры несколько уменьшается. Это вызывает повышение давления демпфирующей жидкости, обладающей электро-реологическими свойствами, и в компенсационной камере 10, объем которой за счет не-сжимаемости жидкости увеличивается на ту же величину, что приводит к деформации гофрированной мембраны 11.

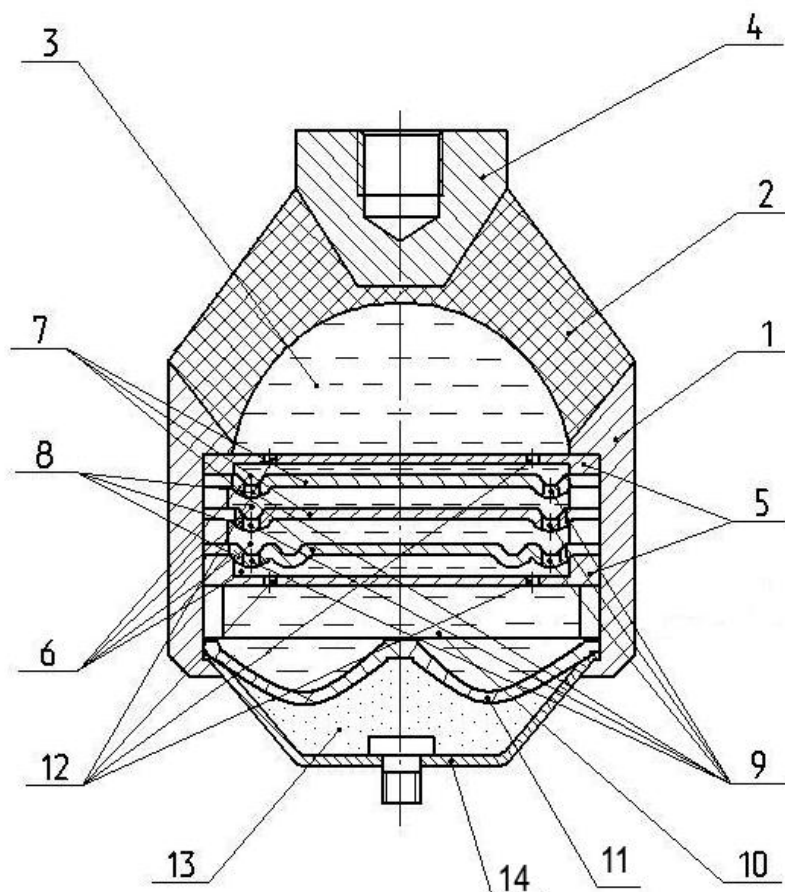


Рисунок 3 - Общий вид гидравлической гидроопоры

При действии на опорную плату гидропоры знакопеременной динамической нагрузки в первом полупериоде внутреннее давление в рабочей камере еще более возрастает. Вследствие возникшей разности давлений в рабочей и компенсационной камерах масса электрореологической жидкости, распределенная в рабочей камере начинает через дроссельные отверстия 9, выполненные в гофрах 8, поступать в промежуточную полость 6, расположенную в перегородке 5. Выполнение дроссельных отверстий в эластичных гофрах позволяет избежать кавитационных явлений, сопровождающихся микрогидроударами. Кавитация возникает при резких изменениях внутреннего давления в моменты отрыва внутреннего потока от стенок неподвижных относительно жидкости дроссельных каналов, выполненных в жесткой перегородке. Но в предлагаемой конструкции дроссельные отверстия выполнены в эластичных гофрах, подверженных деформациям под действием потока жидкости и резких изменений давления при отрыве потока там не наблюдается. Следовательно снижается вероятность возникновения микрогидроударов. Электрореологическая жидкость поступает сразу через несколько дроссельных отверстий 12, расположенных в верхней половине перегородки 5. Дроссельные отверстия расположены по периферии перегородки таким образом, что направления их осей тангенциальны к внутренней поверхности обечайки 2. Суммарная пропускная площадь этих отверстий должна соответствовать суммарной площади всех дроссельных отверстий, выполненных в эластичных гофрах одной пьезоэлектрической пластинки. Расположение дроссельных отверстий соответствующих верхней и нижней пьезоэлектрическим пластинкам должно обеспечивать наибольшее удаление их друг от друга. Например, на верхней перегородке, состоящей из гофров и прикрепленной к ним пьезопластины, выполнены два отверстия диаметрально противоположные. Тогда на соответствующей ей нижней перегородке выполнены два диаметрально противоположные отверстия, но смещенные относительно верхней на угол  $90^0$ . Это условие необходимо для создания более мощных турбулентных потоков в промежуточной полости перегородки. Турбулентные потоки образуются под действием электрических полей, образуемых пьезоэлектрическими пластинами за счет разности гидравлических давлений при деформации гидропоры. При движении электрореологической среды между этими перегородками в электрическом поле возникает сила Лоренца, под действием которой траектории заряженных частиц приближаются к параболическому закону, что увеличивает демпфирующие свойства гидропоры. При поступлении рабочей жидкости в промежуточную полость, вследствие турбулентных потоков и переходных процессов в верхней и нижней частях внутренней полости, на верхнюю пьезоэлектрическую перегородку, входящую в состав пакета 7 воздействуют знакопеременные стохастические нагрузки. Поскольку на ней имеется один гофр, расположенный рядом с внутренней поверхностью корпуса 1, то эта перегородка обладает определенной собственной частотой, зависящей от жесткости гофра и массы перегородки. Кроме этого пьезоэлектрическая перегородка обладает собственной частотой электромагнитного резонанса, которая зависит от толщины перегородки и ее пьезомодуля. Частоты механического и электрического резонансов могут не совпадать. Частота механического резонанса в большей мере зависит от жесткости гофров чем от массы перегородки. Частота электрического резонанса от жесткости гофров не зависит, хотя амплитудное значение электрического резонанса будет тем выше, чем жестче гофры. В случае гармонического входного вибросигнала, действующего на гидропоры, частота деформации гофра этой перегородки соответствует частоте входного вибросигнала. Через дроссельное отверстие 9, площадь которого должна соответствовать суммарной площади всех отверстий в верхней части перегородки 5, демпфирующая электрореологическая жидкость поступает в следующую промежуточную полость, расположенную между первой и второй пьезоэлектрическими перегородками пакета 7. Входной вибросигнал чисто гармоническим никогда не бывает. В его спектре всегда присутствуют высокочастотные гармонические составляющие, причем в некоторых случаях их амплитуда сравнима с основной гармоникой и даже может превышать ее. Это возможно в тех случаях, когда высокочастотный вибросигнал модулирован низкочастотным от другого источника, или при бие-

ниях двух высокочастотных вибросигналов. Поэтому расположение гофров на второй пьезопластине и ее масса должны соответствовать той гармонической составляющей входного вибросигнала, которую целесообразно погасить. Если необходимо демпфировать более низкую частоту вибрации, то жесткость гофров надо уменьшать, массу пластины увеличивать. При увеличении массы пьезоэлектрической пластины снижаются частоты ее электрического и механического резонансов. Различие этих частот очень незначительное. Электрический резонанс проявляется при действии переменного электромагнитного поля на пьезоэлектрическую пластину. Если его частота совпадает с собственной частотой пластины, то мощность излученного пластиной механического сигнала максимальная. При действии ударных нагрузок их спектр широкополосный и всегда в нем присутствуют гармоники соответствующие частотам механического резонанса пьезопластины. Механический резонанс проявляется при действии на пьезопластину переменного механического или акустического сигнала. При этом генерируемый пластиной электрический сигнал наиболее мощный чем на всех других частотах внешнего механического сигнала, действующего на пластину. Если необходимо демпфировать кроме основной вторую гармоническую составляющую, жесткость гофров увеличивается, а масса пьезоэлектрической пластинки уменьшается. Массу этой пластинки можно оставить неизменной, а жесткость гофров увеличить в четыре раза, исходя из соотношения

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , где  $k$  – жесткость гофров,  $m$  – масса пластинки. Например, требуется

демпфировать частоту внешнего вибросигнала порядка 10 Гц, а также кратные гармоники до третьего порядка включительно. Допустим, что массы пьезопластинок порядка 100 грамм и постоянные. Тогда жесткость гофров на первой пластике для демпфирования основной гармоники определяется по формуле  $k = \omega^2 m = (2\pi \cdot 10)^2 \cdot 10^{-1} [\text{Н/м}] = 400 [\text{Н/м}]$ . На второй пьезопластинке при демпфировании второй гармоники  $k = 1600 [\text{Н/м}]$ , или  $k \cdot 2^2$ , для третьей –  $k \cdot 3^2$ , для четвертой –  $k \cdot 4^2$  и т.д. При действии на гидроопору широкополосного вибросигнала отдельные его гармоники, взаимодействуя друг с другом в пакете диафрагм, обеспечивают более равномерную амплитудно-частотную характеристику.

В зависимости от технологического процесса изготовления гидроопоры, а также от ее функционального назначения, например демпфирования ударов, жесткость гофров можно оставлять постоянной, но менять массы пьезоэлектрических пластин. Тогда исходя из формулы

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , гидроопору также можно настраивать на кратные гармоники. Кроме этого

при действии коротких ударных импульсов на пьезопластинки, каждая из них будет возбуждаться на собственной частоте механического резонанса, образуя между пластинками высокочастотные резонаторы, разбивающие кавитационные пузыри. Например, пусть верхняя пьезопластинка имеет частоту собственного механического резонанса порядка одного мегагерца при толщине 1 мм, выполненной из керамики ЦТС-19 (цирконат-титанат свинца). Тогда, учитывая скорость распространения упругих волн в электрореологической среде 1300-1500 м/с, длина волны акустического сигнала, возбуждаемого пластинкой соответствует  $1,4 \cdot 10^{-3}$  м., или 1,4 мм. Следовательно, для создания резонатора необходимое расстояние между пластинами должно быть порядка 0,7 мм. Вторая пластинка в этом же пакете может по массе превышать первую. Тогда ее собственная частота будет ниже, следовательно возрастает длина волны излученного акустического сигнала и расстояние между второй и третьей пластинами увеличивается. Это необходимое условие для второго резонатора. Если массы последующих пьезопластин возрастают, то для обеспечения устойчивой работы резонаторов расстояние между ними также линейно возрастает. Собственная частота пьезопластины обусловлена ее материалом и геометрическими параметрами и от жесткости гофров не зависит.

В первом полупериоде входного вибросигнала, когда демпфирующая электрореологическая жидкость поступает из рабочей камеры через дроссельные отверстия в промежуточную полость 6 и далее через пакет диафрагм к нижней половине перегородки 5, и происхо-

дит дальнейшее выбрасывание ее через дроссельные каналы 12 в компенсационную камеру 10, ограниченную снизу гофрированной мембраной 11. Также как и в верхней половине перегородки дроссельные отверстия выполнены на периферии, причем направление последних тангенциально к впадинам гофров для обеспечения турбулизации вихревых шнуров и улучшению конвенции в компенсационной камере 10.

Увеличивающийся объем демпфирующей жидкости в компенсационной камере вызывает деформацию гофрированной диафрагмы 11, которая начинает прогибаться вниз и повышает давление в газовой камере 13, ограниченной снизу поддоном 14. Так как объем газовой камеры заполнен парциальной смесью газов с различными температурами фазовых переходов, некоторые из которых, например аммиак, имеющий температуру фазового перехода второго рода порядка  $-33^{\circ}\text{C}$  при атмосферном давлении и удельную теплоту парообразования  $1370\text{ кДж/кг}$ , или фреон 12 ( $\text{CCl}_2\text{F}_2$ ), имеющий температуру фазового перехода  $-25^{\circ}\text{C}$  и удельную теплоту парообразования  $162\text{ кДж/кг}$ , а также двуокись углерода  $\text{CO}_2$  с близкими характеристиками позволяют более эффективно поглощать энергию демпфируемых колебаний. Кроме этого при работе гидроопоры могут возникать кавитационные явления при дросселировании рабочей жидкости через отверстия в перегородках. Кавитационные эффекты в той или иной степени присущи всем гидроопорам, которые вызывают при повышении внутреннего давления микрогидроудары, приводящие к образованию на перегородках микрополостей, каверн, и образованию в рабочей среде металлических взвесей. Металлические взвеси могут вызывать нарушение процесса дросселирования. Использование в гидроопорах пьезоэлектрических пластин позволяет снизить плотность распределения взвесей в рабочей среде, поскольку они прилипают к перегородкам и не нарушают процесс дросселирования. Кроме того для снижения вероятности возникновения кавитации и микрогидроударов в рабочей электрореологической жидкости, в газовой камере 13, которая отделена от компенсационной полости 10 эластичной диафрагмой 11, при ее заполнении повышают давление до двух атмосфер. Тогда в рабочей и компенсационной камерах также повышается давление, но до величины меньшей чем в газовой камере, благодаря разделяющей эластичной диафрагме. Однако повышенное давление в рабочей среде будет препятствовать кавитации и микрогидроударам.

Во втором полупериоде входного вибросигнала изменяется направление действия силы на опорную плату 4 на противоположное. Объем рабочей камеры 3 увеличивается и демпфирующая жидкость из нижней компенсационной камеры 10 через пакет гофрированных пьезоэлектрических перегородок 7, помещенных в промежуточной полости 6, поступает в рабочую камеру. Этот процесс возможен только при условии, когда давление в рабочей камере понизится до величины не превышающей  $100\text{ кПа}$ . Эта величина давления ниже одной атмосферы. В этом случае все процессы в гидроопоре идут в обратном направлении. Для улучшения конвенции в рабочей камере вихревые шнуры, образованные выбросом демпфирующей жидкости из периферийных дроссельных отверстий верхней половины разделительной перегородки, создают дополнительные крутящие моменты, скользящие относительно внутренней поверхности обечайки. Внутренняя поверхность обечайки может иметь форму сферы, эллипсоида или иную поверхность второго порядка.

Благодаря введению в промежуточную полость 6 перегородки 5 пакета гофрированных пьезоэлектрических перегородок 7, каждая из которых настроена на определенную гармонику входного вибросигнала, расширяется рабочий частотный диапазон гидроопоры и эффективно гасятся акустические шумы.

Стендовые испытания гидравлических виброопор показали следующее.

На резонансной частоте возбуждения вибростенда  $32,0\text{ Гц}$  в центральных контрольных точках стола вибростенда или нагрузки гидравлических виброопор проявляется широкополосная низкочастотная случайная вибрация. Амплитудные спектры входных и выходных вибросигналов и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) гидравлических виброопор на частоте возбуждения вибростенда  $32,0\text{ Гц}$  представлены на рисунке 4.

Анализ спектров входных и выходных вибросигналов и АЧХ показывает, что гидравлические виброопоры являются нелинейными гидромеханическими изделиями. Нелинейность гидравлических виброопор подтверждается неравномерностью АЧХ во всем частотном диапазоне действия вибросигналов. Установлено, что входные вибросигналы гидравлических виброопор превышают выходные, в среднем, на 15-20 децибел на гармониках спектра от 0,8 ÷ 160,0 Гц. Однако на частотах 25,0 Гц, 31,5 Гц и 60,0 Гц эффект виброгашения составляет только 5-8 децибел. В процессе стендовых испытаний гидравлических виброопор на частоте резонанса наблюдается нестабильность их АЧХ. Это происходит из-за взаимодействия упругой системы вибростенда с системой гидравлическая виброопора-груз. Стендовые испытания показали достаточно высокую корреляционную связь между входными вибросигналами во временной области, коэффициент множественной регрессии порядка 0,95. Однако в частотной области между отдельными гармониками имеется значительное различие. В выходных сигналах это различие возрастает.

На рис. 5 приведена зависимость относительной погрешности результатов измерения выходных сигналов гидроопор как функции частоты вибростенда. На резонансной частоте она достигает 15%, на низких частотах, порядка 5 Гц. и ниже погрешность точно установить не удалось, так как вследствие биений частота вибростенда была неустойчивой.

Гидравлические виброопоры имеют высокую прочность, сохраняют работоспособность до температур порядка 70<sup>0</sup> высокий коэффициент рассеивания энергии, и способны осуществить виброизоляцию дизель-генераторных установок переменной частоты вращения.

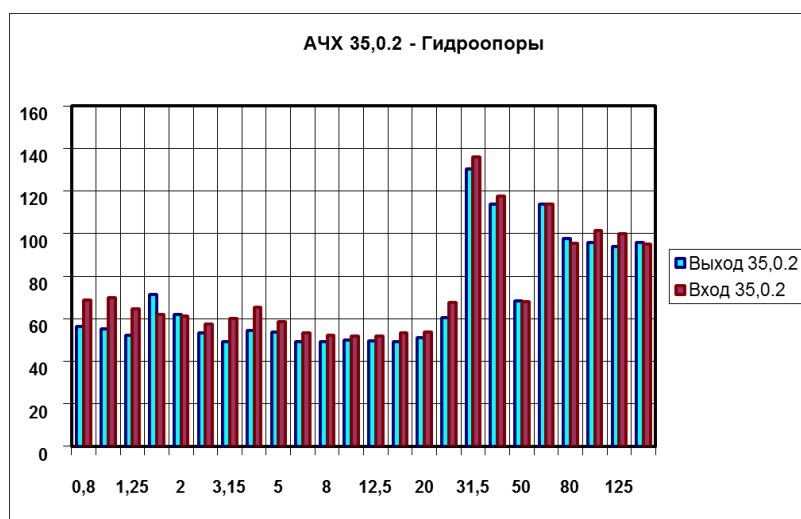


Рисунок 4 - Спектры входных и выходных вибросигналов и АЧХ гидроопор на резонансной частоте возбуждения вибростенда 32,0 Гц. Изм. № 2.

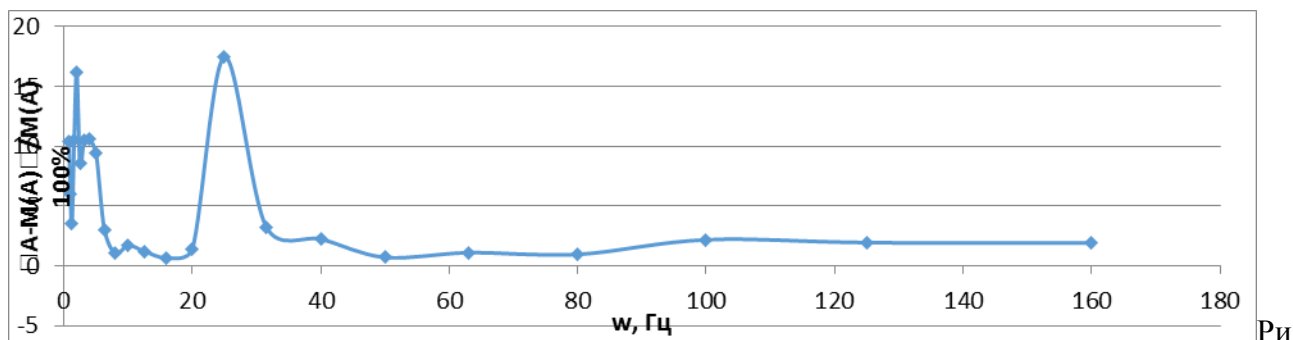


Рисунок 5 – Оценка погрешностей измерения амплитуды основной гармоники на резонансной частоте.



Виброизоляторы сухого трения [9] являются цельнометаллическими (тросовые, из прессованного проволочного материала МР- металлорезины). Рассеивание энергии колебаний в них связано с внешним трением элементов их конструкции друг о друга.

Высококачественный стальной канат (трос) двойной свивки ЛК-О (с линейным касанием стальных проволок между слоями, диаметр проволок одинаковый) (рис.6), производимый по ГОСТ 3077-80 (соответствует международному стандарту ИСО 2408, BS 302) [7].

Конструкция стального каната 6х19(1+9+9)+о.с. с одним органическим сердечником, являющимся внутренней опорой для прядей, свитых из оцинкованной проволоки, а также амортизатором для самого каната. Органический сердечник успешно противостоит радиальному давлению проволочных прядей при значительных нагрузках на канат. Таким образом, органический сердечник противостоит поперечной деформации каната. Проволока для канатов изготавливается по ГОСТ 7372-79 из углеродистой канатной катанки, сталь марки 45 ÷ 75 или коррозионностойкой стали марок 12Х18Н9Т и 12Х18Н10Т по ГОСТ 5632. Стальные канаты по ГОСТ 3077-80 надежно работают в неблагоприятных условиях сильного механического истирания.

Кольцевые тросовые упругие элементы виброизоляторов сформированы из 6-ти витков стального троса Ø13,0 мм с индексом витка  $C = D/d = 10$ , где D - диаметр витка, d - диаметр стального троса [9]. Практика более ранних разработок показала, что при индексе витка  $C = D/d = 10$  уже получается достаточно высокая работоспособность тросовых цилиндрических виброизоляторов [9].

#### Стендовые испытания тросовых виброизоляторов

При анализе вибрации при помощи виброметра ОКТАВА-110В/101ВМ в полосе частот от 0,8 ÷ 160,0 Гц на частоте возбуждения вибростенда 32,0 Гц также установлено, что в центральных контрольных точках стола вибростенда или нагрузки тросовых виброизоляторов проявляется широкополосная низкочастотная случайная вибрация, характеризующаяся большим количеством гармонических составляющих в области низких частот. Амплитудные спектры входных и выходных вибросигналов и АЧХ в децибелах тросовых виброизоляторов представлены на рис. 6.

Анализ спектров входных и выходных вибросигналов и АЧХ в центральных контрольных точках стола вибростенда или нагрузки тросовых виброизоляторов (ТВИ) на частоте возбуждения вибростенда 32,0 Гц показывает, что тросовые виброизоляторы являются нелинейными цельнометаллическими изделиями. Нелинейность тросовых виброизоляторов подтверждается неравномерностью АЧХ во всём частотном диапазоне действия вибросигналов.

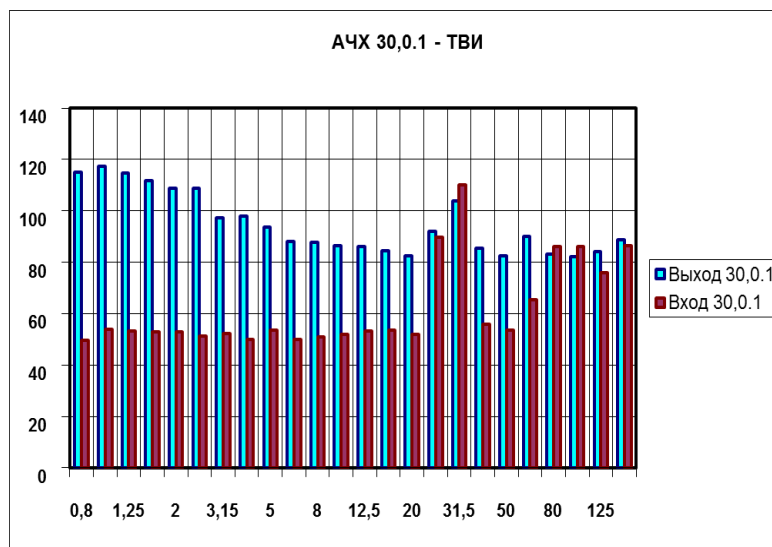


Рисунок 6 - Спектры входных выходных вибросигналов и АЧХ ТВИ на частоте возбуждения вибростенда 10,0 Гц. Изм. № 1.

Из диаграммы, приведенной на рисунке 6, следует, в низкочастотной области спектра, до 32 Гц демпфирования не наблюдается, что не позволяет использовать тросовые виброизоляторы в системах гашения вибрации электротехнических комплексов.

В процессе наработки цилиндрических тросовых виброизоляторов наблюдается нестабильность их АЧХ. Это происходит из-за увеличения сил трения на взаимодействующих между собой контактных поверхностях их проволок стального троса. Увеличение коэффициента трения приводит к «схватыванию» значительных групп проволочных контактов. Вследствие этого резко падает демпфирующая способность тросового виброизолятора и возрастает его жесткость. Поэтому одним из эффективных средств борьбы за сохранение стабильности упруго-демпфирующих характеристик тросовых виброизоляторов в процессе длительной наработки является использование тросов из стального каната с антифрикционным покрытием поверхностей их проволок [9]. Кроме того, со временем, под действием статической нагрузки, тросовые упруго-демпфирующие элементы могут деформироваться, что неминуемо сказывается на их амплитудно-частотных характеристиках.

Тросовые виброизоляторы из стального каната имеют высокую прочность, высокий коэффициент рассеивания энергии, и способны осуществить защиту от ударных воздействий. При этом трос из стального каната для виброизолятора рассматривается как квазисплошная среда, для которой необходимо знать модуль упругости и коэффициент Пуассона.

#### Список литературы

1. Шубов И.Г. Шум и вибрация электрических машин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986 г – 208 с.
2. Erofeev V.I. Electromechanic installations vibration acceleration protection system / Erofeev V.I., Plehov A.S., Titov D.U. // International Conference on Informatics, Networking and Intelligent Computing, 2014.
3. Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Глумин В.Б., Новожилов М.В. Опора. Авторское свидетельство СССР № 1732076. 1992. Бюл. № 17.
4. Гордеев Б.А., Тумаков С.Ф. Гидравлическая виброопора. Патент РФ. № 2307267. 2007. Бюл. № 27.
5. Синев А.В., Гордеев Б.А., Куплинова Г.С. Гидравлическая виброопора. Патент РФ. №2407929. 2010. Бюл. № 36.
6. Гордеев Б.А., Синев А.В., Осмехин А.Н., Гордеев А.Б., Охулков С.Н. Гидравлическая виброопора. Патент РФ. № 2471098. 2011. Бюл. №36.
7. Гордеев Б.А., Горсков В.П., Осмехин А.Н., Куклина И.Г., Жданов В.А., Охулков С.Н. Патент №127847. Адаптивная гидравлическая виброопора. Заявка №2012105735 от 17.02.2012 г. Опубликовано 10.05.2013 г
8. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В., Мугин О.О. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. - М.: Физматлит. 2004. - 176 с.
9. Чегодаев Д.Е., Пономарёв Ю.К. Демпфирование динамических воздействий. Самара: изд. СГАУ, 1997. 334 с.

## ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА

Л.Д. Акуленко<sup>1</sup>, Я.С. Зинкевич<sup>2</sup>, Т.А. Козаченко<sup>2</sup>, Д.Д. Лещенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
119526 Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, корп.1, e-mail: [kumak@ipmnet.ru](mailto:kumak@ipmnet.ru)

<sup>2</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
65029 Украина, Одесса, ул. Дидрихсона, 4,  
e-mail: [leshchenko\\_d@ukr.net](mailto:leshchenko_d@ukr.net), [kushpil.ru@rambler.ru](mailto:kushpil.ru@rambler.ru)

Исследуется возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущающих моментов, зависящих от медленного времени. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации, полученная усредненная система уравнений. Построено численное решение усредненной системы уравнений движения твердого тела под действием диссипативных моментов при различных условиях и параметрах задачи.

*Ключевые слова:* возмущенное движение, усреднение, угол нутации, момент, случай Лагранжа.

**Введение.** Задача о движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из классических задач механики. Объекты в природе и технике (летательные аппараты, космические и подводные корабли, небесные тела) с учетом действующих возмущений и их внутренней структуры могут быть смоделированы в виде одного твердого тела. При рассмотрении движения этих объектов возникает необходимость исследований вращательных движений твердых тел под действием внешних и внутренних моментов сил.

На протяжении многих лет разработаны различные методики для анализа таких движений. Особенно велика роль асимптотических методов, позволяющих при их корректном применении уже в первом приближении выявить основные особенности движения. Один из таких методов - метод усреднения [1,2]. С помощью этого метода были исследованы движения волчка Лагранжа под действием возмущающих моментов произвольной природы. В [3,4,6-8] описана процедура усреднения для медленных переменных, приведены условия возможности усреднения, получены усредненные системы уравнений в первом и втором приближении.

**Основные результаты.** Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$  под действием возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины  $\varepsilon M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $t$  – время);  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера [8,9],  $A$  – экваториальный,  $C$  – осевой момент инерции тела относительно точки  $O$ . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна  $\mu$  и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого

волчка имеем  $\mu = mgl$ ,  $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $l$  – расстояние от неподвижной точки  $O$  до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при значениях малого параметра  $\varepsilon$  на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Для решения поставленной задачи применяется процедура усреднения разработанная в [3,8]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени  $\tau$  и допускающих усреднение по фазе угла нутации  $\theta$ .

В случае невозмущенного движения, первыми интегралами уравнений для системы (1) при  $\varepsilon = 0$  являются

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $G_z$  – проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  – полная энергия тела,  $r$  – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии,  $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) – произвольные постоянные ( $c_2 \geq -\mu$ ).

Выражение для угла нутации  $\theta$  в невозмущённом движении как функции времени  $t$ , интегралов движения (2) и произвольной фазовой постоянной  $\beta$  известно [8,9]:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \\ \alpha &= [\mu(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \operatorname{sn} am(\alpha t + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\operatorname{sn}$  – эллиптический синус,  $k$  – модуль эллиптических функций, через  $u_1, u_2, u_3$  обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} [(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2]. \quad (4)$$

Соотношения между корнями  $Q(u)$  и первыми интегралами (2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu}, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 &= \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведём уравнения возмущенного движения (1) к виду, допускающему применение метода усреднения [1,2]. Выделим быстрые и медленные переменные, при этом первые интегралы (2) для возмущенного движения (1) являются медленными переменными. Быстрыми переменными являются угол собственного вращения  $\varphi$ , угол прецессии  $\psi$  и угол нутации  $\theta$ .

С помощью ряда преобразований приведём первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta], \\ \dot{H} &= \varepsilon (M_1 p + M_2 q + M_3 r), \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и в трёх последних уравнениях (1) подразумевается, что переменные  $p, q, r$  при помощи (2) выражены как функции  $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$  и подставлены в (1), (6). Начальные значения медленных переменных  $G_z, H, r$  могут быть вычислены при помощи (2).

Однако правые части (6) содержат три быстрые переменные  $\psi, \theta, \varphi$ , что представляет трудность для применения метода усреднения. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы выражения, стоящие в правых частях (6), могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации, периодические по фазе переменной  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$M_3 = M_3^*(G_z, H, r, \tau, \theta),$$

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta, \tau) \quad (8)$$

В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия (7) или, в частности, достаточные условия (8), которые обеспечивают справедливость соотношений (7). Система (6) тогда может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_1 &= M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_2 &= M_2^* + M_3^* r, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), & F_3 &= C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $F_1, F_2, F_3$  –  $2\pi$ -периодические функции по фазе угла нутации  $\theta$ .

Исследование возмущенного движения предполагается проводить для медленных переменных  $u_i, i=1,2,3$ . Медленные переменные  $G_z, H, r$  удастся выразить через  $u_i$  из (5) следующим образом [3,8]

$$\begin{aligned} G_z &= \delta_2 (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= \frac{1}{2} \mu \left[ (u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1}) \right], \\ r &= \delta_2 C^{-1} (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\ R &= \left[ (1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1) \right]^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины  $\delta_1, \delta_2$  в начальный момент определяются по начальным условиям для  $G_z, r$ . Если в процессе движения одна или обе величины  $G_z^2 - C^2 r^2, r$  проходят через нуль, то возможна смена знаков  $\delta_1, \delta_2$ , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (9).

После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных  $u_i, i=1,2,3$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i=1,2,3 \\ V_i &= V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^*, \quad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{G_z - Cru_1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{13} &= \frac{C}{\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[ (CA^{-1} - 1)ru_1^2 - G_z A^{-1}u_1 + r \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь функции  $V_{2j}, V_{3j}, j=1,2,3$  получаются из соответствующих выражений (12) для того же значения  $j$  путём циклической перестановки индексов у величины  $u_i$ . Функции  $F_i^*$  получаются подстановкой в  $F_i$  из (9) выражений (10). Начальные значения для переменных  $u_i$  вычисляются по начальным данным  $G_z^0, H^0, r^0$  при помощи соотношений (5).

Подставим в правые части системы (11) быструю переменную  $\theta$  из выражения (3) для невозмущенного движения. Тогда правые части системы (11) будут периодическими функциями  $t$  с периодом  $2K(k)/\alpha$ , где  $k, \alpha$  определены соотношениями (3). Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации, получим усреднённую систему первого приближения ( $\tau = \varepsilon t$ ):

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= U_i(u_1, u_2, u_3, \tau), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i=1,2,3, \\ U_i(u_1, u_2, u_3, \tau) &= \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta(t)) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

После исследования и решения системы (13) для  $u_i$  исходные переменные  $G_z, H, r$  восстанавливаются по формулам (10). Медленные переменные  $u_i$  и  $G_z, H, r$  определяются с погрешностью порядка  $\varepsilon$ .

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты  $\varepsilon M_i$  ( $i=1,2,3$ ) имеют вид:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (14)$$

Здесь  $a(\tau), b(\tau)$  – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Моменты (14) удовлетворяют условиям (7), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации  $\theta$ . При данных возмущениях система (6) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon \left[ (a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta \right], \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left[ a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2 \right], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r. \end{aligned} \quad (15)$$

Третье уравнение (15) может быть проинтегрировано:

$$r = r^0 \exp\left(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt\right). \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда  $a(\tau), b(\tau)$  имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - const. \quad (17)$$

После ряда преобразований усредненная система (13) с учетом возмущающих моментов (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left\{ a(\tau) \left[ A^{-1}(G_z - Cr u_1)(G_z - Cr v) + (u_1^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cr u_1)(v - u_1) \right\}, \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_2 - u_3)(u_2 - u_1)} \left\{ a(\tau) \left[ A^{-1}(G_z - Cr u_2)(G_z - Cr v) + (u_2^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cr u_2)(v - u_2) \right\}, \\ \frac{du_3}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_3 - u_2)(u_3 - u_1)} \left\{ a(\tau) \left[ A^{-1}(G_z - Cr u_3)(G_z - Cr v) + (u_3^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cr u_3)(v - u_3) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k)$ ,  $K(k)$ ,  $E(k)$  – эллиптические интегралы первого и второго рода, вместо  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $k$  подставляются их выражения из (3), (10).

Усреднённая система (18) проинтегрирована численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$\text{а) } u_1^0 = 0.913, u_2^0 = 0.996, u_3^0 = 1.087, \theta^0 = 5^\circ; \quad (19)$$

$$\text{б) } u_1^0 = 0, u_2^0 = 0.5, u_3^0 = 2, \theta^0 = 60^\circ; \quad (20)$$

$$\text{в) } u_1^0 = -0.932, u_2^0 = -0.866, u_3^0 = 2.932, \theta^0 = 150^\circ. \quad (21)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную  $r^0 = \sqrt{3}$ , кроме того  $A = 1.5$ ,  $C = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $a_0 = 0.125$ ,  $b_0 = 0.1$ ,  $a_1 = b_1 = 1$ . В начальный момент угол отклонения оси динамической симметрии от вертикали  $\theta^0$ . На рисунке 1-3 изображены графики функций  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  для указанных случаев (19)-(21). При  $\varepsilon = 0$  система (18) упрощается и соответствует случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [3,8].

В случае начальных значений (19) результат численного интегрирования системы (18) изображен на рис. 1. Полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии убывают. Величина  $u_3$  достаточно быстро стремится к 1. Переменные  $u_1$  и  $u_2$  стремятся к -1.

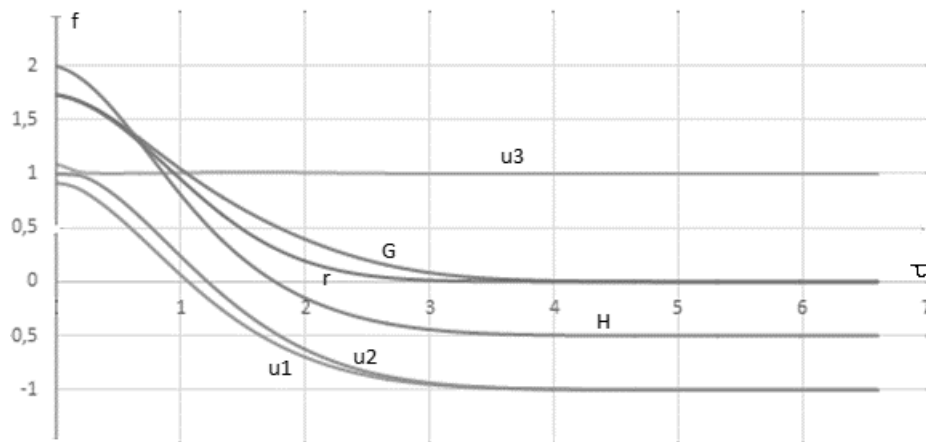


Рис. 1. Графики функций  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  при начальных условиях (19)

На рис.2 приведен результат численного интегрирования системы (18) при начальных условиях (20). Как и на рис. 1, переменная  $u_3$  стремится к единице, однако интервал монотонного убывания в данном случае увеличился. Проекция вектора кинетического момента  $G_z$  и  $r$  монотонно убывают к нулю. Полная энергия  $H$  монотонно убывает, приближаясь к значению  $H = -0.5$ .

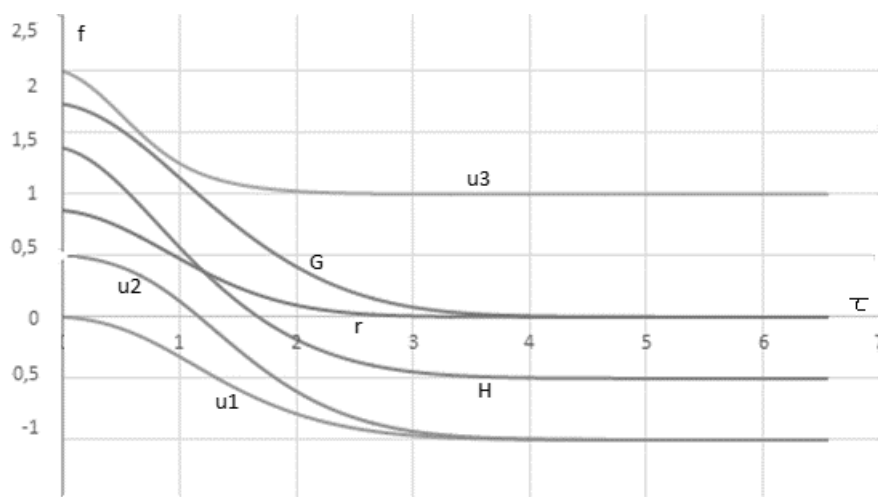


Рис. 2. Графики функций  $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$  при начальных условиях (20)

На рис.3 представлены графики функций  $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$  полученные при численном интегрировании системы (18) для начальных данных (21). Проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $G_z$  стремится к нулю, однако в отличие от случаев (19) и (20) монотонно возрастает. Полная энергия тела  $H$  достаточно быстро стремится к  $-0.5$ . Величины  $r$  и  $u_3$  монотонно убывают. Графики функций  $u_1$  и  $u_2$  на рис.3 совпадают. Однако при построении графиков в меньшем масштабе по оси ординат (рис.4) видно, что на промежутке  $(0;4)$  функции  $u_1$  и  $u_2$  монотонно убывают.

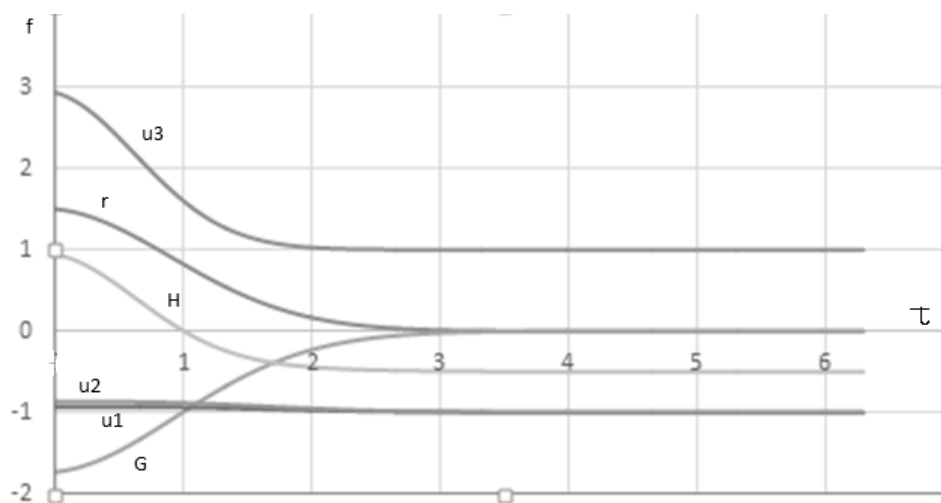


Рис. 3. Графики функций  $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$  при начальных условиях (21)



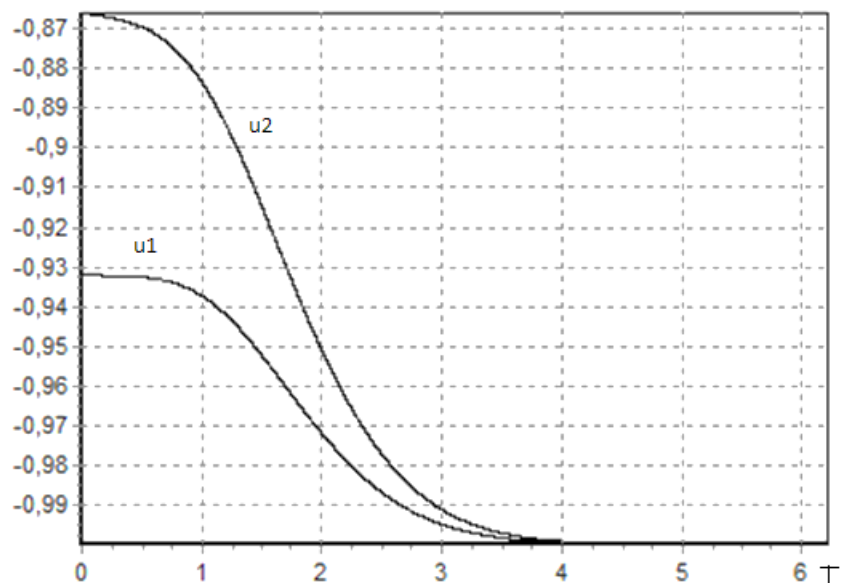


Рис. 4. Графики функций  $u_1$  и  $u_2$  при начальных условиях (21)

**Выводы.** При сравнении полученных результатов с результатами [3,8] можно отметить, что зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных функций  $a(\tau)$  и  $b(\tau)$ , зависящих от медленного времени, которые при численном интегрировании сглаживают поведение  $u_i$ ,  $i=1,2,3$ ,  $G_z$ ,  $H$ . Под действием возмущающего момента (14) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [3,8], что следует из задания коэффициентов (17).

Правильность счёта контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (10) значения для  $r$  практически совпадают с точным решением (16).

#### Список литературы

1. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикладная математика и механика. 1979. Т.43. Вып.5. С. 771-778.
4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. Вып.5. С.3-10.
5. Simpson H.C. and Gunzburger M.D. A two scale analysis of gyroscopic motion with friction // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1986. Vol. 37. № 6. P. 867-894.
6. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium // J. Nonlinear Sci. 1994. Vol.4. P. 35–57.
7. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твёрдого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 6. С. 32 – 38.
8. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 308с.
9. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655с.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА**

**П.Р. Андронов, Г.Я. Дынникова, С.Д. Стрекалов**

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,

лаборатория аэромеханики и волновой динамики

119192 Москва, Мичуринский проспект, 1, e-mail: [andronov.peter@yandex.ru](mailto:andronov.peter@yandex.ru)

Рассмотрена модельная плоская задача о колебаниях в потоке вязкой несжимаемой среды базового осциллятора (элемента ветроприёмной поверхности) волнового ветроэнергетического устройства с учётом различных типов кинематических связей. Для численного решения использован бессеточный метод вязких вихревых доменов. Исследовано влияние подвижности шарниров на характер изменения аэродинамических сил и момента, раскручивающего ротор за счёт взаимодействия осциллятора с потоком. Оценено влияние на аэрогидродинамические силы и на раскручивающий момент кромочных вихрей и вторичных вихрей, образовавшихся за счёт вязкого отрыва с поверхности.

**Ключевые слова:** Волновые ветроэнергетические устройства, ветроприёмные поверхности, кинематические связи, аэродинамические нагрузки.

### **Введение**

Одним из перспективных путей увеличения полезной мощности ветроэнергетических установок является создание установок с ветроприёмной поверхностью большой площади. Примером такой установки является волновое ветроэнергетическое устройство колебательного типа [1,2] (см. макет на рис. 1), принцип действия которого основан на использовании кинематических связей, состоящих из жёстких стержней и шарнирных соединений. Под действием горизонтального ветрового потока и наложенных связей пластина совершает возвратно-поступательные и угловые колебания около среднего положения. В результате массивный ротор  $O$  начинает непрерывно вращаться. Вращательное движение ротора лежит в основе работы генератора электроэнергии. Для выявления механизмов и особенностей функционирования ветроустановки колебательного типа необходимы теоретические и экспериментальные исследования. Этим проблемам посвящена настоящая работа.

### **Механизм работы устройства и постановка задачи.**

На рис. 2 показана схема работы ветроустановки колебательного типа с неподвижным шарниром. Кружками изображены неподвижные шарнирные соединения, жирной линией – ветроприёмная поверхность (пластина), тонкими линиями – жёсткие невесомые соединительные стержни, точка  $O$  – центр вращения ротора. Ветроприёмная поверхность жёстко соединена со стержнем  $CF$ , но может поворачиваться относительно стержня  $EF$ . Все величины в процессе моделирования и результаты вычислений представляются в безразмерном виде (нормировка выбрана таким образом, что скорость потока  $U = 1$ , полуширина пластины  $L = 1$ , плотность среды  $\rho = 1$ ).

На основе практического опыта построения макетов волновых ветроэнергетических устройств были выбраны следующие параметры кинематических связей (длины соединительных стержней) для схем этих устройств, представленных на рис. 2 и на рис.3:  $OC = 1.0$ ;  $ED = 4.16$ ;  $CF = 4.1$ ;  $EF = 2.6$ ;  $CD = 0.5714$ . Через  $F_a$  обозначена аэродинамическая сила, действующая на ветроприёмную поверхность (то есть, пластину с центром в точке  $F$ ). Начальное положение элементов устройства показано на рис. 2(1).

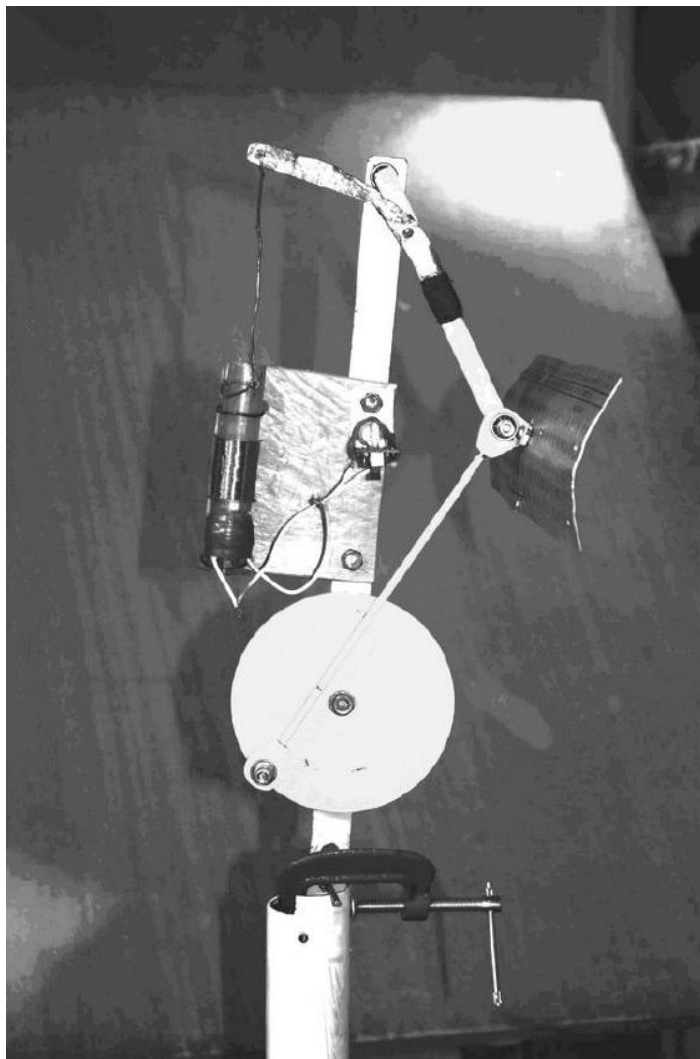


Рис. 1. Макет волнового ветроэнергетического устройства.

За счет воздействия аэродинамической силы начинается вращение стержня  $EF$  относительно неподвижного шарнира  $E$  по часовой стрелке. В результате в силу кинематических связей ротор также начинает вращаться по часовой стрелке. На рис. 2(2) показано расположение элементов устройства в момент, когда при продолжающемся вращении ротора по часовой стрелке в силу кинематических связей направление вращения стержня  $EF$  относительно точки  $E$  меняется на противоположное (против часовой стрелки). Начиная с этого момента до конца полного оборота ротора аэродинамическая сила, как видно из рис. 2(3), препятствует вращению ротора. Однако в положении, изображенном на рис. 2(1), когда аэродинамическая сила способствует вращению ротора по часовой стрелке, проекция этой силы на касательную к окружности, по которой движется центр пластины (точка  $F$ ), больше, чем в положении, изображенном на рис. 2(3), когда аэродинамическая сила препятствует вращению ротора по часовой стрелке. В промежуточном положении, изображенном на рис. 2(2), проекция аэродинамической силы на касательную к окружности, по которой движется центр пластины (точка  $F$ ), равна нулю. Таким образом, за счет превосходства воздействия потока, вращающего ротор по часовой стрелке (рис. 2(1)), над воздействием потока, тормозящим вращение ротора (рис. 2(3)), мы получаем возможность поддерживать вращение ротора при наличии полезной нагрузки.

На рис. 3 показана схема работы ветродвигателя колебательного типа со скользящим шарниром  $E$ . Она отличается от схемы, изображенной на рис. 2, тем, что шарнир  $E$  – скользящий, т.е. он может перемещаться вдоль вертикальной прямой, проходящей через ось вращения ротора (через точку  $O$ ).

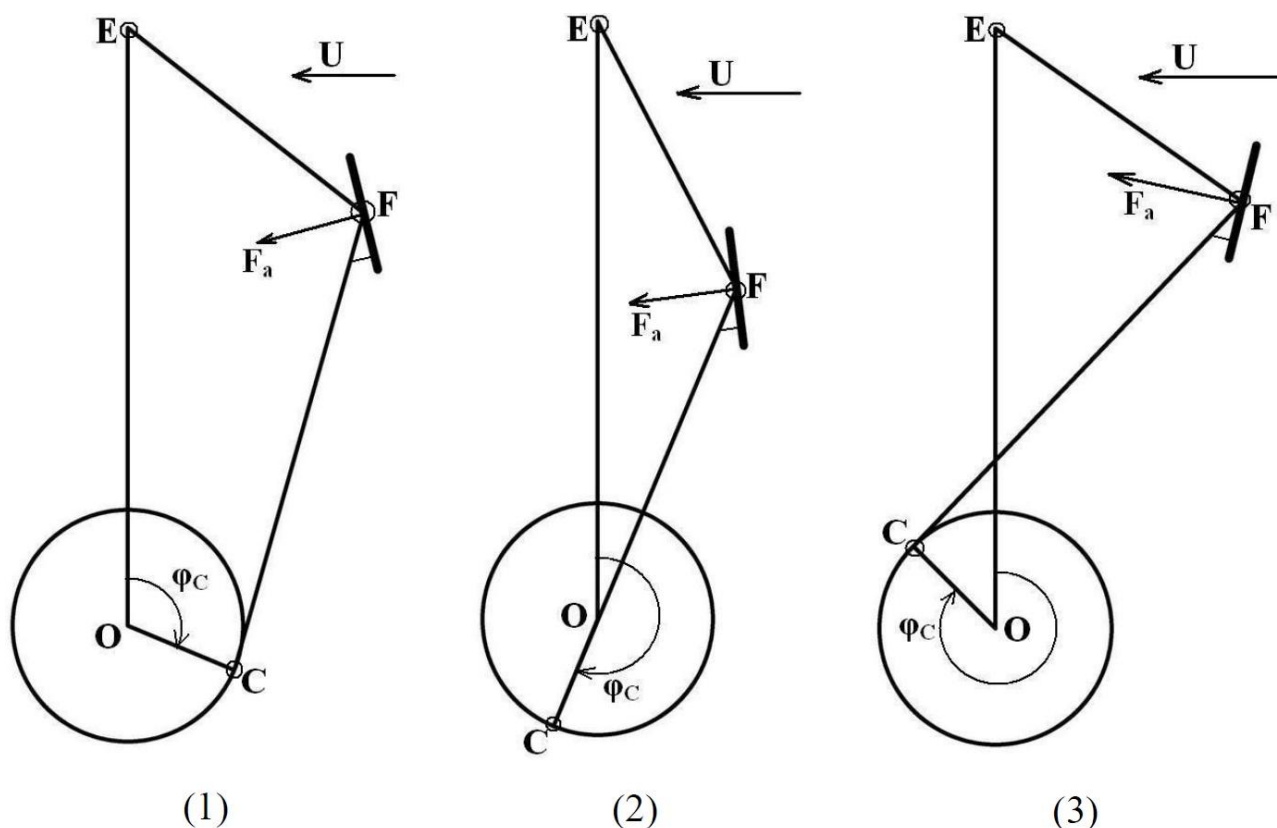


Рис. 2. Кинематическая схема волнового ветроэнергетического устройства с неподвижным шарниром.

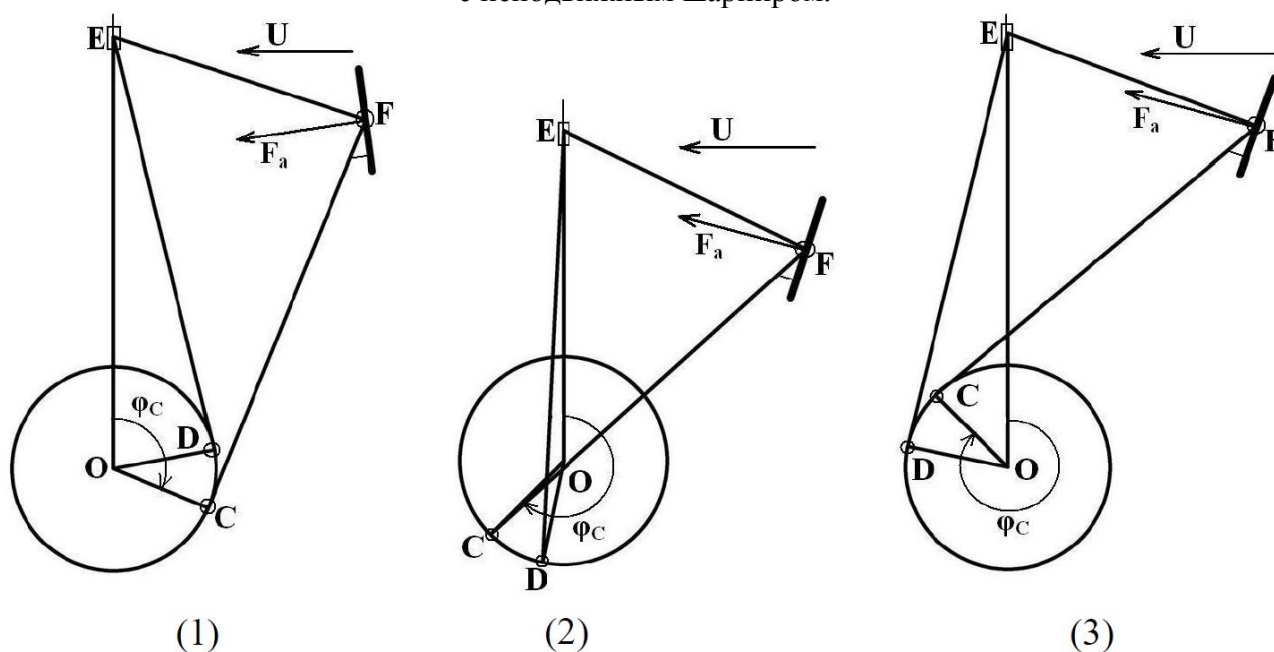


Рис. 3. Кинематическая схема волнового ветроэнергетического устройства с подвижным (скользящим) шарниром

Второе отличие заключается в том, что скользящий шарнир E соединен дополнительным стержнем с некоторой точкой D, в которой, как и в точке C, реализовано шарнирное соединение стержня с ротором. Наличие дополнительного стержня ED создает дополнительный механизм влияния воздействия потока на вращение ротора. В положении, изображенном на рис. 3(1), это воздействие в силу кинематических связей тормозит вращение ротора по часовой стрелке, а в положениях, показанных на рис. 3(2) и 3(3), наоборот, способствует враще-

нию ротора. Как показали исследования, схема ветродвигателя колебательного типа, изображенная на рис. 3, даёт возможность получить некоторый выигрыш по сравнению, со схемой, изображенной на рис. 2. В частности, обнаружено, что раскрутка ротора у ветродвигателя со скользящим шарниром Е происходит при меньших скоростях воздушного потока, чем у ветродвигателя с неподвижным шарниром Е.

Рассматривается плоская сопряжённая задача о колебаниях в неограниченном потоке вязкой среды ветроприёмной поверхности (осциллятора) ветродвигателя при наличии заданной кинематической связи с ротором (рис. 2,3, направление отсчёта углов – по часовой стрелке от вертикальной оси,  $\mathbf{U}$  – скорость потока,  $O$  – центр вращения ротора,  $OC$ ,  $EF$  и  $CF$  – жёсткие невесомые стержни). Ветроприёмная поверхность жёстко прикреплена к стержню  $CF$  под фиксированным установочным углом, равным 30 градусов. Система имеет одну степень свободы.

В качестве обобщённой координаты выберем угол  $\varphi_C$  поворота ротора. Запишем уравнения динамики системы для случая пластины с заданной массой  $m$  и для случая, когда все стержни, образующие кинематические связи в устройстве, являются невесомыми. В дальнейшем будем пренебрегать моментом инерции пластины. Уравнение момента для ротора в случае неподвижного шарнира Е запишется в виде (1) (рис. 2):

$$J\ddot{\varphi}_C \mathbf{e}_z = \mathbf{OC} \times \frac{\mathbf{CF}}{|\mathbf{CF}|} T \quad (1)$$

Здесь  $T$  – сила реакции связи в стержне  $CF$ .

Уравнения импульса для пластины запишется в виде (2):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_F(\varphi_C) &= F_{ax} + \frac{x_C - x_F}{\sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2}} T + \frac{x_E - x_F}{\sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}} S \\ m\ddot{y}_F(\varphi_C) &= F_{ay} + \frac{y_C - y_F}{\sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2}} T + \frac{y_E - y_F}{\sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}} S \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $T$  – сила реакции связи в стержне  $CF$ ,  $S$  - сила реакции связи в стержне  $EF$ .

Кроме варианта устройства на рис. 2, рассмотрен другой случай, когда шарнир Е – подвижный (то есть, скользящий) (рис. 3). Уравнение момента для ротора в этом случае:

$$J\ddot{\varphi}_C \mathbf{e}_z = \mathbf{OC} \times \frac{\mathbf{CF}}{|\mathbf{CF}|} T - \mathbf{OD} \times \frac{\mathbf{DE}}{|\mathbf{DE}|} \frac{\cos(\angle OEF)}{\cos(\angle OED)} S \quad (3)$$

Здесь  $T$  – сила реакции связи в стержне  $CF$ ,  $S$  - сила реакции связи в стержне  $ED$ .

Динамические системы (1-2) и (2-3) решаются совместно с уравнениями гидродинамики как сопряжённые задачи в «вихревой» постановке:  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  – уравнение неразрывности;

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\nabla((\mathbf{V} + \mathbf{V}_d) \Omega)$$

– уравнение эволюции завихренности, эквивалентное уравнениям

Навье-Стокса в плоском случае. Здесь  $\Omega = \text{rot } \mathbf{V}$ ,  $\Omega = \mathbf{e}_z \Omega$  – завихренность;

$\mathbf{V}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla(\Omega)}{\Omega}$  – диффузионная скорость движения завихренности.

Граничные условия – условие прилипания:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_S$ ,  $\mathbf{V}$  – скорость среды,  $\mathbf{V}_S$  – скорость жёсткой поверхности. Проекция аэродинамической силы и момента, действующих на пластину, можно выразить через поток завихренности с её поверхности. Особенность “вихревой” постановки задачи заключается в том, что наряду с уравнениями движения пластины, в объединённую систему линейных уравнений для одновременного вычисления дискретизированного потока завихренности с ветроприёмной поверхности и мгновенной скорости вращения ротора на каждом шаге по времени войдут уравнения, задающие условие непротекания и закон сохранения суммарной циркуляции.

### **Метод численного решения.**

В качестве основного инструмента исследования нестационарных течений с интенсивными вихревыми отрывными структурами и существенно нестационарным перемещением обтекаемых тел в работе использован лагранжев численный метод вязких вихревых доменов (ВВД) [3]. Наиболее принципиальными моментами, отличающими этот метод от других лагранжевых методов описания нестационарных вихревых течений, являются следующие. Модель взаимодействия свободных вихрей позволяет учитывать диффузию завихренности. В отличие от известных моделей типа метода случайных блужданий, предложенный метод не содержит подгоночных параметров. Ключевая идея состоит во введении диффузионной скорости, пропорциональной коэффициенту вязкости и градиенту завихренности потока. Механизм численной реализации модели заключается в том, что при взаимодействии каждой пары вихрей к конвективной скорости, порождаемой только вихрями, добавляется диффузионная скорость, направленная вдоль линии, соединяющей вихри, и зависящая от расположения вихрей, их интенсивности и коэффициента вязкости. В отличие от аналогичных зарубежных работ, например, [4], найдено интегральное представление для диффузионной скорости, позволяющее корректно описать взаимодействие близких вихрей и определять диффузионную скорость вихрей вблизи поверхности, что, в свою очередь, позволяет вычислять силу трения, действующую на обтекаемые тела.

Верификация данной вычислительной технологии осуществлена в [3, 6], где проведено сравнение с данными физических экспериментальных исследований и с результатами известных расчётов на основе сеточных методов. Вычислительный комплекс [5] использовался для расчётов обтекания ротора Савониуса. Поскольку в волновом ветродвигателе кинематические связи сложнее, потребовалась доработка комплекса [5].

### **Результаты и их обсуждение.**

Для случая неподвижного шарнира Е (рис. 2) при числе Рейнольдса  $\text{Re} = 5 \cdot 10^4$ , вычисленном по половине высоты ветроприёмной поверхности, в расчётах получен режим незатухающих квазипериодических автоколебаний осциллятора, сопровождающийся вращением ротора по часовой стрелке. На рис. 4 показана эволюция вихревой картины обтекания ветроприёмной поверхности при  $\text{Re} = 5 \cdot 10^4$ . Изображены вихревые картины для 4 последовательных моментов времени. Если сравнить два верхних рисунка с двумя нижними (последние соответствуют более поздним моментам времени), то можно заметить согласованность фазы развития отрывных вихревых структур в дорожке Кармана с величиной угла наклона ветроприёмной поверхности относительно набегающего потока в текущий момент времени. А именно, крупные вихревые спутники всегда формируются позади той из острых кромок пластины, которая наклонена навстречу потоку (который на рис. 4 направлен справа налево). Отсюда можно сделать практический вывод о том, что путём управления задаваемым при конструировании колебательной ветроустановки установочным углом ветроприёмной по-



верхности относительно жёсткого стержня СФ возможно повлиять на частоту и на интенсивность формирующихся при обтекании колеблющейся пластины отрывных структур, а, следовательно, и на характеристики эффективности волнового ветроэнергетического устройства.

Установлено, что при рассмотренном числе Рейнольдса, соответствующем обтеканию воздухом пластины ширины 0,07 м со скоростью 21,4 м/с, преобладающую роль в развитии нестационарных нагрузок играют «кромочные» (то есть, сходящие с острых кромок ветроприёмной поверхности) вихри, период схода которых в несколько раз меньше полного периода оборота ротора (см. рис. 4). Показано, что именно периодически сходящие в поток «кромочные» вихри являются полезными для поддержания движения, а вторичные вихри играют диссипативную роль, т.е. тормозят движение.

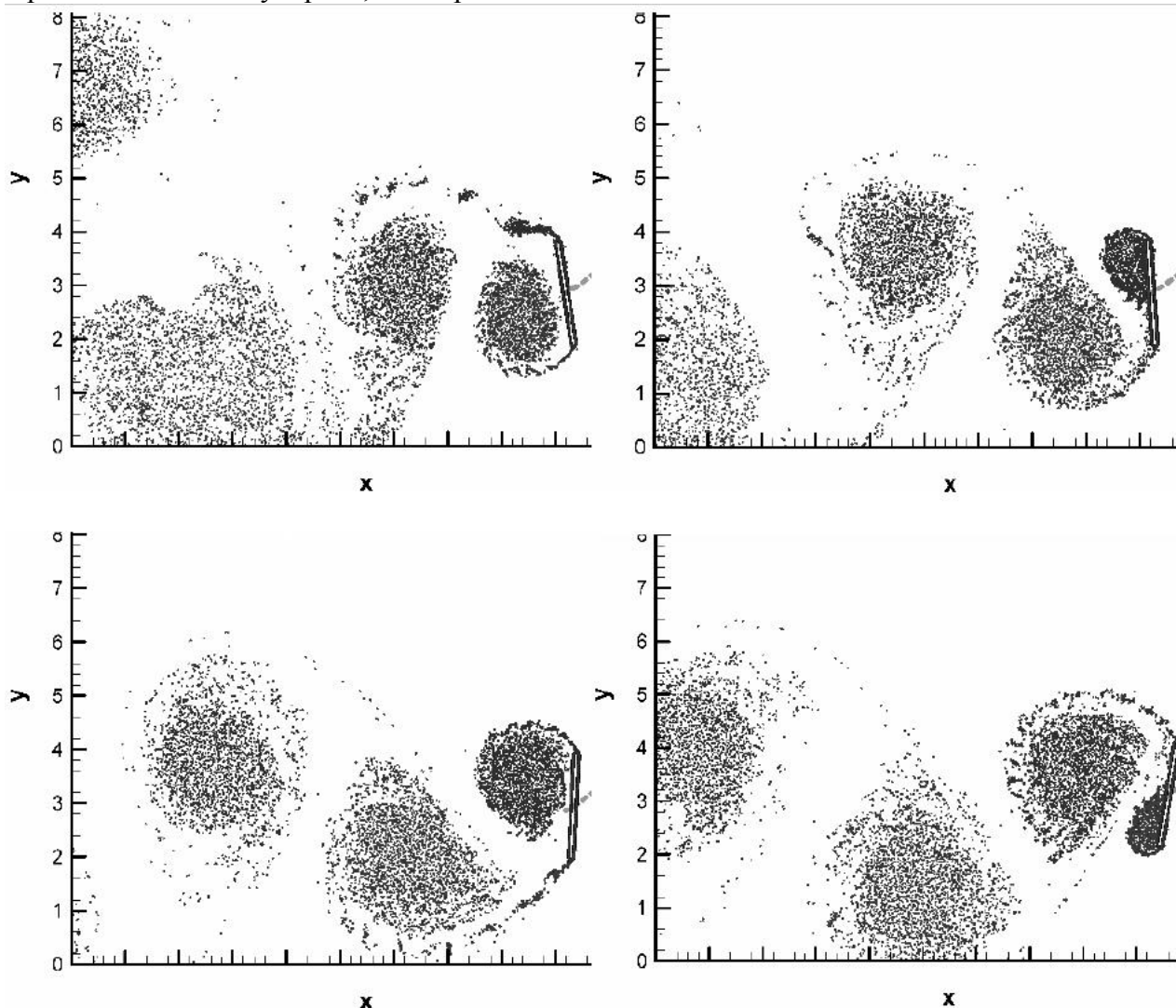


Рис. 4. Эволюция с течением времени вихревой картины обтекания ветроприёмной поверхности. Поток движется справа налево. Штрихами серого цвета обозначена траектория перемещения средней точки пластины, чёрные точки – вихревые домены.

Определена средняя величина безразмерной угловой скорости  $\omega$  ротора и исследован характер её зависимости течением времени без учёта момента трения в оси (см. рис. 5). Число на рис. 5 равно  $Re = 50000$  и соответствует случаю, когда ширина пластины равна 75 мм,  $U = 20$  м/с. Момент инерции ротора в расчёте равен  $J = 5000$ . Масса пластины равна  $m = 10$ . Видно, что для случая неподвижного шарнира примерно в середине периода наблюдается непродолжительное уменьшение угловой скорости вращения ротора.

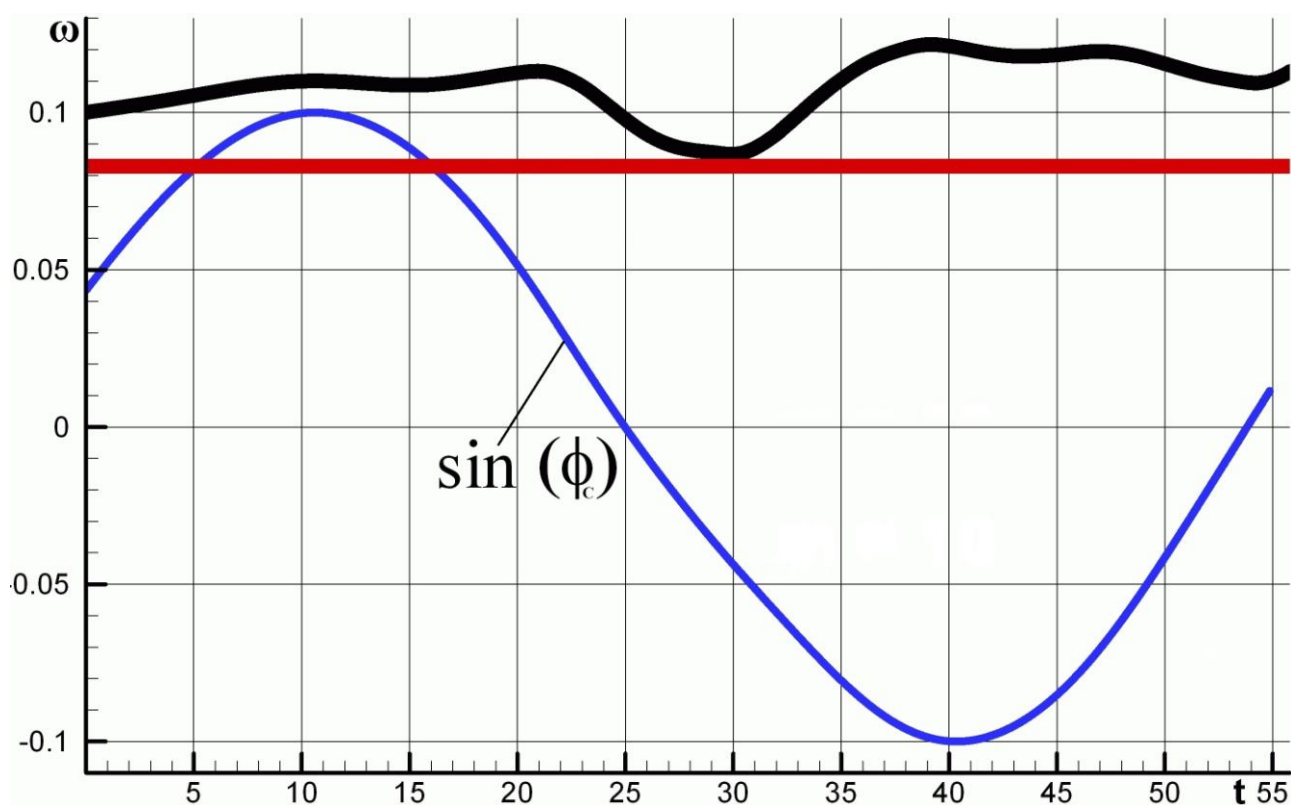


Рис. 5. Чёрная линия – расчётная зависимость от времени безразмерной угловой скорости вращения ротора  $\omega$  при начальном значении  $\omega = 0,1$  и при начальном значении угла поворота  $\varphi_c = \pi/7$ . Красная линия – экспериментальное значение  $\omega$ . Синяя линия – зависимость синуса угла поворота ротора  $\varphi_c$  от времени.

С целью проверки работоспособности нового класса колебательных ветроустановок и верификации расчётных моделей [7-8] проведены контрольные экспериментальные испытания аналогичных макетов волновых ветроэнергетических устройств в потоке воздуха. Экспериментальные исследования макетов ветроприёмников выполнены в дозвуковых воздушных потоках (характерный размер моделей до 1 м, числа Рейнольдса до 77000, числа Маха в диапазоне 0,02–0,1). Нестационарные угловые движения осциллятора регистрируются с помощью электромагнитных датчиков смещений шатуна с последующей компьютерной обработкой сигналов.

Результаты экспериментов для ветроустановок с неподвижным шарниром Е (см. схему на рис. 2) по средней безразмерной угловой скорости вращения ротора (см. рис. 5 – красная линия) сопоставлены с результатами расчёта (см. рис. 5 – чёрная линия). После осреднения расчётное значение безразмерной угловой скорости равно 0,108. В эксперименте безразмерная угловая скорость равна 0,083. Наблюдаемое отличие расчёта от эксперимента составляет около 30% от экспериментального значения и объясняется наличием трения в шарнирах в эксперименте. В эксперименте получено, что число Рейнольдса в рассмотренном диапазоне незначительно влияет на число Струхала, т.е. на безразмерную угловую скорость вращения ротора.

Проведено сравнение численных результатов для случаев неподвижного (рис. 2) и скользящего (рис. 3) шарниров в точке Е (на рис. 6 и рис. 7 соответственно) для случая, когда число Рейнольдса  $Re = 33000$ . Безразмерный момент инерции ротора  $J = 1000$ , масса пластины  $m = 0$ , начальный угол поворота ротора  $\varphi_c = \pi/7$ , начальная угловая скорость  $\omega = 0,4$ . Отбор



мощности осуществляется путём введения вязкого трения в оси закрепления ротора<sup>2</sup> с безразмерным коэффициентом  $k = 1$ .

Показано, что в случае скользящего шарнира в точке E при  $Re = 3 \cdot 10^4$  раскрутка ротора от первоначально заданной угловой скорости 0,4 происходит непрерывно, если не считать колебаний в пределах одного периода. А в случае неподвижного шарнира на начальном этапе наблюдается некоторое торможение вращения, и лишь потом происходит раскрутка. Этот результат качественно согласуется с данными предварительных экспериментов, говорящих о трудности раскрутки ротора ветродвигателя с неподвижным шарниром в точке E по сравнению со случаем скользящего шарнира в точке E, которые особенно проявляются при малых скоростях потока. За период одного оборота ротора наблюдается три квазипериода колебания подъёмной силы  $F_y$  для случая неподвижного шарнира (рис. 6) и примерно два с половиной периода колебаний для случая подвижного шарнира (рис. 7).

Это объясняется мало зависящим по частоте от угловой скорости вращения ротора попеременным сходом крупных вихрей то с одной, то с другой кромки пластины (рис. 4), что в случае устройства с неподвижным шарниром, когда наблюдается локальное торможение вращения в середине периода (рис. 5), приводит к некоторому опережению в развитии вихревой дорожки Кармана на протяжении одного полного оборота ротора по сравнению со случаем устройства с подвижным шарниром, когда подобного уменьшения угловой скорости ротора нет.

При этом на протяжении первого полупериода, когда пластина движется вниз, преобладает отрицательная подъёмная сила, способствующая движению вниз, а на протяжении второго полупериода, когда пластина движется вверх, преобладает положительная подъёмная сила, способствующая движению вверх.

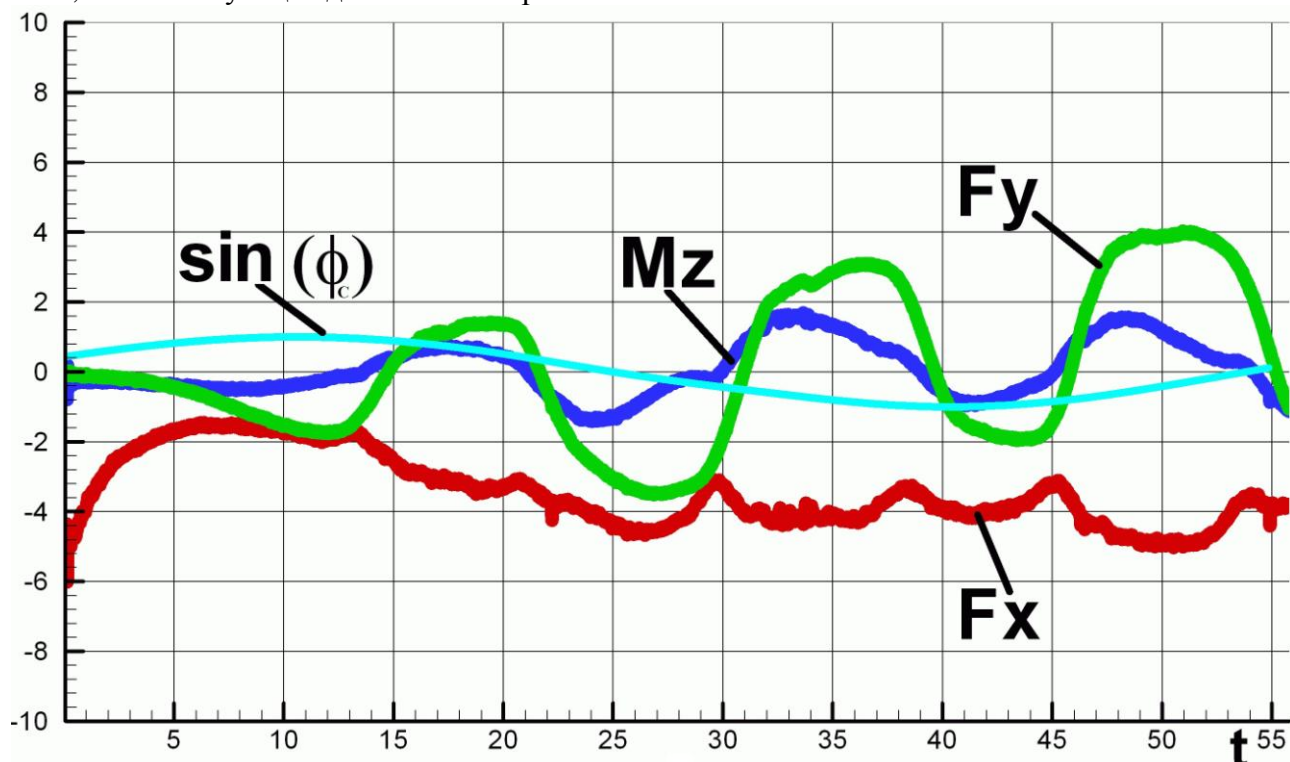


Рис. 6. Расчётная зависимость безразмерных компонент аэродинамической силы ( $F_x$  и  $F_y$ ) и аэродинамического момента ( $M_z$ ), действующих на ветроприёмную пластину, от времени для случая неподвижного шарнира E. Голубая линия – синус угла поворота ротора.

<sup>2</sup> Этот коэффициент приближённо моделирует сопротивление вращению ротора электрического генератора [7].

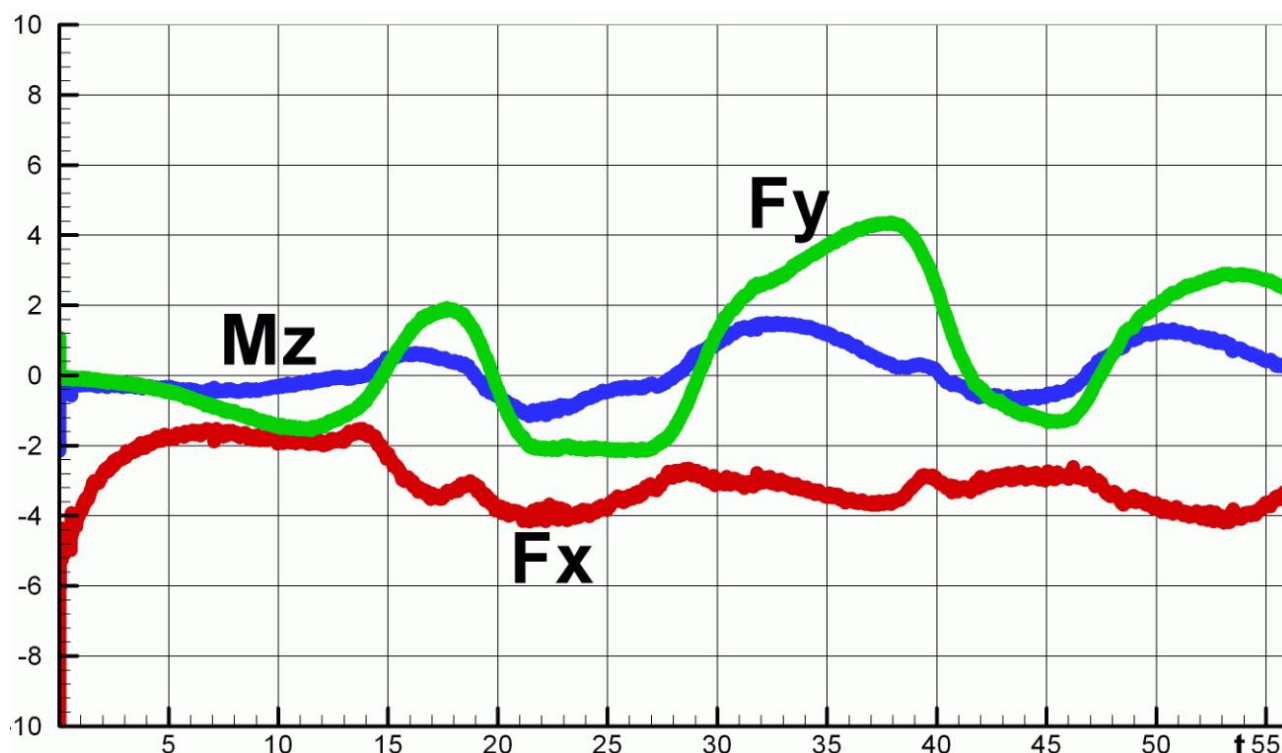


Рис. 7. Расчётная зависимость безразмерных компонент аэродинамической силы ( $F_x$  и  $F_y$ ) и аэродинамического момента ( $M_z$ ), действующих на ветроприёмную пластину, от времени для случая подвижного (скользящего) шарнира E.

Также наблюдаются колебания момента  $M_z$  с той же частотой, что и у подъёмной силы, с небольшим преобладанием отрицательного момента на протяжении первого полупериода и положительного момента на протяжении второго полупериода.

На рис. 8 представлены спроектированные на фазовую плоскость ( $Oxy$ ) расчётные результаты определения текущего расположения точки центра давления на поверхности ветроприёмной пластины для случая устройства с неподвижным шарниром (см. рис. 2). Если сравнить рис. 6 и рис. 8, то можно отметить, что трём периодам колебаний подъёмной силы  $F_y$  на протяжении одного полного оборота ротора (рис. 6) соответствуют три «петли», характеризующие соответствующие перемещения расположения центра давления (рис. 8) (при этом максимальное удаление точки центра давления от геометрического центра ветроприёмной пластины не превосходит (по модулю) 0.42 безразмерные единицы (то есть, чуть меньше половины от полуширины пластины)).

Проведение расчётов в рамках данной полной постановки сопряжённой задачи весьма трудоёмко, поэтому для массовых параметрических исследований различных модификаций волновых ветроэнергетических устройств, подобных [1,9-10], целесообразно применять упрощённые способы анализа, основанные на феноменологических моделях (например, [11-12]) аэродинамического взаимодействия ветроприёмной поверхности с потоком среды. При этом основная роль численных решений, получаемых в полной сопряжённой постановке задачи, состоит в получении опорных данных для отбора и верификации подходящей феноменологической модели аэродинамического взаимодействия. На основе выбранной и обоснованной модели можно эффективно проводить массовые параметрические исследования по оптимизации конструкции устройства. Для оптимизированных вариантов устройства следует провести детальные исследования в полной сопряжённой постановке задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.576.21.0079, проект RFMEFI57614X0079) и РФФИ (гранты № 14-08-01130 и № 15-01-99623).

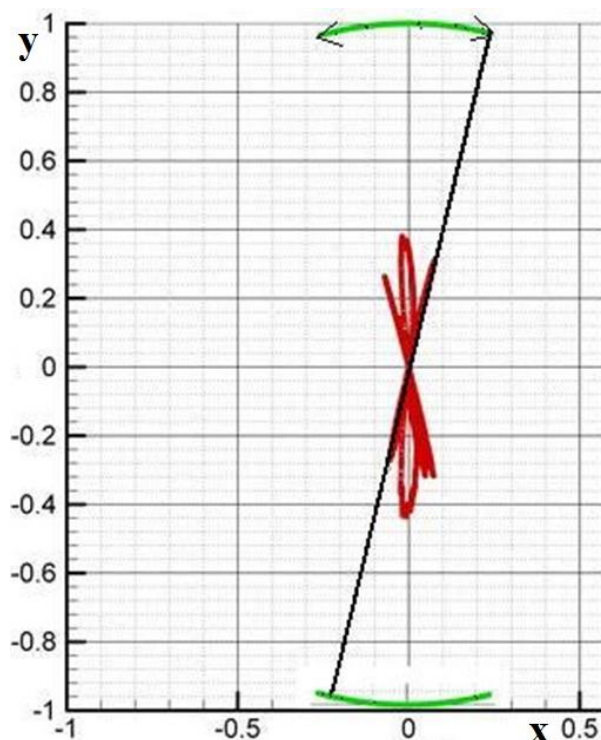


Рис. 8. Расчётное изменение положения центра давления на пластине (красная линия). Зелёные линии – траектории перемещения острых краёв ветроприёмной поверхности в процессе её колебаний. Чёрная линия – одно из двух граничных положений пластины.

### Список литературы

1. Стрекалов С.Д. Авторское свидетельство «Ветродвижитель». Рег. № 1240949 от 30.06.86. Бюл. изобр. №24.
2. Стрекалов С.Д., Мишарев Г.М., Стрекалова Л.П. Волновая техника. – Волгоград. Изд-во "Перемена". 2004. 24 с.
3. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчёта нестационарных гидродинамических нагрузок. – М: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – 184 с.
4. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model – the diffusion velocity method. Computers and fluids. 1991. V. 19. № 3/4. Pp. 433-441.
5. Григоренко Д.А., Андронов П.Р., Гирча А.И., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Программа для ЭВМ «Ротор». Рег. № 2007612503 от 14.06.2007 в Реестре программ для ЭВМ.
6. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов. Известия РАН, МЖГ, 2007. №1. С. 3-14.
7. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Часть I. – М: Изд-во Моск. ун-та, 2007. – 76 с.
8. Редчиц Д.А., Приходько А.А. Численное решение связанной задачи динамики и аэродинамики ротора ветроагрегатов. Космическая наука и технология, 2005. Т. 11. № 1. С. 27–35.
9. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Досаев М.З., Дынникова Г.Я., Симоненко М.М., Стрекалов С.Д., Стрекалова Е.С. Устройство для преобразования возобновляемой энергии. Патент № 2447320. 2012 г.
10. Стрекалов С.Д. Авторское свидетельство № 1240949 от 30.06.86. Ветродвижитель. Бюл. изобр. №24.
11. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело. // Известия РАН, МТТ. 1993, № 4, с. 73-78.
12. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О возможности учета инерционных свойств потока среды, воздействующей на тело. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, 2000.

УДК 519.635.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ОПИСАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

В.Н.Анисимов, В.Л.Литвинов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,  
446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45, e-mail: [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru)

*Проанализировано известное точное решение задачи о колебаниях, описываемых волновым уравнением, струны с равномерно движущейся границей. Анализ точного решения показал, что при движении границы со скоростью близкой к скорости распространения колебаний и при стремлении длины струны к нулю энергия стремится к бесконечности, что делает описание колебаний волновым уравнением некорректным. С помощью вариационного принципа Гамильтона сделана постановка задачи о продольно–поперечных колебаниях струны с учётом геометрической нелинейности. Произведен сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей.*

**Ключевые слова:** продольно–поперечные колебания, движущиеся границы, математические модели, вариационные принципы, нелинейные колебания.

Колеблющиеся механические объекты с движущимися границами широко распространены в технике. Это канаты грузоподъемных установок [1], струны музыкальных инструментов [2], нити [3] и т.д. До настоящего времени такие задачи решались в основном в линейной постановке [4–6]. Как показано в работе [4], при описании колебаний волновым уравнением в случаях, когда скорость движения границы стремится к скорости распространения волн и при стремлении длины объекта к нулю, энергия колебаний стремится к бесконечности, чего в реальных объектах быть не может. В этих случаях необходимо учитывать как можно больше факторов влияющих на колебания.

Рассмотрим колебания струны (нити), изображенной на рис.1. Характер взаимодействия струны с движущейся границей такой, что продольные волны свободно проходят через границу, а поперечные волны нет.

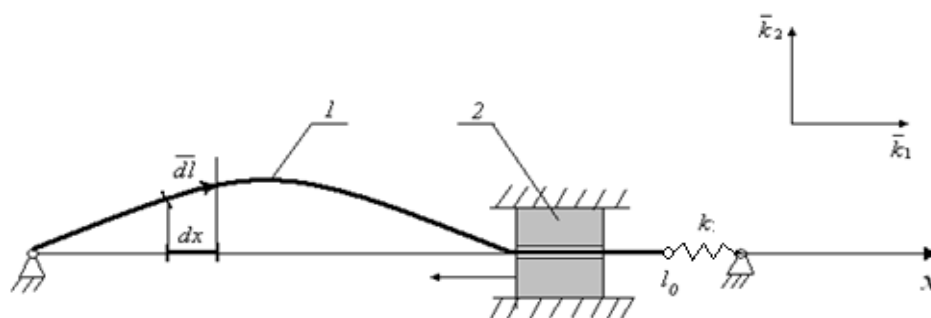


Рис.1 Модель для описания продольно–поперечных колебаний струны: 1 – струна; 2 – граница, движущаяся по закону  $x=l(t)$ ;  $l_0$  – длина струны;  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  – базисные векторы;  $x$  – расстояние от левой границы до точки струны, находящейся в положении равновесия;  $t$  – время;  $dx$  – дифференциальный элемент струны, находящейся в положении равновесия;  $\bar{dl}$  – элементарный вектор, в который перейдет элемент  $dx$  в момент времени  $t$ ;  $k$  – жёсткость упругого присоединения струны к правой неподвижной границе.

Обозначим через  $u_1(x,t); u_2(x,t)$  – смещения точек струны в направлении базисных векторов  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ . Тогда элементарный вектор  $\bar{dl}$  будет равен:

$$\overline{dl} = (1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}) dx \overline{k_1} + u_{2,x} dx \overline{k_2},$$

где  $\varepsilon_0$  – первоначальная продольная деформация струны, создающая натяжение  $T_0 = ES\varepsilon_0$ ;  $E$  – модуль упругости материала струны;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $u_{1,x}, u_{2,x}$  – частные производные функций по  $x$ .

Деформация элемента  $dx$  в момент времени  $t$  будет равна:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{|\overline{dl}| - dx}{dx} = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} - 1. \quad (1)$$

Для вывода системы дифференциальных уравнений, описывающей колебания струны воспользуемся вариационным принципом Гамильтона [7–9]. Функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий струны, имеет следующий вид:

$$L = \int_0^{l_0} \left( \frac{1}{2} \rho S (u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2) - \frac{1}{2} ES \varepsilon^2(x, t) \right) dx,$$

где  $\rho$  – плотность массы материала струны.

Интеграл действия, с учетом выражения (1), выразится двукратным интегралом:

$$I\{u_1, u_2\} = \int_0^{t_1} \int_0^{l_0} \left( \frac{1}{2} \rho S (u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2) - \frac{1}{2} ES (\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} - 1)^2 \right) dx.$$

Найдем вариации интеграла действия по  $u_1$  и  $u_2$ . Сделаем стандартную процедуру интегрирования по частям. Приравняв вариации к нулю, получим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую продольно–поперечные колебания струны:

$$\begin{cases} \rho S u_{1,tt} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2}} \right) (1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}) \right) = 0; \\ \rho S u_{2,tt} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2}} \right) u_{2,x} \right) = 0; \\ u_2 = 0 \text{ если } x > l(t). \end{cases} \quad (2)$$

При выводе системы (2) пренебрежение малыми величинами сделано не было, поэтому с её помощью можно описывать колебания струны большой интенсивности.

Граничные условия для  $u_1$ , с учетом свободного прохождения продольных волн через движущуюся границу, будут иметь вид:

$$u_1(0, t) = 0; \quad ES(\varepsilon_0 + u_{1,x}(l_0, t)) + k(u_1(l_0, t) + u_0) = 0, \quad (3)$$

где  $u_0 = -ES\varepsilon_0/k$ . Введение  $u_0$  сделано для того, чтобы компенсировать первоначальную силу натяжения  $T_0 = ES\varepsilon_0$ .

Для функции  $u_2$  граничные условия первого рода задаются на левой и движущейся границе:

$$u_2(0, t) = 0; \quad u_2(l(t), t) = 0. \quad (4)$$

Начальные условия зададим в виде:

$$u_1(x, 0) = 0; \quad u_{1,t}(x, 0) = 0; \quad u_2(x, 0) = \varphi(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Введем в задачу (2–5) безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l(0)}; \tau = \frac{a}{l(0)}t; U_n(\xi, \tau) = \frac{1}{l(0)}u_n(x, t);$$

$$\psi(\xi) = \frac{\varphi(x)}{l(0)}; L(\tau) = \frac{1}{l(0)}l(t); L_0 = \frac{l_0}{l(0)}; U_0 = \frac{u_0}{l(0)}; K = \frac{kl(0)}{ES},$$

где  $n = \overline{1, 2}$ ;  $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость продольных волн.

В результате получим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) (1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi}) \right) = 0; \\ U_{2,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) U_{2,\xi} \right) = 0; \\ U_2 = 0, \text{ если } \xi > L(\tau). \end{array} \right. \quad (6)$$

$$U_1(0, \tau) = 0; U_{1,\xi}(L_0, \tau) + KU_1(L_0, \tau) = 0;$$

$$U_2(0, \tau) = 0; U_2(L(\tau), \tau) = 0; \quad (7)$$

$$U_1(\xi, 0) = 0; U_{1,\tau}(\xi, 0) = 0; U_2(\xi, 0) = \psi(\xi); U_{2,\tau}(\xi, 0) = 0. \quad (8)$$

В случае малых смещений из системы (6) нетрудно получить наиболее часто используемые для описания колебаний волновые уравнения.

Принимая  $1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi} = 1 + \varepsilon_0$ ;  $U_{2,\xi}^2 = 0$ , получим уравнения малых продольных и поперечных колебаний струны:

$$U_{1,\tau\tau} - U_{1,\xi\xi} = 0;$$

$$U_{2,\tau\tau} - c^2 U_{2,\xi\xi} = 0, \quad (9)$$

где  $c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}}$  – безразмерная скорость поперечных волн.

Точное решение задачи о колебаниях струны с равномерно движущейся границей для волнового уравнения известно [4,6]. Так для задачи (9), (7) при  $L(\tau) = 1 + v\tau$  решение имеет вид:

$$U_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau),$$

где

$$V_n(\xi, \tau) = \sin(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) - \varphi(c\tau - \xi))) (A_n \cos(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) + \varphi(c\tau - \xi))) + B_n \sin(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) + \varphi(c\tau - \xi))));$$

$$\varphi(z) = \frac{\ln((\alpha z + 1)/(1 - \alpha))}{\ln((1 + \alpha)/(1 - \alpha))} + 1; \alpha = \frac{v}{c}; c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}}.$$

Функции  $V_n$  называются динамическими модами [4]. Коэффициенты  $A_n, B_n$  находятся из начальных условий. Скорость распространения малых поперечных волн равна  $c$ . Анализ решения показывает, что с изменением длины струны максимальное значение  $U_2(\xi, \tau)$  (размах колебаний) не изменяется.

Представим динамические моды в виде:

$$V_n(\xi, \tau) = 0,5\sqrt{A_n^2 + B_n^2} (\sin(2\pi n(\varphi(c\tau + \xi) - \varphi_0)) - \sin(2\pi n(\varphi(c\tau - \xi) - \varphi_0))), \quad (10)$$

где

$$\varphi_0 = 2\pi n\varphi(\xi_n) - \frac{\pi}{2}; \xi_n = \frac{B-1}{\alpha(B+1)}; B = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Значение  $\varphi_0$  подобрано таким образом, чтобы при  $\tau = 0$  струна находилась в положении максимального отклонения. Максимальное отклонение  $A_{0n} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  имеет место в точке  $\xi_n$ .

Энергия колебаний определяется следующим выражением:

$$W(\tau) = \left(\frac{A_{0n}c\pi n\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \frac{2}{bL(\tau)} \left(\frac{1}{b} + \cos(4\pi n\varphi(c\tau - L(\tau)) - 2\varphi_0 - \theta)\right), \quad (11)$$

где  $b = \ln((1-\alpha)/(1+\alpha))$ ,  $\theta = \arcsin \frac{4\pi n}{b^2 + 8\pi^2 n^2}$ .

Анализ выражения (11) показывает, что при  $\alpha \rightarrow -1$  и при  $L(\tau) \rightarrow 0$  энергия колебаний стремится к бесконечности, чего в реальных системах быть не может. Происходит нарушение корректности описания колебаний линейной моделью. При переходе от нелинейной модели (6) к линейной (9) произведена замена выражения  $1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}}$  выраже-

нием  $\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}$ . В линейной модели  $U_{1,\xi} = 0$ . Относительная погрешность замены находится по формуле:

$$\delta(\varepsilon_0, U_{2,\xi}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 + U_{2,\xi}^2}} - \frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\right) / \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 + U_{2,\xi}^2}}\right). \quad (12)$$

При увеличении длины ( $\alpha > 0$ ) интенсивность колебаний уменьшается. Если  $\alpha < 0$ , то при общей тенденции увеличения  $W(\tau)$  и  $V_{n,\xi}$  обратно пропорционально  $L(\tau)$  увеличение не носит непрерывный характер. В момент максимального отклонения от положения равновесия увеличение интенсивности колебаний максимально. При прохождении положения равновесия за счёт поглощения кинетической энергии границей интенсивность колебаний уменьшается. При стремлении  $L(\tau)$  к нулю,  $V_{n,\xi}$  стремится к бесконечности. Погрешность линеаризации  $\delta(\varepsilon_0, U_{2,\xi})$  увеличивается и в какой-то момент времени, линейная модель становится неприменимой.

Для изучения корректности линейной модели нелинейная задача (6–8) решалась численно. Для того, чтобы решения линейной и нелинейной задачи в начальный момент времени совпадали, функция  $\psi(\xi)$ , определяющая начальные условия (8), задавалась в виде  $\psi(\xi) = V_n(\xi, 0)$ . Здесь  $V_n(\xi, \tau)$  определяется выражением (10). Сравнением решений линейной и нелинейной задач изучалась корректность линейной модели.

Периоды колебаний в случае неподвижности границы ( $L(\tau) = 1$ ) для линейной модели равны

$$T_n = 2n\sqrt{\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}, \quad (13)$$



где  $n$  – номер собственного колебания.

В таблице 1 приведены периоды собственных колебаний при  $n=1$ , вычисленные по формуле (13) и с помощью численного решения нелинейной задачи при  $K \rightarrow \infty$  и  $L_0 = 2.5$ .

Таблица 1

$\varepsilon_0 \backslash A$	Знач. по формуле (16) $n=1$	0,0001	0,004	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0.0001	200.0	200.0	167.8	145.8	94.3	67.3	51.9	41.8
0.0004	100.0	100.1	98.6	90.7	72.9	58.1	47.4	39.7
0.0009	66.7	66.8	66.4	63.8	56.6	48.7	41.9	35.5
0.0016	50.0	50.1	50.0	48.9	45.4	41.0	36.5	32.6
0.01	20.1	20.2	20.2	20.1	19.8	19.4	18.9	18.3

Анализ таблицы показывает, что при малой амплитуде ( $A=0.0001$ ) периоды, вычисленные численно и по формуле (13) фактически совпадают, что говорит о достаточной точности численного решения. С увеличением амплитуды поперечных колебаний удлинение струны увеличивается (при этом возрастает натяжение) и период уменьшается. Так при  $\varepsilon_0 = 0.0001$  и  $A=0.05$  период уменьшается в 4.8 раза по сравнению с периодом малых колебаний. Погрешность линейной модели уменьшается с увеличением  $\varepsilon_0$  и уменьшением  $A$ .

В таблице 2 приведены моменты времени  $\tau_n$  прохождения серединой струны положения равновесия ( $n$  – порядковый номер прохождения положения равновесия). В таблице обозначено: Л – решение линейной задачи, полученное по формуле (10), Н – численное решение нелинейной задачи (6) – (8).

Таблица 2

Моменты времени прохождения струной положения равновесия в зависимости от  $\varepsilon_0, A$  и  $\alpha = v/c$

	$\alpha$	$\varepsilon_0$	$n \backslash A$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Л1	-0.1	0.0009	0.001	17.9	48.0	75.3	99.9	122.2	142.4	160.6	177.1	192.1	205.6
Н1	-0.1	0.0009	0.001	17.9	48.0	75.3	99.9	122.1	142.3	160.4	176.9	191.7	205.1
Л2	-0.1	0.0036	0.005	9.0	24.1	37.7	50.4	61.2	71.3	80.4	88.7	$\delta_{max} = 0.15$ $L(\tau_n) = 0.43$	
Н2	-0.1	0.0036	0.005	8.9	23.9	37.4	49.6	60.6	70.7	79.6	87.8		
Л3	-0.1	0.0025	0.005	10.8	28.9	60.0	73.4	85.5	96.5	$\delta_{max} = 0.14$ $L(\tau_n) = 0.55$			
Н3	-0.1	0.0025	0.005	10.7	28.5	59.2	72.3	84.2	95.0				
Л4	-0.1	0.0025	0.01	10.8	28.9	45.2	60.0	$\delta_{max} = 0.27$ $L(\tau_n) = 0.75$					
Н4	-0.1	0.0025	0.01	10.3	27.6	43.3	57.2						

Сравнение решения полученного по формуле (10) (строка Л1) и численного решения (строка Н1) показывает, что при малых  $A$  решения почти совпадают, что говорит о достаточной точности численного решения. Прохождение через положение равновесия продольно–поперечных колебаний происходит с опережением, которое обеспечивается увеличением натяжения струны при уменьшении её длины.

При описании колебаний волновым уравнением (9) продольная деформация неизменна и равна  $\varepsilon_0$ . При рассмотрении продольно–поперечных колебаний относительное удлинение, описываемое выражением (1), зависит как от  $\xi$  так и от  $\tau$ . В каждый момент времени от-



носительное удлинение в зависимости от  $\xi$  имеет минимальное значение  $\varepsilon_{min}(\tau)$  и максимальное  $\varepsilon_{max}(\tau)$ . При уменьшении длины струны размах продольных колебаний увеличивается. В какой-то момент времени в струне возникают отрицательные (сжимающие) напряжения. При этом колебания теряют устойчивость, и в процессе численных расчетов происходит сбой. Пустые клетки в таблице 2 соответствуют зоне потери устойчивости. В правых клетках таблицы 2 указаны длина струны  $L(\tau_n)$  и максимальная погрешность  $\delta_{max}$ , определяемая выражением (12), в момент потери устойчивости. При увеличении длины струны устойчивость не нарушается. При уменьшении длины интенсивность колебаний увеличивается и в какой-то момент времени происходит нарушение устойчивости.

При нарушении устойчивости максимальная относительная погрешность линейной модели лежит в пределах от 0.4 до 0.6, что говорит о нарушении корректности линейной модели. Численное исследование колебаний в зависимости от  $K$  показывает, что при уменьшении  $K$  устойчивость уменьшается.

Таким образом, сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей показал, что некорректности линейной модели связаны с увеличением натяжения струны при увеличении интенсивности колебаний, которое линейной моделью не учитывается. Корректность нелинейной модели нарушается при появлении отрицательных продольных деформаций. При этом появляется неустойчивость, и колебания становятся хаотичными. Точность численного решения подтверждается совпадением решений линейной и нелинейной моделей при малых амплитудах колебаний.

### **Список литературы**

1. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
2. Inacio O., Antunes J., Wright M. C. M. Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes// J. Sound and Vibr. , 2008. vol. 310, no. 1–2. P. 260–286 .
3. Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке//Вестник МГУ. Сер. 1, 1993. №5. С.45–48.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича–Галёркина // Вестн. Сам.гос. техн. ун–та. Сер. Физ–мат. науки, 2009. №1(18). С. 149–158.
6. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун–та. Сер. Физ–мат. Науки, 2012. №3(28). С. 145–151.
7. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. СПб.: Лань, 2002. 640 с.
8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестн. Сам.гос. техн. ун–та. Сер. Технические науки, 2013. №1(37). С. 93–98.
9. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун–та. Сер. Физ–мат. Науки, 2015. Т. 19, №2. С. 382–397.

## МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

**А.В.Анкилов, П.А.Вельмисов**

Ульяновский государственный технический университет,  
экономика-математический факультет.

432027 Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, e-mail: ankil@ulstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена нелинейная математическая модель колебаний упругого элемента конструкции произвольной геометрии, с учетом взаимодействия элемента с дозвуковым сжимаемым потоком газа. Модель описывается связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных. Приведена методика построения функционалов типа Ляпунова для полученной нелинейной системы. Построенный функционал предназначен для получения достаточных условий устойчивости колебаний упругого элемента конкретных конструкций.

**Ключевые слова.** Аэрогидроупругость, устойчивость, динамика, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток.

### **Введение**

Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком газа, имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к ее потере.

Задача об исследовании динамической устойчивости, а именно – устойчивости по начальным данным, может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «газ-тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, силы трения и т.д.), малым отклонениям тела от положения равновесия и малым возмущениям потока газа в начальный момент времени  $t = 0$  будут соответствовать малые отклонения тела и малые возмущения потока газа в любой момент времени  $t > 0$ . Такая постановка вопроса является существенной для многих задач механики и техники, описываемых дифференциальными уравнениями, в которых важно знать не только (а иногда не столько) конкретные значения решения этих уравнений при данном конкретном значении аргумента, но знать также характер поведения при изменении аргумента, в частности, при его неограниченном возрастании.

В докладе приведена методика построения функционалов типа Ляпунова для нелинейных задач аэрогидроупругости, на основании которых можно получить условия устойчивости колебаний упругих элементов конструкций (см., например, [1]).

### **1. Постановка задачи.**

Пусть конструкция обтекается дозвуковым сжимаемым потоком газа. Можно рассматривать как внешние, так и внутренние режимы обтекания. Конструкция содержит упругий элемент, взаимодействующий с этим потоком. Плоскость  $Oxy$ , в которой происходят совместные колебания упругого элемента и потока идеального газа (жидкости), располагаем так, чтобы элемент был параллелен оси  $Ox$  при  $y = y_0$ . Проекция элемента на ось  $Ox$  есть отрезок  $[b, c]$ . Предполагается, что входящий (набегающий) однородный поток параллелен оси  $Ox$ .

Введем обозначение:  $w(x, t) \in C^{4,2} \{[b, c] \times R^+\}$ ,  $u(x, t) \in C^{2,2} \{[b, c] \times R^+\}$  – функции, определяющие прогиб элемента в направлении оси  $Oy$  (поперечная составляющая деформации элемента) и оси  $Ox$  (продольная составляющая деформации элемента) соответственно, где  $t \geq 0$  – время. Здесь  $C^{m,n} \{[b, c] \times R^+\}$  – множество всех функций,  $m$  раз непрерывно дифференцируемых функций по переменной  $x$  на отрезке  $[b, c]$  и  $n$  раз непрерывно дифференцируемых по переменной  $t$  при  $t \geq 0$  и принимающих действительные значения.

Перечислим краевые условия и соответствующие виды закреплений концов элемента с учетом продольной и поперечной составляющих деформации элемента. На концах элемента при  $x = b$  или  $x = c$  условия могут иметь вид (в любых комбинациях):

1) жесткое неподвижное защемление (рис. 1а):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (1)$$

2) шарнирное неподвижное закрепление (рис. 1б):

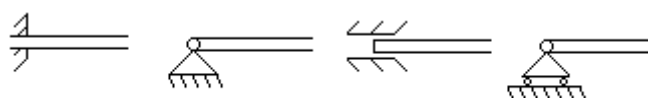
$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (2)$$

3) жесткое подвижное защемление (рис. 1в):

$$w(x, t) = w'(x, t) = u'(x, t) = 0; \quad (3)$$

4) шарнирное подвижное закрепление (рис. 1г):

$$w(x, t) = w''(x, t) = u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) = 0. \quad (4)$$



а) б) в) г)

Рисунок 1. – Способы закреплений

Элемент обтекается потоком жидкости (газа) в области  $G$  (область зависит от геометрии конструкции) плоскости  $Oxy$  (рассматривается одностороннее или двустороннее обтекание). Рассматривается потенциальное течение. Введем обозначение:  $\phi(x, y, t)$  – функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газа. Функция  $\phi(x, y, t) \in C^{2,2} \{G \times R^+\}$ , т.е. принадлежит множеству дважды непрерывно-дифференцируемых функций по координатам  $x$  и  $y$  в области  $G$  и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной  $t$  при  $t \geq 0$  и принимает действительные значения.

Потенциал скорости удовлетворяет уравнению

$$\phi_{tt} + 2V\phi_{xt} + V^2\phi_{xx} = a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}), \quad (x, y) \in G, t \geq 0, \quad (5)$$

где  $a$  – скорость звука в невозмущенном потоке. Рассматривается дозвуковой ( $V < a$ ) режим обтекания. Здесь и в дальнейшем индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$  соответственно.

Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Аэродинамические воздействия на элемент определяются выражениями:

а) для двустороннего обтекания

$$P(x, t) = \rho(\phi_t^+ - \phi_t^-) + \rho V(\phi_x^+ - \phi_x^-), \quad x \in (b, c), \quad y = y_0, \quad t \geq 0; \quad (6)$$

б) для одностороннего обтекания сверху

$$P(x, t) = -P_0 + \rho\phi_t^+ + \rho V\phi_x^+, \quad x \in (b, c), \quad y = y_0, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

в) для одностороннего обтекания снизу

$$P(x, t) = P_0 - \rho\phi_t^- - \rho V\phi_x^-, \quad x \in (b, c), \quad y = y_0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

где  $\phi_t^\pm = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \phi_t(x, y, t)$ ,  $\phi_x^\pm = \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \phi_x(x, y, t)$ .

Граничное условие непротекания на деформируемой поверхности, заданной уравнением  $y = y_0 + w(x, t)$ , имеет вид

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t). \quad (9)$$

На участках границы, не являющихся деформируемым или абсолютно жестким телом, необходимо задать потенциал скорости, или продольную (поперечную) составляющую скорости жидкости, или давление жидкости.

Рассматривается нелинейная модель упругого тела

$$\begin{aligned} & -EF \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right)' + M\ddot{u}(x,t) = 0, \\ & -EF \left[ w'(x,t) \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) \right]' + Dw''''(x,t) + M\ddot{w}(x,t) + \\ & + N(t)w''(x,t) + \beta_2 \dot{w}''''(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_0 w(x,t) = P(x,t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:  $M = h\rho_p$  – погонная масса элемента;  $h$  – толщина элемента;  $E$ ,  $\rho_p$  – модуль упругости и линейная плотность элемента;  $N$  – сжимающая (растягивающая) элемент сила;  $F = \frac{h}{1-\nu^2}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость элемента;  $\beta_2, \beta_1$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости слоя обжатия;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) элемент сила  $N$  может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением времени  $N(t)$  имеет вид:

$$N(t) = N_0 + N_T, \quad N_T = -\frac{T_0}{1-\nu}, \quad T_0 = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z,t) dz, \quad (11)$$

где  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $T(z,t)$  – закон изменения температуры по толщине элемента,  $N_0$  – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении элемента.

Можно предложить также математическую модель, в которой учтены дополнительные нелинейные эффекты процесса деформирования и нелинейные внешние воздействия

$$\begin{cases} -EF \left[ u'(x,t) + \frac{1}{2} w'^2(x,t) \right]' + M\ddot{u}(x,t) + g(x,t, u(x,t), \dot{u}(x,t), w(x,t), \dot{w}(x,t)) = 0, \\ -EF \left[ w'(x,t) \left( u'(x,t) + \frac{1}{2} (w'(x,t))^2 \right) \right]' + \left( \frac{Dw''(x,t)}{[1 + (w'(x,t))^2]^{3/2}} \right)'' + M\ddot{w}(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_2 \dot{w}''''(x,t) + N(t)w''(x,t) - \theta w''(x,t) \left( \int_b^c \sqrt{1 + (w'(x,t))^2} dx + c - b \right) + \\ + f(x,t, u(x,t), \dot{u}(x,t), w(x,t), \dot{w}(x,t)) = P(x,t), \quad x \in (b, c), \end{cases} \quad (12)$$

где  $g(x,t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$ ,  $f(x,t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$  – заданные функции, характеризующие внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства подкрепляющих элементов.

Таким образом, имеем связанную нелинейную краевую задачу (1)–(10) для трех неизвестных функций – деформаций упругого элемента  $u(x,t)$ ,  $w(x,t)$  и потенциала скорости жидкости (газа)  $\phi(x, y, t)$ .

## 2. Построение функционала.

Рассмотрим течение идеальной сжимаемой среды при одностороннем обтекании упругого элемента в нелинейной модели деформируемого тела. Функционалом называется всякий закон, согласно которому любым функциям  $w(x,t) \in C^{4,2} \{[b, c] \times R^+\}$ ,  $u(x,t) \in C^{2,2} \{[b, c] \times R^+\}$ ,  $\phi(x, y, t) \in C^{2,2} \{G \times R^+\}$  сопоставляется функция  $\Phi(t) \equiv \Phi(w, u, \phi) \in C^2 \{R^+\}$ .

Произведем составление функционалов для соответствующей краевой задачи, используя последовательно: уравнение движения сжимаемой среды (5), формулы для аэрогидродинамического воздействия (6) (или (7)), граничное условие (9), уравнения колебаний деформируемого элемента (10), условия закрепления упругого элемента (1)–(4).

I. Умножаем уравнение для потенциала скорости  $\phi(x, y, t)$  (5) на удвоенную частную производную  $2\phi_t(x, y, t)$  и интегрируем по области  $G$ :

$$2 \iint_G \phi_t (\phi_{tt} + 2V\phi_{xt} + V^2\phi_{xx}) dx dy = 2a^2 \iint_G \phi_t (\phi_{xx} + \phi_{yy}) dx dy.$$

Получим уравнение

$$2 \iint_G \phi_t \phi_{tt} dx dy + 4V \iint_G \phi_t \phi_{xt} dx dy + 2(V^2 - a^2) \iint_G \phi_t \phi_{xx} dx dy - 2a^2 \iint_G \phi_t \phi_{yy} dx dy = 0.$$

Проводя преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_G (\phi_t^2)_t dx dy + 2V \iint_G (\phi_t^2)_x dx dy + 2(V^2 - a^2) \iint_G \left( (\phi_t \phi_x)_x - \frac{1}{2} (\phi_x^2)_t \right) dx dy - \\ - 2a^2 \iint_G \left( (\phi_t \phi_y)_y - \frac{1}{2} (\phi_y^2)_t \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2)_t dx dy = -2 \iint_G \left[ (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x)_x - a^2(\phi_t \phi_y)_y \right] dx dy. \quad (13)$$

Согласно формуле Грина из (13) получим

$$\iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2)_t dx dy = -2 \int_{\partial G} a^2 \phi_t \phi_y dx + (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x) dy. \quad (14)$$

Тогда получаем первую часть функционала

$$\Phi_1(t) = \iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2) dx dy \quad (15)$$

и его производную

$$\dot{\Phi}_1(t) = -2 \int_{\partial G} a^2 \phi_t \phi_y dx + (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x) dy. \quad (16)$$

Используя граничное условие (9) в случае одностороннего обтекания, интегрируя по разрезу  $\partial g = \{x \in [b, c], y = y_0\}$ , являющемся частью границы  $\partial G$ , получим интеграл

$$\int_{\partial g} a^2 \phi_t \phi_y dx = \pm \int_b^c a^2 \phi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) dx, \quad (17)$$

который необходимо учесть при составлении функционала. Знак «+» соответствует обтеканию элемента сверху, знак «-» обтеканию снизу.

Таким образом, производная (16) с учетом (17) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1(t) = \mp 2 \int_b^c a^2 \phi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) dx - 2 \int_{\partial G \setminus \partial g} a^2 \phi_t \phi_y dx - \\ - 2 \int_{\partial G} (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x) dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и в дальнейшем, если перед слагаемым стоит двойной знак  $\mp$  или  $\pm$ , то верхний знак соответствует обтеканию сверху, нижний – обтеканию снизу. Если перед слагаемым стоит один знак, то он соответствует обтеканию и сверху и снизу.

II. Рассмотрим нелинейную модель упругого тела (10). Учитывая аэродинамическое воздействие на элемент для одностороннего обтекания сверху (6) или снизу (7), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & -EF \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right)' + M\ddot{u}(x,t) = 0, \\
 & -EF \left[ w'(x,t) \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) \right]' + Dw''''(x,t) + M\dot{w}(x,t) + \\
 & + N(t)w''(x,t) + \beta_2 \dot{w}''''(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_0 w(x,t) = \\
 & = \pm \rho \phi_t(x, y_0, t) \pm \rho V \phi_x(x, y_0, t), \quad x \in (b, c).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Умножаем первое уравнение (19) на  $2\dot{u}(x,t)$ , а второе – на  $2\dot{w}(x,t)$  и интегрируем по отрезку  $[b, c]$  по переменной  $x$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_b^c \dot{u} \left( -EF \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right)' + M\ddot{u}(x,t) \right) dx = 0, \\
 & 2 \int_b^c \dot{w} \left( -EF \left[ w' \left( u' + 0.5w'^2 \right) \right]' + Dw'''' + M\dot{w} + N(t)w'' + \beta_0 w + \right. \\
 & \left. + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \dot{w}'''' \right) dx = \pm 2\rho \int_b^c \dot{w}(x,t) \left( \phi_t(x, y_0, t) + V \phi_x(x, y_0, t) \right) dx.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_b^c \dot{w} \left[ w' \left( u' + 0.5w'^2 \right) \right]' dx = \left( \dot{w} w' \left( u' + 0.5w'^2 \right) \right) \Big|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w' \left( u' + 0.5w'^2 \right) dx, \\
 & \int_b^c \dot{u} \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right)' dx = \left( \dot{u} \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) \right) \Big|_b^c - \\
 & - \int_b^c \dot{u}' \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) dx, \quad \int_b^c \dot{u} \ddot{u} dx = \frac{1}{2} \int_b^c \left( \dot{u}^2 \right)_t dx, \\
 & \int_b^c \dot{w} w'''' dx = \left( \dot{w} w'''' - \dot{w}' w'' \right) \Big|_b^c + \int_b^c \dot{w}'' w'' dx = \left( \dot{w} w'''' - \dot{w}' w'' \right) \Big|_b^c + \frac{1}{2} \int_b^c \left( w''^2 \right)_t dx, \\
 & \int_b^c \dot{w} \ddot{w} dx = \frac{1}{2} \int_b^c \left( \dot{w}^2 \right)_t dx, \quad \int_b^c \dot{w} \dot{w}'''' dx = \left( \dot{w} \dot{w}'''' - \dot{w}' \dot{w}'' \right) \Big|_b^c + \int_b^c \dot{w}''^2 dx, \quad \int_b^c \dot{w} w dx = \\
 & = \frac{1}{2} \int_b^c \left( w^2 \right)_t dx, \quad \int_b^c \dot{w} w'' dx = \left( \dot{w} w'' \right) \Big|_b^c - \int_b^c \dot{w}' w' dx = \left( \dot{w} w'' \right) \Big|_b^c - \frac{1}{2} \int_b^c \left( w'^2 \right)_t dx, \\
 & \int_b^c N(t) \left( w'^2 \right)_t dx = \int_b^c \left( \left( N(t) w'^2 \right)_t - \dot{N}(t) w'^2 \right) dx, \\
 & \int_b^c \dot{w}(x,t) \phi_x(x, y_0, t) dx = \dot{w}(x,t) \phi(x, y_0, t) \Big|_b^c - \int_b^c \dot{w}'(x,t) \phi(x, y_0, t) dx.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Подставим (21) в (20):

$$\begin{aligned}
 & \int_b^c \left( M\dot{u}^2 \right)_t dx + 2 \int_b^c EF \dot{u}' \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) dx - 2EF \dot{u} \left( u'(x,t) + 0.5w'^2(x,t) \right) \Big|_b^c = 0, \\
 & \int_b^c \left( M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2 \right)_t dx + 2 \int_b^c EF \dot{w}' w' \left( u' + 0.5w'^2 \right) dx + \\
 & + 2 \int_b^c \left( 0.5\dot{N}(t)w'^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2 \right) dx + 2 \left( D\dot{w} w'''' - D\dot{w}' w'' + N(t)\dot{w} w' + \beta_2 \dot{w} \dot{w}'''' - \beta_2 \dot{w}' \dot{w}'' \right) \mp
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - EF \dot{w} w' (u' + 0.5w'^2) \Big|_b^c = \pm 2\rho \int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx \mp 2\rho V \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx.$$

Складывая левые и правые части уравнений, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_b^c (M\dot{u}^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2) dx + 2 \int_b^c EF \dot{w}' w' (u' + 0.5w'^2) dx + \\ & + 2 \int_b^c EF \dot{u}' (u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t)) dx + 2 \int_b^c (0.5\dot{N}(t)w'^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx + \\ & + 2(D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}\dot{w}''' - \beta_2 \dot{w}'\dot{w}'' \mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - EF \dot{w} w' (u' + 0.5w'^2) - \\ & - EF \dot{u}' (u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c = \pm 2\rho \int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx \mp 2\rho V \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx. \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} 2 \int_b^c EF \dot{w}' w' (u' + 0.5w'^2) dx + 2 \int_b^c EF \dot{u}' (u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t)) dx &= 2 \int_b^c EF (\dot{w}' w' + \dot{u}') (u' + 0.5w'^2) dx = \\ &= 2 \int_b^c EF (\dot{u} + 0.5w'^2)_t (u' + 0.5w'^2) dx = \int_b^c (EF (u' + 0.5w'^2)_t^2) dx, \end{aligned}$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} & \int_b^c (EF (u' + 0.5w'^2)^2 + M\dot{u}^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2) dx + \\ & + 2 \int_b^c (0.5\dot{N}(t)w'^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx + 2(D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}\dot{w}''' - \\ & - \beta_2 \dot{w}'\dot{w}'' \mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - EF \dot{w} w' (u' + 0.5w'^2) - EF \dot{u}' (u'(x, t) + \\ & + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c = \pm 2\rho \int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx \mp 2\rho V \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, получаем функционал

$$\Phi_2(t) = \int_b^c (EF (u' + 0.5w'^2)^2 + M\dot{u}^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2) dx \quad (24)$$

с производной

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_2(t) &= -2 \int_b^c \left( \frac{\dot{N}(t)}{2} w'^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2 \right) dx \pm 2\rho \int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx \mp \\ & \mp 2\rho V \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx - 2(D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}\dot{w}''' - \\ & - \beta_2 \dot{w}'\dot{w}'' \mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - EF \dot{w} w' (u' + 0.5w'^2) - EF \dot{u}' (u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c. \end{aligned} \quad (25)$$

III. Складывая функционал (15) с функционалом (24), умноженным на  $\frac{a^2}{\rho}$ , получим функционал

$$\begin{aligned} \Phi_3(t) &= \Phi_1(t) + \frac{a^2}{\rho} \Phi_2(t) = \iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2) \phi_x^2 + a^2 \phi_y^2) dx dy + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (EF (u' + 0.5w'^2)^2 + M\dot{u}^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2) dx \end{aligned} \quad (26)$$

с производной

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_3(t) = & \dot{\Phi}_1(t) + \frac{a^2}{\rho} \dot{\Phi}_2(t) = \mp 2a^2 \int_b^c \phi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) dx - 2 \iint_{\partial G \setminus \partial g} a^2 \phi_t \phi_y dx - \\ & - 2 \iint_{\partial G} (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x) dy - \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left( \frac{\dot{N}(t)}{2} w^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}'^2 \right) dx \pm 2a^2 \int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx \mp \\ & \mp 2a^2 V \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx - \frac{2a^2}{\rho} (D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}w'''' - \\ & - \beta_2 \dot{w}'w'' \mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - EF\dot{w}w'(u' + 0.5w'^2) - EF\dot{u}(u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c. \end{aligned} \quad (27)$$

Очевидно, что «смешанные» интегралы  $\int_b^c \dot{w}(x, t) \phi_t(x, y_0, t) dx$  сокращаются, а сумма двух оставшихся «смешанных» интегралов дает производную по времени

$$\int_b^c \phi_t(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \int_b^c \dot{w}'(x, t) \phi(x, y_0, t) dx = \int_b^c (\phi(x, y_0, t) w'(x, t))_t dx = \left( \int_b^c \phi(x, y_0, t) w'(x, t) dx \right)_t. \quad (28)$$

Перенося это выражение из производной (27) в функционал (26), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2) dx dy \pm 2a^2 V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( EF(u' + 0.5w'^2)^2 + Mu^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2 \right) dx \end{aligned} \quad (29)$$

с производной

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & -2 \iint_{\partial G \setminus \partial g} a^2 \phi_t \phi_y dx - 2 \iint_{\partial G} (V\phi_t^2 + (V^2 - a^2)\phi_t \phi_x) dy - \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left( \frac{\dot{N}(t)}{2} w^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}'^2 \right) dx - \\ & - \frac{2a^2}{\rho} (D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}w'''' - \beta_2 \dot{w}'w'' \mp \rho V \dot{w}(x, t) \phi(x, y_0, t) - \\ & - EF\dot{w}w'(u' + 0.5w'^2) - EF\dot{u}(u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c. \end{aligned} \quad (30)$$

**IV.** Используя интегральные равенства и неравенства, необходимо построить, оценивая (29) снизу и (30) сверху, квадратичные формы, так, чтобы квадратичная форма в оценке (29) была положительно определена, а в оценке (30) отрицательно полуопределена. Тогда получим условия, при которых выполняются неравенства  $\Phi(t) > 0$ ,  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ . Следовательно, найдем условия устойчивости согласно следующей лемме, доказанной в [1].

**Лемма.** Если можно построить функционал  $\Phi(t)$ , такой что  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ , и найдется положительно определенная нижняя оценка

$$\begin{aligned} \Phi_4(t) = & \int_b^c F_1^{4,2,2,2}(w, u, x, t) dx + \sum_{j=1}^m \int_b^c F_1^{4,2,2,2,2,2,2}(w, u, \phi, x, y_j, t) dx + \\ & + \iint_G F_1^{2,2,2}(\phi, x, y, t) dx dy + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_1^{4,2,2,2,2,2,2}(w, u, \phi, x_i, y_j, t) \end{aligned} \quad (31)$$

этого функционала  $\Phi(t)$  ( $\Phi(t) \geq \Phi_4(t) \geq 0$ ), и найдется верхняя оценка

$$\begin{aligned} \Phi_5(0) = & \int_b^c F^{4,2,2,2}(w, u, x, 0) dx + \sum_{j=1}^m \int_b^c F^{4,2,2,2,2,2,2}(w, u, \phi, x, y_j, 0) dx + \\ & + \iint_G F^{2,2,2}(\phi, x, y, 0) dx dy + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{4,2,2,2,2,2,2}(w, u, \phi, x_i, y_j, 0) \end{aligned} \quad (32)$$



начального значения этого функционала  $\Phi(0)$  ( $\Phi(0) \leq \Phi_5(0)$ ), где  $w(x, t) \in C^{4,2} \{[b, c] \times R^+\}$ ,  $u(x, t) \in C^{2,2} \{[b, c] \times R^+\}$   $\phi(x, y, t) \in C^{2,2} \{G \times R^+\}$  – решение задачи (1)–(10), то функции  $w(x, t)$  и(или)  $u(x, t)$  и(или)  $\phi(x, y, t)$  и(или) их производные, входящие в положительно определенный полином в выражении для  $\Phi_4(t)$ , устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

В лемме введены обозначения

$$F^{n_1, s_1, n_2, s_2}(f, g, x, t) = G_1(D^{0,0}f(x, t), D^{1,0}f(x, t), D^{0,1}f(x, t), \dots, D^{n_1, s_1}f(x, t), \\ D^{0,0}g(x, t), D^{1,0}g(x, t), D^{0,1}g(x, t), \dots, D^{n_2, s_2}g(x, t)), \quad x \in [b, c], t \geq 0;$$

$$F^{n_3, m_3, s_3}(h, x, y, t) = G_2(D^{0,0,0}h(x, y, t), \dots, D^{n_3, m_3, s_3}h(x, y, t)), \quad (x, y) \in G, t \geq 0;$$

$$F^{n_1, s_1, n_2, s_2, n_3, m_3, s_3}(f, g, h, x, y_0, t) = G_3(D^{0,0}f(x, t), \dots, D^{n_1, s_1}f(x, t), \\ D^{0,0}g(x, t), \dots, D^{n_2, s_2}g(x, t), D^{0,0,0}h(x, y_0, t), \dots, D^{n_3, m_3, s_3}h(x, y_0, t)), \quad x \in [b, c], t \geq 0,$$

где  $D^{n, s}f(x, t) = \frac{\partial^{n+s}f(x, t)}{\partial x^n \partial t^s}$ ,  $D^{n, m, s}h(x, y, t) = \frac{\partial^{n+m+s}h(x, y, t)}{\partial x^n \partial y^m \partial t^s}$ ;  $G_i(x_1, x_2, \dots)$  – полиномы, все мо-

номы которых не ниже второго порядка, с ограниченными коэффициентами. Для полинома  $G_1$  коэффициенты зависят от  $x, t$ , для  $G_2$  – от  $x, y, t$ , для  $G_3$  – от  $x, y_0, t$ . Все коэффициенты непрерывно дифференцируемы по времени  $t$ .

Аналогично проведенным выше исследованиям получим в случае двустороннего обтекания идеальной сжимаемой средой деформируемого элемента функционал

$$\Phi(t) = \iint_G \left( \phi_t^2 + (a^2 - V^2) \phi_x^2 + a^2 \phi_y^2 \right) dx dy + 2a^2 V \int_b^c (\phi^+(x, y_0, t) - \phi^-(x, y_0, t)) w'(x, t) dx + \\ + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( EF(u' + 0.5w'^2)^2 + Mu^2 + M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 - N(t)w'^2 \right) dx \quad (33)$$

с производной

$$\dot{\Phi}(t) = -2 \iint_{\partial G \setminus \partial g} a^2 \phi_t \phi_y dx - 2 \iint_{\partial G} (V \phi_t^2 + (V^2 - a^2) \phi_t \phi_x) dy - \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left( \frac{\dot{N}(t)}{2} w'^2 + \beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2 \right) dx - \\ - \frac{2a^2}{\rho} (D\dot{w}w''' - D\dot{w}'w'' + N(t)\dot{w}w' + \beta_2 \dot{w}w''' - \beta_2 \dot{w}'w'' + \rho V \dot{w}(x, t)(\phi_x^+(x, y_0, t) - \phi_x^-(x, y_0, t)) - \\ - EF\dot{w}w'(u' + 0.5w'^2) - EF\dot{u}(u'(x, t) + 0.5w'^2(x, t))) \Big|_b^c. \quad (34)$$

В монографии [1] приведены примеры применения полученных функционалов для определения условий устойчивости упругих элементов конкретных конструкций.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

## Список литературы

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.

## **МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ С КОМБИНИРОВАННЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

**О.Г.Антоновская, В.П.Горюнов**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
603950 Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: [olga.antonovsckaja@yandex.ru](mailto:olga.antonovsckaja@yandex.ru)

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [pmk@unn.ac.ru](mailto:pmk@unn.ac.ru)

В докладе излагаются основные моменты применения методики исследования динамики систем с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала при учете его кусочного постоянства к исследованию динамики системы синхронизации с комбинированным частотно-фазовым управлением.

Ключевые слова: управляемые системы, управляющий сигнал, математическое моделирование, фазовые подпространства, метод точечных отображений, функции последования.

Известно [1], что практические потребности в разработке способа быстрой перестройки автоколебательных систем на основе использования информации о фазо-частотных свойствах их колебаний диктует необходимость развития приемов качественно-численного моделирования динамики соответствующих систем управления [2]. Особенности методики исследования динамики систем с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала при учете его кусочного постоянства и использовании метода точечных отображений приведены в [3].

В настоящем докладе излагаются основные моменты применения указанной методики к исследованию динамики системы синхронизации с комбинированной широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала. В качестве базовой модели используется синтезатор частоты (СЧ) с комбинированным импульсным частотно-фазовым детектором (КИЧФД) [2, с.28]. Такой СЧ объединяет в себе принцип управления по числу импульсов (частотное детектирование (ЧД)) и принцип управления по временному рассогласованию (импульсное фазовое детектирование (ИФД)) двух соседних во времени импульсов, а именно: импульса синхронизирующего опорного сигнала (ОС) и выходного импульса счетчика (С) числа периодов подстраиваемого генератора (ПГ). Фазовое управление функционирует в случае, если импульсы ОС чередуются во времени с выходными импульсами С. Частотное управление включается, если процесс чередования импульсов ОС и С нарушается. При появлении во времени подряд двух или более импульсов С принудительно устанавливается минимально возможное значение сигнала управления, а при появлении во времени подряд двух или более импульсов ОС – его максимально возможное значение.

Вследствие принципиальной нелинейности процессов в системе в режиме фазового управления [4], разработка процедуры моделирования процесса перехода от режима фазового управления к режиму частотного управления, необходимая для построения математической модели в целом, является актуальной.

Сущность использования метода точечных отображений для изучения динамики СЧ с КИЧФД состоит в использовании для рассмотрения динамики СЧ фазовых подпространств, соответствующих постоянству структуры дифференциального уравнения

$$\alpha(d\theta/d\tau) = g(u(\tau)) \quad (0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq \theta \leq 1), \quad (1)$$

описывающего процесс заполнения счетных декад С.

Уравнение (1) определено на единичном отрезке безразмерного времени  $\tau$ , равном периоду ОС;  $\theta$  – безразмерная, нормированная на единицу, координата С, причем после заполнения С при  $\theta = 1$  происходит мгновенный сброс на значение  $\theta = 0$  и при этом на выхо-

де С появляется управляющий импульс;  $\alpha$  – безразмерный показатель С, причем значение  $\alpha = 1$  соответствует неуправляемому ПГ, когда  $u(\tau) \equiv 0$ ;  $g = 1 + Su$  – линейная характеристика ПГ с крутизной  $S > 0$ .

Согласно логике работы КИЧФД режим ЧД с минимально возможным значением  $u(\tau) = \underline{u}$  включается в режиме ИФД при появлении повторного импульса С, а с максимальным значением  $u(\tau) = \bar{u}$  – при появлении повторного импульса ОС. При чередовании импульсов С и ОС в режиме ФД, ближайший приходящий во времени импульс ОС запускает генератор пилообразного напряжения так, что на его выходе появляется сигнал управления

$$u(\tau) = (\bar{u} - \underline{u})\tau + \underline{u} \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (2)$$

При использовании импульсного фазового детектора типа «выборка-запоминание»  $u(\tau) = u(\tau_0) = \text{const}$ , где  $\tau_0$  – момент прихода импульса С. Поскольку в режимах ЧД и ИФД структура уравнения (1) неизменна, можно считать, что при  $u(\tau) = \underline{u}$  уравнение (1) определено в подпространстве  $\Pi_1$ , при  $u(\tau) = \bar{u}$  – в подпространстве  $\Pi_3$  и в режиме ИФД с  $u(\tau)$ , определяемой выражением (2) – в подпространстве  $\Pi_2$ .

Рассмотрим свойства фазовых траекторий в каждом из подпространств.

Согласно (1) траектории движения в  $\Pi_1$  на развертке тора  $0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1$  суть прямые с наклоном

$$d\tau/d\theta = \alpha/\underline{\alpha}, \quad (3)$$

где  $\underline{\alpha} = g(\underline{u})$ .

Необходимо отметить, что поскольку КИЧФД переходит в режим ЧД с  $u(\tau) = \underline{u}$  только при появлении повторного импульса С, постольку анализ поведения траекторий уравнения (3) следует проводить только для начальных условий  $\theta_0 = 0, 0 \leq \tau_0 \leq 1$ . Рассмотрим свойства траекторий при различных значениях параметра  $\alpha$ . Начнем со случая  $\alpha < \underline{\alpha}$ , когда траектории  $\theta(\tau)$  на развертке тора расположены полого с  $d\tau/d\theta < 1$ . В момент достижения изображающей точкой движения (ИТД) границы  $\theta = 1$  появляется импульс С, после чего ИТД мгновенным скачком переносится на границу  $\theta = 0$  и далее продолжает движение. При достижении ИТД границы  $\tau = 1$  появляется импульс ОС и осуществляется мгновенный перенос ИТД на границу  $\tau = 0$ , после чего ИТД продолжает движение.

Непосредственно из отмеченного следует, что при  $\alpha < \underline{\alpha}$  в режиме ЧД в основном появляются импульсы С и одиночные импульсы ОС. Поскольку появление подряд двух импульсов ОС исключено, при  $\alpha < \underline{\alpha}$  ИТД остаются в подпространстве  $\Pi_1$ , т.е. при любых начальных условиях СЧ не выходит из режима ЧД.

При  $\alpha > \underline{\alpha}$  траектории движения в  $\Pi_1$  по сравнению со случаем  $\alpha < \underline{\alpha}$  на развертке тора идут круче биссектрисы координатного угла, так что становится возможным появление подряд двух импульсов ОС, необходимых для перехода КИЧФД в режим ФД. Согласно (3) первый импульс, генерируемый траекторией, начинающейся в точке  $(0, \tau_0)$  и заканчивающейся в точке  $(\theta_1, 1)$  всегда соответствует импульсу ОС, причем

$$\theta_1 = (\alpha/\underline{\alpha})(1 - \tau_0) \quad (0 \leq \theta_0 \leq 1). \quad (4)$$

Траектория повторного импульса ОС, начинающаяся в точке  $(\theta_1, 0)$  заканчивается в точке  $(\theta_2, 1)$  при  $\theta_2 < 1$ , причем

$$\theta_2 = (\alpha/\underline{\alpha})(2 - \tau_0) \quad (\theta_2 \leq 1). \quad (5)$$

Из (5) следует, что  $\theta_2 < 1$  при  $\tau_0 > \tau_{01} < 1$ . Это означает, что по координате  $\tau_0$  существует граница

$$\Gamma_1: \quad \tau_{01} = 2 - (\alpha/\underline{\alpha}). \quad (6)$$

В полуполосе  $\alpha \geq \underline{\alpha}, 0 \leq \tau_0 \leq 1$  граница  $\Gamma_1$  определяет две области. При начальном значении  $\tau_0$ , лежащем в области, расположенной левее  $\Gamma_1$ , КИЧФД остается в режиме ЧД и при этом траектория движения порождает точечное отображение  $T_{11}$  с функцией последования (ФП)

$$T_{11}: \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / \underline{\alpha}) - 1 \quad (0 \leq \tau_0 \leq \tau_{01}, \underline{\alpha} < \alpha < 2\underline{\alpha}). \quad (7)$$

При начальном значении  $\tau_0$ , лежащем в области, расположенной правее  $\Gamma_1$ , КИЧФД переходит в точке  $(\theta_2, 0)$  в режим ИФД и при этом до момента появления импульса С, т.е. до достижения траекторией движения границы  $\theta = 1$ , осуществляется переходное движение с  $u(\tau) = \underline{u}$ . Тем самым порождается переходное отображение  $T_{12}$  с ФП

$$T_{12}: \begin{cases} \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / \underline{\alpha}) - \bar{m}, & (\tau_{01} \leq \tau_0 < 1, \underline{\alpha} < \alpha < 2\underline{\alpha}; \\ \bar{m} = E[\tau_0 + (\alpha / \underline{\alpha})], & 0 \leq \tau_0 < 1, \alpha \geq 2\underline{\alpha}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $E$  – знак взятия целой части, а  $\bar{m} \geq 2$ .

В подпространстве  $\Pi_3$ , соответствующем режиму ЧД с  $u(\tau) = \bar{u}$ , согласно (1) траектории движения на развертке тора  $0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1$  суть прямые с наклоном

$$d\tau / d\theta = \alpha / \bar{\alpha}, \quad (9)$$

где  $\bar{\alpha} = g(\bar{u})$ .

Необходимо отметить, что поскольку КИЧФД переходит в режим ЧД с  $u(\tau) = \bar{u}$  только при появлении повторного импульса ОС, постольку анализ поведения траекторий уравнения (9) следует проводить только для начальных условий  $0 \leq \theta_0 \leq 1, \tau_0 = 0$ .

Проводя анализ поведения траекторий аналогично тому, как это было сделано для случая  $u(\tau) = \underline{u}$ , можно установить, что при  $\alpha > \bar{\alpha}$  появление подряд двух импульсов С исключено, так что ИТД остаются в подпространстве  $\Pi_3$ , т.е. СЧ не выходит из режима ЧД.

При  $\bar{\alpha} / 2 < \alpha < \bar{\alpha}$  ИТД в зависимости от величины  $\theta_0$  либо остаются в  $\Pi_3$ , либо переходят в подпространство  $\Pi_2$ , соответствующее режиму ИФД. При  $\alpha < \bar{\alpha} / 2$  ИТД при любом  $\theta_0$  за одну итерацию покидают  $\Pi_3$ . Указанные изменения описываются ФП отображения

$$T_{33}: \bar{\theta} = \theta_0 - (\bar{\alpha} / \alpha) \quad (0 \leq \theta_0 \leq \theta_{01}, \bar{\alpha} / 2 < \alpha < \bar{\alpha}) \quad (10)$$

где граница  $\Gamma_2$  задается уравнением

$$\theta_{01} = 2 - (\bar{\alpha} / \alpha) \quad (\bar{\alpha} / 2 < \alpha < \bar{\alpha}), \quad (11)$$

и отображением

$$T_{32}: \begin{cases} \bar{\tau} = (\alpha / \bar{\alpha})(1 - \theta_0 + E[\theta_0 + (\bar{\alpha} / \alpha)]) - 1 \\ (\theta_{01} \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{\alpha} / 2) < \alpha < \bar{\alpha}; 0 \leq \theta_0 \leq 1, \alpha < (\bar{\alpha} / 2)). \end{cases} \quad (12)$$

Переход из  $\Pi_3$  в  $\Pi_2$  реализуется при появлении подряд двух импульсов С.

В режиме ИФД детектор с «выборкой и запоминанием» в интервале следования во времени двух соседних импульсов С в моменты  $\tau_0$  и  $\bar{\tau}$  обеспечивает выполнение условия  $u(\tau) = u(\tau_0) = const$ . Поэтому, согласно (1) траектории движения в  $\Pi_2$  определяются соотношением

$$\theta(\tau) = (g(x_0) / \alpha)(\tau - \tau_0) \quad (\tau_0 \leq \tau \leq \bar{\tau}). \quad (13)$$

На развертке фазового тора в режиме ИФД траектория (13) с учетом цилиндричности по координате  $\tau$  состоит из двух отрезков прямых с одним промежуточным переносом ИТД по координате  $\tau$  при  $\theta = \theta_3$ . Поэтому условиями существования траектории (13) в режиме ИФД являются неравенства  $\theta(\tau = 1), \theta_3 < 1$ . Разрешая указанные неравенства относительно

параметра  $\alpha$ , находим, что их можно представить в виде неравенств  $\alpha > \alpha_3(\tau_0)$  и  $\alpha < \alpha_4(\tau_0)$  соответственно, где

$$\alpha_3(\tau_0) = g(u(\tau_0))(1 - \tau_0) \quad (0 \leq \tau_0 \leq 1), \quad (14)$$

$$\alpha_4(\tau_0) = g(u(\tau_0))(2 - \tau_0) \quad (0 \leq \tau_0 \leq 1). \quad (15)$$

Границы  $\alpha = \alpha_3(\tau_0)$ ,  $\alpha = \alpha_4(\tau_0)$ , в полуполосе  $0 \leq \tau_0 \leq 1$ ,  $\alpha > 0$  образуют три области  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ . Для точек  $(\tau_0, \alpha)$  средней области  $G_2$  режим ИФД сохраняется и после появления в момент  $\tau = \bar{\tau}$  импульса  $S$ . Фазовая траектория (13) при этом порождает отображение

$$T_{22}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / g(u(\tau_0))) - 1 \\ (\tau_0, \bar{\tau} \in \Pi_2, \alpha_3(\tau_0) < \alpha < \alpha_4(\tau_0)). \quad (16)$$

Если  $\tau_0$  на плоскости  $\tau_0, \alpha$  лежит в области  $G_1$ , соответствующей неравенству  $\alpha < \alpha_3(\tau_0)$ , то реализуется случай двух импульсов ОС и КИЧФД переходит в режим ЧД с  $u(\tau) = \underline{u}$ , порождая отображение

$$T_{21}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha / g(u(\tau_0))), \quad (17)$$

и при этом точка  $\theta_0 = 0, \tau_0 = \bar{\tau}$  становится начальной точкой движения в  $\Pi_1$ .

Если  $\tau_0$  на плоскости  $\tau_0, \alpha$  лежит в области  $G_3$ , соответствующей неравенству  $\alpha > \alpha_4(\tau_0)$ , то реализуется случай двух импульсов ОС и КИЧФД переходит в режим ЧД с  $u(\tau) = \bar{u}$ , порождая отображение

$$T_{23}: \quad \bar{\theta} = (1/\alpha)g(u(\tau_0))(2 - \tau_0) \\ (\tau_0 \in \Pi_2, \bar{\theta} \in \Pi_3, \alpha > \alpha_4(\tau_0)). \quad (18)$$

При этом точка  $\theta_0 = \bar{\theta}, \tau_0 = 0$  становится начальной точкой движения в  $\Pi_3$ .

Отображение  $T_{22}$ , определяющее динамику СЧ в режиме ИФД, имеет единственную неподвижную точку. Подставляя в (16) условие  $\tau_0 = \bar{\tau} = \tau^*$ , находим, что для линейной характеристики (2) ПГ

$$\alpha = \alpha(\tau^*) = g(u(\tau^*)) = 1 - S[(\bar{u} - \underline{u})\tau^* + \underline{u}]. \quad (19)$$

График функции  $\alpha = \alpha(\tau^*)$  (19) удовлетворяет при  $0 \leq \tau^* \leq 1$  системе неравенств  $\alpha_3(\tau^*) < \alpha < \alpha_4(\tau^*)$  и, следовательно, неподвижная точка  $\tau_0 = \tau^*$  существует во всей полосе удержания, т.е. при  $\underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}$ .

Неравенства  $\tau^* > 0, \tau^* < 1$  и  $g(\underline{u}) > 0$  определяют на плоскости  $\alpha, S$  треугольную область существования синхронного режима и невырожденности ( $g(\underline{u}) > 0$ ) характеристики ПГ

$$0 < \frac{1 - \alpha}{|\underline{u}|}, \frac{1 - \alpha}{\bar{u}} < S < \frac{1}{|\underline{u}|}. \quad (\underline{u} < 0, \bar{u} > 0) \quad (20)$$

Из вида ФП (16) следует, что условие устойчивости неподвижной точки  $\tau_0 = \tau^*$   $|d\bar{\tau}/d\tau_0(\tau_0 = \tau^*)| < 1$  нарушается на границе

$$N_-: \quad S = 2\alpha/(\bar{u} - \underline{u}), \quad (21)$$

которая отсекает от треугольной области существования (20) ее левую верхнюю часть (в сторону уменьшения  $\alpha$  и увеличения  $S$ ). Тем самым определена область существования и устойчивости в «малом» неподвижной точки  $\tau_0 = \tau^*$  в режиме ИФД [5].

С целью реализации возможности качественного анализа устойчивости в «большом» неподвижной точки  $\tau_0 = \tau^*$  представим в квадранте  $\alpha, S > 0$  наряду с границами области (20) существования и невырожденности границы  $\gamma_1: \alpha = 2\underline{\alpha}$ ,  $\gamma_2: \alpha = \max_{\tau_0} \alpha_3(\tau_0)$ ,

$\gamma_3 : \alpha = \min_{\tau_0} \alpha_4(\tau_0)$ . Тогда в каждой из трех образующихся подобластей области существования и невырожденности оказывается определена конкретная группа точечных отображений. Так в части области существования над границей  $\gamma_1$  (в сторону больших значений  $S$ ) достаточно воспользоваться представлением графиков отображений  $T_{23}$ ,  $T_{33}$ ,  $T_{32}$  и  $T_{22}$ . При этом отображения  $T_{23}$ ,  $T_{33}$ ,  $T_{32}$  представлять на одной комбинированной диаграмме. В первом квадранте диаграммы следует отождествлять ось абсцисс с осью  $\theta_0$ . Тогда в интервале  $0 \leq \theta_0 \leq \theta_{01}$  следует представить график отображения  $T_{33}$ , причем величины  $\bar{\theta}$  следует указывать на оси ординат. В интервале  $\theta_{01} \leq \theta_0 \leq 1$  следует представить график ФП отображения  $T_{32}$ , причем величины  $\bar{\tau}$  следует указывать на оси ординат. В четвертом квадранте следует представить график ФП  $T_{23}$ . При этом величины  $\tau_0$  следует представлять на оси ординат, направленной вниз, а величины  $\bar{\theta}$  отображения указывать на оси абсцисс. При таком подходе предоставляется возможность качественного формирования графика ФП произведения  $T_{32} T_{33}^k T_{23}$ , где  $k$  – степень, определяемая при построении.

При указанном подходе представляется возможность убедиться, что отображение  $T_{32}$  играет роль ловушки, из которой величина  $\bar{\tau}$  ИТД поступает в интервал определения отображения  $T_{22}$ . Таким образом, можно качественно сформировать графики ФП в квадранте  $\tau_0, \bar{\tau} > 0$ . При этом в интервале  $\tau_{0-} \leq \tau_0 \leq 1$  представлен график отображения  $T_{22}$ , а в интервале  $0 \leq \tau_0 \leq \tau_{0-}$  сформированный график произведения  $T_{32} T_{33}^k T_{23}$ , т.е. предоставляется возможность качественного исследования процессов в СЧ в «большом». Отметим, что график произведения указанных отображений напоминает собой неравномерную пилу, располагающуюся по высоте в диапазоне  $(2\alpha/\bar{\alpha}) - 1 \leq \bar{\tau} \leq \alpha/\bar{\alpha}$ . График ФП отображения  $T_{22}$  имеет монотонно убывающий характер и располагается при  $\tau_{0-} \leq \tau_0 \leq 1$  в верхней части квадрата.

Непосредственно из рисунка графиков ФП видно, что если точка  $(\tau_{0-}, 2\alpha/\bar{\alpha} - 1)$  лежит выше биссектрисы координатного угла  $\tau_0, \bar{\tau} > 0$ , то итерации с течением времени приводят в режим ИФД, обеспечивая глобальную устойчивость неподвижной точки отображения  $T_{22}$ . Если указанная точка лежит ниже биссектрисы, что реализуется при больших  $S$ , то произведение отображений  $T_{32} T_{23}$  имеет неподвижную точку. Последнее означает либо потерю глобальной устойчивости неподвижной точки  $\tau_0 = \tau^*$  режима ИФД, либо увеличение длительности переходных процессов вследствие прохождения ИТД в окрестности неустойчивой неподвижной точки седлового типа [6].

## Список литературы

1. Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем // Труды седьмой Всероссийской научно-практической конференции. Ульяновск. Изд. УлГУ. 2011.
2. Левин В.А. Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989.
3. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Метод точечных отображений и исследование динамики синтезаторов частот. LAP LAMBER Academic Publishing, Gmbh 2014.
4. Горюнов В.И. К теории систем импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) // Изв. вузов. Приборостроение. 1974. № 10. С. 40-43.

5. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Моделирование процесса склейки фазовых траекторий в системе с комбинированным частотно-фазовым управлением // Известия института математики и информатики УдГУ. 2(46). 2015. С. 6-12.
6. Горюнов В.И., Ерусланов В.Н., Лобашов Н.И. // Техническая полоса захвата одноконтурного синтезатора частоты. Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. Вып. 2, 1990. С. 88-94.

## ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МЕМБРАНЕ

Архипова Н.И.

ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН,  
603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д.85,  
e-mail: [united-friends@bk.ru](mailto:united-friends@bk.ru)

В статье показано, что уточненные модели [1,2] могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примере двухслойной мембраны, совершающей поперечные колебания.

**Ключевые слова:** пластина, мембрана, уточненная модель, поперечные колебания, слоистая конструкция.

Рассмотрим случай, когда нарушается условие классической теории пластин: при рассмотрении задач поперечных колебаний пластин, необходимо учитывать влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига [3,4]. В этом случае так же учитывается натяжение пластины.

Тогда плотность потенциальной энергии деформации пластины при изгибе имеет вид:

$$W_{II} = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\lambda h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\aleph \mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \aleph \mu \cdot \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \aleph \mu \cdot \frac{h}{2} \left[ \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{N}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Здесь  $w$  – поперечные отклонения пластины,  $\aleph$  – коэффициент Тимошенко,  $\varphi, \psi$  – осредненные углы сдвига.

Плотность кинетической энергии пластины равна:

$$W_K = \frac{\rho h}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \quad (2)$$

Тогда изгибные колебания пластины [5] с натяжением представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left( 1 + \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left( 1 + \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

При решении задач динамики пластин в уточненной постановке удобно ввести в рассмотренные две потенциальные функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta \Theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Delta \chi, \quad \text{здесь } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4)$$

Тогда система уравнений (3) переписывается в виде:



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \Theta + \frac{12 \aleph E}{2\rho h^2 (1+\nu)} (\Theta - w) = 0 \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \chi + \frac{12 \aleph E}{2\rho h^2 (1+\nu)} \chi = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \Delta w + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \Theta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Из системы исключаем второе уравнение, тогда системы (5) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \Theta + \frac{12 \aleph E}{2\rho h^2 (1+\nu)} (\Theta - w) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( N + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right) \Delta w + \aleph \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \Theta = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Для перехода к уравнению изгибных колебаний пластины с натяжением, необходимо из второго уравнения системы (6) выразить  $\Delta \Theta$ , подставить в первое уравнение, предварительно умножив его на  $\Delta$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{12\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \frac{2N\rho(1+\nu)}{\aleph E} + 1 \right) \Delta \Delta w + \frac{2\rho^2(1+\nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \frac{12N\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} \Delta w - \\ & - \left[ \frac{2\rho(1+\nu)}{\aleph E} + \frac{2N\rho^2(1+\nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Далее рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двухслойной мембраны [6,7], которые описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + N_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{cases} \quad (8)$$

где  $u_{1,2}$  – поперечные отклонения мембран,  $\rho_{1,2}$  – погонные плотности,  $N_{1,2}$  – натяжения мембран,  $R$  – сила упругого взаимодействия мембран.

Система (8) может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного смещения  $u_1$ . Для этого достаточно выразить  $u_2$  из первого уравнения и подставить во второе. В результате получим уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{R} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (N_1 + N_2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{N_1 N_2}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \\ & - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где  $u = u_1(x, t)$ .

Заметим, что аналогичное уравнение получено при распространении теории Тимошенко для стержней на пластины. Таким образом, поперечные колебания двухслойно мембраны можно описать уравнением (7), параметры которого выражаются через параметры мембран следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{12\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} = \rho_1 + \rho_2; \\ \frac{2\rho^2(1+\nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} = \frac{\rho_1\rho_2}{R}; \\ \frac{12N\rho}{(\lambda + 2\mu)h^2} = N_1 + N_2; \\ \frac{2N\rho(1+\nu)}{\aleph E} + 1 = \frac{N_1N_2}{R}; \\ \frac{2\rho(1+\nu)}{\aleph E} + \frac{2N\rho^2(1+\nu)}{(\lambda + 2\mu)\aleph E} + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{N_1\rho_2 + N_2\rho_1}{R} \end{cases}$$

Перемещение  $u$  считаем изменяющимся по закону бегущей гармонической волны:  $u(x, y, t) = Ae^{i\theta} + A^*e^{-i\theta}$ , здесь  $\omega t - k_x x - k_y y = \theta$  - фаза волны.

Уравнение в частных производных (9) сведем к бигармоническому уравнению:  $\omega^4\rho_1\rho_2 - \omega^2(N_1\rho_2 + N_2\rho_1)(k_x^2 + k_y^2) + N_1N_2(k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2R(\rho_2 + \rho_1) + R(N_1 + N_2)(k_x^2 + k_y^2) = 0$ . Частота и волновые числа связаны соотношением:

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{(N_1\rho_2 + N_2\rho_1)(k_x^2 + k_y^2) + R(\rho_2 + \rho_1) \pm \sqrt{(N_1\rho_2 - N_2\rho_1)^2(k_x^2 + k_y^2)^2 + R^2(\rho_2 + \rho_1)^2 + 2R(k_x^2 + k_y^2)(N_1\rho_2 - N_2\rho_1)(\rho_2 - \rho_1)}}{\rho_1\rho_2}} \quad \text{Ка}$$

чественный вид дисперсионных зависимостей  $\omega(k_x, k_y)$  приведен на рис. 1.

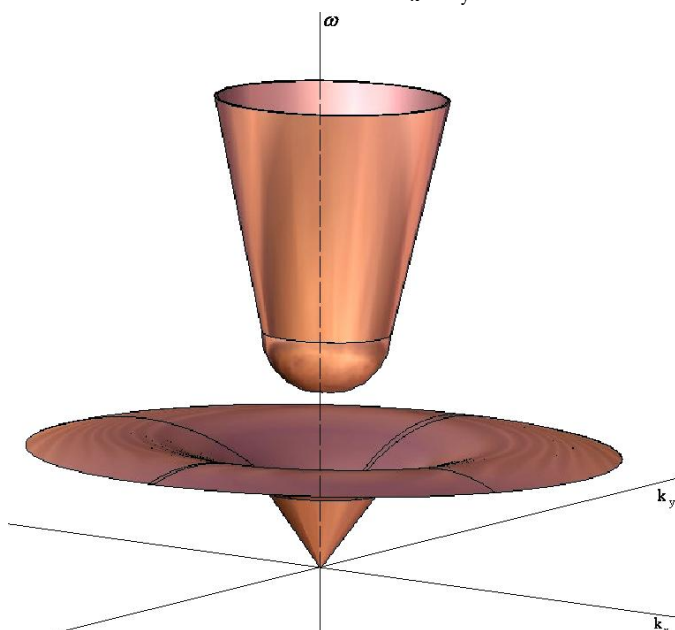


Рис. 1. Зависимость частоты волны от волновых чисел

Из рисунка 1 видно, что купол, выходящий из начала координат движется вперед по оси  $\omega$ , расплываясь в стороны по осям  $k_x, k_y$ . С ростом  $k_x, k_y$  парабола  $\omega(k_x, k_y)$  растёт до определенного предела, постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперед, приводя к крестообразной структуре.

В случае пересечения поверхности вращения плоскостью  $k_y$ , на дисперсионной плоскости  $(\omega, k_x)$ , где  $k_x$  - волновое число, существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и приближается к горизонтальной асимптоте

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{R(\rho_2 + \rho_1) + \sqrt{R^2(\rho_2 + \rho_1)^2 + 2R(k_x^2 + k_y^2)(T_1\rho_2 - T_2\rho_1)\rho_2 - \rho_1}}{\rho_1\rho_2}}. \text{ Вторая ветвь выходит из точки}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_1\rho_2}} \text{ и с увеличением частоты приближается к наклонной асимптоте } \omega = \pm k_x. \text{ Качественный вид дисперсионных зависимостей } \omega(k_x, k_y) \text{ приведен на рис.2.}$$

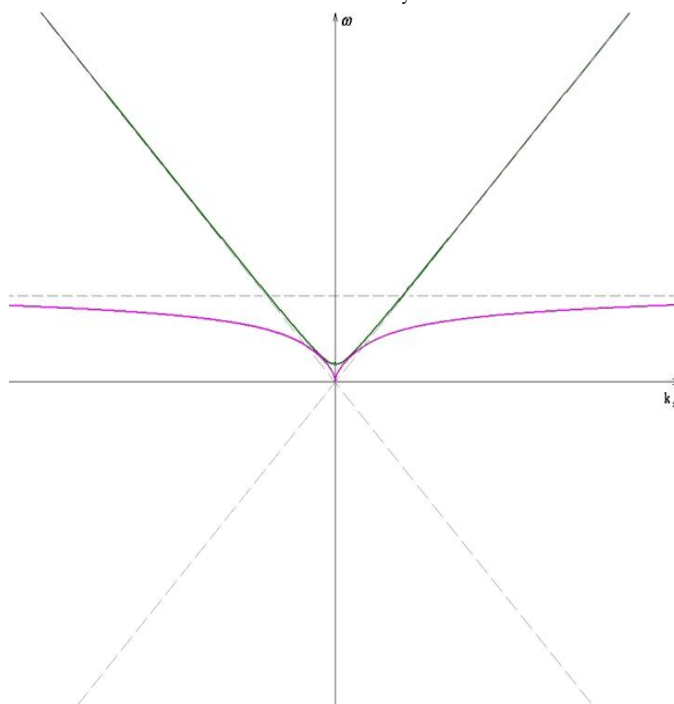


Рис. 2 Зависимость частоты от волнового числа при  $k_y=0$

Таким образом, показано, что распространение теории Тимошенко для стержней на пластины может быть применимо для описания динамических процессов в двухслойной мембране.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ (проекты №№ 16-38-00426 и № 16-08-00971-а).

#### Список литературы

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.:ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3-63.
4. Бердичевский В.А. К динамической теории тонких упругих пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 99-109.
5. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах/ Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) – М.: Машиностроение. Т1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. И доп./ Под ред. В.В.Болотина. 1999. 504с.
6. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
7. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Сандалов В.М. Поперечные волны в двумерной слоистой конструкции // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева, В.Н. Перевезенцева и С.И.Смирнова. - Нижний Новгород: Издательство общества „Интелсервис“, 2014, № 1 (23). С.95-100.

## ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МЕМБРАНЕ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Архипова Н.И.

ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН,  
603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д.85,  
e-mail: [united-friends@bk.ru](mailto:united-friends@bk.ru)

В статье показано, что уточненные модели [1,2] могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примере двухслойной мембраны, совершающей поперечные колебания.

**Ключевые слова:** мембрана, уточненная модель, поперечные колебания, солитоны, слоистая конструкция.

Рассмотрим поперечные колебания двухслойной мембраны с учетом геометрической нелинейности, которые описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) = N_1 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) = N_2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) может быть сведена к одному уравнению, которое в безразмерных величинах:

$$U = \frac{u}{u_0}; X = \frac{x}{\Lambda}; T = \frac{t\sqrt{D}}{\Lambda\sqrt{\rho_2\gamma}}; Y = \frac{y}{\Lambda}; \gamma = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{где } u_0 - \text{ перемещение, } \Lambda - \text{ длина волны, удовле-}$$

творяющие соотношению  $u_0/\Lambda = 10^{-4}$ ) и с учётом обозначения:  $D = N_1 + N_2$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\rho_1 D}{R\Lambda^2\gamma^2\rho_2} \frac{\partial^4 U}{\partial T^4} - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R\gamma\rho_2\Lambda^2} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial X^2\partial T^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial Y^2\partial T^2} \right) + \\ & + \frac{N_1 N_2}{R\Lambda^2 D} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2\partial Y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} \right) - \frac{u_0^2}{2\Lambda^2} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде функций  $\xi = X - cT$ ;  $\eta = \varepsilon X$ ;  $\chi = \sqrt{\varepsilon} Y$ , где  $c = \text{const}$  – скорость волны. Предположим, что слагаемые в уравнении (2) порядка  $\varepsilon$ . Пренебрегаем величинами, в которых степень  $\varepsilon$  выше 2. Это позволяет перейти от уравнения в частных производных к системе алгебраических уравнений, где  $U$  представим в виде  $U = U_0 + \varepsilon U_1$ :

$$\begin{cases} (c^2 - 1) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = 0 \Rightarrow c = 1 & (a) \\ (c^2 - 1) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial \chi^2} + \left[ \frac{\rho_1 D}{\varepsilon R \Lambda^2 \gamma^2 \rho_2} c^4 - \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{\varepsilon R \gamma \rho_2 \Lambda^2} c^2 + \frac{N_1 N_2}{\varepsilon R \Lambda^2 D} \right] \frac{\partial^4 U_0}{\partial \xi^4} - \\ - \frac{u_0^2}{2\Lambda^2 \varepsilon} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = 0 & (б) \end{cases} \quad (3)$$

После сведения системы (3) к одному уравнению и дифференцирования полученного уравнения по  $\xi$ , получим:

$$\frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial \chi^2 \partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^5 U_0}{\partial \xi^5} + \frac{u_0^2}{4\Lambda^2 \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} \right] = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \Gamma = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \frac{\rho_2 N_1 + \rho_1 N_2}{R\gamma\rho_2\Lambda^2} - \frac{\rho_1 D}{R\Lambda^2\gamma^2\rho_2} - \frac{N_1 N_2}{R\Lambda^2 D} \right]$$

Уравнение в частных производных (4) сводится к уравнению относительно продольной деформации  $\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = W$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial W}{\partial \eta} + GW^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2}, \quad (5)$$

$$\text{где } G = \frac{u_0^2}{12\Lambda^2 \varepsilon}$$

Таким образом, поперечные колебания двухслойной мембраны с учетом геометрической нелинейности можно описать модифицированным уравнением Кадомцева-Петвиашвили.

Решение уравнения (5) будем искать в виде функции

$\zeta = \xi - k\chi - v\eta$ , где  $k$  – параметр характеризующий диффузионное расплывание волнового пучка вдоль поперечной оси ;  $v$  – скорость волны.

Получаем уравнение:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ -v \frac{dW}{d\zeta} + GW^2 \frac{dW}{d\zeta} + \Gamma \frac{d^3 W}{d\zeta^3} \right] = -\frac{1}{2} k^2 \frac{d^2 W}{d\zeta^2} \quad (6)$$

Проинтегрируем уравнение (6) по  $d\zeta$ . Тогда:

$$-v \frac{dW}{d\zeta} + \frac{G}{3} \frac{d(W)^3}{d\zeta} + \Gamma \frac{d^3 W}{d\zeta^3} + \frac{1}{2} k^2 \frac{dW}{d\zeta} = 0 \quad (7)$$

И с помощью замены  $\frac{dW}{d\zeta} = U'$  и перепишем (7) в виде уравнения ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью, называемого уравнением Дуффинга:

$$\frac{d^2 U'}{d\zeta^2} + aU' + bU'^3 = 0 \quad (8)$$

$$\text{где } a = \frac{\left( \frac{1}{2} k^2 - v \right)}{\Gamma};$$

$$b = \frac{G}{3\Gamma}$$

Уравнение (8) имеет первый интеграл  $\frac{1}{2} \left( \frac{dU'}{d\zeta} \right)^2 = E - f(U')$ , который можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Здесь  $E$  – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы, а функция  $f(U') =$

$= \frac{a}{2} U'^2 + \frac{b}{4} U'^4$  имеет смысл потенциальной энергии.

Вид решения уравнения (8) зависит от коэффициентов  $a$  и  $b$ , и начальной энергии  $E$ . Знак коэффициентов  $a$  и  $b$  зависит от параметров  $k, v$ . Рассмотрим случаи изменения коэффициентов.

1. Если  $k^2 > 2v$ ,  $v > 0$ , тогда  $a > 0$ ,  $b > 0$ . В этом случае функция потенциальной энергии

$f(U') = \frac{a}{2} U'^2 + \frac{b}{4} U'^4$  имеет локальный минимум  $f_{\min} = 0$  при  $U' = 0$  (рис.1 а). На фазовой

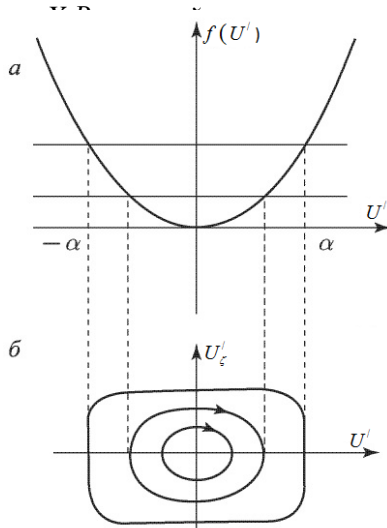


Рис.1

плоскости  $(U', dU'/d\zeta)$  точка с координатами  $(0,0)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр» (рис.1 б).

Ограниченные решения уравнения (8) существуют при  $0 < E < +\infty$ . Полином  $E - f(U')$  в этом случае имеет два действительных корня  $U'_{1,2} = \pm\alpha$  и два мнимых корня  $U'_{3,4} = \pm i\beta$ , где

$$\alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}; \quad \beta^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$$

и принимает положительные значения при  $-\alpha < U' < \alpha$  (рис.1 а)

В соответствии с [3] решение, описывающее нелинейные периодические колебания представляется в виде:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{cn}(\omega\zeta, s) \tag{9}$$

$$\text{где } A = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}}; \quad \omega = \sqrt[4]{a^2 + 4bE}; \quad s^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{2\sqrt{a^2 + 4bE}}; \quad T = \frac{4K(s)}{\omega}, \tag{10}$$

$A$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – аналог частоты,  $s$  – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебания  $u(\zeta)$ ,  $T$  – период колебаний,  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Из соотношений (10) видно, что при изменении  $E$  от 0 до  $+\infty$  амплитуда колебаний и частота изменяются в пределах  $0 \leq A < +\infty, \sqrt{a} \leq \omega < \infty$ , а коэффициент нелинейных искажений – в интервале:  $0 \leq s^2 < 1/2$ .

Исключая из выражений (10) константу интегрирования  $E$ , получаем зависимость амплитуды и частоты колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга:

$$A = \sqrt{\frac{2a}{b} \frac{s^2}{1-2s^2}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{a}{1-s^2}} \quad \left(0 \leq s^2 < \frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Подставим в выражение (11) значения коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$A = \sqrt{\frac{6\left(\frac{1}{2}k^2 - \nu\right)}{G} \frac{s^2}{1-2s^2}} = 6 \frac{\Lambda}{u_0} \sqrt{\frac{(k^2 - 2\nu)\varepsilon s^2}{1-2s^2}}; \tag{11 а}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k^2 - \nu}{\Gamma(1-s^2)}} = \frac{\Lambda\gamma}{\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2} \sqrt{\frac{(k^2 - 2\nu)R\rho_2 D\varepsilon}{1-s^2}}$$

$$0 \leq s^2 < \frac{1}{2}$$

Качественный вид зависимости амплитуды и частоты колебаний от скорости волны представлен на рисунках 2, 3 соответственно.

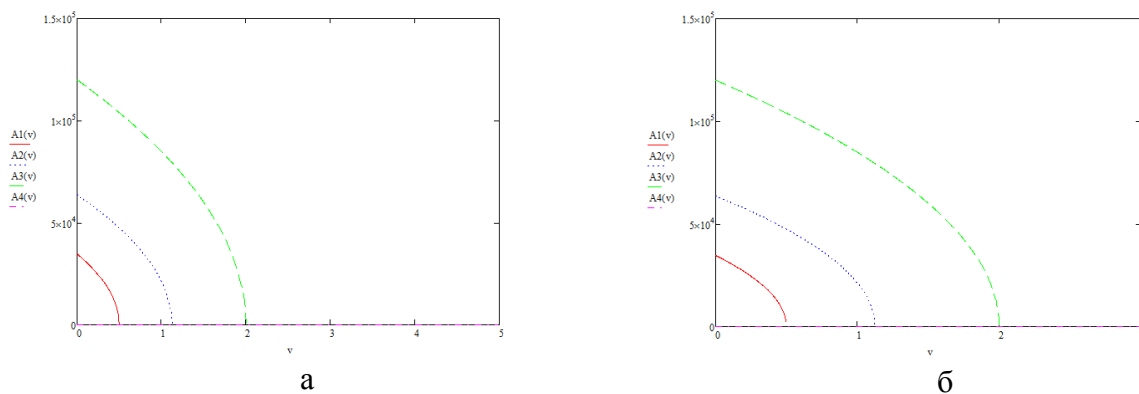


Рис.2 – Зависимость амплитуды колебаний от скорости волны. Графики построены при следующих значениях:  $k = \pm 1; \pm 1,5; \pm 2; \pm 1,7$ ;  $s^2 = \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 0$

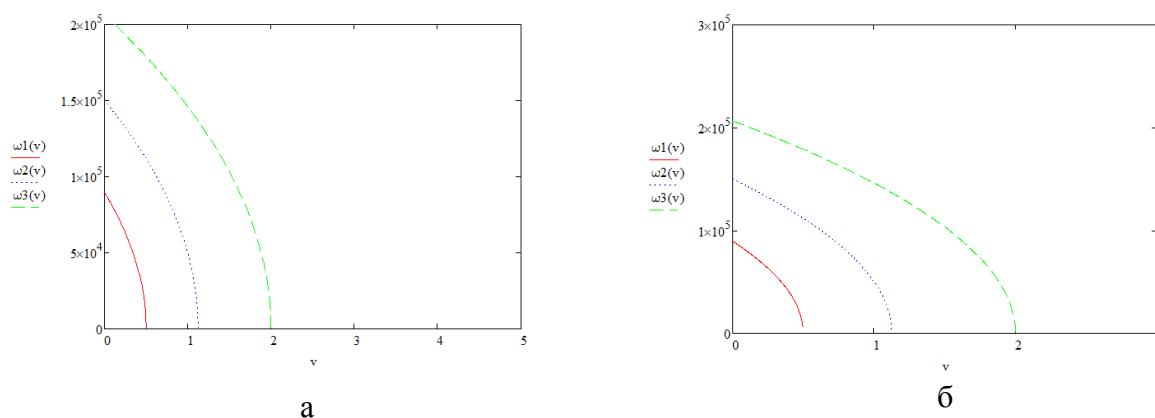


Рис.3 – Зависимость частоты колебаний от скорости волны. Графики построены при следующих значениях:  $k = \pm 1; \pm 1,5; \pm 2$ ;  $s^2 = 0; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}$

Зависимости амплитуды и частоты от параметра k представлены на рисунках 4, 5.

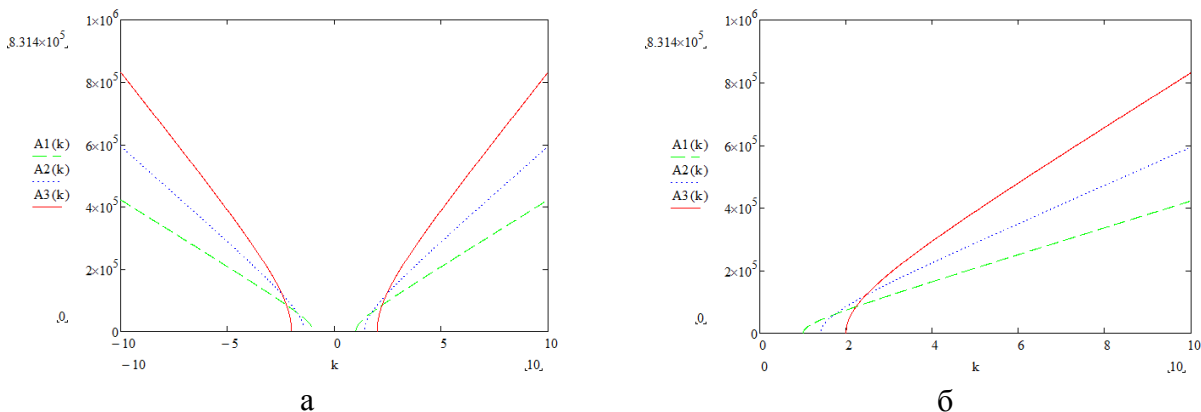


Рис. 4 – Зависимость амплитуды колебаний от параметра k. Графики построены при следующих значениях:  $v = \frac{1}{2}; 1; 2$ ;  $s^2 = \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}$

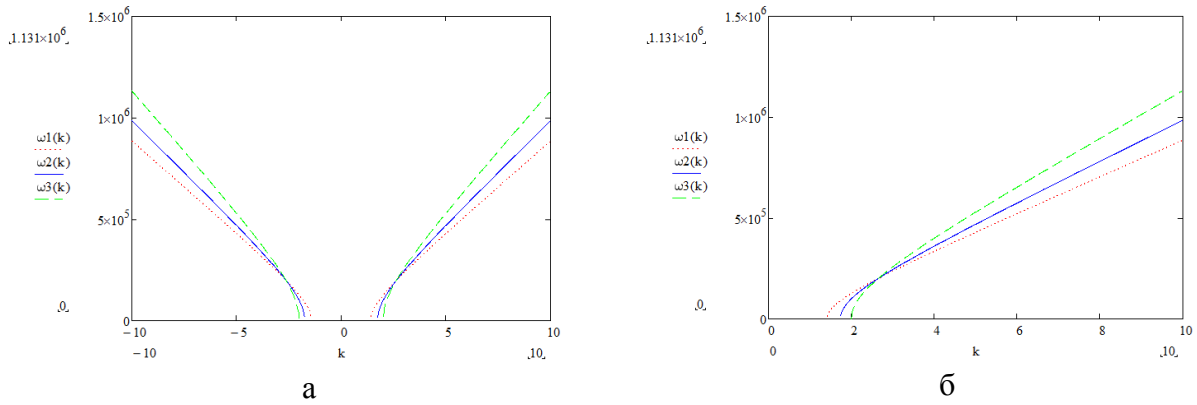


Рис.5 – Зависимость частоты колебаний от параметра k. Графики построены при следующих значениях:  $\nu = 1; 1,5; 2$ ;  $s^2 = 0; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}$

При  $E \rightarrow 0$  ( $s^2 \approx 0$  и  $A \rightarrow 0$ ) выражение (9) описывает квазигармонические колебания вблизи положения равновесия вида:

$$U' = A \cos(\omega \zeta) \tag{12}$$

При  $E \rightarrow +\infty, s^2 \rightarrow 1/2$ , и в этом случае (9) описывает существенно нелинейные колебания:

$$U' = A \operatorname{cn}(\omega \zeta, s) \tag{13}$$

которые имеют пилообразную форму (рис. 6)

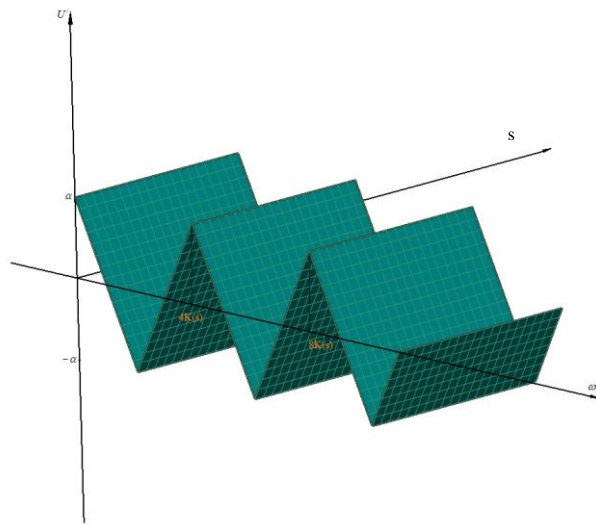


рис.6

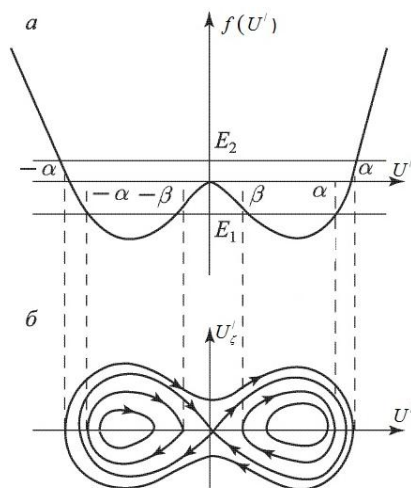


Рис.7

2. Если  $k^2=0, \nu>0$ , тогда  $a<0, b>0$ . Коэффициенты уравнения (8) переписутся в виде:  $a = -\frac{\nu}{\Gamma}; b = \frac{G}{3\Gamma}$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U') = \frac{a}{2}U'^2 + \frac{b}{4}U'^4$  имеет локальный максимум  $f_{\max} = 0$  при  $U' = 0$  и локальный минимум  $f_{\min} = -\frac{a^2}{4b}$  в точках  $U' = \pm\sqrt{-a/b}$  (рис. 7 а). На фазовой плоскости  $(U', dU'/d\zeta)$  точки  $(\pm\sqrt{-a/b}, 0)$  являются устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(0,0)$  является



«седлом» (рис. 7 б).

Ограниченные решения уравнения (8) существуют, если константа интегрирования изменяется в диапазоне  $f_{\min} \leq E < +\infty$ , причем различным значениям начальной энергии  $E$  соответствуют качественно различные режимы движения.

Пусть  $f_{\min} \leq E < 0$ . В этом случае полином  $E - f(U')$  имеет четыре действительных корня

$$U'_{1,2} = \pm\alpha, \quad U'_{3,4} = \pm\beta, \quad \text{где } \alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}; \quad \beta^2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4bE}}{b} \text{ и принимает положи-}$$

тельные значения при  $|\beta| \leq U' \leq |\alpha|$  (рис.7 а). На фазовой плоскости им соответствуют замкнутые траектории, лежащие внутри сепаратрисы.

В соответствии с [3] решение, описывающее нелинейные периодические колебания имеет вид:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{dn}(\alpha\zeta, s) \tag{14}$$

$$\text{Где } A = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + 4bE})}; \quad s^2 = \frac{2\sqrt{a^2 + 4bE}}{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}; \quad T = \frac{4K(s)}{\omega}. \tag{15}$$

Из соотношений (15) видно, что при изменении  $E$  от  $E_{\min} = -a^2/4b$  до 0 частота колебаний увеличивается от  $\omega = \sqrt{-a/2}$  до  $\omega = \sqrt{-a}$ , амплитуда периодических колебаний изменяется от значения  $A = \sqrt{-a/b}$  до значения  $A = \sqrt{-2a/b}$ . Коэффициент нелинейных искажений формы колебаний изменяется в пределах  $0 \leq s^2 \leq 1$ .

Исключая из выражений (15) константу интегрирования  $E$ , получим зависимость между амплитудой и частотой колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга.

$$A = \sqrt{-\frac{2a}{b} \frac{1}{2-s^2}}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{a}{2-s^2}} \quad (0 \leq s^2 \leq 1). \tag{16}$$

Подставим в выражение (16) значения коэффициентов  $a$  и  $b$  :

$$A = \sqrt{\frac{6\nu}{G} \frac{1}{2-s^2}} = 6 \frac{\Lambda}{u_0} \sqrt{\frac{2\nu\varepsilon}{2-s^2}}, \tag{16 а}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\nu}{\Gamma(2-s^2)}} = \frac{\Lambda\gamma}{\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2} \sqrt{\frac{2\varepsilon\nu R\rho_2 D}{(2-s^2)}}$$

$$0 \leq s^2 \leq 1$$

Зависимости амплитуды колебаний и частоты от скорости представлены на рис. 8, 9. Графики построены при следующих значениях:  $s^2 = 0; \frac{1}{2}; 1$

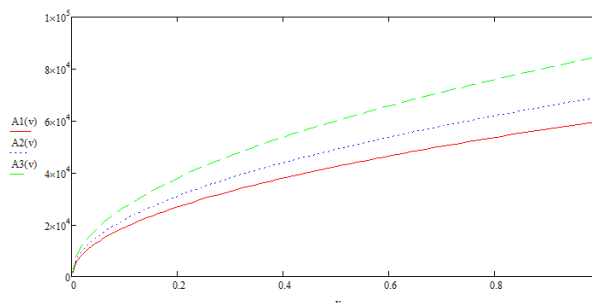


Рис.8 – Зависимость амплитуды колебаний от скорости волны.

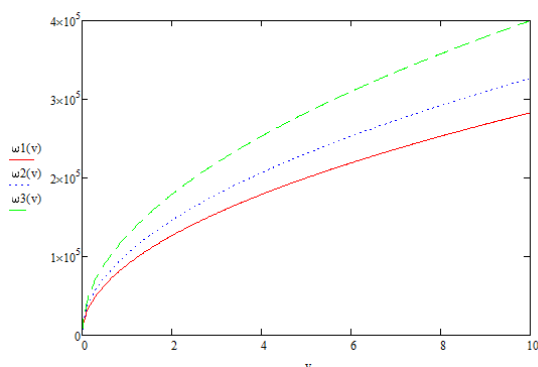


Рис.9 – Зависимость частоты колебаний от скорости волны.

Нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям внутри сепаратрисы не имеют линейного вырождения, так как при  $E \rightarrow E_{\min} = -a^2/4b$   $s \rightarrow 0$  и  $dn(\alpha\zeta, 0) = 1$ .

При  $E = 0$   $s = 1$  из (14) получаем вырождение в сепаратрисное решение

$$U'(\zeta) = \frac{A}{ch(\zeta/\Delta)}, \quad (17)$$

$$\text{где } A = \sqrt{-\frac{2a}{b}}, \Delta = \sqrt{-\frac{1}{a}} \quad (18)$$

Подставим в выражение (18) значения коэффициентов а и b :

$$A = \sqrt{\frac{6\nu}{G}} = 6 \frac{\Lambda}{u_0} \sqrt{2\nu\varepsilon}, \quad (18 \text{ a})$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\Gamma}{\nu}} = \frac{\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2}{\Lambda \gamma} \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon \nu R \rho_2 D}}$$

$A$  – амплитуда колебания,  $\Delta$  – его длительность.

На рисунках 10, 11 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

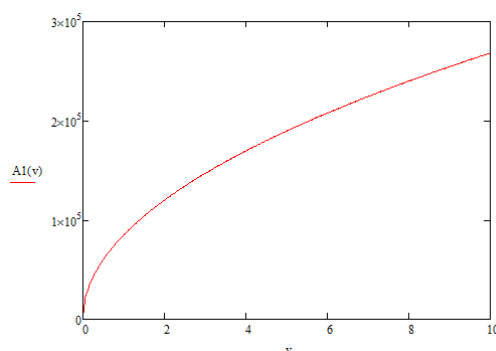


Рис.10 – Зависимость амплитуды солитона от его скорости.

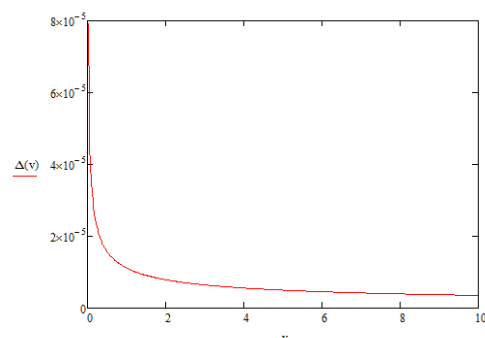


Рис.11 – Зависимость ширины солитона от его скорости.

Качественный вид нелинейных периодических движений, описываемых дельта-амплитудой (14) приведен на рисунке 12, а на рисунке 13 показан вид сепаратрисного решения (17).

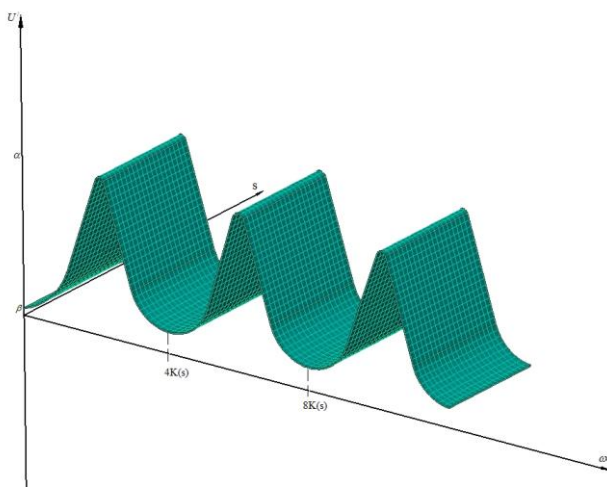


Рис. 12

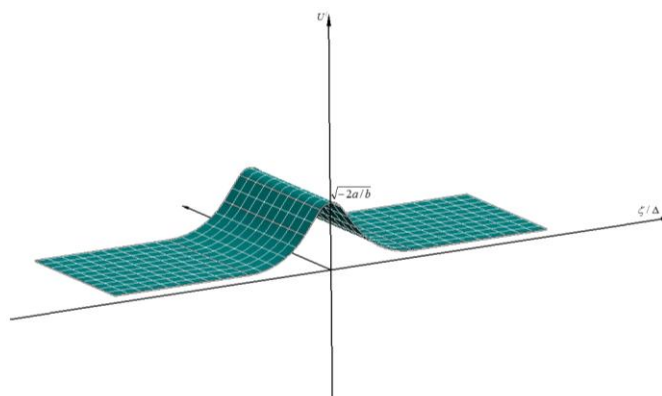


Рис. 13

Пусть  $E=0$ . В этом случае полином  $E - f(U')$  имеет два действительных корня  $U'_{1,2} = \pm\alpha$ , и два мнимых  $U'_{3,4} = \pm i\beta$ , где  $\alpha^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$ ;  $\beta^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}$  и принимает положительные значения при  $-\alpha < U' < \alpha$  (рис. 7 а). на фазовой плоскости ограниченными решениями при таких значениях  $E$  соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие вне петли сепаратрисы (рис. 7 б). Решение, описывающее нелинейные периодические колебания представлено в виде:

$$U'(\zeta) = A \operatorname{cn}(\alpha\zeta, s) \quad (19)$$

$$\text{Где } A = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{b}}; \omega = \sqrt[4]{a^2 + 4bE}; s^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bE}}{2\sqrt{a^2 + 4bE}}; T = \frac{4K(s)}{\omega}. \quad (20)$$

Анализируя соотношения (20), получим, что при изменении  $E$  от 0 до  $+\infty$  частота колебаний возрастает от значения  $\omega = \sqrt{-a}$  до  $+\infty$ , амплитуда колебаний также неограниченно возрастает от значения  $A = \sqrt{-2a/b}$ , а коэффициент нелинейных искажений при этом уменьшается от 1 до 1/2.

Исключая из (20) константу  $E$ , получим зависимости:

$$A = \sqrt{-\frac{2a}{b} \frac{s^2}{2s^2 - 1}}, \omega = \sqrt{-\frac{a}{2s^2 - 1}} \left(1 \geq s^2 > \frac{1}{2}\right). \quad (21)$$

Подставим в выражение (21) значения коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$A = \sqrt{-\frac{2a}{b} \frac{s^2}{2s^2-1}} = \sqrt{\frac{6v}{G} \frac{s^2}{2s^2-1}} = 6 \frac{\Lambda}{u_0} \sqrt{\frac{2v\epsilon s^2}{2s^2-1}},$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{a}{2s^2-1}} = \sqrt{\frac{v}{\Gamma(2s^2-1)}} = \frac{\Lambda\gamma}{\rho_2 N_1 - \rho_1 N_2} \sqrt{\frac{2v\epsilon R \rho_2 D}{2s^2-1}}$$

$$\left(1 \geq s^2 > \frac{1}{2}\right)$$
(21 a)

На рисунках 14, 15 приведены зависимости амплитуды и частоты колебаний от скорости волны. Графики построены при следующих значениях:  $s^2 = 0,6; 0,75; 1$

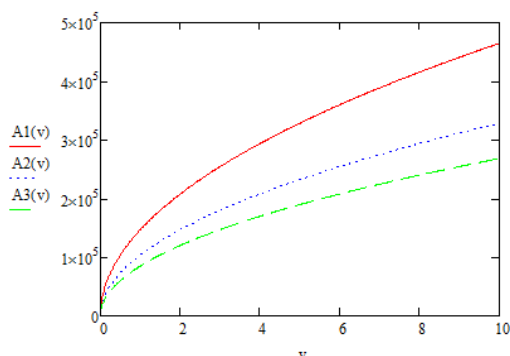


Рис. 14 – Зависимость амплитуды колебаний от скорости волны.

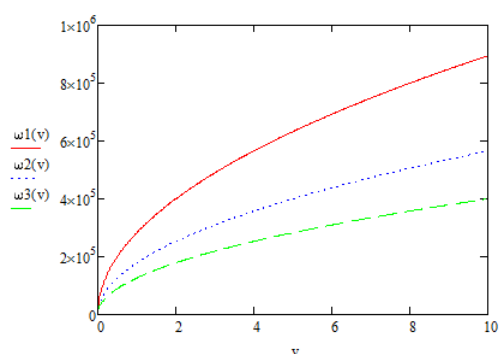


Рис. 15 – Зависимость частоты колебаний от скорости волны.

Решение (19) описывает нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения. Их форма при  $s^2$ , близких к единице, показана на рисунке 16.

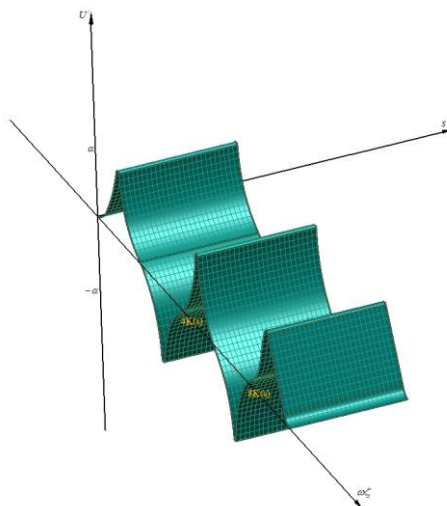


Рис. 16

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ (проекты №№ 16-38-00426 и № 16-08-00971-а).

### **Список литературы**

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.:ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. 3. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1. Москва, 17-19 декабря 2013г. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. С. 6-19.

## О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЫСОТНЫХ СООРУЖЕНИЙ НЕСУЩИХ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ МАССЫ И РЕЗЕРВУАРЫ С ЖИДКОСТЬЮ

А.Х.Ахмедов

Ташкентский государственный технический университет им. А.Р.Беруний,  
механико-машиностроительный факультет  
100095 Ташкент, ул. Университетская, 2, e-mail: [azam0602@mail.ru](mailto:azam0602@mail.ru)

В статье представлены новые результаты исследований по нелинейным колебаниям высотных сооружений, несущих сосредоточенными массы и цилиндрические резервуары, частично заполненные жидкостью. Получены частотные уравнения конструкции, где учитываются волновые движения частиц жидкости в резервуаре и сложные граничные условия в местах закрепления с деформируемым грунтовым основанием.

**Ключевые слова:** колебания, волновые движения, частота, упругость, гидроупругость.

Задачи колебаний высотных сооружений, взаимодействующих в основаниях с грунтовыми средами и одновременно несущими цилиндрические резервуары, частично заполненные жидкостью, являются одним из актуальных задач гидроупругости, где требуется анализ связанной задачи динамики упругой конструкции и волновых движений жидкости в резервуарах. По этим проблемам получены результаты в работах [1-2].

Данная работа является продолжением работ [1-3], в которой предложена схема построения аналитических решений колебаний стойки, несущей на свободном конце частично заполненный резервуар. Здесь используются обозначения из работы [3], учитывающие взаимодействие грунта и сооружения в местах контакта.

Имеем следующее уравнение для определения изгиба оси стойки:

$$U^{(IV)}(z,t) + c^2 \ddot{U}(z,t) = 0, \quad (1)$$

где  $c^2 = \frac{\rho_2 A}{EJ}$ .

Граничные условия для уравнения (1) примем в следующем виде:

$$z=0: \quad \begin{cases} EIU''(z,t) = K_\phi U'(z,t) \\ EIU'''(z,t) = -K_z U(z,t) \end{cases}, \quad (2)$$

$$z=l: \quad \begin{cases} EIU''' = (m_p + m_{жс})\ddot{U} + \frac{2m_{жс}}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} a\ddot{f}_n(t)\varepsilon_n \xi_n th(\xi_n h_0) \\ EIU'' = -m_p \frac{H}{2} \ddot{U} - \frac{m_{жс} h}{2} \ddot{U} (1 + \frac{1}{2h_0}) + \frac{2h}{h_0^2} m_{жс} \sum_{n=1}^{\infty} a\ddot{f}_n(t)\varepsilon_n d_{n0} \end{cases}, \quad (3)$$

здесь  $a\ddot{f}_n(t)$  определяются из уравнений:

$$\ddot{f}_n(t) + \varpi_n^2 f_n(t) = -\frac{1}{a} \ddot{U}(l,t), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где  $\varpi_n^2 = \xi_n \frac{g}{a} th(\xi_n h_0)$  - собственные частоты колебания жидкости при волновом движении вокруг оси цилиндра.

Представляется необходимым найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3) при выполнении условия (4) и произвольно заданных начальных условий.

При этом необходимо отметить, что учет постоянства давлений на свободной движущейся поверхности жидкости в резервуаре приводит к уравнениям (4).

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$U(z, t) = Z(kz) \cos \omega t, \quad (5)$$

здесь  $Z(kz) = AS(kz) + BT(kz) + CL(kz) + DV(kz)$ , где  $S, T, L, V$  - функции Крылова.

Для того, чтобы система уравнений имело единственное решение необходимым является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов перед неизвестными величинами. В этом случае получится сложное трансцендентное частотное уравнение относительно  $\gamma = kl$ . В этом случае из корней уравнения  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1..n}$ ) однозначно определяются частоты  $\omega_i$  ( $i = \overline{1..n}$ ), которые соответствуют  $\omega_i = \frac{EI}{\rho_2 A l^4} \gamma_i^4$  ( $i = \overline{1..n}$ ). Из выражения

$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$  ( $i = \overline{1..n}$ ) определяются периоды колебаний для соответствующих частот.

После некоторых преобразований и вычисления для рассматриваемого случая имеем следующие частотные уравнения для сложных механических систем:

$$\begin{aligned} & 1 + ch\gamma \cos \gamma + \frac{EI}{K_z l^3} \gamma^3 [ch^2 \gamma - \cos^2 \gamma + \sin \gamma (\cos \gamma - ch\gamma)] - \frac{\alpha(\gamma)}{l} \gamma^2 sh\gamma \sin \gamma - \\ & - \frac{2EI}{K_\phi l} \gamma^2 \beta(\gamma) sh\gamma \sin \gamma - (ch\gamma \sin \gamma - sh\gamma \cos \gamma) \left[ \gamma \beta(\gamma) + \frac{EI}{lK_\phi} - \frac{EI}{lK_\phi} \frac{EI}{K_z l^3} \gamma^5 \beta(\gamma) \right] - \\ & - \frac{EI}{lK_\phi} \gamma^3 \frac{\alpha(\gamma)}{l} (ch\gamma \sin \gamma + sh\gamma \cos \gamma) - \frac{EI}{2K_z l^3} \gamma^4 \beta(\gamma) (ch\gamma + \cos \gamma)^2 + \frac{EI}{K_z l^3} \frac{EI}{lK_\phi} \gamma^4 \cdot \\ & \cdot (1 - ch\gamma \cos \gamma) + \frac{EI}{2lK_\phi} \gamma^4 (ch\gamma - \cos \gamma)^2 - \frac{1}{2} \gamma^6 \frac{EI}{K_z l^3} \frac{\alpha(\gamma)}{l} (ch^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma^6 \frac{EI}{K_z l^3} \frac{EI}{lK_\phi} \frac{\alpha(\gamma)}{l} (sh\gamma + \sin \gamma)^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Если основание стойки жёстко заземлено и поворотные движения резервуара с жидкостью пренебрежимо малы, то из (6) имеем следующее частотное уравнение:

$$\gamma \beta(\gamma) = \frac{1 + ch\gamma \cos \gamma}{ch\gamma \sin \gamma - sh\gamma \cos \gamma}, \quad (7)$$

где 
$$\beta(\gamma) \cdot m_{cm} = m_{\text{эс}} \left[ \frac{m_p + m_{\text{эс}}}{m_{\text{эс}}} + \frac{1}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta c_n}{\xi_n - \delta \cdot ch(\xi_n h_0)} \right], \quad \delta = \frac{a}{g} \frac{\gamma^4}{l^4} \frac{EJl}{m_{cm}}.$$

Пусть основание стойки жёстко заделано и есть поворотные движения резервуара с жидкостью. Тогда из (6) имеем следующее частотное уравнение:

$$1 + ch\gamma \cos \gamma - \gamma\beta(\gamma)(ch\gamma \sin \gamma - sh\gamma \cos \gamma) - \gamma^2 \varepsilon(\gamma)sh\gamma \sin \gamma = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } \varepsilon(\gamma) = \frac{1}{l} \left[ \frac{h}{\rho_2 A l} \left( m_{жс} \left( 1 + \frac{1}{2h_0^2} \right) + \frac{Hm_p}{2h} - \frac{2m_{жс}}{h_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n d_{n0}}{\omega_n^2 \frac{\rho_2 A}{EI} (l/\gamma)^4 - 1} \right) \right], \quad c_n = \frac{2}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)}.$$

В конкретном случае ( $\beta(\gamma)$  и  $\varepsilon(\gamma)$  переменны) найдём корни частотного уравнения (6).

Например, если  $H = 5\text{ м}$ ,  $h = 4\text{ м}$ ,  $a = 2\text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $I = \frac{4}{3} \text{ м}^4$ ,  $l = 20\text{ м}$ ,  $\frac{m_p}{m_{жс}} = 0.1$ ,  $\frac{m_{жс}}{m_{см}} = 0.1$ ,

тогда корни уравнения (6) будут иметь вид:

$$\gamma_1 = 1.7165, \quad \gamma_2 = 4.3026, \quad \gamma_3 = 7.2494, \quad \gamma_4 = 10.2251, \quad \gamma_5 = 13.2406, \quad \gamma_6 = 16.2857, \\ \gamma_7 = 19.3525, \quad \gamma_8 = 22.4351.$$

Определяя частные решения соответствующей каждой частоте, используя метод суперпозиции, при учете выражения (5), можно получить общее решение свободных поперечных колебаний сооружений несущих сосредоточенные массы и резервуары с жидкостью:

$$U(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(k_i z) \cos \omega_i t. \quad (9)$$

Таким образом, в данной работе в отличие от других исследований впервые учитываются волновые движения частиц жидкости в резервуаре. Кроме того, в местах закрепления высотных сооружений с грунтовыми средами в основаниях рассматриваются сложные граничные условия.

Рассматриваемая теоретическая задача имеет прикладной характер. В предприятиях нефтяной промышленности и по переработке химических жидкостей широко используются сложные резервуарные технические системы. Представляет интерес проведения теоретических исследований по изучению свободных колебаний высотных сооружений с резервуарами, заполненными жидкостью.

При помощи полученных научных результатов представляется возможным широкое использование их при дальнейшем проведении теоретических исследований, а также решит некоторые задачи прикладного характера.

#### Список литературы

1. Гольденблат И.Н., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. – Москва: 1961, с.9-146.
2. Маматкулов Ш. Колебания и волны в гидроупругих и грунтовых средах. – Ташкент: Фан, 1987, 104с.
3. Маматкулов Ш., Ахмедов А.Х. Разработка и реализация математических моделей вынужденных изгибных колебаний при сложных граничных условиях. Материалы XXII Международной научно - технической конференции. г. Севастополь (Россия), 15-19 сентября 2014 г.



## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ В ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ**

**Д.В. Баландин, И.В. Котельников, Л.Г. Теклина**

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: tekлина2010@yandex.ru

В докладе рассматриваются возможности и особенности применения методов распознавания образов к задаче гашения колебаний высотных зданий. Новый статистический подход к синтезу грубых робастных систем управления с заданными свойствами основан на постановке задачи синтеза в качестве проблемы распознавания образов.

*Ключевые слова:* гашение колебаний, системы управления с заданными свойствами, распознавание образов

### **Введение**

Проблема снижения колебаний конструкций и механизмов стоит достаточно давно и все более усложняется при переходе к большим скоростям, частотам и нагрузкам. К настоящему времени предложено значительное число технических решений, направленных на снижение вибраций, тем не менее, задача синтеза систем, обеспечивающих эффективную виброзащиту и обладающих ограниченными габаритами, остается актуальной до сих пор. Существует два принципиально различных способа виброзащиты: виброизоляция и динамическое гашение колебаний. В первом случае защищаемый объект изолируется от виброактивного источника посредством специальных устройств, называемых изоляторами. Во втором случае к виброактивному источнику прикладываются дополнительные силовые воздействия с целью уменьшения амплитуды его колебаний. Большинство известных систем гашения колебаний конструкций и механизмов организовано по принципу обратной связи, а именно: с учетом измеренных характеристик колебательного движения конструкции управляющее устройство формирует дополнительные силовые воздействия на конструкцию, снижающие в конечном счете уровень ее колебаний. Существуют пассивные средства виброзащиты и активные, которые функционируют за счет дополнительных источников энергии. Активные системы имеют гораздо больше возможностей по защите конструкций от вредных динамических воздействий. В настоящее время усилия ученых направлены на создание систем активного гашения колебаний и систем комбинированного типа, на что указывает увеличивающееся число публикаций специалистов зарубежных стран. Российский опыт создания систем активного или комбинированного гашения колебаний высотных сооружений отсутствует. Обзор современных методов и устройств активной и пассивной виброизоляции приведен в [1]. Обзор алгоритмов управления активными системами гашения колебаний высотных сооружений дан в работе [2]. Данный доклад посвящен вопросам активной виброзащиты зданий и сооружений от динамических нагрузок.

### **1 Математическая модель многоэтажного здания со встроенной системой активного управления**

Известен класс математических моделей, позволяющих формулировать и исследовать задачи активного гашения колебаний строительных объектов. Наиболее популярной, удобной для исследования и вполне адекватной реальным физическим процессам является математическая модель, представляемая системой линейных дифференциальных уравнений вида (см., например, [3]):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{\mathbf{x}}_0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}$  - координаты материальных тел, составляющих конструкцию,  $\mathbf{u}$  – управляющая сила, формируемая по принципу обратной связи на основе текущих измерений переменных (коор-

динат и скоростей материальных тел), характеризующих динамику системы,  $\ddot{\mathbf{x}}_0$  – ускорение относительно инерциальной системы отсчета фундамента здания, порождаемое сейсмическим воздействием. Матрицы  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  определяют инерционные, демпфирующие и жесткостные параметры строительной конструкции:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -c_n & c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -k_n & k_n \end{pmatrix},$$

$\mathbf{M} = \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ , матрица-столбец  $\mathbf{G}$  позволяет учесть расположение управляющего органа (системы активной виброзащиты) в здании, а матрица-столбец  $\mathbf{L}$  отвечает за влияние внешнего возмущения  $\ddot{\mathbf{x}}_0$ , величина которого заранее неизвестна,  $\mathbf{L} = (1, \dots, 1)^T$ . Управляющая сила  $\mathbf{u}$  формируется по принципу обратной связи на основе текущих измерений.

Итак, основным математическим объектом является система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая динамику механической системы. Цель управления этим объектом состоит в синтезе обратной связи (либо по измеряемому состоянию, либо по измеряемому выходу), обеспечивающей выполнение ряда ограничений как на траектории системы, так и на управляющую функцию. Классическая постановка задачи – оптимизация некоторого заданного функционала, характеризующего качество переходного процесса в системе. В зависимости от выбора вида функционала и от исходной информации относительно возмущений возможны различные постановки задачи гашения колебаний. Наиболее популярными среди них являются:

- задача линейно-квадратичного управления (LQR-управление);
- линейно-квадратичное гауссовское управление (LQG-управление);
- $H_\infty$  - управление и  $H_2 / H_\infty$  - управление.

Основные методы решения таких оптимизационных задач – методы выпуклой оптимизации и техника линейных матричных неравенств. Главные трудности связаны с решением многокритериальных задач, тем более, что часто такие задачи не являются экстремальными.

Мы предлагаем иной, полностью экспериментальный подход, основанный исключительно на численном исследовании математической модели, описывающей синтезируемую систему управления. С помощью этого подхода решаются задачи параметрического синтеза многомерных систем управления с заданными свойствами, которые не являются экстремальными и отличаются нестандартной постановкой проблемы. К тому же этот подход позволяет учитывать как неопределенности в задании описания объекта управления, так и возможности вариации параметров регуляторов, т.е. рассматриваются робастные (асимптотически устойчивые при всех допустимых значениях параметров в описании объекта управления) и нехрупкие, или грубые (асимптотически устойчивые при всех допустимых значениях параметров самих регуляторов) системы управления.

## 2 Синтез систем управления с заданными свойствами методами распознавания образов

Новая методика параметрического синтеза систем управления с заданными свойствами создана на базе постановки задачи синтеза в качестве проблемы распознавания образов [4,5]. Решение задачи методами распознавания – это статистическое решение, основанное на построении и анализе статистической выборки, состоящей из объектов, представляющих собой некую пробную реализацию системы управления, а именно: произвольному набору параметров, описывающих синтезируемую систему управления, отвечает набор соответствующих величин, характеризующих качество системы управления. Например, при исследовании ус-

тойчивости системы (распознаваемый образ – устойчивые системы) каждому набору параметров ставится в соответствие вывод об устойчивости системы: либо «система устойчива», либо «система неустойчива». На основе такой обучающей выборки строится решающее правило, которое позволяет выделить и описать область параметров, при которых система управления отвечает предъявляемым к ней требованиям. Решение задачи распознавания всегда основано на некоторой эвристике (даже если для построения решающих правил используется строгая теория статистических решений) в силу того, что закономерности генеральной совокупности определяются по конечной выборке и в дополнение к обучающей выборке для получения единственного решения вводятся дополнительные условия и гипотезы. Поэтому полученное решение проверяется на независимой контрольной выборке с оценкой степени его статистической достоверности в виде  $P = \frac{N}{N_0}$ , где  $N_0$  - число точек в контрольной вы-

борке, а  $N$  - число правильных ответов о принадлежности точки к распознаваемому образу.

Отличительными особенностями нового подхода к решению задачи синтеза методами распознавания являются:

- замена классических методов исследования достоверным математическим экспериментом на базе математической модели синтезируемой системы управления с последующей обработкой результатов экспериментов методами интеллектуального анализа данных;
- поиск области значений параметров, удовлетворяющих целевой функции управления;
- результаты решения имеют статистический характер с оценкой степени их статистической достоверности.

Преимущество такого решения – применение методов, работающих в пространствах большой размерности и позволяющих найти нужную область искомых параметров с заданной степенью статистической достоверности.

**2.1 Постановка задачи.** Рассматриваются объекты управления вида

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{B}(p)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(p)\xi(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (2)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $\mathbf{A}(p)$ ,  $\mathbf{B}(p)$ ,  $\mathbf{F}(p)$  - матричные полиномы размерностей  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $n \times l$  со-

ответственно,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\xi(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbf{R}^l$  - многомерные переменные объекта, управления и внешнего возмущения, причем  $\xi(\boldsymbol{\theta}, t) = \text{col}(\xi_1(\boldsymbol{\theta}_1, t), \dots, \xi_l(\boldsymbol{\theta}_l, t))$ ,  $\xi_i(\boldsymbol{\theta}_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, l$ , - внешние возмущения с частично известной информацией о виде функций  $\xi_i(\boldsymbol{\theta}_i, t)$  с неизвестными параметрами  $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{is_i})$ ,  $\sum_{i=1}^l s_i = s$ . Область изменения параметров  $\boldsymbol{\theta}$  может быть задана или должна быть определена.

В условиях неопределенности описания объекта управления - элементов матрицы  $\mathbf{A}(p)$  - ставится задача построения управляющей функции в форме обратной связи

$$\mathbf{C}(p)\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}(p)\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

где  $\mathbf{C}(p)$ ,  $\mathbf{D}(p)$  - матричные полиномы размерностей  $m \times m$  и  $m \times n$ .

Синтез робастной системы управления сводится к отысканию неизвестных коэффициентов полиномов в матрицах  $\mathbf{C}(p)$ ,  $\mathbf{D}(p)$  и к решению задачи идентификации объекта управления путем поиска неизвестных параметров в его описании, а при необходимости и к поиску ограничений, накладываемых на внешние возмущения, точнее: областей возможного изменения параметров  $\boldsymbol{\theta}$ , так чтобы система управления отвечала всем предъявляемым к ней требованиям при изменении внешних возмущений в заданных или определяемых пределах. Такие требования могут включать в себя характеристики установившегося режима, переходного процесса, функции управления. Начальные условия считаются заданными. Решение этой задачи не единственно. Ставится задача отыскания и описания не всех возможных значений неизвестных параметров, а хотя бы некоторого их подмножества достаточно простой

конфигурации, но определяемого с заданной высокой степенью статистической достоверности и отвечающего условию достаточности меры робастной устойчивости по определяемым параметрам.

**2.2 Синтез системы управления как задача распознавания.** Для постановки задачи в виде проблемы распознавания образов в качестве пространства признаков выбираем пространство неизвестных параметров  $\Omega$ , представляющих собой коэффициенты полиномов, образующих матрицы  $A(p)$ ,  $C(p)$  и  $D(p)$ . За распознаваемый образ принимается область  $\Omega^*$  в пространстве признаков. Очевидно,  $\Omega^* \subseteq \Omega_0 \subset \Omega$ , где  $\Omega_0$  - область устойчивости синтезируемой системы. При синтезе системы управления в условиях действия внешних возмущений на выбор параметров управляющей функции влияют и действующие возмущения  $\xi(\theta, t)$  (значения параметров  $\theta$ ). В соответствующем  $s$ - мерном пространстве  $\Theta$  параметров, описывающих внешние возмущения, может быть задана или должна быть определена допустимая область их изменения  $\Theta^* \subset \Theta$ . Дополнительно задаются определенные требования к функционированию синтезируемой системы в виде  $r$  неравенств, характеризующих некоторое множество  $Y^*$  в  $r$ - мерном пространстве «характеристик» системы управления  $Y$ .

Решение задачи распознавания в пространстве  $\Omega$  - построение в этом пространстве локального решающего правила достаточно простого вида (набор параллелепипедов, сфер, эллипсоидов и т.п.), описывающих искомую область параметров  $\tilde{\Omega}^* \subseteq \Omega^*$ , при условии минимизации числа ошибок второго рода для распознаваемого образа и максимизации меры робастной устойчивости для множества параметров  $\tilde{\Omega}^*$ . С целью ускорения и упрощения процесса решения ищется решение не оптимальное, но удовлетворяющее требуемой надежности распознавания  $P_0$  и необходимой мере робастной устойчивости по определяемым параметрам.

Для построения решающего правила формируется обучающая выборка (множество векторов  $\omega$  с информацией о принадлежности их к  $\Omega^*$ ) с использованием решающего правила в пространстве  $Y$ :

$$\omega \in \Omega^*, \quad \text{если} \quad \forall \theta \in \Theta^* \quad \Gamma(x_0, \omega, \theta) \in Y^*,$$

где  $y = \Gamma(x_0, \omega, \theta)$  - характеристики решения системы (2), (3) при задании векторов  $\omega$  и  $\theta$  и начальных условий  $x_0$  в фазовом пространстве. Это решающее правило выполняет роль учителя. Все обучающие выборки формируются в процессе решения задачи, т.е. решается задача распознавания с активным экспериментом. Для формирования таких выборок решается задача планирования эксперимента с целью получения представительных обучающих выборок. В задаче планирования эксперимента удобнее использовать решающую функцию вида

$$H(\omega) = \max_{\theta \in \Theta^*} \rho(\Gamma(x_0, \omega, \theta), Y^*),$$

где  $\rho(\omega, \theta)$  - функция, представляющая собой расстояние в пространстве  $Y$  от точки  $y = \Gamma(x_0, \omega, \theta)$  (технические характеристики объекта) до множества  $Y^*$ . Эта функция, в отличие от решающего правила, не только указывает на принадлежность точки  $\omega$  к распознаваемому образу ( $H(\omega) = 0$  для  $\omega \in \Omega^*$ ), но и может служить мерой близости  $\Omega^*$  при  $H(\omega) \neq 0$ .

Синтез системы управления в заданном пространстве признаков  $\Omega$  складывается из последовательного поиска областей  $\tilde{\Omega}_0$  и  $\tilde{\Omega}^*$ , причем если область  $\Omega_0$  определяется системой управления и не зависит от величины и вида внешнего возмущения, то область  $\Omega^*$  зависит и



покрытия могут потребоваться как несколько синдромов (параллелепипедов) из одного решающего правила, так и построение нескольких решающих правил.

**3.1 Синтез робастной нехрупкой системы квазиинвариантного управления.** Первый вариант системы управления с заданными свойствами – система квазиинвариантного управления, когда качество управления в установившемся режиме характеризуется величиной  $|x_i(t)| < \varepsilon$  при  $t > T$  ( $T$  - длительность переходного процесса) для выбранных  $m \leq n$  управляемых переменных. Теоретическому исследованию таких систем посвящены работы Неймарка Ю.И. ( $n=1$ ) [7,8] и Проскурникова А.В., Якубовича В.А. [9,10]. Доказано, в частности, что при ограниченных по величине внешних возмущениях для существования квазиинвариантного, или приближенно универсального по свойству инвариантности (в терминологии авторов), управления необходимы:

- устойчивость системы управления;
- размерность  $\mathbf{u}(t)$  должна быть не меньше числа регулируемых переменных.

В рассматриваемой задаче  $m=n$ , соответственно и управляющая функция  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ . На первом этапе для десятиэтажного здания ( $n=10$ , размерность фазового пространства  $k=20$ ) были проведены вычислительные эксперименты с заданными номинальными значениями параметров в описании объекта управления  $\alpha=101.0$  и  $\beta=1.2$ . Путем введения нового вектора переменных  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{20})^T$ , где  $x_{10+i} = \dot{x}_i$ , система приводится к каноническому виду линейной системы управления первого порядка. При выборе вида функции управления было принято решение проверить гипотезу об автономности управляемого многосвязного объекта, состоящую в предположении, что управление движением  $i$ -ой материальной точки не зависит от движений всех остальных материальных точек, т.е.  $\mu_i u_i = \dot{x}_i + d_i x_i$ . В этом случае имеем 20-мерное пространство признаков  $\Omega = \{(\mu_1, \dots, \mu_{10}, d_1, \dots, d_{10})\}$ . Построение области устойчивости  $\tilde{\Omega}_0$  в этом пространстве дало неожиданные результаты: очень большое пересечение областей изменения для параметров  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10}$  и для параметров  $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ . Это послужило поводом к проверке гипотезы об еще более простом виде управляющих функций, а именно:  $\mu u_i = \dot{x}_i + d x_i$ , что отвечает двумерному пространству признаков:  $\Omega = \{(\mu, d)\}$ .

Задача синтеза робастного квазиинвариантного регулятора решалась в условиях известных номинальных значений в описании объекта управления, когда пространство признаков  $\Omega = \{(\mu, d, \alpha, \beta)\}$ . На выборке из 5000 наборов параметров было построено синдромальное решающее правило. Синдром максимального объема

$$S = \begin{bmatrix} -7.3613e-07 \leq \mu \leq -1.0005e-07 \\ 1.5624 \leq d \leq 5998.5 \\ 1.09366 \leq \alpha \leq 999.75 \\ 1.02297 \leq \beta \leq 49.9939 \end{bmatrix}.$$

Для всех точек из этого синдрома точность управления  $\varepsilon \leq 10^{-3}$  при  $|\xi| \leq 1000$  с достоверностью  $P=0,9998$ . Задача решалась на возмущениях вида  $\xi = A \sin wt$ , при проверке полученных результатов рассматривались возмущения различного вида, в частности:

$$\xi_1 = A \operatorname{sign}(\sin wt), \quad \xi_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ A & \text{if } t > 0 \end{cases}, \quad \xi_3 = A \sin wt + B |\sin wt| \text{ и др.}$$

Минимальная ошибка управления  $\varepsilon = 0.000136$  была получена на параметрах  $(-1.00028e - 07; 470.984; 638.175; 27.2548)$ , но точка с максимальным радиусом робастной устойчивости для построенного множества -  $(-4.1809e - 07; 3000; 500.4218; 25.5084)$ .

**3.2 Система управления с заданной степенью гашения колебаний.** Ослабим требования, предъявляемые к системе управления (4) для здания из 10 этажей ( $\alpha = 101.0, \beta = 1.2$ ), а именно:  $m < n$  управляющих воздействий должны привести к снижению амплитуды колебаний, вызванных внешним возмущением вида  $\xi(t) = A \sin \theta t$ , не менее, чем на 90%, т.е. степень гашения колебаний  $\gamma = \frac{A_{\max}}{A_{0 \max}} < 0,1$ , где  $A_{0 \max}$  - максимальная амплитуда колебаний

на рассматриваемом этаже при отсутствии управления, а  $A_{\max}$  - максимальная амплитуда колебаний на этом этаже при наличии управляющих воздействий. В исследуемой системе амплитуда колебаний изменяется пропорционально амплитуде внешнего возмущения, поэтому в качестве параметра, характеризующего внешнее возмущение, можно рассматривать лишь его частоту  $\theta$ .

Опираясь на результаты, полученные при синтезе системы квазиинвариантного управления, рассмотрим возможности управления системой путем синтеза функции управления вида:

$$\begin{cases} u_{2j} = d_1 x_{2j} + d_2 \dot{x}_{2j} + d_3 x_{2j-1} + d_4 \dot{x}_{2j-1} + d_5 x_{2j+1} + d_6 \dot{x}_{2j+1}, & j = 1, \dots, 5, \\ u_{2j-1} = 0 \end{cases}$$

когда управляющие воздействия вводятся лишь на четных этажах. В этом случае имеем 6-мерное пространство  $\Omega$  параметров  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_6)$ . Область изменения  $\theta$ :  $\Theta^* = \{0 < \theta \leq 200\}$ . Требуемая статистическая достоверность результатов  $P_0 = 0.95$ .

Проведенные эксперименты показали, что в отличие от квазиинвариантного управления результаты очень сильно зависят от вида внешнего возмущения, а именно: от параметра  $\theta$ . Условие  $\gamma < 0.1$  на всем рассмотренном интервале значений  $\theta$  выполнить не удастся. Из условия минимизации числа областей, покрывающих  $\Omega^*$ , получаем покрытие виде трех областей  $\tilde{\Omega}^* = \bigcup_{i=1}^3 \tilde{\Omega}_i^*$ :

$$\tilde{\Omega}_1^* = \begin{bmatrix} 66.3138 \leq d_1 \leq 74.9070 \\ -251.828 \leq d_2 \leq -223.3140 \\ -13.6821 \leq d_3 \leq -12.1290 \\ -58.803 \leq d_4 \leq -52.1235 \\ 238.167 \leq d_5 \leq 271.1535 \\ -322.985 \leq d_6 \leq -287.3520 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Omega}_2^* = \begin{bmatrix} 224.99 \leq d_1 \leq 364.1590 \\ 33.2138 \leq d_2 \leq 57.4310 \\ -345.225 \leq d_3 \leq -224.7570 \\ -282.553 \leq d_4 \leq -187.7820 \\ -132.413 \leq d_5 \leq -87.0230 \\ 19.5849 \leq d_6 \leq 32.20 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Omega}_3^* = \begin{bmatrix} -240.709 \leq d_1 \leq -129.849 \\ -200.608 \leq d_2 \leq -112.422 \\ -166.685 \leq d_3 \leq -90.2293 \\ -345.147 \leq d_4 \leq -214.053 \\ 210.18 \leq d_5 \leq 388.727 \\ -148.318 \leq d_6 \leq -80.0842 \end{bmatrix}.$$

Результаты гашения колебаний

	Интервалы $\theta$	$\gamma$
$\tilde{\Omega}_1^*$	$\theta \leq 10$	$\gamma < 0.1$
	$10 < \theta \leq 12.5$	$\gamma < 0.2$
	$12.5 < \theta \leq 14$	$\gamma < 0.3$
	$14 < \theta \leq 15.7$	$\gamma < 0.35$
$\tilde{\Omega}_2^*$	$15.7 < \theta \leq 33$	$\gamma < 0.25$
	$33 < \theta \leq 39$	$\gamma < 0.15$
	$39 < \theta \leq 50$	$\gamma < 0.1$
$\tilde{\Omega}_3^*$	$50 < \theta \leq 200$	$\gamma < 0.1$

Статистическая достоверность полученных результатов на контрольной выборке  $P > 0.98 > P_0$ .

**3.3 Гибридная система с динамическим гасителем.** Рассмотрим гибридную систему управления, представляющую собой комбинацию настроенного пассивного динамического гасителя и привода активного управления. Математическая модель такой системы отличается от (4) уравнениями этажей с гасителями ( $s$ -ый этаж) и дополнительным  $(n+1)$ -ым уравнением, описывающим движение самого динамического гасителя:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -2\beta\dot{x}_s - 2\alpha x_s + \beta\dot{x}_{s-1} + \alpha x_{s-1} + \beta\dot{x}_{s+1} + \alpha x_{s+1} + \Delta\beta(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_s) + \Delta\alpha(x_{n+1} - x_s) - \bar{u} + \xi \\ \ddot{x}_{n+1} &= -\frac{\Delta\beta}{\mu}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_s) - \frac{\Delta\alpha}{\mu}(x_{n+1} - x_s) + \frac{\bar{u}}{\mu} + \xi \end{aligned}$$

где  $\Delta\beta = \frac{\Delta c}{M}$ ,  $\Delta\alpha = \frac{\Delta k}{M}$ ,  $\Delta c$  и  $\Delta k$  -коэффициенты демпфирования и упругости гасителя,  $\mu = \frac{m}{M}$ ,  $m$ - масса гасителя.

Для модели 5-этажного здания с одним пассивным гасителем ( $\alpha = 1, \beta = 0.1, \mu = 0.1$ ) сначала были рассмотрены результаты гашения колебаний, вызванных внешним возмущением вида  $\xi = \sin\theta t$ . Если  $x_{si}(t)$ - движение  $i$ -го этажа при расположении гасителя на  $s$ -ом этаже, то  $\min_{s, \Delta\alpha, \Delta\beta} J(s, \Delta\alpha, \Delta\beta)$ ,  $J(s, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \max_{\theta} \max_i \max_t x_{si}(t)$ , достигался при расположении гасителя на 4 этаже. Но значимого сокращения амплитуды колебаний при всех  $\theta$  с пассивным гасителем достичь не удается.

Поставим задачу: путем ввода привода активного управления  $\bar{u}$ , формируемого по принципу обратной связи на основе **минимально** возможного числа измерений величин деформаций отдельных элементов конструкции, добиться сокращения максимального отклонения не менее, чем в 20 раз, т.е.

$$J(\Delta\alpha, \Delta\beta, \bar{u}) = \min_s \max_{\theta} \max_i \max_t x_{si}(t) < \frac{x_{\max}}{20} \quad (5)$$

$x_{\max}$  - величина максимальной деформации в отсутствие гасителя и управления.

С учетом данных о гашении колебаний пассивным гасителем было выбрано его расположение на 4 этаже. Предварительные исследования значимости признаков  $d_i$  ( $i=1, \dots, 10$ ) – па-



параметров управления  $\bar{u} = \sum_{i=1}^5 (d_i x_i + d_{i+5} \dot{x}_i)$  - показало, что значительное падение амплитуды колебаний наблюдается при увеличении признака  $d_4$ , поэтому именно этот параметр  $d_4 = d$  вместе с характеристиками гасителя (коэффициентами упругости и демпфирования) был включен в число признаков, образующих пространство  $\Omega = \{(\Delta\alpha, \Delta\beta, d)\}$ . По обучающей выборке из 5000 точек была найдена область  $\tilde{\Omega}^*$ , на точках которой выполняется неравенство (5):

$$\tilde{\Omega}^* = \left[ \begin{array}{l} 4.53321e - 05 \leq \Delta\beta \leq 0.476944 \\ 0.00458153 \leq \Delta\alpha \leq 0.47693 \\ 189.1 \leq d \leq 65769.4 \end{array} \right].$$

Статистическая достоверность полученного результата  $P > 0.999$ .

Дальнейшее сокращение амплитуды колебаний связано не просто с расширением пространства используемых признаков, а с выбором наиболее информативных из них. Эта задача также может быть решена методами распознавания образов.

### **Заключение**

Предлагаемая работа имеет целью показать, что проблема синтеза систем управления и, в частности, проблема гашения колебаний высотных зданий может плодотворно рассматриваться как задача распознавания, и на этом пути возможно существенное продвижение в ее решении. Главные преимущества такого подхода – широкий круг решаемых задач, произвольная формулировка целей исследования, доступность результатов для анализа. Недостатки метода связаны с отсутствием теоретического обоснования и с необходимостью формирования выборок достаточно большого объема для получения статистически достоверных оценок для искомых областей. Вычислительные и временные затраты определяются сложностью интегрирования рассматриваемой системы. Для сокращения временных затрат предлагается использовать возможности параллельных вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 2000.

### **Список литературы**

1. Collette C., Janssens S., and Artoos K. Review of Active Vibration Isolation Strategies// Recent Patents on Mechanical Engineering 2011. V.4. No. 3, pp. 212-219.
2. Spencer B.F. Jr. and Sain M.K. Controlling Buildings: A New Frontier in Feedback// Special Issue of the IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology. 1997. Vol. 17, No. 6, pp. 19–35.
3. Nishimura H., Kojima A. Seismic isolation control for a buildinglike structure// IEEE Control Systems. 1999. Vol. 19, pp. 38-44.
4. Teklina L.G., Kotelnikov I.V. On the possibilities of Synthesis of Dynamical Systems with Given Properties by Pattern Recognition Methods // Pattern Recognition and Image Analysis. 2015. V.25. No.2. P. 270-277.
5. Л. Теклина, И. Котельников. Анализ и синтез динамических систем методами распознавания образов. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2015.
6. Kotelnikov I.V. A Syndrome Recognition Method Based on Optimal Irreducible Fuzzy Tests // Pattern Recognition and Image Analysis. - 2001. - V.11, No.3. - P.553-559.

7. Неймарк Ю.И. О квазиинвариантном управлении // Дифференциальные уравнения. 2007. №11. С. 1-6.
8. Неймарк Ю.И. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 48-56.
9. Проскурников А.В., Якубович В.А. Приближенное решение задачи об инвариантности системы управления // Доклады РАН. 2003. Т. 392, №6. С. 750-754.
10. Проскурников А.В., Якубович В.А. Задача об инвариантности системы управления по части выходных переменных // Доклады РАН. 2006. Т. 406, № 1. С. 30-34.

## ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМАССОВОЙ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИЛ

Л.Я. Банах

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН  
101919 Москва Мал.Харитоньевский пер.4, e-mail: banl@inbox.ru

Исследуется устойчивость многомассовой роторной системы при действии гидродинамических сил в уплотнениях. Особенность задачи состоит в равенстве парциальных частот ротора и плавающих уплотнительных колец, что при действии циркуляционных сил приводит к неустойчивости колебаний, как ротора, так и колец. Получены аналитические выражения для области устойчивости. Используются теория возмущений с выделением слабых динамических взаимодействий. Найдено, что плавающие кольца снижают скорость потери устойчивости ротора. Приводится расчет областей устойчивости турбонасосного агрегата.

Ключевые слов: ротор, плавающие уплотнения, циркуляционные силы, устойчивость

**1. Постановка задачи.** Основным источником потери устойчивости ротора являются циркуляционные неконсервативные силы, такие, как гидро-аэродинамические силы, силы внутреннего демпфирования. Исследуем устойчивость многомассовой роторной системы (рис.1), в которой ротор вращается внутри плавающих уплотнительных колец. В зазоре между ротором и кольцами действуют гидродинамические силы, в результате чего возникают связанные колебания ротора и колец.

В данной системе каждая секция может быть представлена однодисковым ротором, вращающимся внутри плавающего кольца (рис.1). Основная проблема заключается в том, что парциальные частоты ротора и кольца в окрестности критической скорости равны между собой. Поэтому при воздействии циркуляционных составляющих гидродинамических сил возрастает опасность потери устойчивости.

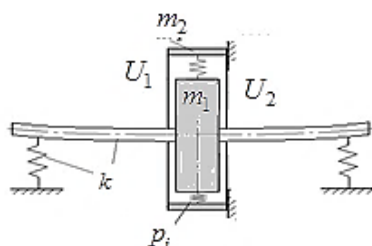


Рис. 1. Секция многомассовой роторной системы ТНА: однодисковый ротор внутри плавающего уплотнительного кольца

**2. Уравнения колебаний многосекционной системы «ротор-плавающие кольца».** Уравнения, описывающие собственные колебания секции роторной системы «ротор-гидродинамические силы - кольцо» (рис.1), имеют вид [1,2]

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + (\chi + p_2) \dot{x}_1 + (k_{11} + p_1) x_1 + k_{12} \varphi_y + p^* y_1 - p_1 x_2 - p^* y_2 &= 0 \\
 A \ddot{\varphi}_x + k_{22} \varphi_x + \chi_2 \dot{\varphi}_x + k_{12} y - G \omega \dot{\varphi}_y &= 0 \\
 m_1 \ddot{y}_1 + (\chi + p_2) \dot{y}_1 + (k_{11} + p_1) y_1 + k_{12} \varphi_x - p^* x_1 - p_1 y_2 + p^* x_2 &= 0 \\
 A \ddot{\varphi}_y + k_{22} \varphi_y + \chi_2 \dot{\varphi}_y + k_{12} x + G \omega \dot{\varphi}_x &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + p_2 \dot{x}_2 + p_1 x_2 + p^* y_2 - p_1 x_1 - p^* y_1 &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + p_2 \dot{y}_2 + p_1 y_2 - p^* x_2 - p_1 y_1 + p^* x_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$x_1, y_1$  - перемещения центра тяжести диска вдоль осей координат,  $\varphi_x, \varphi_y$  - углы поворота вокруг этих осей,  $m_1$  -- масса диска,  $A, G$  - экваториальный и полярный моменты инерции,  $k_{ij}$  -

суммарные коэффициенты упругости ротора на упругих опорах,  $\chi_i$  - коэффициент внешнего трения,  $x_2, y_2$  - перемещение кольца,  $p_1$  - гидростатическая жесткость,  $p_2$  - гидродинамическое сопротивление,  $p^* = 0.5\omega p_2 + p_a$  - циркуляционная сила.

Зависимость гидродинамических коэффициентов от угловой скорости можно найти следующим образом. Перепад давления, соответствующий номинальной частоте вращения  $\omega_n$  [6]:  $\Delta p = \Delta p_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ ,

поэтому гидростатическая жесткость в зазоре уплотнительных колец пропорциональна квадрату частоты вращения:

$$p_1 = p_{1n} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}.$$

Коэффициент, определяющий демпфирующие и неконсервативные гидродинамические силы, пропорционален числу Рейнольдса  $Re = 2\rho\delta_0 w/\mu$ ,  $w = \sqrt{2\Delta p r \eta/\rho}$ , следовательно, гидродинамическое демпфирование  $p_2$  и неконсервативные силы  $p^*$  пропорционально частоте вращения:

$$p_2 = p_{2n} \frac{\omega}{\omega_n}, p^* = \frac{1}{2} p_2$$

где  $p_{in}$  - гидродинамические коэффициенты при номинальной скорости вращения.

Для динамического анализа ротора введем в уравнениях (1) комплексные координаты, описывающие соответственно прямую и обратную прецессию [3]

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \varphi_1 = \varphi_y + i\varphi_x, z_2 = x_2 + iy_2 \\ \bar{z}_1 &= x_1 - iy_1, \bar{\varphi}_1 = \varphi_y - i\varphi_x, \bar{z}_2 = x_2 - iy_2 \end{aligned} \quad (2)$$

В координатах (2) уравнения (1) разделяются на две независимые группы уравнений, описывающие прямую и обратную прецессии, отличающиеся только знаком при  $\omega$ :

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'(\omega) & \\ & \mathbf{D}'(-\omega) \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{D}'(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & -p_1 + ip^* \\ -p_1 + ip^* & D_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -m_1\lambda^2 + i\lambda p_2 + (k_{11} + p_1) - ip^* & k_{12} \\ k_{12} & -A\lambda^2 + k_{22} + \lambda\omega G \end{bmatrix}, \quad D_2 = -m_2\lambda^2 + i\lambda p_2 + p_1 - ip^* \quad (3)$$

матрица  $\mathbf{D}_1$  описывает парциальную подсистему ротора, а элемент  $D_2$  - кольцо, они связаны между собой гидродинамическими силами, что отражают внедиагональные элементы в матрице  $\mathbf{D}'(\omega)$ ; при их отсутствии подсистемы работают независимо (здесь и далее для простоты выкладок положено  $\chi = 0$ ).

Уравнения, описывающие N-секционную роторную систему рис. 1 в матричном виде в комплексных координатах  $\mathbf{z}$  можно представить в виде:

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{rot} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \hat{\mathbf{D}}_{ring} \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{rot} = \text{diag}[\mathbf{D}_1]_s, \hat{\mathbf{D}}_{ring} = \text{diag}[\mathbf{D}_2]_s, \mathbf{P} = \text{diag}(-p_1 + p^*)_s, s = 1 \dots N$$

здесь  $s$  - номер секции, матрицы  $[\mathbf{D}_1]_s, [\mathbf{D}_2]_s$  для каждой секции определены в (2). Аналогичные уравнения для обратной прецессии  $\hat{\mathbf{D}}(-\omega) = 0$ .

В (4) диагональные блоки описывают парциальные подсистемы ротора и кольца  $s$ -й секции с учетом гидроупругих сил, а внедиагональные блоки отражают упругие и/или гидродинамические связи между этими подсистемами. Диагональные блоки  $\mathbf{D}_1$  (2x2) соответствуют роторным элементам секции, блоки  $\mathbf{K}_{ij}$  описывают упругие связи между секциями ротора, блоки диагональной матрицы  $\mathbf{D}_{ring}$  описывают плавающие кольца в каждой секции, а блоки  $\mathbf{P}$ -гидродинамические связи между ротором и кольцами в каждой секции.

**3. Выделение слабых динамических взаимодействий в роторной системе.** При анализе устойчивости реальной многосекционной конструкции применение условий Рауса-Гурвица становится практически невыполнимым, так как порядок уравнений становится очень большим. Поэтому предлагаем способ, основанный на выделении слабых динамических взаимодействий в роторной системе и дальнейшем применении методов теории возмущений [4]. Основная идея данного подхода состоит в следующем. С учетом гидродинамических сил матрицы  $\hat{\mathbf{D}}_{rot}(\omega), \hat{\mathbf{D}}_{ring}(\omega)$  имеют комплексные частоты, в то время как без учета этих сил имеются только чисто мнимые корни. Устойчивость решения определяет именно знак действительной части поправки к собственным частотам. Далее сделаем естественное предположение о малости сил гидродинамического демпфирования по сравнению с силами упругости и, используя методы теории возмущений, найдем знак поправки, вносимой неконсервативными циркуляционными силами. Преимущество этого подхода состоит в том, что не требуется раскрытия определителя высокого порядка, и можно получить условия устойчивости в аналитическом виде. Этот подход справедлив в общем случае системы с произвольным числом степеней свободы.

Чтобы использовать этот подход необходимо вначале выделить слабые динамические взаимодействия в системе, используя безразмерные коэффициенты взаимодействий [4]:

-энергетические коэффициенты, которые определяют отношение работы, произведенной силами связей между подсистемами к энергии, накопленной в парциальных подсистемах при данной форме колебаний

$$\alpha_{ij}^{qr} = \frac{(\mathbf{H}_i^q)^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{H}_{ij}^r}{(\kappa_{ii})^{1/2} (\kappa_{jj})^{1/2}}, \quad q = 1 \dots n_i, r = 1 \dots n_j, \kappa_{ii} = (\mathbf{H}_i^q)^T \mathbf{K}_{ii} \mathbf{H}_{ij}^r, \quad (5)$$

$\mathbf{H}_i^q$  -  $q$ -я собственная форма колебаний для подсистемы  $i$ .

-спектральные коэффициенты, которые зависят от расстройки частот в подсистемах

$$s_{ij}^{qr} = \frac{\alpha_{ij}^{qr}}{(1 - \lambda_i^{(q)} / \lambda_j^{(r)})}$$

Условие слабого взаимодействия подсистем

$$\alpha_{ij}^{qr} < \varepsilon, s_{ij}^{qr} < \varepsilon, \quad q = 1 \dots n_i, r = 1 \dots n_j \quad (6)$$

Чтобы выделить эти коэффициенты в исходной системе необходимо вначале сформировать матрицу  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{H}^T \mathbf{D} \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{H}$  - блочно-диагональная матрица, составленная из столбцов собственных векторов парциальных подсистем:  $\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{H}_i^q), q = 1..N$ . Тогда все диагональные блоки становятся диагональными матрицами с элементами  $\kappa_{ii} - \lambda \mu_{ii}, \kappa_{ii} / \mu_{ii} = \lambda_i^2$ . Затем выполняя матричное умножение

$$\mathbf{D}^* = (\text{diag}(1 / \kappa_{ii})^{1/2}) \bar{\mathbf{D}} (\text{diag}(1 / \kappa_{ii})^{1/2}),$$

получим безразмерную матрицу, в которой внедиагональные блоки состоят из энергетических коэффициентов связи (5) между соответствующими подсистемами. Вид этой матрицы, очевидно, не зависит от принятых условий ортогональности собственных векторов.

При условии  $\alpha_{ij}^{qr} < \varepsilon$  в уравнениях (3) появляются малые члены порядка  $\varepsilon$  и поэтому можно далее применять методы теории возмущения.

Заметим, что гидродинамические силы малы по сравнению с силами упругости ротора, то есть  $\|\mathbf{P}\| \ll \|\mathbf{K}\|_{rot}$ . В результате, как следует из (4) - (6), данную систему можно представить в виде  $s$  слабосвязанных подсистем « $s$ -я секция ротор- кольцо», имеющей малые, чисто мнимые возмущения, отражающие взаимодействие ротора и кольца вследствие воздействия циркуляционных гидродинамических сил

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{rot}^1 + i\varepsilon \hat{\mathbf{D}}_{rot}^* & \varepsilon \mathbf{P} \\ \varepsilon \mathbf{P} & \hat{\mathbf{D}}_{ring}^1 + i\varepsilon \hat{\mathbf{D}}_{ring}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Пусть  $\mathbf{h}_{rot}$  изгибная форма колебаний ротора на данной критической скорости. Очевидно, матричное умножение  $\mathbf{h}_{rot}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{h}_{rot}$  эквивалентно представлению ротора в виде одномассовой системы с приведенной массой, жесткостью и демпфированием при этой форме колебаний. Тогда из (4) - (7) имеем

$$\mathbf{D}'(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda^2}{v_1^2} + 1 + ia_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{14} \\ \varepsilon'_{12} & -\frac{\lambda^2}{v_2^2} + 1 + ia'_{22} & & \\ \varepsilon'_{13} & & -\frac{\lambda^2}{v_3^2} + 1 + ia'_{33} & \\ \varepsilon'_{14} & & & -\frac{\lambda^2}{v_4^2} + 1 + ia'_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

$$a_{11} = \frac{\sum_s (\lambda p_2 - p^*)_s}{(k_{11} + p_1)}, \varepsilon'_{1s} = \frac{(-p_1 + i\omega p_2) h_{rot,s}}{\sqrt{(k_{11} + p_1) p_1}}, a'_{ss} = \left( \frac{\lambda p_2 - \omega p_2}{p_1} \right)_s$$

$v_s^2$  - парциальные частоты ротора и каждого из колец соответственно,  $h_{rot,s}$  - прогиб ротора в точке крепления  $s$ -го кольца.

Уравнение (8) описывает систему, состоящую из упругого элемента  $k_1$  и массы 1, с которой упруго связаны массы 2...n, где масса 1 моделирует приведенные упруго-инерционные характеристики ротора вблизи исследуемой критической скорости, а массы 2... n моделируют уплотнительные кольца (Рис.2).

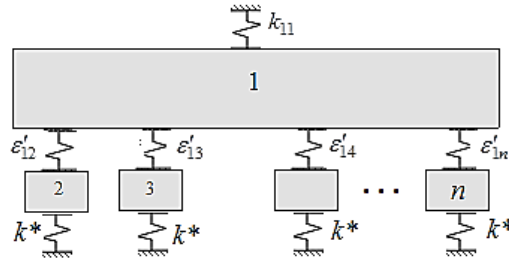


Рис. 2. Расчетная модель многомассовой системы «ротор -уплотнительные кольца» в окрестности критической скорости

**4. Анализ устойчивости системы «ротор-кольцо» на основе методов теории возмущения.** Основная особенность данной задачи заключается в том, в каждой секции парциальные частоты ротора и кольца в окрестности второй критической скорости ротора равны между собой  $\lambda_{rot} = \lambda_{sring}$

В этом случае, как показано в [5], кольца играют роль гидродинамического гасителя колебаний ротора. Однако наличие равных частот существенно изменяет область устойчивости колебаний системы при воздействии циркуляционных составляющих гидродинамических сил. В нашем случае ситуация усугубляется еще и тем, что кратность этих частот равна  $N+1$ ,  $N$  – число секций роторной системы. Применение теории возмущения в этом случае имеет свои особенности [4,7]. Действительно, наличие даже слабых связей приводит к резкому изменению собственных векторов, поскольку любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующая кратным значениям, будет являться собственным вектором и потому решение порождающей системы неоднозначно. Поэтому собственные векторы при наличии кратных частот необходимо искать в виде линейной комбинации собственных векторов несвязанных парциальных подсистем.

Однако, задача упрощается вследствие того, что прямое взаимодействие между кольцами отсутствует, поэтому основное влияние на каждое кольцо оказывает ротор. Кроме того, слабосвязанными также являются угловые и поступательные колебания ротора в силу достаточно большой отстройки между частотами, поэтому поправки за счет воздействия гироскопических сил будут иметь второй порядок малости. Таким образом, каждую секцию турбоагрегата можно рассматривать как двухмассовую систему, аналогичную рис.2, состоящую из слабосвязанных подсистем: «поступательные перемещения ротора + кольцо». Ее уравнение из (3) в безразмерном виде:

$$\mathbf{D}'(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda^2}{v_1^2} + 1 + ia_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & -\frac{\lambda^2}{v_2^2} + 1 + ia_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{10} + \varepsilon \mathbf{D}'_1, \quad \varepsilon \mathbf{D}'_1 = \begin{bmatrix} ia_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & ia_{22} \end{bmatrix}$$

$$v_1^2 = v_2^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{(-p_1 + i\omega p^*)}{\sqrt{(k_{11} + p_1)p_1}}, \quad a_{11} = \frac{\lambda p_2 - \omega p^*}{(k_{11} + p_1)}, \quad a_{22} = \frac{\lambda p_2 - \omega p^*}{p_1} \quad (9)$$

Порождающая система  $\mathbf{D}_{10}$  представляет собой несвязанные подсистемы кольца и изгибных колебаний ротора, которые без учета сил гидродинамического демпфирования, имеют чисто мнимые корни. Собственные векторы связанной системы в первом приближении ищем в виде [4]

$$\begin{aligned}\bar{h}_{0rot} &= h_{0rot} + c_1 h_{0ring} \\ \bar{h}_{0ring} &= c_2 h_{0rot} + h_{0ring}\end{aligned}$$

При этом:  $c_1 = -c_2 = 1$ , то есть собственные векторы связанной системы равны сумме и разности соответствующих собственных векторов парциальных подсистем.

Условие устойчивости двухмассовой системы «ротор-кольцо определяют действительные поправки к собственным частотам

$$\omega_{nl} \left(1 - \frac{\sqrt{p_1(k_{11} + p_1)}}{k_{11} + 2p_1}\right) < 2\lambda'_{0nl} \frac{1}{1 + 2p_{an}/p_{2n}\omega_n} \quad (10)$$

Условием устойчивости для ротора в щелевых уплотнениях, полученное в [3]

$$\omega_{цел} < 2\lambda'_{0цел} \frac{1}{1 + 2p_{an}/p_{2n}\omega_n} \quad (11)$$

Сравнивая соотношения (10) и (11), замечаем, что:

*скорость возникновения неустойчивых режимов ротора с плавающим уплотнительным кольцом увеличивается по сравнению с щелевым уплотнением.*

$$\frac{\omega_{цел}}{\omega_{nl}} = 1 - \frac{\sqrt{1 + \beta}}{2 + \beta}, \quad \beta = \frac{k_{11}}{h_1}$$

**5. Устойчивость много массовой системы «ротор- N плавающих уплотнительных колец.** Рассмотрим теперь многомассовую систему «ротор-N плавающих колец» (рис.3,4), в которой парциальные частоты каждой из подсистем равны между собой. Учитывая, что прямое взаимодействие между кольцами отсутствует, влияние колец на ротор получится в результате суммирования их воздействия. Таким образом, область неустойчивости ротора определится в результате суммирования поправок к частотам для всех колец. Физически это достаточно очевидно. Необходимо иметь в виду, что взаимодействие между ротором и s-м кольцом  $\varepsilon_{1s}$  зависят теперь от формы колебаний ротора и равно  $h_{rots}\varepsilon_{1s}$ .

Суммируя поправки по всем кольцам, учитывая, что  $\sum_s p_{hs} = p_h$ ,  $\sum_s p_{2s} = p_2$  получим условие устойчивости (при  $p_a = 0$ )

$$\lambda_{0s} > \omega / 2 \left(1 + \sum_s h_{rots} \frac{\sqrt{p_1(k_{11} + p_1)}}{k_{11} + 2p_1}\right) \quad (11)$$

Следовательно, порог неустойчивости для ротора наступает раньше, чем для каждого из колец. и это различие тем больше, чем выше гидростатическая жесткость.

**6. Условия устойчивости турбоагрегата.** Найдем теперь условия устойчивости для многосекционной роторной системы турбоагрегата (рис. 3) при вращении ротора вблизи второй критической скорости, наиболее опасной для данного ротора. Расчетная схема роторной системы представлена на рис. 3.



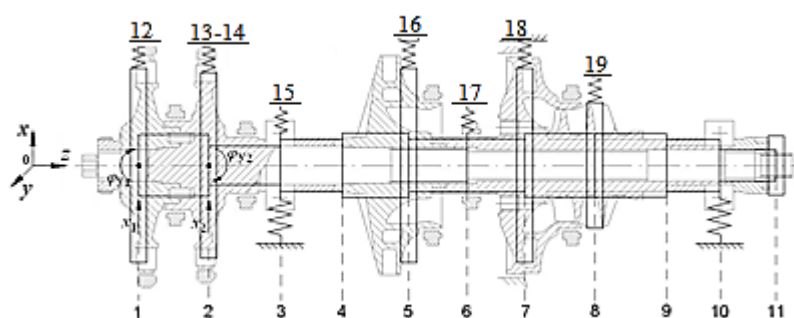


Рис. 3. Расчетная схема роторной системы ТНА, имеющая 11 узлов: 1,2,5-8-компрессорные и турбинные колеса, 12-19-плавающие уплотнительные кольца, 3, 10 - опоры,

Ротор имеет следующие параметры: длина 0.276 м, диаметр дисков 0.085 м, масса

$m = 1.528 \text{ кг}$ . Номинальная скорость вращения  $\omega_n = 12900 \text{ с}^{-1}$ . Плавающие кольца расположены в сечениях 1-6,8. Приведенная жесткость на второй критической скорости, равной  $5240 \text{ с}^{-1}$ , составляет  $k_{11} = 50563 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ . Для рассматриваемого ротора вязкое и внутреннее демпфирование значительно меньше гидродинамического: коэффициент вязкого демпфирования  $\chi = 31,2 \text{ Нс/м}$ , а гидродинамического -  $p_2 = 350 \text{ Нс/м}$ . Поэтому в дальнейшем вязкое и внутреннее демпфирование вала не учитываем. Наибольшие гидродинамические силы возникают на кольцах 5,6,8 насосных колес (рис.4) (табл.1).

Табл.1. Параметры уплотнительных колец

Уплотнительные кольца ТНА	16	17	19
Номинальная гидростатическая жесткость $\text{Н/м} \cdot 10^6$	8.2	6.7	6.2

Условием гидродинамического гашения колебаний ротора с помощью плавающих колец, как показано в [5] является равенство парциальных частот колец и номинальной скорости вращения ротора:

$$\sqrt{p_{1ns}/m_s} \approx 1.1\omega_n \quad (12)$$

Это условие обеспечивает гидродинамическое гашение колебаний ротора при любой скорости вращения ротора  $\omega$ . Действительно

$$\sqrt{p_{1s}/m_s} = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{p_{1ns}/m_s} \approx 1.1\omega$$

то есть парциальные частоты колец при условии (12) всегда близки к частоте вращения, а следовательно, и к частоте возмущающей силы от дисбаланса, то есть выполняются условия динамического гашения. Однако при этом возникает риск потери устойчивости.

Форма собственных колебаний ротора на второй критической скорости представлена на рис. 4. Амплитуды колебаний в точках расположения колец: 0.190, 0.233, 0.105.

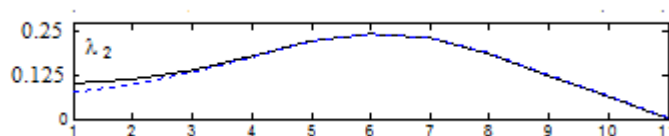


Рис.4. Вторая форма собственных колебаний ротора

Условия устойчивости для многомассовой системы ТНА. В нашем случае выражение (11) существенно упрощается, так как аэродинамические силы в местах установки уплотнительных колец не действуют.

Зависимость области устойчивости для плавающего кольца и ротора в зависимости от скорости вращения  $\omega/\lambda$  и отношения перепада давления к жесткости ротора  $p_1/k_1$  представлена на рис.5.



Рис.5. Граница области устойчивости для ротора -1 и плавающего кольца (в сечении б) - 2.

Как видно из рис.5, скорость потери устойчивости  $\omega$  для ротора наступает раньше, чем для каждого из уплотнительных колец, и это различие тем больше, чем выше гидростатическая жесткость  $p_1$ . При отсутствии гидродинамических сил  $p_1 = 0$  граница устойчивости  $\omega/\lambda = 2$ . Для рассматриваемой роторной системы  $p_1/k_1 \cong 0,1$ , граница устойчивости для кольца составляет  $\omega/\lambda = 1,85$ , а для ротора  $\omega/\lambda = 1,73$ , что может оказаться близкой к номинальной скорости вращения.

### Список литературы

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. Изд. АН СССР, 1959. 246с.
2. Гробов В.А. Нестационарные колебания роторов турбомашин при переходе через критические числа оборотов. Рига: РКВИВУ. 1959.120 с.
3. Банах Л.Я., Бармина. Устойчивость вращения ротора с плавающими уплотнительными кольцами.// Проблемы машиностроения и надежности машин, №1, 2015, С.9-15.
4. Банах Л.Я. Слабые взаимодействия при колебаниях механических систем //ДАН. 1994. т.336. №2. Механика. С.336-338
5. Банах Л.Я., Никифоров А.Н. Воздействие аэрогидро-динамических сил на быстровращающиеся роторные системы// Механика твердого тела. 2005. №6. С.130-139
6. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин, М: Машиностроение.1982. 200 с.
7. Banakh L. Ya., Kempner M. L . Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Springer, NY, London 261 p. 2010

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ**

**Баринов В.А., Басинский К.Ю.**

Тюменский государственный университет,  
институт математики и компьютерных наук.  
625003 Тюмень, ул. Семакова, 10, e-mail: vbarinov@utmn.ru

Рассмотрена нелинейная задача о волнах на свободной поверхности двухфазной смеси. Для ее решения предложен асимптотический метод, с помощью которого найдено решение с точностью третьего приближения. Определены траектории частиц несущей и дисперсной фазы. Показано, что частицы как несущей, так и дисперсной фазы движутся по разомкнутым спиралевидным траекториям. Причем, более тяжелые по сравнению с несущей фазой дисперсные частицы всплывают, а более легкие притапливаются. Получено выражение переносной скорости Стокса для частиц обеих фаз.

Ключевые слова: нелинейные поверхностные волны, двухфазная среда, дисперсионные соотношения, нелинейные эффекты.

Исследования распространения волн по свободной поверхности многофазных (в частности, двухфазных или дисперсных) сред представляют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы как для учета влияния примесей на волновые характеристики, так и для изучения переноса взвесей волновым течением (наносов) в прибрежных зонах морей и океанов [1,2]. Кроме того, определение зависимости концентрации примеси от волновых характеристик может быть основой метода расчета степени загрязнения водного бассейна [3]. Двухскоростные модели распространения волн по свободной поверхности слоя дисперсной смеси, в которых учитывались различные межфазные силы, были построены в работах [4,5]. В них же получены решения соответствующих краевых задач в линейном приближении, а также аналитические зависимости частоты и декремента затухания волны от концентрации дисперсной фазы. Было установлено, что волновое возмущение концентрации является величиной более высокого порядка малости по сравнению с остальными возмущениями, поэтому для его определения необходимо решение нелинейной задачи. Аналитическое выражение для волнового возмущения концентрации было найдено в работах [3,6], в них получено решение нелинейной задачи с точностью второго приближения по амплитудному параметру. Это решение позволило аналитически определить нелинейный эффект [1]. Заключается он в следующем: при волновом движении более легкие по сравнению с несущей фазой дисперсные частицы притапливаются, а более тяжелые всплывают. Аналогичный эффект для тела, находящегося у границы объема колеблющейся жидкости, описан в работе [7]. Для более точного определения нелинейных эффектов даже для моножидкостей необходимо находить асимптотические приближения более высокого порядка. Для однородных жидкостей известны нелинейные эффекты Стокса: зависимость частоты от высоты волны; наличие приповерхностного течения, обуславливающего разомкнутость траекторий движения [8, 9]. В отличие от идеальной моножидкости применение прямого метода Стокса к решению нелинейной задачи для двухфазной смеси невозможно из-за наличия диссипативной силы межфазного трения. Для решения нелинейных волновых задач с диссипацией в работах [10, 11] был разработан метод переменной во времени частоты, являющийся обобщением метода Стокса. Кроме того, этот метод можно рассматривать как развитие метода Биркгофа [12] от нелинейных колебаний до нелинейных волн. В настоящей работе этот метод применен к решению нелинейной задачи о волновом движении двухфазной смеси. Получено решение с точностью третьего приближения, что позволило аналитически определить эффекты Стокса для дисперсной смеси. Найдены нелинейные траектории дисперсных частиц, по которым определяется перераспределение дисперсной фазы при волновом движении смеси.

**Математическая модель.** Рассматривается бесконечно глубокий слой двухфазной смеси, ограниченный сверху свободной поверхностью  $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ . Предполагается: несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза – сферические частицы радиуса  $a$ ; волна длиной  $\lambda$  ( $\lambda \gg \xi_{max}^*$ ,  $\lambda \gg a$ ) распространяется в направлении оси  $x^*$ ;  $k/\xi_{max}^* = \varepsilon$  – малый волновой параметр,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число. Звездочкой, там, где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины. Полагая частоту (фазовую скорость) волны – неизвестной функцией времени, запишем нелинейную краевую задачу [4] в безразмерном виде

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_o}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \varepsilon \alpha_o \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_1) &= 0, \quad \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_2 + \varepsilon \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_2) = 0, \quad (1) \\ \left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \frac{s \mu_1 \alpha_o}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p + \varepsilon \left[ \mu_1 \left( 1 + \frac{s}{2} \alpha_o \right) (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - \right. \\ \left. - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - r \alpha_o \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \frac{s \mu_1 \alpha_o \gamma}{2(t/c)'} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - \\ - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] &= 0, \\ \left[ \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{s \mu_1 (1 - \alpha_o)}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p + \varepsilon \left\{ \left[ \mu_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - r \alpha_o \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \frac{s \mu_1 \alpha_o \gamma}{2(t/c)'} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] &= 0, \quad \mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1z}), \quad \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2z}), \\ \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z} - \alpha_o v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x} + \alpha_o v_{2x}] - \alpha_o \gamma (v_{2z} - v_{1z}) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \alpha_o \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) &= 0, \quad z = \varepsilon \xi(t, x), \\ p - v_o^2 \xi + \varepsilon \alpha_o (\mu_1 - \mu_2) v_o^2 \gamma \xi &= 0, \quad v_o^2 = g/kc^2, \quad z = \varepsilon \xi(t, x), \\ v_{iz} \rightarrow 0, \quad v_{ix} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Безразмерные величины связаны с физическими равенствами

$$\begin{aligned} t^* = kc^* t^*, \quad x^* = kx^*, \quad z^* = kz^*, \quad \mu_i = \rho_i^0 / \rho^0, \quad r = R / \rho^0 kc_0, \quad \rho^0 = (1 - \alpha_0) \rho_1^0 + \alpha_0 \rho_2^0, \\ c = c^* (t/c_0) = \omega^* (t) / \omega_0, \quad \alpha^* = \varepsilon \alpha_0 \gamma, \quad k \xi^* = \varepsilon \xi, \quad \mathbf{v}_i^* = \varepsilon c_0 \mathbf{v}_i, \quad p^* = P_i - P_a + \rho_i^0 g z^* = \varepsilon \rho^0 c_0^2 p. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_0$ ,  $c_0$  – частота, фазовая скорость линейной волны;  $\alpha_0$ ,  $\alpha^*$  – концентрация дисперсной фазы, ее возмущение;  $\mathbf{v}_i^*$ ,  $P_i$ ,  $\rho_i^0$  – вектор скорости, давление, истинная плотность  $i$ -й фазы;  $\rho^0$ ,  $P_a$  – плотность покоящейся смеси, атмосферное давление;  $R = 9\eta/a^2$  – коэффициент межфазного трения ( $\eta$  – динамическая вязкость); коэффициент  $s = 1; 0$  в зависимости от учета силы присоединенных масс.

Разложением в ряд Маклорена граничные условия сводятся на поверхность  $z=0$ . Неизвестные функции определяются в виде рядов  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{v}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \mathbf{v}_{in}, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} p_n, \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \xi_n, \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \gamma_n, \quad c = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n(t). \quad (2)$$

Подставив ряды (2) в уравнения и граничные условия (разложенные в окрестности  $z=0$ ) (1) и приравняв коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получаем асимптотическое представление задачи (1) в первых трех приближениях.

В первом приближении задача имеет вид: при  $\varepsilon^0$

$$-\alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{11} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{21} = 0, \quad (3)$$

$$\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \nabla p_1 = 0,$$

$$\left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \nabla p_1 = 0,$$

$$\mathbf{v}_{11} = (v_{1x1}, v_{1z1}), \quad \mathbf{v}_{21} = (v_{2x1}, v_{2z1}),$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = (1 - \alpha_o) v_{1z1} + \alpha_o v_{2z1}, \quad z = 0,$$

$$p_1 - v_o^2 \xi_1 = 0, \quad z = 0;$$

для второго приближения: при  $\varepsilon^1$

$$-\alpha_o \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{12} = \alpha_o \nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{11}), \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{22} = -\nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{21}), \quad (4)$$

$$\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) + \nabla p_2 = r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) -$$

$$-\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) (\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21} + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right),$$

$$\left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} + \nabla p_2 + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) =$$

$$= -\left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21} + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} + r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) +$$

$$+ \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{v}_{12} = (v_{1x2}, v_{1z2}), \quad \mathbf{v}_{22} = (v_{2x2}, v_{2z2}),$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z2} - \alpha_o v_{2z2} = \alpha_o \gamma_1 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x1} + \alpha_o v_{2x1}] +$$

$$+ (1 - \alpha_o) \xi_1 \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} + \alpha_o \xi_1 \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z}, \quad z = 0,$$

$$p_2 - v_o^2 \xi_2 = \alpha_o (\mu_2 - \mu_1) v_o^2 \gamma_1 \xi_1 - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad z = 0;$$

для третьего приближения: при  $\varepsilon^2$

$$-\alpha_o \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{13} = \alpha_o \nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{12} + \gamma_2 \mathbf{v}_{11}) + \alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} (ta_2)', \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{23} = -\nabla \cdot (\gamma_1 \mathbf{v}_{22} + \gamma_2 \mathbf{v}_{21}) - \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} (ta_2)',$$

$$\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{13}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial \mathbf{v}_{23}}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_{23} - \mathbf{v}_{13}) + \nabla p_3 = r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) -$$

$$-\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{12} + (\mathbf{v}_{12} \nabla) \mathbf{v}_{11}] + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o [(\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{22} + (\mathbf{v}_{22} \nabla) \mathbf{v}_{21}] +$$

$$+ r \alpha_o \gamma_2 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} \right) + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_2 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right) +$$

$$+ \mu_1 \left[ \frac{s}{2} \alpha_o \frac{\partial v_{21}}{\partial t} - \left( 1 + \frac{s}{2} \alpha_o \right) \frac{\partial v_{11}}{\partial t} \right] (ta_2)' - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} - (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21}],$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{23}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{13}}{\partial t} + \nabla p_3 + r(1 - \alpha_o)(\mathbf{v}_{23} - \mathbf{v}_{13}) = \\
 & = - \left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) [(\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{22} + (\mathbf{v}_{22} \nabla) \mathbf{v}_{21}] + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{12}}{\partial t} \right) + \\
 & + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{12} + (\mathbf{v}_{12} \nabla) \mathbf{v}_{11}] + r \alpha_o \gamma_1 (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{v}_{12}) + r \alpha_o \gamma_2 (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) + \\
 & + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_2 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right) + \left[ \left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{21}}{\partial t} + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \frac{\partial \mathbf{v}_{11}}{\partial t} \right] (ta_2)' - \\
 & - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma_1 [(\mathbf{v}_{11} \nabla) \mathbf{v}_{11} - (\mathbf{v}_{21} \nabla) \mathbf{v}_{21}], \quad \mathbf{v}_{13} = (v_{1x3}, v_{1z3}), \quad \mathbf{v}_{23} = (v_{2x3}, v_{2z3}), \\
 & \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z3} - \alpha_o v_{2z3} = \alpha_o \gamma_1 (v_{2z2} - v_{1z2}) + \alpha_o \gamma_2 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \frac{\partial \xi_1}{\partial t} (ta_2)' - \\
 & - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x2} + \alpha_o v_{2x2}] - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x1} + \alpha_o v_{2x1}] + (1 - \alpha_o) \xi_1 \frac{\partial v_{1z2}}{\partial z} + \\
 & + \alpha_o \xi_1 \frac{\partial v_{2z2}}{\partial z} + (1 - \alpha_o) \xi_2 \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} + \alpha_o \xi_2 \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} + \frac{1}{2} (1 - \alpha_o) \xi_1^2 \frac{\partial^2 v_{1z1}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \alpha_o \xi_1^2 \frac{\partial^2 v_{2z1}}{\partial z^2} \\
 & - \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left[ (1 - \alpha_o) \frac{\partial v_{1x1}}{\partial z} + \alpha_o \frac{\partial v_{2x1}}{\partial z} \right] + \alpha_o \gamma_1 \xi_1 \left( \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} - \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} \right) + \alpha_o \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \xi_1 (v_{2z1} - v_{1z1}) - \\
 & - \alpha_o \gamma_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} (v_{2x1} - v_{1x1}), \quad z = 0,
 \end{aligned}$$

$$p_3 - v_o^2 \xi_3 = \alpha_o (\mu_2 - \mu_1) v_o^2 \left( \gamma_1 \xi_2 + \gamma_2 \xi_1 + \xi_1^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \right) - \xi_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} - \xi_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}, \quad z = 0.$$

**Решение в трех приближениях.** Решение линейной задачи (3) имеет вид [1]:

$$v_{ix1} = A e^{z-bt} (M_i \cos \chi + N_i \sin \chi), \quad v_{iz1} = A e^{z-bt} (M_i \sin \chi - N_i \cos \chi), \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma_1 = 0, \quad p_1 = A e^{z-bt} \cos \chi, \quad \xi_1 = A v_o^{-2} e^{-bt} \cos \chi, \quad \chi = x - t + \theta,$$

где  $M_1 = \frac{1}{b^2 + 1} [1 + 2(b^2 + 1) \mu_1 \mu_2 (1 - \mu_1)(s + 2\mu_2)/d],$

$$M_2 = \frac{1}{b^2 + 1} [1 + 2(b^2 + 1) \mu_1^2 (1 - \mu_2)(s + 2\mu_2)/d],$$

$$N_1 = \frac{1}{b^2 + 1} [-b + 2(b^2 + 1) \mu_2 (1 - \mu_1)(2r - b\mu_1(s + 2\mu_2))/d],$$

$$N_2 = \frac{1}{b^2 + 1} [-b + 2(b^2 + 1) \mu_1 (1 - \mu_2)(2r - b\mu_1(s + 2\mu_2))/d],$$

$$d = (2r - b\mu_1(s + 2\mu_2))^2 + \mu_1^2 (s + 2\mu_2)^2.$$

Здесь  $b$  – безразмерный декремент затухания,  $\beta = bkc_o$  – размерный декремент. Для декремента затухания и фазовой скорости в [4] получены выражения

$$c_o^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2,$$

$$\beta = k \left\{ \left[ -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2R/\rho^o k}{3\mu_1(s + 2\mu_2)} \right\},$$

где

$$c_s^2 = \frac{g}{k}, \quad c_d^2 = \frac{2\alpha_o(1-\alpha_o)(\rho_1^o - \rho_2^o)^2}{\rho_1^o(s\rho^o + 2\rho_2^o)} \frac{g}{k}, \quad c_r^2 = \frac{\beta}{k^2} \left( 3\beta - \frac{4R\rho^o}{\rho_1^o(s\rho^o + 2\rho_2^o)} \right),$$

$$\psi = \frac{3\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)g/k - 4(R/\rho^ok)^2}{12\mu_1^2(s+2\mu_2)^2},$$

$$\delta = \frac{R/\rho^ok}{54\mu_1^3(s+2\mu_2)^3} \left[ 4(R/\rho^ok)^2 + 9\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)g/k \right],$$

Решение задачи второго приближения (4) записывается следующим образом

$$v_{ix2} = 0, \quad v_{iz2} = A^2 L_i e^{2z-2bt}, \quad i=1,2, \quad p_2 = A^2 e^{-2bt} \left[ L_3 (e^{2z} - 1) - \frac{1}{2v_0^2} \right],$$

$$\gamma_2 = A^2 L_4 e^{2z-2bt}, \quad \xi_2 = \frac{A^2}{2v_0^4} e^{-2bt} \cos 2\chi,$$

где

$$L_1 = -\frac{\alpha_o}{(1-\alpha_o)} L_2, \quad L_2 = \frac{(1-\alpha_o)H}{2(r-b(s\mu_1+2\mu))}, \quad L_4 = \frac{(1-\alpha_o)H}{2b(r-b(s\mu_1+2\mu))},$$

$$L_3 = \frac{-(1-\alpha_o)(\mu_1 r - b\mu_1(s+2\mu_2))(M_1^2 + N_1^2) - \alpha_o(\mu_2 r - b\mu_1(s+2\mu_2))(M_2^2 + N_2^2)}{2(r-b(s\mu_1+2\mu))},$$

$$H = \mu_1(s+2)(M_1^2 + N_1^2) - (s\mu_1+2\mu_2)(M_2^2 + N_2^2).$$

Подставив выражения первого и второго приближений в уравнения и граничные условия задачи (5), получим задачу для третьего приближения в явном виде

$$-\alpha_o \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + (1-\alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_{13} = 2\alpha_o A^3 e^{3z-3bt} L_4 (M_1 \sin \chi - N_1 \cos \chi), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{23} = 2A^3 e^{3z-3bt} L_4 (N_2 \cos \chi - M_2 \sin \chi),$$

$$\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial v_{1x3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial v_{2x3}}{\partial t} - r\alpha_o (v_{2x3} - v_{1x3}) + \frac{\partial p_3}{\partial x} = A e^{z-bt} / 2 \left( \left\{ \mu_1 \left[ (2+s\alpha_o) \cdot \right. \right. \right.$$

$$\cdot (N_1 + bM_1) - s\alpha_o (N_2 + bM_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[ s\mu_1 \alpha_o L_4 (N_1 - N_2) - 2\alpha_o r L_4 \cdot \right.$$

$$\cdot (M_1 - M_2) - \mu_1 (2+s) L_1 M_1 \left. \right\} \cos \chi + \left\{ \mu_1 \left[ s\alpha_o (M_2 - bN_2) - (2+s\alpha_o) (M_1 - bN_1) \right] \cdot \right.$$

$$\cdot (ta_2)' - A^2 e^{2z-2bt} \left[ \mu_1 (2+s) L_1 N_1 + s\mu_1 \alpha_o L_4 (M_1 - M_2) + 2\alpha_o r L_4 (N_1 - N_2) \right] \left. \right\} \sin \chi \Big),$$

$$\left( \mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{\partial v_{1z3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \frac{\partial v_{2z3}}{\partial t} - r\alpha_o (v_{2z3} - v_{1z3}) + \frac{\partial p_3}{\partial z} = A e^{z-bt} / 2 \left( \left\{ \mu_1 \left[ (2+s\alpha_o) \cdot \right. \right. \right.$$

$$\cdot (M_1 - bN_1) - s\alpha_o (M_2 - bN_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[ s\mu_1 \alpha_o L_4 (M_1 - M_2) + 2\alpha_o r L_4 \cdot \right.$$

$$\cdot (N_1 - N_2) + \mu_1 (6+s+2s\alpha_o) L_1 N_1 - 2s\mu_1 \alpha_o L_2 N_2 \left. \right\} \cos \chi + \left\{ \mu_1 \left[ (2+s\alpha_o) \cdot \right. \right.$$

$$\cdot (N_1 + bM_1) - s\alpha_o (N_2 + bM_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[ s\mu_1 \alpha_o L_4 (N_1 - N_2) - 2\alpha_o r L_4 \cdot \right.$$

$$\cdot (M_1 - M_2) - \mu_1 (6+s+2s\alpha_o) L_1 M_1 + 2s\mu_1 \alpha_o L_2 M_2 \left. \right\} \sin \chi \Big),$$

$$\left( \mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1-\alpha_o) \right) \frac{\partial v_{2x3}}{\partial t} - \frac{s}{2} \mu_1 (1-\alpha_o) \frac{\partial v_{1x3}}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial x} + r(1-\alpha_o)(u_{23} - u_{13}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= Ae^{z-bt}/2 \left( \left[ 2\mu_2(N_2 + bM_2) - s\mu_1(1-\alpha_0)(N_1 + bM_1 - N_2 - bM_2) \right] (ta_2)' + \right. \\
 &+ A^2 e^{2z-2bt} \left[ s\mu_1\alpha_0 L_4(N_1 - N_2) - (2\mu_2 + s\mu_1)L_2M_2 - 2\alpha_0 r L_4(M_1 - M_2) \right] \cos \chi + \\
 &+ \left[ s\mu_1(1-\alpha_0)(M_1 - bN_1 - M_2 + bM_2) + 2\mu_2(bN_2 - M_2) \right] (ta_2)' + \\
 &- A^2 e^{2z-2b} \left[ s\mu_1\alpha_0 L_4(M_1 - M_2) + (2\mu_2 + s\mu_1)L_2N_2 + 2\alpha_0 r L_4(N_1 - N_2) \right] \sin \chi, \\
 &\left( \mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0) \right) \frac{\partial v_{2z3}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0) \frac{\partial v_{1z3}}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} + r(1-\alpha_0)(v_{23} - v_{13}) = \\
 &= A^3 e^{z-bt}/2 \left( \left[ 2\mu_2(M_2 - bN_2) - s\mu_1(1-\alpha_0)(M_1 - bN_1 - M_2 + bN_2) \right] (ta_2)' + \right. \\
 &+ A^2 e^{2z-2bt} \left[ s\mu_1\alpha_0 L_4(M_1 - M_2) + (6\mu_2 + 3s\mu_1 - 2s\alpha_0\mu_1)L_2N_2 + 2\alpha_0 r L_4(N_1 - N_2) - \right. \\
 &- 2s\mu_1(1-\alpha_0)L_1N_1 \left. \right] \cos \chi + \left[ 2\mu_2(N_2 + bM_2) - s\mu_1(1-\alpha_0)(N_1 + bM_2 - \right. \\
 &- N_2 - bN_2) \left. \right] (ta_2)' + A^2 e^{2z-2bt} \left[ 2s\mu_1(1-\alpha_0)L_1M_1 - 2\alpha_0 r L_4(M_1 - M_2) + s\mu_1\alpha_0 L_4 \cdot \right. \\
 &\cdot (N_1 - N_2) - (6\mu_2 + 3s\mu_1 - 2s\alpha_0\mu_1)L_2M_2 \left. \right] \sin \chi, \\
 &\frac{\partial \xi_3}{\partial t} - (1-\alpha_0)v_{1z3} - \alpha_0 v_{2z3} = \frac{A^3 e^{-3bt}}{8v_0^6} \left( 9e^{-2bt} [\sin 3\chi - b \cos 3\chi] + \left\{ 8bv_0^4 A^{-2} e^{2bt} \cdot \right. \right. \\
 &\cdot (ta_2)' + 16v_0^4 [\alpha_0 L_2 + (1-\alpha_0)L_1 - v_0^2 \alpha_0 L_4 d^{-1} (\mu_1 - \mu_2) (2r - b\mu_1 (s + 2\mu_2))] + b \left. \right\} \cdot \\
 &\cdot \cos \chi + \left\{ 5 - 8v_0^4 A^{-2} e^{2bt} (ta_2)' + 16v_0^6 \alpha_0 \mu_1 L_4 d^{-1} (s + 2\mu_2) (\mu_1 - \mu_2) \right\} \sin \chi, \quad z = 0, \\
 &p_3 - v_0^2 \xi_3 = -\frac{A^3 e^{-3bt}}{8v_0^4} \left\{ 3 \cos 3\chi + [5 + 16v_0^2 L_3 + 8\alpha_0 v_0^4 L_4 (\mu_1 - \mu_2)] \cos \chi \right\}, \quad z = 0.
 \end{aligned}$$

Для решения задачи (6) полагаем амплитудные коэффициенты функциями времени, подлежащими определению. Тогда с точностью третьего приближения решение нелинейной задачи имеет вид

$$c = 1 + \varepsilon^2 A^2 \frac{1 - e^{-2bt}}{bt} C_a, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 v_{1x} &= Ae^{z-bt} (A_1 \cos \chi + A_2 \sin \chi) + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left\{ e^{2z-2bt} Q_1 \sin \chi + [D_{v3} (e^{-2bt} - 1) + e^{2z-2bt} R_1] \right\} \cos \chi, \\
 v_{2x} &= Ae^{z-bt} (A_3 \cos \chi + A_4 \sin \chi) + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[ (e^{2z-2bt} Q_2 - C_{w4} - D_{w4} e^{-2bt}) \sin \chi + \right. \\
 &\quad \left. + (C_{v4} + D_{v4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} R_2) \cos \chi \right], \\
 v_{1z} &= Ae^{z-bt} (A_1 \sin \chi - A_2 \cos \chi) + \varepsilon A^2 L_1 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[ (D_{v3} (e^{-2bt} - 1) + e^{2z-2bt} Q_3) \sin \chi + \right. \\
 &\quad \left. + e^{2z-2bt} R_3 \cos \chi \right], \\
 v_{2z} &= Ae^{z-bt} (A_3 \sin \chi - A_4 \cos \chi) + \varepsilon A^2 L_2 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[ (C_{v4} + D_{v4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} Q_4) \sin \chi + \right. \\
 &\quad \left. + (C_{w4} + D_{w4} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} R_4) \cos \chi \right], \\
 p &= Ae^{z-bt} \cos \chi + \varepsilon A^2 e^{-2bt} \left[ L_3 (e^{2z} - 1) - \frac{1}{2v_0^2} \right] + \varepsilon^2 A^3 e^{z-bt} \left[ (C_{v5} + D_{v5} e^{-2bt} + e^{2z-2bt} Q_5) \sin \chi + \right.
 \end{aligned}$$



$$+(C_{w5} + D_{w5}e^{-2bt} + e^{2z-2bt}R_5)\cos\chi],$$

$$\gamma = \varepsilon A^2 L_4 e^{2z-2bt} + \varepsilon^2 A^3 e^{3z-3bt} [Q_6 \sin\chi + R_6 \cos\chi],$$

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{A}{v_o^2} e^{-bt} \cos\chi + \varepsilon \frac{A^2}{2v_o^4} e^{-2bt} \cos 2\chi + \varepsilon^2 e^{-bt} A^3 [3e^{-2bt} A^3 8^{-1} v_o^{-6} \cos 3\chi + \\ & + ((1+9b^2)^{-1} e^{-2bt} \{2\alpha_0 d^{-1} L_4 (\mu_1 - \mu_2) [6br + (\mu_1 s + 2\mu_2)(1-3b^2)] - 2v_o^{-2} \cdot \\ & \cdot (1+3b^2) C_a + (1-\alpha_0)(Q_3 - 3bR_3 + D_{v3}) + \alpha_0(Q_4 - 3bR_4 + D_{v4} - 3bD_{w4}) + 8^{-1} v_o^{-6} \cdot \\ & \cdot (5-3b^2)\} + (1+b^2)^{-1} [(1-\alpha_0)C_{v3} + \alpha_0(C_{v4} - bC_{w4})]) \cos\chi + ((1+9b^2)^{-1} e^{-2bt} \cdot \\ & \cdot \{4\alpha_0 d^{-1} L_4 (\mu_1 - \mu_2) [r - 2b(\mu_1 s + 2\mu_2)] + 4v_o^{-2} bC_a - (1-\alpha_0)(R_3 + 3bQ_3 + \\ & + 3bD_{v3}) - \alpha_0(R_4 + 3bQ_4 + D_{w4} + 3bD_{v4}) + 2v_o^{-6} b\} - (1+b^2)^{-1} [(1-\alpha_0)bC_{v3} + \\ & + \alpha_0(C_{w4} + bC_{v4})]) \sin\chi]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты третьего приближения не приведены из-за своей громоздкости.

Из (7) следует, что с течением времени частота (фазовая скорость) стремится к значению соответствующему линейной задаче. На рис. 1 приведена зависимость фазовой скорости волны  $c^*$  от времени  $t^*$  при  $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$  и  $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$  ( $A=1$ ,  $\lambda=5\text{м}$ ,  $\rho_1^0=1000\text{кг/м}^3$ ,  $\eta=10^{-3}\text{кг/(м}^3\text{с)}$ ,  $a=0,15 \cdot 10^{-2}\text{ м}$ ). Фазовая скорость в случае, когда частицы дисперсной фазы имеют большую, чем несущая фаза плотность, выше, чем в случае более легких частиц. При этом, из графиков зависимости амплитуды волны от времени, приведенных на рис. 2, видно, что волновое движение затухает быстрее, чем фазовая скорость достигает линейного значения.

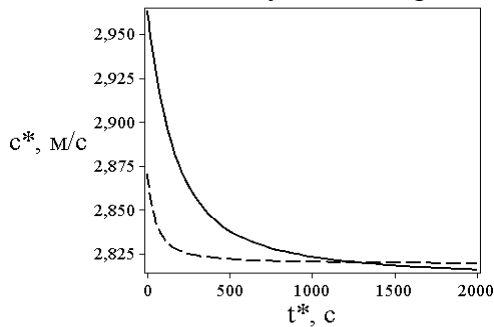


Рис.1. Зависимость  $c^*(t^*)$ : ---  $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$ , —  $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$ .

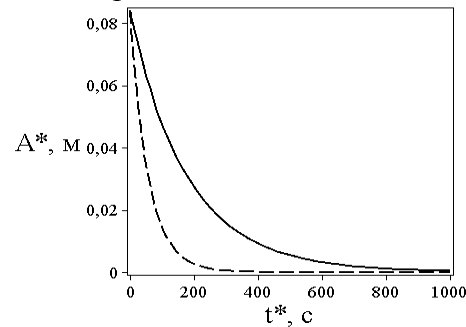


Рис.2. Зависимость амплитуды от  $t^*$ : ---  $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$ , —  $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$ .

**Нелинейные траектории частиц несущей и дисперсной фазы.** Безразмерные координаты частиц несущей и дисперсной фазы удовлетворяют уравнениям

$$x_i = \chi_i + \gamma_i t_i - \theta, \quad \chi_{it} = \varepsilon \left( \frac{t_i \gamma_i}{c} \right)' v_{xi} - (t_i \gamma_i)', \quad z_{it} = \varepsilon \left( \frac{t_i \gamma_i}{c} \right)' v_{zi}, \quad (8)$$

где  $\gamma_i(t) = \omega / \sigma_i$ ,  $\sigma_i$  — частота колебаний частицы  $i$ -ой фазы.

Решение (8) находим в виде рядов по малому параметру

$$\chi_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \chi_{ij}, \quad z = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_{ij}, \quad (9)$$

$$\gamma_i = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \gamma_{ij}.$$

Подставляя выражения (7), ряды (9) в уравнения движения (8), для определения первых трех коэффициентов получим следующие уравнения:

$$\frac{d\chi_{i0}}{dt_i} = -1, \quad \frac{dz_{i0}}{dt_i} = 0,$$

$$\frac{d\chi_{i1}}{dt_i} = Ae^{z_{i0}-bt_i} [M_i \cos \chi_{i0} + N_i \sin \chi_{i0}] - (t_i \gamma_{i1})',$$

$$\frac{dz_{i1}}{dt_i} = Ae^{z_{i0}-bt_i} [M_i \sin \chi_{i0} - N_i \cos \chi_{i0}], \quad \chi_{i0} = x_{i0} + d,$$

$$\frac{d\chi_{i2}}{dt_i} = Ae^{z_{i0}-bt_i} \left\{ \left[ N_i x_{i1} + M_i z_{i1} + M_i (t_i \gamma_{i1})' - bM_i t_i \gamma_{i1} \right] \cos \chi_{i0} + \left[ N_i z_{i1} - M_i x_{i1} + N_i (t_i \gamma_{i1})' - bN_i t_i \gamma_{i1} \right] \sin \chi_{i0} - (t_i \gamma_{i2})' \right\},$$

$$\frac{dz_{i2}}{dt_i} = Ae^{z_{i0}-bt_i} \left\{ \left[ N_i x_{i1} + M_i z_{i1} + M_i (t_i \gamma_{i1})' - bM_i t_i \gamma_{i1} \right] \sin \chi_{i0} - \left[ N_i z_{i1} - M_i x_{i1} + N_i (t_i \gamma_{i1})' - bN_i t_i \gamma_{i1} \right] \cos \chi_{i0} + Ae^{z_{i0}-bt_i} L_i \right\},$$

Сначала имеем

$$\chi_{i0} = \chi_{iL} - t_i = x_{iL} - t_i + \theta, \quad z_{i0} = z_{iL},$$

где  $x_{iL}, z_{iL}$  – лагранжевы координаты частицы в состоянии покоя.

Определяя периодическое решение для  $\chi_{i1}, z_{i1}$ , получим

$$\gamma_{i1} = 0, \quad \chi_{i1} = \frac{Ae^{z_{iL}-bt_i}}{b^2 + 1} \left[ (N_i - bM_i) \cos \chi_{iL} - (M_i + bN_i) \sin \chi_{iL} \right],$$

$$z_{i1} = \frac{Ae^{z_{iL}-bt_i}}{b^2 + 1} \left[ (M_i + bN_i) \cos \chi_{iL} + (N_i - bM_i) \sin \chi_{iL} \right],$$

Уравнения для определения траектории частицы жидкости во втором приближении примут вид

$$\frac{dx_{i2}}{dt_i} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}-2bt_i}}{b^2 + 1} (M_i^2 + N_i^2) - (t_i \gamma_{i2})', \quad \frac{dz_{i2}}{dt_i} = A^2 e^{2z_{iL}-2bt_i} \left( L_i - \frac{bM_i^2 + bN_i^2}{b^2 + 1} \right).$$

Разрешая эти уравнения, получим

$$x_{i2} = 0, \quad z_{i2} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2b} (1 - e^{-2bt_i}) \left( L_i - \frac{bM_i^2 + bN_i^2}{b^2 + 1} \right),$$

$$\gamma_{i2} = \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2bt_i (b^2 + 1)} (1 - e^{-2bt_i}) (M_i^2 + N_i^2).$$

Величина  $u_{si} = c - \sigma_i/k$  представляет собой переносную скорость. Ее приближенное выражение имеет вид

$$u_{si} = \varepsilon^2 c_0 \frac{A^2 e^{2z_{iL}}}{2bt_i (b^2 + 1)} (1 - e^{-2bt_i}) (M_i^2 + N_i^2).$$

Переносная скорость зависит не только от глубины, на которой находится частица, но и от времени, с течением которого затухает. Движение частиц состоит из двух затухающих движений непериодического и вращательного. Для иллюстрации на рис. 3, 4 приведены траектории частиц дисперсной фазы при  $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$ . Из графиков видно, что более легкие частицы заглубляются по мере движения, а более тяжелые, наоборот, поднимаются ближе к свободной поверхности. Что приводит к увеличению

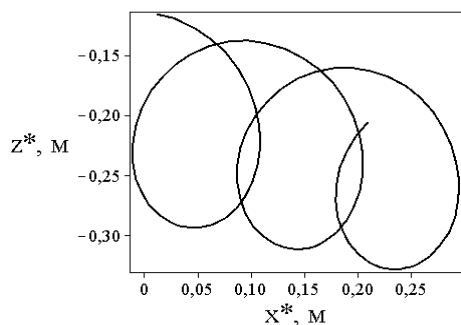


Рис.3. Траектория движения частицы при  $\rho_2^0=500\text{кг/м}^3$ .

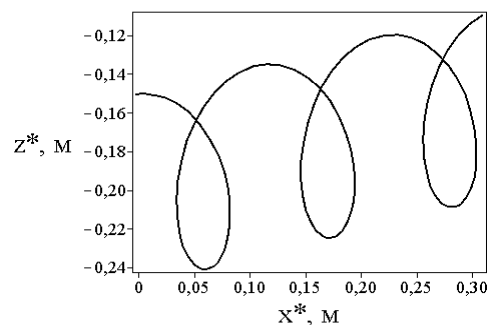


Рис.4. Траектория движения частицы при  $\rho_2^0=1500\text{кг/м}^3$ .

(уменьшению) концентрации более тяжелых (легких) частиц в приповерхностном слое. Это явление, имеющее нелинейный характер, было аналитически обнаружено в работе [3]. Полученное в данной работе более точное решение подтверждает и уточняет этот нелинейный эффект.

### Список литературы

1. Алешков Ю.З. Распространение примесей в океане // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2001. Вып. 1. С. 12-20.
2. Нуднер И.С., Максимов В.В., Майоров Ю.Б., Бабчик Д.В. Моделирование динамики наносов в прибрежной зоне // Вычисл. технологии. 2008. Т.13, №2. С. 60-77.
3. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2003. Т.43, №12. С. 1870-1883.
4. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. №6. С. 94-102.
5. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. механика и техн. физика. 2002. Т.43, №4. С. 27-35.
6. Алешков Ю.З., Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Нелинейные поверхностные волны на слое двухфазной среды // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2003. Сер.1. Вып. 4. С. 64-75.
7. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // Прикл. механика и техн. физика. 2014. Т.55. №5. С. 55-63.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
9. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
10. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2011. Сер.10. Вып. 2. С. 9-16.
11. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны Стокса на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 112-122.
12. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.

## **ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ КЛИНОРЕМЕННЫХ ВАРИАТОРОВ**

**Г.А.Бахадиров, А.Абдукаримов, К.Хусанов, М.К.Набиев**

Научно-исследовательский центр по проблемам отраслевого машиноведения при Ташкентском государственном техническом университете  
ул. Дурмен йули, 31, Академгородок, г. Ташкент, 100125, Узбекистан,  
e-mail: instmech@rambler.ru.

Рассматривается динамика движения управляющих механизмов машинного агрегата с клиноременным вариатором. Обоснована динамическая модель клиноременного вариатора с управляющим механизмом, приводящимся в движение и на базе этой динамической модели составлено математическое описание процесса управления. На основе уравнения движения механизма управления можно произвести определение мощности управляющего двигателя и усилий, действующих на элементы механизма управления.

*Ключевые слова:* клиноременные вариаторы, динамика движения, функция положения, управляющие механизмы, машинный агрегат.

### **1. Введение**

Движение звеньев управляющих механизмов клиноременных вариаторов не является независимым, а связано с движением шкивов и внешними вращающимися моментами  $T_1$  и  $T_2$ , приложенными соответственно к ведущему и ведомому шкивам. Поэтому движение звеньев управляющих механизмов необходимо рассматривать в комплексе с основным движением агрегата, управление которым осуществляется посредством вариатора. Для изучения движения звеньев управляющих механизмов необходимо произвести обоснование динамической модели клиноременного вариатора с управляющим механизмом, приводящимся в движение от электродвигателя и на базе этой динамической модели составить математическое описание процесса управления. На основе уравнения движения механизма управления можно произвести определение мощности управляющего двигателя и усилий, действующих на элементы механизма управления.

### **2. Обоснование динамической модели**

При математическом описании поведения агрегата принимают ряд известных допущений и в зависимости от поставленной задачи выбирается динамическая модель агрегата [1, 2].

Вариаторы в агрегатах используются для изменения его скоростного либо силового режима. Поэтому при изучении процессов управления агрегатом посредством вариатора податливостью звеньев можно пренебречь и агрегат представить в виде двухмассовой динамической модели, имеющей приведенные моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$ , связанные соответственно с ведущим и ведомым шкивами вариатора [3-6].

Вводить податливые звенья (упругие муфты) в цепи управления вариатором нецелесообразно, т.к. при включении управляющего электродвигателя и его работе в цепи управления будут возникать колебательные явления, которые отрицательно сказываются на процессе управления вариатором и точность перемещения подвижных дисков, влияющих на точность управления агрегатом. При отсутствии упругих муфт в цепи управления податливостью звеньев управляющего механизма можно пренебречь. Тогда схему машинного агрегата с клиноременным вариатором и механизмом управления от электродвигателя в общем виде можно представить как показано на рис. 1 [2, 3].

На этом рисунке:  $M$  – приводной электродвигатель, развивающий движущий момент  $T_1$ ;  $B$  – клиноременный вариатор;  $ИМ$  – исполнительный механизм создающий момент сопротивления  $T_2$ ;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  углы поворота ведущего и ведомого шкивов, ими связаны соответст-

венно приведенные моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  агрегата;  $X_1$  и  $X_2$  - осевые перемещения подвижных дисков ведущего и ведомого шкивов;  $MP$  - управляющий электродвигатель, создающий движущий момент  $T$  на валу, положение которого определяется углом  $\varphi$ ;  $P$  - редуктор, ведомый вал которого поворачивается на угол  $\varphi_P$ . В цепи управления вариатором вращательное движение ведомого вала  $P$  редуктора посредством рычажных либо кулачково-рычажных механизмов преобразуется в поступательное движение  $X_1, X_2$  подвижных дисков шкивов.

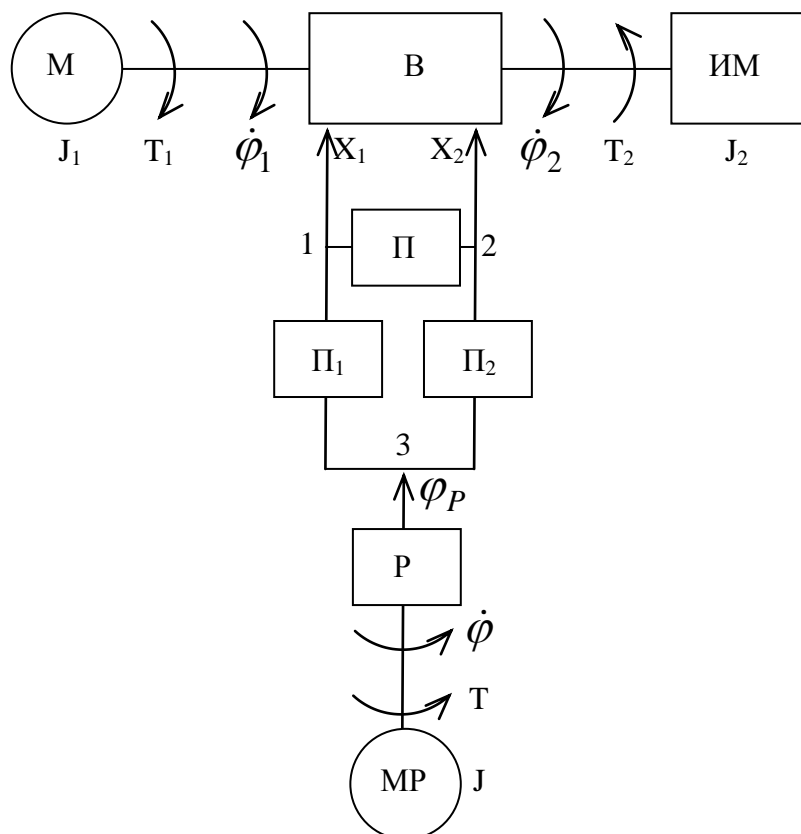


Рис.1. Схема машинного агрегата с клиноременным вариатором и механизмом управления

$\Pi_1$  и  $\Pi_2$  - функции положения указанных механизмов, преобразующих вращательное движение в поступательное

$$\varphi_P = \Pi_1(X_1), \quad \varphi_P = \Pi_2(X_2). \quad (1)$$

При помощи клинового ремня осевые перемещения  $X_1$  и  $X_2$  связаны функцией  $\Pi$  положения

$$X_2 = \Pi(X_1). \quad (2)$$

На рис. 1 показан управляющий механизм, который регулирует перемещения подвижных дисков обоих шкивов. В идеальном случае при работе вариатора с двумя управляющими шкивами должно выполняться определенное условие. Обозначим функцию положения

$$X_2 = \tilde{\Pi}_2(\varphi_P). \quad (3)$$

Тогда, используя первую зависимость системы (1) имеем на основе функции положения (3)

$$X_2 = \tilde{\Pi}_2[\Pi_1(X_1)]. \quad (4)$$

Приравнявая выражения (2) и (4) получаем условие

$$\Pi(X_1) = \tilde{\Pi}_2[\Pi_1(X_1)] \quad (5)$$

которое должно выполняться при перемещении обоих подвижных дисков с помощью управляющего механизма. Условие (5) устанавливает связь между  $\Pi_1$  и  $\tilde{\Pi}_2$  через функцию  $\Pi$ . Од-

нако, функция  $P$  получается при условии, что длина ремня  $L=const$ . В действительности ремень вытягивается и изнашивается, что приводит к изменению функции положения  $P$  за счет увеличения длины ремня  $L$  и межосевого расстояния  $a_w$ . Чтобы обеспечить условие (5) при изменении функции  $P$ , необходимо по мере вытяжки и износа вносить изменения в функции положения  $P_1$  и  $\tilde{P}_2$ , что связано со значительным усложнением механизма управления. Если не вносить изменений в функции  $P_1$  и  $\tilde{P}_2$ , то ремень будет иметь недостаточное натяжение, что отрицательно сказывается на работе вариатора и повышает износ ремня.

Если функции  $P_1$  и  $\tilde{P}_2$  выбрать такими, что условие (5) будет выполняться только в некоторых точках, то в определенных интервалах изменения  $X_1$  ремень будет иметь либо повышенное натяжение, либо пониженное, что приводит к отрицательным явлениям в работе вариатора. Кроме того, при управлении подвижными дисками обоих шкивов в системе вариатора возникает замкнутый контур 1-2-3-1, что приводит к появлению отрицательных явлений и стараются убрать замкнутый контур из системы механизма. Для устранения указанных нежелательных явлений современные клиноременные вариаторы имеют один из шкивов подпружиненным. Так вариатор, рекомендуемый для работы при постоянной мощности, имеет подпружиненный подвижный диск на ведущем шкиве. Где управление осуществляется перемещением  $X_2$  подвижного диска ведомого шкива, а связь между  $X_2$  и  $X_1$  осуществляется через функцию положения  $P$  [1].

В машинном агрегате с клиноременным вариатором, имеющим подпружиненный диск на ведущем шкиве управляющий механизм создает осевое управляющее усилие, воздействующее на подвижный диск ведомого шкива. На подвижный диск ведущего шкива действует усилие  $F_{1y}$  пружины. В направляющих подвижных дисков шкивов возникают силы трения  $F_1^m$  и  $F_2^m$ .

Распорные усилия ремня обозначим через  $Q_1$  и  $Q_2$ . В машинном агрегате с клиноременным вариатором, у которого подпружинен подвижный диск ведомого шкива, на подвижный диск ведущего шкива со стороны управляющего механизма действует управляющее усилие  $F_{1y}$ , а на подвижный диск ведомого - усилие  $F_{2y}$  со стороны пружины. Здесь,  $F_1^T$  и  $F_2^m$  - силы трения в направляющих подвижных дисков.

### 3. Составление математической модели и её анализ

Произведем математическое описание динамической модели машинного агрегата с клиноременным вариатором. Вариатор представляет собой неголономную систему и для ее описания воспользуемся уравнениями Аппеля [7].

Определим конкретный вид функции положения  $X_2 = P(X_1)$ . Будем отсчитывать осевое перемещение подвижного диска ведущего шкива  $X_1$ , от положения, когда ремень (точнее нейтральная линия ремня) находится на минимальном диаметре  $D_{1min}$  шкива, а осевое перемещение  $X_2$  подвижного диска ведомого шкива, когда ремень находится на максимальном диаметре  $D_{2max}$  ведомого шкива. Тогда текущие диаметры расположения ремня на шкивах определяется зависимостями

$$\begin{cases} D_1 = D_{1min} + X_1 \operatorname{ctg} \gamma, \\ D_2 = D_{2min} + X_2 \operatorname{ctg} \gamma, \end{cases} \quad (6)$$

где  $2\gamma$  - угол канавки шкивов клина.

При  $X_1=0$  имеем  $X_2=0$ ,  $D_1(0)=D_{1min}$ ,  $D_2(0)=D_{2max}$  и передаточное отношение вариатора

$$U = \frac{D_{2max}}{D_{1min}} = U_{max}.$$

Длина ремня  $L$  определяется известной формулой [4]

$$L = 2a_w + 0,5\pi(D_1 + D_2) + (D_2 - D_1)^2 / 4a_w. \quad (7)$$

Используя зависимость (6), можно записать

$$(D_2 - D_1) = \Delta D - (X_1 + X_2) \operatorname{ctg} \gamma, \quad (8)$$

$$D_1 + D_2 = D_c + (X_1 - X_2) \operatorname{ctg} \gamma = D_c - (X_1 + X_2) \operatorname{ctg} \gamma + 2X_1 \operatorname{ctg} \gamma,$$

где  $\Delta D = D_{2\max} - D_{1\min}$ ;  $D_c = D_{1\min} + D_{2\max}$ .

При  $X_1=0$  на основе формулы (8) получаем

$$8a_w^2 + 2\pi a_w D_c + \Delta D^2 - 4a_w L = 0. \quad (9)$$

Используя выражения (8) и учитывая (9) из формулы (7) получаем уравнение

$$Z^2 - 2Z(\pi a_w + \Delta D) + 4\pi a_w X_1 \operatorname{ctg} \gamma = 0 \quad (10)$$

где

$$Z = (X_1 + X_2) \operatorname{ctg} \gamma.$$

Решая квадратное уравнение (10) и учитывая, что при  $X_1 = 0$ ,  $X_2=0$ , выбираем перед корнем знак минус

$$X_2 = \Pi(X_1) = \operatorname{tg} \gamma \left( \pi a_w + \Delta D - \sqrt{(\pi a_w + \Delta D)^2 - 4\pi a_w X_1 \operatorname{ctg} \gamma} \right) - X_1. \quad (11)$$

Определим теперь функцию положения  $\tilde{\Pi}$

$$X_1 = \tilde{\Pi}(X_2).$$

В этом случае можно записать

$$D_1 + D_2 = D_c + (X_1 + X_2) \operatorname{ctg} \gamma - 2X_2 \operatorname{ctg} \gamma. \quad (12)$$

**Повторяя выводы будем иметь**

$$X_1 = \tilde{\Pi}(X_2) = \operatorname{tg} \gamma \left( \Delta D - \pi a_w + \sqrt{(\Delta D - \pi a_w)^2 + 4\pi a_w X_2 \operatorname{ctg} \gamma} \right) - X_2. \quad (13)$$

При составлении дифференциальных уравнений движения агрегата с клиноременным вариатором ремень будем считать гибкой, невесомой, нерастяжимой нитью. Тогда энергия ускорений агрегата выраженная только через вторые производные координат, запишется в виде [8]

$$S = 0,5 \left( J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2^2 + J \ddot{\varphi}^2 + m_1 \ddot{X}_1^2 + m_2 \ddot{X}_2^2 \right), \quad (14)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  - массы подвижных дисков ведущего и ведомого шкивов. Выражение (14) справедливо для обеих схем. Рассмотрим вначале случай, когда управляющий двигатель воздействует на подвижный диск ведущего шкива.

Выберем в качестве обобщенных координат  $\varphi_2$  и  $X_1$ . Так как между ведущим и ведомым шкивами вариатора имеет место неголономная связь

$$\dot{\varphi}_1 = U \dot{\varphi}_2, \quad (15)$$

где  $U = D_2 / D_1$  - передаточное отношение вариатора, то дифференцируя по времени  $t$  зависимости  $X_2 = \Pi(X_1)$  и (15) имеем

$$\ddot{X}_2 = \dot{X}_1 \Pi' + \dot{X}_1^2 \Pi'', \quad (16)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 U + \dot{\varphi}_2 \dot{U}, \quad (17)$$

где,

$$\Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial X_1}; \quad \Pi'' = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2}; \quad \dot{U} = dU/dt.$$

Используя зависимости (6) и (11), передаточное отношение  $U$  вариатора представится

$$U = (D_{2\max} + \sqrt{(\pi a_w + \Delta D)^2 - 4\pi a_w X_1 \operatorname{ctg} \gamma} - (\pi a_w + \Delta D) + X_1 \operatorname{ctg} \gamma) / (D_{1\min} + X_1 \operatorname{ctg} \gamma) \quad (18)$$

Так как  $U = U(X_1)$ , то  $\dot{U} = \dot{X}_1 U'$ , где  $U' = \frac{\partial U}{\partial X_1}$

Угол поворота  $\varphi_P$  ведомого вала редуктора равен  $\varphi_P = \varphi / U_P$ , где  $U_P$  - передаточное отношение редуктора  $P$ . Тогда используя выражения (1) имеем

$$\varphi = U_P \Pi_1(X_1), \quad (19)$$

$$\varphi = U_p \Pi_2(X_2), \quad (20)$$

зависимости, связывающие угол поворота  $\varphi$  управляющего двигателя  $MP$  с перемещениями управляющих подвижных дисков шкивов:  $X_2$  и  $X_1$ . Конкретный вид функций положения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  зависит от механизма, используемого для управления подвижным диском шкива.

На основе выражения (19) получаем

$$\ddot{\varphi} = U_p (\ddot{X}_1 \Pi_1' + \dot{X}_1^2 \Pi_1''), \quad (21)$$

где  $\Pi_1' = \frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1}$ ;  $\Pi_1'' = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial X_1^2}$ .

Используя зависимости (16), (17) и (21) энергию ускорений выразим через обобщенные ускорения

$$S = 0,5 [ J_1 (\dot{\varphi}_2 U + \dot{\varphi}_2 \dot{X}_1 U')^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J U_p^2 (\ddot{X}_1 \Pi_1' + \dot{X}_1^2 \Pi_1'')^2 + m_1 \ddot{X}_1^2 + m_2 (\ddot{X}_1 \Pi_1' + \dot{X}_1^2 \Pi_1'')^2 ] \quad (22)$$

При нахождении обобщенных сил, распорные усилия  $Q_1$ ,  $Q_2$  и силы трения  $F_1^T$ ,  $F_2^T$  направляющих подвижных дисков будем считать внешними силами. Пружина на ведомом шкиве создаст упругую силу

$$F_{2y} = K_2 (\delta_2 + X_2),$$

где  $K_2$ ,  $\delta_2$  - жесткость и предварительная деформация пружины.

Определим обобщенные силы  $Q_{\varphi 2}$  и  $Q_{x1}$  соответствующие выбранным обобщенным координатам на основе равенства виртуальных работ

$$\delta W = T_1 \delta \varphi_1 - T_2 \delta \varphi_2 + (T - T_c) \delta \varphi - (Q_1 \pm F_1^T) \delta X_1 - (F_{2y} - Q_2 \pm F_2^T) \delta X_2 = Q_{\varphi 2} \delta \varphi_2 + Q_{x1} \delta X_1, \quad (23)$$

где  $T_c$  - приведенный к валу двигателя  $MP$  момент сил сопротивления в цепи управляющего механизма. Учитывая, что

$$\delta \varphi_1 = U \delta \varphi_2, \quad \delta X_2 = \Pi' \delta X_1, \quad \delta \varphi = U_p \Pi' \delta X_1$$

и приравнявая члены при одинаковых виртуальных перемещениях  $\delta \varphi_2$  и  $\delta X_1$ , на основе выражения (23) получаем

$$\begin{aligned} Q_{\varphi 2} &= T_1 U - T_2, \\ Q_{x1} &= (T - T_c) U_p \Pi_1' - (Q_1 \pm F_1^T) - (F_{2y} - Q_2 \pm F_2^T) \Pi'. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя уравнения Аппеля [7]

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i$$

где  $q_1 = \varphi_2$ ;  $q_2 = X_1$ , получаем дифференциальные уравнения движения рассматриваемого агрегата с конкретным вариатором

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2 U^2) \ddot{\varphi}_2 + J_1 \dot{\varphi}_2 \dot{X}_1 U U' &= T_1 U - T_2, \\ (J U_p^2 (\Pi_1')^2 + m_2 (\Pi_1')^2 + m_1) \ddot{X}_1 + (J U_p^2 \Pi_1' \Pi_1'' + m_2 \Pi_1' \Pi_1'') \dot{X}_1^2 + \\ + K_2 (\delta_2 + \Pi) \Pi' &= (T - T_c) U_p \Pi_1' - (Q_1 \pm F_1^T) + (Q_2 \mp F_2^T) \Pi' \end{aligned} \quad (25)$$

Данная система уравнений является нелинейной. Из условия равенства виртуальных работ  $F_{1V} \delta X_1 = (T - T_c) \delta \varphi$ , находим, что во втором уравнении член  $F_{1V} = (T - T_c) U_p \Pi_1'$  является силой  $F_{1V}$ , действующей на подвижный диск ведущего шкива со стороны управляющего механизма. Управляющий двигатель может вращаться в различные стороны и при этом усилие  $F_{1V}$  будет менять направление. Второе уравнение системы (25) получено для случая сближения дисков ведущего шкива, т.е. когда происходит разгон ведомой части агрегата за счет уменьшения передаточного отношения вариатора. Изменение направления движения управляющего двигателя необходимо учитывать соответствующим знаком при  $T$  и  $T_c$ . Поэтому второе уравнение системы (25) можно представить в общем виде так

$$\begin{aligned} (J U_p^2 (\Pi_1')^2 + m_2 (\Pi_1')^2 + m_1) \ddot{X}_1 + (J U_p^2 \Pi_1' \Pi_1'' + m_2 \Pi_1' \Pi_1'') \dot{X}_1^2 + \\ + K_2 (\delta_2 + \Pi) \Pi' = \pm (T - T_c) U_p \Pi_1' - (Q_1 \pm F_1^T) + (Q_2 \mp F_2^T) \Pi', \end{aligned} \quad (26)$$

где верхние знаки соответствуют случаю сближения дисков ведущего шкива, при котором



происходит уменьшение передаточного отношения вариатора, а нижние расхождению дисков ведущего шкива, когда передаточное отношение вариатора увеличивается.

Скорость  $\dot{X}_1$  перемещения подвижного диска мала. Поэтому в (26) числом, пропорциональным  $\dot{X}_1^2$ , можно пренебречь и уравнение примет вид

$$m_0 \ddot{X}_1 + K_2(\delta_2 + \Pi) \Pi' = \pm(T - T_c) U_p \Pi'_1 - (Q_1 \pm F_1^T) + (Q_2 \mp F_2^T) \Pi', \quad (27)$$

где обозначено  $m_0 = JU_p^2(\Pi'_1)^2 + m_2(\Pi')^2 + m_1$ .

Используя выражение (11) получаем производную  $\Pi^1$ , которая как легко показать,  $\Pi' > 0$ .

Составим теперь уравнения движения агрегата с вариатором, когда управляющий механизм воздействует на подвижный диск ведомого звена, а подвижный диск ведущего подпружинен.

В качестве обобщенных координат выберем  $\varphi_2$  и  $X_2$ . Тогда

$$U = U(X_2), \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 U + \dot{\varphi}_2 \dot{X}_2 U^1, \\ \ddot{X}_1 = \ddot{X}_2 \tilde{\Pi}' + \dot{X}_2^2 \tilde{\Pi}'' , \quad \ddot{\varphi} = U_p (\ddot{X}_2 \Pi'_2 + \dot{X}_2^2 \Pi''_2)$$

и энергия ускорений представится в виде

$$S = 0,5 [ J_1 (\dot{\varphi}_2 U + \dot{\varphi}_2 \dot{X}_2 U^1)^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + JU_p^2 (\ddot{X}_2 \Pi'_2 + \dot{X}_2^2 \Pi''_2)^2 + m_1 (\ddot{X}_2 \tilde{\Pi}' + \dot{X}_2^2 \tilde{\Pi}'')^2 + m_2 \dot{X}_2^2 ] \quad (28)$$

где  $U' = \frac{\partial U}{\partial X_2}$ ,  $\tilde{\Pi}' = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial X_2}$ ,  $\tilde{\Pi}'' = \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}}{\partial X_2^2}$ ,  $\Pi'_2 = \frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2}$ ,  $\Pi''_2 = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial X_2^2}$ .

Пружина на ведущем шкиве создает упругую силу

$$F_{1y} = K_1(\delta_1 - x_1)$$

где,  $K_1$ ,  $\delta_1$  - жесткость и предварительная деформация пружины. Определяя обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам  $\varphi_2$ ,  $X_2$ , из уравнений Аппеля получаем дифференциальные уравнения движения агрегата с клиноременным вариатором

$$(J_2 + J_1 U^2) \ddot{\varphi}_2 + J_1 \dot{\varphi}_2 \dot{X}_2 U U' = T_1 U - T_2, \\ (JU_p^2(\Pi'_2)^2 + m_1(\tilde{\Pi}')^2 + m_2) \ddot{X}_2 + (JU_p^2 \Pi'_2 \Pi''_2 + m_1 \tilde{\Pi}' \tilde{\Pi}'') \dot{X}_2^2 + \\ + K_1(\delta_1 - \tilde{\Pi}) \tilde{\Pi}' = \pm(T - T_c) U_p \Pi'_2 - (Q_2 \pm F_2^T) + (Q_1 \mp F_1^T) \tilde{\Pi}'. \quad (29)$$

Здесь верхние знаки соответствуют сближению дисков ведомого шкива, когда передаточное отношение  $U$  вариатора увеличивается, а нижние расхождению, что вызывает уменьшение передаточного отношения. В данном случае нетрудно показать, что

$$F_{2y} = \pm(T - T_c) U_p \Pi'_2.$$

Первое уравнение в системах (25) и (29) описывает поведение агрегата во вращательном движении, а второе – перемещение системы подвижных дисков вариатора.

Как и ранее, членами, пропорциональными  $\dot{X}_2^2$  можно пренебречь и тогда второе уравнение системы (29) будет иметь вид

$$\tilde{m}_0 \ddot{X}_2 + K_1(\delta_1 - \tilde{\Pi}) \tilde{\Pi}' = \pm(T - T_c) U_p \Pi'_2 - (Q_2 \pm F_2^T) + (Q_1 \mp F_1^T) \tilde{\Pi}', \quad (30)$$

где  $\tilde{m}_0 = JU_p^2(\Pi'_2)^2 + m_1(\tilde{\Pi}')^2 + m_2$

Как и в предыдущем случае, можно установить, используя зависимость (13), что  $\tilde{\Pi}' > 0$ .

Уравнения (27) и (30), описывающие перемещения подвижных дисков вариатора, запишем в более общем виде

$$m_0 \ddot{X}_1 = \pm F_{1y} - (Q_1 \pm F_1^T) - (F_{2y} - Q_2 \pm F_2^T) \Pi', \quad (31)$$

$$\tilde{m}_0 \ddot{X}_2 = \pm F_{2y} - (Q_2 \pm F_2^T) - (F_{1y} - Q_1 \pm F_1^T) \tilde{\Pi}'. \quad (32)$$

Уравнения (31) и (32) имеют одинаковую структуру. При описании движения агрегата с вариатором, когда управление осуществляется через подвижный диск ведомого шкива, можно воспользоваться и уравнением (31). Тогда вместо  $F_{2y}$ , следует подставлять

$$F_{2y} = \pm (T - T_c) U_p \Pi_2^l,$$

а силу  $\pm F_{1y}$  заменяем упругой силой пружины  $\pm F_{1y} = K_1(\delta_1 - X_1)$ .

Если воспользоваться уравнением (32) при управлении через подвижный диск ведущего шкива, то в уравнении (32) следует принять

$$\pm F_{2y} = K_2(\delta_2 + X_2), \quad F_{1y} = \pm (T - T_c) U_p \Pi_1.$$

Для получения решения систем нелинейных дифференциальных уравнений (25) и (29), описывающих поведение агрегата и подвижных дисков вариатора при управлении следует воспользоваться численными методами с применением ЭВМ.

Уравнения (31), либо (32) могут быть использованы для определения мощности или вращающего момента управляющего двигателя.

Необходимо отметить, что поступательное перемещение подвижных дисков вариатора и вращательное движение агрегата взаимосвязаны и эта связь осуществляется через распорные усилия. Так как  $Q_1 = Q_1(F_t)$ ,  $Q_2 = Q_2(F_t)$ , где полезное окружное усилие равно

$$F_t = 2(T_2 + J_2 \ddot{\varphi}_2) / D_2,$$

то перемещения подвижных дисков зависят как от момента  $T_2$  сил сопротивления, так и вращательного движения  $\ddot{\varphi}_2$  ведомой части агрегата.

### Список литературы

1. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. –К.: Науково думка, 1986.-С.288.
2. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. –М.: Наука, 1988. –С.336.
3. Влияние передаточного числа редуктора на быстродействие механизма. Ф.К.Иванченко, А.В.Крючков, В.В.Винник и др. //Технология и автоматизация машиностроения. –К.: Технике. 1990.-вып. 46. –С.49-51.
4. Пронин Б.А., Ревков Г.А. Бесступенчатые клиноременные и фрикционные передачи. –М.: Машиностроение, 1980.-С.320.
5. Бахадиров Г.А., Ризаев А.А., Аманов Т.Ю., Абдукаримов А., Хусанов К.Б., Набиев М.Б. Автоматизация и управление процессов механической технологии обработки листовых материалов. АН РУз, Ин-т механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева. -Т.: Фан, 2013. ISBN 978-9943-19-226-3. 200 с.
6. Мальцев В.Ф., Набиев М.Б. К вопросу исследования динамики движения автоматически управляемых клиноременных вариаторов. Тезисы докл. республ. конф. Социально-экономические проблемы агропромышленного комплекса», г.Одесса. 1991г.-С.18.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т-2.-М.: ГИФМЛ, 1960. –С. 487.
8. Аманов Т.Ю., Цой Г.Н., Бахадиров Г.А. О ременном приводе рабочих органов технологических машин. Тезисы докл. респ. научно-практ. конф. «Ученые и специалисты в решении социально-экономических проблем». Ташкент, декабрь, 1994, стр. 55. 1994. 169 с.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ ПЕШЕХОДОВ, ВЫЗЫВАЮЩАЯ КОЛЕБАНИЯ МОСТОВ, ВКЛЮЧАЯ ЛОНДОНСКИЙ МОСТ (MILLENIUM BRIDGE)

**В.Н. Белых**

Волжский государственный университет водного транспорта,  
кафедра математики.

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5, e-mail: [belykh@vgavt-nn.ru](mailto:belykh@vgavt-nn.ru)

В докладе представлены две модели системы «мост-пешеходы», исследование которых показывает, что, когда число пешеходов превышает критическое, их движения синхронизируются, и начинается существенная раскачка моста.

**Ключевые слова:** бифуркации, предельные циклы, синхронизация, колебания мостов

Для известных случаев возникновения существенных колебаний моста при движении по ним пешеходов в работах [1,2] была предложена модель в виде связанных фазовых осцилляторов Курамото, исследованная затем многими авторами ( см. [1 – 5 ] и др.). Эта модель при всей ее простоте и привлекательности имеет недостаток, состоящий в том, что с ее помощью нельзя найти порог (бифуркацию) числа пешеходов, при прохождении которого мост начинает совершать колебания. Эксперименты на Millenium Bridge показали, что колебания моста начинаются, когда количество пешеходов превышает 165 человек.

В работе предложены две модели системы «мост-пешеходы». Одна из них с «перевернутым маятником», моделирующим пешехода, вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2(x - u) - \lambda(\dot{x}^2 - \omega^2(x - u)^2 + \omega^2 a^2)\dot{x}, & \text{при } x \geq 0, \text{ правая нога} \\ \ddot{x} = \omega^2(x + u) - \lambda(\dot{x}^2 - \omega^2(x + u)^2 + \omega^2 a^2)\dot{x}, & \text{при } x \leq 0, \text{ левая нога} \end{cases}$$

и другая – с осциллятором типа Ван дер Поля – вида

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \lambda(\dot{x}_i^2 + x_i^2 - a^2)\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i &= -\ddot{y}, \\ \ddot{y} + 2h\dot{y} + \Omega^2 y &= -r \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i. \end{aligned}$$

Обе модели дают качественно похожие результаты. Модель типа Ван дер Поля проще для математического анализа и доказательства существования устойчивых синхронных колебаний в связанной системе «мост-пешеходы». Численный анализ модели с «перевернутым маятником», когда колебаниям каждого пешехода соответствует склеенный предельный цикл, свидетельствует о грубости наблюдаемого явления, поскольку синхронизация пешеходов происходит даже при 10% разбросе их параметров. Эти синхронные колебания пешеходов возникают в результате бифуркации, когда число пешеходов превышает критическое и приводят к раскачке моста.

Численные результаты [6], показывающие установление синхронизации между пешеходами на мосту, выложены на Youtube:

- Модель типа Ван дер Поля [идентичные осцилляторы (пешеходы)]:

<https://www.youtube.com/watch?v=-fujAgoSdOk>

- Модель перевернутый маятник [идентичные пешеходы]:

<https://www.youtube.com/watch?v=84H5mxQiOes>

- Модель перевернутый маятник [неидентичные пешеходы, расстройка параметров 10%]:

[https://www.youtube.com/watch?v=upNk\\_LrP63U](https://www.youtube.com/watch?v=upNk_LrP63U) .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–01–08776).

### **Список литературы**

1. S.H. Strogatz, D.M. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt, and E. Ott, Crowd synchrony on the Millennium Bridge, *Nature*, vol. 483, pp. 4344, 2005.
2. P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, S. Le Bourva, A. Low, R.M. Ridsdill-Smith, and M. Willford, The London Millennium Footbridge, *Struct. Eng.* vol. 79, pp. 1733, 2001.
3. S. Nakamura, Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking, *J. Struct. Eng. ASCE*, vol. 130, pp. 32-37, 2004.
4. B. Eckhardt, E. Ott, S.H. Strogatz, D.M. Abrams, and A. McRobie, Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge, *Phys. Rev. E*, vol. 75, 021110, 2007.
5. M.M. Abdulrehem and E. Ott, Low dimensional description of pedestrian-induced oscillation of the Millennium Bridge, *Chaos*, vol. 19, 013129, 2009
6. I. Belykh, R. Jeter, and V. Belykh, Wind-Induced Synchrony Causes the Instability of a Bridge: When Millennium Meets Tacoma// Abstracts of SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, Snowbird, Utah, USA, May 17-21, 2015, SIAM Publishing, p.125.

## БИФУРКАЦИИ И АТТРАКТОРЫ В СЕМЕЙСТВЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ

Белых В.Н., Киняпина М.С., Шестерикова Н.В.

Волжский государственный университет водного транспорта

Кафедра высшей математики

603950, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

Рассматривается нелинейная система общего вида с симметрией приводящаяся к нормальной форме системы Лоренцевского типа. Доказывается существование бифуркации гомоклинических орбит, приводящей к рождению счетного числа периодических циклов.

**Ключевые слова:** нелинейные трехмерные системы, странный аттрактор, бифуркация.

Рассмотрим обобщенную систему нелинейных трехмерных систем вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y + \lambda p(x, y, z) \equiv P, \\ \dot{y} = -H_x + \lambda q(x, y, z) \equiv Q, \\ \dot{z} = f(z) + \alpha r(x, y) \equiv R. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha, \lambda$  неотрицательные параметры [1].

В системе (1)  $H(x, y, z)$  — функция Гамильтона, имеющая следующий вид:

$$H(x, y, z) = h(x, y) + \beta r(x, y) \cdot z$$

Для остальных функций выполняются следующие условия:

$$P(0, 0, z) = 0, \quad Q(0, 0, z) = 0, \quad r(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = 0, \quad f(0) = 0, \\ f(z) \cdot z < 0, \quad z \neq 0, \quad f'(0) < 0.$$

Для данной системы основной результат может быть сформулирован в виде теоремы [2].

**Теорема** При прохождении точки параметров  $(\alpha > 0, \lambda > 0)$  из области  $(\alpha > 0, \lambda = 0)$  в область  $(\alpha = 0, \lambda < 0)$  одномерное неустойчивое многообразие  $W_0^U$  седлового цикла либо попадает на устойчивое многообразие седлового периодического движения, образуя гетероклиническую орбиту, либо возвращается в седло, образуя гомоклиническую кривую.

Рассмотрим частный случай системы (1), который получается при

$$h(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad r(x, y) = \frac{x^2}{2}, \quad p = 0, \quad q = -y, \quad f = -kz,$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (1 - \beta z - x^2)x - \lambda y, \\ \dot{z} = -kz + \frac{\alpha}{2} x^2. \end{cases} \quad (2)$$

функция Гамильтона которой имеет вид:

$$H(x, y, z) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \beta \cdot \frac{x^2}{2} \cdot z$$

Это система сводится к трехпараметрической системе Лоренцевского типа записанной в нормальной форме. Для нее получены результаты:

1) Система (2) обладает симметрией  $(x, y, z) \longleftrightarrow (-x, -y, z)$ .

- 2) Система (2) при  $k > 0$  имеет три состояния равновесия : начало координат  $O$  — седловая точка с одномерным неустойчивым многообразием  $W_0^u$ , и еще два симметричных состояния равновесия, которые сливаются с  $O$ . При  $\delta = 0$  система (10) имеет устойчивое интегральное многообразие  $W_0^s : \{z = 0\}$  с динамической системой на нем вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1 - x^2)x - \lambda y \end{cases}$$

- 3) Существует бифуркационная поверхность  $g(k, \delta, \lambda) = 0$  такая, что  $g(k, 0, 0) = 0$  соответствует двум симметричным гомоклиническим контурам (петлям), образованным  $W_0^u$  [2].
- 4) При  $\delta > 0$  стандартный аттрактор Лоренца появляется, когда неустойчивое многообразие  $W_0^u$  попадает на устойчивые  $2d$ -многообразия двух симметричных седловых циклов, рожденных из «гомоклинической бабочки». Рождение этой «гомоклинической бабочки» приводит к появлению хаотического множества траекторий [2].
- 5) Бесконечное множество бифуркаций сопровождает переход как от различных типов аттракторов Лоренца так и других множеств притягивающих предельных множеств, которые демонстрируют различные типы квазиаттракторов.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему:

**Теорема.** Существует бифуркация двух гомоклинических орбит, в результате которой в системе появляется нетривиальная гиперболическая компонента неблуждающего множества, содержащая счетное число седловых периодических орбит.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-08776/16).

#### Список литературы

1. Belykh V. N. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps //Translations of the American Mathematical Society-Series 2. – 2000. – Т. 200. – С.51-62.
2. Белых В.Н., Киняпина М.С., Шестерикова Н.В. Бифуркации гомоклинической восьмерки в семействе систем Лоренцевского типа / «Вестник Волжской государственной академии водного транспорта». 2015. – вып.№44. с. 93-97

## ОБОБЩЕННОЕ $H_\infty$ -УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ ВЫХОДА

**Бирюков Р.С.**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
общетехнический факультет.  
603950 Нижний Новгород, ул. Ильинская, д.65, e-mail: ruslan.biryukov@gmail.com

Для линейного непрерывного нестационарного объекта, выход которого измеряется в фиксированные моменты времени, вводится понятие уровня гашения возмущений как показатель совместного влияния начального и внешнего возмущений на целевой выход в наихудшем случае. Синтезируются дискретные обобщенные  $H_\infty$ -оптимальные законы управления по выходу, минимизирующие уровень гашения возмущений замкнутой системы.

Обобщенное  $H_\infty$ -управление, конечный временной интервал, внешнее возмущение, неопределенные начальные условия, непрерывный объект, дискретный выход, линейные матричные неравенства.

Рассмотрим на конечном интервале времени линейный нестационарный управляемый объект

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)v + B_2(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_N < +\infty, \quad (1)$$

где  $x \in R^{n_x}$  - состояние,  $u \in R^{n_u}$  - управление и  $v \in R^{n_v}$  - непрерывное внешнее возмущение - ограниченная по норме пространства  $L_2[t_0, t_N]$  кусочно-непрерывная справа вектор-функция. Как и выше, будем считать, что начальное состояние  $x_0$  в общем случае ненулевое и неизвестно, а его влияние на поведение объекта интерпретируется как начальное возмущение. Пусть в фиксированные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , образующие монотонно возрастающую последовательность, решение системы (1) удовлетворяет условию

$$x(t_k) = x(t_k - 0) + \Delta_k w_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

в котором  $w_k \in R^{n_w}$  - дискретное внешнее возмущение, ограниченное по  $l_2$ -норме. Кроме этого предположим, что выходы объекта (1) описываются соотношениями:

$$y_0 = C_{2,0}x(t_0) + D_{2,1}w_1, \quad y_k = C_{2,k}x(t_k - 0) + D_{2,k+1}w_{k+1}, \quad (3a)$$

и

$$z_0 = C_{1,0}x(t_0) + D_{1,0}u(t_0), \quad z_k = C_{1,k}x(t_k - 0) + D_{1,k}u(t_k), \quad (3b)$$

где  $y_k \in R^{n_y}$  - измеряемый выход,  $z_k \in R^{n_z}$  - целевой выход.

Определим для объекта (1) – (3) при заданном законе управления  $u$  уровень гашения возмущений  $\gamma_c(u)$  как показатель совместного влияния начального и внешнего возмущений на целевой выход в наихудшем случае:

$$\gamma_c(u) = \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 + x_0^T R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 + x_0^T R x_0}, \quad (4)$$

где  $L_2$ - и  $l_2$ -нормы определены стандартным образом [1, 2]. Весовые матрицы  $S = S^T > 0$  и  $R = R^T > 0$  в соотношении (4) задают приоритет соответственно между переходным процессом и компонентами терминального состояния и между внешними возмущениями и компонентами начального состояния. Таким образом, уровень гашения возмущений есть мера реакции объекта на внешние  $v$ ,  $w_k$  и начальное  $x_0$  возмущения: чем больше уровень гашения, тем сильнее реакция объекта и наоборот.

С другой стороны, часто представляет интерес выяснить какое влияние на рассматриваемый объект оказывает каждое из возмущений по отдельности. Для этого определим уровень гашения начального возмущения  $\gamma_c^0$ , уровень гашения непрерывного внешнего возмущения  $\gamma_c^v$  и уровень гашения дискретного внешнего возмущения  $\gamma_c^w$  по формулам:

$$\gamma_c^0(u) = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N}{\|x_0\|^2}, \quad \gamma_c^v(u) = \sup_{\|v\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N}{\|v\|_{L_2}^2}, \quad \gamma_c^w(u) = \sup_{\|w\|_{l_2} \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N}{\|w\|_{l_2}^2}.$$

Кроме этого, если на объект не действует начальное возмущение, то есть в начальный момент времени объект находился в покое, то определим смешанный уровень гашения внешних возмущений  $\gamma_c^{v,w}$  как

$$\gamma_c^{v,w}(u) = \sup_{\|v\|_{L_2} + \|w\|_{l_2} \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}.$$

Нетрудно показать, что в силу линейности рассматриваемого объекта, частные уровни гашения  $\gamma_c^0$ ,  $\gamma_c^v$ ,  $\gamma_c^w$  и  $\gamma_c^{v,w}$  связаны с  $\gamma_c$  следующим неравенством:

$$\gamma_c \geq \max \left\{ \lambda_{\max}^{-1}(R) \gamma_c^0, \gamma_c^{v,w} \right\} \geq \max \left\{ \lambda_{\max}^{-1}(R) \gamma_c^0, \gamma_c^v, \gamma_c^w \right\} \quad (5)$$

Поставим задачу синтезировать управление по измеряемому выходу на конечном интервале времени в виде дискретного динамического регулятора полного порядка с нулевыми начальными условиями, описываемого системой

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A_{r,k} \hat{x}_k + B_{r,k} y_k, \quad \hat{x}_0 = 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ u_k &= C_{r,k} \hat{x}_k + D_{r,k} y_k, \end{aligned} \quad (6)$$

при котором уровень гашения возмущений  $\gamma_c(\Theta_k)$  замкнутой системы будет меньше заданного положительного  $\gamma$ . Здесь  $\hat{x}_k \in R^{n_x}$  — состояние регулятора и

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} A_{r,k} & B_{r,k} \\ C_{r,k} & D_{r,k} \end{pmatrix}.$$

Подобный закон управления назовем обобщенным  $H_\infty$ -управлением по выходу, а регулятор (6) - обобщенным  $H_\infty$ -регулятором. Соответственно скажем, что регулятор (6) является оптимальным, если

$$\Theta_k^* = \arg \inf_{\Theta_k} \gamma_c(\Theta_k), \quad \gamma_c = \gamma_c(\Theta_k^*).$$

Аналогично, используя уровень гашения начального возмущения  $\gamma_c^0(\Theta_k)$ , уровень гашения непрерывных внешних возмущений  $\gamma_c^v(\Theta_k)$ , уровень гашения дискретных внешних возмущений  $\gamma_c^w(\Theta_k)$  и уровень гашения смешанных внешних возмущений  $\gamma_c^{v,w}(\Theta_k)$ , определим дискретные  $\gamma_0$ - и  $H_\infty$ -регуляторы по выходу для объекта (1) – (3). Например, скажем, что регулятор  $\Theta_k$  является дискретным  $H_\infty$ -регулятором по выходу, обеспечивающим гашение непрерывных внешних возмущений с заданным коэффициентом  $\gamma$ , если выполняется неравенство  $\gamma_c^v(\Theta_k) < \gamma$ .

Справедлива следующая теорема.



**Теорема.1** Для объекта (1) – (3) при заданном  $\gamma > 0$  существует дискретное обобщенное  $H_\infty$ -управление по выходу на конечном интервале времени, если линейные матричные неравенства

$$N_k^\Gamma \begin{pmatrix} A_k^\top X_{k+1} A_k - X_k & * & * & * \\ B_{v,k+1}^\top X_{k+1} A_k & B_{v,k+1}^\top X_{k+1} B_{v,k+1} - \gamma I & * & * \\ \Delta_{k+1}^\top X_{k+1} A_k & \Delta_{k+1}^\top X_{k+1} B_{v,k+1} & \Delta_{k+1}^\top X_{k+1} \Delta_{k+1} - \gamma I & * \\ C_{1,k} & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} N_k < 0, \quad (7a)$$

$$M_k^\Gamma \begin{pmatrix} A_k Y_k A_k^\top - Y_{k+1} & * & * & * \\ C_{1,k} Y_k A_k^\top & C_{1,k} Y_k C_{1,k}^\top - I & * & * \\ B_{v,k+1}^\top & 0 & -\gamma I & * \\ \Delta_{k+1}^\top & 0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} M_k < 0, \quad (7б)$$

$$\begin{pmatrix} X_k & I \\ * & Y_k \end{pmatrix} 0, \quad X_0 < \gamma R, \quad (7в)$$

где  $A_k = \Phi(t_{k+1}, t_k)$ ,  $\Phi(t, s)$  - матрица Коши системы, а матрицы  $B_{v,k}$  и  $B_{u,k}$  определяются соотношениями

$$B_{v,k+1} B_{v,k+1}^\top = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B_1(s) B_1^\top(s) \Phi^\top(t_{k+1}, s) ds, \quad B_{u,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B_2(s) ds,$$

разрешимы относительно матриц  $X_k^\top = X_k > 0$ ,  $Y_k^\top = Y_k > 0$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , при  $X_N = S_{11}^{-1}$ ,  $Y_N = (S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^\top)^{-1}$ ,  $S_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  -  $(n_x \times n_x)$ -блоки матрицы  $S$ , а столбцы матриц  $N_k$  и  $M_k$  образуют базисы ядер матриц  $(C_{2,k} \ 0 \ D_{2,k} \ 0)$  и  $(B_{u,k}^\top \ D_{1,k}^\top \ 0 \ 0)$  соответственно.

Для построения обобщенного  $H_\infty$ -оптимального регулятора (6) сначала находится минимальное значение  $\gamma$  и соответствующие матрицы  $X_k$  и  $Y_k$ , удовлетворяющие (7), затем, используя подход, описанный в [3], вычисляются матрицы  $\Theta_k$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект 14-01-00266) и в рамках выполнения НИР 3021 «Управление механическими системами в условиях неопределенности» с финансированием из средств Минобрнауки России, в рамках базовой части государственного задания на научные исследования.

### Список литературы

1. Бирюков Р.С. Обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление линейным непрерывно-дискретным объектом // Автоматика и телемеханика. 2016. № 3. С. 33–51.
2. Бирюков Р.С. Обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление непрерывным линейным объектом по дискретным наблюдениям выхода // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIII Международной конференции (1-3 июня 2016 г., Москва) – М.: ИПУ РАН, 2016. С. 59–62.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.

## **ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕНКИ КАНАЛА С СИЛЬНОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

А.Ю. Блинкова<sup>1</sup>, Д.В. Кондратов<sup>2</sup>, Л.И. Могилевич<sup>1</sup>, В.С. Попов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
410054 Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: vic\_p@bk.ru

<sup>2</sup>Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации  
410031 Саратов, ул. Соборная, 23/25, e-mail: kondratovdv@yandex.ru

Рассмотрена задача о продольных и поперечных колебаниях упругозакрепленной стенки узкой щели, заполненной пульсирующей сильновязкой несжимаемой жидкостью. Исследована плоская задача для режима установившихся гармонических колебаний. Найдены распределения гидродинамических параметров слоя жидкости и законы перемещения стенки. Показано, что на резонансной частоте, в случае равностенных упругих закреплений стенки щелевого канала, амплитуда ее продольных колебаний больше, чем амплитуда ее поперечных колебаний.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, упругозакрепленная стенка, вязкая жидкость, пульсация давления.

Исследованию проблем гидроупругости посвящено достаточно много работ, например, сошлемся на обзоры, выполненные в [1-3]. При исследовании проблем гидроупругости можно выделить работы по учету влияния вязкости жидкости. Приведем здесь работы [4-12], в которых исследованы различные постановки задач гидроупругого взаимодействия однородных пластин и цилиндрических оболочек со слоем вязкой жидкости. В [13-20] рассмотрены гидроупругие изгибные колебания геометрически нерегулярных пластин и оболочек, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости. В то же время работ, посвященных исследованию продольных и поперечных гидроупругих колебаний среди указанных работ нет. В предлагаемой работе рассматриваются продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки узкого щелевого канала, вызванные ее взаимодействием с сильновязкой пульсирующей жидкостью, заполняющей данный канал.

1. Рассмотрим узкий щелевой канал, образованный двумя параллельными абсолютно жесткими пластинами, размер которых  $2\ell$  на  $b$ . Нижняя пластина на торцах имеет упругие закрепления, позволяющие ей совершать продольные и поперечные колебания. Для определенности будем далее считать, что имеет место плоская задача, при этом длина канала  $2\ell$  значительно меньше ширины пластин  $b$ , расстояние между стенками канала – ширина щели  $\delta \ll \ell$ . Канал полностью заполнен сильновязкой несжимаемой жидкостью. Истечение жидкости на торцах канала считаем свободным. На торцах канала справа и слева предполагается наличие торцевых полостей, в правой полости давление равно нулю, а в левой поддерживается заданный закон пульсации давления

$$p^* = p_m^* f_p(\omega t), f_p(\omega t) = \sin(\omega t), \quad (1)$$

здесь  $p_m^*$  – амплитуда пульсации,  $\omega$  – частота пульсаций,  $t$  – время.

В приведенной постановке, в результате взаимодействия нижней стенки канала с жидкостью возникают ее продольные и поперечные колебания. При этом в силу вязкости жидкости переходные процессы быстро затухают и возникают установившиеся вынужденные гармонические колебания [21].

Введем в рассмотрение декартову систему координат связанную с нижней стенкой канала. Уравнения продольных и поперечных колебаний стенки имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + n_x x &= N_x, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + n_z z &= N_z, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $m$  – масса стенки,  $n_x, n_z$  – коэффициенты жесткости упругих связей на торцах стенки,  $N_x, N_z$  – тангенциальная и нормальная составляющая силы, действующей на стенку канала со стороны тонкого слоя сильновязкой жидкости,  $x = x_m f_x(\omega t)$ ,  $z = z_m f_z(\omega t)$  – искомые законы продольного и поперечного перемещения стенки,  $x_m, z_m$  – амплитуды колебаний стенки.

Составляющие  $N_x, N_z$  определяются касательным и нормальным напряжениями в жидкости [22], и могут быть представлены как

$$\begin{aligned} N_x &= b \int_{-\ell}^{\ell} q_{xy} \Big|_{x=0} dx, \quad q_{xy} = \rho \nu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \\ N_z &= b \int_{-\ell}^{\ell} q_{zz} \Big|_{x=0} dx, \quad q_{zz} = -p + 2\rho \nu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $q_{xy}, q_{zz}$  – касательное и нормальное напряжения в жидкости,  $p$  – давление в тонком слое сильновязкой жидкости,  $u_x, u_z$  – проекции вектора скорости жидкости на соответствующие оси,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Динамика сильновязкой жидкости в щели описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности, в которых опущены локальные и конвективные ускорения [22]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Краевые условия для уравнений (4) имеют вид

$$u_x = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{при } z = \delta, \quad u_x = dx/dt, \quad u_z = dz/dt \quad \text{при } z = 0, \quad (5)$$

$$p = p^*(\omega t) \quad \text{при } x = -\ell, \quad p = 0 \quad \text{при } x = \ell. \quad (6)$$

2. Введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные

$$\xi = x/\ell, \quad \zeta = z/\delta, \quad \tau = \omega t, \quad u_z = z_m \omega U_\zeta, \quad u_x = U_\xi z_m \omega / \psi, \quad p = P \nu \rho z_m \omega \psi^{-2} / \delta, \quad (7)$$

$$\psi = \delta/\ell \ll 1, \quad p^*(\nu \rho z_m \omega \psi^{-2} / \delta)^{-1} = P^*.$$

Подставляя (7) в (3)-(6) получаем следующую задачу гидродинамики тонкого слоя сильновязкой жидкости в безразмерном виде

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \psi^2 \left[ \psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_\xi &= 0, \quad U_\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \\ U_\xi &= \psi(x_m/z_m) df_x/d\tau, \quad U_\zeta = df_z/d\tau \quad \text{при } \zeta = 0, \\ P &= P^* \quad \text{при } \xi = -1, \quad P = 0 \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Напряжения, действующие со стороны жидкости на стенку канала, с точностью до  $\psi^2$  запишутся как

$$q_{xy} = \frac{\rho v z_m \omega}{\delta \psi} \left( \psi^2 \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} \right) = \frac{\rho v z_m \omega}{\delta \psi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta},$$

$$p_{zz} = -\frac{\rho v z_m \omega}{\delta \psi^2} \left( P - 2\psi^2 \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\rho v z_m \omega}{\delta \psi^2} P,$$
(10)

а выражения (3) примут вид

$$N_x = b \int_{-\ell}^{\ell} q_{xy} \Big|_{z=0} dx = \frac{b \ell \rho v z_m \omega}{\delta \psi} \int_{-1}^1 \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} d\xi.$$

$$N_z = b \int_{-\ell}^{\ell} q_{zz} \Big|_{z=0} dx = -\frac{b \ell \rho v z_m \omega}{\delta \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi.$$
(11)

Пренебрегая в (8) членами порядка  $\psi^2$  получим задачу

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$
(12)

с краевыми условиями (9).

Решение (11) с краевыми условиями (9) имеет вид

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi \frac{x_m}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} (1 - \zeta), \quad U_\zeta = \frac{df_z}{d\tau} + \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2},$$

$$P = \frac{df_z}{d\tau} 6(1 - \zeta^2) + \frac{P^*}{2} (1 - \zeta),$$
(13)

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi} - \psi \frac{x_m}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} = \frac{1}{4} P^* + \frac{df_z}{d\tau} 6\xi - \psi \frac{x_m}{z_m} \frac{df_x}{d\tau}.$$

Таким образом, проекции (11) имеют вид

$$N_x = \frac{b \ell \rho v z_m \omega}{\delta \psi} \int_{-1}^1 \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} d\xi = \frac{b \ell \rho v z_m \omega}{2 \delta \psi} P^* - \frac{2 b \ell \rho v}{\delta} x_m \omega \frac{df_x}{d\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} p^* b \delta - K_x \frac{dx}{dt},$$

$$N_z = -\frac{b \ell \rho v z_m \omega}{\delta \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi = -\frac{b \ell \rho v z_m \omega}{\delta \psi^2} P^* - 8 \frac{b \ell \rho v}{\delta \psi^2} z_m \omega \frac{df_z}{d\tau} =$$

$$= -p^* b \ell - K_z \frac{dz}{dt}.$$
(14)

где  $K_x = 2 \frac{b \ell \rho v}{\delta}$   $K_z = 8 \frac{b \ell \rho v}{\delta \psi^2}$  – коэффициенты демпфирования продольных и поперечных колебаний упругозакрепленной стенки.

С учетом (14) уравнения продольных и поперечных колебаний упругозакрепленной стенки канала имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K_x \frac{dx}{dt} + n_x x = \frac{1}{2} p^* b \delta,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + K_z \frac{dz}{dt} + n_z z = -p^* b \ell.$$
(15)

Для режима установившихся гармонических колебаний решение (15) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{p_m^* b \delta}{2} \frac{1}{(n_x - m\omega^2)^2 + K_x^2 \omega^2} [(n_x - m\omega^2) \sin \omega t - K_x \omega \cos \omega t] = \\
 &= \frac{p_m^* b \delta}{2} \frac{1}{\sqrt{(n_x - m\omega^2)^2 + K_x^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \arctg(K_x \omega / (m\omega^2 - n_x))), \\
 z &= -p_m^* b \ell \frac{1}{(n_z - m\omega^2)^2 + K_z^2 \omega^2} [(n_z - m\omega^2) \sin \omega t - K_z \omega \cos \omega t] = \\
 &= -p_m^* b \ell \frac{1}{\sqrt{(n_z - m\omega^2)^2 + K_z^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \arctg(K_z \omega / (m\omega^2 - n_z))).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Следует отметить, что из выражений (16) следует, что для случая равножестких закреплений стенки  $n_x = n_z = n$  отношение амплитуд продольных колебаний к амплитудам поперечных колебаний на резонансной частоте (т.е.  $n - m\omega^2 = 0$ ) равно  $2/\psi$ , следовательно, в этом случае амплитуда продольных колебаний будет в  $2/\psi$  больше амплитуды поперечных колебаний.

Согласно (13) решение (16) позволяет представить гидродинамические параметры слоя жидкости в размерном виде

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{(z/\delta)^2 - (z/\delta)}{4} \left[ 24 \frac{x}{\delta} \frac{dz}{dt} + \frac{\delta^2}{\nu \rho \ell} p^* \right] + (1 - z/\delta) \frac{dx}{dt}, \\
 u_z &= (1 + 2(z/\delta)^3 - 3(z/\delta)^2) \frac{dz}{dt}, \\
 p &= \frac{6\nu\rho\ell^2}{\delta^3} (1 - (x/\ell)^2) \frac{dz}{dt} + \frac{(1 - x/\ell)}{2} p^*.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Таким образом, получены законы продольных и поперечных колебаний упругозакрепленной стенки канала и определены законы распределения гидродинамических параметров слоя жидкости в канале. При этом показано, что в случае равножесткости упругих закреплений стенки, амплитуда ее продольных колебаний превышает амплитуду ее поперечных колебаний.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 15-01-01604-а

### Список литературы

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Горбоконенко В.Д. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». Ульяновск, 2008, 188 с.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов: Изд-во Саратов. гос. агр. ун-та им. Н.И.Вавилова, 2003. 156 с.
4. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78
5. Попова А.А. Взаимодействие шарнирно закрепленной пластины со слоем вязкой жидкости // Научные труды SWorld. 2014. Т. 29. № 4. С. 3-5.
6. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 4. № 1 (28). С. 25-31.

7. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 23-32.
8. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
9. Попов В.С., Попова А.А. Исследование гидроупругих колебаний стенок плоского канала при инерционном возбуждении // Научные труды SWorld. 2013. Т. 3. № 3. С. 77-79.
10. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
11. Попова А.А., Попова Е.В. Исследование давления в кольцевом слое вязкой жидкости в канале с подвижной стенкой // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2015. № 5 (13). С. 53-59.
12. Попова А.А. Динамика вязкой жидкости в кольцевом канале при вибрации внутренней стенки // Научные труды SWorld. 2015. Т. 12. № 3 (40). С. 56-59.
13. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
14. Попов В.С., Попова А.А., Волков М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
15. Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости плоского канала со стенкой переменной толщины // Научные труды SWorld. 2014. Т. 27. № 3. С. 25-27.
16. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратов, 2008. 32 с.
17. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук/Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.
18. Агеев Р.В., Попова А.А. Динамика взаимодействия потока вязкой жидкости с упругой геометрически нерегулярной стенкой канала // Научные труды SWorld. 2015. Т. 7. № 2 (39). С. 37-40.
19. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
20. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Плаксина И.В., Попова А.А. Моделирование процессов динамического взаимодействия упругой геометрически нерегулярной внешней оболочки с тонким пульсирующим слоем вязкой жидкости // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. 2015. С. 1917-1920.
21. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
22. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т.1 727 с.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ  
В ДВУХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ**

**Ю.А. Блинков, А.В. Месянжин, Л.И. Могилевич**

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, e-mail: [blinkovua@info.sgu.ru](mailto:blinkovua@info.sgu.ru)

ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики».

410005, Саратов, ул. Б. Садовая, 239, e-mail: [a.v.mesyanzhin@gmail.com](mailto:a.v.mesyanzhin@gmail.com)

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
физико-технический факультет.

410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: [mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

Методом возмущений получена математическая модель волнового процесса в бесконечно длинных физически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках. Эта модель отличается от известных наличием несжимаемой вязкой жидкости между оболочками и внутри. Она получена на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями. Модель представляет собой систему связанных обобщенных модифицированных уравнений Кортевега де Вриза.

*Ключевые слова:* нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

**Постановка задачи**

Волновые процессы в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках не взаимодействующих с вязкой жидкостью рассмотрены в [1-4].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных физически нелинейных оболочках [5], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Кроме того, получена математическая модель волнового процесса в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [6] при наличии несжимаемой вязкой жидкости между ними. Эта модель представляется в виде системы связанных обобщенных уравнений КдВ.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рисунке 1, между которыми и внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью  $\delta$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ ;  $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$  - внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внешний радиус внутренней оболочки;  $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внутренний радиус внутренней оболочки,  $R^{(1)}$ ,  $R^{(2)}$  - радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек;  $h_0^{(1)}$ ,  $h_0^{(2)}$  - их толщины. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней - индексом (1).

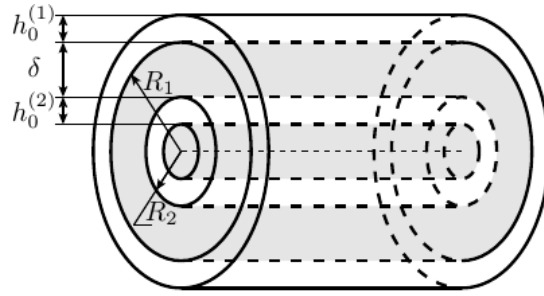


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа-Лява, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$  [7]

$$\sigma_i = Ee_i + me_i^3 \quad (1)$$

здесь  $E$  - модуль Юнга;  $m$  - константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  записываются в случае осесимметричного течения. На границе оболочек и жидкости на рисунке 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости.

Уравнения динамики оболочек записываются в виде [8]

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \left[ U_x^{(i)} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left( U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\rangle_x - \\ & - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x^{(i)}(i-1); \\ & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} W_{xxxx}^{(i)} - \frac{1}{R} \left( \mu_0 U_x^{(i)} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)} \right) \right\rangle [1 \pm \\ & \pm \frac{4m}{3E} \left( U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}] \right\rangle + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $h_0^{(i)}$  - толщины оболочек;  $\mu_0$  - коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  - плотность;  $U^{(i)}$ ,  $W^{(i)}$  - продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны,  $x$  - продольная координата;  $t$  - время;  $q_x^i$ ,  $q_n$  - напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками;  $\tilde{q}_x$ ,  $\tilde{q}_n$  - напряжения со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

### Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости между упругими оболочками и во внутренней оболочке

Принимая длину волны  $l$  за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения  $u_m$  и прогиба  $w_m$ , переходим к безразмерным переменным.

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \quad (3)$$

Здесь  $c_0$  скорость звука в оболочке. Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \frac{R^{(i)}}{l} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon) \frac{E}{m} = O(\varepsilon); \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (4)$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время



$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (5)$$

где  $c$  - неизвестная безразмерная скорость волны.

Проведя разложения по малому параметру получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} \mp \\ & \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} u_{10\xi}^{(i)2} u_{10\xi\xi}^{(i)} = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x (i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left( \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю, и получаются независимые модифицированные уравнения Кортвега де Вриза (МКДВ). Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнения гидродинамики для случая кольцевого и кругового сечения трубы.

### Кольцевое сечение

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, r = R_2 + \delta r^*, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l} \\ p &= \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right) \\ \frac{w_m}{R_2} &= \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Во введенных безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ & = \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1+\psi_r^*)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2 (1+\psi_r^*)^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right]; \\ & \frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1+\psi_r^*)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}; \\ & \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2 (1+\psi_r^*)} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что введены переменные  $\xi = x^* - ct^*$  и  $\tau = \varepsilon t^*$ ,  $c = \sqrt{1-\mu_0^2}$  найдем

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[ \int \left( c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi = 12 \sqrt{1-\mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi; \\ \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n &= \frac{\rho_0 v c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1-\mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi; \\ \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) \end{aligned} \quad (9)$$

и учитывая, что  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \frac{\rho v}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0 \mu_0} 12 \sqrt{1-\mu_0^2} [u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}] \\ q_x^{(i)} &= \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i. \end{aligned} \quad (10)$$

### Круговое сечение

Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; r^* = \frac{r}{R_3}; t^* = \frac{c_0}{l} t; x^* = \frac{1}{l} x \\ p &= \frac{\tilde{\rho} \tilde{v} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \frac{R_3}{l} = \psi = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right); \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

В этих переменных получим уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} \psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} \right\} &= \psi^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right]; \\ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}; \\ \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая, что введены переменные  $\xi = x^* - ct^*$  и  $\tau = \varepsilon t^*$ ,  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ , найдем с точностью до  $\varepsilon$

$$P = 8\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} u_{10}^{(2)}. \quad (13)$$

При этом

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Тогда учитывая, что  $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}$  получаем

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[ 1 - \left( 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}. \quad (15)$$

### Уравнение динамики оболочки

Система уравнений с учетом найденной правой частью представляется в виде

$$\begin{aligned} u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} \mp \\ \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(1)2} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ 1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)}] = 0; \\ u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} \mp \\ \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(2)2} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ 1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)}] - \\ - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{v}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, с принятой точностью,  $\frac{h_0}{R} \approx O(\varepsilon)$ ,  $\frac{\delta}{R_2} = \psi \ll 1$  обозначено  $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ , при этом положено  $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$ .

Можно также ввести обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1\xi$ ,  $t = c_2\tau$  и представить систему уравнений (16) в виде

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\phi^{(1)2}\phi_\eta^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0, \\ \phi_t^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\phi^{(2)2}\phi_\eta^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

здесь  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $\sigma$  выражаются через физические параметры задачи. Система уравнений (17) имеет в качестве точного решения при  $\sigma=0$  (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) решение в виде солитона с пьедесталом, которое обобщает решение Слюняева-Пелиновского [9] при  $D=0$

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = D + \frac{k^2}{\mp 2D - \sqrt{4D \mp k^2} \cosh\left(k\left[x - (\mp 6D^2 + k^2)t\right]\right)}. \quad (18)$$

### Численное моделирование

В работах [10-12] развит подход к построению разностных схем, основанный на построение переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем систему уравнений (17) в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \left( -\phi_{\eta\eta}^{(1)} \pm 2\phi^{(1)3} \right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} \left( \phi^{(1)} - \phi^{(2)} \right) dt d\eta &= 0, \\ \oint_{\partial\Omega} \left( -\phi_{\eta\eta}^{(2)} \pm 2\phi^{(2)3} \right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} \left( \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)} \right) dt d\eta &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

для любой области  $\Omega$ . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим  $u^{(i)j} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$  и выберем в качестве базового контур, показанный на рисунке 2.

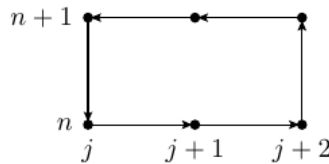


Рис. 2 Базовой контур для уравнения (19)

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \quad (20)$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по  $\eta$  формулу трапеций, а по второй производной по  $\eta$  формулу среднего значения, и полагая  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ , перепишем соотношения (19), (20) в виде

$$\begin{aligned}
 & \left( -\left( u_{\eta\eta j}^{(1)n} + u_{\eta\eta j}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n+1} \right) \pm \right. \\
 & \left. \pm 2\left( u_j^{(1)3^n} + u_j^{(1)3^{n+1}} - u_{j+2}^{(1)3^n} - u_{j+2}^{(1)3^{n+1}} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\
 & + \left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j+1}^{(1)n} \right) \cdot 2h + \left( \left( u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\
 & \left( -\left( u_{\eta\eta j}^{(2)n} + u_{\eta\eta j}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n+1} \right) \pm \right. \\
 & \left. \pm 2\left( u_j^{(2)3^n} + u_j^{(2)3^{n+1}} - u_{j+2}^{(2)3^n} - u_{j+2}^{(2)3^{n+1}} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j+1}^{(2)n} \right) \cdot 2h + \\
 & + \left( \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \left( u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \sigma \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\
 & \left( u_{\eta j+1}^{(i)n} + u_{\eta j}^{(i)n} \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^{(i)n} - u_j^{(i)n}, \\
 & u_{\eta\eta j+1}^{(i)n} \cdot 2h = u_{\eta j+2}^{(i)n} - u_{\eta j}^{(i)n}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку пакет [12] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (17) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции  $F^{(i)} = \mp 2u^{(i)3}$ . За счет выбора допустимого упорядочения так чтобы  $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$ , а затем по переменным  $n, j$ , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (17), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + \\
 & + \frac{\left( u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n} \right)}{4h^3} \mp \\
 & \mp 2 \frac{\left( u_{j+1}^{(1)3^{n+1}} - u_{j-1}^{(1)3^{n+1}} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)3^n} - u_{j-1}^{(1)3^n} \right)}{4h} + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0. \\
 & \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + \\
 & + \frac{\left( u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1} \right) + \left( u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n} \right)}{4h^3} \mp \\
 & \mp 2 \frac{\left( u_{j+1}^{(2)3^{n+1}} - u_{j-1}^{(2)3^{n+1}} \right) + \left( u_{j+1}^{(2)3^n} - u_{j-1}^{(2)3^n} \right)}{4h} + \\
 & + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \sigma \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линейризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

Количество итераций для достижения точности  $10^{-12}$  на следующем временном слое, как правило, не превышало 2–3. Шаг по времени  $t$  брался равным половине шага по переменной  $\eta$ . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://\scipy.org>).

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работе [6], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой ее не было в начальный

момент времени и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени.

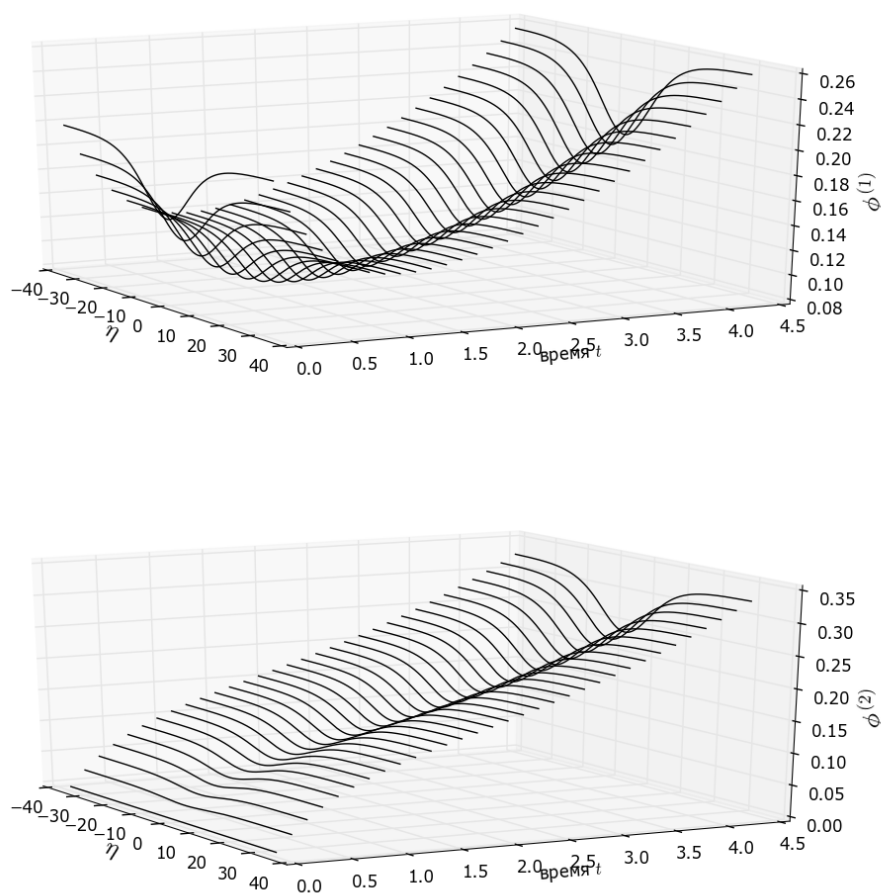


Рис. 3 Графики численного решения уравнений (17) при  $\sigma = 0.5$  с начальным условием  $\phi^{(2)} = 0$  и с  $\phi^{(1)}$  взятого из точного решения (18) при  $t = 0$  с  $k = 0.2, D = 0.2$  и выбранным верхним знаком –

Выполненные вычислительные эксперименты, показанные на рисунке 3, позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра  $\sigma > 0$  ( $\mu_0 < 1/2$  неорганический материал). Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном росте во внутренней оболочке.

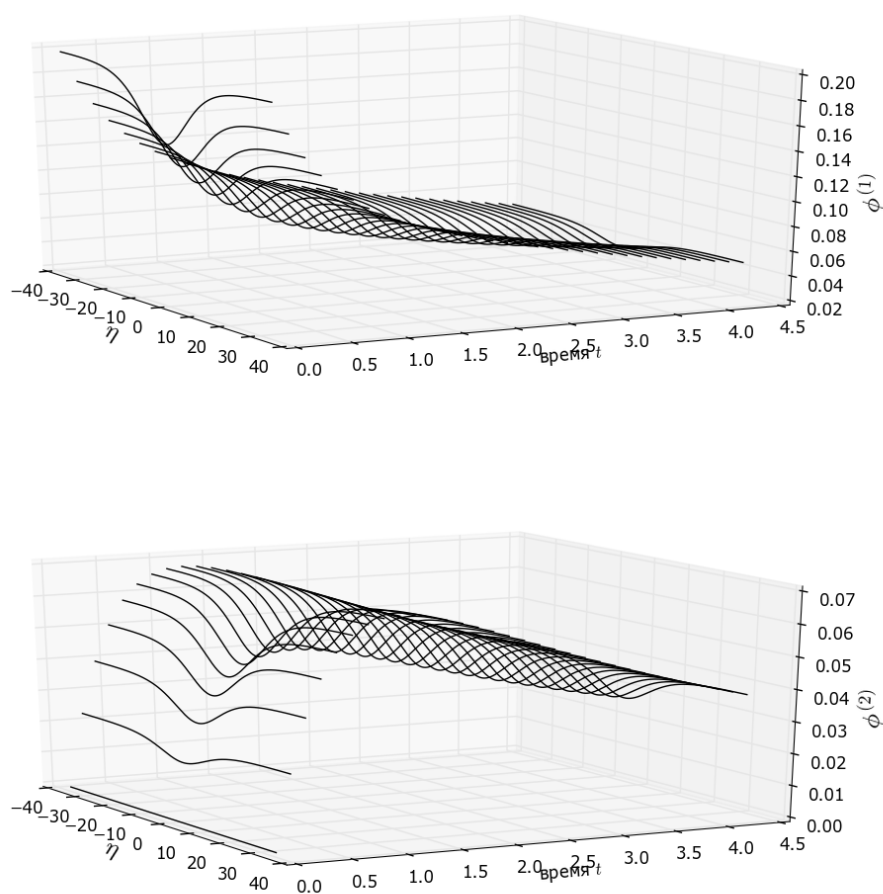


Рис. 4 Графики численного решения уравнений (17) при  $\sigma = -0.5$  с начальным условием  $\phi^{(2)} = 0$  и с  $\phi^{(1)}$  взятого из точного решения (18) при  $t = 0$  с  $k = 0.2, D = 0.2$  и выбранным верхним знаком -

На рисунке 4 показано влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра  $\sigma < 0$  ( $\mu_0 > 1/2$  органический материал). Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным синхронным падением.

### Заключение

В представленной работе было проведено исследование модели волновых явлений двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа — Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка-Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных

уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ для численного решения задачи Коши, при выборе в качестве начального условия точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек при отсутствии жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00175

### **Список литературы**

1. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 3. С. 359-363.
2. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стеснённым вращением //Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2, № 4. С. 67-75.
3. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вяз- коупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116-117.
4. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 318 с.
5. Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Физика. - 2012. - Т. 12, № 2. - С. 12-18.
6. Блинкова А. Ю., Ковалева И. А., Могилевич Л. И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник российского университета дружбы народов. серия: математика, информатика, физика. - 2013. - Т. 3. - С. 42-51.
7. Каудерер Г. С. Нелинейная механика. - М.: Иностранная литература, 1961. - 778 с.
8. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Наука, 1972. - 432 с.
9. Слюняев А. В., Пелиновский Е. Н. Динамика солитонов большой амплитуды // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. - 1999. - Т. 116, № 1. - С. 318-335.
10. Гердт В. П., Блинков Ю. А. О стратегии выбора немультимпликативных продолжений при вычислении базисов Жане // Программирование. Т. 33, № 3. 2007. С. 34-43.
11. Блинков Ю. А., Гердт В. П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. Т. 34, № 2. 2008. С. 67-80.
12. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. 2009. P. 94-105.

**НОВЫЕ АСИМПТОТИКИ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНСЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
С САМОИНДУЦИРОВАННЫМ ДАВЛЕНИЕМ**

**А.Н. Богданов, В.Н. Диесперов, В.И. Жук**

Москва, НИИ Механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Обсуждается асимптотическое поведение дисперсионных кривых, построенных при исследовании устойчивости пограничных слоев с самоиндуцированным давлением при трансзвуковом обтекании. Проводится сравнение результатов, полученных при использовании классической [1] и модифицированной [2] моделей. Показано, что имеют место дополнительные ветви дисперсионных кривых, ранее не описанные в научной литературе. Объяснено поведение 23-й моды дисперсионной кривой, anomальное поведение которой впервые было обнаружено А.В. Чернышевым в расчетах при выполнении диссертационной работы [3].

**Список литературы**

1. Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока// ПМТФ. 1990. № 2. С. 65-71.
2. Богданов А.Н., Диесперов В.Н. Моделирование нестационарного трансзвукового течения и устойчивость трансзвукового пограничного слоя// ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 394-403.
3. Чернышев А.В. Исследование свойств дисперсионных соотношений в асимптотической модели неклассического пограничного слоя. Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 2010. 127 с.



## **ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА С ВОЗВРАТНОЙ ПРУЖИНОЙ**

**Н.Н. Болотник, А.М. Нунупаров, В.Г. Чашухин**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.  
119 Москва, пр. Вернадского, 101-1, e-mail: [bolotnik@ipmnet.ru](mailto:bolotnik@ipmnet.ru)

Анализируется и моделируется движение мобильного капсульного робота вдоль прямой на шероховатой горизонтальной плоскости. Робот состоит из корпуса и внутреннего тела, соединенного с корпусом пружиной. Движение системы возбуждается силой взаимодействия внутреннего тела с корпусом, которая изменяется периодически в широтно-импульсном режиме. Исследуется средняя скорость перемещения робота как функция параметров возбуждения.

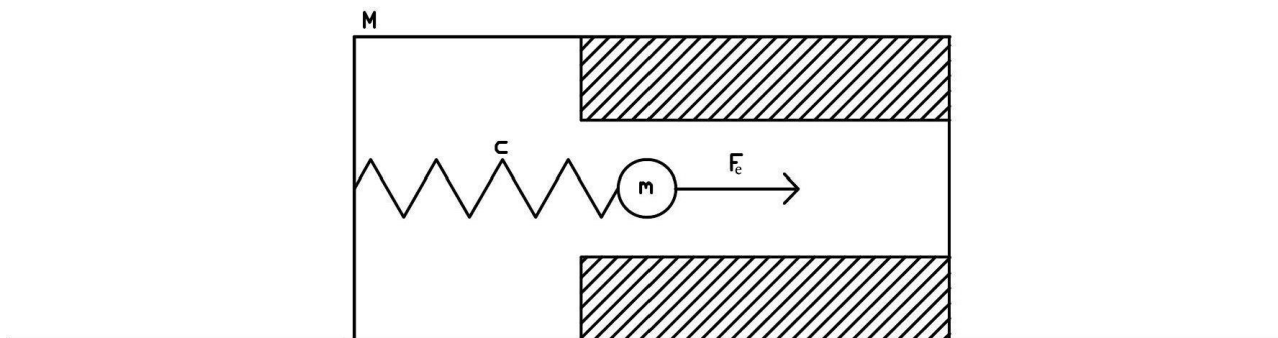
*Ключевые слова:* вибрационные роботы, колебания, управление, сухое трение.

### **1. Введение**

Капсульный робот – это искусственная локомоционная система, которая передвигается в сопротивляющейся среде без внешних движителей (колес, ног, гусениц) за счет движения внутренних тел и взаимодействия корпуса (капсулы) робота с внешней средой. Капсульные роботы имеют ряд преимуществ перед локомоционными роботами других типов. Они просты конструктивно, не требуют сложных механизмов для передачи движения от приводов к движителям и легко поддаются миниатюризации. Кроме того, капсульные роботы можно выполнить герметичными, без выступающих деталей, что делает такие роботы перспективными для применения в «ранимых» средах, в частности в медицине для производства эндоскопии или прецизионной доставки медикамента к пораженному органу внутри тела человека. Капсульные роботы могут иметь многочисленные инженерные применения, например, для технической инспекции труб малого диаметра. Проблемы динамики, управления движением и оптимизации локомоционных систем с внутренними телами, перемещающихся в сопротивляющихся средах, ставились и решались в ряде публикаций (см., например, [1]). Новизна данной работы состоит в наличии в системе возвратной пружины, благодаря чему система становится колебательной, и в ней наблюдаются явления, характерные для таких систем, в частности, резонансные явления, которые могут быть использованы для управления капсульным роботом с возвратной пружиной. Движение системы возбуждается силой взаимодействия корпуса с внутренним телом, которая изменяется периодически в широтно-импульсном режиме.

### **2. Механическая модель робота**

Робот состоит из жесткого корпуса и электромагнитного (соленоидного) привода, расположенного внутри. Привод включает электрическую катушку (соленоид) и сердечник (внутреннее тело), который изготовлен из ферромагнитного материала и может перемещаться внутри соленоида вдоль его оси. Сердечник соединен с корпусом пружиной, ось которой совпадает с осью соленоида. Ось соленоида параллельна оси корпуса робота. Корпус взаимодействует с внешней средой, в которой движется робот. Робот приводится в движение посредством электромагнитной силы, которая действует на сердечник при подаче электрического напряжения на соленоид. Привод устроен так, что электромагнитная сила действует только в одном направлении, стремясь втянуть сердечник в катушку соленоида. Возвратное движение сердечника происходит благодаря пружине. Рассматриваемая система схематически показана на рис. 1.



**Рис. 1. Капсульный робот.  $M$  – масса корпуса,  $m$  – масса внутреннего тела,  $c$  – жесткость пружины,  $F_e$  – управляющая сила**

В настоящей статье рассматривается модель, в которой сила, приложенная к сердечнику, принимается за управляющую переменную. Динамика электрической цепи соленоида не учитывается. Предполагается, что робот движется вдоль горизонтальной прямой, параллельной оси его корпуса.

### 3. Уравнения движения

Введем обозначения:  $M$  – масса корпуса,  $m$  – масса сердечника,  $F_e$  – сила, приложенная соленоидом к сердечнику,  $F_{fr}$  – сила сопротивления (трения), действующая на корпус со стороны среды,  $c$  – коэффициент жесткости пружины,  $x$  – координата, характеризующая положение центра масс корпуса относительно неподвижной системы отсчета,  $\xi$  – координата, характеризующая положение сердечника относительно корпуса. Переменные  $x$  и  $\xi$ , отсчитываются на прямой, вдоль которой движется робот. Координата  $\xi$  выбирается так, что при  $\xi = 0$  пружина не деформирована. Отметим, что сила  $F_e$  – внутренняя для системы корпус–соленоид–сердечник, а сила  $F_{fr}$  – внешняя. Предполагается, что сила сопротивления зависит от скорости корпуса относительно среды:  $F_{fr} = F_{fr}(\dot{x})$ .

Применяя второй закон Ньютона отдельно к корпусу и к сердечнику, получим уравнения движения рассматриваемой механической системы:

$$M\ddot{x} = cx - F_e + F_{fr}(\dot{x}), \quad m(\ddot{x} + \ddot{\xi}) = -c\xi + F_e. \quad (1)$$

Введем новую переменную

$$X = x + \frac{m}{M+m}\xi, \quad (2)$$

которая обозначает координату центра масс системы в неподвижной системе отсчета, и представим систему уравнений (1) следующим образом:

$$(M+m)\ddot{X} = F_{fr}\left(\dot{X} - \frac{m}{M+m}\dot{\xi}\right), \quad (3)$$

$$\frac{Mm}{M+m}\ddot{\xi} + c\xi = F_e - \frac{m}{M+m}F_{fr}\left(\dot{X} - \frac{m}{M+m}\dot{\xi}\right).$$

Будем моделировать силу  $F_e$ , генерируемую приводом, периодической кусочно-постоянной функцией времени:

$$F_e = \begin{cases} F_0, & \left\{ \frac{t}{T} \right\} < \tau, \\ 0, & \left\{ \frac{t}{T} \right\} \geq \tau, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T$  – период,  $F_0$  – положительная постоянная размерности силы,  $\tau$  – безразмерная положительная постоянная, которая принадлежит интервалу  $(0,1)$  и обозначает долю периода, в течение которого управляющая сила не равна нулю; фигурные скобки обозначают дробную часть заключенного в них выражения. Параметр  $\tau$  иногда называют коэффициентом заполнения широтно-импульсного сигнала вида (4).

Предполагается, что сила сопротивления  $F_{fr}$ , действующая между корпусом робота и средой, – сухое трение, подчиняющееся закону Кулона.

#### 4. Моделирование и анализ установившегося движения робота

Для роботов рассматриваемого типа наибольший интерес представляет режим движения, при котором сердечник колеблется с периодом  $T$  относительно корпуса, а корпус движется относительно среды со скоростью, изменяющейся периодически с тем же периодом  $T$ . Такой режим движения будем называть установившимся (стационарным). Установившееся движение характеризуется  $T$ -периодическими функциями  $\xi(t)$  и  $\dot{X}(t)$ . Важнейшим показателем стационарного движения робота является его средняя скорость

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) dt. \quad (5)$$

Основное содержание этого раздела – анализ зависимости средней скорости движения робота от параметров возбуждения  $T$  и  $\tau$ .

##### 4.1. Параметры моделирования.

Предполагается, что робот движется вдоль прямой по шероховатой горизонтальной поверхности. Обозначим через  $\mu$  коэффициент трения между корпусом робота и поверхностью, по которой он движется. Моделирование проводилось при следующих значениях неизменных параметров робота:

$$M = 0.0213 \text{ кг}, \quad m = 0.0231 \text{ кг}, \quad c = 360 \text{ Н/м}, \quad F_0 = 0.8 \text{ Н}, \quad \mu = 1.61. \quad (6)$$

Эти параметры соответствуют прототипу миниатюрного внутритрубного робота, построенного в Институте проблем механики РАН [2, 3]. Внутритрубный робот отличается от рассматриваемого капсульного робота тем, что сердечник внутритрубного робота имеет шток, который выступает за пределы корпуса. Шток имеет наконечник в форме диска, посредством которого шток взаимодействует с внутренней стенкой трубы. Такой же дисковый наконечник есть и на корпусе. Контактные поверхности корпуса и штока имеют покрытия, создающие анизотропию трения компонент робота о стенку трубы; сила трения, препятствующая движению корпуса и штока в желаемом направлении, значительно меньше силы, препятствующей движению в противоположном направлении.

##### 4.2. Анализ результатов моделирования.

Результаты моделирования будут представлены в безразмерных переменных. Вместо  $V$ ,  $t$ ,  $T$  будут использоваться нормированные переменные

$$V' = \frac{c}{F_0 \omega} V, \quad t' = \omega t, \quad T' = \omega T, \quad (7)$$

соответственно. Здесь  $\omega$  – собственная частота колебаний системы, образованной корпусом и сердечником, соединенными пружиной:

$$\omega = \sqrt{\frac{c(M+m)}{Mm}}. \quad (8)$$

В дальнейшем штрихи, обозначающие безразмерные переменные, опускаются.

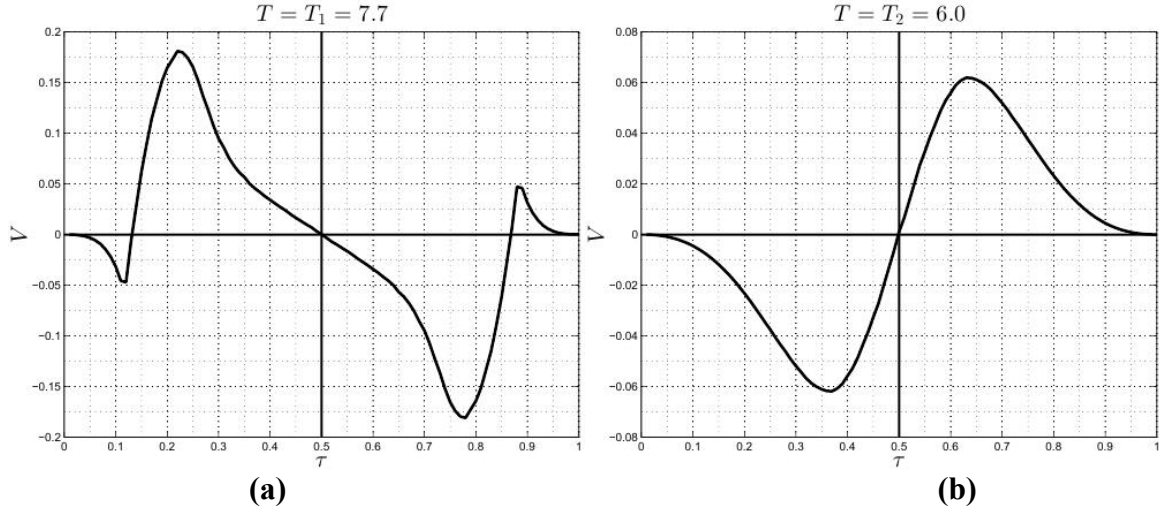


Рис. 2. Зависимости средней скорости от  $\tau$ .

На рис. 2 показаны зависимости средней скорости  $V$  от параметра  $\tau$ . Рисунок 2а соответствует  $T = T_1 = 7.7$ , а рис. 2б –  $T = T_2 = 6.0$ . Заметим, что периоды возбуждения  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют неравенствам  $T_2 < 2\pi < T_1$  и что  $2\pi$  – это безразмерный период собственных колебаний робота, обусловленных пружиной, соединяющей корпус с сердечником. Поэтому режим движения с  $T = T_1$  назовем зарезонансным, а режим движения с  $T = T_2$  – дорезонансным.

Обе кривые на рис. 2 демонстрируют существенную зависимость средней скорости робота в установившемся режиме от коэффициента заполнения управляющего сигнала (4), что указывает на возможность управлять движением робота, изменяя только параметр  $\tau$ . При  $\tau = 0, \tau = 1/2, \tau = 1$  скорость  $V$  равна нулю. Обе кривые обладают центральной симметрией относительно точки  $(1/2, 0)$  координатной плоскости  $\tau V$ . Это означает, что изменение коэффициента заполнения управляющего сигнала  $\tau$  на  $1 - \tau$  приводит к изменению направления движения капсульного робота без изменения абсолютной величины его средней скорости.

Последним свойством обладают все системы, описываемые уравнениями (3), подверженные широтно-импульсному режиму возбуждения (4), при условии, что  $F_{\rho}(z)$  – нечетная функция аргумента  $z = \dot{X} - m\dot{\xi}/(M+m)$ . Докажем соответствующее математическое утверждение. Будем отмечать зависимость величин  $V$  и  $F_e(t)$  от параметра  $\tau$  верхним индексом  $^{[\tau]}$ , то есть вместо  $V$  и  $F_e(t)$  будем писать  $V^{[\tau]}$  и  $F_e^{[\tau]}(t)$  соответственно.

Из определения (4) для функции  $F_e(t)$  вытекает соотношение

$$F_e^{[\tau]}(t) = F_0 - F_e^{[1-\tau]}(t - \tau T). \quad (9)$$

**Утверждение.** Средние скорости  $V^{[\tau]}$  и  $V^{[1-\tau]}$  связаны равенством

$$V^{[\tau]} = -V^{[1-\tau]}. \quad (10)$$

**Доказательство.** Сделаем в уравнениях (3), где  $F_e(t) = F_e^{[\tau]}(t)$ , замену переменных

$$Y(t) = -X(t + \tau T), \quad \eta(t) = -\xi(t + \tau T) + F_0/c. \quad (11)$$

С учетом нечетности функции  $F_{fr}(z)$  по аргументу  $z = \dot{X} - m\dot{\xi}/(M + m)$  и соотношения (9) получаем для переменных  $Y$  и  $\eta$  следующие уравнения:

$$(M + m)\ddot{Y} = F_{fr}\left(\dot{Y} - \frac{m}{M + m}\dot{\eta}\right),$$

$$\frac{Mm}{M + m}\ddot{\eta} + c\eta = F_e^{[1-\tau]}(t) - \frac{m}{M + m}F_{fr}\left(\dot{Y} - \frac{m}{M + m}\dot{\eta}\right). \quad (12)$$

Отсюда вытекает, что если функции  $X(t)$  и  $\xi(t)$  определяют решение системы уравнений (3) для  $F_e(t) = F_e^{[\tau]}(t)$ , то функции  $Y(t)$  и  $\eta(t)$  определяют решение той же системы уравнений для  $F_e(t) = F_e^{[1-\tau]}(t)$ . Если, кроме того, функции  $\dot{X}(t)$  и  $\dot{\xi}(t)$  периодичны с периодом  $T$ , то функции  $\dot{Y}(t)$  и  $\dot{\eta}(t)$  также  $T$ -периодичны. Дифференцирование первого соотношения (11) дает равенство  $\dot{Y}(t) = -\dot{X}(T + \tau T)$ , из которого при условии  $T$ -периодичности функции  $\dot{X}(t)$  следует, что

$$\int_0^T \dot{Y}(t)dt = -\int_0^T \dot{X}(t + \tau T)dt = -\int_0^T \dot{X}(t)dt. \quad (13)$$

Поскольку

$$V^{[\tau]} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t)dt, \quad V^{[1-\tau]} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{Y}(t)dt, \quad (14)$$

из (13) вытекает равенство (10). Утверждение доказано.

**Следствие.** При  $\tau = 1/2$  средняя скорость системы в установившемся режиме равна нулю:  $V^{[1/2]} = 0$ .

Кривые на рис. 2а и 2б отличаются качественно. Функция, представленная графиком на рис. 2а, имеет глобальный максимум на интервале  $0 < \tau < 1/2$  и этот максимум положительный, в то время как функция представленная на рис. 2б имеет глобальный минимум на том же интервале и этот минимум отрицательный. Вспомним, что рис. 2а отвечает зарезонансному режиму ( $T > 2\pi$ ), а рис. 2б – дорезонансному режиму ( $T < 2\pi$ ). Это наблюдение позволяет высказать гипотезу о резонансном эффекте, который проявляется в изменении направления движения робота при переходе периода возбуждения  $T$  через некоторые критические значения, близкие к кратным периоду собственных колебаний системы.

Резонансное изменение направления движения локомотивных систем с упругими элементами при периодическом возбуждении ранее отмечалось в [4]. В этой работе рассмотрена двухмодульная локомотивная система, движущаяся вдоль прямой на горизонтальной плоскости. Каждый из двух одинаковых модулей системы состоит из жесткого корпуса и дебалансного вибровозбудителя. Дебалансный вибровозбудитель – это ротор, центр масс которого не лежит на оси вращения. Модули соединены друг с другом пружиной с линейной характеристикой. Оба модуля находятся в постоянном контакте с плоскостью, по которой движется система. Трение между плоскостью и модулями считается кулоновым сухим трением. Коэффициент трения предполагается малым. Движение системы возбуждается вращением роторов вибровозбудителей с одинаковыми угловыми скоростями в одном направлении, но со сдвигом по фазе (перпендикуляры, опущенные из центров масс роторов на оси их вращения, не параллельны). В описанной системе наблюдалось изменение направления движения при прохождении частоты возбуждения через резонансное значение, равное частоте собственных колебаний системы в отсутствие трения при неподвижных роторах.

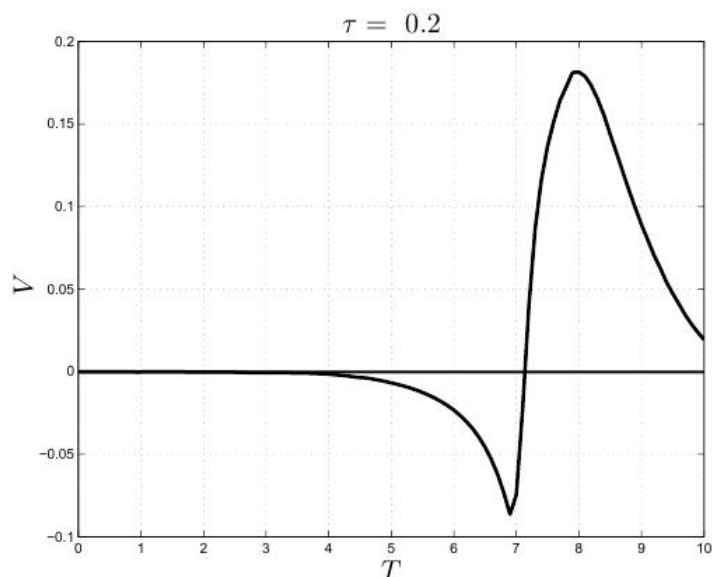


Рис. 3. Зависимость средней скорости от  $T$ .

Резонансное изменение знака средней скорости движения капсульного робота видно на кривой, представляющей зависимость величины  $V$  от периода возбуждения  $T$ . На рис. 3 изображена такая кривая для  $\tau = 0.2$ . Изменение знака  $V$  происходит при  $T = 7.14$ . Вблизи этой точки переменная  $V$ , рассматриваемая как функция  $T$ , достигает своих экстремальных значений, минимума при  $T = 6.9$  и максимума при  $T = 8.0$ . Сдвиг точки смены знака скорости  $V$  от резонансного значения  $T = 2\pi$  объясняется, по-видимому, влиянием трения между корпусом робота и плоскостью, по которой он движется, на колебания внутреннего тела (сердечника). Качественно описанное поведение величины  $V$  сохраняется и для других  $\tau \in (0, 1/2)$ . В соответствии с доказанным выше утверждением графики зависимости  $V$  от  $T$  при коэффициентах заполнения управляющего сигнала  $\tau$  и  $1 - \tau$  симметричны друг другу относительно оси  $T$ .

Изложенные выше результаты показывают возможность управлять движением капсульного робота, изменяя период и коэффициент заполнения управляющего сигнала. Представляется целесообразным найти оптимальные параметры  $T = T_*$  и  $\tau = \tau_*$ , которые доставляют величине  $V$  максимальное значение, и затем управлять роботом, изменяя коэффициент заполнения  $\tau$  при фиксированном  $T = T_*$ . Такой способ управления покрывает все множество возможных скоростей движения в обоих направлениях.

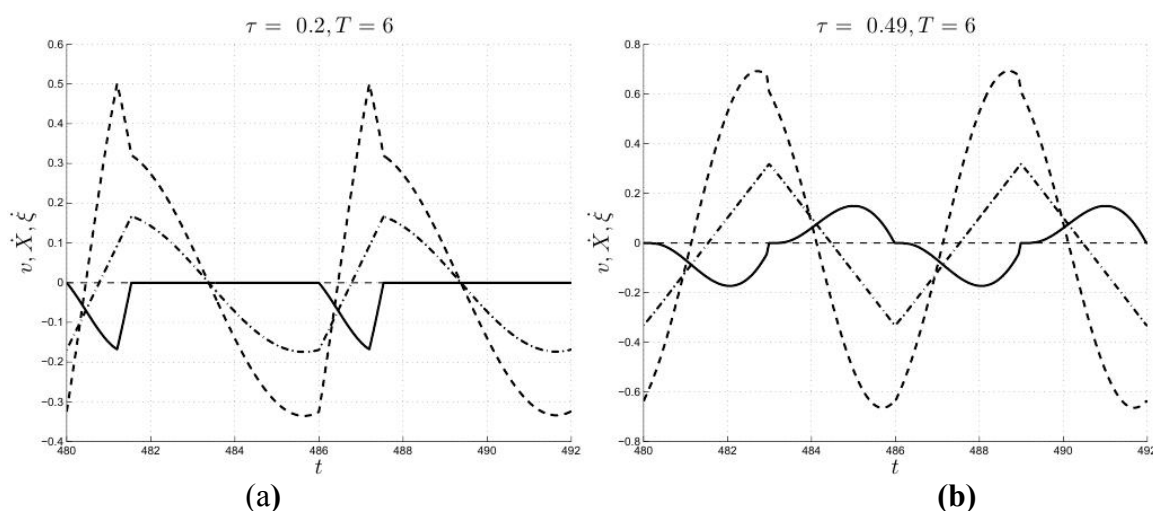


Рис. 4. Временные зависимости абсолютной скорости корпуса, относительной скорости внутреннего тела и абсолютной скорости центра масс при различных  $\tau, T$ .

Кроме средней скорости, интерес представляет также характер движения корпуса и сердечника робота в установившемся режиме. Наиболее интересно движение корпуса, в частности, существуют или нет интервалы времени, в течение которых робот движется назад (в направлении, противоположном средней скорости). Моделирование показывает, что движение тел робота существенно зависит от параметров  $T$  и  $\tau$ . На рис. 4 показаны зависимости аб-

солютной скорости корпуса ( $\dot{x}$ , сплошные кривые), относительной скорости сердечника ( $\dot{\xi}$ , штриховые кривые) и абсолютной скорости центра масс системы ( $\dot{X}$ , штрих-пунктирные кривые) от времени для двух наборов параметров возбуждения. При  $\tau = 0.2, T = 6$  (рис. 4a) корпус движется с отрицательной скоростью или покоится на плоскости, но никогда не движется в положительном направлении оси  $x$ . При  $\tau = 0.49, T = 6$  (рис. 4b) корпус движется попеременно в одном и другом направлениях.

Отметим, что корпус не может все время двигаться в установившемся режиме с ненулевой скоростью в одном направлении. В этом случае сила трения была бы постоянна по величине и направлению и отлична от нуля. Тогда скорость центра масс  $\dot{X}$  была бы линейной функцией времени, что несовместимо с  $T$ -периодичностью функций  $\dot{x}(t)$  и  $\xi(t)$  при установившемся движении. Таким образом, если скорость корпуса робота не меняет направление, корпус должен покоиться на некоторых промежутках времени.

## 5. Заключение

Направлением и величиной скорости капсульного робота, в котором корпус и сердечник соединены пружиной, можно управлять, изменяя силу взаимодействия между корпусом и сердечником периодически в широтно-импульсном режиме. При таком способе возбуждения управляющая сила постоянна по направлению, а настраиваемые параметры – период  $T$  и коэффициент заполнения  $\tau$  управляющего сигнала. Среднюю скорость робота можно контролировать, изменяя любой из этих параметров. При изменении периода  $T$  направление движения может изменяться благодаря резонансным эффектам в колебательной части системы. Если период  $T$  фиксирован, то установившееся движение робота при коэффициентах заполнения  $\tau$  и  $1 - \tau$  происходит с одной и той же средней скоростью в противоположных направлениях. Представляется целесообразным управлять движением робота, варьируя коэффициент заполнения при фиксированном периоде, отвечающем абсолютному максимуму средней скорости. Такая стратегия управления позволяет охватить весь диапазон возможных скоростей, изменяя только один параметр. Характер движения корпуса относительно среды и сердечника относительно корпуса может быть различным, в зависимости от значений параметров возбуждения. В частности, корпус робота может иметь или не иметь интервалы времени, в течение которых корпус движется в направлении, противоположном средней скорости, и, если такие интервалы существуют, может иметь или не иметь промежутки времени, в течение которых корпус покоится относительно плоскости движения.

Исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00061).

## Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. 2006. Т.70. Вып.6. С.915-941.
2. Градецкий В.Г., Князьков М.М., Фомин Л.Ф., Чашухин В.Г. Механика миниатюрных роботов. М.: Наука, 2010.
3. Чашухин В.Г. Моделирование динамики и определение управляющих параметров внутритрубного миниробота // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. №5. С.142-147.
4. Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // Multibody System Dynamics. 2009. V.22. No.2. P. 199-219.

## КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕКТА С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ ПОДВЕСОМ

**А.И. Бохонский**

Севастопольский государственный университет  
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Россия, 299053  
e-mail: bohon.alex@mail.ru

Разработан алгоритм учета упругопластических деформаций связей подвеса. Исследованы колебания объекта как абсолютно твердого тела с упругопластическим подвесом при различных динамических воздействиях. Выполнены численные эксперименты, которые подтвердили эффективность применения пластического демпфирования для снижения динамических нагрузок на объекты техники.

**Ключевые слова:** абсолютно твердое тело, упругий подвес, упругопластические связи, вынужденные колебания.

В [1] приведена методика расчета упругого подвеса твердого тела, которая предполагает реализацию следующих этапов: статический расчет подвеса (определение расчетных статических реакций); вычисление собственных частот системы с шестью степенями свободы; определение амплитуд вынужденных колебаний объекта при гармоническом воздействии.

В [2] приведены результаты численных экспериментов по исследованию динамики упругого подвеса, выполненные на основе специально разработанного комплекса программ *VIBRO*. Учитывается пластическое деформирование связей крепления объекта к основанию при динамическом воздействии.

**Целью исследований** является совершенствованием алгоритма практического расчета упругопластического подвеса при сложных динамических воздействиях. Возникает необходимость разработки модели расчета, включающей динамику упругопластического подвеса с шестью степенями свободы при различных типах воздействия.

Дифференциальные уравнения движения (метода кинестатики):

$$\begin{aligned}\bar{P}^* + \bar{R}^* + \bar{\Phi}^* &= 0, \\ \bar{M}_o^P + \bar{M}_o^R + \bar{M}_o^\Phi &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\bar{P}^*$  – главный вектор задаваемых сил;  $\bar{R}^*$  – главный вектор реакций связей (амортизаторов или упругопластических связей);  $\bar{\Phi}^*$  – главный вектор сил инерции;  $\bar{M}_o^P$  – главный момент задаваемых сил относительно центра  $O$ ;  $\bar{M}_o^R$  – главный момент реакций связей относительно центра  $O$ ;  $\bar{M}_o^\Phi$  – главный момент сил инерции относительно центра  $O$ .

Система линейных дифференциальных уравнений, описывающая относительное движение, составлена при условии малых перемещений.

Перемещение точки крепления первого амортизатора по направлению оси  $Y_c$  равно поступательному перемещению центра масс твердого тела по этой оси плюс перемещения, обусловленные вращением вокруг осей  $X_c$  и  $Z_c$  (в соответствии с принципом суперпозиции):

$$v_l = v + v_l \theta_x + v_l \theta_z,\tag{2}$$



где  $v$  – перемещение центра масс;  $v_1^{\theta_x} = l_1 \sin \theta_x \cos \beta_1$ ;  $\cos \beta_1 = \frac{Z_1}{l_1}$ ;  $\sin \theta_x \approx \theta_x$ ;  $v_1^{\theta_z} = l_1^* \sin \theta_z \cos \beta_1^*$ ;  $\cos \beta_1^* = \frac{Y_1}{l_1^*}$ ;  $\sin \theta_z \approx \theta_z$ . После преобразований из (2) следует зависимость вида:  $v_1 = v + Z_1 \theta_x + Y_1 \theta_z$ . По аналогии вычисляются перемещения точек крепления других амортизаторов. Результаты вычислений перемещений сведены в таблицу 1.

**Таблица перемещений точек крепления амортизаторов**

1	$u_1 = u - Z_1 \theta_y + X_1 \theta_z$	2	$u_2 = u - Z_2 \theta_y + X_2 \theta_z$	3	$u_3 = u - Z_3 \theta_y - X_3 \theta_z$
	$v_1 = v + Z_1 \theta_x + X_1 \theta_z$		$v_2 = v + Z_2 \theta_x + X_2 \theta_z$		$v_3 = v + Z_3 \theta_x - X_3 \theta_z$
	$w_1 = w - Y_1 \theta_x - X_1 \theta_y$		$w_2 = w - Y_2 \theta_x + X_2 \theta_y$		$w_3 = w + Y_3 \theta_x + X_3 \theta_y$
4	$u_4 = u - Z_4 \theta_y - X_4 \theta_z$	5	$u_5 = u + Z_5 \theta_y - X_5 \theta_z$	6	$u_6 = u + Z_6 \theta_y - X_6 \theta_z$
	$v_4 = v + Z_4 \theta_x - X_4 \theta_z$		$v_5 = v - Z_5 \theta_x - X_5 \theta_z$		$v_6 = v - Z_6 \theta_x - X_6 \theta_z$
	$w_4 = w + Y_4 \theta_x - X_4 \theta_y$		$w_5 = w + Y_5 \theta_x - X_5 \theta_y$		$w_6 = w + Y_6 \theta_x + X_6 \theta_y$

Уравнение поступательного движения объекта вдоль оси  $X_c$ :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[ \left( \sum_{i=1}^4 C_{ui} + \sum_{i=5}^6 C_{wi} \right) u + \left( \sum_{i=1}^6 C_{ui} z_i \right) \theta_y + \left( - \sum_{i=1}^6 C_{ui} y_i \right) \theta_z \right] - m \ddot{\xi}_x.$$

Знаки в правой части уравнения принимаются так, чтобы при учете знаков координат амортизаторов восстанавливающая сила имела действительное направление, соответствующее физическому смыслу задачи.

**Пример.** Для амортизатора с № 1  $y_1$  отрицательно, поэтому  $-C_{u1} y_1 > 0$ , а с учетом знака перед квадратной скобкой в правой части дифференциального уравнения получено истинное направление восстанавливающей силы за счет поворота сохраняется. Для амортизатора с № 2 справедливы аналогичные рассуждения, т.к.  $y_2$  отрицательна.

В случае работы связей (вместо амортизаторов) в идеальной пластической стадии некоторые коэффициенты жесткости становятся равными нулю, а восстанавливающие силы и моменты принимают предельные значения. Необходимо контролировать появление пластических деформаций в связях, координаты которых соответствуют их точкам крепления. Уравнения движения линейной системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 u}{dt^2} = -C_u u - C_{uy} \theta_y - C_{uz} \theta_z - m \ddot{\xi}_x \\ m \frac{d^2 v}{dt^2} = -C_v v - C_{vx} \theta_x - C_{vz} \theta_z - m \ddot{\xi}_y \\ m \frac{d^2 w}{dt^2} = -C_w w - C_{wx} \theta_x - C_{wy} \theta_y - m \ddot{\xi}_z \\ I_x \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} = -C_{vx} v - C_{wx} w - D_x \theta_x - D_{xy} \theta_y - D_{xz} \theta_z - B_x \\ I_y \frac{d^2 \theta_y}{dt^2} = -C_{uy} u - C_{wy} w - D_{xy} \theta_x - D_y \theta_y - D_{yz} \theta_z - B_y \\ I_z \frac{d^2 \theta_z}{dt^2} = -C_{uz} u - C_{vz} v - D_{xz} \theta_x - D_{yz} \theta_y - D_z \theta_z - B_z \end{array} \right. , \quad (3)$$

Методика исследований состоит в следующем. Поведение нелинейных систем (с различными типами нелинейностей) сопоставляются с поведением линейной системы, у кото-

рой связи работают исключительно в упругой стадии. Во всех случаях осуществляется численное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений. Помимо построения графиков линейных и угловых перемещений, линейных и угловых ускорений находились максимальные (по абсолютной величине) перемещения и ускорения, что позволяет сравнить по этим показателям различные типы нелинейных систем, как между собой, так и с чисто линейной системой. Если исключить амортизаторы (или связи) с № 5 и № 6 и жесткость в направлении оси  $Z_c$ , т.е.  $C_{wi} = 0$ , то выражения для коэффициентов жесткости вычисляются так:

$$\begin{aligned} C_u &= \sum_{i=1}^4 C_{ui}; & C_v &= \sum_{i=1}^4 C_{vi}; & C_{uy} &= \sum_{i=1}^4 C_{ui}z_i; & C_{uz} &= -\sum_{i=1}^4 C_{ui}y_i; & C_{vx} &= -\sum_{i=1}^4 C_{vi}z_i; \\ C_{vz} &= \sum_{i=1}^4 C_{vi}x_i; \\ D_z &= \sum_{i=1}^4 (C_{ui}y_i^2 + C_{vi}x_i^2); & D_y &= \sum_{i=1}^4 C_{ui}z_i^2; & D_x &= \sum_{i=1}^4 C_{wi}y_i^2; & D_{xz} &= -\sum_{i=1}^4 C_{vi}x_i z_i; \\ D_{yz} &= -\sum_{i=1}^4 C_{ui}y_i z_i. \end{aligned}$$

В случае плоского движения объекта (в горизонтальной плоскости) дифференциальные уравнения имеют вида:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} = -C_u u - C_{uz} \theta_z - m \ddot{\xi}_x \\ m \frac{d^2 v}{dt^2} = C_v v - C_{vz} \theta_z - m \ddot{\xi}_y \\ I_z \frac{d^2 \theta_z}{dt^2} = -C_{uz} u - C_{vz} v - D_z \theta_z - B_z \end{cases},$$

где  $C_u = \sum_{i=1}^4 C_{ui}$ ;  $C_v = \sum_{i=1}^4 C_{vi}$ ;  $C_{uz} = -\sum_{i=1}^4 C_{ui}y_i$ ;  $C_{vz} = \sum_{i=1}^4 C_{vi}x_i$ ;  $D_z = \sum_{i=1}^4 (C_{ui}y_i^2 + C_{vi}x_i^2)$ .

Один из алгоритмов учета упругопластического деформирования при динамической нагрузке состоит в следующем. Проиллюстрируем его на примере упругопластической связи с № 1. В каждом шаге интегрирования непрерывно вычисляются поперечные (восстанавливающие) силы:  $Q_{lu}^{j+1} := Q_{lu}^j + C_{ul} \Delta u - (-C_{ul} y_l \Delta \theta_z)$ ;  $Q_{lv}^{j+1} := Q_{lv}^j + C_{vl} \Delta v - (C_{vl} x_l \Delta \theta_z)$ .

Если выполняется условие  $\sqrt{(Q_{lu}^{j+1})^2 + (Q_{lv}^{j+1})^2} \geq Q_l^0$ , то наступает пластическая стадия и принимается  $Q_{lu}^{j+1} := Q_{lu}^j$ ,  $Q_{lv}^{j+1} := Q_{lv}^j$ , иначе  $Q_{lu}^j := Q_{lu}^{j+1}$ ;  $Q_{lv}^j := Q_{lv}^{j+1}$  (для упругой стадии). Аналогичные условия должны проверяться для всех (четырех) связей. При этом приращения перемещений равны:  $\Delta u_l := u_l^{j+1} - u_l^j$ ;  $\Delta v_l := v_l^{j+1} - v_l^j$ ;  $\Delta \theta_z := \theta_z^{j+1} - \theta_z^j$ .

В каждом шаге необходимо выполнять присвоения для перемещений  $u_l^j := u_l^{j+1}$ ;  $v_l^j := v_l^{j+1}$ ;  $\theta_z^j := \theta_z^{j+1}$ . Аналогично строятся вычислительные процедуры для других связей.

Предполагается, что связь расположена в центре основания, жестко связана с основанием и верхним концом взаимодействует с объектом таким образом, что его движение может вызвать только чистый изгиб связи. Конструктивно данный случай реализуется согласно схеме, изображенной на рис. 1.

Связь работает на изгиб в одной плоскости и стационарные пластический шарнир образуется в месте соединения связи с основанием при достижении заданного перемещения. Коэффициент жесткости связи (в упругой стадии) вычисляется по формуле

$$k = 3EI/H^3, \tag{4}$$

где  $EI$  – жесткость связи на изгиб ( $E$  – модуль упругости первого рода материала связи,  $I = \pi d^4 / 64$ ,  $d$  – диаметр связи);  $H$  – свободная длина связи. Предельное перемещение связи, при котором достигается пластическое состояние (появление идеального пластического шарнира), вычисляется из следующих соображений.

Предельный пластический момент (круглое сечение в месте заделки находится в пластической стадии) вычисляется по формуле:

$$M_T = 4\sigma_T R^3 / 3, \quad (5)$$

где  $\sigma_T$  – напряжение текучести материала связи;  $R = d/2$  – радиус поперечного сечения. Тогда предельная поперечная сила равна

$$Q_T = M_T / H = 4\sigma_T R^3 / 3H. \quad (6)$$

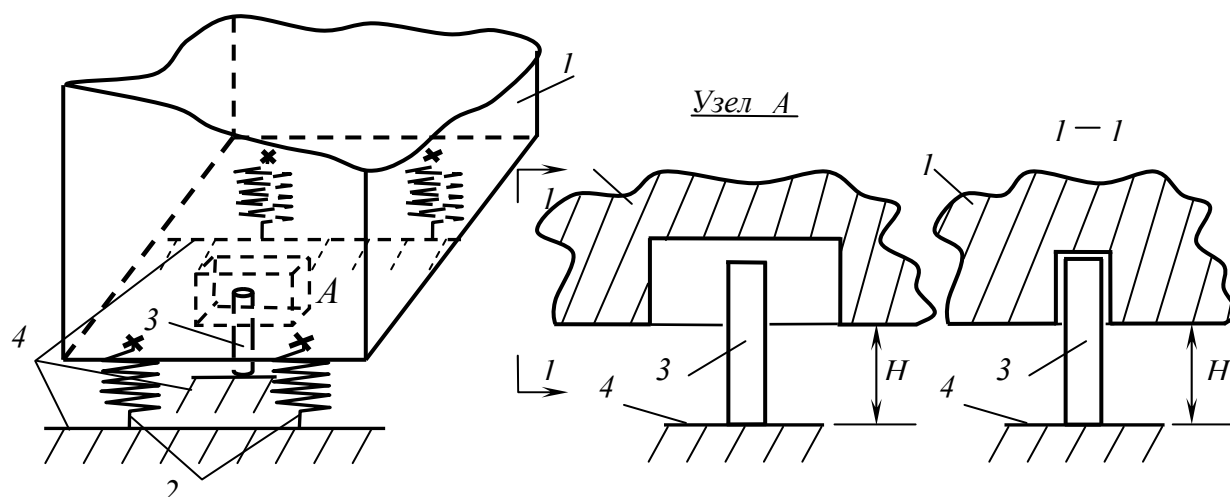


Рис. 1. Схема крепления упругопластической связи: 1 – объект, 2 – амортизаторы; 3 – упругопластическая связь; 4 – основание

С другой стороны предельную силу можно вычислить на основании закона Гука:

$$Q_T = k\Delta_T, \quad (7)$$

где  $k$  определяется формулой (4);  $\Delta_T$  – предельное перемещение, при котором наступает текучесть. Из равенства левых частей выражений (6) и (7) с учетом (4), (5) следует значение предельного перемещения:

$$\Delta_T = \frac{4\sigma_T R^3 H^2}{9EI}. \quad (8)$$

Итак, если перемещение точки соединения упругопластической связи с объектом достигает величины  $\Delta_T$ , то появляется пластический шарнир и восстанавливающая сила становится предельной. Теперь, если заранее назначить  $\Delta_T$ , то при известных  $Q_T$ ,  $H$  и  $E$  из (8) находится требуемый радиус  $R$  поперечного сечения связи. При этом можно принять, что  $\Delta_T \approx (0.6 \div 0.8)\Delta$ , где  $\Delta$  – свободный ход амортизатора.

Один из самых простых случаев – использование пластического демпфирования только по одной оси, например оси  $x$ . Связь работает в пластической стадии только при достижении точки ее крепления заданного порога перемещения вдоль оси  $x$ .

В каждом шаге интегрирования вычисляется общее линейное перемещение (точки крепления связи вдоль оси  $x$ ), обусловленное поступательным перемещением центра масс объекта и его поворотом вокруг оси  $y$ , т.е.  $u_{j+1}^* = u_j + \theta_{yj} d$ , где  $u_{j+1}^*$  – перемещение точки крепления связи в  $j+1$  шаге интегрирования уравнений движения;  $u_j$  – перемещение центра масс вдоль оси  $x$  в  $j$ -м (предшествующем) шаге интегрирования уравнений движения;  $\theta_{yj}$  –

угол поворота объекта вокруг оси  $y$ , проходящей через центр масс, в  $j$ -м шаге;  $d$  – расстояние от центра масс до точки крепления упругопластической связи.

На шаге интегрирования уравнений движения вычисляется восстанавливающая сила в упругопластической связи:  $Q_{j+1}^x = Q_j^x + C_x(u_{j+1}^* - u_j^*)$ , где  $Q_{j+1}^x$ ,  $Q_j^x$  – величины восстанавливающей силы в  $j+1$  и  $j$ -м этапах интегрирования;  $C_x$  – коэффициент жесткости связи при ее работе в упругой стадии;  $u_j^*$  – перемещение в  $j$ -м шаге.

Проверяются условия наступления пластического деформирования связи: если  $Q_{j+1}^x \leq -Q_0$ , то  $Q_{j+1}^x = -Q_0$ ; если  $Q_{j+1}^x \geq Q_0$ , то  $Q_{j+1}^x = Q_0$ , где  $Q_0$  – предельное значение восстанавливающей силы при переходе связи в пластическую стадию. При этом в каждом шаге осуществляется новое присвоение значений  $u_j^* := u_{j+1}^*$ .

Использованы упругопластические связи по осям  $x$  и  $y$ . Условия работы связи вдоль оси  $x$  остаются прежними, а по оси  $y$  составлены по аналогии:  $v_{j+1}^* = v_j^* + \theta_{xy} d$ , где  $v_{j+1}^*$  – перемещение точки крепления связи по оси  $y$ ;  $v_j^*$  – перемещение центра масс по оси  $y$ ;  $\theta_{xy}$  – угол поворота объекта вокруг оси  $x$ , проходящей через центр масс;  $d$  – расстояние от центра масс до точки крепления связи.

Как и ранее, справедлива зависимость:  $Q_{j+1}^y = Q_j^y + C_y(v_{j+1}^* - v_j^*)$ , где  $Q_{j+1}^y$ ,  $Q_j^y$  – величины восстанавливающей силы в  $j+1$  и  $j$ -м этапах интегрирования;  $C_y$  – коэффициент жесткости связи при ее работе в упругой стадии;  $v_j^*$  – перемещение в  $j$ -м шаге.

Для упругопластической связи справедливы условия: если  $Q_{j+1}^y \leq -Q_0$ , то  $Q_{j+1}^y = -Q_0$ ; если  $Q_{j+1}^y \geq Q_0$ , то  $Q_{j+1}^y = Q_0$ . Аналогично связи по оси  $x$  необходимо в конце каждого шага интегрирования присваивать  $v_j^* := v_{j+1}^*$ .

Использование упругопластических связей должно усилить демпфирование колебаний объекта по сравнению с обычным линейно-вязким сопротивлением. Алгоритм расчета состоит в выполнении этапов: а) в каждом шаге вычисляется общее перемещение точки крепления упругой связи; б) находится восстанавливающая сила упругой связи как сумма значения этой силы в предшествующем шаге интегрирования и приращения за шаг; в) проверяются условия:  $Q \geq Q_0$ , то  $Q = Q_0$ ; если:  $Q \leq -Q_0$ , то  $Q = -Q_0$ , где  $Q_0$  – предельное значение восстанавливающей силы; г) значение восстанавливающей силы суммируется в каждом шаге с восстанавливающими силами других связей, вычисляемых известным образом; д) для приращения перемещений точки крепления упругопластической связи к объекту введены дополнительные переменные, которые присваиваются в каждом шаге интегрирования.

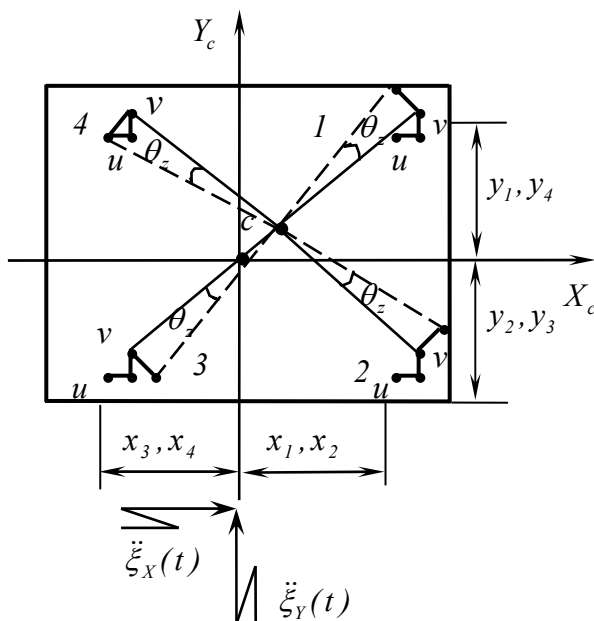


Рис. 2. Схема плоского движения объекта

**Объект защиты** – абсолютно твердое тело с тремя степенями свободы совершает плоское (плоскопараллельное) движение (рис. 2). Упругопластические связи располагаются в местах крепления амортизаторов в случае классического упругого подвеса. Предельные пластические сопротивления связей обусловлены изгибом связей в двух плоско-

стях. Для нелинейной системы при построении модели и алгоритма расчета важно независимо выписать выражения для восстанавливающих сил с учетом, что знаки координат связей не должны влиять на действительные направления восстанавливающих сил.

Выражения для модулей восстанавливающих сил в связях по оси  $x$  имеют вид:

$$\begin{aligned} Qu_1 &= Cu_1 \cdot u - Cu_1 \cdot y_1 \cdot \theta_z, & Qu_2 &= Cu_2 \cdot u + Cu_2 \cdot y_2 \cdot \theta_z, \\ Qu_3 &= Cu_3 \cdot u + Cu_3 \cdot y_3 \cdot \theta_z, & Qu_4 &= Cu_4 \cdot u - Cu_4 \cdot y_4 \cdot \theta_z, \end{aligned}$$

где  $Cu_1, Cu_2, Cu_3, Cu_4$  – коэффициенты жесткости связей в направлении оси  $x$ ;  $u$  – перемещение центра масс объекта;  $y_1, y_2, y_3, y_4$  – координаты связей;  $\theta_z$  – угол поворота объекта относительно оси  $z$ . Соответственно выражение для модулей восстанавливающих сил в связях по оси  $y$  записываются как:

$$\begin{aligned} Qv_1 &= Cv_1 \cdot v + Cv_1 \cdot x_1 \cdot \theta_z, & Qv_2 &= Cv_2 \cdot v + Cv_2 \cdot x_2 \cdot \theta_z, \\ Qv_3 &= Cv_3 \cdot v - Cv_3 \cdot x_3 \cdot \theta_z, & Qv_4 &= Cv_4 \cdot v - Cv_4 \cdot x_4 \cdot \theta_z, \end{aligned}$$

где  $Cv_1, Cv_2, Cv_3, Cv_4$  – коэффициенты жесткости связей с номерами 1, 2, 3, 4 по направлению оси  $y$ ;  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – координаты точек крепления связей к твердому телу (объекту);  $v$  – перемещение центра масс объекта вдоль оси  $y$ .

Теперь общая восстанавливающая сила по оси  $x$  равна:

$$Qu = Qu_1 + Qu_2 + Qu_3 + Qu_4.$$

Соответственно общая восстанавливающая сила по оси  $y$  вычисляется:

$$Qv = Qv_1 + Qv_2 + Qv_3 + Qv_4.$$

Если дальше предположить, что в каждом узле крепления установлено по две связи, каждая из которых работает в упругопластической стадии по одному направлению, то, например, для связи с номером 1 справедливы условия: если  $Qu_1 \leq -Q_0$ , то  $Qu_1 = -Q_0$ . Иначе, если  $Qu_1 \geq Q_0$ , то  $Qu_1 = Q_0$ . Аналогичные условия записываются для других восстанавливающих сил. При этом в каждом шаге интегрирования вычисляется:

$$Qu_1 = Cu_1 + Cu_1 \cdot \Delta u_1 - Cu_1 \cdot y_1 \cdot \theta_z,$$

где  $\Delta u_1, \Delta \theta_z$  – линейные и угловые перемещения в  $i-m$  и  $i-l-m$  шагах интегрирования уравнений движения. Предложенная форма записи для восстанавливающих сил позволяет в общем алгоритме решения учитывать различные типы нелинейностей, которые обусловлены работой связей за пределами упругости.

**Численный пример. Исходные данные:** масса объекта  $m = 233$  кг; физический момент инерции твердого тела относительно оси, проходящий через центр масс  $I_z = 13,1$  кг·м<sup>2</sup>; координаты точек крепления амортизаторов:  $x_1 = x_2 = 0,223$  м;  $x_3 = x_4 = -0,223$  м;  $y_1 = y_4 = 0,223$  м;  $y_2 = y_3 = -0,223$  м; коэффициенты жесткости амортизаторов с номерами  $1 \div 4$  по соответствующим осям в зависимости от их ориентации при креплении:  $Cu_1 = Cu_2 = Cu_3 = Cu_4 = 0,9 \cdot 10^6$  Н/м;  $Cv_1 = Cv_2 = Cv_3 = Cv_4 = 0,17 \cdot 10^7$  Н/м.

Начальные условия:  $t = 0, u(0) = v(0) = \theta_z(0) = 0, \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = \dot{\theta}_z(0) = 0$ . Возмущение задано в виде ускорения основания:  $\ddot{\xi}_x(t) = \ddot{\xi}_y(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ , где амплитуда и частота входного воздействия соответственно  $A = 12,3$  м/с<sup>2</sup> и  $\omega = 124$  с<sup>-1</sup>. Линейно-вязкое сопротивление не учитывается. Шаг численного интегрирования  $\Delta t = 0,001$  с.

Линейная система. Максимальные (по абсолютной величине) ускорения за время движения  $t_* = 0,1$  с:  $a_x = 39,2650$  м/с<sup>2</sup>;  $a_y = 70,1792$  м/с<sup>2</sup>;  $\varepsilon_z = 27,5285$  с<sup>-2</sup> (рис. 3, а).

В случае нелинейной (упругопластической) систем максимальные (по абсолютной величине) ускорения при  $Q = 500 \text{ Н}$  равны:  $a_x = 19,1926 \text{ м/с}^2$ ;  $a_y = 20,3691 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_z = 24,3635 \text{ с}^{-2}$  (рис. 3, б).

Линейные ускорения центра масс объекта в упругопластической системе в два и более раз меньше, чем в упругой. Численный эксперимент позволяет путем варьирования величины предельного сопротивления достигнуть требуемого снижения динамической нагрузки на объект.

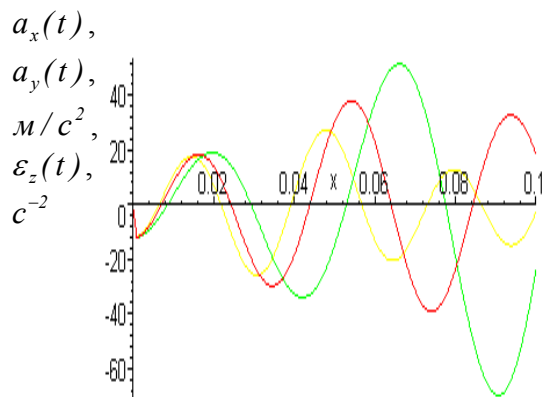


Рис. 4, а. Графики ускорений линейной системы  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $\varepsilon_z(t)$ .



Рис. 4, б. Графики ускорений нелинейной системы  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $\varepsilon_z(t)$ .

**Пример поведения упругопластической системы с одной степенью свободы.**  
Уравнение относительного движения:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M(\varphi) + m \cdot (g + \ddot{y}_e) \cdot L \cdot \sin \varphi - m \cdot \ddot{x}_e \cdot L \cdot \cos \varphi,$$

где  $J = m \cdot L^2$  - момент инерции;  $m$  - сосредоточенная масса;  $\varphi$  - угол;  $M(\varphi)$  - упругопластический момент;  $L$  - длина стержня;  $\ddot{y}_e$  - вертикальное и  $\ddot{x}_e$  - горизонтальное ускорения.

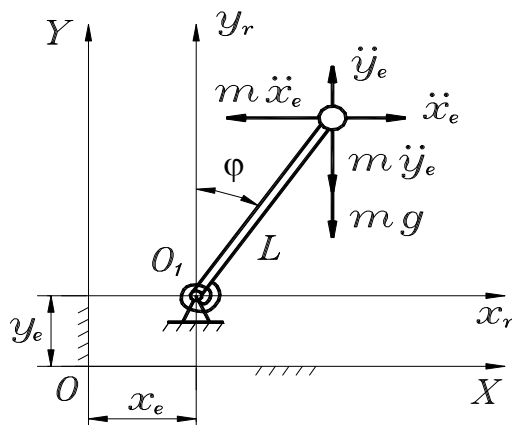


Рисунок 4. Схема системы с упругопластическим шарниром

Если  $\sin \varphi \approx \varphi$  и  $\cos \varphi \approx 1$ , то 
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{1}{m \cdot L^2} \cdot M(\varphi) + \frac{(g + \ddot{y}_e)}{L} \cdot \varphi - \frac{\ddot{x}_e}{L}.$$

При замене  $\varphi \approx x/L$  следует 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{m} \cdot Q(x) - \frac{(g + \ddot{y}_e)}{L} \cdot x = -\ddot{x}_e,$$

где  $Q(x)$  – сила, отражающая упругопластическое деформирование.

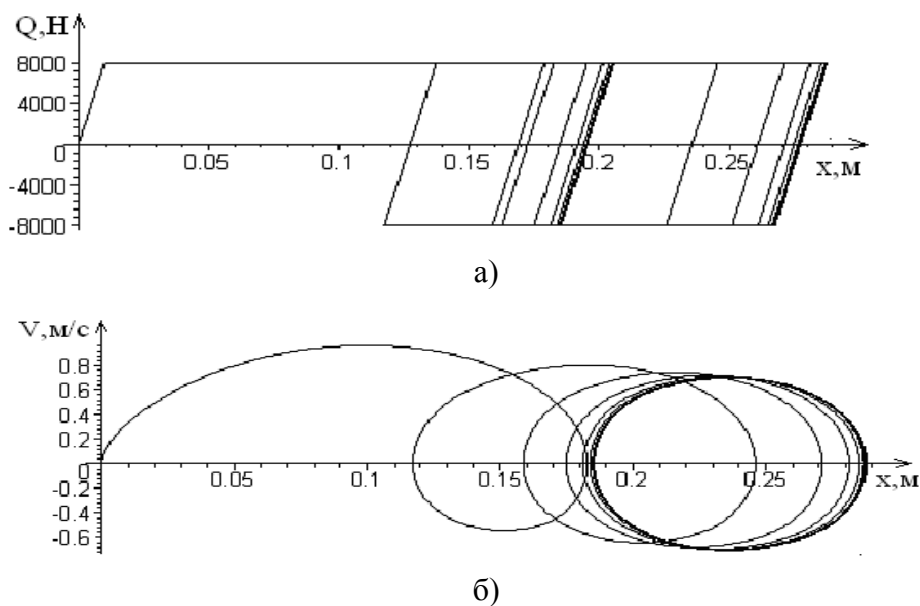


Рисунок 5 – Резонанс в упругопластической системе без учета линейно-вязкого сопротивления: а) график  $Q=Q(x)$ ; б) график  $x=x(t)$ ; в) график  $V=V(x)$

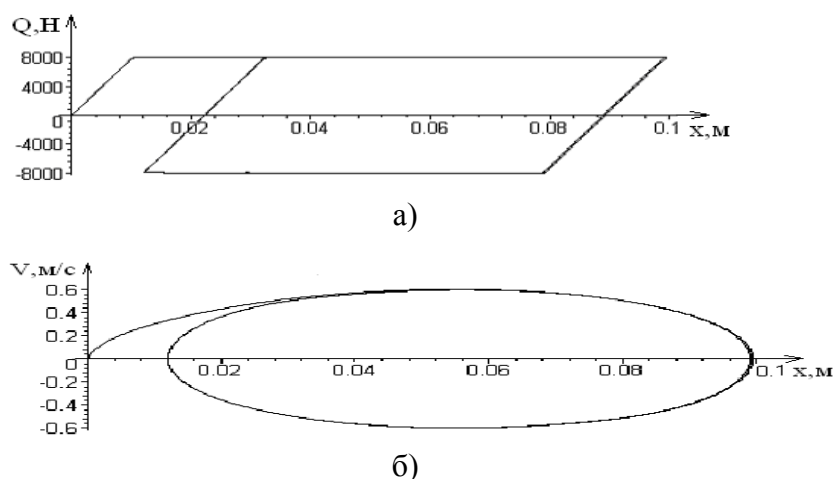


Рисунок 3. Резонанс в упругопластической системе с линейно-вязким сопротивлением: а) график  $Q=Q(x)$ ; б) график  $V=V(x)$

Упругопластическая система при резонансе (на упругом участке) асимптотически устойчива. С учетом линейно-вязкого сопротивления в упругопластической системе в резонансном режиме уже за один цикл достигается устойчивое движение. В технике актуальна нетрадиционная защита объектов электроники и средств связи от динамических воздействий большой интенсивности.

### Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. – М.: Машиностроение, т. 6. – Защита от вибрации и ударов /Под ред. К.В. Фролова, 1981. - 456с.
2. Бохонский А.И. Защита от динамических воздействий объектов как абсолютно твердых тел. Вестник СевГТУ. Механика, энергетика, экология. Вып. 6. – Севастополь, 1997. С. 7-14.

## **ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СВМУ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ УПРУГОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Н.Г. Бураго<sup>1</sup>, И.С. Никитин<sup>2,3</sup>, П.А. Юшковский<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, 119526, Москва

<sup>2</sup>ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, 123056, Москва

<sup>3</sup>ФГБОУВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Москва, e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru)

Целью исследования является расчет напряженно-деформированного состояния упругого диска переменной толщины при вибрации лопаток. Для этого разработан численно-аналитический метод решения трехмерных уравнений теории упругости. Решение представляется с помощью разложения в ряд Фурье, и коэффициенты находятся из краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль радиальной координаты. Полученные результаты использованы для оценки долговечности дисков газотурбинного двигателя в режиме сверхмногоциклового усталости.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, диск переменной толщины, высокочастотное нагружение, метод ортогональной прогонки, сверхмногоцикловая усталость.

### **Введение**

Для определения сроков безопасной эксплуатации элементов конструкций и зон возможного разрушения с помощью критериев усталостной прочности необходим расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) [1]. Диски турбинных двигателей на протяжении многих лет эксплуатации подвергаются циклическим нагружениям двух основных типов – полетным циклам (взлет-полет-посадка) и вибрациям. Расчет НДС дисков для полетных циклов (МЦУ - малоцикловая усталость) рассмотрен в [2,3] с учетом переменной толщины дисков, центробежных и аэродинамических нагрузок. В данной работе описывается метод расчета НДС от вибрационных нагрузок.

Полное НДС диска складывается из НДС полетных циклов (действие центробежных сил и аэродинамических давлений от набегающего на лопатки потока) и НДС вибраций (крутильные колебания лопаток). В принятой постановке мы не рассматриваем причины вибраций такие, как действие пульсаций давления, возбуждение собственных форм колебаний лопаток, переходные режимы работы двигателя и так далее, а считаем вибрации заданными. Амплитуды и частоты вибраций приведены в [1].

В силу линейности задачи теории упругости НДС полетных циклов и НДС вибраций можно рассчитывать отдельно и затем суммированием получать полное НДС. Полные (суммарные) НДС от полетных циклов и вибраций для двух крайних положений лопатки при вибрационном кручении являются границами изучаемого циклического процесса, используемыми в критериях усталостной прочности.

В последнее время установлено [1,4], что низкоамплитудные вибрационные нагрузки при эксплуатации, действующие в течение длительного времени, тоже могут вызывать разрушение конструкций (СВМУ - сверхмногоцикловая усталость). Напряжения в дисках, вызванные вибрациями, существенно ниже не только предела текучести, но и предела усталости для МЦУ режима, то есть, по классическим представлениям теории малоциклового усталости такие вибрационные напряжения вообще не должны были бы представлять опасности. Однако, фрактографические исследования поверхностей излома разрушенных в процессе эксплуатации дисков показали, что первоначальное зарождение усталостного микрповреждения в дисках может происходить в циклических процессах обоих типов (механизмов): и МЦУ, и СВМУ. Отличительной особенностью разрушения по механизму СВМУ является то, что очаг зарождения микротрещин находится под поверхностью элемента конструкции, а не примыкает к ней, как в случае циклического процесса МЦУ. Эта особенность позволяет экспериментаторам различать данные механизмы при классификации



первичного очага поврежденности. Отметим, что дальнейшее развитие усталостной трещины, как правило, происходит в режиме малоциклового усталости и наблюдается в виде усталостных бороздок на поверхности излома в соответствии с полетными циклами нагружения. Отсюда следует, что механизмы МЦУ и СВМУ являются альтернативными и зачастую взаимодополняющими и взаимоусиливающими друг друга. Обзор экспериментальных исследований в этом направлении можно найти в [1,4].

В данной работе предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменного сечения под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток и проведена оценка долговечности диска переменной толщины в СВМУ циклическом процессе.

### 1. Приближенная система уравнений для диска переменной толщины под действием крутильных колебаний лопаток

В цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  кольцевой диск  $a \leq r \leq b$  имеет переменную толщину  $2h(r)$ , координата по толщине меняется в пределах  $-h(r) \leq z \leq h(r)$ . Будем считать, что на внешнем контуре (ободу) диска действуют переменные по времени и периодические по углу напряжения, которые моделируют воздействие от крутильных колебаний лопаток и согласованы с ними по амплитуде.

Система уравнений динамической теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \right)$$

где  $\lambda, \mu$  - упругие модули Ламе,  $\rho$  - плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к  $\lambda + 2\mu$ , и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска  $a$ .

Граничные условия на свободных поверхностях при  $z = \pm h(r)$  имеют вид:

$$z = \pm h(r): \quad \sigma_{rz} - h'\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} - h'\sigma_{r\vartheta} = 0, \quad \sigma_{zz} - h'\sigma_{rz} = 0$$

В силу периодичности всех искомых функций по окружной координате  $\vartheta$  смещения кольцевого диска переменной толщины в полетных циклах нагружения можно представить в виде рядов Фурье:

$$u_r = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n z + u_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad u_g = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n z + v_{3n} z^3) \cos n\vartheta, \quad u_z = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (w_n + w_{2n} z^2 + w_{4n} z^4) \sin n\vartheta$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n z + \sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{g,g} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n z + s_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{zz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma_n z + \Sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{r,g} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n z + \tau_{3n} z^3) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{rz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + p_{2n} z^2 + p_{4n} z^4) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{gz} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (T_n + T_{2n} z^2 + T_{4n} z^4) \cos n\vartheta$$

Коэффициенты рядов Фурье являются новыми вспомогательными искомыми функциями радиальной переменной  $r$ , множитель  $e^{i\omega t}$  задает вибрации.

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему и приравняем члены при одинаковых степенях  $z$ , вплоть до  $z^3$ . В итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по радиальной координате для вспомогательных переменных при различных  $n=0,1,2,\dots$

$$\sigma_n' = n\tau_n / r - (\sigma_n - s_n) / r - 2p_{2n} - \rho\omega^2 u_n, \quad \tau_n' = -ns_n / r - 2\tau_n / r - 2T_{2n} - \rho\omega^2 v_n$$

$$p_n' = nT_n / r - p_n / r - \Sigma_n - \rho\omega^2 w_n, \quad u_n' = \sigma_n - \lambda U_n / r - \lambda w_{2n}$$

$$v_n' = \tau_n / \mu + V_n / r, \quad w_n' = p_n / \mu - u_n$$

$$w_{2n}' = p_{2n} / \mu - 3u_{3n}, \quad p_{2n}' = nT_{2n} / r - p_{2n} / r - 3\Sigma_{3n} - \rho\omega^2 w_{2n}$$

$$s_n = \lambda u_n' + U_n / r + 2\lambda w_{2n}, \quad \Sigma_n = \lambda u_n' + \lambda U_n / r + 2w_{2n}, \quad T_n = \mu v_n + \mu n w_n / r$$

$$u_{3n}' = \sigma_{3n} - \lambda U_{3n} / r - 4\lambda w_{4n}, \quad \sigma_{3n}' = n\tau_{3n} / r - (\sigma_{3n} - s_{3n}) / r - p_{4n} - \rho\omega^2 u_{3n}$$

$$v_{3n}' = \tau_{3n} / \mu + V_{3n} / r, \quad \tau_{3n}' = -ns_{3n} / r - 2\tau_{3n} / r - 4T_{4n} - \rho\omega^2 v_{3n}$$

$$s_{3n} = \lambda u_{3n}' + U_{3n} / r + 4\lambda w_{4n}, \quad \Sigma_{3n} = h^2 (\sigma_n h + \sigma_{3n} h^3) / h^3 - \Sigma_n / h^2, \quad T_{2n} = \mu n w_{2n} / r + 3\mu v_{3n}$$

$$T_{4n} = h' (\tau_n h + \tau_{3n} h^3) / h^4 - (T_n + T_{2n} h^2) / h^4, \quad p_{4n} = h' (\sigma_n h + \sigma_{3n} h^3) / h^4 - (p_n + p_{2n} h^2) / h^4$$

Граничные условия:

$$r=a: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = 0, \tau_{3n} = 0, p_n = 0, p_{2n} = 0$$

$$r=b: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = \tau_{bn}, \tau_{3n} = 0, p_n = p_{bn}, p_{2n} = -p_{bn} / h^2$$

В работе [2] аналогичная система уравнений была выведена для расчета основного НДС диска переменной толщины для полетных циклов нагружения квазистатическими центробежными и аэродинамическими нагрузками.

## 2. Граничные условия для крутильных колебаний

Для расчета НДС диска, обусловленного крутильными колебаниями лопаток, краевые условия для вспомогательных переменных (коэффициентов Фурье) на радиальных границах  $r = a$  и  $r = b$  имеют вид

$$r=a: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = 0, \tau_{3n} = 0, p_n = 0, p_{2n} = 0$$

$$r=b: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = \tau_{bn}, \tau_{3n} = 0, p_n = p_{bn}, p_{2n} = -p_{bn} / h^2$$

где  $\tau_{bn}$  и  $p_{bn}$  - заданные значения коэффициентов Фурье, учитывающие касательные к ободу диска напряжения в корневых сечениях лопаток при их кручении. Для определения значений

$\tau_{bn}$  и  $p_{bn}$  будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины  $d$  и используем решение известной задачи о кручении пластин прямоугольного поперечного сечения с погонной круткой  $\gamma$  [5].

Приближенные граничные условия при  $r=b$ , соответствующие параметрам закрученной лопатки приводятся к виду [6]:

$$\tau_b(\vartheta) = Q_0(1 - \vartheta^2/\delta^2), \quad Q_0 = -0.8\mu\gamma d/h, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

$$p_b(\vartheta) = T_0 \vartheta/\delta, \quad T_0 = \mu\gamma d, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

где  $\delta = d/(2b) \ll 1$ .

Пусть число лопаток на диске равно  $N_0$ . Разложение периодической функции распределения тангенциального напряжения на внешнем контуре в ряд Фурье (один период  $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$ ) имеет вид:

$$\tau_b(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{(k)} \cos(kN_0\vartheta), \quad \tau^{(0)} = 2Q_0N_0\delta/(3\pi), \quad \tau^{(k)} = \frac{4Q_0}{\pi k^2 N_0\delta} \left( \frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right)$$

Осевые касательные напряжения тоже раскладываются в ряд Фурье:

$$p_b(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)} \sin(kN_0\vartheta), \quad p^{(k)} = \frac{2}{k\pi} T_0 \left( \frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right)$$

Таким образом, для различных  $n=kN_0$  необходимо решать двухточечные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями при  $r=a$  и  $r=b$  с учетом выражений для коэффициентов разложения нагрузок в ряд Фурье по угловой координате. Эти краевых задач решались методом ортогональной прогонки. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

### 3. Примеры расчетов

Для расчетов была выбрана форма диска, сечение которого показано на Рис. 1, значения параметров  $a=0.05\text{м}$ ,  $b=0.4\text{м}$ ,  $d=0.01\text{м}$ ,  $\gamma=0.1$  рад/м,  $\omega=628$  1/с,  $\lambda=78$  ГПа,  $\mu=44$  ГПа,  $\rho=4370$  кг/м<sup>3</sup> (титановый сплав).

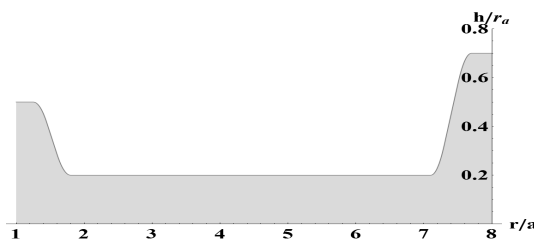


Рис. 1. Форма сечения диска

Из расчетов видно, что максимальные значения компонент напряжений на ободе диска имеют порядок 30-50 МПа, следовательно, размах их колебаний за цикл кручения лопатки равен 60-100 МПа.

Ранее, как упомянуто во введении, в [2] была решена задача определения напряженно-деформированного состояния вращающегося диска переменной толщины в полетном цикле

нагружения под действием центробежных сил в диске и с учетом периодической системы лопаток на внешнем контуре. Также были определены дополнительные напряжения в диске, возникающие при изгибе лопаток под действием аэродинамических нагрузок.

Для исследования циклического режима, связанного с процессом СВМУ, необходимо наложить полученные значения амплитуд напряжений при крутильных колебаниях лопаток со знаками + и - на основное НДС, связанное с полетным циклом нагружения диска с учетом дополнительных аэродинамических нагрузок.

Радиальные распределения суммарных шести компонент напряжений для крайних положений цикла крутильных колебаний лопаток в окрестности внешнего обода диска приведены на Рис. 2 и Рис. 3. В обозначениях напряжений индексы 1,2,3 соответствуют координатам  $r, \theta, z$ .

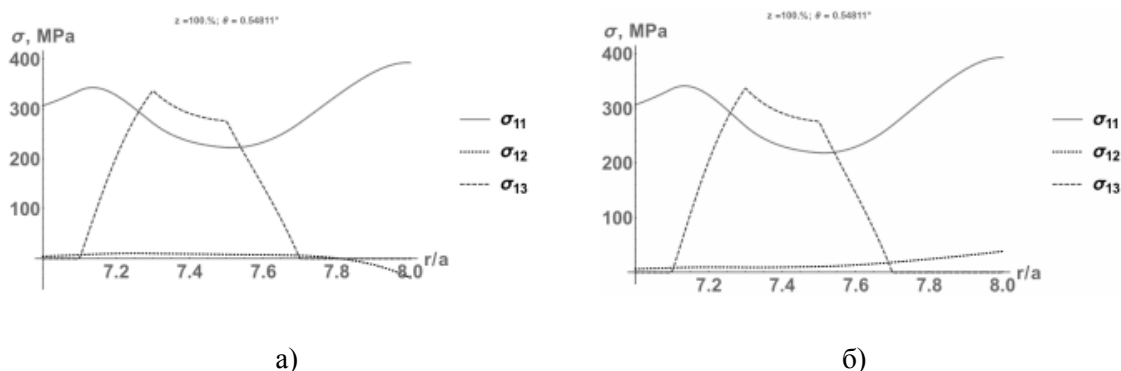


Рис. 2. Суммарные радиальные распределения напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ .

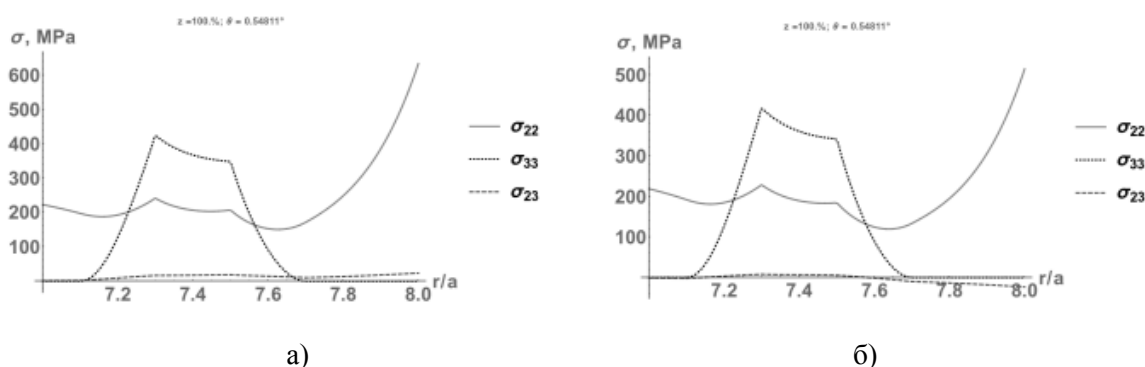


Рис. 3. Суммарные радиальные распределения напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$ .

Разница между значениями напряжений на левых (а) и правых (б) графиках на этих рисунках есть размах напряжений в высокочастотном цикле, связанном с крутильными колебаниями лопаток.

На Рис. 4 показаны вычисленные по критериям для СВМУ разрушения [7] распределения логарифма долговечности (числа циклов  $N$  до разрушения) на внешнем обода диска под лопаткой. Учитывается суммарное действие полетных циклов и вибраций без учета аэродинамических нагрузок на лопатки (а) и с учетом этих нагрузок (б)

На этих графиках видно значительное (до  $10^{9.3} - 10^{9.5}$  циклов) падение долговечности на внешнем обода (в зоне контакта диска и лопаток) и место зарождения начального усталостного повреждения.

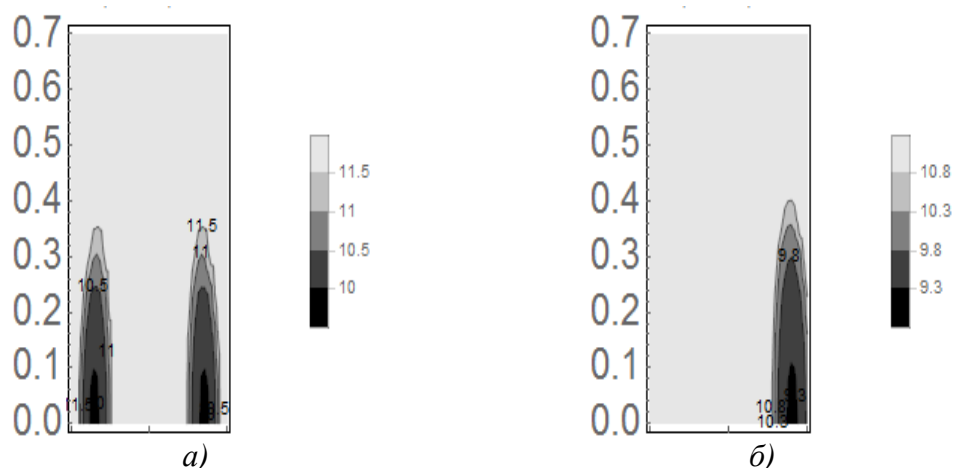


Рис. 4. Распределения логарифма долговечности по радиальной координате на внешнем ободе диска под лопаткой

При выбранной частоте колебаний их период имеет порядок 0.01 с. Поэтому время до усталостного разрушения в результате вибраций лопаток может составить величину 20 000 - 30 000 часов, вполне достижимую в процессе эксплуатации.

### Заключение

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменной толщины под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей.

Метод основан на приближенном представлении решения рядами Фурье по координатам по толщине диска и в окружном направлении. Для коэффициентов Фурье, зависящих от радиальной координаты, выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены методом ортогональной прогонки.

Расчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС в полетных циклах и использовано для оценок сроков безопасной эксплуатации рассматриваемых дисков на основе обобщенного критерия сверхмногоциклового усталостного разрушения. Выявлено значительное падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток).

Работа выполнена по проектам РФФИ [15-08-02392](#), 14-01-00741 и программе РАН ОЭМПУ-12.

### Список литературы

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография», 2007. 498с.
2. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Модель деформирования диска переменной сечения с учетом структурной анизотропии усталостных свойств // МТТ. Известия РАН. 2015. №5. С. 84-98.
3. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. // Известия РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
4. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle fatigue in mechanical practice. Marcel Dekker. New York. 2005. 304p.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. 1979. 744с.
6. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. - М: Наука. 1986. 500с.
7. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Сверхмногоцикловое усталостное разрушение титановых дисков компрессора. Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. N1. С. 52-67.

**ПЕТЛИ, ИЗВИЛИНЫ И СПИРАЛИ ДИСПЕРСИИ, ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ  
ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ: СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ, АСИМПТОТИКА  
И КИНЕМАТИКА ОБРАТНЫХ ВОЛН И D- И ZGV-ПРОБЛЕМА  
("DOUBLE AND ZERO-GROUP-VELOCITY")**

**В.М. Бырдин**

Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Отдел Виброакустики машин  
101990, Москва, М. Харитоньевский пер., 4, ИМАШ РАН; e-mail: V\_M\_Byrdin@mail.ru

Анализируются дисперсионные функции, зависимости и кривые произвольной сложности, трансцендентные или алгебраические (высокого порядка или табулированные, сколь угодно сложные). Метод анализа – на базе теории неявных функций и положений комплексного анализа. Типичная дисперсия обратной волны описывается двумя-тремя асимптотами; точность аппроксимации произвольно высока. Основными элементами выступают двукратные ветви, точки перегиба и пересечения (бидвукратности), а также сингулярности высоких порядков. Анализ направлен на так называемую (броско) проблему нуля и двойного нуля групповой скорости («double and zero-group-velocity»), весьма актуальную в последние годы.

*Ключевые слова:* Дисперсионные функции, уравнения и кривые; трансцендентные функции и кривые; асимптотика дисперсии; сингулярный анализ; обратные волны; кинематика волн; “double zero-group-velocity”; “zero-group-velocity”.

«Поведение нашего мира, по-видимому, существенно отличается от изучаемых нами динамических систем с компактным фазовым пространством. Свойство повторяемости, имеющее место у установившихся движений динамических систем, не присуще нашему миру. В нём, скорее всего, всё происходит наново. Экклезиаст был неправ, говоря, что всё то, что было – и будет. Прав был <атеист> Демокрит. Но на ограниченных промежутках времени в ограниченных масштабах упрощающая идеализация, принимаемая теорией динамических систем, вполне приемлема»

– Ю.И. Неймарк. Динамическая система как основная модель современной науки. 1999.

«В общей физике особо выделяют учение о колебаниях и волнах. Что обусловлено общностью законов <и моделей>, определяющих процессы разной физической природы, и общностью методов их исследования. Здесь механические, акустические, электрические и оптические колебания рассматриваются с единых позиций»...

– А.М. Прохоров. Физика// Физич. энцикл. Т. 5. 1998.

### Содержание

Предисловие

1. Введение
2. Петли, спирали и глубокие извилины дисперсии, трансцендентных функций и кривых.
3. Аналитическое описание, аппроксимация и асимптотика дисперсии обратных волн на базе анализа корней дисперсионных уравнений.
4. Примеры на обратных модах Лэмба и периодических структурах.
  - 4.1. Основная акустическая ОВ-мода Лэмба  $S_1^0$ .
  - 4.2. Восемь периодических систем с единой дисперсией и ОВ-модой.
5. Заключительные замечания.
  - 5.1. О четырёхкратных, бидвукратных и других высоких сингулярностях.

5.2. Об аналитической кинематике и энергетике волн.

5.3. Об аппроксимации и точности анализа.

Список литературы. (29 наим.)

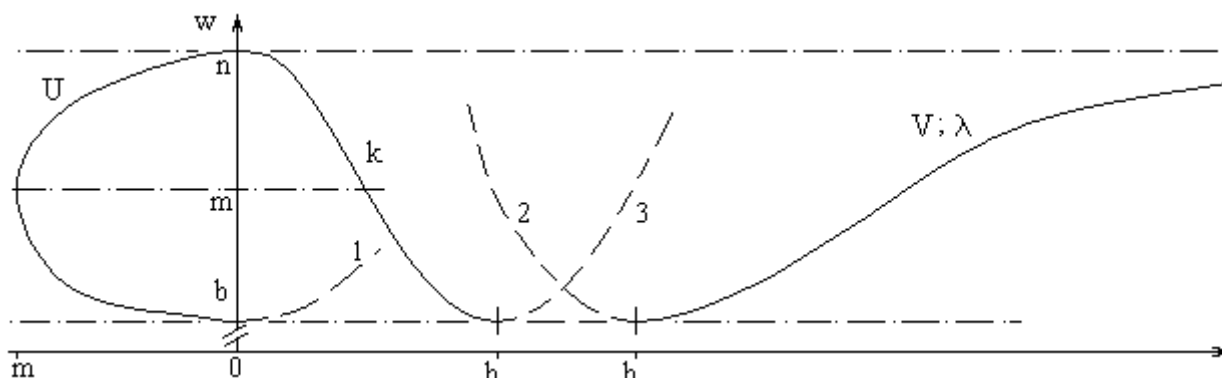
**Предисловие.** За свою, уже немалую жизнь в науке, мне, докладчику, не довелось, к сожалению, не *посчастливилось* встретиться или быть знакомым ни с *Неймарком Ю.И.*, чьё имя носит конференция, ни с *Прохоровым А.М.*, чья цитата дана выше. Однако о таких людях в наших сердцах жива добрая память – я то знаю – и в сердцах молодых поколений, но уже как легенда, *заветная легенда*, зовущая учёного на подвиг...

Вспоминая Прохорова, один из моих коллег и друзей, рядовой физик-лазерщик, **Володя Башкин**, боготворил *Патриарха* советской физической школы. И с лёгкой самоиронией приговаривал, что долго «не мыл рук» после *Ego* рукопожатий...

По-видимому, библейский мудрец *Экклезиаст* (царь *Соломон*, как автор) рассуждал о социально-психологической цикличности, общности и предопределённости... Насколько мы можем судить в религиоведческом плане, см. [1, с. 198; Библия, Еккл.; 29, с. 220] и др. лит.

**1. Введение.** Проблема DZGV, а также ZGV, от англ. “double and (one) zero-group-velocity” – это новые *недавние* задачи теории и практики (– технологии) волн о точках нуля или двух нулей дисперсионной кривой или функции, зависимости групповой скорости от частоты. Эта проблематика стала довольно актуальной в последние несколько лет в связи с прошедшим в 1990/2000-ых гг., значительным подъёмом работ и бумом публикаций в науке и даже в СМИ о метаматериалах, отрицательном преломлении света и звука, суперлинзе и смежной проблематики. Однако, все эти новомодные на шумевшие направления по сути объединены одной междисциплинарной областью – теорией и практикой обратных волн, которой вот уже более ста лет. Её основоположниками были английский механик *Горак Лэмб* (*Horace Lamb*, 1849–1934 гг. жизни) и советский физик *Л.И. Мандельштам* (1879–1944), см. [3–5] и др. А ренессанс пришёлся как раз на недавние, указанные два 10-летия на рубеже веков.

Обратная волна возникает в условиях наиболее сильной, отрицательной дисперсии. Это когда дисперсионная кривая волнового числа  $k(\omega)$  имеет отрицательный наклон, а, следовательно, отрицательна и групповая скорость. Вернее, групповая скорость противоположна фазовой:  $U = \partial\omega/\partial k$ ,  $V = \omega/k$  – а в общем случае их вектора составляют тупой угол. В точках перемены знака наклона регулярной кривой как раз и лежат два нуля групповой скорости, и что на Западе окрестили акронимом и хлёстким словосочетанием «ZGV и zero-group-velocity». См. рис. 1. Кроме того, имеется ещё и третий ноль – в начале кривой  $k(\omega)$  на оси



*Рис. 1.* Наиболее типичные кривые дисперсионно-кинематических показателей обратных волн: волнового числа  $k(\omega)$ , фазовой  $V$  и групповой  $U$  скоростей; кривая длины волны  $\lambda$  аналогична  $V$ . Штриховые кривые для смежной прямой волны: 1 –  $U$ , 2 –  $V - \lambda$ , 3 –  $k$ . Сингулярные точки  $b$  и  $m$  – двукратного ветвления ( $k$  и  $V - \lambda$ ) и перегиба  $k$  и максимума  $U$ ; и  $n$  – нулевая сингулярность частот. А в закрытых волноводах, и в механике, и в электродинамике вообще все бегущие моды на критической частоте, как правило, имеют ноль и групповой скорости, и волнового числа.

Свойство *адирекции*, противоположности фазовой и групповой скоростей (*открытие* Лэмба, 1904г, термин автора, 2000-ые гг., [3, 5 и др.]), оказалось весьма важным, фундаментальным атрибутом волнового процесса, детерминирующим собой целый спектр обратноволновой *феноменологии*, принципиально новых необычных и *удивительных* явлений, эффектов и свойств. И наиболее известными из них стали отрицательное преломление и фокусировка в искусственных средах, фотонных, спинтронных, радиоэлектронных и фононных метаматериалах или кристаллах. А далее и сверхразрешение на базе суперлинзы из таких кристаллов. Отсюда возникли чрезвычайно популярные идеи «плаща- и шапки-невидимки», проекты и технологии радиостелс, подводной бесшумности и т.д. Всё упомянутое – это элементы трёхмерной, 3Д-тематики. А параллельно ей растёт и волноводная проблематика, идущая ещё от Лэмба [3 (1904)]. В сложных бесконечных спектрах волноводов и волноводущих структур самой различной природы существуют, как правило, множества частотно ограниченных, но тоже бесконечных спектров (счётных множеств, матем.) обратноволновых, **ОВ**-мод. В плоских и планарных системах реализуется и вся объёмная, хотя и 2Д-, а не 3, феноменология. Т.о. волноводная ОВ-тематика – ещё одна, 2-ая и, очевидно, более богатая область общей теории и техники обратных волн (**ОВ**).

Зарубежные ZGV-публикации посвящены изучению собственно дисперсии, резонансам, детерминации материальных параметров  $p_k, \{p\}^M$ , волноводной системы через  $U(\omega; p)$  и другим теоретическим и прикладным задачам (см. [6–9] и мн. др.). В данном докладе на базе предыдущих публикаций автора даётся общий анализ дисперсии, сингулярные асимптоты (в особых точках, вкл. и нули), элементы кинематики и физики обратноволновых процессов. Мы предложили метод полного асимптотического описания и аппроксимации дисперсионных кривых простыми функциями, «удивительно» просто и весьма эффективно. Для объяснения петель, извилин и спиралей кривых групповой скорости  $U(\omega)$  и волнового числа  $k(\omega)$ , возникающих в современных, постоянно усложняющихся моделях волноводных систем, применены наши асимптоты извилистой кривой, её точек двукратного ветвления и перегиба. Вообще говоря, могут быть изучены произвольные волноводущие структуры и сколь угодно сложные кривые и функции, в т.ч. и табулированные, и неявно заданные (через дисперсионные, характеристические уравнения). В современных условиях стремительного усложнения научно-технических задач развиваемый автором тренд весьма актуален.

Обратим внимание на приоритет по ряду физических достижений и в целом по обратноволновой тематике советских учёных, это *Л. И. Мандельштам, В. Е. Пафомов, В. Г. Веселаго* и другие физики, а также и автор (с работами с 1970/80-ых гг.). Пионерами применения теории неявных функций и теорем комплексного анализа к проблеме дисперсии и диспергирующим процессам были: в механике *В. И. Кейлис-Борок*, 1952г, в электродинамике *П. Е. Краснушкин* и *Е. Н. Фёдоров*, 1972, в акустике автор, 1974, [10,12,13]. Развитие метода, аппроксимация дисперсии и обратноволновая специфика – наши оригинальные результаты. Отметим также, что трансцендентные кривые – классическая область дифференциальной, и, в асимптоте, и аналитической геометрии. Однако далеко не все вопросы анализа дисперсионных кривых удаётся найти в известных руководствах и учебниках (обзор современной математической литературы не входит в компетенцию физической и даже механической теории). В частности, мы исследовали спирали *самопересекающиеся*, т.е. содержащие петли, но в литературе не нашлось и собственно этого, адекватного термина, хотя пересекающие сами себя спирали встречаются уже среди классических кривых, например, в [14]. Правда есть *точка самоприкосновения*, см. [15].

**2. Петли, спирали и глубокие извилины дисперсии, трансцендентных функций и кривых.** Пример. 1. Синусоида – простейшая трансцендентная извилистая кривая. Квазисинусоида, как элемент дисперсионной кривой, встречается в простых моделях периодических структур, например, в классическом труде *Л. Бриллюэна* и *М. Пароди* [16 (1956г), с. 102, фиг. 59].



**Пример 2.** В качестве примера довольно сложной, *глубоко извилистой* дисперсии приводим петлю групповой скорости «*приподнятой*» дисперсионной кривой обратной волны (ОВ). В обзоре акад. Н. А. Шульги [17, с. 33] одна из дисперсионных кривых круглого пьезокерамического волновода имеет петлю групповой скорости для ОВ- и прямой (обычной) мод – рис. 2б. Согласно нашим результатам такого рода петле  $U(\omega)$  соответствует двойная извилина кривой волнового числа  $k(\omega)$  и три точки двукратных ветвлений (рис. 2а): одна в нулевой точке,  $(0, \omega_1)$ , и две в ненулевых,  $H$  и  $B$ .

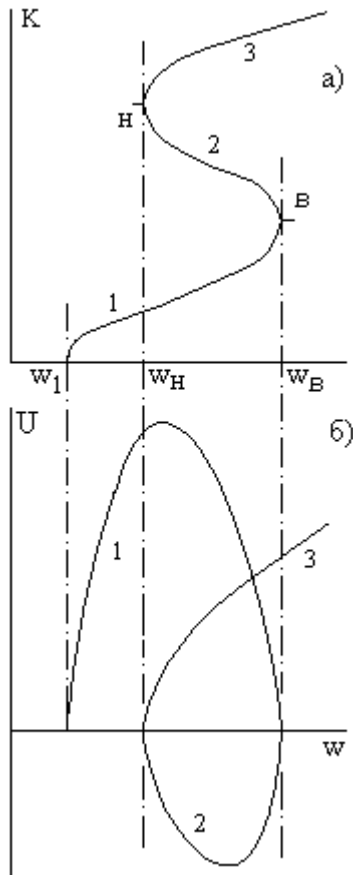


Рис. 2. Петля дисперсии  $U(\omega)$  (рис. б, по Н. А. Шульге) и порождающая её двойная извилина  $k(\omega)$  (рис. а, по автору).

Так что здесь, очевидно, имеем две нормальные прямые моды, кривые 1 и 3, и одну ОВ – кривая 2. Такого рода петли и петли, как элементы спиралей, мы и анализируем в нашей работе.

В целом, обобщая многочисленные статьи по теории диспергирующих и обратных волн и на базе нашего анализа, формулируем следующие положения.

**Определение 1.** Наиболее типичная, *зигзаговидная* (зигзагообразная) кривая, извилина волнового числа обратной волны (рис. 1) на довольно узком частотном диапазоне существования имеет *три особые точки*: одну перегиба (с известной фазой Эйри) и две двукратного ветвления. Три асимптоты вполне перекрывают весь диапазон (см. нижеслед. теорему 1). Так что и в целом этот анализ назовём *сингулярным*. А ввиду исключительности обратных волн и необычности ОВ-явлений, и саму обратноволновую физику мы также определяем как *сингулярную*, в

смысле как «особенную» по существу и с сингулярным математическим анализом.

Второй типичной дисперсионной кривой ОВ является *гипербола* (или *парабола*), квази-гипербола: без точки перегиба и с вершиной в точке критической частоты,  $(k; \omega) = (0; \omega_{KP})$ , где лежит нулевая сингулярность ZGV, [18]. См. рис. 3. Другой особенностью здесь служит *точка пересечения* (матем.) на нуле частот  $(k; \omega) = (k_0; 0)$ ,  $k_0 > 0$ . Обе эти сингулярности (или, кратко, *сингулы* – наша девиация термина) возникают в силу чётности дисперсионных соотношений – уравнений и законов или функций;

см. следующее Опред. 2.

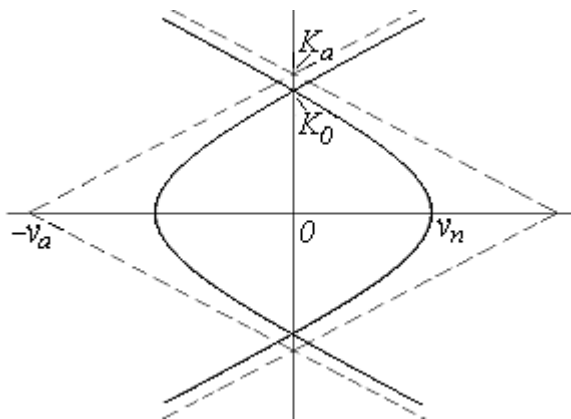


Рис. 3. Типичные, 2-го вида кривые дисперсии волнового числа  $k(\omega)$  обратных волн ( $K \sim k$ ,  $v \sim \omega$ ; штрихами – асимптоты; неканонический вид гиперболы и, в общем случае, квазигиперболы).

И ещё одно обобщение на базе чётности дисперсионных уравнений.

**Определения 2.** Все дисперсионные кривые, как правило, симметричны относительно обеих осей координат  $k$  и  $\omega$ . Дисперсионные уравнения – это чётные функции частоты и волнового числа, а также и др. параметров волноводной системы. Много реже встречаются нечётные соотношения (см. [11, с. 341] и др.) или неопределённой, *несводимой* чётности:

$$D(k; \omega) \neq \pm D(-k; \omega); \quad D(k; \omega) \neq \pm D(k; -\omega).$$

**3. Аналитическое описание, аппроксимация и асимптотика дисперсии обратных волн на базе анализа корней дисперсионных уравнений.** Трансцендентных уравнений и

др., произвольных и сколь угодно сложных уравнений, функций и кривых, что весьма актуально ввиду перманентного усложнения современных волновых задач.

**Теорема 1.** (о трёх асимптотах и аппроксимации). Пусть дана табулированная зависимость или, неявная, через дисперсионное уравнение, или явная аналитическая функция волнового числа  $\sigma(\nu)$  обратной волны и соответствующая дисперсионная кривая, являющиеся регулярными всюду, за исключением критических частот, как точек ветвления  $\nu_{kp}$  ( $kp = n, p$ ). Тогда функция  $\sigma(\nu)$  довольно точно аппроксимируется,  $\sigma(\nu) \approx \sigma_j(\nu)$ ,  $j=p, m, n$ , тремя весьма простыми асимптотами (см. рис. 4, ниже), аналитическими функциями:

$$\sigma_p(\nu) \cong \sigma_p - a_p \sqrt{\nu - \nu_p} + o(\nu - \nu_p) \quad (1)$$

– в плюс-полуокрестности нижней критической частоты  $\nu_p$ .

$$\sigma_m(\nu) \cong \sigma_m - z_m (\nu - \nu_m) + o(\nu - \nu_m)^3 \quad (2)$$

– в окрестности точки перегиба  $\nu_m$ . И, третья

$$\sigma_n(\nu) \cong a_n \sqrt{\nu_n - \nu} + o(\nu_n - \nu)^{3/2} \quad (3)$$

– в минус-полуокрестности верхней критической частоты  $\nu_n$ .

Здесь положительные числа  $\sigma_j$ ,  $j=p, m$ , заданы исходно, а числа  $a_k > 0$ ,  $k=p, n$ , и  $z_m > 0$  элементарно определяются через дифференциалы  $\Delta\sigma$  и  $\Delta\nu$  (знак  $\Delta$  – приращение) или производные;  $\nu \sim \omega$ ,  $\sigma = kd$  – приведённые нормированные частота и волновое число ( $d$  – поперечник, диаметр цилиндра или шаг цепочки и т.п.).

Задержка  $z_m$  обратна групповой скорости,  $z_m = 1/U_m$ . Доказательство проводится на базе теории неявных функций или прямым дифференцированием дисперсионного уравнения [10, 18].

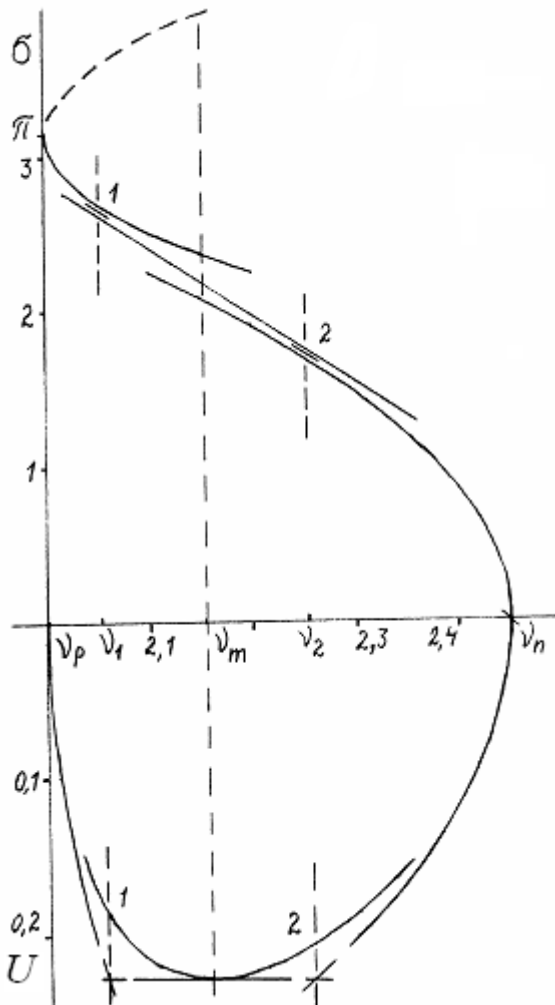


Рис. 4. Аппроксимация и асимптотика наиболее типичных дисперсионных кривых обратной волны (по данным для ОБ в биперфорации или пластине и цилиндре, п. 4). Нормированные  $\sigma$  – волновое число,  $U$  – групповая скорость;  $\nu$  – частота (штриховой отрезок для прямой моды). Сравнение с асимптотами в точках квазикасания на  $\nu_1$  и  $\nu_2$ .

Привлечение аппарата неявных функций представляется универсальным, т.к. обратные волны описываются, как правило, сложными законами дисперсии. В качестве которых выступают или дисперсионные уравнения, или явные, но трансцендентные функции, или, в численных моделях, табулированные зависимости. Формальный, на первый взгляд, переход к дисперсионному уравнению,  $D(\sigma; \nu) = \sigma - \sigma_N(\nu) = 0$ , делает подход и результаты для неявных функций общими для всех видов дисперсионной зависимости. (При этом доказательство теоремы существования функции  $D(\sigma; \nu)$  представляется непринципиальным, второстепенным аспектом).

**Следствие 1.** (Об аналитической диспер-

сии). В аналитическом классе задач, задач решаемых аналитически, с выводом дисперсионного уравнения  $D(\sigma, \nu) = 0$ , аппроксимация определяется сколь угодно точными степенными разложениями и асимптотическими равенствами  $\sigma(\nu) \cong \sigma_{ACj}(\nu)$ ,  $j = p, m, n$ , (1)–(3) с коэффициентами первых приближений:

$$a_p^2 = -2 D'_\nu(\sigma_p, \nu_p) / D''_\sigma(\sigma_p, \nu_p) > 0, \quad z_m = D'_\nu(\sigma_m, \nu_m) / D'_\sigma(\sigma_m, \nu_m) > 0, \quad (4)$$

$$a_n^2 = 2 D'_\nu(0, \nu_p) / D''_\sigma(0, \nu_p) > 0, \quad \text{где производные } D_y^{(r)} = \partial^r D / \partial y^r. \quad (5)$$

Доказательство проводится на основе разложений для двукратного и двукратного нулевого (3) корней ДУ и в точке перегиба (на частоте экстремума) [10, 18].

**Следствие 2.** (О табулируемой дисперсии). В равенствах (1)–(3) положительные коэффициенты  $a_k$ ,  $k = p, n$ , легко определяются через приращения (дифференциалы) от  $\sigma$  и  $\nu$ :

$$a_k \approx \Delta\sigma / \sqrt{\Delta\nu_k}, \quad \Delta\sigma = \sigma - \sigma_k \ll 1, \quad \Delta\nu_k = |\nu - \nu_{kp}| \ll 1, \quad \sqrt{a} \equiv (a)^{1/2}. \quad (6)$$

Причём погрешность расчёта мала, порядка  $\delta a_k \sim \Delta\nu_k / \Delta\sigma \sim \sqrt{\Delta\nu_k} \ll 1$  – для ненулевых точек ветвления, и ещё меньше для нулевых,  $\sigma_n = 0$ ,  $\delta a_n \sim \Delta\nu_k \ll 1$ . Аналогично и  $z_m = \Delta\sigma_m / \Delta\nu_m$ ,  $\delta z_m \sim \Delta\nu_m^3 / \Delta\sigma \sim \Delta\nu_m^2 \ll 1$ .

#### 4. Примеры на обратных модах Лэмба и периодических структурах

**4.1. Основная акустическая ОВ-мода Лэмба  $S_1^0$ .** Материал данного пункта имеет не только методическую цель, но и оригинален [18, п. 7В]. Волны Лэмба весьма распространены в быту и в технике и, несмотря на вековую историю, всё ещё не вполне изучены, до сих пор исследуются во всём мире [19–28, ...]. Тем более мало изучены обратные моды этого вида. В частности, симметричная волна 1-го порядка  $S_1^0$ , являющаяся основной ОВ в спектре всевозможных волновых движений упругого слоя (см. в [25, 26]). (Волны Лэмба – по имени Горака Лэмба, указанного выше основоположника теории обратных волн; однако самому Лэмбу не довелось открыть своих же обратных продольных волн в пластине, они были открыты полувеком позже, лишь в 1950-ые гг. [5, с. 1416]).

Кривые дисперсии обратноволновых мод Лэмба подобны рисунку 4 и для них действительны три асимптоты (1)–(3). Рассмотрим здесь анализ асимптоты (3) и 1-го приближения, не требующих значительных компьютерных расчётов, но вполне иллюстрирующих метод. Расчёт чисел  $a_n$  проведён нами и другими авторами (см. [10, 26]). Для стальной пластины, с коэффициентом Пуассона 0,292, получено  $a_n = 0,752...$  и  $\nu_n = 2,89$ . Нормировка волнового числа  $\sigma = kh$ , частоты  $\nu = \omega h / C_T$  и групповой скорости – на  $C_T$ . Где  $2h$  – толщина пластины,  $C_T$  – скорость плоских сдвиговых волн. Сравнение этих данных для  $\sigma(\nu)$  с расчётами на ЭВМ [27] даёт хороший результат на половине частотного диапазона существования  $S_1^0$ . А это интервал длиной 0,18,  $\nu \in (2,71; 2,89)$ . Наши расчёты для групповой скорости дали приемлемый результат на 1/4-ой диапазона: при  $\nu = 2,84$  имеем точное численное  $U = 0,262$  и асимптотическое 0,258. Т.е. погрешность менее 2% и убывает до нуля при  $\nu \downarrow 2,89$ .

**4.2. Восемь периодических систем с единой дисперсией и ОВ-модой.** Простая электрическая би-LS-цепочка, сегодня подзабытая, известная около ста лет [16, 18 и др.], востребована и методически, и актуальна как простая модель целого ряда волновых структур. Бицепочка представляет собой последовательное соединение элементарных LC-фильтров, индуктивностей,  $L_1$  и  $L_2$ , и шунтирующих ёмкостей,  $C_1$  и  $C_2$ . Нами найдено 8 таких периодических систем [18, 26]. В соответствии с методом аналогий, эта электротехническая конструкция подобна механической последовательной би-mK-цепочке с про-

дольными колебаниями ( $m_j$  – точечные массы,  $j = 1, 2$ ,  $K_j$  – жёсткости пружин). В свою очередь, данная механическая цепочка может быть положена в основу простейшей акустической модели бикомпозита, что весьма востребовано сегодня в материаловедении, а *би-LC*-цепочка – простейшая электродинамическая модель такого композита. Имеется ещё 4-ре волновых эквивалента этим системам. Это вращательная механическая цепочка [см. в 18]; упрощённая упругая модель двухатомного кристалла [16]; бифофрированный акустический волновод – акустический фильтр (см. в [18]). И, наконец, аналогичный акустическому, бифофрированный *радио-волновод*. Т.о., получаем *бицепочку, как уникам-модель 1-го порядка приближения для восьми (!) волноводных систем с единым законом дисперсии (типа рис. 1) и обратной волной.*

## 5. Заключительные замечания

**5.1. О четырёхкратных, бидвукратных и других высоких сингулярностях.** Выше использовались простейшие наиболее распространённые, двукратные особые точки по волновому числу, кроме точки перегиба. Однако уже дисперсионные уравнения Лэмба имеют 4-ёхкратные нулевые корни [28]. Аналогично дисперсионное уравнение Похгаммера для продольных мод упругого цилиндра, при ряде дискретных значений коэффициента Пуассона также имеет спектр 4-ёхкратных нулевых корней [26]. А в более сложных волноводах, безусловно, имеются сингулярности и более высокого порядка. Конечно, эти аспекты играют *второстепенную* роль в анализе обратных и диспергирующих волн и мы здесь ограничимся указанием лишь четырёхкратных и бидвукратных точек.\*<sup>1</sup> Бидвукратными мы называем особые точки, имеющими кратность 2-го порядка как по волновому числу, так и по частоте. Эти сингулы аналитически описывают пересечение дисперсионных кривых. Такие точки, лежащие на оси частот или на оси волнового числа (как на рис. 3), не вызывают особых проблем физической интерпретации. Ненулевые же пересечения, с  $\omega \neq 0$  и  $k \neq 0$ , всё ещё, уже ряд 10-летий изучаются и дискутируются в литературе.

**5.2. Об аналитической кинематике и энергетике волн.** Как голоморфные функции переносятся из законов дисперсии в кинематику бегущей волны – не требует особых пояснений. Кинематика – это собственно волна без акцента на амплитуду и мощность, т.е. её волновой фактор и всё, что может быть с ним связано. И что составляет весьма широкий, если не преобладающий круг проблем волновой физики и техники. Это дисперсия и затухание, отражение и преломление, отчасти дифракция и, в значительной мере, интерференция, когерентность и анизотропия и многое другое.

Пример на кинематику. Пусть угол отражения по Снелю есть  $\varphi = \arcsin(k_p \sin \phi / k_{Omp})$ . Тогда, если известно, например, что  $k_p \cong d \sqrt{\omega - \omega_{kp}}$ , а также аналитическое  $k_{Omp}(\omega)$ , то получим явную, аналитическую же зависимость от частоты для угла отражения:  $\varphi \cong \varphi(\phi; \omega)$ .

2-ой Пример на энергетику, на амплитуду волны. Пусть найдено, что  $A = A(k_B)$ . Тогда если дана функция  $k_B(\omega)$ , то имеем сложную (матем.) функцию  $A = A(k_B(\omega)) \equiv F(\omega)$ . Что и требовалось *показать*, проиллюстрировать. Краевые задачи со строгим решением и увязкой амплитуд, как функций, с волновыми числами типичны, общеизвестны.

Однако, в отличие от возможности полного аналитического описания дисперсии, в случае кинематики речь не идёт о полноте. Современные волновые задачи столь сложны, что об аналитичности решения можно говорить, как правило, отчасти (громоздкость формул), фигурально (образно) и, пожалуй, лишь локально и асимптотически, для определённых

---

\*<sup>1</sup> Однако за такого рода нюансами и поправками могут «скрываться» и новые физические эффекты и даже целые направления. Так нелинейная оптика и акустика, как известно, начинались с учёта 2-ых порядков малости в исходно нелинейных, дифференциальных уравнениях.

ных областей и значений спектра частот и параметров задачи. А в отношении энергетики волн такое положение тем более действительно.

**5.3. Об аппроксимации и точности анализа.** Т.о., законы дисперсии обратных и, вообще, бегущих волн могут быть аппроксимированы весьма просто и эффективно, с наперёд заданной точностью и элементарными функциями типа радикала и полинома:  $(\omega - \omega_0)^{\kappa/2}$ ,  $\kappa=1,2$ , для большей точности более высокими приближениями,  $\kappa=3,4$ , и выше. В задачах с аналитическим выводом дисперсионного (характеристического) уравнения, коэффициенты асимптот рассчитываются аналитически, затем анализируются и рассчитываются. При численных методах – численно. Ввиду узости или ограниченности частотных диапазонов существования обратных волн, легко достижима полная высокоточная аппроксимация всего частотного распределения дисперсии двумя-тремя асимптотиками, или одной, высокого приближения (для 2-го типа дисперсии – рис. 3). Проведённые примеры расчётов из разных областей механики и электродинамики, продемонстрировали точность и эффективность предложенных методов.

Наконец, заметим, современные вычислительные технологии позволяют выносить асимптоты и аппроксимацию вслед за представлением (табулированием) численных данных. В таком случае, предложенная методика послужит теоретической посылкой в численном анализе дисперсии волн и особенно обратных мод.

**Реплика о всесторонних исследованиях обратных волн.** В заключении подчеркнём важность всестороннего исследования обратных волн. И в разных отраслях, и в механике, и в электродинамике, и в других смежных областях науки и техники, вкл. и машиноведение. Обратным волнам, хотя и косвенно, но посвящают сессии, спецвыпуски журналов, множество сайтов Интернета, пронобелевские представления и броские сюжеты на ТВ и в СМИ (и даже уже «мультики»). Правда, при этом, за скороспелыми заявками, заманчивый «плащ-невидимка» сделал *невидимой* и саму *обратноволновую физику*, фундаментальную и многопрофильную область, широкую и богатую эффектами. Невидимой не только левоверным журналисткам, но и для нас, для взвешенных учёных... Однако, обратноволновая отрасль должна стать *солидной* областью физической науки, как *вечный* профиль Лэмба-Мандельштама, в прямом – [fmclass.ru/phys.php?id](http://fmclass.ru/phys.php?id), и в переносном смысле.

### Список литературы

1. Ю. И. Неймарк. Динамическая система как основная модель современной науки// *Автомат. и телемех.* 1999. № 3. С.196–201.
2. Неймарк Ю.И. Бегущие волны и дисперсионное уравнение// Математические модели в естествознании и технике. Учебник. Н. Новгород: НГУ им. Н.И. Лобачевского, 2004.
3. Lamb H. On group velocity// *Proc. L. Math. Soc., Ser.2.* 1904. V.1. №849. P.473–479.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механики./ Под ред. С.М. Рытова. М.: Наука, 1972.
5. Бырдин В.М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие ОБ-механики и электродинамики (обзор)// *Радиотехника и электр.* 2005. Т.50. №12. С.1413–1438.
6. S. Mezil, F. Bruno, S. Raetz, J. Laurent, D. Royer, and C. Prada. Investigation of interfacial stiffnesses of a trilayer using zero group velocity Lamb modes// *JASA.* 2015. V.138. P.3202.
7. Weijun Lin; Hanyin Cui. Backward guided modes with double zero-group-velocity points in liquid-filled pipes// *Ultrasonics Symposium (IUS), 2015. IEEE International.* P.1–4.
8. Hanyin Cui, Weijun Lin, Hailan Zhang, Xiuming Wang and Jon Trevelyan. Backward waves with double zero-group-velocity points in a liquid-filled pipe// *JASA.* 2016. V.139. Is.3 P.1179.

9. Istvan A. Veres, Clemens Grunsteidl, David M. Stobbe and Todd W. Murray. Broad-angle negative reflection and focusing of elastic waves from a plate edge// *Phys. rev.* 2016. B93. 174304-8.
10. Бырдин В.М. О затухании нормальных и поверхностных волн и зависимости их фазовых и групповых скоростей от потерь в средах// *ДАН.* 1978. Т.238. №3. С.552–554.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: ФМЛ, 2001. (Т. 6 Теорфизики)
12. Кейлис-Борок В.И. Об уравнении частот многослойной упругой среды// *ДАН.* 1952. Т.87. №1. С. 25.
13. Краснушкин П.Е., Фёдоров Е.Н. О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах// *Радиотехника и эл.* 1972. №6. С.1129–1140.
14. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применение. 3 изд. М.: Либроком, 2010.
15. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия: Уч. для ун-в. М.: КомКнига, 2006.
16. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах./ Пер. с франц. М.: ИЛ, 1959.
17. Шульга Н.А. (Распространение гармонических волн в пьезокерамич., однородных или сложных, цилиндр. волноводах) (обзоры)// *Прикл. мех.* 2002. Т. 38. №8. С.46–68; – №12. С.33–54.
18. Бырдин В.М. Дисперсия, аппроксимация и асимптотика обратных, нормальных и диспергирующих волн// *Проблемы машиностр. и автоматизации.* 2007. №1. С.102–109.
19. Акустоэлектроника/ Сессия ОФН РАН; Ю.В. Гуляев и др.// *УФН.* 2005. №8. С.887–895.
20. Ермолов И.Н. Достижения в теоретических вопросах ультразвуковой дефектоскопии, задачи и перспективы// *Дефектоскопия.* 2004. №10. С.13–48.
21. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О затухании волн Лэмба в окрестности критических частот и локализация колебаний в слое// *ДАН.* 1999. Т.363. №3. С.330–335.
22. Katsuo Negishi, Hyo Ung Li. Strobe-Photo-elastic Visualization of Lamb Waves with Negative Group Velocity (...) on a Glass Plate// *Jpn. Appl. Phes.* 1996. V. 35. N 5B. P.3175–3176.
23. Marston Ph.L. Negative group velocity Lamb waves...// *JASA.* 2003. V.113. №5. P.2659-2662.
24. LI Mingliang, DENG Mingxi, GAO Guangjian. Modal expansion analyses of ultrasonic Lamb waves generated by electromagnetic ultrasonic transducers//*Chinese J. of Acoustics.* 2014. №2.
25. Лепендин Л.Ф., Бырдин В.М. Основные приходящие волны Лэмба: симметричная 1-го и антисим. 2 порядков// *Изв. ТРТУ.* 1997. С.194.
26. Бырдин В.М. Мамонова М.Г. Обратноволновые моды колебаний пластин, стержней и оболочек// *Проблемы машиностр. и автоматизации.* 2011. №1. С.81–91.
27. Меркулов Л.Г., Рохлин С.И., Зобнин О.П. (Расчёт спектра и дифракция волн Лэмба в пластине)// *Дефектоскопия.* 1969. №4. С.35; – 1970. №4. С.12.
28. Бырдин В.М. О четырехкратных корнях дисперсионных уравнений// *Волны и дифракция/ Краткие тез. 8-го Всесоюз. симп. Т.3. М.: АН СССР, 1981. С.219–222.*
29. Библиейская энц./ Труд и изд. Архимандрита Никифора. М., 1891; Репр. изд. М., 1990.

## АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ В ПОВРЕЖДЕННОЙ СРЕДЕ

\* А.В.Ванягин, \*\*В.М.Родюшкин

\*Научно-исследовательский радиофизический институт.  
г.Нижний Новгород, ул.Большая Печерская, 25/12а, e-mail: e678xk@mail.ru

\*\*Институт Проблем Машиностроения РАН.  
603024 Нижний Новгород, ул.Белинского, 85, e-mail: vlkn2005@yandex.ru

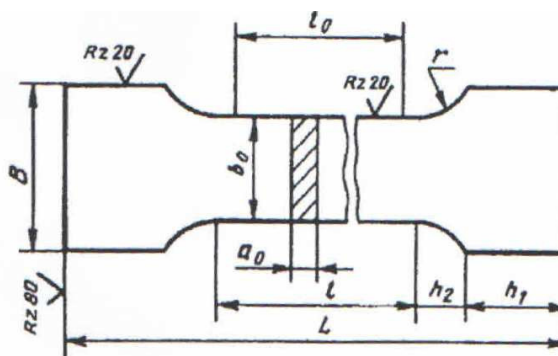
В работе представлены результаты, демонстрирующие возможность использования нелинейных волн Рэлея характеризовать поврежденность, связанную с пластической деформацией. Разработано специализированное устройство контроля параметра, характеризующего акустическую нелинейность, позволяет исследовать металл на реальных конструкциях.

**Ключевые слова:** Волна, поврежденность, образец, нелинейность, неразрушающий метод

В поврежденном металле, наряду с нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия (физическая нелинейность), приводящей к нелинейной связи между напряжением и деформацией, проявляется структурная нелинейность [1]. Эта нелинейность определяется надмолекулярной внутренней структурой твердого тела (дислокациями, микротрещинами, локальными внутренними напряжениями и т.д.) и может на 2-4 порядка превышать физическую нелинейность. Контролируя параметры нелинейности среды, возрастающей при появлении «зародышей» процесса разрушения, можно косвенно оценивать поврежденность. В докладе приводятся результаты экспериментов, демонстрирующие работоспособность высказанной выше идеи на примере акустического неразрушающего метода.

Исследования проводились следующим образом: исходя из того, что несовершенства в структуре металла во многом обуславливают его нелинейные свойства, в подготовленных образцах конструкционного материала путем малоциклового деформирования создавалось поврежденное состояние. Так, как нелинейность упругой среды, при распространении в ней акустических волн, приводит к генерации в зондирующем сигнале спектральных составляющих на частотах, кратных основной частоте, то в каждом из деформированных образцов контролировался параметр акустической нелинейности зондирующего сигнала-соотношение амплитуды первой и второй гармоник.

Для проведения экспериментальных работ были изготовлены семь идентичных образцов из металла марки Ст10 одной поставки по ГОСТ 1497. Размеры образца приведены на рис.1.



$B=40$ ;  $b_0=30$ ;  $l=300$ ;  $a_0=4,4$ ;  $h_1=50$ ;  $h_2=12$

Рис.1. Пропорциональный плоский образец №21 (ГОСТ 1497-84 приложение №3).  
Размеры даны в мм.

С целью улучшения микроструктуры и достижение большей однородности металла, а также для снятия внутренних напряжений перед проведением испытаний все образцы были подвергнуты термическому отжигу (800°C, 1 час, охлаждение с печью). Один образец послужил для определения физико-механических характеристик. Измеренные по диаграмме растяжения величины составили значения: предел прочности 412 МПа; модуль упругости 290 ГПа; относительное удлинение 28%.

Контролируемое поврежденное состояние в остальных образцах создавалось путем деформирования на универсальной испытательной машине фирмы Tinius Ollsen Ltd, модель H100KU, реализующей соответствующий режим нагружения.

Параметры режимов нагружения (скорость нагружения была 5 мм/мин) представлены в таблице 1. Контроль акустической нелинейности зондирующего сигнала проводился с использованием пары клиновых преобразователей, которые позволяли генерировать и обнаруживать тональный сигнал ультразвуковых Рэлеевских поверхностных волн. В качестве параметра, характеризующего акустическую нелинейность, выбрано выраженное в дБ соотношение амплитуды основной гармоники на 1 МГц и второй - соответственно на 2 МГц, как было сделано в [2]. Этот параметр для заданной поврежденности контролировался по всей поверхности образца с использованием устройства, функциональная схема которого приведена на рис.2.

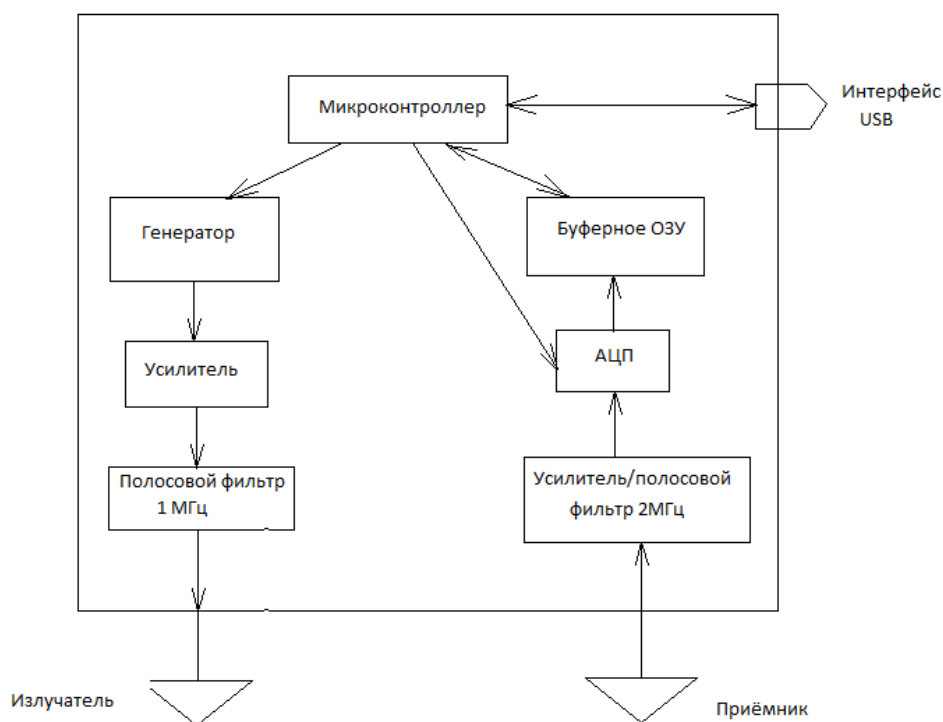


Рис. 2. Функциональная схема устройства контроля параметра, Характеризующего акустическую нелинейность

По поступающей от компьютера по USB команде микроконтроллер запускает генератор, который формирует радиоимпульс с частотой заполнения 1 МГц и длительностью 3,5 мс, сигнал подаётся на пьезоизлучатель, имеющий резонансную частоту 1 МГц. Спектральные характеристики сигнала измерены прибором DPO4032 фирмы Tektronix, приведены на рис.3.



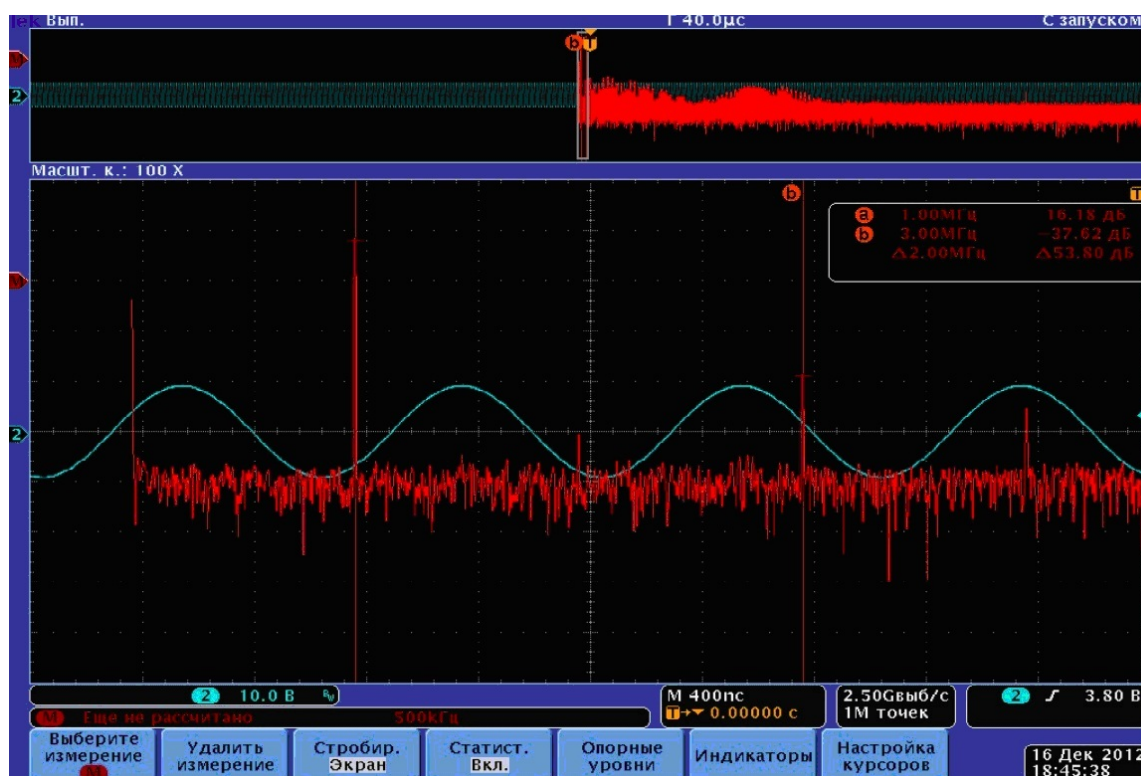


Рис. 3. Спектральные характеристики сигнала: уровень второй гармоники -83дБ, уровень третьей -53дБ

Сигнал с исследуемого образца принимается пьезоприёмником, имеющим резонансную частоту 2МГц, усиливается усилителем, имеющим для расширения динамического диапазона завал АЧХ на частоте 1МГц по сравнению с 2МГц около 20дБ, затем сигнал оцифровывается 16-разрядным АЦП с частотой квантования 5МГц и запоминается в буферном ОЗУ. После этого микроконтроллер выполняет спектральный анализ полученного сигнала и вычисляет отношение амплитуд спектральных компонент на частотах 2 и 1 МГц. Результат по USB передаётся в компьютер. Устройство выполнено в отдельном пластмассовом корпусе и питается от внешнего источника 9...30В, внешний вид устройства показан на рис.4.



Рис. 4. Внешний вид устройства для контроля параметра, характеризующего акустическую нелинейность

Следует заметить, что исследования нелинейности, как правило, проводятся в лабораторных условиях [1-2,3], удовлетворяя интерес ученых, в то время как представленное специализированное устройство контроля параметра, характеризующего акустическую нелинейность, позволяет исследовать металл на реальных конструкциях, что переводит его в ранг средств неразрушающего контроля за поврежденностью упругой среды.

Анализ представленных в таблице 1 данных убедительно показывает увеличение измеренной акустической нелинейности в металле как в стадии «преддефекта» или предразрушения (момент образования шейки на образце при испытании на растяжение), так и на ранних стадиях усталости.

Таблица 1. Режимы малоциклового нагружения и значения параметра, характеризующего акустическую нелинейность, в зависимости от истории нагружения.

№ образца	Тип нагружения	Максимальное значение параметра по длине образца, дБ
1	начальное состояние (без нагружения)	-10,2
2	50 циклов с амплитудой 0,6 от предела текучести с выдержкой 4 мин на максимальной нагрузке	-1,3
3	50 циклов с амплитудой 0,6 от предела текучести	-11,6
4	растянут до образования шейки	-2,7
5	300 циклов с амплитудой 0,6 от предела текучести	-2,3
6	50 циклов с амплитудой 0,7 от предела текучести	-1,3
7	50 циклов с амплитудой 0,8 от предела текучести	-5,9

Концентрации повреждений при любом виде нагружения происходит в локальном объеме [5], что косвенно, учитывая изначальную неоднородность свойств металла, объясняет факт наблюдаемой неравномерности распределения параметра нелинейности по длине образца.

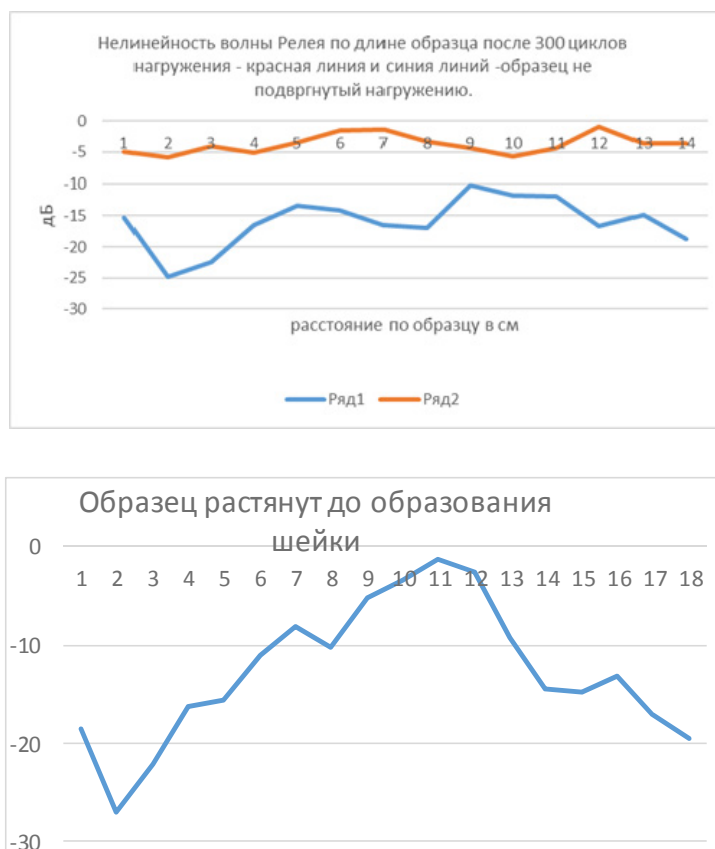


Рис. 5. Результаты измерения акустической нелинейности для различной накопленной поврежденности (для различных режимов деформирования образцов)

Представленные результаты демонстрируют возможность использования нелинейных волн Рэля характеризовать поврежденность, связанную с пластической деформацией, и это количественная информация может быть полезной для моделей прогнозирования ресурса. Следует отметить, что акустическая нелинейность волны для различной накопленной поврежденности (для различных режимов деформирования образцов) изменяется более существенно, чем скорость волны. Результаты, приведенные в [4], свидетельствуют об изменении скорости поверхностной волны при состоянии предразрушения не более чем 1%, в то время как изменение акустической нелинейности волны составляет величину порядка 4-9 дБ или в 2-3 раз по линейной шкале.

Значение показателя акустической нелинейности отражает как искомую нелинейность поврежденной исследуемой среды, так и нелинейность всего измерительного тракта, включая контакт между преобразователем и средой (контактная акустическая нелинейность) [3]. Поэтому особое внимание уделялось постоянству свойств контакта (прижим, шероховатость поверхности образцов).

### Выводы

На примере контроля за показателем акустической нелинейности продемонстрирована работоспособность акустического неразрушающего метода оценки степени поврежденности конструкционного материала.

### Список литературы

1. В. Ю. Зайцев, В. Е. Назаров, В. И. Таланов «Неклассические» проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики // УФН, 176:1 (2006), 97–102

2. Мишакин В.В., Родюшкин В.М. «Нелинейность как индикатор преддефектного состояния материала» // Безопасность труда в промышленности. 2009. №7. с.48-53
3. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. «Нелинейные акустические свойства контакта шероховатых поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей» // Акустический журнал.-1994, т.40, №4, с.668-672.
4. Физические основы прочности материалов/ Зуев Л.Б., Данилов В.И. // уч.пос. –ИД Интеллект, 2013. С.376
5. М. Г. Петров, А. И. Равикович. «Накопление повреждений при пластическом деформировании и ползучести алюминиевых сплавов» // ПМТФ. 2006. Т. 47, N-° 1 с.172-182

## МНОГОПОЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОРОТКОВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В ЦЕПОЧКЕ ЧАСТИЦ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

А.А. Васильев

Тверской государственный университет,  
кафедра математического моделирования.  
170002 Тверь, Садовый пер., 35, e-mail: alvasiliev@yandex.ru

Обсуждается применение метода многополевых континуальных аппроксимаций для моделирования коротковолновых нелинейных стационарных структур и структурных переходов в цепочке частиц конечного размера.

Ключевые слова: многополевая теория, коротковолновые структуры, дискретная система.

**Упруго-шарнирная модель системы частиц конечного размера.** Рассматривается нагруженная осевой сжимающей нагрузкой величины  $p$  цепочка частиц длины  $h$ , соединенных упругими шарнирами жесткости  $f$  (рис. 1). Сопротивление поперечным смещениям системы со стороны окружающей среды моделируется нелинейным потенциалом  $k_0 v_n^2 / 2 + k_1 v_n^4 / 4$ ,  $k_0 > 0$ ,  $k_1 > 0$ . В шарнирах предполагается действие поперечных нагрузок коротковолнового вида  $(-1)^n g$ , учтено вязкое трение. В случае малых смещений ( $v_n \ll h$ ), уравнения динамики такой системы записываются в безразмерном виде

$$\ddot{u}_n + \gamma \dot{u}_n + F \Delta^4 u_n + P \Delta^2 u_n + u_n + u_n^3 + (-1)^n G = 0, \quad (1)$$

где введены обозначения

$$u_n = v_n \sqrt{k_1 / k_0}, \quad \tau = t \sqrt{k_0 / m}, \quad F = f / (k_0 h^2), \quad P = p / (k_0 h), \quad G = g / k_0, \quad \Delta^2 u_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}, \\ \Delta^4 u_n = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Двух-, трех- и четырех-периодические структурные переходы в цепочке частиц при отсутствии поперечной нагрузки,  $G = 0$ , и вязкого трения,  $\gamma = 0$ , на основе упруго-шарнирной модели с использованием многополевых моделей изучались в [1], [2].

**Стационарные коротковолновые двухпериодические решения.** Стационарные двухпериодические решения ищутся в виде  $-u_{2k} = u_{2k+1} = w$ . Подстановка в уравнение движения (1) приводит к многочлену третьей степени

$$w^3 - (4P - 16F - 1)w - G = 0 \quad (2)$$

для нахождения смещений  $w$ . С использованием методов, которые получили развитие и применение в теории катастроф, в пространстве параметров  $P$ ,  $F$ ,  $G$  может быть найдена граница областей с одним и тремя корнями многочлена (2)

$$G = \pm [(4P - 16F - 1)/3]^{3/2}. \quad (3)$$

Для параметров внутри области (3) существуют две устойчивые и одна неустойчивая двухпериодические структуры с величинами смещений  $w_1$ ,  $w_3$ ,  $w_2$  соответственно,  $w_1 < w_2 < w_3$ . Устойчивые структуры энергетически не равнозначны, однако в силу принципа максимального промедления в системе могут быть реализованы структуры обоих типов. Если же возникает их соприкосновение, то происходит переход одной структуры в другую. При этом на бесконечностях сохраняются исходные структуры  $w_1$  и  $w_3$ . Если в системе существует диссипация, например вязкое трение, поглощающее выделяющуюся энергию, то возможно возникновение автоволны перехода одной структуры в другую, движущейся вдоль цепочки с постоянной скоростью.

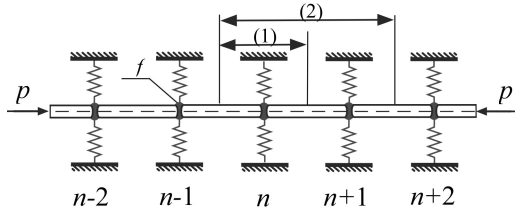


Рис. 1. Упруго-шарнирная модель: (1) – ячейка, (2) – макроячейка. Используемые обозначения.

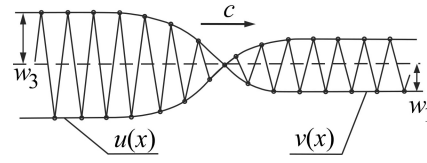


Рис. 2. Бегущая волна перехода одной двухпериодической структуры в другую. Двухполювая аппроксимация.

**Обобщенная двухполювая модель.** Аналитическое приближение, описывающее волну перехода, строится на основе двухполювой аппроксимационной модели. Рассматривая макроячейку из двух элементарных ячеек (рис. 1), введя для смещений четных и нечетных узлов обозначения  $u_{2k}$  и  $v_{2k+1}$ , уравнение (1) переписывается в виде двух уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n + \gamma \dot{u}_n + F(u_{n-2} - 4v_{n-1} + 6u_n - 4v_{n+1} + u_{n+2}) + P(v_{n-1} - 2u_n + v_{n+1}) + u_n + u_n^3 + G &= 0, \\ \ddot{v}_{n+1} + \gamma \dot{v}_{n+1} + F(v_{n-1} - 4u_n + 6v_{n+1} - 4u_{n+2} + v_{n+3}) + P(u_n - 2v_{n+1} + u_{n+2}) + v_{n+1} + v_{n+1}^3 - G &= 0, \end{aligned}$$

где  $n = 2k$ ,  $k$  - номер ячейки.

Далее, введем двух полевых функций  $u(x, \tau)$  и  $v(x, \tau)$  таких, что в узлах  $u(2kh, \tau) = u_{2k}(\tau)$ ,  $v((2kh+1), \tau) = v_{2k}(\tau)$ , с использованием разложения в ряды Тейлора с учетом производных не выше четвертого порядка, для функций  $u(x, \tau)$  и  $v(x, \tau)$  получаются два связанных уравнения двухполювой модели:

$$\begin{aligned} u_{tt} + \gamma u_t + F[8(u-v) + 4h^2(u_{xx} - v_{xx}) + h^4(4u_{xxxx} - v_{xxxx})] + \\ + P[2(v-u) + h^2v_{xx} + h^4v_{xxxx}/12] + u + u^3 + G &= 0, \\ v_{tt} + \gamma v_t + F[8(v-u) + 4h^2(v_{xx} - u_{xx}) + h^4(4v_{xxxx} - u_{xxxx})] + \\ + P[2(u-v) + h^2u_{xx} + h^4u_{xxxx}/12] + v + v^3 - G &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Многополювые автосолитоны.** Отметим, что система (4) содержит два устойчивых и одно неустойчивое двухпериодические стационарные решения дискретной системы с величинами смещений  $w_1, w_3, w_2$ , где  $w_1 < w_2 < w_3$  являются корнями кубического уравнения (2). На их основе строится решение переходного типа.

Разыскиваем решения вида  $v(x, \tau) = -u(x, \tau) = w(x, \tau)$ . Подстановка в уравнения (4) с учетом производных не выше второго порядка по  $x$  дает уравнение

$$\rho w_{tt} - Aw_{xx} - Bw + w^3 - G + \gamma w_t = 0, \quad (5)$$

где  $A = (P - 8F)h^2$ ,  $B = 4P - 16F - 1$ ,  $\rho = 1$ . Решение этого уравнения ищется в виде бегущей волны  $w(x, \tau) = W(x - c\tau)$ . Подстановка в (5) дает уравнение

$$(\rho c^2 - A)W_{\xi\xi} - \gamma c W_{\xi} - BW + W^3 - G = 0,$$

где  $\xi = x - c\tau$ . Решение этого уравнения, принимающее на бесконечностях значения  $w_1$  и  $w_3$ , имеет вид

$$W(\xi) = w_1 + \frac{(w_3 - w_1)}{1 + e^{\pm(w_3 - w_1)\xi/\sqrt{2(A - c^2\rho)}}}.$$

Решение существует в области  $B > 0$ ,  $A > \rho c^2$ ,  $|G| < 2(B/3)^{3/2}$ . Эта область находится внутри области с границей, в которой существуют два устойчивых двухпериодических решения. Скорость распространения автоволны определяется балансом энергии выделяемой при переходе и поглощаемой средой из-за вязкого трения

$$c = \mp(3w_2 / \sqrt{2})\sqrt{A} / \sqrt{\gamma^2 + (3w_2 / \sqrt{2})^2} \rho .$$

Таким образом, строится аналитическое приближение

$$u_{2k}(t) = -W(2kh - n_0h - c\tau), \quad u_{2k+1}(t) = W((2k+1)h - n_0h - c\tau),$$

описывающее переход одной двухпериодической структуры в другую в виде распространяющейся с постоянной скоростью  $c$  автоволны из двух взаимопроникающих кинков, один из которых описывает смещения четных, а другой - нечетных узлов (рис. 2).

**Заключение.** В статье обсуждается применение многополевых моделей для анализа нелинейной динамики систем с микроструктурой. Демонстрируется подход и строится двухполевая континуальная модель (4) цепочки частиц конечного размера. В классическом варианте континуальным приближением для рассматриваемой дискретной системы служит однополевая модель, в которой смещения узлов описываются одной функцией смещений. Однако построенные при таком подходе уравнения не описывают коротковолновые структуры. Из рис. 2 видно, что при описании смещений системы двухпериодического вида одной функцией такая функция должна быстро изменяться и континуальная модель, в которой пренебрегают производными высокого порядка, не описывает такие коротковолновые решения. Использование одного поля – это гипотеза классической теории. В отличие от классической в многополевой теории [3-5] при построении модели используется не одно, а несколько полей описывающих смещения в системе. Такая модель описывает и позволяет находить в рамках континуальной механики на основе модели с производными низшего порядка как стационарные двухпериодические решения, так и переходы между ними, поскольку, как видно из рис. 2, смещения узлов могут быть эффективно описаны двумя медленно изменяющимися функциями. При этом двухпериодические дискретные решения на бесконечностях описываются двумя постоянными функциями многополевой модели, а область перехода функциями в виде двух взаимопроникающих кинков. При этом погрешность тем меньше чем медленнее изменяются функции в этой области. Обзор и разработка подходов многополевой теории для других задач с микроструктурой дается, например, в работах [3-5].

**Благодарности.** Работа выполнялась в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России (№ 2014/220. НИР № 1153).

### Список литературы

1. Shigenari T., Dmitriev S.V., Abe K., Vasiliev A.A. [Domain wall solutions for EHM model of crystal](#) // [Journal of the Physical Society of Japan](#). 1999. V. 68. № 1. Pp. 117-125.
2. Dmitriev S.V., Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Shigenari T., Kagawa Y., Ishibashi Y. Many-field theory for crystals containing particles with rotational degrees of freedom // *Ferroelectrics*. 2003. V. 283. Pp. 127-139.
3. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field approach in mechanics of structural solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 47. Pp. 510–525.
4. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы / Потапов А.И., Лисина С.А., Павлов И.С., Васильев А.А., Маневич Л.И., Смирнов В.В., Абрашкин А.А.. Н.Новгород: НГТУ, 2010. 303 с.
5. Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Dmitriev S.V. [Multi-field modeling of a Cosserat lattice: models, wave filtering, and boundary effects](#) // [European Journal of Mechanics – A /Solids](#). 2014. T. 46. C. 96-105.



## НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИОННОГО УСТРОЙСТВА

**П.А.Вельмисов, А.В.Анкилов**

Ульяновский государственный технический университет,  
экономико-математический факультет.

432027 Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, e-mail: velmisov@ulstu.ru

Рассмотрена нелинейная математическая модель вибрационного устройства с двумя упругими элементами с учетом их взаимодействия с дозвуковым сжимаемым потоком жидкости. Модель описывается связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных. На основе построения функционала получены достаточные условия устойчивости колебаний упругих элементов. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

**Ключевые слова.** Аэрогидроупругость, устойчивость, динамика, канал, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток.

### **Введение**

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком газа, имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к ее потере.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий (например, гидродинамические излучатели), в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [1]). Действие этих устройств основано на колебаниях упругих элементов при обтекании их потоком жидкости. Некоторые конструкции вибрационных устройств для размешивания жидкостей (например, [2]) основаны на возвратно-поступательном движении рабочего органа, в качестве которого используется упругое колесо, перфорированное коническими отверстиями. Движение рабочего органа осуществляется электромагнитом. Модель рассматриваемого в докладе вибрационного устройства, существенно отличается от этой конструкции тем, что его действие основано на автоколебаниях деформируемых элементов.

В докладе приведена задача об исследовании устойчивости вибрационного устройства с двумя упругими элементами. Работа является продолжением исследований по применению «смешанных» функционалов в связанных задачах аэрогидроупругости. Например, в монографии [3] и статье [4] проведено исследование устойчивости вибрационного устройства с одним упругим элементом. Также отметим работы [5–7], в которых исследование устойчивости основано на построении функционалов для систем дифференциальных уравнений с частными производными, к которым сводится решение задач после исключения аэрогидродинамических функций.

### **1. Постановка задачи**

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом  $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$  с горизонтальными стенками, которые имеют деформируемые упругие элементы. Скорость невозмущенного сжимаемого однородного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Рассматривается дозвуковой режим протекания  $a > V$ . Деформируемыми являются части стенок  $y = 0$  и  $y = y_0$  при  $x \in [b, c]$  (рис. 1).



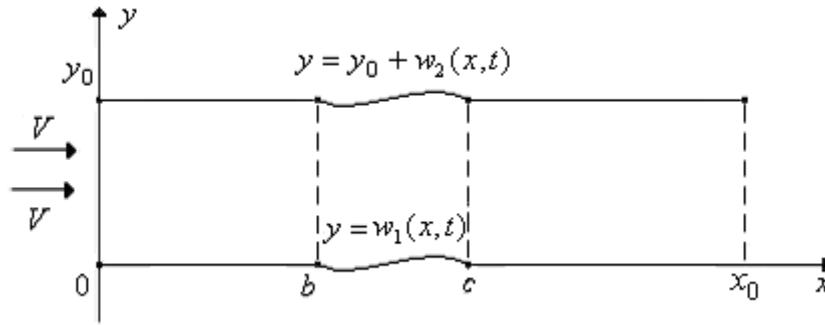


Рисунок 1 – Канал, стенки которого содержат деформируемые элементы

Введем обозначения:  $u_i(x, t)$  и  $w_i(x, t)$  – деформации упругих элементов стенок канала в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, индекс  $i = 1$  соответствует элементу на нижней стенке,  $i = 2$  – на верхней стенке;  $\phi(x, y, t)$  – потенциал скорости возмущенного потока.

Сформулируем математическую постановку задачи. Потенциал скорости  $\phi(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\phi_{tt} + 2V\phi_{xt} + V^2\phi_{xx} = a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}), \quad (x, y) \in G, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

(что соответствует модели идеальной сжимаемой среды), условиям непротекания через стенки канала

$$\phi_y(x, 0, t) = \begin{cases} \dot{w}_1(x, t) + Vw_1'(x, t), & x \in (b, c), \quad t \geq 0, \\ 0, & x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = \begin{cases} \dot{w}_2(x, t) + Vw_2'(x, t), & x \in (b, c), \quad t \geq 0, \\ 0, & x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

и условиям на входе и выходе из канала

$$\phi(0, y, t) = 0, \quad \phi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0). \quad (4)$$

Аэрогидродинамические воздействия на упругие элементы имеют вид

$$P_1(x, t) = \rho(\phi_t(x, 0, t) + V\phi_x(x, 0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$P_2(x, t) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Рассматривается нелинейная модель колебаний упругого тела с учетом продольной и поперечной составляющих деформации элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока  $P_i(x, t)$  на них

$$\begin{aligned} -E_i F_i \left( u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) &= 0, \\ -E_i F_i \left[ w_i'(x, t) \left( u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i''''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + \\ + N_i(t) w_i''(x, t) + \beta_{2i} \dot{w}_i''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) &= P_i(x, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих и точка – частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно;  $\rho$  – плотность потока;  $D_i = E_i h_i^3 / (12(1 - \nu_i^2))$  – изгибные жесткости элементов;  $h_i$  – толщина элементов;  $M_i = h_i \rho_{ni}$  – погонные массы элементов;  $F_i = h_i / (1 - \nu_i^2)$ ;  $E_i, \rho_{ni}$  – модули упругости и линейные плотности элементов;  $N_i(t)$  – сжимающие ( $N_i > 0$ ) или растягивающие ( $N_i < 0$ ) элементы силы;  $\beta_{2i}, \beta_{1i}$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_{0i}$  – коэффициенты жесткости оснований;  $\nu_i$  – коэффициенты Пуассона;  $a$  – скорость звука в невозмущенном потоке газа ( $a > V$ ).

Предположим, что концы упругих элементов закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда на концах выполняется одно из четырех типов условий (в любых комбинациях):

$$\begin{aligned} w_i(x,t) = w'_i(x,t) = u_i(x,t) = 0; \quad w_i(x,t) = w''_i(x,t) = u_i(x,t) = 0; \\ w_i(x,t) = w'_i(x,t) = u'_i(x,t) = 0; \quad w_i(x,t) = w''_i(x,t) = u'_i(x,t) + 0.5w_i'^2(x,t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Имеем связанную краевую задачу (1)–(8) для пяти неизвестных функций – деформаций упругих элементов стенок канала  $u_i(x,t)$ ,  $w_i(x,t)$ ,  $i = 1, 2$  и потенциала скорости жидкости (газа)  $\phi(x, y, t)$ .

## 2. Исследование устойчивости

Задача об исследовании динамической устойчивости, а именно – устойчивости по начальным данным, может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «газ-тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, силы трения и т.д.), малым отклонениям тела от положения равновесия и малым возмущениям потока газа в начальный момент времени  $t = 0$  будут соответствовать малые отклонения тела и малые возмущения потока газа в любой момент времени  $t > 0$ .

Так как задача (1)–(8) однородная, то исследуем устойчивость ее нулевого решения  $\phi(x, y, t) \equiv 0$ ,  $w_i(x, t) \equiv 0$ ,  $u_i(x, t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$  по отношению к возмущениям начальных данных. Рассмотрим функционал:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \iint_G (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2) dx dy + 2a^2V \int_b^c \phi(x, 0, t)w'_1(x, t) dx - 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'_2(x, t) dx + \\ + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c (E_i F_i (u'_i + 0.5w_i'^2)^2 + M_i \dot{u}_i^2 + M_i \dot{w}_i^2 + D_i w_i''^2 + \beta_{0i} w_i^2 - N_i(t) w_i'^2) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем производную от  $\Phi$  по  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = 2 \iint_G (\phi_t \phi_{tt} + (a^2 - V^2)\phi_x \phi_{xt} + a^2 \phi_y \phi_{yt}) dx dy + 2a^2V \int_b^c (\phi_t(x, 0, t)w'_1(x, t) + \\ + \phi(x, 0, t)\dot{w}'_1(x, t)) dx - 2a^2V \int_b^c (\phi_t(x, y_0, t)w'_2(x, t) + \phi(x, y_0, t)\dot{w}'_2(x, t)) dx + \\ + \frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c (E_i F_i (u'_i + 0.5w_i'^2)(\dot{u}'_i + w'_i \dot{w}'_i) + M_i \dot{u}_i \ddot{u}_i + M_i \dot{w}_i \ddot{w}_i + \\ + D_i w_i'' \dot{w}_i'' + \beta_{0i} w_i \dot{w}_i - 0.5 \dot{N}_i(t) w_i'^2 - N_i(t) w'_i \dot{w}'_i) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Для функций  $\phi(x, y, t)$ ,  $u_i(x, t)$ ,  $w_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющих уравнениям (1), (5), (6), (7), равенство (10) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = 2 \iint_G (\phi_t (-2V\phi_{xt} - V^2\phi_{xx} + a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy})) + (a^2 - V^2)\phi_x \phi_{xt} + a^2 \phi_y \phi_{yt}) dx dy + \\ + 2a^2V \int_b^c (\phi_t(x, 0, t)w'_1(x, t) + \phi(x, 0, t)\dot{w}'_1(x, t)) dx - 2a^2V \int_b^c (\phi_t(x, y_0, t)w'_2(x, t) + \\ + \phi(x, y_0, t)\dot{w}'_2(x, t)) dx + \frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c (E_i F_i (u'_i + 0.5w_i'^2)(\dot{u}'_i + w'_i \dot{w}'_i) + \dot{u}_i E_i F_i (u'_i(x, t) + \\ + 0.5w_i'^2(x, t))' + \dot{w}_i \left\{ E_i F_i [w'_i(x, t)(u'_i(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t))] - D_i w_i'''' - N_i(t) w_i'' - \right. \\ \left. - \beta_{2i} \dot{w}_i'''' - \beta_{1i} \dot{w}_i'' - \beta_{0i} \dot{w}_i \right\} + D_i w_i'' \dot{w}_i'' + \beta_{0i} w_i \dot{w}_i - 0.5 \dot{N}_i(t) w_i'^2 - N_i(t) w'_i \dot{w}'_i) dx + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+2a^2 \int_b^c (\dot{w}_1(x,t)(\phi_t(x,0,t) + V\phi_x(x,0,t)) - \dot{w}_2(x,t)(\phi_t(x,y_0,t) + V\phi_x(x,y_0,t))) dx.$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)–(4), (8)

$$\begin{aligned} \iint_G \phi_t \phi_{xt} dx dy &= \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} \phi_t \phi_{xt} dx = \frac{1}{2} \int_0^{y_0} \phi_t^2 \Big|_{x=0}^{x_0} dy = 0, \\ \iint_G \phi_t \phi_{xx} dx dy &= \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} \phi_t \phi_{xx} dx = \int_0^{y_0} \left( \phi_t \phi_x \Big|_{x=0}^{x_0} - \int_0^{x_0} \phi_{xt} \phi_x dx \right) dy = \iint_J \phi_{xt} \phi_x dx dy, \\ \iint_G \phi_t \phi_{yy} dx dy &= \int_0^{x_0} dx \int_0^{y_0} \phi_t \phi_{yy} dy = \int_0^{x_0} \left( \phi_t \phi_y \Big|_{y=0}^{y_0} - \int_0^{y_0} \phi_{yt} \phi_y dy \right) dx = \\ &= \int_0^{x_0} \phi_t(x, y_0, t) \phi_y(x, y_0, t) dx - \int_0^{x_0} \phi_t(x, 0, t) \phi_y(x, 0, t) dx - \iint_G \phi_{yt} \phi_y dx dy = \\ &= \int_b^c \phi_t(x, y_0, t) (\dot{w}_2(x, t) + Vw_2'(x, t)) dx - \int_b^c \phi_t(x, 0, t) (\dot{w}_1(x, t) + Vw_1'(x, t)) dx - \iint_J \phi_{yt} \phi_y dx dy, \quad (12) \\ \int_b^c \phi(x, 0, t) \dot{w}_1'(x, t) dx &= \phi(x, 0, t) \dot{w}_1(x, t) \Big|_b^c - \int_b^c \phi_x(x, 0, t) \dot{w}_1(x, t) dx, \\ \int_b^c \phi(x, y_0, t) \dot{w}_2'(x, t) dx &= \phi(x, y_0, t) \dot{w}_2(x, t) \Big|_b^c - \int_b^c \phi_x(x, y_0, t) \dot{w}_2(x, t) dx, \\ \int_b^c \dot{w}_i w_i''' dx &= \int_b^c \dot{w}_i'' w_i'' dx, \quad \int_b^c \dot{w}_i \dot{w}_i''' dx = \int_b^c \dot{w}_i''^2 dx, \quad \int_b^c \dot{w}_i w_i'' dx = - \int_b^c \dot{w}_i' w_i' dx, \\ \int_b^c \dot{w}_i (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t))' dx &= \dot{w}_i (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) \Big|_b^c - \\ &- \int_b^c \dot{w}_i' (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) dx = - \int_b^c \dot{w}_i' (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) dx, \\ \int_b^c \dot{w}_i [w_i'(x, t) (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t))] dx &= \dot{w}_i w_i' (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) \Big|_b^c - \\ &- \int_b^c \dot{w}_i' w_i' (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) dx = - \int_b^c \dot{w}_i' w_i' (u_i'(x, t) + 0.5w_i'^2(x, t)) dx. \end{aligned}$$

Учитывая (12), получим

$$\Phi(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c (\beta_{2i} w_i'^2 + \beta_{1i} w_i^2 + 0.5N_i(t) w_i'^2) dx. \quad (13)$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \dot{N}(t) \geq 0, \quad (14)$$

тогда из (13) окончательно получим

$$\Phi(t) \leq 0. \quad (15)$$

Интегрируя от 0 до  $t$ , имеем оценку

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (16)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (8). Воспользуемся неравенствами Релея [8] и Коши-Буняковского:

$$\int_b^c w_i''^2(x, t) dx \geq \lambda_{1i} \int_b^c w_i'^2(x, t) dx, \quad (17)$$

$$\int_b^c w_i''^2(x, t) dx \geq \mu_{1i} \int_b^c w_i^2(x, t) dx, \quad (18)$$

$$w_i^2(x, t) \leq (c-b) \int_b^c w_i'^2(x, t) dx, \quad (19)$$

где  $\lambda_{1i}$ ,  $\mu_{1i}$  – наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений  $\psi'''' = -\lambda\psi''$ ,  $\psi'''' = \mu\psi$ ,  $x \in (b, c)$  с краевыми условиями  $\psi = \psi' = 0$ ;  $\psi = \psi'' = 0$ , соответствующими (8).

Для  $\Phi(0)$ , используя неравенства (17), (18) и очевидные неравенства  $\pm 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ , получим оценку

$$\begin{aligned} \Phi(0) \leq & \iint_G (\phi_{t_0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x_0}^2 + a^2\phi_{y_0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \phi^2(x, 0, 0) dx + a^2 V^2 \int_b^c w_1'^2(x, 0) dx + \\ & + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + a^2 V^2 \int_b^c w_2'^2(x, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left( E_i F_i (u'_{i0} + 0.5w_{i0}'^2)^2 + M_i \dot{u}_{i0}^2 + M_i \dot{w}_{i0}^2 + \right. \\ & \left. + D_i w_{i0}''^2 + |N_i(0)| w_{i0}'^2 + \beta_{0i} w_{i0}^2 \right) dx \leq \iint_G (\phi_{t_0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x_0}^2 + a^2\phi_{y_0}^2) dx dy + \\ & + a^2 \int_b^c \phi^2(x, 0, 0) dx + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left( E_i F_i (u'_{i0} + 0.5w_{i0}'^2)^2 + \right. \\ & \left. + M_i \dot{u}_{i0}^2 + M_i \dot{w}_{i0}^2 + \left( D_i + \frac{|N_i(0)| + \rho V^2}{\lambda_{1i}} + \frac{\beta_{0i}}{\mu_{1i}} \right) w_{i0}''^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения  $\phi_{t_0} = \phi_t(x, y, 0)$ ,  $\phi_{x_0} = \phi_x(x, y, 0)$ ,  $\phi_{y_0} = \phi_y(x, y, 0)$ ,  $u_{i0}' = u_i'(x, 0)$ ,  $w_{i0}' = w_i'(x, 0)$ ,  $w_{i0}'' = w_i''(x, 0)$ .

Оценим  $\Phi(t)$  снизу:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_G ((a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2) dx dy + 2a^2 V \int_b^c \phi(x, 0, t) w_1'(x, t) dx - \\ & - 2a^2 V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w_2'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_{11} D_1 - N_1(t)) w_1'^2 dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_{12} D_2 - N_2(t)) w_2'^2 dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим оценки:

$$\iint_G \phi_x^2 dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_G \phi^2 dx dy, \quad (22)$$

$$\iint_G \phi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_G (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 dx dy, \quad (23)$$

$$\iint_G \phi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_G (\phi(x, y, t) - \phi(x, 0, t))^2 dx dy. \quad (24)$$

Применяя (22)–(24), из (21) получим неравенство

$$\Phi(t) \geq \iint_G \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2 + \frac{2a^2 \chi_1}{y_0^2} (\phi(x, y, t) - \phi(x, 0, t))^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2a^2 \chi_2}{y_0^2} (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 \Big) dx dy + 2a^2 V \int_b^c \phi(x, 0, t) w_1'(x, t) dx - \\
 & - 2a^2 V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w_2'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_{11} D_1 - N_1(t)) w_1^2 dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_{12} D_2 - N_2(t)) w_2^2 dx,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где введены параметры  $\chi_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , при этом должно выполняться равенство

$$\chi_1 + \chi_2 = 1. \tag{26}$$

Введем обозначение

$$f_i(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in [0, b], \\ w_i'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in [c, x_0], \end{cases}$$

тогда из (25) получим неравенство

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) \geq & \iint_G \left[ (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2(x, y, t) + \frac{2a^2 \chi_1}{y_0^2} (\phi^2(x, y, t) - 2\phi(x, y, t)\phi(x, 0, t) + \right. \\
 & \left. + \phi^2(x, 0, t)) + \frac{2a^2 \chi_2}{y_0^2} (\phi^2(x, y_0, t) - 2\phi(x, y_0, t)\phi(x, y, t) + \phi^2(x, y, t)) \right] dx dy - \\
 & + 2a^2 V \int_0^{x_0} \phi(x, 0, t) f_1(x, t) dx - 2a^2 V \int_0^{x_0} \phi(x, y_0, t) f_2(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_0^{x_0} (\lambda_{11} D_1 - N_1(t)) f_1^2(x, t) dx + \\
 & + \frac{a^2}{\rho} \int_0^{x_0} (\lambda_{12} D_2 - N_2(t)) f_2^2(x, t) dx = \iint_G \left[ \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \phi^2(x, y, t) - \right. \\
 & - \frac{4a^2 \chi_1}{y_0^2} \phi(x, 0, t)\phi(x, y, t) - \frac{4a^2 \chi_2}{y_0^2} \phi(x, y_0, t)\phi(x, y, t) + \frac{2a^2 \chi_1}{y_0^2} \phi^2(x, 0, t) + \\
 & + \frac{2a^2 \chi_2}{y_0^2} \phi^2(x, y_0, t) + \frac{2a^2 V}{y_0} \phi(x, 0, t) f_1(x, t) + \frac{a^2 (\lambda_{11} D_1 - N_1(t))}{\rho y_0} f_1^2(x, t) - \\
 & \left. - \frac{2a^2 V}{y_0} \phi(x, y_0, t) f_2(x, t) + \frac{a^2 (\lambda_{12} D_2 - N_2(t))}{\rho y_0} f_2^2(x, t) \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 d_{11} = \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2 \chi_1}{y_0^2}, \quad d_{33} = d_{13} = \frac{2a^2 \chi_2}{y_0^2}, \\
 d_{24} = \frac{a^2 V}{y_0}, \quad d_{44} = \frac{a^2 (\lambda_{11} D_1 - N_1(t))}{\rho y_0}, \quad d_{55} = \frac{a^2 (\lambda_{12} D_2 - N_2(t))}{\rho y_0}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим квадратичную форму относительно  $\phi(x, y, t)$ ,  $\phi(x, 0, t)$ ,  $\phi(x, y_0, t)$ ,  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$  в (27). Соответствующая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{12} & -d_{13} & 0 & 0 \\ -d_{12} & d_{22} & 0 & d_{24} & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{33} & 0 & -d_{24} \\ 0 & d_{24} & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -d_{24} & 0 & d_{55} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия положительной определенности квадратичной формы

$$\Delta_1 = d_{11} > 0, \quad \Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = \frac{2a^2\chi_1}{y_0^2} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2\chi_1}{x_0^2} + \frac{2a^2\chi_2}{y_0^2} \right) > 0, \quad (29)$$

$$\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{13}^2d_{22} = \frac{4a^4(a^2 - V^2)\pi^2\chi_1^2\chi_2}{x_0^2y_0^4} > 0,$$

$$\Delta_4 = d_{44}\Delta_3 - d_{24}^2(d_{11}d_{33} - d_{13}^2) = \frac{2a^4\chi_2}{\rho x_0^2y_0^2} \times \quad (30)$$

$$\times \left( 2(\lambda_{11}D_1 - N_1(t))(a^2 - V^2)\pi^2\chi_1^2y_0 - \rho V^2a^2(a^2 - V^2)\pi^2y_0^2 - 2\rho a^4V^2\chi_1x_0^2 \right) > 0,$$

$$\Delta_5 = d_{55}\Delta_4 - d_{24}^2d_{44}\Delta_2 + d_{24}^4d_{11} > 0. \quad (31)$$

Условия (29) выполняются. Таким образом, если выполняются условия (14), (26), (30), (31), то  $\Phi(t) \geq 0, \dot{\Phi}(t) \leq 0$ .

Проанализировать условия (30) и (31) достаточно сложно, поэтому для упрощения этого анализа введем дополнительные параметры  $\chi_i \in (0,1), i = 3,4$ , при этом должно выполняться равенство

$$\chi_3 + \chi_4 = 1. \quad (32)$$

Тогда неравенство (27) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_G \left[ \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \chi_3 \phi^2(x, y, t) - \frac{4a^2\chi_1}{y_0^2} \phi(x, 0, t) \phi(x, y, t) + \right. \\ & \left. + \frac{2a^2\chi_1}{y_0^2} \phi^2(x, 0, t) + \frac{2a^2V}{y_0} \phi(x, 0, t) f_1(x, t) + \frac{a^2(\lambda_{11}D_1 - N_1(t))}{\rho y_0} f_1^2(x, t) \right] dx dy + \\ & + \iint_G \left[ \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \chi_4 \phi^2(x, y, t) - \frac{4a^2\chi_2}{y_0^2} \phi(x, y_0, t) \phi(x, y, t) + \right. \\ & \left. + \frac{2a^2\chi_2}{y_0^2} \phi^2(x, y_0, t) - \frac{2a^2V}{y_0} \phi(x, y_0, t) f_2(x, t) + \frac{a^2(\lambda_{12}D_2 - N_2(t))}{\rho y_0} f_2^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} d_{11}^{(i)} &= \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \chi_{i+2}, \quad d_{22}^{(i)} = d_{12}^{(i)} = \frac{2a^2\chi_i}{y_0^2}, \\ d_{23}^{(i)} &= (-1)^{i+1} \frac{a^2V}{y_0}, \quad d_{33}^{(i)} = \frac{a^2(\lambda_{1i}D_i - N_i(t))}{\rho y_0}. \end{aligned} \quad (34)$$

Получаем две квадратичные формы относительно  $\phi(x, y, t), \phi(x, 0, t), f_1(x, t)$  и относительно  $\phi(x, y, t), \phi(x, y_0, t), f_2(x, t)$  в (33). Соответствующие матрицы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11}^{(i)} & -d_{12}^{(i)} & 0 \\ -d_{12}^{(i)} & d_{22}^{(i)} & d_{23}^{(i)} \\ 0 & d_{23}^{(i)} & d_{33}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия положительной определенности квадратичных форм

$$\Delta_1^{(i)} = d_{11}^{(i)} > 0, \quad (35)$$

$$\Delta_2^{(i)} = d_{11}^{(i)}d_{22}^{(i)} - d_{12}^{(i)2} = \frac{2a^2\chi_i}{y_0^2} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2\chi_{i+2}}{x_0^2} + \frac{2a^2\chi_{i+2}}{y_0^2} - \frac{2a^2\chi_i}{y_0^2} \right) > 0, \quad (36)$$

$$\Delta_3^{(i)} = d_{33}^{(i)}\Delta_2^{(i)} - d_{23}^{(i)2}d_{11}^{(i)} > 0. \quad (37)$$

Условия (35) выполняются. Для выполнения неравенств (36) достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\chi_1 = \chi_3, \quad \chi_2 = \chi_4. \quad (38)$$

Тогда условия (37) примут вид

$$\chi_i \left( \frac{a^2(\lambda_i D_i - N_i(t))}{\rho y_0} \cdot \frac{2(a^2 - V^2)\pi^2 a^2 \chi_i}{x_0^2 y_0^2} - \frac{a^4 V^2}{y_0^2} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \right) > 0. \quad (39)$$

Из (39) получаем условия

$$N_i(t) < \lambda_i D_i - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2)\pi^2 \chi_i} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (40)$$

Используя метод Лагранжа, с учетом неравенства (37) оценим квадратичную форму в (33)

$$\begin{aligned} F(\phi(x, y, t), \phi(x, y_0, t), f_2(x, t)) &= d_{11}^{(2)} \phi^2(x, y, t) - 2d_{12}^{(2)} \phi(x, y, t)\phi(x, y_0, t) + \\ &+ d_{22}^{(2)} \phi^2(x, y_0, t) - 2d_{23}^{(2)} \phi(x, y_0, t)f_2(x, t) + d_{33}^{(2)} f_2^2(x, t) = \left( \sqrt{d_{11}^{(2)}} \phi(x, y, t) - \right. \\ &\left. - \frac{d_{12}^{(2)}}{\sqrt{d_{11}^{(2)}}} \phi(x, y_0, t) \right)^2 + \left( d_{22}^{(2)} - \frac{d_{12}^{(2)2}}{d_{11}^{(2)}} \right) \phi^2(x, y_0, t) - 2d_{23}^{(2)} \phi(x, y_0, t)f_2(x, t) + \\ &+ d_{33}^{(2)} f_2^2(x, t) \geq \left( \sqrt{\frac{d_{11}^{(2)} d_{22}^{(2)} - d_{12}^{(2)2}}{d_{11}^{(2)}}} \phi(x, y_0, t) - \frac{d_{23}^{(2)} \sqrt{d_{11}^{(2)}}}{\sqrt{d_{11}^{(2)} d_{22}^{(2)} - d_{12}^{(2)2}}} f_2(x, t) \right)^2 + \\ &+ \left( d_{33}^{(2)} - \frac{d_{23}^{(2)2} d_{11}^{(2)}}{d_{11}^{(2)} d_{22}^{(2)} - d_{12}^{(2)2}} \right) f_2^2(x, t) \geq \left( \frac{d_{11}^{(2)} d_{22}^{(2)} d_{33}^{(2)} - d_{23}^{(2)2} d_{11}^{(2)} - d_{12}^{(2)2} d_{33}^{(2)}}{d_{11}^{(2)} d_{22}^{(2)} - d_{12}^{(2)2}} \right) f_2^2(x, t) = \\ &= \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_2^{(2)}} f_2^2(x, t). \end{aligned} \quad (41)$$

Из (33) с учетом (19) получим

$$\Phi(t) \geq \iint_G \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_2^{(2)}} f_2^2(x, t) dx dy = \int_0^{x_0} \frac{\Delta_3^{(2)} y_0}{\Delta_2^{(2)}} f_2^2(x, t) dx = \int_b^c \frac{\Delta_3^{(2)} y_0}{\Delta_2^{(2)}} w_2^2(x, t) dx \geq \frac{\Delta_3^{(2)} y_0}{\Delta_2^{(2)}(c-b)} w_2^2(x, t). \quad (42)$$

Аналогично можно получить оценку

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3^{(1)} y_0}{\Delta_2^{(1)}(c-b)} w_1^2(x, t). \quad (43)$$

Таким образом, учитывая (16), (20), (42), (43), получим оценку

$$\begin{aligned} w_i^2(x, t) &\leq \frac{\Delta_2^{(i)}(c-b)}{\Delta_3^{(i)} y_0} \left[ \iint_G (\phi_{t_0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x_0}^2 + a^2 \phi_{y_0}^2) dx dy + \right. \\ &+ a^2 \int_b^c \phi^2(x, 0, 0) dx + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left( E_i F_i (u'_{i_0} + 0.5 w_{i_0}^{\prime 2})^2 + \right. \\ &\left. \left. + M_i \dot{u}_{i_0}^2 + M_i \dot{w}_{i_0}^2 + \left( D_i + \frac{|N_i(0)| + \rho V^2}{\lambda_{i_0}} + \frac{\beta_{0i}}{\mu_{i_0}} \right) w_{i_0}^{\prime 2} \right) dx \right], \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогично можно получить оценку

$$\iint_G \phi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22}^{(1)} d_{33}^{(1)} - d_{23}^{(1)2}}{\Delta_2^{(1)}} \left[ \iint_G (\phi_{t_0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x_0}^2 + a^2 \phi_{y_0}^2) dx dy + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + a^2 \int_b^c \phi^2(x, 0, 0) dx + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^2 \int_b^c \left( E_i F_i (u'_{i0} + 0.5 w_{i0}''^2)^2 + \right. \\
 & \left. + M_i \dot{u}_{i0}^2 + M_i \dot{w}_{i0}^2 + \left( D_i + \frac{|N_i(0)| + \rho V^2}{\lambda_{1i}} + \frac{\beta_{0i}}{\mu_{1i}} \right) w_{i0}''^2 \right) dx \Big]. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Из оценок (44), (45) следует устойчивость  $\phi(x, y, t)$ ,  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$  по отношению к возмущениям начальных данных. Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (14), (26), (40). Тогда решение  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$ ,  $\phi(x, y, t)$  задачи (1)–(8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных  $\phi_{t0}$ ,  $\phi_{x0}$ ,  $\phi_{y0}$ ,  $\phi(x, y_0, 0)$ ,  $\dot{u}_{i0}$ ,  $u'_{i0}$ ,  $\dot{w}_{i0}$ ,  $w'_{i0}$ ,  $w''_{i0}$ .

**Замечание 1.** С помощью функционала (9) можно получить интегральные оценки, аналогичные (44), (45), для  $\dot{w}_1(x, t)$ ,  $w'_1(x, t)$ ,  $w''_1(x, t)$ ,  $\dot{w}_2(x, t)$ ,  $w'_2(x, t)$ ,  $w''_2(x, t)$ ,  $\dot{u}_1(x, t)$ ,  $u'_1(x, t)$ ,  $\dot{u}_2(x, t)$ ,  $u'_2(x, t)$ ,  $\phi_t(x, y, t)$ ,  $\phi_x(x, y, t)$ ,  $\phi_y(x, y, t)$  и, следовательно, доказать их устойчивость при указанных в теореме 1 условиях.

**Замечание 2.** Из теоремы 1, которая доказана с помощью функционала (9), не следует устойчивость решения  $u_i(x, t)$ . Но согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
 & \left( \int_b^x u'_i(x, t) dx \right)^2 \leq \left( \int_b^x u_i'^2(x, t) dx \right) \left( \int_b^x 1 dx \right), \\
 & (u_i(x, t) - u_i(b, t))^2 \leq (x - b) \int_b^x u_i'^2(x, t) dx \leq (c - b) \int_b^c u_i'^2(x, t) dx.
 \end{aligned}$$

Можно доказать, что производная  $u'_i(x, t)$  устойчива по отношению к возмущениям начальных данных, следовательно, и разность  $u_i(x, t) - u_i(b, t)$  на отрезке  $[b, c]$  устойчива. Поэтому решение  $u_i(x, t)$  будет устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных  $\phi_{t0}$ ,  $\phi_{x0}$ ,  $\phi_{y0}$ ,  $\phi(x, y_0, 0)$ ,  $\dot{u}_{i0}$ ,  $u'_{i0}$ ,  $\dot{w}_{i0}$ ,  $w'_{i0}$ ,  $w''_{i0}$ , если  $u_i(b, t) = 0$ .

### 3. Пример механической системы

Рассмотрим пример механической системы с одинаковыми элементами. Рабочая среда – газ ( $\rho = 1$ ), пластины изготовлены из алюминия ( $E_i = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_{mi} = 8480$ ). Другие параметры механической системы:  $a = 331$ ,  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 0,1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $h_i = 0,005$ ,  $\nu_i = 0,31$ ,

$D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} = 806,7$ . Пусть концы упругих пластин закреплены шарнирно, тогда

$\lambda_{1i} = \frac{\pi^2}{(c - b)^2} = \pi^2$ . Все значения приведены в системе СИ. Так как элементы одинаковые, то

можно положить  $\chi_1 = \chi_2 = \frac{1}{2}$ . Тогда неравенства (40) примут вид

$$N_i(t) < \lambda_{1i} D_i - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{(a^2 - V^2) \pi^2} \left( \frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (46)$$

Согласно неравенству (46) построены области устойчивости (серая область) на плоскости «усилие  $N_i$  – скорость потока  $V$ » (рис. 2).

На рисунке 2а –  $V \in [0, 30]$ , на рисунке 2б –  $V \in [0, a]$ , где  $a$  – скорость звука. Из анализа неравенств (46), что наблюдается и на рисунке 2б, следует, что прямая  $V = a$  является асимптотой границы области устойчивости.



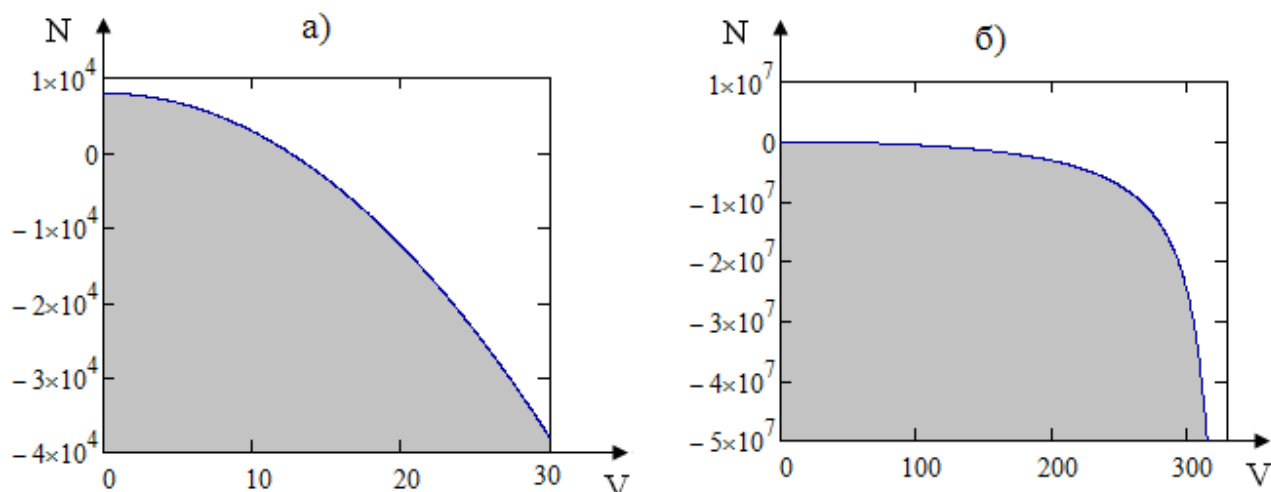


Рисунок 2 – Область устойчивости на плоскости  $(N_i, V)$

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

### Список литературы

1. Патент 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К.; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28 ; заявл. 20.07.92 ; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.
2. Краховецкий Н. Н. Устройства для размешивания жидких компонент. – Патент 2211082, Российская Федерация. – 2003.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.
4. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Mathematical Modelling of Dynamics and Stability of Elastic Elements of Vibration Devices // Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015, Saint Petersburg, Russia, 24-26 June 2015). IFAC-PapersOnLine. Volume 48, Issue 11, 2015. P. 970-975.
5. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.
6. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконеко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
7. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.
8. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

## **РОТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В БЛОКОВЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СРЕДАХ (НА ПРИМЕРЕ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ)**

**А.В. Викулин**

Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН.

683006 Петропавловск-Камчатский, бульвар Пийпа, 6, e-mail: [vik@kscnet.ru](mailto:vik@kscnet.ru)

### **Аннотация**

Исследуются свойства «твердой» земной коры в предположении ее блокового строения. Движение такой среды (геосреды) в рамках ротационной модели подчиняется закону сохранения момента и может быть описано в рамках классической теории упругости с симметричным тензором напряжений. Для движения геосреды характерны два типа ротационных волн с близко- и дальнедействием. Первый — медленные солитоны, второй — быстрые экситоны. Возможность «коллективного» волнового движения геосреды может определять ее реидное свойство. Физическим аналогом такого движения геосреды может являться сверхтекучее движение квантовой жидкости.

Ключевые слова: мезодефекты, блоки, вращение, корпускулярно–волновой механизм, симметричный тензор напряжений, реидность, сверхтекучесть

### **Введение**

Реальные твердые тела включают большое количество дефектов, которые, как целые, поворачиваются. Рассмотрение твердых тел с внутренними степенями свободы привело к построению модели Коссера и ей подобных [11,12] и, как следствие, к разработке концепции моментной теории упругости. Такое направление в настоящее время успешно развивается [24]. Согласно [11], «теории среды Коссера и других тел с микроструктурой по своим гипотезам занимают промежуточное положение между классической теорией упругости и физикой твердого тела, стоящей на позиции существования структурных уровней. Материальная точка в среде с микроструктурой имеет «разумную» степень сложности, что позволяет описывать и структуру материала (это недоступно для теории упругости), и волны деформации (это недоступно для материаловедения) . . . Тяжела «шапка Мономаха» выбирающих этот путь, поскольку они соприкасаются со сферами материаловедения и теории упругости и открыты критике обеих сторон».

Следует отметить, что моментная теория упругости является по сути математической теорией [22,27]; перед ней стоят трудности физического плана, которые были отмечены практически сразу после ее появления в 1910 г. [32, с. 26]. В том числе, в рамках моментной теории упругости не выполняется закон сохранения момента импульса, существование моментных модулей упругости неизбежно отразилось бы на тепловых свойствах твердого тела: его теплоемкость ниже температуры Дебая должна была бы быть на один-два порядка выше наблюдаемой [3].

В физической теории упругости вопрос о симметричности тензора напряжений, вообще говоря, является решенным. Тем не менее, уже последователи создателей классического курса «Теория упругости» в его четвертом (1987 г.) и последующих изданиях (см., например, [17, с. 17–18]) еще раз возвращаются к этому вопросу и приводят новое доказательство симметричности тензора напряжений, построенное уже в рамках общей микроскопической теории.

Возникает вопрос: возможно ли напряженное с симметричным тензором состояние среды с внутренними степенями свободы описать в рамках волновых моделей? Или в терминологии [11]: можно ли в рамках классической физической теории упругости [17] удержать «шапку Мономаха»?

Настоящая публикация является кратким содержанием работ [4–6]. На примере упругой оболочки вращающейся Земли — ее «твердой» земной коры — проблема о ее напряженном состоянии формулируется как такая ротационная задача с собственными степенями свободы

слагающих ее «элементарных» объемов, в рамках которой оказывается возможным получить волновые решения с симметричным тензором напряжений. Полагается, что земная кора имеет мощность 30–40 км и состоит из блоков. Для такой среды «шапку Мономаха» [11] оказывается возможным «удержать». Для этого необходимо отказаться от «традиционного» для теории упругости принципа напряжений Коши [17] и заменить концепцию «точка твердого тела» [27] на «элементарный объем твердого тела с собственным моментом».

Отличие такого нашего подхода [5,6] от «традиционного» [17,27] заключается в следующем. Во-первых, «элементарная» часть вращающегося твердого тела — блок земной коры — является жестким недеформируемым объемом. Во-вторых, его движение происходит под действием собственного момента; в-третьих, такое движение приводит к изменению напряженного состояния в окружающей блок земной коре. На возможность такого ротационного подхода к задачам геодинамики указывают следующие данные, полученные в результате геологических и геофизических исследований. Земная кора является блоковой («кусковатой» [29]) средой, состояние которой определяется «внутренним потенциалом движения» [25] и «собственной энергией» [26]. В рамках механической концепции движение с такими свойствами [25,26,29] может осуществляться только под действием собственных моментов количества движения блоков, по сути их спинов [30], взаимодействие которых и может определять как движение земной коры в целом, так и ее «объемное течение в холодном состоянии» и/или ее реидные свойства [19].

### **Напряжения с моментом силы**

Как известно, угловая скорость  $\Omega$ , с которой вращается в данный момент времени жестко связанная с телом (Землей) система координат, не зависит от этой системы, и каждый элемент земной коры и/или блок независимо от его размера можно характеризовать одним и тем же моментом импульса  $\mathbf{P}$ , направленным параллельно оси вращения Земли:  $\mathbf{P} = I \cdot \Omega$ . Здесь  $I$  — момент инерции блока (шаровой формы). Движение земной коры вдоль поверхности Земли приводит к изменению направления момента импульса  $\mathbf{P}$ , что в соответствии с законом его сохранения приводит к появлению момента силы  $\mathbf{K}$ , прикладываемого к блоку со стороны окружающей его среды — земной коры

$$|\mathbf{K}| = 2|\mathbf{P}| \sin \beta/2. \quad (1)$$

где  $\beta$  — угол, на который «если смотреть из центра Земли» переместился блок по ее поверхности. Именно напряжения с моментом силы (1), прикладываемые к блоку земной коры, и определяют природу сейсмического момента землетрясения с очагом в этом блоке.

Таким образом, приходим к модели, в которой описание движения блока вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  геосреды механически эквивалентно движению блока (его повороту на угол  $\beta$ ) в не вращающейся (инерциальной) системе координат под действием собственного момента импульса  $\mathbf{P}$ , соответствующий которому момент сил  $\mathbf{K}$  в окружающей блок земной коре создает упругое поле (1). Генерируемое при таком ротационном движении блока поле упругих напряжений с моментом силы в земной коре является следствием закона сохранения момента импульса.

«Внутренний», или собственный, момент  $\mathbf{P}$  обладает специфическим для геодинамики свойством: он не может в силу физического закона сохранения исчезнуть, в том числе и за счет пластической деформации земной коры. Поэтому ротационные напряжения с моментом силы (1) в результате трансляционного движения блока (вследствие увеличения угла поворота блока  $\beta$ ) будут в земной коре «накапливаться», чем и можно объяснить такое известное свойство геосреды, как ее энергонасыщенность [26]. По-видимому, со свойством энергонасыщенности геологической среды может быть связано и явление сейсмической эмиссии, «присущей Земле в широком диапазоне глубин и во всем разнообразии геологических и тектонических условий» [28].

### Упругое поле вокруг поворачивающегося блока

Будем полагать, что поворачивающийся под действием собственного момента блок земной коры (которую считаем находящейся в не вращающейся, инерциальной системе координат) создает в окружающем породном массиве упругие напряжения с моментом силы (1). Для определения упругих напряжений  $\sigma$ , их энергии  $W$  и момента силы (сейсмического момента)  $K$ , создаваемых поворачивающимся блоком+ шаровой формы с радиусом  $R_0$ , для твердого тела в области  $r \geq R_0$  поставим следующую задачу. Решалось уравнение упругого равновесия

$$\text{grad div}U - a \text{rot rot}U = 0$$

с нулевыми смещениями на бесконечности, действующей на блок объемом  $V$  силой, равной нулю и отличным от нуля моментом сил, не зависящим от размера блока. Нами получено аналитическое решение задачи в области  $r > R_0$  в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом  $r = 0$  в центре блока и с плоскостью  $\theta = 0$ , ортогональной собственному моменту, для момента силы  $K$

$$K = -8\pi^{3/2}\Omega R_0^4 \sqrt{\frac{\rho G}{5}} \sin \beta/2. \quad (2)$$

Знак «минус» означает, что момент действует на геоблок со стороны окружающего его тела – земной коры. Энергия  $W$  определяется равенством

$$W = \frac{16}{15}\pi\rho\Omega^2 R_0^5 \sin^2 \beta/2, \quad (3)$$

симметричный тензор напряжений определяется выражением

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 4\Omega R_0^4 r^{-3} \sqrt{\frac{\rho G}{5\pi}} \sin \theta \sin \beta/2, \quad r \geq R_0. \quad (4)$$

Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Здесь  $\rho \approx 3 \text{ г/см}^3$  и  $G \approx 10^{12} \text{ дин/см}^2$  – плотность и модуль сдвига геосреды,  $R_0 \approx 100 \text{ км}$  – размер очага сильнейшего землетрясения,  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$  – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси. Показано, что для очагов сильнейших землетрясений получаемые с помощью решений (2) – (4) значения соответствуют наблюдаемым величинам. При этом значение угла поворота блока (очага сильнейшего землетрясения) составляет  $\beta_0 \approx 10^{-3} \text{ рад}$ .

### Взаимодействие блоков: дальноедействие и близкоедействие

В модели двух блоков  $R_{01}$  и  $R_{02}$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга, оказалось возможным аналитически рассчитать энергию их взаимодействия  $W_{\text{int}}$ . Для этого в выражении энергии, обусловленной взаимодействием двух блоков ( $W = G \int (a_1 + a_2)^2 dV = G \int a_1^2 dV + G \int a_2^2 dV + 2G \int a_1 a_2 dV = W_1 + W_2 + W_{\text{int}}$ , где  $a_{1,2}$  – тензоры упругой деформации, создаваемые каждым из двух поворачивающихся блоков в отдельности), рассчитывалось третье слагаемое, равное удвоенному произведению первого и второго инвариантов тензора напряжений для упругой энергии. В результате для энергии такого взаимодействия получено выражение

$$W_{\text{int}} = \frac{3}{2}\pi\rho\Omega^2 R_{01}^4 R_{02}^4 l^{-3} \sin \phi, \quad (5)$$

где  $\phi$  – угол между моментами блоков. Каждый блок за счет этой энергии стремится повернуть другой блок. Момент силы, обусловленный взаимодействием блоков, определяется дифференцированием (5) по углу  $\phi$

$$K_{\text{int}} = -\frac{3}{2} \pi \rho \Omega^2 R_{01}^4 R_{02}^4 l^{-3} \sin \varphi. \quad (6)$$

Момент силы (6) приложен со стороны упругого поля к поверхности каждого из блоков и направлен таким образом, чтобы уменьшить энергию их взаимодействия. Этот момент для обоих блоков имеет одно и то же абсолютное значение, но для разных блоков он направлен в противоположные стороны.

Для равновеликих блоков  $R_{01} = R_{02} = R_0$  отношение момента взаимодействия блоков (6) к собственному моменту блока (2) находится из соотношения

$$\frac{K_{\text{int}}}{K} = \frac{3}{16\sqrt{5}\pi} \frac{\Omega R_0}{V_S} \left( \frac{R_0}{l} \right)^3 \frac{\sin \phi}{\sin \beta/2} = \chi, \quad (7)$$

из которого видно, что моментное взаимодействие становится тем более существенным, чем больше центробежная скорость  $V_R = \Omega R_0$  (т. е. чем с большей скоростью  $\Omega$  вращается тело и чем больше размер блока  $R_0$ ;  $V_S = \sqrt{G/\rho}$  — скорость поперечных сейсмических волн). Максимальное ( $\sin \phi = 1$ ) «моментное» расстояние  $l = l_{OK}$ , на котором момент упругого поля  $K_{\text{int}}$  (6) будет равным ( $\chi = 1$ ) собственному моменту блока  $K$  (2), при принятых выше параметрах модели запишется в виде

$$l_{OK} = \sqrt[3]{\frac{3}{8\sqrt{5}\pi} \beta_0^{-1/3} \left( \frac{V_R}{V_S} \right)^{1/3}} R_0 \approx R_0. \quad (8)$$

Таким образом, «предельное» моментное взаимодействие между геоблоками распространяется на небольшие расстояния (не превышающие размеров блока) и, как и силы молекулярного взаимодействия между частицами среды в классической теории упругости, по сути, может являться близкодействующим.

Аналогичным образом, рассчитывая отношение энергии взаимодействия блоков (5) к собственной энергии блока (3) для расстояния  $l = l_{0W}$ , характеризующего «предельное» энергетическое взаимодействие, получаем выражение

$$l_{0W} = \sqrt[3]{6} R_0 \beta_0^{-2/3} \approx 10^2 R_0.$$

Из него следует, что ротационное упругое поле, ответственное за «энергетическое» взаимодействие, распространяется на существенно большие расстояния (на два порядка превышающие размеры блоков) и может являться, таким образом, дальнедействующим.

Итак, геосреда в рамках ротационной модели характеризуется своеобразным корпускулярно-волновым типом взаимодействия между блоками. Во-первых, близкодействием — путем обмена рядом расположенных блоков моментами  $K_{\text{int}}$  (6), а не за счет (как в моментной теории упругости) трения вдоль их границ, которое в рамках ротационной модели препятствует взаимодействию блоков. Во-вторых, дальнедействием — путем обмена энергиями  $W_{\text{int}}$  (5) между блоками на больших (много больше размера блока) расстояниях. Примеры таких взаимодействий в сейсмологии широко известны [3].

Т.о., геодинамическое взаимодействие блоков в рамках ротационной модели может являться физическим аналогом общего принципа — корпускулярно-волнового дуализма: в движении геофизических блоков, тектонических плит и других геологических структур проявляются как корпускулярные, так и волновые черты. Покажем это на примере взаимодействия блоков геосреды между собой в рамках авторской ротационной модели.

### Уравнение движения цепочки блоков

Для блока, генерирующего собственное упругое поле с моментом силы (2) и в соответствии с (5) и (6) взаимодействующего с собственными упругими полями других равновеликих блоков цепочки (очагов землетрясений в сейсмических поясах), в безразмерной форме получен закон движения в виде уравнения синус-Гордона (СГ)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta,$$

где  $\theta = \beta/2$ ,  $\xi = k_0 z$  и  $\eta = v_0 k_0 t$  - безразмерные координаты,  $z$  - расстояние вдоль цепочки масс (блоков),  $t$  - время. Принимая длину волны близкой к размеру блока  $\lambda \approx R_0$  (тектоническое приближение), волновое число  $k_0 = 2\pi/R_0$ , для характерной скорости развития процесса  $v_0$  получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{15}{8\pi^2 \sqrt{5\pi}} \Omega R_0 \sqrt{G/\rho}} \approx \sqrt{\frac{\sqrt{15}}{8\pi^2} V_R V_S} = 0.2 \sqrt{V_R V_S}. \quad (9)$$

Вид закона движения цепочки блоков предопределен выражением для момента силы упругого поля в виде (1) и/или (2). Поэтому полученное авторами уравнение движения цепочки блоков является прямым следствием закона сохранения момента. Это принципиальный момент, который позволяет в геодинамической ротационной задаче о цепочке взаимосвязанных между собой блоков геосреды (очагов землетрясений в сейсмическом поясе) не прибегать к их взаимодействию за счет трения, как это предполагается в моментной теории упругости. Как следствие, такой подход при условии, что решения (2) и (3) ротационной задачи получены в рамках классической теории упругости [17] с симметричным тензором напряжений (4), дает возможность физически «прозрачно» интерпретировать характерную скорость геодинамического процесса, описываемого уравнением СГ. При фиксированных параметрах ( $G$ ,  $\rho$ ,  $R_0$ ) скорость  $v_0$  (9) зависит только от угловой скорости  $\Omega$ , т. е. причиной возникновения данного типа деформации является вращение Земли. Отсюда и название модели, данное ей авторами, — ротационная. При принятых выше параметрах земной коры значение характерной скорости составляет  $v_{0,\max} = 10-10^2$  м/с.

### Ротационные волны

Анализировался в большей степени соответствующий реальному геодинамическому процессу случай цепочки с неоднородными вращениями блоков, характеризующимися отклонениями моментов сил от равновесных положений  $\mu$ , с учетом сил трения  $a_f$  вдоль их границ. Здесь трение снова рассматривается не как механизм взаимодействия блоков между собой в результате их «зацепления» друг за друга, как в моментной теории упругости, а как диссипативный фактор, который в результате действия сил трения между блоками геосреды препятствует их ротационному взаимодействию. Закон движения блока в цепочке получен в виде модифицированного уравнения СГ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta + a_f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \mu \delta(\xi) \sin \theta,$$

которое решалось численно методом возмущений МакЛафлина-Скотта. Здесь  $\delta(\xi)$  - функция Дирака. Начальные условия соответствовали средней скорости деформирования в сейсмоактивных областях. Анализ показал, что взаимодействие блоков (очагов землетрясений) между собой сопровождается медленными движениями со скоростью передачи ротационных деформаций  $c_0 \leq c_{0,\max} \approx 1-10$  см/с.

Таким образом, с учетом того, что функциональная зависимость скорости  $c_0$  такая же, как и для  $v_0$  (9):  $c_0 \approx v_0 \approx \sqrt{V_R V_S}$ , а их максимальные значения соотносятся как  $c_{0,\max}/v_{0,\max} = \gamma_1 = 10^{-3}$ , характерные скорости передачи ротационных деформаций (напряжений с моментом силы) в рамках модели блоковой геосреды могут быть представлены в виде

$$c_0 = \gamma_1 v_0 \approx \gamma \sqrt{V_R V_S}, \quad c_{0,\max} \approx 1-10 \text{ см/с}, \quad (10)$$

где  $\gamma = 10^{-4}$ . Равенство  $\gamma = K^{-1}$ , где  $K \approx 10^4$  - коэффициент нелинейности геосреды, равный отношению модулей упругости третьего порядка к модулям упругости второго порядка (линейным модулям упругости) [21], представляется неслучайным и позволяет интерпретиро-

вать параметр  $\gamma$  как нелинейный параметр, характеризующий структурную нелинейность [9] геосреды.

СГ-уравнение имеет много решений. Моделируя движения в длинных молекулярных цепях, А.С. Давыдов показал [10], что волновые движения в таких цепях описываются нелинейным модифицированным уравнением синус-Гордона, решениями которого являются два типа возбуждений: солитоны и экситоны — решения 1 и 2 на рис. 1 соответственно. Характерными для таких решений являются «предельные» скорости  $V_{01}$  и  $V_{02}$ , соответствующие максимальным энергиям возбуждения  $E_{\max}$ .

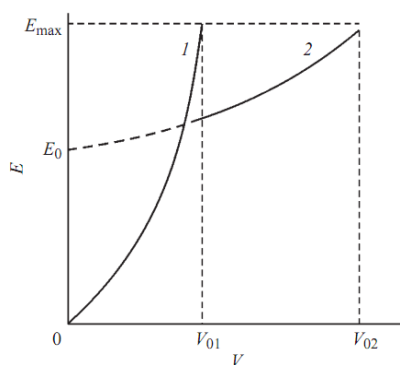


Рис. 1. Волновые решения  $E(V)$  СГ-уравнения [10]. 1 — солитоны, 2 — экситоны.  $V_{01}$ ,  $V_{02}$  — характерные скорости процесса, соответствующие «предельным» энергиям  $E = E_{\max}$  солитонного ( $0 \leq V \leq V_{01}$ ) и экситонного ( $0 < E_0 \leq E \leq E_{\max}$ ,  $V_{01} \leq V \leq V_{02}$ ) решений соответственно.  $E_{\max}$  — максимальное значение энергии, соответствующие наибольшим значениям магнитуд землетрясений,  $E_0$  — значение энергии, соответствующее коллективному возбуждению всей совокупности молекул в цепочке (очагов землетрясений в сейсмическом поясе, как целого), при котором цепочка остается неподвижной (скорость  $V_0 = 0$ ); «нулевая частота» такого колебания сейсмического пояса определяет нутацию полюса планеты — колебание Чандлера [3, с. 244–258].

Все опубликованные и полученные авторами скорости миграции очагов тихоокеанских землетрясений представлены на рис. 2. Глобальная — вдоль всего сейсмического пояса (I) —

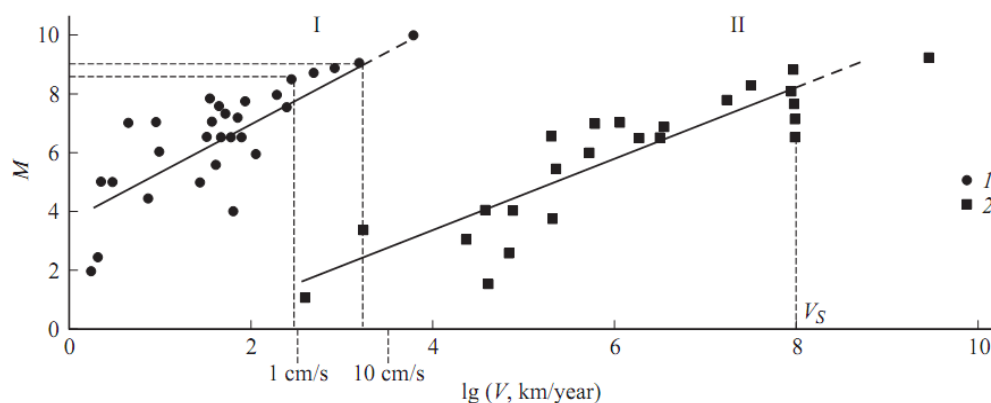


Рис. 2. Значения скоростей глобальной (1 — вдоль всей окраины Тихого океана) и локальной (2 — в пределах индивидуальных очагов сильных тихоокеанских землетрясений) миграций землетрясений как функции их магнитуд  $M$  [5,6]. I, II — глобальная и локальная зависимости  $M(\lg V)$  соответственно, определенные методом средних квадратов,  $V_S$  — скорость поперечных сейсмических волн.

и локальная — в пределах очагов сильных землетрясений (II) — миграционные зависимости  $M_{1,2}(\lg V_{1,2})$ , предельные значения скоростей  $V_{1,2,\max}$  и соответствующие им наибольшие магнитуды  $M_{1,2,\max}$  равны:

$$M_1 \approx 2 \lg V_1, \quad V_{1,\max} \approx 1-10 \text{ см/с}, \quad M_{1,\max} = 8.5-9, \quad (11)$$

$$M_2 \approx \lg V_2, \quad V_{2,\max} \approx V_S - V_P \approx 4 - 8 \text{ км/с}, \quad M_{2,\max} = 8.5. \quad (12)$$

Здесь  $V_P \approx 8 \text{ км/с}$  и  $V_S \approx 4 \text{ км/с}$  — значения продольной и поперечной сейсмических скоростей для земной коры.

Сравнение данных рис. 1 и 2, на которых магнитуда землетрясения  $M$  и сбрасываемая при землетрясении упругая энергия  $E$  связаны известным соотношением  $M \approx \lg E$ ,  $[E] = \text{Дж}$ , показывает следующее. Теоретические модельные для молекулярных цепей (рис. 1) и экспериментальные миграционные для цепочек очагов землетрясений (рис. 2) зависимости качественно совпадают между собой. Математическая близость решений волновых уравнений для цепочек, составленных из блоков (I и II на рис. 2, соотношения (11) и (12)) и молекул (1 и 2 на рис. 1), которые являются одномерными и длинными, позволила допустить, что и взаимодействия их элементарных составляющих имеют одинаковую физическую природу.

Выявленные в рамках ротационной модели солитонное и экситонное решения с предельными скоростями  $V_{01} \approx c_{0,\max}$  и  $V_{02} = V_S - V_P$  по сути могут являться новым типом упругих волн в твердых телах — ротационными волнами, которые во вращающихся блоковых средах (геосреде) могут отвечать за корпускулярно-волновые взаимодействия блоков между собой. Такие же по сути быстрые (экситонные) и медленные (солитонные) деформационные [31] и маятниковые [23] волны инструментально зарегистрированы в шахтах и смоделированы в лабораторных условиях [1]. Вывод о существовании «нового типа уединенных волн», «скорость которых ограничена некоторыми предельными значениями», подтверждается данными и физической (нелинейной) акустики и физики твердого тела, обширную библиографию см. в [5,6].

### **Рейдные (сверхтекучие) свойства геосреды**

Имеется много свидетельств визуально наблюдаемого движения земной поверхности в направлении от очагов землетрясений в виде «горбов Земли» (конкретные примеры и ссылки на обзоры см. в [5,6]). Вот одно из них, наиболее ярко характеризующее суть проблемы: во время землетрясения по бетонному шоссе и тротуарам шли волны высотой 1.2 – 1.8 м и длиной 3 м, но на бетоне не появилось ни одной трещины – деформации до 0.5 и более! Анализ всех таких геолого-геофизических движений позволил сделать вывод, что такие движения грунта, скорее, характерны для жидкого состояния вещества [13]. Такие движения геологами были названы рейдными или сверхпластичными [19]. Покажем, что рейдное движение геосреды может являться прямым следствием ее ротационного движения.

Температура Дебая  $\theta_D$  для геосреды, которая ниже первых километров сложена из кристаллизованных пород, может быть записана в виде

$$\theta_D \approx 10^{-3} \bar{V}(H) \sqrt[3]{\rho(H)}, \quad (13)$$

где  $\bar{V}$  - средняя скорость возбуждений в геосреде [см/с],  $H$  – глубина. При  $\bar{V} = V_P \div V_S = 1 - 10 \text{ км/с}$  температура  $\theta_D \approx 1000 \text{ K}$  и хорошо согласуется с общепринятой физикой Земли. Ситуация кардинальным образом меняется при переходе к ротационной моде  $c_0$  (10) — «глобальным» геодинамическим движениям с предельной скоростью  $c_{0,\max} = 1 - 10 \text{ см/с}$ , определяемым коллективными движениями совокупностей геофизических блоков, тектонических плит и геологических структур. Характерное для такой моды предельное значение  $c_{0,\max}$ , как видно из (10), на пять порядков меньше поперечной и продольной сейсмических скоростей, и температура Дебая для нее не превышает ничтожно малую величину

$$\theta_D \approx 10^{-2} \text{ K},$$

что может определять возможность рейдного движения геосреды и/или ее «сверхпластичное течение в твердом состоянии» [19]. Физическим аналогом рейдного течения геосреды, отвечающего коллективному движению слагающих ее блоков, на наш взгляд, может являться сверхтекучесть квантовой жидкости, соответствующая «состояниям всей жидкости в целом» [14].



### **Обсуждение результатов**

1. Собственный момент блока геосреды является, по сути, спином [30]. Именно такая интерпретация и позволяет трактовать полученные результаты с самых общих позиций. Во-первых, спин по определению является одним из специфических понятий квантовой механики, отражающих саму ее суть, и становится несущественным вопрос о его происхождении, он может быть приписан частице вне зависимости от того, является ли она «элементарной» или «сложной» [16], имеющей микро- или макро размеры.

Во-вторых, большое количество экспериментального материала показывает, что спиновые свойства элементарных частиц играют огромную роль как в области микропроявлений, так и в поведении макроскопических систем [18]. Такие свойства спина, с одной стороны, предопределили введение формализма квазичастиц [20], а с другой — позволили предположить существование собственного момента у макроскопических по размерам частей тела [30].

В-третьих, число блоков, слагающих земную кору, чрезвычайно велико. Общий характер закономерностей систем, состоящих из такого большого количества частиц, в значительной степени не зависит от того, какой механикой описывается движение отдельных частиц — классической или квантовой. Эти так называемые статистические закономерности, обусловленные именно наличием большого числа составляющих тело частиц, не могут быть сведены к чисто механическим закономерностям. Их специфичность проявляется в том, что они теряют всякое содержание при переходе к механическим системам с небольшим числом степеней свободы [15].

Как видим, с одной стороны, использование концепции «собственный момент – спин» [30] геоблока в задачах геодинамики физически вполне обосновано. С другой стороны, именно использование концепции «собственный момент – спин» в качестве базовой и позволило объяснить такое «коллективное» свойство геологической среды, как ее реидное движение [19], которое, как и сверхтекучесть квантовой жидкости [20], понять «обычным» образом, по-видимому, не представляется возможным.

Ротационные волны и реидное состояние тесно связаны с так называемыми «вихревыми» движениями геосреды — вихревыми геологическими структурами с размерами от десятков метров до 1000 км и более. Это позволяет проводить физически обоснованную аналогию между спиновыми волнами [2] и геодинамическими ротационными движениями.

2. Физически более информативной для описания деформационного процесса в рамках ротационной модели является не величина угла поворота блока  $\beta$ , а ее производная по времени, т.е. скорость поворотного деформирования, являющаяся функцией угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси  $\Omega$  и скорости распространения волны поворота, представляющая собой уединенную поперечную волну, поляризованную перпендикулярно направлению распространения [3, с. 237–243]. Анализ дисперсионных свойств таких сложных блоковых систем показывает [27], что в них появляются характеризующие внутренние вращения сред волны микро- и макровращений, которые по своим свойствам аналогичны спиновым волнам [2].

Выше уже отмечалось, что быстрые и медленные волны, по своим скоростным характеристикам близкие к ротационным волнам (экситонам и солитонам соответственно), как волны деформации экспериментально зарегистрированы на рудниках [23,31] и как маятниковые волны смоделированы в лабораторных условиях [1]. Такой волновой характер возмущения режима сейсмоэнерговыведения оказался важным диагностическим показателем уровня напряженно-деформированного состояния контролируемых участков породного массива.

Более того, при анализе механизма возникновения маятниковых волн был отмечен эффект «исчезновения» трения между взаимодействующими блоками [23]. Эти данные могут являться подтверждением вывода ротационной модели о существовании взаимосвязи между волновыми движениями геосреды и ее реологическими свойствами — возможностью реидного (без трения) объемного [19] движения.

За рамками настоящей работы остался вопрос о взаимосвязи ротационных геодинамических явлений (в том числе и об инструментально зарегистрированных «поплавковых колебаниях» Земли — колебаниях Земли, как целой, перпендикулярных плоскости ее вращения вокруг Солнца) с гравитацией, который нами подробно ранее обсуждался (см. [6]).

3. Глобальное ротационное упругое поле Земли, как показано в работе, складывается из своеобразных «квантов» — локальных полей, генерируемых как каждым поступательно движущимся вдоль поверхности вращающейся Земли блоком (плитой, геологической структурой) в отдельности (соотношения (2) – (4)), так и взаимодействиями этих геологических объектов между собой (соотношения (5) и (6)). Момент силы (соотношения (2) и (6)) является таким же «неотъемлемым» характерным параметром каждого ротационного локального поля, как, например, спин фотона — кванта электромагнитного поля — и/или электрона — элементарной частицы. В рамках разрабатываемой нами ротационной концепции «генетическая» взаимосвязь понятий «поле упругих напряжений» и «момент силы» обеспечивается выполнением закона сохранения момента импульса, что на макроскопическом планетарном уровне и может являться объяснением природы дуализма геодинамического поля: характерных для него свойств и волны, и частицы.

### **Заключение**

Размеры зерен «лабораторного» твердого тела по величине на много порядков меньше размеров блоков геосреды. Поэтому в «обычных» телах ротационные взаимодействия зерен между собой на фоне других взаимодействий могут быть незначительными. Тем не менее эффект усталости материалов (необратимого накопления деформаций), по сути близкий к энергонасыщенности горных пород, позволяет предположить, что моментные напряжения (с моментом силы) в «лабораторных» твердых телах все же могут «работать».

В механике сплошной среды, как представляется, в связи с проблемами симметричности [17] — несимметричности [12,22] тензора напряжений и «шапки Мономаха» [11] сложилась на первый взгляд противоречивая ситуация. С одной стороны, модель Коссера и ей подобные являются математическими [22,27] и физически противоречивыми [3,32], с другой — данное направление, тем не менее, активно разрабатывается теоретически, и получаемые результаты находят практическое применение [24]. Объяснение этого противоречия можно попытаться понять из высказываний двух лауреатов Нобелевской премии. Так, Р. Фейнман утверждал: «Мне кажется, я смело могу сказать, что квантовую механику никто не понимает» [7]. Тем не менее, по мнению Гелл-Манна, ее «прекрасно научились использовать» [8].

### **Список литературы**

1. Адушкин В.В., Опарин В.Н. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых (ФТПРПИ). 2013. № 2. С. 3–19.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
3. Викулин А.В. Сейсмичность. Вулканизм. Геодинамика: избранные труды. Петропавловск-Камчатский: КамГУ, 2011. 407 с.
4. Викулин А.В., Иванчин А.Г. Ротация и упругость // Научно-технический журнал. 2002. № 1(29). С. 435–441.
5. Викулин А.В., Иванчин А.Г. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых (ФТПРПИ). 2013. № 3. С. 67–84.
6. Викулин А.В., Махмудов Х.Ф., Иванчин А.Г., Герус А.И., Долгая А.А. О волновых и реидных свойствах земной коры // Физика твердого тела. 2016. Т. 58. Вып. 3. С. 547–557.
7. Владимиров Ю.С. Метафизика. М.: БИНОМ, 2009. 568 с.
8. Гелл-Манн М. В сб.: Фундаментальная структура материи. М.: Мир, 1984. С. 266.
9. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.

10. Давыдов А.С. Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах // Успехи физических наук. 1982. Т. 138. Вып. 4. С. 603–643.
11. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: МГУ, 1999. 328 с.
12. Ерофеев В.И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 4. С. 5–10.
13. Кузнецов В.В. Ударно-волновая модель землетрясения. I. Сильные движения землетрясения как выход ударной волны на поверхность // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12. № 6. С. 87–96.
14. Ландау Л.Д. Теория сверхтекучести гелия II. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 352–385.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
18. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т. II. Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. М.: Наука, 1971. 936 с.
19. Леонов М.Г. Тектоника консолидированной коры. М.: Наука, 2008. 457 с.
20. Лифшиц Е.М. Сверхтекучесть (теория) // В. Кеезом. Гелий. М.: ИИЛ, 1949. С. 385–429.
21. Николаев А.В. Проблемы нелинейной сейсмологии // Проблемы нелинейной сейсмологии / Ред. А.В. Николаев. М.: Наука, 1987. С. 5–20.
22. Николаевский В.Н. Математическое моделирование уединенных деформационных и сейсмических волн // Доклады РАН. 1995. Т. 341. № 3. С. 403–408.
23. Опарин В.Н., Юшкин В.Ф., Симонов Б.Ф., Назаров Л.А., Востриков В.И., Погарский Ю.В. Геомеханические и технические основы увеличения нефтеотдачи пластов в виброволновых технологиях. Новосибирск: Наука, 2010. 404 с.
24. Павлов И.С. Метод структурного моделирования в механике обобщенных континуумов. Докт. дис. Н.Новгород: ИПМ РАН, 2013. 221 с.
25. Пейве А.В. Тектоника и магматизм // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1961. № 3. С. 36–54.
26. Пономарев В.С. Энергонасыщенность геологической среды. М.: Наука, 2008. 379 с.
27. Потапов А.И. Волны деформации в среде с внутренней структурой Н.Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 125–140.
28. Рыкунов Л.Н., Хаврошкин О.Ю., Цыплаков В.В. Временные вариации высокочастотных сейсмических шумов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 11. С. 72–77.
29. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 96 с.
30. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 536 с.
31. Хачай О.А., Хачай О.Ю. О построении нелинейной динамической модели отклика гетерогенной среды на сильные взрывные воздействия // Тектонофизика и актуальные вопросы наук о Земле. Материалы третьей Тектонофизической конференции. Т. 2. М.: ИФЗ РАН, 2012. С. 415–418.
32. Хирт Дж., Лотэ И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.

## **ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ПОВРЕЖДЁННОЙ СРЕДЫ**

**И.А. Волков, А.И. Волков, Д.Н. Шишулин**

Волжский государственный университет водного транспорта,  
кафедра Прикладная механика и подъёмно-транспортные машины.  
603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5, e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru

Для оценки напряжённо-деформированного состояния (НДС) и усталостной долговечности ответственных инженерных объектов (ОИО) развита модель повреждённой среды (МПС), состоящая из трёх взаимосвязанных составных частей: соотношений, определяющих циклическое упругопластическое поведение материала, кинетических уравнений накопления повреждений и критерия прочности повреждённого материала. Показано, что развита модель МПС достоверно отражает основные эффекты упругопластического деформирования и процессы усталостной долговечности конструкций.

Ключевые слова: напряжённо-деформированное состояние, пластичность, разрушение, малоцикловая усталость, накопление повреждений, долговечность, ресурс.

### **1. Введение.**

Обоснование гарантируемой безопасной эксплуатации ОИО (ядерных энергетических установок, объектов химической, газовой, нефтяной отрасли) в течение длительного срока службы (40–60 лет) требует на всех жизненных этапах этих объектов достоверной информации об истории и характере эксплуатационных воздействий на конструктивные элементы, о деградиационных процессах в конструкционных материалах, об изменениях их физико-механических и прочностных характеристик при длительной эксплуатации.

Внезапные прочностные отказы конструктивных элементов являются следствием неконтролируемых процессов деградации начальных прочностных характеристик конструкционных материалов в результате накопления повреждений под воздействием физических полей различной природы.

Ввиду локальности деградиационных процессов ресурс конструктивных элементов определяется ресурсом их опасных зон с наибольшими темпами деградиационных процессов, параметры которых могут сильно отличаться из-за различия свойств конструкционных материалов, конструктивных особенностей, эксплуатационных условий, технологии изготовления и так далее.

Решение этой проблемы возможно только при реализации методологии эксплуатационного мониторинга ресурса [1, 2], одной из основных задач которого является контролирование в процессе эксплуатации объекта индивидуального выработанного ресурса каждой опасной зоны наиболее нагруженных конструктивных элементов, индивидуальной поврежденности материала этих зон по известной фактической истории их деформирования на базе математического моделирования процессов деградации с использованием современных моделей и методов механики поврежденной среды (МПС) и механики разрушения (МР) [1–4].

Полученные путём моделирования расчётные значения поврежденности материала в доступных зонах должны корректироваться путём периодического неразрушающего контроля современными физическими методами состояния материала доступных зон при остановках или ремонтах объекта.

Ниже с современных позиций МПС развита математическая модель накопления усталостных повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при многоосных напряжённых состояниях и произвольных сложных траекториях малоциклового нагружения.

Развитый вариант определяющих соотношений используется для оценки усталостной долговечности элементов конструкций при малоцикловых режимах нагружения.

## 2. Математическая модель повреждённой среды.

Многолетние экспериментальные и теоретические исследования накопления усталостных повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) позволяют сделать вывод о том, что усталость охватывает две значительно отличающихся друг от друга области циклического нагружения [1, 2]:

- многоцикловую усталость (МнЦУ) при квазиупругой работе материала, соответствующую долговечности при симметричном циклическом одноосном нагружении  $10^5 - 10^8$  циклов;
- малоцикловую усталость (МЦУ) при нестационарном упругопластическом деформировании материала и симметричном циклическом одноосном нагружении, соответствующую долговечности меньшей  $10^4$  циклов.

Область МЦУ представляет собой циклическое нагружение, при котором во время каждого цикла возникают знакопеременные макроскопические пластические деформации. Процесс малоцикловой усталости сопровождается пластической деформацией, циклическим упрочнением (разупрочнением) материала, нелинейной зависимостью «напряжение – деформация». Данная область реализуется в элементах конструкций в зонах высоких температур и конструктивной концентрации напряжений.

Модель повреждённой среды развитая [1–4] состоит из трёх взаимосвязанных частей: соотношений, определяющих упругопластическое поведение материала с учётом зависимости от процесса разрушения; уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений; критерия прочности повреждённого материала.

### 2.1. Соотношения термопластичности.

Определяющие соотношения термопластичности базируются на следующих основных положениях [2]:

- тензоры деформаций  $e_{ij}$  и скоростей деформаций  $\dot{e}_{ij}$  включают упругие деформации  $e_{ij}^e$ ,  $\dot{e}_{ij}^e$  (не зависящие от истории нагружения и определяющиеся конечным состоянием процесса) и пластические —  $e_{ij}^p$ ,  $\dot{e}_{ij}^p$  (зависящие от истории процесса нагружения);
- начальная поверхность текучести для различных температур описывается поверхностью в форме Мизеса; эволюция изменения поверхности текучести описывается изменением ее радиуса  $C_p$  и перемещением ее центра  $\rho_{ij}$ ;
- изменение объема тела упруго;
- рассматриваются начально изотропные среды; учитывается только анизотропия, вызванная процессами пластического деформирования.

В упругой области связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций устанавливается с помощью закона Гука:

$$\sigma = 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma_{ij} = 2Ge_{ij}^e \tag{1}$$

$$\dot{\sigma} = 3K[\dot{e} - (\dot{\alpha}T)] + \dot{K}\sigma/K, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \dot{G}\sigma'_{ij}/G$$

Здесь  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $e$ ,  $\dot{e}$  — шаровые, а  $\sigma'_{ij}$ ,  $\dot{\sigma}'_{ij}$ ,  $e'_{ij}$ ,  $\dot{e}'_{ij}$  — девиаторные составляющие тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$ , деформаций  $e_{ij}$  и их скорости  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{e}_{ij}$  соответственно;  $T$  — температура;  $T_0$  — начальная температура;  $K(T)$  — модуль объемного сжатия;  $G(T)$  — модуль сдвига;  $\alpha(T)$  — коэффициент линейного температурного расширения материала.

Эффекты монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений учитываются с помощью поверхности текучести, уравнение которой имеет вид:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij} \quad (2)$$

Для описания сложных циклических режимов деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность циклической памяти. Уравнение поверхности памяти, позволяющее при расчетах отделить монотонные процессы деформирования от циклических, имеет вид:

$$F_\rho = \rho_{ij}\rho_{ij} - \rho_{\max}^2 = 0 \quad (3)$$

где  $\rho_{\max}$  — максимальный за историю нагружения модуль переменной  $\rho_{ij}$ .

Принимается эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести вида [2]:

$$\dot{C}_p = [q_\chi H(F_\rho) + a(Q_s - C_p)\Gamma(F_\rho)]\dot{\chi} + q_3\dot{T} \quad (4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} \right)^{1/2}, \quad \chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_\rho) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt \quad (5)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1-A)q_1}{A \psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1-A)Q_1}{A \psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1, \quad (i=1,2) \quad (6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = \frac{n_{ij}^e n_{ij}^s}{( \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} )^{1/2}}, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{( \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} )^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij}S_{ij})^{1/2}} \quad (7)$$

$$H(F_\rho) = \begin{cases} 1, & F_\rho = 0 \wedge \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} > 0 \\ 0, & F_\rho < 0 \vee \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_\rho) = 1 - H(F_\rho) \quad (8)$$

Здесь  $q_1, q_2, q_3$  — модули изотропного упрочнения, соответствующие монотонным лучевым путям нагружения ( $q_1$ ), излому траектории деформирования на  $90^\circ$  ( $q_2$ ), температурному изменению радиуса поверхности текучести ( $q_3$ );  $a$  — постоянная, определяющая скорость процесса стабилизации формы петли гистерезиса циклического деформирования материала;  $Q_s$  — стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных  $\rho_{\max}$  и  $T$ ;  $\chi$  и  $\chi_m$  — длины траекторий пластического деформирования материала при циклическом и монотонном нагружениях;  $C_p^0$  — начальное значение радиуса поверхности текучести.

Первый член уравнения (4) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования ( $H(F_\rho)=1$  и  $\Gamma(F_\rho)=0$ ), второй член — циклическое упрочнение материала ( $H(F_\rho)=0$  и  $\Gamma(F_\rho)=1$ ), а третий — изменение радиуса поверхности текучести при изменении температуры. В целом уравнение (4) описывает локальную анизотропию пластического упрочнения в зависимости от параметра  $A$ , характеризующего отклонение вектора догрузки от нормали к поверхности текучести в точке нагружения. Операторы  $H(F_\rho)$  и  $\Gamma(F_\rho)$  позволяют автоматически провести разделение процессов монотонного и циклического деформирования.

Уравнение для смещения поверхности текучести основано на гипотезе А.А. Ильюшина, заключающейся в том, что упрочнение зависит от истории деформирования лишь на некоторой ближайшей части траектории (запаздывание векторных свойств). Внутренняя переменная  $\rho_{ij}$ , учитывающая анизотропию упрочнения пластического деформирования, удовлетворяет эволюционному уравнению [2]:

$$\dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{\epsilon}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\chi} - g_3 \rho_{ij} \langle \dot{T} \rangle, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt \quad (9)$$

где  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$  и  $g_3 > 0$  — модули анизотропного упрочнения. Первый и второй члены этого уравнения отвечают за анизотропную часть деформационного упрочнения, а третий — за изменение  $\rho_{ij}$  в результате воздействия температуры  $T$ .

Уравнение (9) описывает известный пространственный эффект Баушингера и анизотропию векторных свойств при изменении направления деформирования (изломе траектории деформирования). Введение второго члена в это соотношение моделирует исчезающую память внутренней переменной  $\rho_{ij}$  (скорость изменения  $\rho_{ij}$  является разностью между двумя составляющими  $g_1 \dot{\epsilon}_{ij}^p$  и  $g_2 \rho_{ij} \dot{\chi}$ ).

Для характеристики поведения поверхности памяти необходимо сформулировать эволюционное уравнение для  $\rho_{\max}$ :

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{(\rho_{ij} \dot{\rho}_{ij}) H(F_\rho)}{(\rho_{mn} \rho_{mn})^{1/2}} - g_2 \rho_{\max} \dot{\chi} - g_3 \rho_{\max} \langle \dot{T} \rangle \quad (10)$$

Здесь и далее для любой величины  $\dot{B}$ , заключенной в угловые скобки  $\langle \rangle$ , выполняются условия

$$\langle \dot{B} \rangle = \begin{cases} \dot{B} & \text{при } \dot{B} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{B} \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций подчиняются закону градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (12)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, определяемый из условия прохождения новой поверхности текучести через конец вектора девиатора напряжений в конце этапа нагружения.

## 2.2 Эволюционные уравнения накопления повреждений.

Экспериментальный и теоретический анализ процессов поврежденности материала позволяет представить структуру эволюционного уравнения накопления усталостных повреждений в элементарном объеме материала в следующем общем виде [2]:

$$\dot{\omega} = f_1(\theta) f_2(\beta) f_3(\omega) f_4(Z) \langle \dot{Z} \rangle \quad (13)$$

где функция  $f_1(\theta)$  описывает влияние кривизны траектории деформирования,  $f_2(\beta)$  — вид (объемность) напряженного состояния,  $f_3(\omega)$  — уровень накопленной поврежденности,  $f_4(Z)$  — накопленную относительную энергию, затраченную на образование дефектов.

Конкретизируя данное соотношение для процессов малоциклового усталости, постулируем, что структура эволюционного уравнения накопления повреждений имеет вид [2]:

$$\dot{\omega} = \frac{\alpha + 1}{r + 1} f(\beta) Z^\alpha (1 - \omega)^{-r} \langle \dot{Z} \rangle \quad (14)$$

$$Z = \frac{W - W_a}{(W_f - W_a)}, \quad \langle \dot{Z} \rangle = \begin{cases} \dot{Z} & \text{при } \dot{Z} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{Z} \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\langle \dot{Z} \rangle = \frac{\langle \dot{W} \rangle}{(W_f - W_a)}, \quad \dot{W} = \rho_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad W = \int_0^t \dot{W} dt \quad (16)$$

$$f(\beta) = \exp(-k\beta) \quad (17)$$

где:  $W_f$  – значение энергии соответствующей образованию макроскопической трещины (параметры материала);  $\alpha$ ,  $r$ ,  $k$  – материальные параметры, зависящие от температуры  $T$ ;  $f(\beta)$  – функция параметра объёмности напряжённого состояния  $\beta = \sigma/\sigma_u$ ;  $W$  – энергия, идущая на образование рассеянных усталостных повреждений при МЦУ;  $W_a$  – значение  $W$  в конце фазы зарождения микродефектов при МЦУ.

### 2.3 Критерий прочности повреждённого материала.

В качестве критерия окончания фазы развития рассеянных микроповреждений (стадии образования макротрещины) принимается условие достижения величины повреждённости своего критического значения:

$$\omega = \omega_f \leq 1 \quad (18)$$

## 3. Численные результаты

В настоящем разделе решена задача оценки усталостной долговечности компактного образца с затупленным вырезом при двух историях малоциклового нагружения. Геометрия компактного образца с затупленным вырезом и схема приложения нагрузки приведены на рис. 1. Рассмотрим две истории нагружения (рис. 2). Для двух разных последовательностей начальной нагрузки получаются разные по знаку средние напряжения у выреза при последующем малоцикловом нагружении. Как показывают экспериментальные данные [5], в такой ситуации может наблюдаться большое расхождение величин усталостной долговечности.

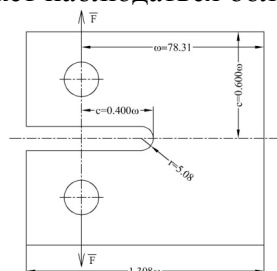


Рис. 1

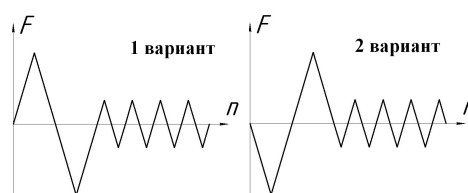


Рис. 2

С целью более точного определения НДС поведилось сгущение сетки элементов в наиболее опасных зонах, где процессы поврежденности наиболее интенсивны. Материал компактного образца – алюминий 2024-Т4, физико-механические свойства которого приведены в табл. 1, 2.

Физико-механические характеристики алюминия 2024-Т4 и материальные параметры модели термопластичности (3.1) – (3.14) приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Физико-механические характеристики и параметры модели алюминия 2024-Т4

K (МПа)	72900
G (МПа)	27700
E (МПа)	73757
$\alpha$ (1/град)	0,0000166
$C_p^o$ (Мпа)	340
$g_1$ (Мпа)	23236
$g_2$	358,6
$a$	5



Таблица 2

Работа разрушения  $W_a = W_a(\rho_{\max})$ , алюминия 2024-T4 при  $T = 20^\circ C$ .

$W_p^f = 1300$  МДж/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$ ,  $r = 0,3$ .

$\rho_{\max}$ , МПа	0	15	30	41	51	65
$W_a$ , МДж/м <sup>3</sup>	1270	1270	1270	1270	1230	1046

На рис. 3 и 4 приведено распределение интенсивности полных и пластических деформаций, а также интенсивности напряжений соответственно в конце ( $n = 2$ ) второго этапа нагружения для двух вышеперечисленных режимов нагружения. Видно, что максимальные значения указанных величин наблюдаются в точке у основания затупленного выреза (наиболее нагруженная зона), где процессы поврежденности проходят с наиболее высокими темпами.



Рис. 3



Рис. 4

На рис. 5, 6 для наиболее нагруженной зоны (точка 1) показаны петли гистерезиса для осевого напряжения  $\sigma_{xx}$  и осевой деформации  $e_{xx}$ , рассчитанные для двух вышеотмеченных режимов нагружения (сплошной линией отмечены численные результаты, полученные с использованием вышеописанной модели МПС, а пунктирной – опытные данные [5]). Видно качественное и количественное совпадение экспериментальных и расчетных данных.

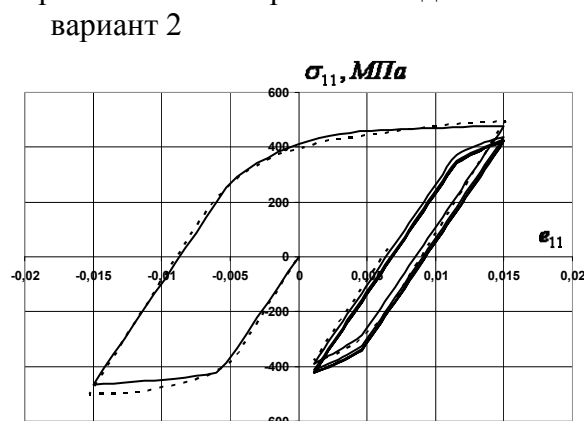
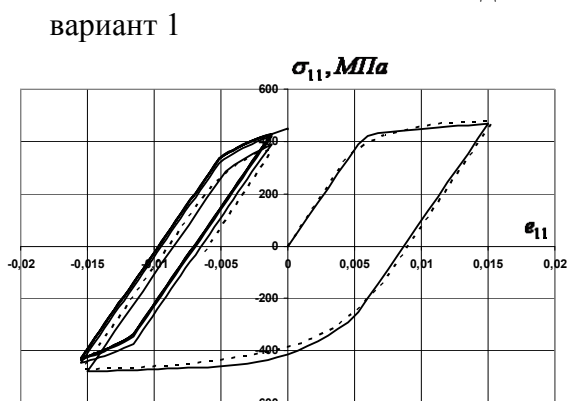


Рис. 5

Рис. 6

На рис. 7 для точки 1 представлены зависимости интенсивности тензора напряжений  $\sigma_u$  от интенсивности тензора деформации  $e_u$  (диаграмма сложного деформирования материала) для двух вариантов расчета, характеризующая скалярные свойства материала.

На рис. 8 приведена кривая усталости для алюминия 2024-T4 (точками обозначены экспериментальные данные). Были проведены численные расчеты усталостной долговечности образцов, выполненных из алюминия 2024-T4, при различных значениях осевой деформации  $e_{xx}$  при температуре  $T = 20^\circ C$ . Для определения предельной работы  $W_p^f = 1300$  МДж/м<sup>3</sup> использовалась экспериментальная точка  $P$  на усталостной кривой. Результаты сопоставления расчетной (сплошные линии) и экспериментальной (точки) информации показывают, что при известных параметрах уравнений термопластичности (3.1) – (3.14) по одной экспериментальной точке  $P$  с помощью уравнений (3.31) – (3.40) кривая малоциклового усталости для одноосного растяжения – сжатия восстанавливается расчетным путем с высокой точностью.

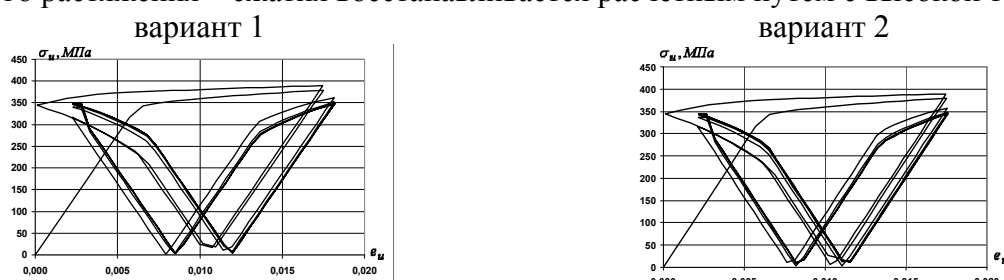


Рис. 7

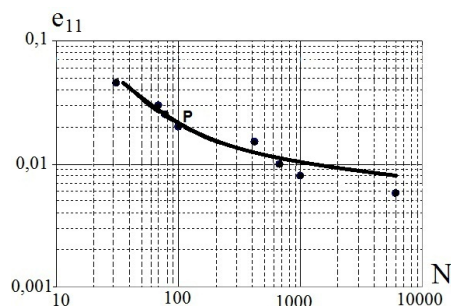


Рис. 8

Интегрирование определяющих соотношений МПС в наиболее нагруженной точке конструкции позволяет прогнозировать ее усталостную долговечность.

Так, при циклическом нагружении по первому типу, число циклов до разрушения  $N_f = 129$ , а при нагружении по второму типу  $N_f = 165$  (рис. 9).

Следовательно, даже несколько циклов повышенной нагрузки в начале истории нагружения или в процессе работы материала по усталостному механизму могут привести к тому, что правило линейного суммирования повреждений может дать ошибку как в консервативную, так и неконсервативную сторону. По-видимому, это объясняется тем, что циклы повышенной нагрузки приводят к возникновению повреждения материала, так, что долговечность оставшимся циклом более низкой нагрузки оказывается меньше ожидаемой.

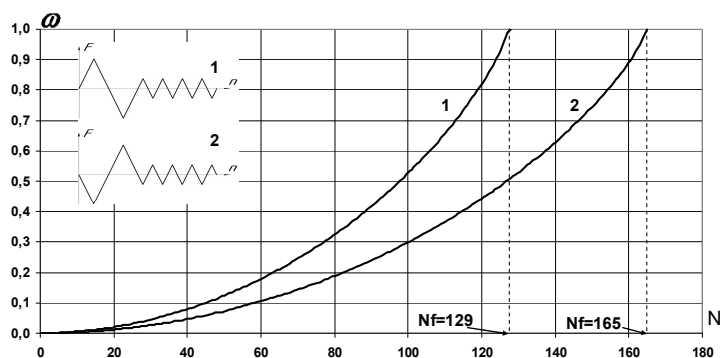


Рис. 9

### Список литературы

1. Митенков А. Ф., Кайдалов В. Б, Коротких Ю. Г. Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок. М.: Машиностроение, 2007. 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнение состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
3. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Моделирование сложного пластического деформирования и разрушения металлов при многоосном непропорциональном нагружении // ПМТФ. 2009. №5. С. 193–205
4. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. №1. С. 5–19.
5. Даулинг Н.Е. Расчет усталостной долговечности при сложных историях нагружения // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1983. – №3. – С. 69 – 79.

## ОЦЕНКА АМПЛИТУД НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХПРОЛЕТНОГО ПОГНУТОГО РОТОРА С ОСТАТОЧНЫМ ДИСБАЛАНСОМ ПРИ ВЫБЕГЕ

О.А. Волоховская

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН».

101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4, e-mail: [olgaavol@yandex.ru](mailto:olgaavol@yandex.ru)

Работа посвящена оценке амплитуд переходных колебаний системы «ротор высокого давления- совмещенный ротор средне-низкого давления» («РВД- РСНД») турбоагрегата (ТА), имеющей первоначальную погнутость и остаточные неуравновешенности обоих роторов, на низших критических скоростях при выбеге. Величины стрелки исходного прогиба РВД и остаточных дисбалансов выбирались равными максимально допустимым нормами эксплуатации ТА значениям. Расчеты амплитуд проведены для турбины К-300-23.5 ЛМЗ. Результаты проанализированы

**Ключевые слова:** погнутый ротор, стрелка прогиба, остаточный дисбаланс, переходные колебания, тепловая проба, выбег ротора, низшие критические частоты .

### Введение

В работах [1,2] было отмечено, что в ряде случаев причинами повышенной вибрации роторов турбоагрегатов могут быть факторы, не проявляющиеся при традиционной процедуре балансировки на заводе (после изготовления) и электростанции (после ремонта), а возникающие только в процессе эксплуатации. К числу наиболее распространенных факторов такого рода относится погнутость валопровода, которая может быть вызвана различными причинами, такими как: тепловая нестабильность какого-либо из составляющих его роторов; неравномерная термоползучесть; задевание в уплотнениях; несоблюдение правил пуска турбоагрегата, находившегося в резерве и т.п. Влияние результирующей погнутости валопровода с остаточной неуравновешенностью на уровень его виброактивности на критических режимах рассмотрим на основе следующей физической модели.

**1. Физическая модель системы «РВД -РСНД» с начальной погнутостью РВД и остаточными дисбалансами роторов.** В модели системы «РВД- РСНД» (рис.1) примем, что каждый из роторов представлен безинерционным валом, несущим на себе сосредоточенные массы, суммарный вес которых равен весу соответствующего ротора, при этом валы РВД и РСНД соединены между собой жесткой муфтой в точке  $B$ .

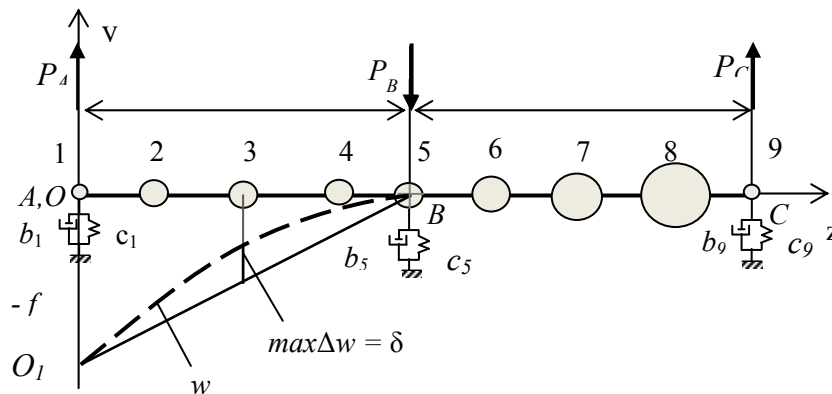


Рис. 1. Расчетная схема системы «РВД и РСНД» и исходная линия оси прогиба свободного от нагрузок валопровода ( $O_1BC$ ), состоящего из первоначально погнутого РВД (ось прогиба - пунктирная кривая  $O_1B$ ) и прямолинейного РСНД (ось - прямая  $BC$ )

Моделируемый двухпролетный ротор установлен на трех подшипниках и отнесен к неподвижной системе осей  $Oxuz$ , в которой ось  $Ox$  является осью минимальной жесткости среднего наиболее нагруженного подшипника, а ось  $Oy$  - осью его максимальной жесткости. Предполагается, что главные оси жесткости первого и третьего подшипников мало отличаются по направлениям в пространстве от осей среднего подшипника. При этом резонансные колебания в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  являются независимыми.

Характеристики каждого из подшипников заданы значениями главных жесткостей  $c_{11}^i$  (по оси  $Ox$ ) и  $c_{22}^i$  (по оси  $Oy$ ) и параметров демпфирования  $b_{11}^i$  (по оси  $Ox$ ) и  $b_{22}^i$  (по оси  $Oy$ ), где  $i=1$  соответствует точке А,  $i=5$  – точке В,  $i=9$  – точке С (рис.1.) Далее (в расчетном примере) значения физических параметров системы принимались соответствующими параметрам системы «РВД- РСНД» турбины К-300-23.5 ЛМЗ.

Для моделирования кривой исходного прогиба валопровода примем гипотезу о том, что температурные или обусловленные несоблюдением правил эксплуатации изменения приобретает только РВД, при этом ось его прогиба и ось результирующего прогиба валопровода в подшипниках представляют собой плоские кривые, лежащие в плоскостях  $yOz$  или  $xOz$ . На рис.1. представлена исходная форма оси свободного от нагрузок валопровода «РВД-РСНД» (кривая  $O_1BC$ ) в случае, когда первоначальный прогиб РВД лежит в плоскости  $yOz$ . Величина  $\delta$  - это стрелка погнутого РВД в период выбега ротора при останове ТА, отрезок  $O_1O = f$  - максимальное значение смещения оси погнутого ненагруженного ротора.

Отношение  $f / \delta$  зависит от формы прогиба РВД, которую он приобретает вследствие тепловой нестабильности или других причин в период прохождения ротором резонансной области при выбегае. Форма эта неизвестна и никогда не может быть предсказана заранее. Предполагая разные формы прогиба, будем получать различные значения отношения  $f / \delta$ . Будем считать, что кривую погнутости оси РВД на рис. 1 можно описать соотношением

$$w = f(\sin \pi z / 2l - 1) \quad ; \quad 0 < z < l. \quad (1)$$

Тогда после несложных вычислений получим  $\alpha = f / \delta = 4.75$ . В дальнейших расчетах принимаем найденное значение  $\alpha$ .

Допустимое значение  $\delta$  при тепловой пробе РВД согласно рекомендациям [3]  $\delta \leq 20$  мкм. Поэтому для  $f$  в расчетах принято верхнее значение  $f = 4.75 \cdot 20 = 95$  мкм.

Далее необходимо определить линию прогиба рассматриваемой части системы РВД - РСНД после соединения роторов между собой и установки на три подшипника. Уравнения равновесия системы на рис.1 (обозначим  $P_A = P$ ), в предположении равенства длин пролетов  $l_1 = l_2 = l$  позволяют получить :

$$P_B = 2P; \quad P_C = P, \quad (2)$$

Из уравнения совместности деформаций на первой опоре системы найдем:

$$\delta_A \cdot P = f - \frac{P}{c_A}, \quad \rightarrow \quad P = \frac{f}{(\delta_A + 1/c_A)} \quad (3)$$

где  $\delta_A$  - единичное перемещение системы в точке А,  $c_A = c_1$  (рис. 1) – жесткость первой опоры. Единичное смещение  $\delta_A$  при любых параметрах жесткости валов и жесткостях второй и третьей опор может быть найдено любым методом строительной механики. С целью экономии места эта очевидная процедура здесь не приводится.

Остаточный прогиб определяется разностью

$$u(z) = w(z) - u_{yn}(z), \quad (4)$$

где  $w(z)$  - прогиб свободного от нагрузок РВД,  $u_{yn}(z)$  – упругий прогиб системы (рис.1) под действием силы  $P$ .

Таким образом, дисбаланс системы «РВД – РСНД», обусловленный присутствием в системе прогиба, вызванного термической нестабильностью РВД или другими факторами,

перечисленными во введении, для выбранной модели (рис.1) может быть выражен совокупностью из  $n = 9$  величин:

$$D_j^f = f m_j \tilde{u}(z_j) = f \tilde{D}_j^f; \quad (i=1,2, \dots, 9). \quad (5)$$

Здесь  $\tilde{u}(z_i) = \tilde{u}_1(z_i), \tilde{u}_2(z_i)$  - отнесенные к  $f$  значения первоначального прогиба двухпролетного валопровода в точках  $z_j$  ( $j=1,2,\dots,9$ ) в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно, определяемого по формуле (4) по описанной процедуре.

Будем считать далее, что РВД и РСНД перед пуском ТА были отбалансированы в соответствии с существующими нормами, то есть каждый из них имеет суммарную остаточную неуравновешенность, при которой центробежная сила, вызываемая этой неуравновешенностью на номинальной частоте вращения, не превышает 0.1 от веса соответствующего ротора.

$$E_i \leq 0.1 M_i g / \omega^2; \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Для системы РВД – РСНД, физическая модель которой представлена на рис.1, примем, что сосредоточенные неуравновешенности, расположены посередине каждого из пролетов. Выразим их через массы соответствующих роторов и приведенные эксцентриситеты, которые в предельном случае для (6) одинаковы по модулю, то есть

$$E_1 = M_1 \varepsilon; \quad E_2 = M_2 \varepsilon, \quad (7)$$

где  $\varepsilon = |\varepsilon| = 0.1g / \omega^2 = 0.994 \cdot 10^{-5}$  м - модуль приведенных остаточных эксцентриситетов.

Таким образом, физическая модель двухпролетного ротора с начальной погнутой, обусловленной термическим или иным исходным прогибом РВД, и остаточными дисбалансами может считаться построенной.

**2.Методика расчета резонансных колебаний системы «РВД –РСНД» при выбеге ТА.** Для определения амплитуд резонансных колебаний неконсервативной системы «РВД-РСНД» на упруго-демпферных опорах при выбеге за основу примем полученную в [4] формулу для резонансных амплитуд ротора с сосредоточенными дисбалансами:

$$A_j = \varphi_{j(k)}(p_{(k)} / H_{(kk)}) \cdot \chi_{(k)}. \quad (8)$$

Здесь  $A_j$  – амплитуда в точке  $z = z_j$  расположения  $j$ -той сосредоточенной массы на оси ротора (рис. 1),  $\varphi_{j(k)} = \varphi_{(k)}(z_j)$  – значение  $k$ -той нормированной главной формы колебаний в точке  $z = z_j$ ,  $p_{(k)}$  - собственная частота колебаний,  $H_{(kk)}$  - приведенный коэффициент демпфирования колебаний по форме  $k$ ,  $\chi_{(k)}$  - параметр возбуждения при колебаниях по форме  $k$ . Здесь и далее по индексам в скобках суммирование не проводится.

Для физической модели представленной на рис.1 системы «РВД – РСНД» подшипники, на которых установлен ротор, вследствие различной нагруженности будут иметь неравные между собой параметры жесткости и демпфирования.

Тогда приведенный параметр демпфирования  $H_{(kk)}$  для рассматриваемой модели валопровода выразится соотношением:

$$H_{(kk)} = b^1 \varphi_{1k}^2 + b^5 \varphi_{5k}^2 + b^9 \varphi_{9k}^2, \quad (9)$$

где  $\varphi_{1k}, \varphi_{5k}, \varphi_{9k}$  – значения нормированных главных форм колебаний ротора на трех опорах, расположенных в точках 1, 5 и 9 на рис.1 для каждой из плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ , соответственно;  $b^j = b_{11}^j$  – коэффициент демпфирования для подшипника в точке с номером  $j$  при колебаниях в плоскости  $xOz$ ,  $b^j = b_{22}^j$  - при колебаниях в плоскости  $yOz$ , ( $j = 1,5,9$ ).

Параметр  $\chi_k$  в модели [4] есть мера возбуждения колебаний при резонансе. Обобщая зависимость (8) на рассматриваемый случай совместного действия неуравновешенностей, приобретенных за счет сформировавшегося в соответствии с принятой гипотезой (см. рис.1)

прогиба системы «РВД – РСНД»  $u(z) = f \tilde{u}(z)$  и остаточных неуравновешенностей обоих роторов после балансировки (7), получим:

$$\chi_k = \chi_k^f + \chi_k^\varepsilon; \quad (10)$$

$$\chi_k^f = f \sum_{j=1}^9 m_j \tilde{u}(z_j) \cdot \varphi_k(z_j) = f \sum_{j=1}^9 \tilde{D}_j^f \cdot \varphi_k(z_j); \quad (11)$$

$$\chi_k^\varepsilon = E_1 \varphi_k(z_3) + E_2 \varphi_k(z_7) = \varepsilon \cdot (\pm M_1 \varphi_{3k} \pm M_2 \varphi_{7k}), \quad (12)$$

где первое слагаемое определяет влияние первоначального прогиба системы «РВД – РСНД», а второе характеризует возбуждение системы вследствие остаточных неуравновешенностей,  $\varphi_k(z_j) = \varphi_{jk}$ , знаки слагаемых в (12) соответствуют знакам приведенных остаточных эксцентриситетов для каждого из роторов.

**3. Пример расчета колебаний при выбеге системы «РВД-РСНД» с первоначальной погнутой РВД и остаточными неуравновешенностями обоих роторов.** В качестве примера рассмотрим систему «РВД-РСНД» со следующими параметрами: длина каждого из пролетов  $l_1=l_2=l=5.5$  м; масса ротора ВД  $M_1 = 9600$  кг; масса ротора СНД  $M_2 = 17800$  кг; дискретные массы  $m_1 = 500$  кг;  $m_2 = 2800$  кг;  $m_3 = 3000$  кг;  $m_4 = 2800$  кг;  $m_5 = 1000$  кг;  $m_6 = 3000$  кг;  $m_7 = 5000$  кг;  $m_8 = 8800$  кг;  $m_9 = 500$  кг, приведенная жесткость вала РВД на изгиб  $EI_1 = 5.15 \cdot 10^8$  Нм<sup>2</sup>, вала РСНД -  $EI_2 = 18.025 \cdot 10^8$  Нм<sup>2</sup>. Значения физических параметров системы в примере соответствуют системе «РВД-РСНД» валопровода турбины К-300-23.5 ЛМЗ.

При указанном выше распределении сосредоточенных масс по длине валопровода подшипники, на которых он установлен, будут иметь разную нагруженность и, следовательно, различные параметры жесткости и демпфирования. Подбор подшипников для рассматриваемого примера был проведен по методике, предложенной в [4,5]. При этом рассматривались консервативные матрицы жесткости подшипников [5] и предполагалось, что направление их главных осей в пространстве мало отличаются друг от друга. Полученные значения параметров жесткости и демпфирования подшипников в главных осях матрицы жесткости среднего подшипника для двух типов подшипников – эллиптических и шестиколодочных сегментных - сведены в Таблицу 1. Значения параметров жесткости и демпфирования подшипников вычислялись на рабочей частоте вращения ТА, и в дальнейших расчетах было принято, что параметры подшипников не изменяются при падении частоты вращения ротора при выбеге ТА.

Таблица 1. Значения параметров подшипников

Вид	Эллиптические			Сегментные			
	№ (подшипника и массы)	1(1)	2 (5)	3 (9)	1 (1)	2 (5)	3 (9)
$c_{11}, H / м$		$0.022 \cdot 10^9$	$0.157 \cdot 10^9$	$0.114 \cdot 10^9$	$0.127 \cdot 10^9$	$0.172 \cdot 10^9$	$0.164 \cdot 10^9$
$c_{22}, H / м$		$0.685 \cdot 10^9$	$1.208 \cdot 10^9$	$1.041 \cdot 10^9$	$0.343 \cdot 10^9$	$1.368 \cdot 10^9$	$1.038 \cdot 10^9$
$b_{11}, кг \cdot с^{-1}$		$0.564 \cdot 10^6$	$0.804 \cdot 10^6$	$0.752 \cdot 10^6$	$0.276 \cdot 10^6$	$0.366 \cdot 10^6$	$0.352 \cdot 10^6$
$b_{22}, кг \cdot с^{-1}$		$3.256 \cdot 10^6$	$5.605 \cdot 10^6$	$4.944 \cdot 10^6$	$0.440 \cdot 10^6$	$2.453 \cdot 10^6$	$1.917 \cdot 10^6$

Значения исходных прогибов системы «РВД – РСНД»  $u(z_j)$  были вычислены с учетом значений представленных в Таблице 1 параметров жесткости подшипников и приведенных в начале раздела изгибных жесткостей РВД -  $EI_1$  и РСНД -  $EI_2$ . Графики кривых безразмерных первоначальных прогибов системы «РВД – РСНД» вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , представлены на рис.2

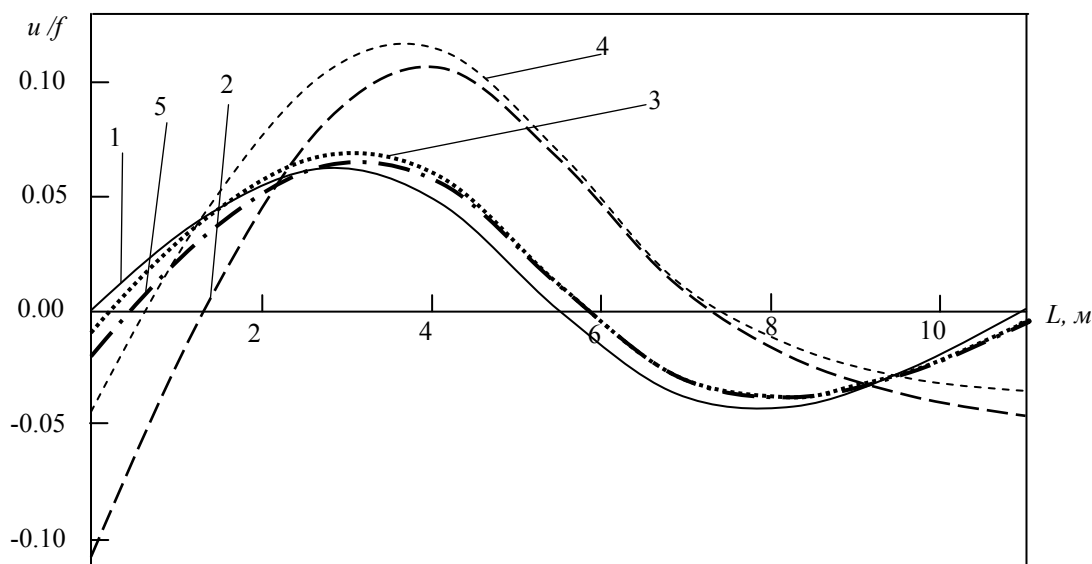


Рис. 2. Линии прогиба системы «РВД – РСНД» для рассматриваемого примера:  
 1- жесткие опоры; 2-эллиптические подшипники, ось  $Ox$ ; 3-то же, ось  $Oy$ ;  
 4- сегментные подшипники, ось  $Ox$ ; 5 – то же, ось  $Oy$

Для расчета амплитуд резонансных колебаний рассматриваемой модели системы «РВД – РСНД» по формуле (8) необходимо знать ее собственные частоты, лежащие ниже рабочей скорости турбоагрегата  $p_k < \omega = 314.16$  рад/с и амплитуды соответствующих главных форм колебаний  $\varphi_{jk} = \varphi_k(z_j)$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  (рис.1).

Таблица 2. Значения низших собственных частот системы при использовании эллиптических и сегментных подшипников

Вид подшипников	Эллиптические		Сегментные	
	по $Ox$	по $Oy$	по $Ox$	по $Oy$
Номер собственной частоты				
1, рад/с	<b>100.8</b>	<b>182.7</b>	<b>110.9</b>	<b>178.7</b>
2, рад/с	<b>112.4</b>	<b>213.1</b>	<b>136.1</b>	<b>213.3</b>
3, рад/с	<b>242.8</b>	538.7	<b>295</b>	510.1

Не останавливаясь на процедуре определения этих величин, отметим лишь, что при расчете собственных частот и главных форм колебаний система «РВД-РСНД» рассматрива-



лась как консервативная. Проведенные расчеты показали, что у системы «РВД – РСНД» для обоих типов подшипников имеется по пять собственных частот, лежащих ниже рабочей скорости вращения - три по оси  $Ox$  и две по оси  $Oy$ . Шесть низших частот для каждого варианта приведены в Таблице 2, где те из них, которые меньше рабочей скорости турбины, отмечены полужирным шрифтом.

Нормированные собственные формы колебаний системы вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  выражаются соотношением:

$$\varphi_k^*(z_j) = \varphi_k(z_j) \left\{ M_{jj} [\varphi_k(z_j)]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (13)$$

где  $k$  – номер собственной частоты для ротора на эллиптических или сегментных подшипниках для каждой из главных плоскостей колебаний,  $z_j$  – абсцисса массы с номером  $j$  ( $j = 1, \dots, 9$ ) в модели валопровода (рис.1),  $\varphi_k(z_j)$  – соответствующие ненормированные формы. На рис. 3. приведены главные формы колебаний для системы на сегментных подшипниках. Собственные формы колебаний системы на эллиптических подшипниках принципиально не отличаются от представленных на рис. 3 и поэтому здесь не приводятся.

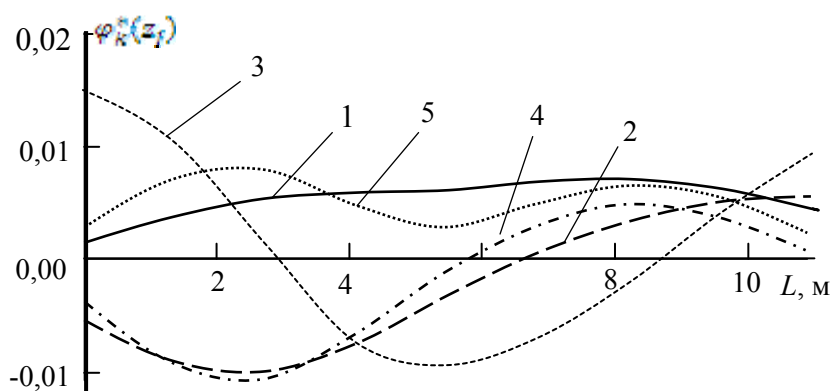


Рис. 3. Низшие собственные формы колебаний системы «РВД-РСНД» на сегментных Подшипниках: по оси  $Ox$  – 1 –  $\varphi_1^*(z_j)$ , 2 –  $\varphi_2^*(z_j)$ , 3 –  $\varphi_3^*(z_j)$ ; по оси  $Oy$  – 4 –  $\varphi_1^*(z_j)$ , 5 –  $\varphi_2^*(z_j)$

Предположим далее, что вектора остаточных неуравновешенностей обоих роторов  $E_1$  и  $E_2$  лежат в одной плоскости с исходным прогибом  $u(z)$ . Для каждой из критических частот расчеты амплитуд были проведены для четырех возможных вариантов взаимного расположения прогиба (рис.2) и сосредоточенных посередине каждого из пролетов неуравновешенностей  $E_1$  и  $E_2$ .

Вариант АА:  $E_1 - E_2$  соответствует совпадению по фазе неуравновешенностей от первоначального прогиба и остаточного дисбаланса на каждом из пролетов, вариант ББ:  $-E_1 + E_2$  – их противоположности по фазе, что вызывает наибольшую и наименьшую величину порождаемых прогибом и неуравновешенностями суммарных центробежных сил инерции для каждого из отдельно взятых роторов.

Варианты АБ:  $E_1 + E_2$  и БА:  $-E_1 - E_2$  отвечают направлению остаточных неуравновешенностей роторов вдоль положительного (АБ) и отрицательного (БА) направления осей  $Ox$  и  $Oy$ . Заметим, что величина суммарного фактора возбуждения  $\chi_k$  в формулах (10) существенно зависит не только от величин суммарных неуравновешенностей роторов, но и от возбуждаемой формы колебаний  $\varphi_k$ .

При расчетах значение стрелки исходного прогиба  $\delta$  РВД и его максимального прогиба  $f$  для обеих плоскостей  $xOz$  и  $yOz$  принимались равным максимальным значениям, допускаемым при тепловой пробе, то есть  $\delta=20$  мкм,  $f=95$  мкм.

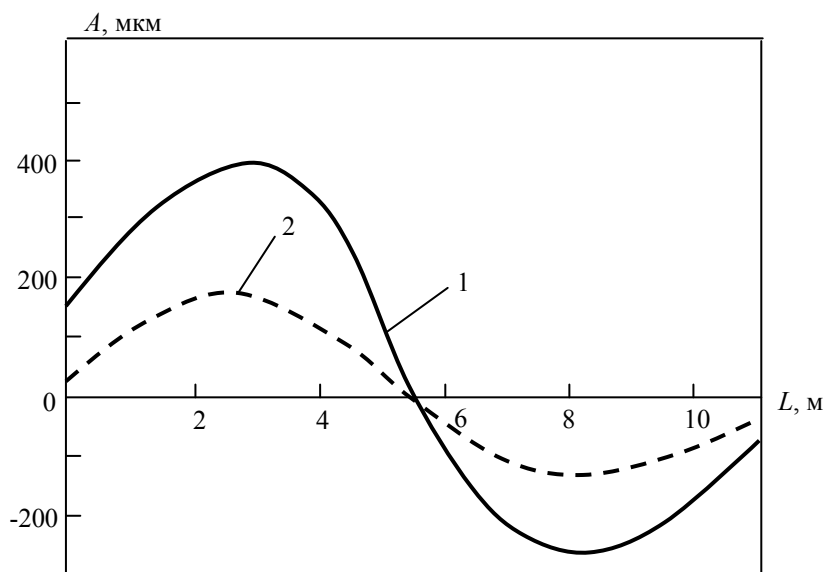


Рис. 4. Амплитуды колебаний системы «РВД-РСНД» в наиболее неблагоприятных режимах: 1- ось  $Oy$ , частота  $p_{1y}=178.7$  рад/с, вариант АА, сегментные подшипники; 2- ось  $Oy$ , частота  $p_{1y}=182.7$  рад/с, вариант АА, эллиптические подшипники

**4. Анализ результатов и выводы.** Для оценки полученных результатов будем следовать критериям сравнения, принятым ранее в статье [1]. Согласно последним отечественным нормам, допустимые значения амплитуд вибрации вала около опор для турбоагрегатов при  $n = 3000$  об / мин составляют при длительной эксплуатации  $A \leq 90$  мкм .

Резонансные амплитуды в серединах пролетов по аналогии с [1] сравним с номинальными радиальными зазорами между ротором и статором в уплотнениях каждого из цилиндров. Для цилиндра высокого давления (ЦВД) активного типа радиальные зазоры во всех уплотнениях должны устанавливаться в пределах:

$$\Delta_1 = 400 \sim 700 \text{ мкм}; \quad (14)$$

для цилиндра средне–низкого давления (ЦСНД) следует принять

$$\Delta_2 = 800 \sim 1400 \text{ мкм}. \quad (15)$$

Сравнивая данные расчетов (которые здесь не приводятся из-за ограниченности места) в контрольных точках – в серединах пролетов и на опорах- с выбранными критериями, приходим к следующим выводам.

- Наибольшие значения суммарных амплитуд для системы на обоих типах подшипников в рассмотренном примере наблюдаются в середине пролета РВД. Установлено, что при неблагоприятных соотношениях между направлениями погнутости и остаточных неуравновешенностей (вариант АА) и при сегментных подшипниках амплитуды колебаний на частоте  $p_{1y} = 178.7$  рад/с (1706 об/мин) составляют  $|A| = 404$  мкм и близки к величинам зазоров в диафрагменных уплотнениях, а ситуация близка к возможности задеваний. Максимум амплитуд для системы на эллиптических подшипниках наблюдается на частоте  $p_{1y} = 182.7$  рад/с (1744 об/мин) и составляет  $|A| = 182.0$  мкм также для варианта АА, при этом угрозы задевания не предвидится (рис.4)

- Максимумы амплитуд в середине пролета РСНД возникают лишь на частотах  $p_{1x} = 100.8$  рад/с (962 об/мин ; эллиптические подшипники) и  $p_{1x} = 110.9$  рад/с (1059 об/мин ; сегментные подшипники) для варианта АБ и составляют  $|A| = 23.4$  мкм и  $|A| = 62.0$  мкм,

соответственно, то есть малы по абсолютной величине по сравнению с зазорами (15) и не создают угрозы задеваний.

- Амплитуды на опорах системы «РВД-РСНД», превышающие выбранный критерий сравнения  $A \leq 90$  мкм, возникают в системе на сегментных подшипниках. На первой опоре при частоте  $p_{1y} = 178.7$  рад/с (1706 об/мин.) для варианта АА возбуждаются амплитуды  $|A| = 154$  мкм., а на частоте  $p_{3x} = 295.0$  рад/с (2817 об/мин) для варианта АБ:  $|A| = 120$  мкм.

- Из расчетов следует, что при выбранных максимально допустимых нормами значениях величин  $\delta$  и  $\varepsilon$  (параметров, определяющих величины учитываемых в статье факторов дисбаланса) и принятой начальной форме кривой погнутости РВД, соединенного муфтой с прямолинейным РВД (рис.1), основной вклад в величину амплитуд вибрации системы «РВД-РСНД» ( $\sim 60\%—70\%$ ) вносят колебания, возбуждаемые остаточными дисбалансами роторов.

- Из проведенных расчетов следует, что уровень резонансных колебаний системы при использовании сегментных подшипников в 1.5-2.5 раза выше отмеченного при использовании эллиптических подшипников, что связано с меньшими значениями параметров демпфирования сегментных подшипников.

- В случаях, когда останов ТА сопровождается или связан с внезапной разбалансировкой и/или вызванным ею дополнительной погнутостью ротора, то выбег системы РВД-РСНД будет происходить с задеваниями в области РВД.

### **Заключение**

Все сделанные выводы относятся к рассмотренному примеру, которому отвечают некоторый частный случай конструктивного исполнения РВД и РСНД; тип проточной части (активная); тип подшипников (эллиптические и сегментные); тип уплотнений (традиционные). Используя примененную методику, возможно выполнить аналогичные расчеты для иных конструктивных решений.

Расчеты собственных частот и форм колебаний в примере выполнены для простейшей модели системы «РВД-РСНД» - двухпролетного ротора с дискретными массами на безинерционных валах с постоянными изгибными жесткостями в пределах пролетов. Модель без труда может быть обобщена для случая многопролетного ротора с реальным распределением массовых и жесткостных характеристик по длине валопровода, однако маловероятно, что это приведет к существенному отличию значений форм и частот колебаний от полученных.

### **Список литературы**

1. Костюк А.Г., Волоховская О.А. Переходные колебания погнутого ротора с остаточным дисбалансом при выбеге // Теплоэнергетика. 2015. № 9. С. 13—17
2. Костюк А.Г., Волоховская О.А. Об особенностях колебаний погнутого ротора. Вестник МЭИ. № 4. 2013. С. 7—17
3. Прочность элементов паровых турбин / Под ред. Л.А. Шубенко - Шубина. М.-Киев: Машгиз, 1962. 568 с.
4. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: Изд. МЭИ, 2000. 479 с.
5. Костюк А.Г., Трухний А.Д., Куменко А.И. Сборник задач по динамике и прочности турбомашин. М: «Машиностроение», 1990. 330 с.

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ПРЕЦЕССИИ СВОБОДНОГО ГИРОСКОПА ПО МАЛОМУ ЕЕ ОТРЕЗКУ

**В.С. Воронков**

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [vic\\_voronkov@mail.ru](mailto:vic_voronkov@mail.ru)

Показывается возможность восстановления траектории прецессии свободного гироскопа по малому ее отрезку. С этой целью используется метод среднеквадратичного приближения искомой траектории к нескольким ее точкам, моменты времени прохождения которых подлежат измерению. Предлагаемый метод позволяет существенно сократить время нахождения направления вектора угловой скорости вращения Земли неастрономическими методами.

Ключевые слова: свободный гироскоп, метод восстановления траектории прецессии по малому ее отрезку.

### Введение

Закон изменения момента количества движения механической системы [1] лежит в основе математического моделирования динамики гироскопических приборов. Одним из таких приборов является свободный гироскоп, представляющий собой осесимметричный ротор, быстро вращающийся по оси наибольшего момента инерции. Свободным гироскопом называется в случае, когда суммарный момент сил, действующих на ротор, равен нулю. Особенностью свободного гироскопа является сохранение вектора его кинетического момента по величине и направлению в инерциальной системе координат. Во вращающейся системе координат вектор кинетического момента свободного гироскопа будет сохранять свою величину и направление только в случае, если он коллинеарен вектору угловой скорости вращения системы координат. В противном случае во вращающейся системе координат будет наблюдаться прецессия вектора кинетического момента с угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью вращения системы координат. Это свойство свободного гироскопа используется для определения направления угловой скорости вращения Земли неастрономическими методами. С этой целью наблюдается прецессия вектора кинетического момента свободного гироскопа в системе координат, связанной с Землей, как правило, при малых углах отклонения от вектора угловой скорости вращения Земли.

Реализация такого способа определения направления угловой скорости вращения Земли связана с решением следующих научно-технических задач: во-первых, с максимальным снижением суммарного момента сил, действующих на ротор гироскопа; во-вторых, с повышением быстродействия системы обработки результатов измерения траектории прецессии вектора кинетического момента гироскопа. В настоящее время решение первой задачи достигается использованием электростатического (неконтактного) подвеса ротора гироскопа [2]. Для решения второй задачи предлагается метод ускоренной обработки результатов измерения малого отрезка траектории прецессии вектора кинетического момента гироскопа. Этот метод основан на решении задачи Коши с неопределенными начальными условиями [3].

### Постановка задачи

Математической моделью прецессии кинетического момента свободного гироскопа на вращающейся Земле является векторное уравнение [4]

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + [\vec{\Omega} \times \vec{H}] = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{H}$  – вектор кинетического момента свободного гироскопа,  $\vec{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Расположение этих векторов в выбранных системах координат поясняется на рис.1.

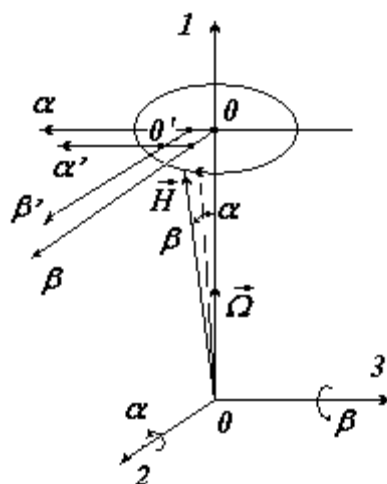


Рис.1. Используемые системы координат.

Система координат  $0,1,2,3$  – связана с Землей так, что ось  $01$  направлена по вектору  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли, а оси  $02, 03$  лежат в плоскости экватора. Система координат  $0,\alpha,\beta$  связана с углами отклонения вектора  $\vec{H}$  кинетического момента свободного гироскопа от вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли и расположена параллельно плоскости экватора. Система координат  $0',\alpha',\beta'$  связана с измерительным устройством и имеет плоскопараллельные смещения относительно системы координат  $0,\alpha,\beta$  на углы  $\alpha^*, \beta^*$ .

При малых углах  $\alpha,\beta$  отклонений вектора  $\vec{H}$  кинетического момента свободного гироскопа от вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли векторное уравнение (1) имеет следующие проекции на оси системы координат  $0,1,2,3$ :

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} + \Omega\alpha = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} - \Omega\beta = 0. \quad (2)$$

В силу линейности этой системы дифференциальных уравнений, они могут быть представлены одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega^2\alpha = 0, \quad (3)$$

известного как уравнение гармонического осциллятора [5]. Общее решение этого уравнения можно представить в виде двух функций, удовлетворяющих системе уравнений (2)

$$\alpha(t) = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t, \quad \beta(t) = C_1 \cos \Omega t - C_2 \sin \Omega t \quad (4)$$

при произвольных значениях постоянных интегрирования  $C_1, C_2$ . Реализуемая траектория прецессии кинетического момента свободного гироскопа на вращающейся Земле соответствует частному решению, определяемому общим решением (4) при некоторых значениях постоянных интегрирования  $C_1, C_2$ . Традиционным способом нахождения постоянных коэффициентов частного решения дифференциального уравнения является задание начальных условий в общем решении, кратко называемым задачей Коши [6]. Действительно, задание начальных условий в общем решении (4) определяет постоянные коэффициенты

$$\alpha(0) = C_2, \quad \beta(0) = C_1.$$

В связи с тем, что система координат  $0',\alpha',\beta'$ , связанная с измерительным устройством, в общем случае не совпадает с системой координат  $0,\alpha,\beta$ , связанной с углами отклонения вектора  $\vec{H}$  кинетического момента свободного гироскопа от вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли, начальные условия (5) измеряемой траектории прецессии в общем случае являются неопределенными из-за неопределенных смещений система координат  $0',\alpha',\beta'$  относительно системы координат  $0,\alpha,\beta$  на углы  $\alpha^*, \beta^*$ .

Нахождение неопределенных углов  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и амплитуды  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  прецессионных колебаний может быть осуществлено с помощью наблюдения траектории прецессии с помощью измерительной системы. По точкам реверса колебаний по углам  $\alpha'$ ,  $\beta'$  находятся начало координат фазовой плоскости  $0, \alpha, \beta$  и реализуемая фазовая траектория как частное решение возможных фазовых траекторий, соответствующих общему решению (4) уравнения прецессии (3). Однако, такой способ определения неизвестных параметров прецессии свободного гироскопа требует большого времени наблюдения, так как период прецессии равен суткам, т.е. 24 часам, или 86400 с. Возможно ли сократить время наблюдения траектории прецессии с помощью измерительной системы, чтобы найти неопределенные углы  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и амплитуду  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  прецессионных колебаний, т.е. восстановить всю траектории прецессии свободного гироскопа по измерениям малого ее отрезка? Предлагаемый способ решения этой задачи дает утвердительный ответ на этот вопрос.

### Предлагаемый способ решения задачи.

Известно [5], что семейству фазовых траекторий общего решения уравнения гармонического осциллятора (3) соответствует фазовый портрет типа «центра», изображенный на рис.2 на фазовой плоскости  $0, \alpha, \beta$  и в системе координат измерительного устройства  $0', \alpha', \beta'$ .

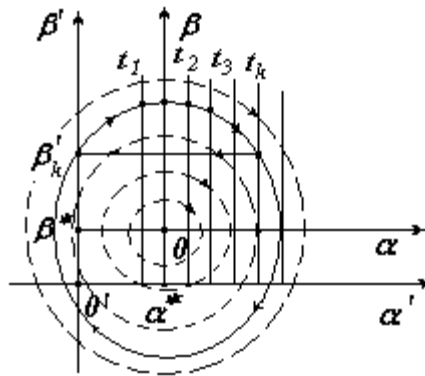


Рис.2. Фазовый портрет (пунктир) и наблюдаемая (сплошная линия) траектория прецессии

Если измерять моменты времени  $t_k$  прохождения углов  $\alpha'_k, \beta'_k$  в системе координат  $0', \alpha', \beta'$ , измерительного устройства, то на основе аналитического общего решения уравнения (3) следует их функциональная зависимость

$$\alpha'_k = \alpha^* + C_1 \sin \Omega t_k + C_2 \cos \Omega t_k, \quad \beta'_k = \beta^* + C_1 \cos \Omega t_k - C_2 \sin \Omega t_k, \quad (5)$$

где  $0 \leq t_k \leq T = \frac{2\pi}{\Omega}$ , ( $k=1,2,\dots,N$ ),  $N$  – число точек разбиения всего периода  $T$  прецессионных колебаний. Эта зависимость является дискретным параметрическим заданием уравнения окружности радиусом  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  с центром в точке  $\alpha^*, \beta^*$ . Повышение быстродействия системы обработки результатов измерения траектории прецессии вектора кинетического момента свободного гироскопа может быть достигнуто нахождением неизвестных значений постоянных интегрирования  $C_1, C_2$  общего решения уравнения (3) и координат центра окружности  $\alpha^*, \beta^*$  при измерениях зависимости (5) на малой части периода  $T$ . Если обозначить через  $n$  число точек разбиения малой части периода  $T$  прецессионных колебаний, то при условии

$$n \ll N, \quad (6)$$

быстродействие системы обработки результатов измерения будет тем выше, чем существеннее будет выполняться неравенство (6).

С этой целью предлагается использовать в системе измерения  $n$  датчиков, имеющих заданные значения координат  $\alpha'_k$ ,  $n$  датчиков, имеющих заданные значения координат  $\beta'_k$ , и измерять моменты времени  $t_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) прохождения траекторией прецессии этих точек, расположенных на осях  $O'\alpha', O'\beta'$ . Предлагаемый способ решения задачи нахождения траектории прецессии свободного гироскопа на малом ее отрезке, как частного решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора при неопределенных начальных условиях, основан на методе наименьших квадратов [6]. Минимизация суммы квадрата отклонений выражений (5) общего решения уравнения прецессии в ряде точек искомой траектории, например по углам  $\alpha'_k$

$$S_\alpha = \sum_{k=1}^n (\alpha^* - \alpha'_k + C_1 \sin \Omega t_k + C_2 \cos \Omega t_k)^2 \Rightarrow \min \quad (7)$$

проводится из необходимых условий экстремума этой суммы при выборе неизвестных параметров  $\alpha^*, C_1, C_2$  :

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha^*} = 0, \quad \frac{\partial S_\alpha}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial S_\alpha}{\partial C_2} = 0. \quad \text{Эти условия приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений для их поиска}$$

ных алгебраических уравнений для их поиска

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha^* + a_{12}C_1 + a_{13}C_2 &= b_1, \\ a_{21}\alpha^* + a_{22}C_1 + a_{23}C_2 &= b_2, \\ a_{31}\alpha^* + a_{32}C_1 + a_{33}C_2 &= b_3, \end{aligned} \quad (8)$$

$$a_{11} = n, \quad a_{12} = \sum_{k=1}^n \sin \Omega t_k = a_{21}, \quad a_{13} = \sum_{k=1}^n \cos \Omega t_k = a_{31},$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^n \sin^2 \Omega t_k, \quad a_{23} = \sum_{k=1}^n \sin \Omega t_k \cos \Omega t_k = a_{32}, \quad a_{33} = \sum_{k=1}^n \cos^2 \Omega t_k$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad b_2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin \Omega t_k, \quad b_3 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos \Omega t_k.$$

Решение системы уравнений (8) существует и единственно, если ее определитель  $\Delta \neq 0$ . Тогда неизвестные параметры  $\alpha^*, C_1, C_2$  могут быть найдены по правилу Крамера [6]

$$\alpha^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (9)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Оставшийся неопределенный параметр  $\beta^*$  находится из второго уравнения (5)

$$\beta^* = \beta'_k - C_1 \cos \Omega t_k + C_2 \sin \Omega t_k \quad (10)$$

по моменту времени прохождения  $t_k$  любого их датчиков, расположенных по оси углов  $\beta'_k$ .

### Пример решения задачи.

Предполагается, что имеется система датчиков, расположенных по осям измерительного устройства  $0', \alpha'$  и  $0', \beta'$  через равные промежутки, составляющие  $10'$  угловых минут. Измерение моментов времени  $t_k$  прохождения траекторией прецессии датчиков, расположенных по оси  $0', \alpha'$  приведены в таблице.

$\alpha'_1 = -10'$	$\alpha'_2 = 0'$	$\alpha'_3 = 10'$	$\alpha'_4 = 20'$
$t_1 = 3.385 \cdot 10^4$ с	$t_2 = 3.505 \cdot 10^4$ с	$t_3 = 3.622 \cdot 10^4$ с	$t_4 = 3.738 \cdot 10^4$ с

Как показывает расчет, минимально допустимое число датчиков угла, при котором определитель системы (8) отличен от нуля, равно  $n = 3$ , что удовлетворяет условию (6). Получаемое решение (9) в рассматриваемом примере имеет вид

$$\alpha^* = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 30', \quad C_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1.133 \cdot 10^{-5}, \quad C_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -120', \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 120'.$$

Приведенные в таблице значения включают начальную фазу  $\varphi = -1.231$  (рад) начала отсчета моментов времени от угла  $\varphi = -\pi$ . Наиболее близкий момент времени  $t_k = 3.853 \cdot 10^4$  с. прохождения по оси  $0', \beta'$  датчиков угла, также с учетом начальной фазы  $\varphi = -1.231$  (рад) начала отсчета моментов времени от угла  $\varphi = -\pi$ , соответствует углу  $\beta'_k = 160'$ . При найденных параметрах  $C_1, C_2$  по формуле (10) находится смещение фазовой плоскости по оси  $0', \beta'$

$$\beta^* = 40'.$$

Построение траектории прецессии свободного гироскопа с найденными параметрами как фазовой траектории гармонического осциллятора (3) в системе координат  $0', \alpha', \beta'$  измерительного устройства показывает, что все исходные для расчета точки  $\alpha'_k, \beta'_k$  принадлежат этой траектории и, следовательно, получено восстановление траектории прецессии по малому ее отрезку, а особая точка фазового портрета с координатами  $\alpha^*, \beta^*$  соответствует истинному направлению вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли. Предложенный метод решения этой задачи позволяет сократить время нахождения направления вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли. В рассмотренном примере это сокращение определяется промежутком времени  $t_1 - t_k = 0.478 \cdot 10^4$  с, что по отношению к периоду прецессии свободного гироскопа  $T = 8.64 \cdot 10^4$  с. составляет 0.055 его части.

### Заключение

В ходе проведенного исследования, нацеленного на повышение быстродействия ориентирования по прецессии свободного гироскопа, показана возможность восстановления траектории прецессии свободного гироскопа по малому ее отрезку, составляющего, как показано в приведенном примере, 0.055 части периода прецессии. Предлагаемый метод решения этой важной для инерциальной навигации проблемы основан на математической обработке результатов измерения моментов времени прохождения траекторией прецессии свободного гироскопа системы датчиков угла, расположенных на ортогональных осях измерительной системы. Найденное минимальное число  $n=3$  измеряемых моментов времени, соответствующих точкам разбиения малой части



периода прецессии по одной из осей, необходимых для решения задачи предложенным методом. Уменьшение расстояний между точками расположения датчиков углов по каждой оси измерительной системы приводит к уменьшению отрезка траектории прецессии, по которому возможно ее восстановление, т.е. к еще большему быстродействию определения истинного направления вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли по сравнению с рассмотренным в примере.

### **Список литературы**

1. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. 2-е изд. – М.: Мир, 1985 -520 с.
2. Afinogenov A.S., Gusinsky V.Z., Parfenov O.I. Electrostatic gyro// 2-nd Soviet-Chinese symposium on inertial technology. S.Petersburg CSRI “Electropribor”, 1992 –pp. 71-73.
3. Воронков В.С. Решение задачи Коши с неопределенными начальными условиями// Ж-л Национальной Ассоциации Ученых, 2016, № 2 (18), с. 135-137.
4. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация-М.:Наука,1976-670с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.. Теория колебаний.- М.: ГИФМЛ, 1959 – 916 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986- 544 с.

## **АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГИБКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ «РОТОР НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ»**

**В.С. Востоков, С.В. Лебедева**

Волжский государственный университет водного транспорта,  
электромеханический факультет.

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5, e-mail: 79200555589@yandex.ru

Рассматривается устойчивость системы гибкого ротора, вывешенного на электромагнитных подшипниках, с учетом жесткости ротора. Методом Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость.

Ключевые слова: Устойчивость, колебания, нелинейная система, управление, электромагнитные подшипники, ротор, расчеты.

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ с анализом нелинейной системы электромагнитного подвеса ротора, в которых доказана устойчивость системы по Ляпунову [1-4]. Выполненные исследования получены для математических моделей разной степени сложности и посвящены исследованию влияния учета того или иного фактора, учитываемого в математической модели. Одним из таких факторов, не исследованных ранее, является гибкость ротора. Интерес поиска влияния отдельных эффектов, в значительной степени, объясняется существенной разницей области устойчивости системы ожидаемой на основе численных расчетов и экспериментальных данных. В экспериментах область устойчивости получается существенно меньше по сравнению с ожидаемой. Разделить переменные при нелинейном воздействии электромагнитной силы от тока управления не удалось. В связи с этим была предпринята попытка использовать преобразования Лапласа для упрощения разделения переменных. Такой прием, видимо, допустим, поскольку в данном конкретном случае на начальном этапе преобразования исходной системы силовое воздействие электромагнитов возможно не конкретизировать. Система при этом становится формально линейной.

На начальном этапе исследования рассматривалась система без учета внутреннего трения ротора. На этом этапе удалось доказать в линейном приближении устойчивость системы на низких частотах (до первой изгибной гармоники) и при частотах выше собственной резонансной. Было сделано предположение, что прохождение резонансной частоты возможно только при учете внутреннего трения аналогично результатам, полученным в работе [5] в разделе «Вынужденные колебания в линейной системе с одной степенью свободы». В указанной работе рассматривалась внешняя периодическая сила в отличие от решаемой задачи замкнутой системы удержания ротора в состоянии равновесия. После изменения математической модели была получена система трех дифференциальных уравнений второго порядка, для которой была получена знакоопределенная функция Ляпунова и производная от нее (нужного знака) в линейном и нелинейном приближении.

Следующим шагом было изменение физической и математической модели объекта, учитывающие возможность возникновения второй изгибной частоты. Для этого случая (система восьмого порядка) также была доказана асимптотическая устойчивость рассматриваемой системы. Анализ структуры полученных уравнений показал, что изменения касаются только уравнений, описывающих гибкость ротора, что позволило предположить, что учет высших гармоник приведет только к усложнению выражений функции Ляпунова и производной от нее. Таким образом, можно считать доказанным, что гибкость ротора не влияет на устойчивость рассматриваемой системы. Полученный результат подтвержден и физическими экспериментами на стендах «ОКБМ Африкантов».

Детальное изложение и математические выкладки приведены в приложении.

### **Список литературы**

1. Востоков В.С., Горбунов В.С. и др. Обоснование устойчивости полного электромагнитного подвеса. //Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2, с. 28-32.
2. Востоков В.С., Лебедева С.В. Об устойчивости системы электромагнитного подвеса ротора //Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 2, С. 3-7.
3. Митенков Ф.М., Кодочигов Н.Г., Востоков В.С., Горбунов В.С., Друмов В.В., Сабаев Е.Ф., Ходыкин А.В. Комплекс расчетно-методических и экспериментальных исследований движения ротора на электромагнитном подвесе// Атомная Энергия. Том 99, Вып. 1, июль 2005г. С. 26-33.
4. 4. Kodochigov, N.G. Comparison of stability of centralized and decentralized nonlinear control systems for electromagnetic suspension. / N.G. Kodochigov, V.S. Vostokov, V.S. Gorbunov, S.V. Lebedeva, I.V. Drumov //Proceedings of IFToMM2007. – [7]p.
5. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. // М. :, Высш. шк., 2001. – 395 с.
6. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Механика, том 1. // М.: Наука. 1988. – 216 с.

## Приложение

### 1. Математическая постановка задачи.

Рассмотрим первую гармонику. Ротор представим из двух равных половинок, соединенных упругим шарниром (рис. 1). Электромагнитные подшипники (ЭМП) расположены на концах ротора.

Запишем уравнения энергии системы [6]:

$$T = \frac{A}{2l^2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{A}{2l^2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{m}{8} [(\dot{X}_1 + \dot{X}_2)^2 + (\dot{X}_3 + \dot{X}_2)^2]$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \chi (\theta_1 - \theta_2)^2 = \frac{1}{8l^2} \chi (X_1 - 2X_2 + X_3)^2$$

где  $X_1, X_2, X_3$  – координаты ротора (верхнего, среднего и нижнего участков ротора соответственно индексам),  $A$  – момент инерции,  $m$  – масса ротора,  $l$  – длина участка ротора,  $\chi$  – коэффициент жесткости.

Координаты центров масс и углов отклонения:

$$X_{цм1} = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad X_{цм2} = \frac{X_2 + X_3}{2}, \quad \theta_1 = \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad \theta_2 = \frac{X_2 - X_3}{2},$$

$$L = T - \Pi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} - \frac{\partial L}{\partial X_i} = F_i, \quad \text{где } F_i \text{ – сила.}$$

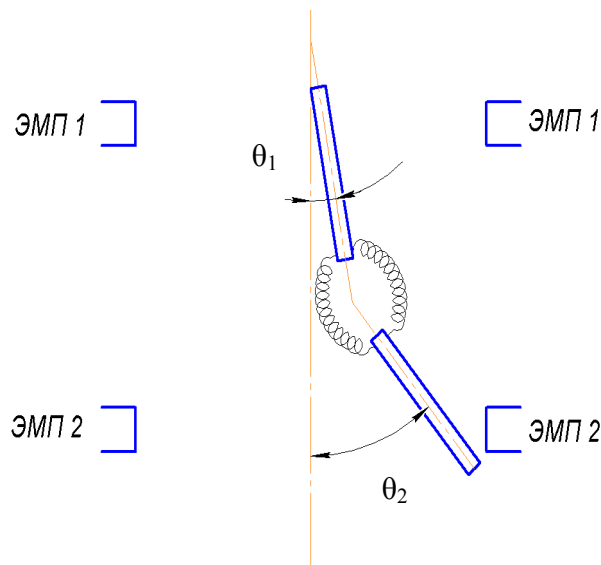


Рис. 1. Расчетная схема 1

Для  $X_1$ :

$$\frac{A}{4l^2} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + \frac{m}{4} (\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) + \frac{\chi}{4l^2} (X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_1$$

Для  $X_2$ :

$$-\frac{A}{4l^2} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + \frac{A}{4l^2} (\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) + \frac{m}{4} (\ddot{X}_1 + 2\ddot{X}_2 + \ddot{X}_3) - 2\frac{\chi}{4l^2} (X_1 - 2X_2 + X_3) = 0$$

Для  $X_3$ :

$$-\frac{A}{4l^2} (\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) + \frac{m}{4} (\ddot{X}_2 + \ddot{X}_3) + \frac{\chi}{4l^2} (X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_3,$$

где в правой части обозначены электромагнитные силы, действующие на ротор.

Систему уравнений можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_2 + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) &= -F_1 \\ \left(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_3 + \left(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_2 + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) &= -F_2 \\ 2\left(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_2 + \left(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}\right)\ddot{X}_3 - \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) &= 0 \end{aligned}$$

Обозначив  $\left(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2}\right) = a$ ,  $\left(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}\right) = b$ ,  $\frac{\chi}{4l^2} = c$ , систему можно представить в виде:

$$\begin{aligned} aX_1p^2 + bX_2p^2 + c(-2X_2 + X_3) + cX_1 + \bar{F}_1 &= 0 \\ aX_3p^2 + bX_2p^2 + c(-2X_2 + X_1) + cX_3 + \bar{F}_3 &= 0 \\ 2aX_2p^2 + bX_1p^2 + bX_3p^2 - c(X_1 - 2X_2 + X_3) &= 0 \end{aligned}$$

где  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_3$  изображения исходных функций.

Из последнего уравнения выразим  $X_2$ :

$$X_2 = -\frac{(bp^2 - c)X_1 + (bp^2 - c)X_3}{(2ap^2 + 2c)} = \frac{(bp^2 - c)(X_1 + X_3)}{(2ap^2 + 2c)}.$$

Подставляя полученное выражение в первое и второе уравнения, получим:

$$\begin{aligned} X_1[(ap^2 + c) - (bp^2 - 2c)\frac{(bp^2 - c)(X_1 + X_3)}{(2ap^2 + 2c)}] + cX_3 + \bar{F}_1 &= \\ = X_1[(ap^2 + c) - (bp^2 - 2c)\frac{(bp^2 - c)}{(2ap^2 + 2c)}] + X_3(c - (bp^2 - 2c)\frac{(bp^2 - c)}{(2ap^2 + 2c)}) &= -\bar{F}_1, \\ X_3[ap^2 + c - (bp^2 - 2c)\frac{(bp^2 - c)}{(2ap^2 + 2c)}] + X_1(c - (bp^2 - 2c)\frac{(bp^2 - c)}{(2ap^2 + 2c)}) &= -\bar{F}_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим дробь  $\frac{(bp^2 - c)}{(2ap^2 + 2c)} = \frac{(bp^2 - c)}{2(ap^2 + c)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2c}{(ap^2 + c)}\right)$ . (1)

Нетрудно видеть, что при изменении  $p$  от нуля до бесконечности выражение (1) меняется от  $-0,5$  до  $+0,5$  за исключением областей значений частот  $P = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ , в которых знаменатель превращается в нуль, что требует отдельного обсуждения. Кроме того, увеличение частоты больше указанной границы изменяет знак дроби с минуса на плюс. Рассмотрим влияние гибкости ротора на устойчивость системы за исключением указанных областей, т. е. при частотах от нуля до некоторой величины, меньшей  $P = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

С учетом сделанной оговорки, а также подстановки  $X = \frac{I}{K_p + K_d p}$  уравнения могут быть

записаны в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_1(a \pm 0,5b) + cKI_1 \mp \ddot{I}_3 0,5b + cKI_3 &= -K_p I_1 |I_1| - K_d \dot{I}_1 |I_1| \\ \ddot{I}_3(a \pm 0,5b) + cKI_3 \mp \ddot{I}_1 0,5b + cKI_1 &= -K_p I_3 |I_3| - K_d \dot{I}_3 |I_3| \end{aligned}$$

, где  $1 > K > 0$ ,  $I$  – ток управления

ЭМП.

Умножая первое уравнение на  $\dot{I}_1$ , а второе на  $\dot{I}_3$ , получим следующие выражения:

$$\left(\frac{1}{2}\dot{I}_1^2\right)'_t(a \pm 0,5b) + \frac{c}{2}K(I_1^2)'_t \mp \ddot{I}_3 \dot{I}_1 0,5b + cKI_3 \dot{I}_1 = -\frac{1}{3}K_p(I_1^2)'_t |I_1| - K_d \dot{I}_1^2 |I_1|,$$

$$\left(\frac{1}{2}\dot{I}_3^2\right)'_t(a \pm 0,5b) + \frac{c}{2}K(I_3^2)'_t \mp \ddot{I}_1 \dot{I}_3 0,5b + cKI_1 \dot{I}_3 = -\frac{1}{3}K_p(I_3^2)'_t |I_3| - K_d \dot{I}_3^2 |I_3|.$$

Отсюда можно выделить функцию Ляпунова и производную от нее:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2}\dot{I}_1^2(a \pm 0,5b) + \frac{c}{2}KI_1^2 \mp \dot{I}_3 \dot{I}_1 0,5b + cKI_3 I_1 + \frac{1}{3}K_p I_1^2 |I_1| + \frac{1}{2}\dot{I}_3^2(a \pm 0,5b) + \frac{c}{2}KI_3^2 + \frac{1}{3}K_p I_3^2 |I_3| = \\ &= \left[ \frac{c}{2}K(I_1 + I_3)^2 + \frac{1}{3}K_p I_1^2 |I_1| + \frac{1}{3}K_p I_3^2 |I_3| \right] + \left[ \frac{1}{2}\dot{I}_1^2(a \pm 0,5b) + \frac{1}{2}\dot{I}_3^2(a \pm 0,5b) \mp \dot{I}_3 \dot{I}_1 0,5b \right], \end{aligned}$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -K_d \dot{I}_1^2 |I_1| - K_d \dot{I}_3^2 |I_3|.$$

Запишем уравнения энергии системы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{2l^2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{A}{2l^2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{m}{8}[(\dot{X}_1 + \dot{X}_2)^2 + (\dot{X}_3 + \dot{X}_2)^2] = \frac{A}{8l^2}[(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)^2 + (\dot{X}_2 - \dot{X}_3)^2] + \\ &+ \frac{m}{8}[(\dot{X}_1 + \dot{X}_2)^2 + (\dot{X}_3 + \dot{X}_2)^2], \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\chi(\theta_1 - \theta_2)^2 = \frac{1}{8l^2}\chi(X_1 - 2X_2 + X_3)^2,$$

где  $X_1, X_2, X_3$  – координаты ротора (верхнего, среднего и нижнего участков ротора соответственно индексам);  $A$  – момент инерции;  $m$  – масса ротора;  $l$  – длина участка ротора;

$\theta_1 = \frac{X_1 - X_2}{2}$ ,  $\theta_2 = \frac{X_2 - X_3}{2}$ ;  $\chi$  – коэффициент жесткости.

Координаты центров масс:

$$X_{цм1} = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad X_{цм2} = \frac{X_2 + X_3}{2}.$$

$$L = T - \Pi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} - \frac{\partial L}{\partial X_i} = F_i, \quad \text{где } F_i \text{ – внешние силы.}$$

Для  $X_1$ :

$$\frac{A}{4l^2}(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + \frac{m}{4}(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_1.$$

Для  $X_2$ :

$$-\frac{A}{4l^2}(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + \frac{A}{4l^2}(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) + \frac{m}{4}(\ddot{X}_1 + 2\ddot{X}_2 + \ddot{X}_3) - 2\frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0.$$

Для  $X_3$ :

$$-\frac{A}{4l^2}(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_3) + \frac{m}{4}(\ddot{X}_2 + \ddot{X}_3) + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_3,$$

где в правой части обозначены электромагнитные силы, действующие на ротор.

Систему уравнений можно переписать в виде:

$$\begin{cases} (\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_1 + (\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_2 + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_1 \\ (\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_3 + (\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_2 + \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = -F_3 \\ 2(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_2 + (\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_1 + (\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2})\ddot{X}_3 - \frac{\chi}{4l^2}(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0 \end{cases}$$

Обозначив  $(\frac{m}{4} + \frac{A}{4l^2}) = a$ ,  $(\frac{m}{4} - \frac{A}{4l^2}) = b$ ,  $\frac{\chi}{4l^2} = c$ , систему можно представить в виде:

$$\begin{cases} a\ddot{X}_1 + b\ddot{X}_2 + c(-2X_2 + X_3 + X_1) = -F_1 \\ a\ddot{X}_3 + b\ddot{X}_2 + c(-2X_2 + X_1 + cX_3) = -F_3 \\ 2a\ddot{X}_2 + b\ddot{X}_1 + b\ddot{X}_3 - c(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что применительно к случаю абсолютно жестких опор ( $X_1 = X_3 = 0$ ) остается одно уравнение  $a\ddot{X}_2 + cX_2 = 0$ , решение которого очевидно, система консервативна и хорошо изучена, например [5]. Для учета внутреннего трения ротора при изгибе во все уравнения введем дополнительное слагаемое  $d(-2\dot{X}_2 + \dot{X}_3 + \dot{X}_1)$ , где  $d$  – коэффициент внутреннего трения ротора при изгибе. Дальнейший анализ будем проводить для наиболее распространенного варианта реализации электромагнитного подвеса с использованием токов смещения, когда в обмотки электромагнитов подают ток подмагничивания с целью линеаризации системы в нулевом состоянии равновесия. В этом случае в окрестности состояния равновесия зависимость силы от тока имеет вид  $F = KI_0$ , где  $I = K_p X + K_d \dot{X}$ .

Система примет вид:

$$\begin{cases} a\ddot{X}_1 + b\ddot{X}_2 + c(-2X_2 + X_3 + X_1) + d(-2\dot{X}_2 + \dot{X}_3 + \dot{X}_1) = -KI_0(K_p X_1 + K_d \dot{X}_1) \\ a\ddot{X}_3 + b\ddot{X}_2 + c(-2X_2 + X_1 + X_3) + d(-2\dot{X}_2 + \dot{X}_3 + \dot{X}_1) = -KI_0(K_p X_3 + K_d \dot{X}_3) \\ 2a\ddot{X}_2 + b\ddot{X}_1 + b\ddot{X}_3 - c(X_1 - 2X_2 + X_3) - d(-2\dot{X}_2 + \dot{X}_3 + \dot{X}_1) = 0 \end{cases}$$

## 2. Анализ устойчивости системы

Умножая полученные выражения на  $\dot{X}_1$ ,  $\dot{X}_3$ ,  $\dot{X}_2$  соответственно, получим:

$$a\ddot{X}_1\dot{X}_1 + b\ddot{X}_2\dot{X}_1 + c(-2X_2\dot{X}_1 + X_3\dot{X}_1 + X_1\dot{X}_1) + d(-2\dot{X}_2\dot{X}_1 + \dot{X}_3\dot{X}_1 + \dot{X}_1\dot{X}_1) + K(K_p X_1\dot{X}_1 + K_d \dot{X}_1\dot{X}_1)I_0 = 0$$

$$a\ddot{X}_3\dot{X}_3 + b\ddot{X}_2\dot{X}_3 + c(-2X_2\dot{X}_3 + X_1\dot{X}_3 + X_3\dot{X}_3) + d(-2\dot{X}_2\dot{X}_3 + \dot{X}_3\dot{X}_3 + \dot{X}_1\dot{X}_3) + K(K_p X_3\dot{X}_3 + K_d \dot{X}_3\dot{X}_3)I_0 = 0$$

$$2a\ddot{X}_2\dot{X}_2 + b\ddot{X}_1\dot{X}_2 + b\ddot{X}_3\dot{X}_2 - c(X_1\dot{X}_2 - 2X_2\dot{X}_2 + X_3\dot{X}_2) - d(-2\dot{X}_2\dot{X}_2 + \dot{X}_3\dot{X}_2 + \dot{X}_1\dot{X}_2) = 0$$

Учитывая, что

$$\ddot{X}\dot{X} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2)', \quad X\dot{X} = \frac{1}{2}(X^2)',$$

$$\ddot{X}_i\dot{X}_j + \dot{X}_i\ddot{X}_j = (\dot{X}_i\dot{X}_j)',$$

$$X_i\dot{X}_j + \dot{X}_iX_j = (X_iX_j)'$$

и сложив все три уравнения возможно выделить функцию Ляпунова и производную от нее.

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}a(\dot{X}_1^2 + 2\dot{X}_2^2 + \dot{X}_3^2) + b(\dot{X}_1\dot{X}_2 + \dot{X}_3\dot{X}_2) + c\left(\frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_3^2 + 2X_2^2 - \right. \\ &- 2X_1X_2 - 2X_3X_2) + cX_1X_3 + KI_0K_pX_1^2 + KI_0K_pX_3^2 = \left[ \frac{1}{2}a(\dot{X}_1^2 + 2\dot{X}_2^2 + \right. \\ &+ \dot{X}_3^2) + b(\dot{X}_1\dot{X}_2 + \dot{X}_3\dot{X}_2) \left. \right] + c\left(\frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_3^2 + X_1X_3\right) + \left[ 2cX_2^2 - 2cX_1X_2 - 2cX_3X_2 + \right. \\ &+ KI_0K_pX_1^2 + KI_0K_pX_3^2 \left. \right], \\ \frac{dv}{dt} &= -d(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_3^2 + 2\dot{X}_2^2 - 3\dot{X}_2\dot{X}_3 - 3\dot{X}_2\dot{X}_1 + 2\dot{X}_3\dot{X}_1) - KI_0K_d\dot{X}_1^2 \\ &- KI_0K_d\dot{X}_3^2 = -d(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_3^2 + 2\dot{X}_2\dot{X}_1) - \left[ (KI_0K_d\dot{X}_1^2 + d\dot{X}_2^2 - 3d\dot{X}_2\dot{X}_1) + (KI_0K_d\dot{X}_3^2 - \right. \\ &- 3d\dot{X}_2\dot{X}_3 + d\dot{X}_2^2) \left. \right]. \end{aligned}$$

Функция Ляпунова знакоопределенная, положительная при  $a > b$  (первая и третья квадратные скобки больше нуля, а вторая скобка не отрицательная).

Производная от функции Ляпунова знакоопределенная и отрицательная (первая скобка не отрицательная) при  $K_d > 1$  и  $I > 1$ .

Таким образом, можно считать доказанным асимптотическая устойчивость по производной от координаты. По координате система также устойчива, поскольку  $I = K_pX + K_d\dot{X}$  (если  $X \neq 0$ , то ток управления также не нуль, т.е. существует только тривиальное решение).

Полученный результат справедлив и для случая линеаризации системы методом нелинейных преобразований измеренной координаты в цепи обратной связи системы управления. В этом случае сохраняется коэффициент  $2K_dI_0$  только в виде  $2K_d$ , что не меняет результата в плане устойчивости системы.

Заметим, что для случая нелинейной системы (когда  $F = I|I|$ ) система так же устойчива, только вместо слагаемых  $KI_0K_pX_1^2 + KI_0K_pX_3^2$  в функции Ляпунова войдут  $\frac{1}{3}KK_pX_1^2|X_1| + KK_pX_3^2|X_3|$ , что не изменяет конечного результата.

Рассмотрим устойчивость системы для второй гармоники. Расчетная схема ротора приведена на рисунке 2. Уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} a\ddot{X}_1 + b\ddot{X}_2 + c(X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4) + d(\dot{X}_1 - 2\dot{X}_2 - 2\dot{X}_3 + \dot{X}_4) + KI_0(K_pX_1 + K_d\dot{X}_1) &= 0 \\ a\ddot{X}_4 + b\ddot{X}_3 + c(X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4) + d(\dot{X}_1 - 2\dot{X}_2 - 2\dot{X}_3 + \dot{X}_4) + KI_0(K_pX_4 + K_d\dot{X}_4) &= 0 \\ b\ddot{X}_1 + 2a\ddot{X}_2 + b\ddot{X}_3 - 2c(X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4) - d(\dot{X}_1 - 2\dot{X}_2 - 2\dot{X}_3 + \dot{X}_4) &= 0 \\ 2a\ddot{X}_3 + b\ddot{X}_2 + b\ddot{X}_4 - 2c(X_1 - 2X_2 - 2X_3 + X_4) - d(\dot{X}_1 - 2\dot{X}_2 - 2\dot{X}_3 + \dot{X}_4) &= 0 \end{aligned}$$

Выполнив аналогичные преобразования, получаем функцию Ляпунова и производную от нее:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}a(\dot{X}_1^2 + 2\dot{X}_2^2 + 2\dot{X}_3^2 + \dot{X}_4^2) + b(\dot{X}_1\dot{X}_2 + \dot{X}_3\dot{X}_4 + \dot{X}_2\dot{X}_3) + c\left[\frac{1}{2}(X_1^2 + X_4^2) + 2X_2^2 + \right. \\ &+ 2X_3^2 - 2X_1X_2 - 2X_1X_3 + X_1X_4 - 2X_2X_4 + 4X_2X_3 - 2X_4X_3 \left. \right] + \frac{1}{2}KI_0K_p(X_1^2 + X_4^2) \\ \frac{dv}{dt} &= -d(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_4^2 + 2\dot{X}_1\dot{X}_4) - d(1,5\dot{X}_2^2 + 1,5\dot{X}_3^2 - 4\dot{X}_3\dot{X}_3) - \left(\frac{1}{2}KI_0K_d\dot{X}_1^2 + \frac{d}{4}\dot{X}_2^2 - \right. \\ &- 2d\dot{X}_2\dot{X}_1) - \left(\frac{1}{2}KI_0K_d\dot{X}_1^2 + \frac{d}{4}\dot{X}_3^2 - 2d\dot{X}_2\dot{X}_1\right) - \left(\frac{1}{2}KI_0K_d\dot{X}_4^2 + \frac{d}{4}\dot{X}_3^2 - 2d\dot{X}_2\dot{X}_4\right) \end{aligned}$$



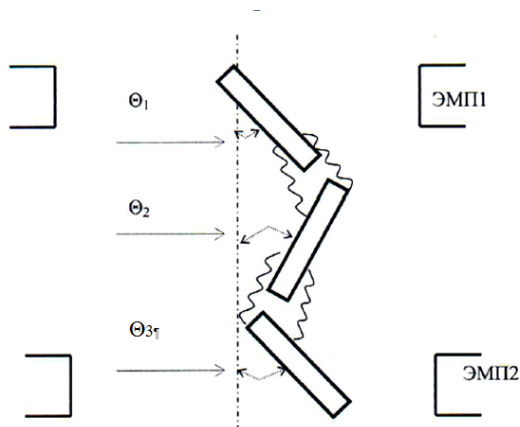


Рис. 2. Расчетная схема 2

Функция Ляпунова положительная, знакоопределенная при  $a > b$  (по обозначению) и при условии  $KI_0K_p > 16c$  и производная от нее также знакопостоянная противоположного знака при  $KI_0K_d > 16d$ . Таким образом можно считать доказанным асимптотическая устойчивость системы и для второй собственной изгибной частоты.

В рамках рассматриваемых расчетных схем можно предположить, что и для более высоких изгибных форм система остается устойчивой, поскольку добавляется дополнительное уравнение гибкости (нового звена) с сохранением общей структуры уравнений. Косвенно это подтверждается численными расчетами гибких роторов методом конечного элемента, который, в сущности, аналогичен расчетной схеме, принятой в данной работе.

## **ТЕНЕВОЙ ФОНОВЫЙ МЕТОД В ПРАКТИКЕ ПОЛИГОННЫХ ИСПЫТАНИЙ**

**С.И. Герасимов<sup>1,2</sup>, В.И. Ерофеев<sup>2</sup>, К.В. Тотышев<sup>1</sup>, Н.А. Трепалов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Российский Федеральный Ядерный Центр-  
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики  
(Саров)

<sup>2</sup>ИПМ РАН (Нижний Новгород)

Обсуждаются перспективы применения теневого фонового метода для регистрации оптических неоднородностей, в частности, ударных волн, в условиях полигонных испытаний.

Ключевые слова: теновый фоновый метод, ударная волна, полигонные испытания.

Теновый фоновый метод (ТФМ) является сравнительно новым методом, но нашедшим широкое применение в различных областях. Одним из главных преимуществ ТФМ по сравнению с остальными оптическими методами диагностики потоков является простота его реализации. Схема экспериментальной установки для ТФМ состоит из некогерентного источника света, фонового экрана, исследуемого потока, видеокамеры или фотоаппарата, компьютера и программного обеспечения. В то же время при оптимальных параметрах установки можно получить высокие разрешение и чувствительность [1]. Кроме того, к достоинствам данного метода можно отнести неограниченное поле обзора и, следовательно, неограниченный размер исследуемого объекта, существенную роль методов обработки изображения, высокую точность и быстроту вычислений.

Области применения теневого фонового метода различны. Например, были произведены исследования турбулентности, возникающей от сверхзвукового самолета [2], исследованы задачи естественной конвекции в жидкости [3]. Результаты, полученные в этих областях, подчеркивают перспективу будущей применимости этой техники во многих областях науки и техники. ТФМ предлагает не только возможность качественных и количественных теневых исследований, но также и имеет потенциал для определения плотности потока, путем интегрирования измеренного градиента поля [1].

Принцип ТФМ заключается в регистрации оптической неоднородности на фоне контрастного экрана и дальнейшей программной обработке позволяющей визуализировать оптические неоднородности. Метод опирается на явление рефракции и современные возможности цифровой обработки изображений.

Результат визуализации оптических неоднородностей с помощью ТФМ зависит от множества факторов, одним из которых является фоновый экран. В качестве фоновых экранов могут быть использованы естественные фоны (лес, трава, постройки) так и искусственно сгенерированные и распечатанные экраны. Основными параметрами фонового экрана являются величина разброса зерен в соответствии с заданным статистическим законом, среднее расстояние между зернами и форма зерен. Форма зерна, как показано в работе [4], не влияет на результат визуализации. В случае если регистрация осуществляется на фоне искусственно сгенерированного экрана, то можно подобрать оптимальные параметры для достижения положительного результата. Для исследования мелких объектов требуется экран с мелким зерном ( $\approx 1-5$  пкс.) и с малым расстоянием между зернами ( $\approx 5-15$  пкс.). В случае крупномасштабных объектов необходимы экраны с крупным зерном ( $\approx 7-11$  пкс.) и с большим расстоянием между зернами ( $\approx 15-25$  пкс.) [4]. Для оценки пригодности естественных фонов нужны специальные методы. Основой ТФМ является выявление смещений элементов фонового экрана в его изображении вызванное прохождением луча света через оптическую неоднородность. Минимальным элементом цифрового изображения является пиксель, следовательно, минимальной регистрируемой величиной смещения луча при ТФМ является пиксель. Оценку пригодности фонового экрана можно произвести путем искусственного смещения всех

элементов экрана и последующей программной обработкой полученных изображений с применением алгоритмов ТФМ визуализации. Области фонового экрана, на которых возможна визуализация оптических неоднородностей, после данной обработки являются светлыми, а те области, где визуализация не возможна будут черного цвета.

На рисунке 1 представлен один из кадров видеорегистрации процесса выстрела из пороховой баллистической установки. Видеорегистрация проводилась на фоне лесного массива, предварительно была произведена оценка пригодности данного фона для ТФМ. Результат оценки представлен на рисунке 2. Оценка показывает, что при заданных параметрах съемки визуализация возможна на большей части кадра за исключением областей с монотонными значениями яркости (небо, темные области между стволами деревьев). На рисунке 3 приведен результат визуализации УВ от выстрела из пороховой баллистической установки. На кадрах отчетливо видно распространение сферической УВ, сформированной продуктами артиллерийского выстрела. Кроме того, удалось визуализировать головную УВ образованную от полета объекта исследований со сверхзвуковой скоростью.

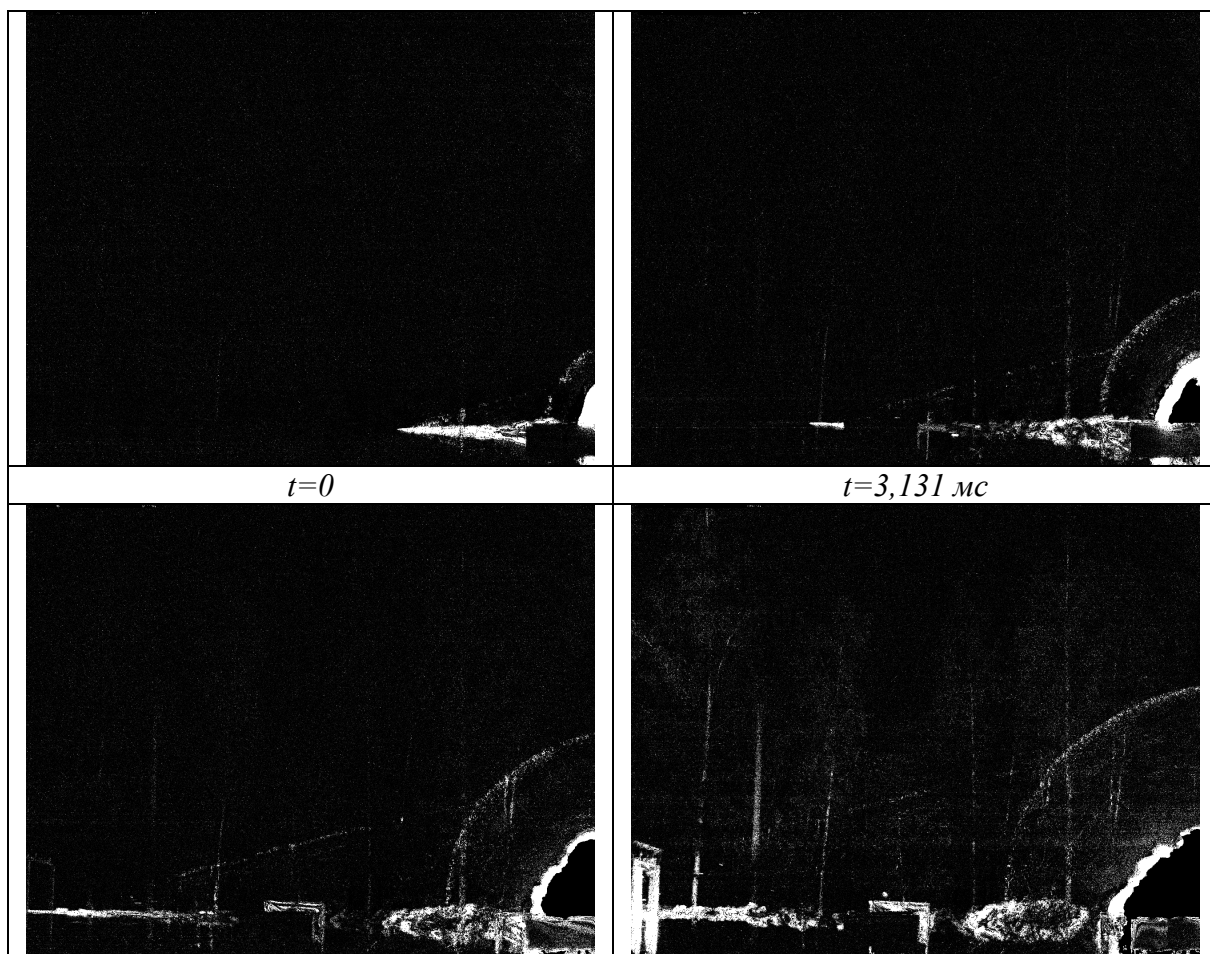
Специфика полигонных испытаний предъявляет жесткие требования к измерительному оборудованию, в частности по критерию «живучести» и зоне регистрации. Оптическая регистрация позволяет выбрать интересующую зону регистрации и при этом расположить оборудование на безопасном расстоянии. Применение ТФМ позволяет визуализировать крупномасштабные оптические неоднородности, на рисунке 4 приведен один из таких примеров.



Рис. 1. Выстрел из пороховой баллистической установки ( $t=4,695$  мс)



Рис. 2. Результат оценки фонового экрана





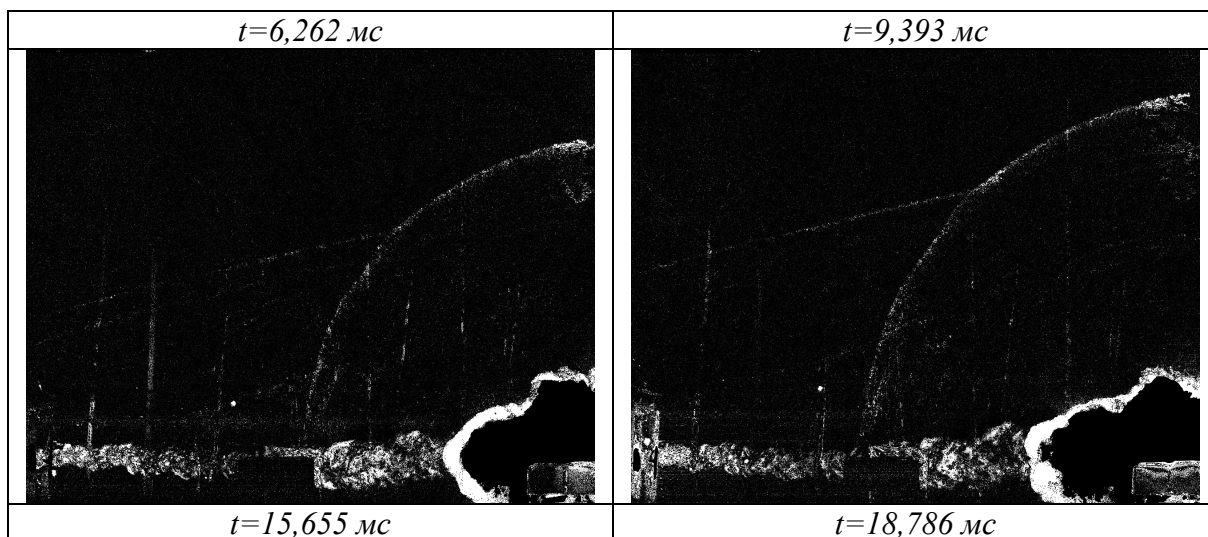
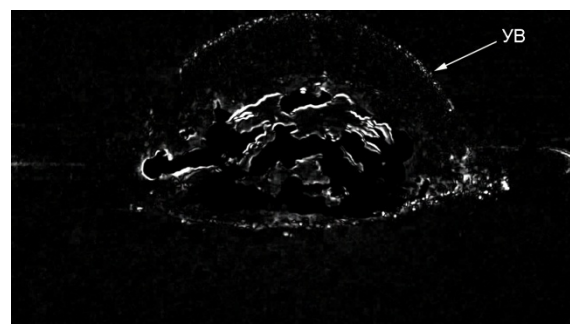
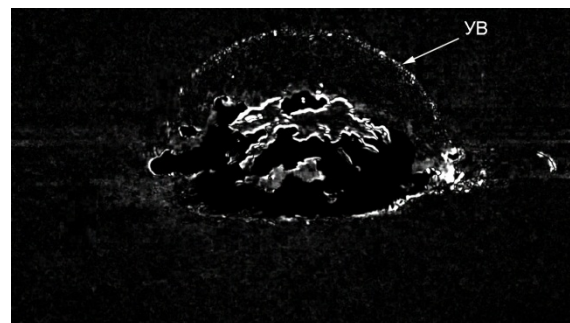
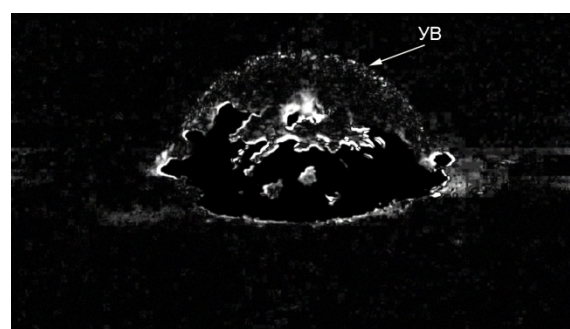
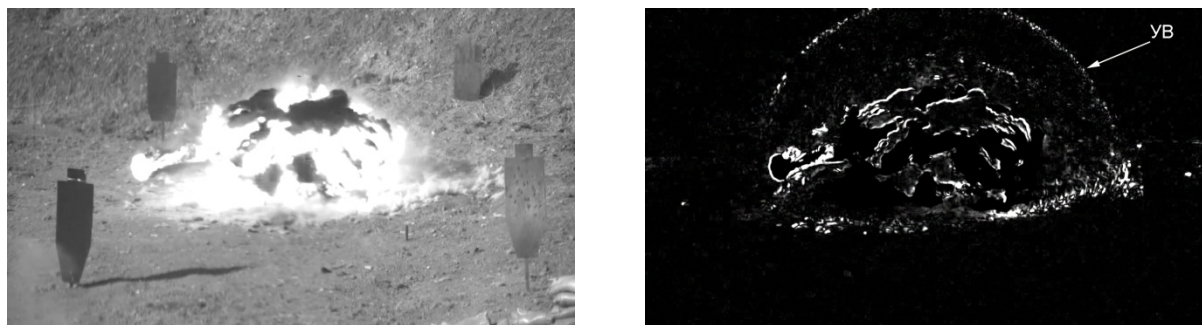


Рис. 3. Результат визуализации УВ





а)

б)

Рис. 4. Кинограмма взрыва ОЗМ-72 (а) [5] и результат визуализации УВ (б)

ТФМ позволяет получить не только качественную, но и количественную информацию. В случае положительной визуализации УВ от сферического взрыва и зная расположение элементов схемы оптической регистрации возможно получение количественной информации о параметрах УВ. На рисунках 5 – 6 приведен один из таких примеров. Проводилась отработка ТФМ для регистрации УВ с малыми значениями избыточного давления во фронте. Источником УВ при проведении опыта являлся светочувствительный состав ВС-2 [6]. Взрыв состава ВС-2 способен создать УВ с избыточным давлением порядка 2,7 кПа (0,027 атм.) на расстоянии 0,54 м. После обработки полученной информации визуализирована УВ, на рисунке 6 приведены результаты обработки. Используя результаты визуализации найдены экспериментальные значения перемещения фронта УВ от времени  $R(t)$ , а так же аппроксимирующая зависимость (использовалось уравнение предложенное Dewey, 1971). Используя полученную зависимость  $R(t)$  была найдена зависимость скорости фронта ВУВ от времени  $V(t)$ , а так же произведена оценка избыточного давления на фронте ВУВ  $\Delta P(t)$ . Полученные зависимости приведены на рисунке 7.

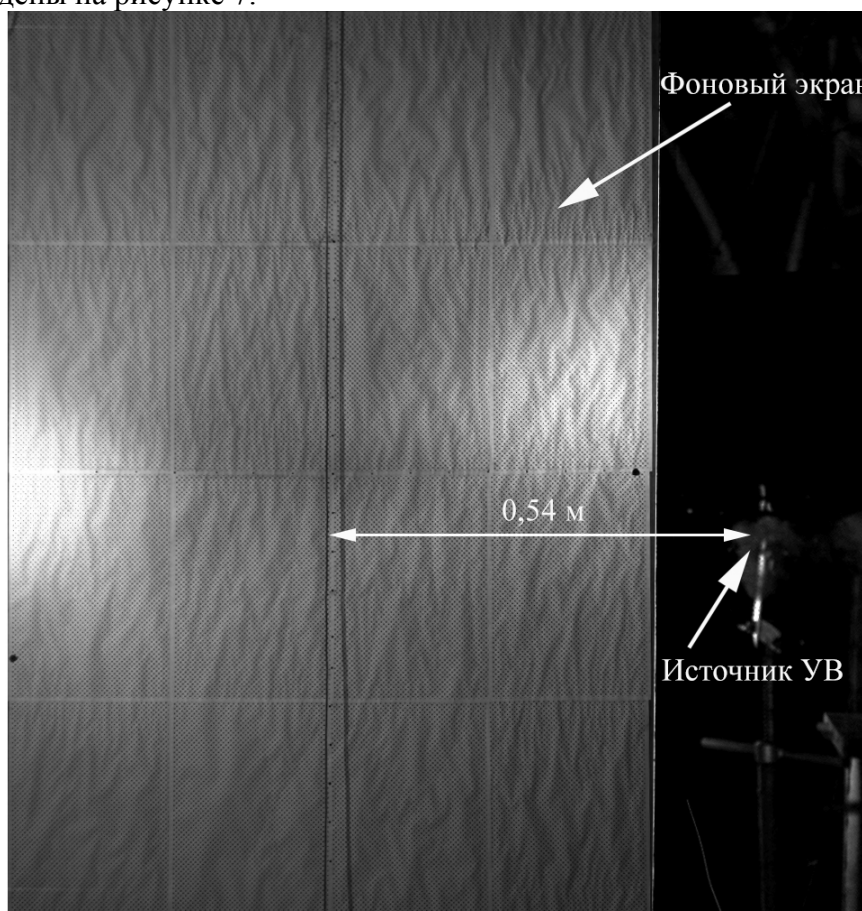


Рис. 5. Пример кадра видеорегистрации в момент времени 1,429 мс после подрыва



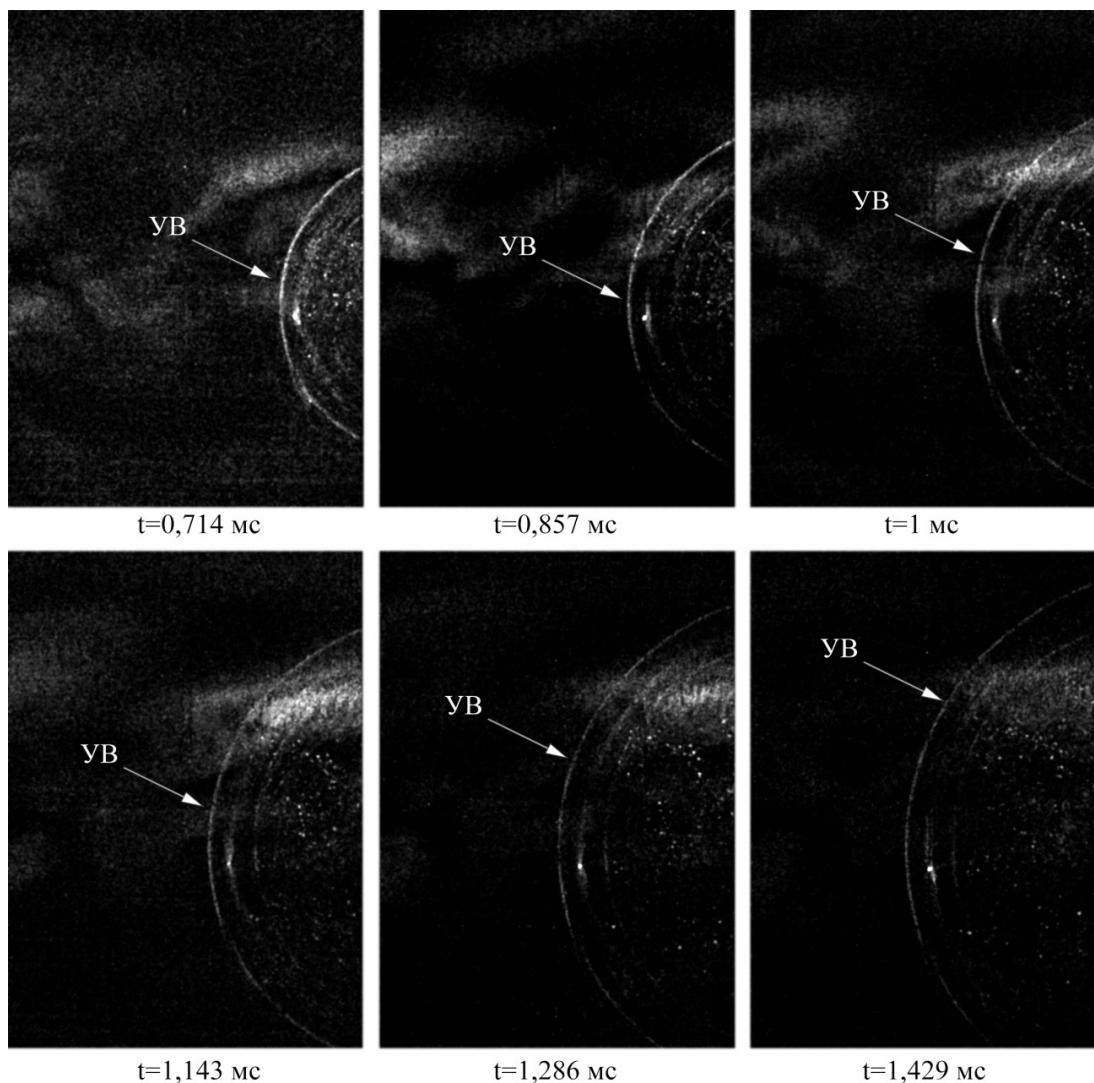


Рис. 6. Результат визуализации УВ

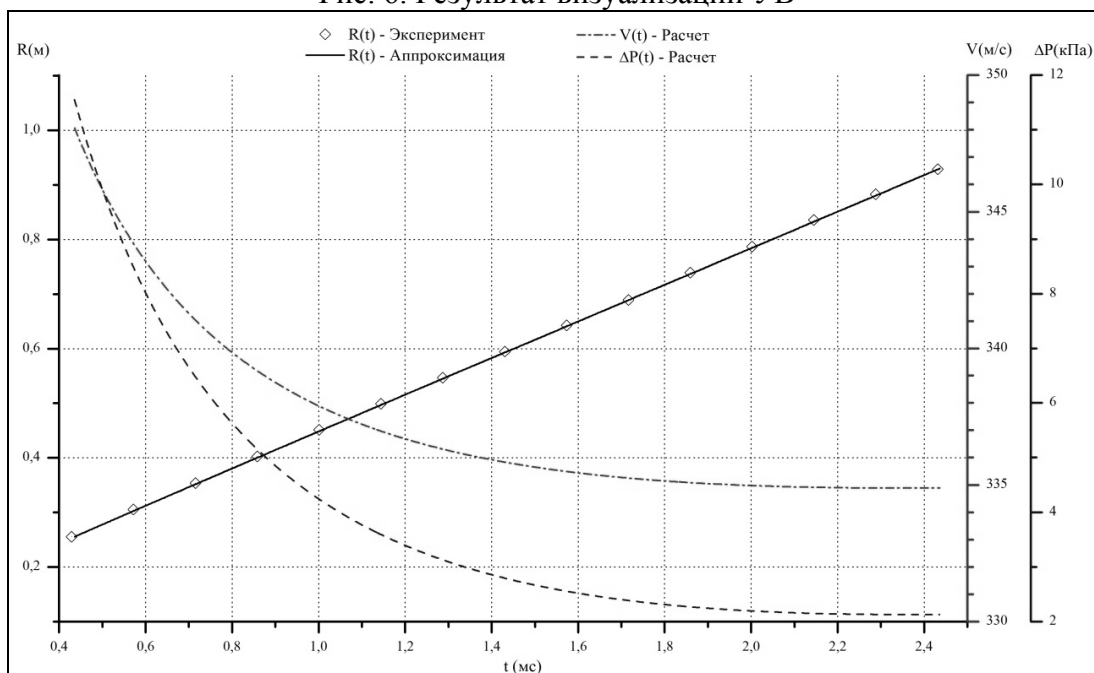


Рис. 7. Зависимости параметров УВ

Приведенные данные показывают, что ТФМ применим для регистрации оптических неоднородностей, УВ в частности, в условиях полигонных испытаний. Результаты опытов показывают, что ТФМ пригоден для регистрации «слабых» ВУВ ( $\Delta P > 2$  кПа). При проведении опытов по обработке ТФМ для регистрации УВ проводились измерения и «обычными» датчиками давления. Результаты, полученные с помощью датчиков давления коррелируются с приведенными результатами.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01637)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Meier G.E.A. Computerized background-oriented schlieren // Experiments in Fluids. 33. 2002. P. 181-187.
2. Richard H., Raffel M., Rein M. and etc. Demonstration of the applicability of a Background Oriented Schlicren (BOS) method // Proc. of the 10th int. symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics, Lisbon. Springer. Berlin Heidelberg New York. 2000.
3. Попова К.М., Толкачев А.В., Скорякова Н.М. Применение фонового теневого метода для исследования естественной конвекции. Труды VII МНТК «Оптические методы исследования потоков». М.: Изд-во МЭИ, 2003. С 126-129
4. Удалов А.В. Аппаратно-программный комплекс теневого фонового метода для натурных исследований // Диссертация канд. тех. наук, Москва, 2010.
5. Взрывы разных типов мин в замедленной съемке [Электронный ресурс]: YouTube / Crash Zone. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=5f1Q9zm88Jc&feature=player\\_detailpage](https://www.youtube.com/watch?v=5f1Q9zm88Jc&feature=player_detailpage).
6. Пат. 2309139 РФ, МПК С06В 43/00. Иницирующий взрывчатый состав / М.А. Илюшин, И.А. Угрюмов, В.Ю. Долматов, М.В. Веретенникова // Изобретения. Полезные модели. 2007. № 30.



## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ УДАРА

С.П. Горбиков

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
кафедра математики

603950 Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: [gorby50@yandex.ru](mailto:gorby50@yandex.ru)

В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа [1].

Ключевые слова: ударные взаимодействия, локальная особенность, бесконечноударные движения

В теории кусочно-гладких динамических систем известны движения, при которых за конечный промежуток времени траектория бесчисленное число раз попадает на многообразие разрыва. Для динамических систем с ударными взаимодействиями, своеобразном классе импульсных систем, это - *бесконечноударные движения* [2, с. 291; 3, 4], т. е. движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечный промежуток времени. Для систем управления движением (кусочно-гладких динамических систем с непрерывным изменением переменных) это - режимы с учащающимися переключениями. В общей теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием подобные движения получили название "явление биения". В динамических системах с ударными взаимодействиями такие бесконечноударные движения допускают в ряде случаев [1] описание с помощью гладких дифференциальных уравнений.

В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа [1], т.е. такой точки на гиперповерхности  $S = 0$  удара, в которой первая и вторая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от уравнения этой гиперповерхности ( $S = 0$ ) равна нулю, а третья производная - отрицательна (движение системы происходит в области  $S \geq 0$ ).

**1. Рассматриваемый класс динамических систем.** Принимается следующий общий вид динамической системы с ударными взаимодействиями [13]. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности  $x_n$  по достижении которой фазовые переменные  $x_1, \dots, x_{n-1}$  меняются скачкообразно (переменная  $x_n$  остается равной нулю) согласно формулам

$$\begin{aligned} x_1^+ &= H_1(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu), \\ x_i^+ &= H_i(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu) = x_i^- + x_1^- H_{i1}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu), \quad i = \overline{2, n-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

а при  $x_n \geq 0$  изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям

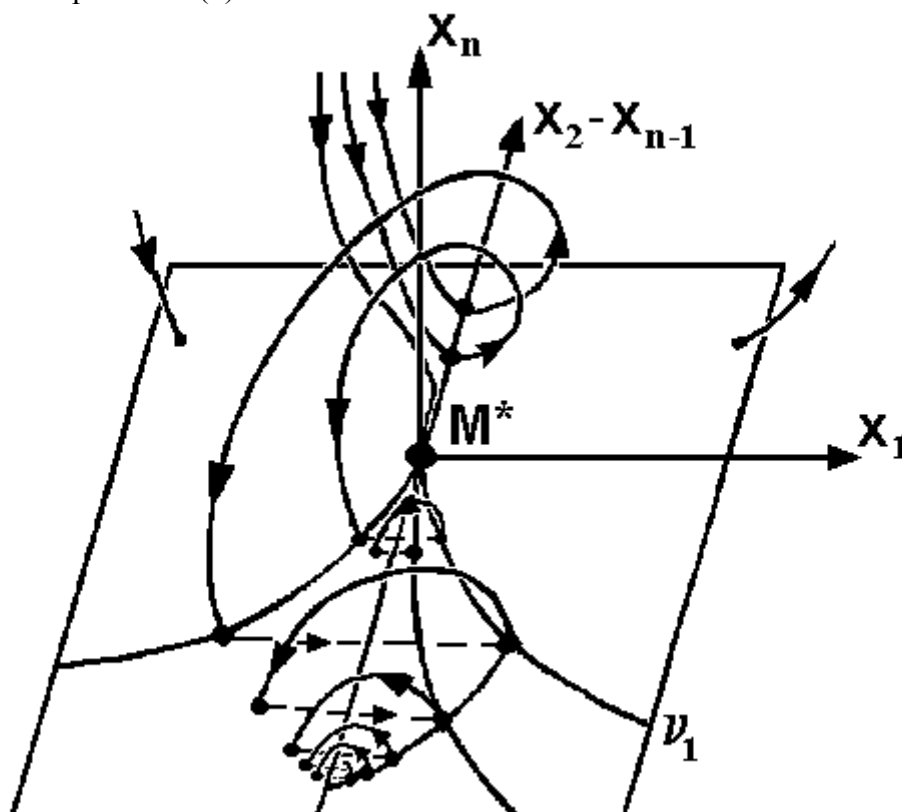
$$\begin{aligned} dx_i / dt &= \dot{x}_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, \mu), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ dx_n / dt &= \dot{x}_n = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n, \mu) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n, \mu). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $x_1^-, \dots, x_{n-1}^-$  и  $x_1^+, \dots, x_{n-1}^+$  - соответственно доударные и послеударные значения переменных;  $\mu$  - параметр системы;  $t$  - время; все указанные функции являются достаточно гладкими. Фазовое пространство системы составляют точки  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0$ .

Предполагается, что в системе существуют локальные особенности, определяемые следующими условиями:  $x_n = 0$ ,  $\dot{x}_n = 0$ ,  $\ddot{x}_n = 0$ ,  $\dddot{x}_n \leq 0$  (локальные особенности шестого типа).

Для описания поведения фазовых траекторий в малой окрестности указанной локальных особенностей вводится точечное отображение  $T = T_2 T_1$  части многообразия  $x_n = 0, x_n \geq 0$  в себя. Отображение  $T_1$  переводит точку  $(x_1 \geq 0, x_2, \dots, x_n = 0)$  в точку  $(x_1 \leq 0, x_2, \dots, x_n = 0)$  по траекториям системы (2);  $T_2$  – отображение, задаваемое формулами (1) ударных взаимодействий.

Предполагается, что точка  $M^* = (0, 0, \dots, 0)$  как раз и есть локальная особенность 6 типа. Поведение фазовых траекторий системы (1), (2) в окрестности точки  $M^*$  показано на рисунке, где сплошными линиями обозначены траектории системы (2), а штриховыми соединены образы точек при отображении (1).



**2. Особенности качественной структуры фазового пространства.** Далее делается замены координат

$$x_1 = y_1 y_2^2, x_i = y_i, i = 2, \dots, n-1.$$

Тогда отображение  $T$  имеет вид

$$\bar{y}_i = q_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), i = 2, \dots, n-1.$$

Для описания бесконечно ударных движений, из которых состоят движения в окрестности точки  $M^*$ , применима следующая теорема.

**Т е о р е м а.** *Существуют и единственны такие функции  $f_i$  и такая малая окрестность точки  $M^*$  (при  $x_n \geq 0$ ), что для любой точки  $M$  из этой окрестности справедливо следующее:*

*все точки  $M_j = T_j(M), j = 1, 2, 3, \dots$ , лежат на проходящей через  $M$  интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (3)*

$$dy_i / dy_1 = f_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), i = 2, \dots, n-1,$$

где  $f_i = y_2 \bar{f}_i$ .

Для нахождения  $f_i, i = 2, \dots, n - 1$ , составляются функциональные уравнения точно также, как и при доказательстве теоремы в [5]. В данном случае соответствующие функциональные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_i}{\partial y_j} f_j = f_i(M_1) \left[ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_1}{\partial y_j} f_j \right], i = 2, \dots, n - 1, \quad (3)$$

где  $M_1 = T(M)$ .

Идею о дифференциальных уравнениях для описания бесконечноударных движений высказал во время работы над статьёй [5] Юрий Исаакович Неймарк. Я долго сопротивлялся. Тогда он предложил и вид функциональных уравнений (3), для нахождения функций  $f_i$ , что окончательно сломало моё сопротивление. За это, и далеко не только за это, я Юрию Исааковичу благодарен. Его идеи всегда благотворны и имеют далеко идущее будущее.

### **Список литературы**

1. Горбиков С.П. Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. N 3. С. 23 – 26.
2. Мак-Миллан В.А. Динамика твердого тела. М., 1951.
3. Фейгин М.И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями // Прикл. математика и механика. 1967. Вып. 3. С. 533 - 536.
4. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М., 1985
5. Горбиков С.П., Неймарк Ю.И. Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями// Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. Горький, 1981. С. 59 - 64.

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ ПРИ ДИАГНОСТИКЕ ШНЕКОВЫХ ВАЛОВ**

**А.Б. Гордеев**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
кафедра Информационных Систем и Технологий  
603000 Нижний Новгород, Ильинская, 65, корп. 2, e-mail: g0rd.ab@mail.ru

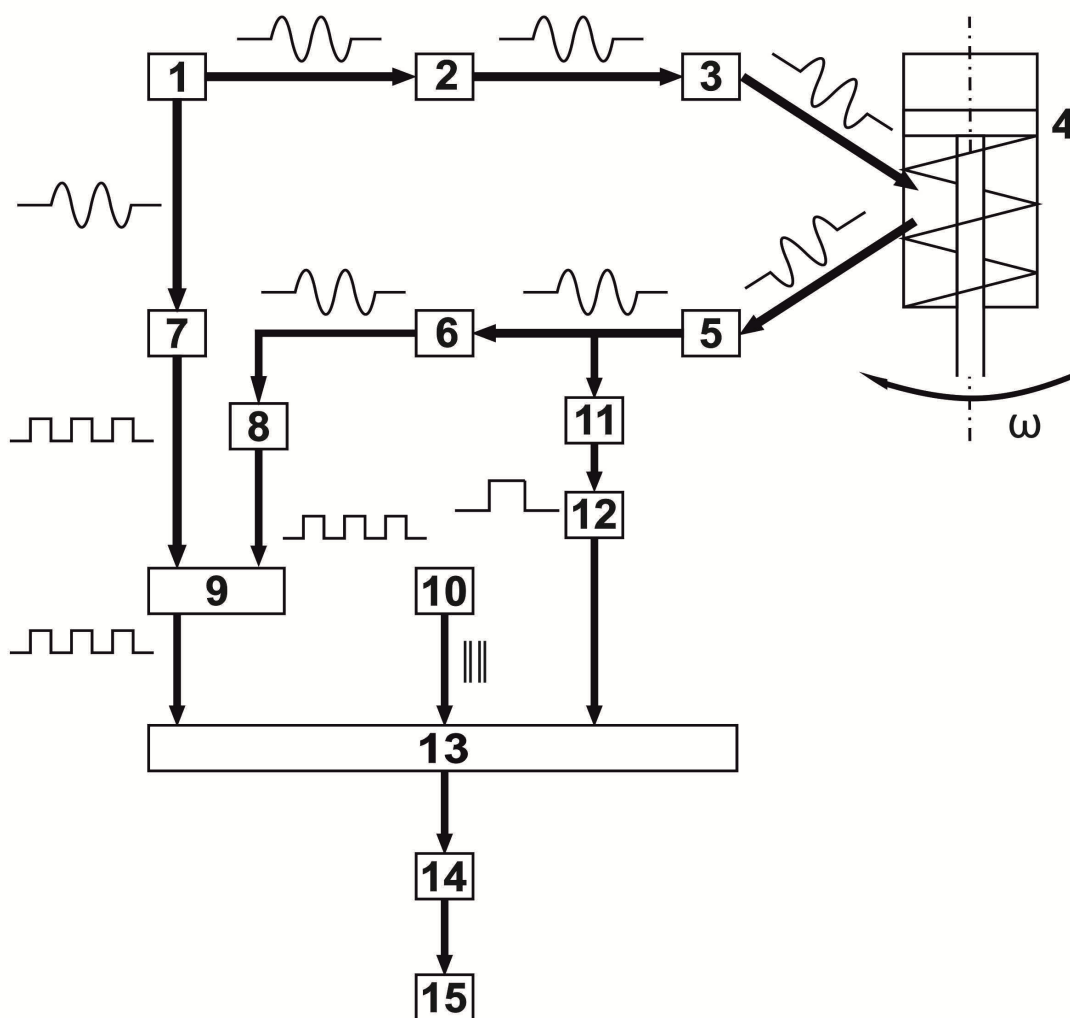
Рассматривается проблема диагностики вращающихся валов шнековой конфигурации. Изложены результаты исследований спектров отраженных зондирующих акустических сигналов при возникновении в поле их действия дополнительных объектов. Показана возможность использования нелинейных преобразователей сигнала для измерений угловых скоростей шнековых валов.

*Ключевые слова:* акустический вибропреобразователь, ультразвуковой фазовый преобразователь, генератор, анализатор спектра, частота, модуляция, девиация.

Проблема измерения и диагностики шнековых механизмов бесконтактными методами всегда была актуальной в станкостроении и буровых установках. Ряд работ данному направлению выявил, что наиболее перспективными методами измерения угловых скоростей являются бесконтактные акустические, так как они не требуют прикрепления к объекту исследования контактных вибропреобразователей [1,3,4]. Однако здесь возникают дополнительные задачи метрологического характера. Вращающийся вал в поле действия зондирующих сигналов всегда создает периодические помехи, частота появления которых является функцией угловой скорости [2]. Поэтому для обеспечения синхронизации измерений на объекте исследований необходимо устанавливать кодовый диск, что не всегда возможно, особенно в буровых установках [4].

На чертеже представлена структурная схема предлагаемого ультразвукового фазового преобразователя угла поворота вала, содержащего последовательно соединенные задающий генератор 1, усилитель мощности 2, излучающий преобразователь 3, исследуемый объект 4, в данном случае вал со шнеком, приемный преобразователь 5, согласующий усилитель 6, формирователи меандров 7 и 8, входы которых соединены с выходами задающего генератора 1 и согласующего усилителя 6 соответственно, а выходы формирователей соединены со входами первого блока умножения 9, выход которого соединен с первым входом второго блока умножения 13, второй вход которого соединен с выходом генератора тактовых импульсов 10, а третий вход через последовательно соединенные формирователь 12 и анализатор спектра 11 соединен с выходом приемного преобразователя 5, формирователь 12 имеет выходной сигнал в виде прямоугольных импульсов, которые поступают на третий вход второго блока умножения 13, а выход второго блока умножения 13 через блок обработки данных 14 соединен с цифроаналоговым преобразователем 15.

Ультразвуковой фазовый преобразователь угла поворота вала работает следующим образом.



Сигнал генератора 1 ультразвуковой частоты 100 – 300 кГц подается на усилитель мощности 2, а затем на излучающий преобразователь 3. Меняя частоту задающего генератора 1 добиваются наиболее эффективного излучения ультразвукового сигнала преобразователем 3 путем его настройки на частоту электромагнитного резонанса. При медленном вращении ротора 4 фаза отраженного ультразвукового сигнала меняется на некоторую величину, которая зависит от угла поворота вала. Модулированный по фазе ультразвуковой сигнал поступает на приемный преобразователь 5, настроенный на частоту механического резонанса. Преобразователь 5 преобразует сигнал акустической природы в сигнал электромагнитный со всеми индексами частотной и фазовой модуляции. Затем электромагнитный сигнал через согласующий усилитель 6 поступает на формирователь меандра 8, где из синусоидального преобразуется в последовательность однополярных прямоугольных импульсов той же частоты. На формирователь 7 поступает опорный сигнал с выхода задающего генератора 1 и на его выходе также приобретает форму меандра. Выходной сигнал формирователя 7 имеющего вид меандра, отличается от выходного сигнала формирователя 8 только тем, что может иметь некоторое рассогласование по фазе и частоте. Изменение фазы линейно связано с изменением расстояния отражающей поверхности вала до излучающего и приемного преобразователей, а

изменение частоты характеризует скорость вращения вала. В данном случае фаза является информативным параметром. Оба сигнала прямоугольной формы поступают на входы первого блока 9 умножения, на выходе которого формируется последовательность прямоугольных импульсов различной длительности. Длительность импульсов характеризует изменение фазы и, следовательно, расстояния до исследуемого объекта. Эта последовательность прямоугольных импульсов поступает на первый вход второго блока 13 умножения, на второй вход которого поступают тактовые импульсы высокой, порядка 1 ГГц, частоты с генератора 10 тактовых импульсов. Меняющееся число тактовых импульсов в выходном сигнале блока 13 соответствует изменению фазы между отраженным и опорным сигналами. На третий вход блока 13 поступает сигнал формирователя 12, имеющего вид меандра. На вход формирователя 12 поступает сигнал с выхода анализатора 11 спектра отраженных от поверхности шнека акустических сигналов. Если вал шнека обладает эксцентриситетом, который является основной причиной вибрации, то при повороте вала на некоторый даже небольшой в несколько угловых градусов угол, фаза отраженного ультразвукового сигнала изменится относительно опорного, что зарегистрирует фазовый детектор 4. При дальнейшем вращении вала 2 ребро шнека достигает поля действия зондирующего ультразвукового луча. При этом в спектре отраженного сигнала появляются кратные частоте вращения вала гармоники, амплитуда основной гармоники снижается, что отражается анализатором спектра. При этом выходной сигнал анализатора спектра, поступая одновременно и в блок обработки данных (6) и на управляющий вход фазового детектора переводит его в режим работы частотного детектора. Измерения виброперемещений шнека происходили синхронно с частотой вращения вала. После этого действует второй режим работы ультразвукового фазового вибропреобразователя.

Нелинейный режим работы наступает тогда, когда пятно контакта зондирующего луча попадает в область шнека, и полем действия луча является внешняя поверхность ребра шнека. Это явление эквивалентно движению отражающей поверхности навстречу падающему лучу. Поэтому частота отраженного сигнала будет превышать частоту зондирующего луча. Так, например, при частоте вращения вала 10 Гц, высоте ребра шнека  $10^{-2}$  м и расстоянии между ребрами шнека по одной образующей  $10^{-1}$  м эквивалентная скорость движения отражающей поверхности будет одного порядка со скоростью ультразвука в воздухе.

В этом случае за счет двойного эффекта Доплера частота отраженного сигнала:

$$\dot{g} = \omega_1 = \omega_0 \frac{1-l(\dot{t})/c}{1+l(\dot{t})/c}$$

где:  $\omega_0$  – частота падающей волны,  $c$  – скорость движения фронта зондирующей волны,  $l(t)$  – перемещение исследуемого объекта.

При этом отраженную волну теперь можно представить в виде:

$$f_+(t + x/c) \approx A_0 \sin \left[ \omega_0 \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) \right] \quad (1)$$

где:  $l(t) = L + \Delta(t)$ .

$$f_+ = A_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = A_0 [J_0(m) \cos \omega_0 t + J_1(m) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + J_2(m) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + J_n(m) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t + \dots]] \quad (2)$$

где:  $J_n(m)$  – Бесселева функция первого рода  $n$  – го порядка от аргумента  $m$ ,  $m = \omega_d/\Omega$ , – индекс частотной модуляции,  $\Omega$  частота изменения девиации в данном случае частота виброколебаний вала,  $\omega_d$  – девиация частоты отраженного акустического сигнала.

Таким образом, в спектр отраженного сигнала вклад различных боковых составляющих определяется величиной  $m$ .

Если  $m \ll 1$ , то имеют место приближенные равенства  $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t$ ,  $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$

Это происходит тогда, когда угловая скорость вала незначительна, или зона действия ультразвукового луча не попадает в область ребра шнека (1).

При малой девиации частоты отраженного акустического сигнала  $m \ll 1$  в его спектре присутствует только основная гармоника равная частоте вращения вала. Поэтому выходной сигнал формирователя 12 имеет вид прямоугольного импульса, поступающего на третий вход второй схемы умножения 13. Далее через блок 14 обработки данных сигнал для визуального наблюдения поступает на цифроаналоговый преобразователь 15. При дальнейшем вращении вала 4 пятно контакта ультразвукового луча попадает в область действия ребра шнека. Этот процесс характеризуется прежде всего тем, что снижается уровень отраженного сигнала, так как поле действия падающего луча начинает зондировать поверхность ребра шнека, и возрастает рассеивание отраженного сигнала. Во вторых, возрастает индекс частотной модуляции, который согласно выражению (2) провоцирует появление в спектре отраженного сигнала дополнительных гармоник. В этом случае формирователь 12 прекращает работу, выходной сигнал его принимает вид логического нуля, вторая схема 13 умножения перестает работать и процесс измерения прекращается на время, равное времени прохождения зондирующего ультразвукового луча через область ребра шнека.

При значениях индексов  $m$ , изменяющихся в интервале от 0,5 до 1, приобретает некоторое значение вторая пара боковых частот, ввиду чего ширина спектра должна быть приравнена  $4\Omega$ . Далее, при  $1 \ll m \ll 2$  приходится учитывать третью и четвертую пары боковых частот и т.д. Все эти процессы подвергаются анализу в блоке 11. Таким образом, ультразвуковой фазовый вибропреобразователь позволяет проводить вибродиагностику вращающихся валов со сложной внешней поверхностью, образующая которой не является прямой линией.

Блок 14 анализа предназначен для представления реализации исследуемого процесса в частотной или во временной областях. Выходной сигнал этого блока через цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) 15 может поступать на осциллограф или непосредственно в компьютер, где в зависимости от программного обеспечения может анализироваться автокорреляционная функция, спектральный состав, гистограмма распределений информативных параметров.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 8.2668.2014/К

#### Список литературы:

1. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Мониц Д.В., Гребнев П.А. Методические погрешности при измерении параметров вибрации строительных конструкций волновыми методами// Измерительная техника. 2015, № 2, с. 36-47. (Web of Science).
2. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Бугайский В.В., Горсков В.П. Частотный метод измерения крутящих моментов вращающихся валов. // Вестник машиностроения. 2015. № 2, с. 3-7. (scopus).
3. Гордеев Б.А., Куклина И.Г. Ультразвуковой фазовый преобразователь угла поворота вала. Патент на изобретение № 2548615, опубликовано 20.04.2015 г. бюл. № 11.
4. Гордеев Б.А., Куклина И.Г., Охулков С.Н., Бугайский В.В., Гордеев А.Б. Ультразвуковой фазовый вибропреобразователь. Патент на полезную модель № 2013129437. Опубликовано 10.01.2015 года. Бюл. №1



## **РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ АДАПТИВНОЙ ВИБРООПОРОЙ**

**Б.А. Гордеев, Деулин М.М.**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
общетехнический факультет, инженерно-строительный факультет  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д.65, e-mail: [deumich@gmail.com](mailto:deumich@gmail.com)  
Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24, e-mail: [gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

Доклад посвящен описанию виброопоры, заполненной магнитореологической жидкостью, системы ее управления, процессу изменения плотности потока энергии магнитореологической жидкостью через дроссельные каналы виброопоры под действием внешнего магнитного поля. Магнитная индукция внешнего магнитного поля направлена ортогонально к направлению скорости потока и меняется по гармоническому закону для управления демпфированием динамической нагрузки на виброопору.

Ключевые слова: гидравлическая адаптивная виброопора, магнитореологическая жидкость, вектор Умова-Пойнтинга, диссипация плотности потока энергии, демпфирование, система управления виброопорой.

### **Устройство виброопоры**

Виброопора предназначена для уменьшения амплитуды колебаний, передаваемых от стационарного виброактивного агрегата, на основание. Эскиз, поясняющий устройство виброопоры, представлен на рисунке 1. Виброопора состоит из рабочей камеры 1 и компенсационной камеры 8, которые разделены перегородкой 6.

Рабочая камера 1 образована эластичной обечайкой 2 сверху и перегородкой 6 снизу. Обечайка 2 опирается на корпус 7, содержит опорную плату 3, на которую устанавливается агрегат. Виброопора устанавливается на основание корпусом 7.

Компенсационная камера 8 образована эластичной мембраной 9 снизу и перегородкой 6 сверху. Мембрана 9 уплотнена в корпусе 7 посредством поддона 11, который защищает мембрану от механических повреждений. Компенсационная камера 8 содержит две части: кольцевую 8а и торообразную 8б.

Перегородка 6 жестко соединена с корпусом 7 и содержит: дроссельные каналы 4а, 4б, 5а, 5б, 15а, 15б; промежуточную камеру 14; кольцевую полость 12; капилляры 13. Рабочая 1 и компенсационная 8 камеры непосредственно соединены с помощью капилляров 13. Рабочая 1 и компенсационная 8 камеры сообщаются косвенно через кольцевую полость 12 и промежуточную камеру 14 с помощью дроссельных каналов 4а, 4б, 5а, 5б, 15а, 15б.

Дроссельные каналы 4а и 4б предназначены для соединения с кольцевой полостью 12, соответственно, камер 1 и 8. Дроссельные каналы 5а и 5б предназначены для соединения с промежуточной камерой 14, соответственно, камер 1 и 8. Каналы 15а и 15б предназначены для соединения промежуточной камеры 14 и кольцевой полости 12.

Камеры 1, 8, 14 и полость 12 виброопоры заполнены магнитореологической жидкостью, которая представляет устойчивый коллоидный раствор.

На противоположных сторонах перегородки 6 расположена пара соленоидов 16, предназначенные для образования магнитного поля. Магнитореологическая жидкость меняет свою вязкость в зависимости от напряженности магнитного поля.

### **Принцип действия виброопоры**

При действии на опорную плату 3 виброопоры знакопеременной динамической нагрузки, меняется деформация обечайки 2 и эластичной мембраны 11, меняется давление



жидкости в камерах 1 и 8, меняется направление течения жидкости в дроссельных каналах 4а, 4б, 5а, 5б, 15а, 15б, в промежуточной камере 14 и в кольцевой полости 12.

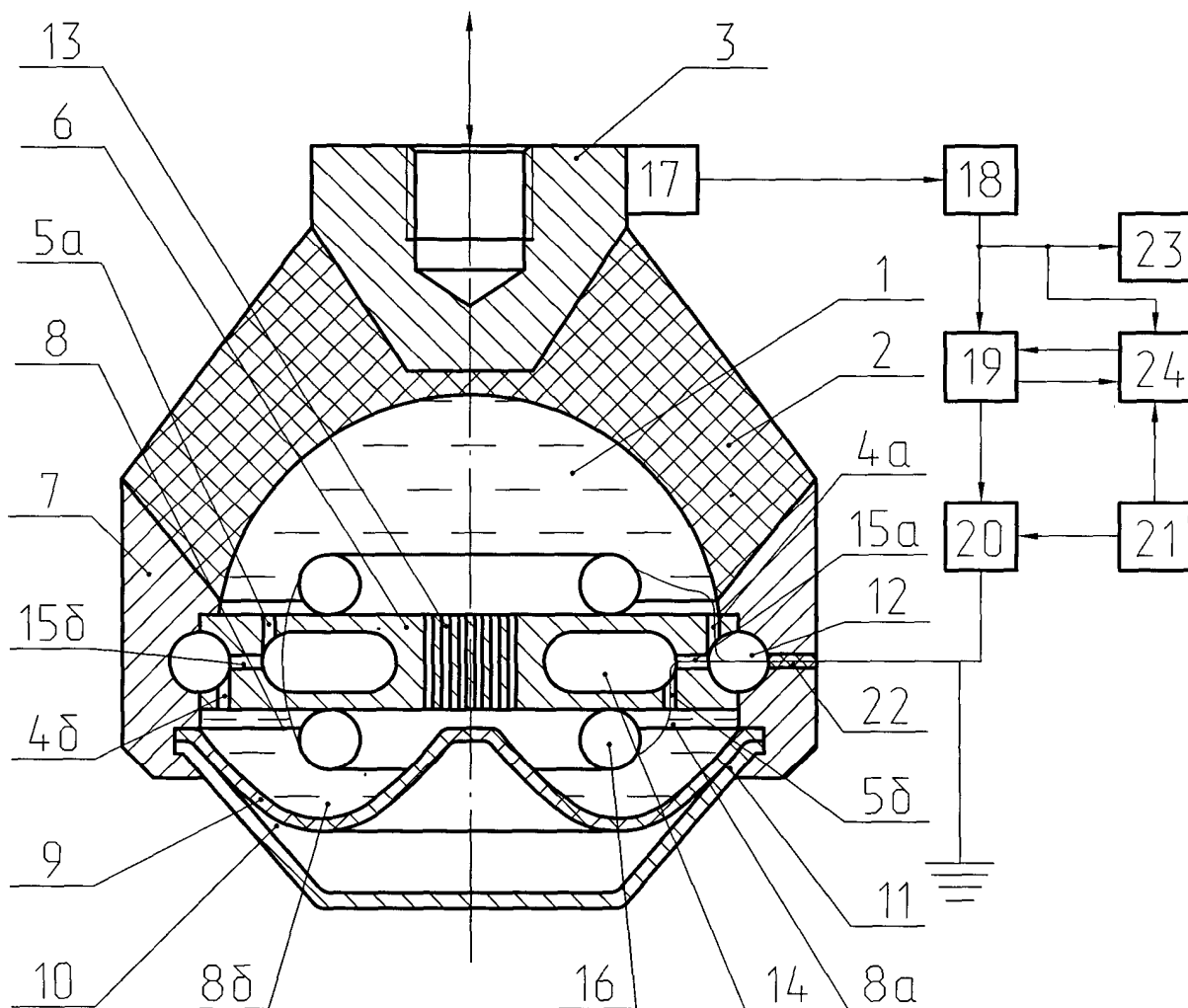


Рисунок 1. Эскиз виброопоры со схемой управления

Допустим, в первом полупериоде динамическая нагрузка по направлению совпадает со статической нагрузкой от агрегата и вертикально сжимает обечайку 2. Давление в рабочей камере 1 увеличивается, жидкость течет через капилляры 13 в компенсационную камеру 8 и через дроссельные каналы 4а и 5а в кольцевую полость 12 и в промежуточную камеру 14. Благодаря тангенциальному расположению этих каналов относительно полости 12 и камеры 14, слои жидкости в последних получают вращательное движение. Далее жидкость вихрем выбрасывается в компенсационную камеру 8 через дроссельные каналы 4б и 5б. Эти каналы направлены тангенциально, под острым углом к поверхности эластичной мембраны 9, образующей торообразную часть 8б компенсационной камеры 8. Это обеспечивает спиралеобразное движение вихревых шнуров жидкости вдоль эластичной мембраны 9. Для усиления эффекта турбулизации направления потоков из кольцевой полости 12 и промежуточной камеры 14 дроссельные каналы 4б и 5б имеют диаметрально противоположное расположение.

Во втором полупериоде действия на виброопору динамическая нагрузка стремится растянуть обечайку 2 и снижает давление в камерах 1 и 8. Упругое действие эластичной мембраны 9 вынуждает течь жидкость через капилляры 13, через дроссельные каналы в кольцевую полость 12 и в промежуточную камеру 14, откуда жидкость вихрем выбрасывается в рабочую камеру 1. В камере 1 образуется турбулентное движение жидкости.

В перегородке 6 происходят следующие процессы.

Излучение акустических волн от работающего силового агрегата происходит постоянно в рабочую камеру 1 независимо от основной гармоники динамической нагрузки. Акустическая волна поглощается перегородкой 6, так как импедансы среды распространения (жидкость) в рабочей камере 1 и в перегородке 6 совпадают. Акустические волны являются продольными, поэтому поглощаясь, они не трансформируются в изгибные волны перегородки 6. Поглощение происходит при условии заполнения жидкостью капилляров 13 и дроссельных каналов.

Необходимым условием запирания капилляров 13 и дроссельных каналов, является равенство их диаметров и мениска для рабочей жидкости определенной вязкости. Например, при заполнении вибропоры рабочей жидкостью типа ПМС-200 с магнитореологическими свойствами и динамической вязкостью  $\mu = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot \text{с}$  диаметр капилляров порядка 1,5 мм. На высоких частотах (порядка 100 Гц и выше) капилляры запираются, движение жидкости между камерами 1 и 8 замедляется, что снижает поглощение (диссипацию) энергии динамического воздействия на вибропору и может вызвать разрыв обечайки 2. Для управления этим эффектом необходимо воздействовать на магнитореологическую жидкость переменным магнитным полем. Например, высокочастотное магнитное поле, воздействующее на жидкость в капиллярах 13, способствует разрушению менисков и ускоряет движение жидкости, способствуя улучшению демпфирующих характеристик вибропоры. Движение магнитореологической жидкости и поглощение энергии меняются в зависимости от фазового рассогласования переменного магнитного поля и динамической нагрузки на вибропору.

На низких частотах (менее 100 Гц) циркуляция жидкости между камерами 1 и 8 происходит более интенсивно, что влияет на увеличение диссипации энергии колебаний.

Для нормальной работы вибропоры и увеличения ее ресурса необходимо:

- выбирать жесткость обечайки 2 из условия максимального использования диссипации энергии колебаний в магнитореологической;
- обеспечить равными объемы рабочей 1 и компенсационной 8 камер;
- обеспечить интенсивный отвод тепла нагревающейся магнитореологической жидкости через перегородку 6 и корпус 7 за счет высокой теплопроводности материалов этих деталей и активного перемешивания слоев жидкости в промежуточной камере 14 и в кольцевой полости 12;
- управлять скоростью движения жидкости по капиллярам и по дроссельным каналам действием переменного магнитного поля, создаваемого соленоидами 16.

### **Описание движения магнитореологической жидкости**

Для описания движения магнитореологической жидкости в промежуточной камере 14 вибропоры при действии магнитного поля принимаем два условия [2], которые выразим безразмерными отношениями.

Во-первых, произведение частоты (Гц) прецессии ионизированных частиц  $\omega_0$  (Ларморова частота) магнитореологической жидкости и среднего времени  $\tau$  (с) пробега ионизированной частицы много меньше единицы:  $\omega_0 \tau \ll 1$ .

Во-вторых, для магнитореологической жидкости, испытывающей действие внешнего магнитного поля, обладающей электропроводностью  $\gamma$  (См) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (Ф/м), и перемещающейся со скоростью  $V$  (м/с), должно выполняться неравенство:

$$\frac{V \cdot \varepsilon}{\gamma} \ll 1.$$

При дросселировании жидкости по каналам вибропоры под действием магнитного поля возникает индукционный ток с плотностью, А/м:

$$\vec{J} = \gamma [\vec{V} \vec{B}], \quad (1)$$

где  $\vec{B}$  – магнитная индукция, (Тл);  $\vec{V}$  – скорость протекания магнитоологической жидкости в промежуточной камере 14 (рис. 1), м/с.

Плотность тока  $\vec{j}$  равна сумме векторов, А/м:

$$\vec{j} = \vec{J} + \rho_e \vec{V} + \gamma \vec{E}, \quad (2)$$

где  $\rho_e$  – плотность частиц в жидкости, несущих электрические заряды, Кл/м<sup>2</sup>;  $\vec{E}$  – напряженность внешнего электрического поля, В/м.

Система уравнений, описывающих движение магнитоологической среды в магнитном поле камеры 14 включает в себя уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times [\vec{V} \vec{H}] + \nu_m \nabla \cdot \vec{H}, \quad (3)$$

где  $\nu_m$  – коэффициент магнитной вязкости, который тем меньше, чем выше электропроводность жидкости;  $\nabla \cdot \vec{H}$  – дивергенция вектора напряженности  $\vec{H}$  или дивергенция магнитного поля;  $\nabla \times [\vec{V} \vec{H}]$  – ротор векторного произведения векторов скорости и напряженности магнитного поля.

Магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция равна нулю  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ . Поэтому в уравнении (4) учитываем только первое слагаемое:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times [\vec{V} \vec{H}]. \quad (4)$$

Гидродинамические уравнения движения магнитоологической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \vec{V}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\vec{H}}{4\pi\rho} \nabla \times \vec{H} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho} \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \cdot \vec{V}, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность магнитоологической жидкости, кг/м<sup>3</sup>.

Для магнитоологической среды уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (6)$$

где  $\nabla \cdot (\rho \vec{V})$  – дивергенция плотности потока жидкости.

Уравнение закона сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \vec{V}^2}{2} + \rho u + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) = -\nabla \cdot \vec{W}, \quad (7)$$

где  $u$  – внутренняя энергия магнитоологической жидкости;  $\vec{W}$  – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга).

Диссипация плотности потока энергии  $\vec{W}$  резко возрастает, если в потоке магнитоологической среды нарушается химическое равновесие. С учетом параметров реологического заполнителя и внешнего магнитного поля плотность потока энергии можно представить в виде [3]:

$$\begin{aligned} \vec{W} = & \rho \cdot \vec{V} \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) - KVT + \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\ & - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + \zeta (\nabla \cdot \vec{V})^2 \left\} \vec{V} + \frac{1}{4\pi} [\vec{H} [\vec{V} \vec{H}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\vec{H} \nabla \times \vec{H}] \end{aligned} \quad (8)$$

где  $K$  – коэффициент теплопроводности;  $\eta$  и  $\zeta$  – коэффициенты первой и второй вязкостей жидкости, соответственно;  $T$  – абсолютная температура.

Движущаяся магнитоореологическая жидкость может ускоряться или затормаживаться, изменяя диссипацию потока энергии  $\vec{W}$ , за счет действия магнитного поля, создаваемого соленоидами 16. Режим движения жидкости зависит от фазовых соотношений между переменным током, питающим соленоиды, и внешним вибрационным воздействием. Поэтому, для управления виброопорой с целью наилучшего демпфирования вибрации достаточно подобрать такой фазовый сдвиг, при котором амплитуда колебания основания будет наименьшей.

### **Система управления виброопорой**

На рисунке 1 показана структурная схема системы управления виброопорой, разработанная для испытаний виброопоры. Система содержит: 17 – акселерометр, 18 – усилитель токового сигнала от акселерометра, 19 – фазовращатель, 20 – усилитель токового сигнала от фазовращателя, 21 – источник питания системы, 23 – осциллограф, 24 – блок управления оператора.

В системе управления выделяем следующие сигналы:

- возбуждающий или демпфируемый вибросигнал  $X$  создается вибростендом, на котором располагается виброопора для цели испытаний, который имитирует динамическую нагрузку, действующую на виброопору;
- управляющий токовый сигнал  $Y$  генерируется системой управления, подается на соленоиды 16 для образования переменного магнитного поля в полостях виброопоры;
- демпфированный вибросигнал представлен токовым сигналом  $Z$ , поступающим от акселерометра 17, который установлен на опорной плате 3, несет информацию о результате демпфирования по управляющему сигналу  $Y$ .

В системе управления выделяем следующие цепи:

- измерительная цепь состоит из акселерометра 17, усилителя 18, осциллографа 23 и предназначена для получения информации о работе виброопоры;
- цепь регулирования состоит из блока управления 24, фазовращателя 19, усилителя 20, питается источником 21 и предназначена для выработки управляющего сигнала.

Испытания виброопоры проводятся для определения сдвига фазы сигнала  $Y$ , настроенного по частоте  $\omega$  сигнала  $X$ , и обеспечивающего минимум амплитуды сигнала  $Z$ . Результаты испытаний потребуются для настройки виброопоры при ее эксплуатации.

Настройка виброопоры по фазе проводится следующим образом. Оператор на блоке управления 24 размыкает цепь регулирования, настраивает вибростенд на исследуемую частоту  $\omega$  и амплитуду демпфируемого вибросигнала  $X$ . Запускает стенд и со временем опорная плата 3 испытуемой виброопоры без управляющего воздействия  $Y$  принимает частоту  $\omega$  вибрации, передаваемой от стенда. Момент установившегося колебания опорной платы 3 оператор регистрирует по показаниям осциллографа 23, который пока отображает усиленный токовый сигнал  $X$  от акселерометра 17. В этот момент токовый сигнал  $X$  соответствует возбуждающему вибросигналу, действующему на виброопору, и не подверженному демпфированию, т.е. управляющий сигнал равен нулю  $Y=0$ . Оператор по показаниям осциллографа 23 определяет частоту  $\omega$  и фазу возбуждающего вибросигнала  $X$ . На низких частотах сигнал  $Y$  должен быть близким к противофазе для замедления магнитоореологической жидкости, а на высоких частотах необходимо ускорить потоки жидкости и сигнал  $Y$  должен быть ближе по фазе. Оператор предварительно настраивает в цепи регулирования, с помощью фазовращателя 19, сдвиг фазы сигнала  $Y$  и замыкает цепь регулирования. На соленоид 16 подается токовый управляющий сигнал  $Y$  с частотой демпфируемого вибросигнала  $X$ . Демпфирование динамической нагрузки на частоте  $\omega$  вибростенда контролируется по осциллографу 23. Теперь от акселерометра 17 на осциллограф 23 поступает частично демпфированный сигнал  $Z$ . Оператор подстраивает сигнал  $Y$  путем малых отклонений фазы, добиваясь уменьшения ампли-

туды сигнала  $Z$ . Оператор прекращает подстраивать фазу управляющего сигнала в тот момент, когда обнаружит наибольшее уменьшение амплитуды демпфированного вибросигнала. Достигнутое значение сдвига фаз, соответствующее частоте, фиксируется в блоке 24 управления.

Описанная процедура калибровки проводится по рабочим частотам диапазона динамической нагрузки. После проведения калибровки на каждой основной гармонике возбуждающего вибросигнала фазовый сдвиг устанавливается автоматически и участие оператора не требуется.

### **Список литературы**

1. А.С. № 17799843 (СССР) Виброизолирующее устройство// Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Юдин В.А., Поташев О.А. кл. F 16 F 6/00. 07.12.92. Бюл. № 45.
2. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В. Применение инерционных электрореологических трансформаторов в системах виброизоляции// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003, № 6. С. 22-27.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М. Наука. 1964. с. 847.

## **ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ДЕМПФЕРОВ**

**Б.А.Гордеев<sup>1,2</sup>, А.Н.Осмехин<sup>1</sup>, С.Н.Охулков<sup>1,2</sup>, А.С.Плехов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения Российской академии наук (ИПМ РАН).  
603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85, e-mail [gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

<sup>2</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева.  
603950, г. Н. Новгород, ул.Минина, д. 24, e-mail [aplehov@mail.ru](mailto:aplehov@mail.ru)

В работе рассматривается подход к решению актуальной задачи по исследованию свойств магнитореологических жидкостей (МРЖ) под действием стохастических нагрузок с учётом действия внутренних и внешних электромагнитных полей [4,5]. Рассмотрены процессы, возникающие в МРЖ при действии стохастических нагрузок. Рассмотрены физические предпосылки управления характеристиками МРЖ с учетом внутренних электромагнитных полей.

*Ключевые слова:* магнитореологический трансформатор; магнитореологическая жидкость; дроссельный канал; обмотка соленоида; индуцированные импульсы; внутреннее управляющее магнитное поле.

### **Введение**

Постоянное повышение мощностей силовых электромеханических установок и механического оборудования приводит к возрастанию уровней и расширению вибрационного спектра колебаний, влияющих на надежность и безопасность их функционирования, что обуславливает необходимость совершенствования виброзащитных систем и внедрение новых технических решений. Перспективной в настоящее время является разработка демпферов колебаний стохастических нагрузок с магнитореологическими трансформаторами (МРТ). В них диссипация энергии колебаний происходит в магнитореологических средах [1,2,3].

Ограничением выбора МРЖ для данных задач является появление индуцированных электромагнитных импульсов на обмотке соленоида, предназначенного для создания внутреннего управляющего магнитного поля. Амплитуда и длительность этих импульсов является функцией стохастических нагрузок. Их влияние необходимо учитывать при разработке магнитореологических демпферов. Приводится схема экспериментальной установки для стохастических испытаний одноканального индукционного магнитореологического демпфера стохастических нагрузок, обсуждаются полученные результаты исследований.

Процесс создания интегральных демпферов (гидропор) связан с применением МРЖ, в инерционных МРТ систем демпфирования вибрации и ударов для электротехнических комплексов [1,2,3]. Поэтому одной из актуальных задач является исследование свойств МРЖ под действием нестационарных виброн нагрузок. Возможность управления магнитной вязкостью МРЖ в дроссельных каналах МРТ под действием внутренних и внешних электромагнитных полей подтверждено экспериментально [4,5].

При описании движения магнитореологических и электрореологических сред при действии магнитного поля принимаются следующие условия [4,6,7]:

$$\omega_0 \tau \ll 1$$

где  $\omega_0$  - ларморова частота прецессии для ионизированных молекул рабочей жидкости,  $\tau$  – среднее время свободного пробега ионизированной частицы, электропроводность -  $\gamma$  велика, следовательно:

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10026).

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\omega}{\gamma} \ll 1, \quad (1)$$

где  $\omega$  - частота внешнего сигнала,  $\varepsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды.

При дросселировании электрореологической жидкости в магнитном поле возникает индукционный ток с плотностью:

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{c} [\mathbf{VH}], \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света,  $\mathbf{H}$  - напряженность внешнего магнитного поля,  $\mathbf{V}$  - скорость протекания электрореологической жидкости [4,7].

С целью проверки действия стохастического механического импульса на одноканальный индукционный МРТ была создана экспериментальная установка для стохастических испытаний. Функциональная схема установки представлена на рис. 1.

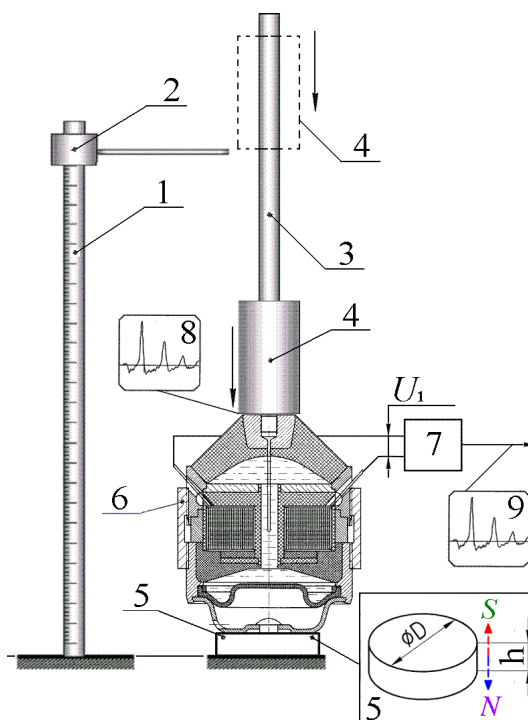


Рис. 1. Функциональная схема экспериментальной установки для стохастических испытаний одноканального индукционного магнито-реологического демпфера в момент механического удара падающего груза.

На рис.1 показано: 1 – измерительная линейка; 2 – указатель высоты с нониусом; 3 – шток; 4 – цилиндрический диамагнитный латунный груз; 5 – нижнее основание – силовой постоянный неодимовый магнит; 6 – индукционный МРТ с соленоидом; 7 – электронный запоминающий осциллограф; 8 – виброграмма механического удара; 9 – электрический индуцированный сигнал

Особенностью установки стохастических испытаний магнито-реологического демпфера с индукционным МРТ является применение соленоида, в обмотке которого индуцируются электрические токи при перемещении стальной стержневой части винта-пробки в дроссельном канале. В качестве нижнего основания применён неодимовый постоянный магнит, создающий неоднородное магнитное поле и пронизывающее магнито-реологический демпфер. Неодимовые постоянные магниты обладают магнитной силой и магнитной индукцией до 1,45 Тл [8].

Были проведены эксперименты по выявлению на выходе соленоида МРТ разности потенциалов  $U_1$ , возникающей в результате удара. При проведении экспериментов применя-

лась МРЖ, с частицами магнетита ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) в неоднородном магнитном поле неодимового постоянного магнита. Размер частиц МРЖ  $d$  в пределах 60 -100 нм.

Под действием ударного (рис. 1) механического импульса при движении МРЖ и перемещения стержневой части винта-пробки в дроссельном канале МРТ и воздействия постоянного магнитного поля неодимового постоянного магнита 5 в соленоиде МРТ наводятся - индуцируются электрические токи, которые на разомкнутой обмотке соленоида создают разность потенциалов  $U_1$ . Разность потенциалов фиксируется электронным запоминающим осциллографом (рис. 1).

При проведении экспериментов были зафиксированы индуцированные электрические сигналы с экрана запоминающего осциллографа, что указывало на индукционные электрические токи, возникающие в соленоиде МРТ вследствие ударов цилиндрического парамагнитного (латунного) груза (рис. 1).

На рис. 2 приведена осциллограмма индуцированного электрического сигнала на выходе индукционного МРТ соответствующая поглощённой энергии удара в 2,5 Дж. Это происходит при механическом ударе груза массой в 1,0 кг. Положительная амплитуда сигнала – 620 мВ; отрицательная амплитуда – 800 мВ; период электрического импульса – 2,0 мс.

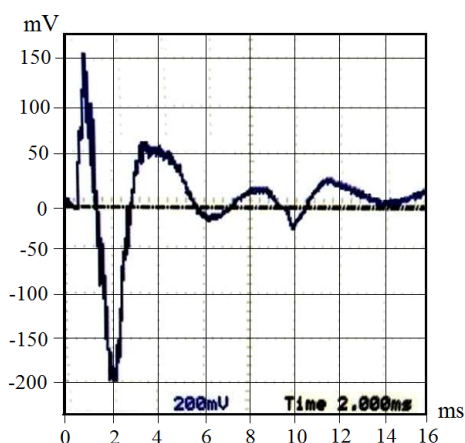


Рис.2. Осциллограмма индуцированного электрического сигнала на выходе индукционного МРТ при механическом ударе, высота падения груза 100 мм, масса груза 1,0 кг.

Положительная и отрицательная амплитуды индуцированного электрического напряжения при механическом ударе зависят от высоты падения груза (рис.3). Таким образом, высоты падения груза определяют величину энергии удара, которая гасится виброопорой с индукционным МРТ.

Наибольшая отрицательная амплитуда индуцированного электрического сигнала (рис.3) после падения груза с высоты в 225 мм объясняется отдачей резинометаллической обечайки индукционного МРТ. Жидкостное магнитное трение МРЖ оказывает малое сопротивление течению МРЖ и перемещению внутри дроссельного канала стержневой части винта-пробки МРТ (рис. 1), так как скорость возврата рабочего объема МРТ в исходное состояние большая. В этом случае скорость течения МРЖ в дроссельном канале МРТ наибольшая, а при наибольшей скорости течения МРЖ в дроссельном канале при действии постоянного магнитного поля в соленоиде индуцируется наибольшая отрицательная амплитуда электрического сигнала.



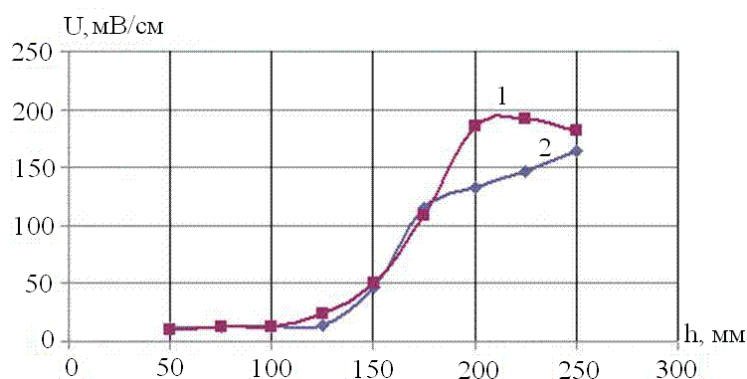


Рис.3. Зависимости положительной и отрицательной амплитуд индуцированного электрического сигнала при механическом ударе груза от высоты  $h$  падения груза. Масса груза 1,0 кг: 1- отрицательная максимальная амплитуда сигнала; 2 - положительная максимальная амплитуда сигнала.

Магнитная сила, создаваемая движением МРЖ в дроссельном канале МРТ с проницаемостью  $\mu$  от давления в рабочей камере и магнитной индукцией внешнего магнитного поля постоянного магнита, определяется как  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\text{grad } p_M$ , где  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля,  $p_M$  – магнитное давление [6,7].

Магнитное давление, представлено в виде:

$$p_M = \left| -\frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}^2 \right|. \quad (3)$$

Здесь  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость МРЖ. Для статических условий из уравнения следует, что

$$p + p_M = 0 \quad \text{и} \quad p = -p_M.$$

Это означает, что в условиях статического равновесия любое изменение механического давления  $p$  МРЖ должно компенсироваться противоположным изменением магнитного давления  $p_M$ , что должно быть отражено через Единицы измерения в системе СИ.

В МРЖ создается градиент давления [7], уравнивающий составляющую электромагнитной силы

$$\gamma \cdot v \cdot \mu \cdot \mathbf{B}^2 = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

где единицы измерения в системе СИ [6]:  $\gamma$  [См] – электропроводность МРЖ,  $1 \text{ См} = \text{А/В} = \text{с}^3 \cdot \text{А}^2 / (\text{кг} \cdot \text{м}^3)$ ;  $v$  [м/с] – скорость МРЖ в дроссельном канале;  $\mathbf{B}$  [Тл] – магнитная индукция,  $1 \text{ Тл} = \text{В} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{кг} / (\text{с}^2 \cdot \text{А})$ ;  $p$  [Па] =  $\text{Н} / \text{м}^2 = \text{кг} / (\text{с}^2 \cdot \text{м})$ ;  $z$  [м] – длина дроссельного канала;  $\mu = 10$  – относительная магнитная проницаемость МРЖ.

Для магнитореологического демпфера «упругое» действие внешнего магнитного поля на МРЖ основано на его силовом воздействии. Здесь, созданное им магнитное давление велико, по сравнению с остальными динамическими факторами – гидравлическим динамическим давлением и инерциальными силами [7], создаваемыми при течении МРЖ в дроссельном канале, когда

$$\frac{\mu \cdot \mathbf{H}^2}{8\pi} \gg \frac{\rho \cdot v^2}{2}, \quad \frac{\mu \cdot \mathbf{H}^2}{8\pi} \gg p, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность МРЖ.

Далее оценим магнитную силу магнитного поля в дроссельном канале соленоида, которая препятствует механическому давлению МРЖ в дроссельном канале при действии механического удара по МРТ.

Сила падающего груза массой  $m = 1,0$  кг с высоты в  $H = 0,6$  м при скорости падения  $v_{\Gamma} = 0,6$  м/с, ускорении свободного падения  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> и длительности удара взятой из осциллограммы, равной  $t_{и} = 1,0$  мс (рис.2) определена как [6]:

$$\mathbf{F} = \frac{m \cdot v_{\Gamma}}{t_{и}} = \frac{1,0 \cdot 0,6}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 600 \text{ Н.}$$

При такой силе удара груза создаваемое давление на опорную плиту обечайки МРТ (рис. 1) площадью  $S_{оп} = 0,707 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$  определяется как [6]:

$$P = \frac{\mathbf{F}}{S_{оп}} = \frac{600 \text{ Н}}{0,707 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} \cong 848 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Определим магнитную силу – магнитное давление, создаваемое в дроссельном канале МРТ [7], при минимальной напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H} = 20 \cdot 10^3$  А/м (рис. 4).

$$P_{\text{М}} = \left| -\frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}^2 \right| = \frac{\mu}{8\pi} (20 \cdot 10^3)^2 \cong 160 \cdot 10^6 \text{ А}^2/\text{м}^2.$$

Именно такое магнитное давление и создает магнитную силу, которая и препятствует механическому давлению МРЖ на входе/выходе дроссельного канала МРТ при действии магнитного поля постоянного магнита, и оно превышает гидравлическое давление МРЖ.

Тогда отношение давлений  $p_{\text{М}}$  и  $p$  будет равно:

$$\frac{P_{\text{М}}}{P} = \frac{160 \cdot 10^6}{0,848 \cdot 10^6} = 188,6. \quad (6)$$

Здесь магнитное давление  $P_{\text{М}}$  от магнитного поля постоянного магнита в 188,6 раз больше гидравлического давления  $P$  от действия инерционной нагрузки падающего груза, что составляет 45 дБ.

Отношение давлений  $P_{\text{М}}$  и  $P$  показывает, что при работе магнитореологического демпфера желательна наибольшая намагниченность МРЖ.

На рис. 4 представлены зависимости динамической вязкости образцов МРЖ (МРЖ-1 и МРЖ-2) для различных значений напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

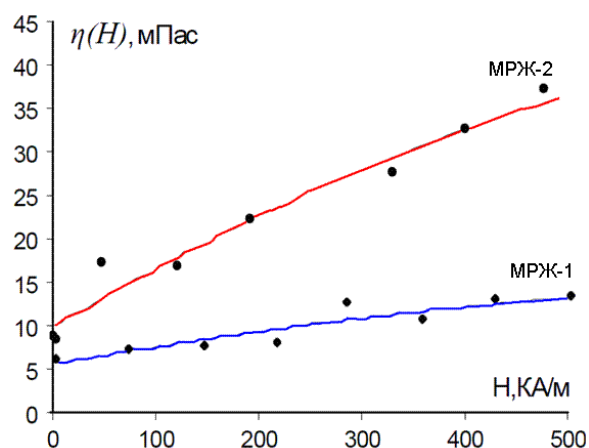


Рис.4. Зависимости изменения динамической вязкости для МЖ-1 и МЖ-2 от напряженности магнитного поля

### Заключение

В работе рассмотрен подход к решению актуальной задачи по исследованию свойств магнитореологических жидкостей под действием стохастических, в том числе ударных нагрузок и действия внутренних и внешних электромагнитных полей в магнитореологическом демпфере. Приведена схема экспериментальной установки испытаний магнитореологического демпфера случайных нагрузок. Получены результаты исследований. Определена магнитная сила – магнитное давление магнитного поля в дроссельном канале соленоида МРТ, препятствующее механическому давлению МРЖ в дроссельном канале при действии механического удара по МРТ, что позволило оценить демпфирование механического удара.

Проведённый анализ положительной и отрицательной амплитуд индуцированного электрического сигнала при механическом ударе груза позволяет выбрать соответствующую МРЖ для различных МРТ электротехнических комплексов.

### Список литературы

1. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В., Мугин О.О. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. // М. 2004. 175 С.
2. Гордеев Б.А., Маслов Г. В., Охулков С.Н., Осмехин А.Н. К вопросу создания цилиндрического магнитореологического трансформатора в ортогональных магнитных полях. Статья. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2014 г. №2 С.15-21.
3. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Злобин П.А. Применение магнитореологических жидкостей в машиностроении. Статья. // "Приволжский научный журнал". № 4. 2014 г. С.29-42.
4. Гордеев Б.А., Морозов П. Н., Синев А.В., Влияние внешнего магнитного поля на плотность потока энергии в магнитореологическом трансформаторе. Статья. // Проблемы машиностроения и надёжность машин. 2004 г. №4 С.100-104.
5. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Титов Д. Ю., Горсков В.П. Течение и релаксация магнитореологической жидкости в дроссельных каналах гидроопор. Статья. // Вестник машиностроения. 2015 г. №7. С.59-63.
6. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М. Наука. 1964.
7. Кухаркин Е. С. Инженерная электрофизика. Техническая электродинамика. // Под ред. П. А. Ионкина. Учебник для вузов – 2 - е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1982. – 520 с, ил.
8. Михайлин С.В. и Житковский В.Д. Постоянные магниты из магнитоластов. «Справочник». 1999. №9(30), стр.8 – 9.

## ПОГРЕШНОСТИ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ДЕМПФЕРОВ

Б.А.Гордеев<sup>1,2</sup>, А.Н.Осмехин<sup>1</sup>, С.Н.Охулков<sup>1,2</sup>, А.С.Плехов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения Российской академии наук (ИПМ РАН).

603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85, e-mail [gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

<sup>2</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.

603950, г. Н. Новгород, ул.Минина, д. 24, e-mail [aplehov@mail.ru](mailto:aplehov@mail.ru)

В данной статье рассмотрены процессы, возникающие в магнитоэологических жидкостях при действии стохастических нагрузок. Рассмотрены физические предпосылки управления характеристиками магнитоэологических жидкостей с учетом внутренних электромагнитных полей. Магнитоэологические жидкости применяются в системах демпфирования стохастических нагрузок силовых электромеханических установок и механического оборудования.

*Ключевые слова:* магнитоэологический трансформатор; магнитоэологическая жидкость; дроссельный канал; обмотка соленоида; индуцированные импульсы; внутреннее управляющее магнитное поле.

### Введение

Для выяснения причин ошибок измерения фазы, обусловленные соотношением скоростей зондирующего сигнала и исследуемых деформаций объекта - демпфера с магнитоэологическим трансформатором (МРТ). При действии ударных нагрузок на демпфер с МРТ из-за проявления кавитационных процессов в его рабочей магнитоэологической жидкости (МРЖ) задача повышения точности измерений его деформаций волновыми методами становится актуальной.

Процесс измерения деформаций (перемещений) демпфера с магнитоэологическим трансформатором волновыми методами заключается в следующем (рис. 1) [1,7, 8].

Продольные смещения излучаемой источником ультразвуковой волны  $U_i$  зондирующего сигнала определяются уравнением:

$$U_i - c^2 U_x = 0,$$

где  $U_x$  – исходное смещение зондирующего сигнала,  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость звука в реологической среде, в качестве которой могут быть газы и жидкости,  $E$  – модуль упругости среды,  $\rho$  – удельная плотность среды.

Положим, что на границу раздела сред действуют ультразвуковые колебания от источника излучения и, отражаясь от поверхности исследуемого объекта, они принимаются согласованным приемником. Тогда условие непрерывности на границе раздела сред запишется в виде:

$$Z_0 U_i(0,t) - E U_x(0,t) = \mu(t),$$

где  $Z_0 = \sqrt{E\rho}$  – волновое сопротивление среды,  $\mu(t)$  – заданная функция смещения.

Считая движущуюся границу непроницаемой для зондирующего сигнала, второе граничное условие при  $x = L + l(t)$  запишется в виде:

$$U[L + l(t)] = l(t),$$

где  $L$  – расстояние от источника до неподвижной границы,  $l(t)$  – закон движения границы.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10026).

В качестве примера рассмотрим случай движения границы с постоянной скоростью  $V$ . В этом случае  $l(t) = L_1 + Vt$ , где  $L_1$  - начальное расстояние от источника излучения до границы раздела сред, и тогда закон движения границы запишется в виде [7, 8]:

$$f(t) = -h \left[ \frac{1 - V/c}{1 + V/c} - \frac{2L_1}{c(1 + V/c)} \right].$$

Отсюда видно, что для гармонического источника:

$$h(t) = A \sin \omega_0 t,$$

$$f(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

где  $A$  - амплитуда,  $\omega_0, \omega_1$  частоты излученного  $h(t)$  и отраженного  $f(t)$  акустических сигналов,  $\varphi$  - постоянный набег фаз.

Постоянный набег фаз определяется как:

$$\varphi = \frac{2\omega L_1}{c(1 + V/c)}$$

Между частотами отраженного и излученного акустических сигналов имеется следующая зависимость, которая соответствует двойному эффекту Доплера:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{1 - V/c}{1 + V/c}.$$

Следует иметь в виду, что и амплитуды падающего и отраженного сигналов в средах с реологическими свойствами не равны. Однако в данном случае информативными признаками будут девиация частоты за счет эффекта Доплера и модуляция фазы [7, 8].

В общем случае, при произвольном движении границы раздела сред, если источник гармонический, принимаемый сигнал можно представить в следующем виде:

$$f(t) = -A \sin \omega(t - 2l(t)R(t)/c), \quad (1)$$

где  $R(t)$  - функция, характеризующая погрешность измерения фазы в данный момент времени.

При  $R(t) = 0$  фаза отраженного сигнала относительно падающего (опорного) всегда имеет постоянное значение, так как в этом случае выражение (1) примет вид:

$$f(t) = A \sin \omega t,$$

где  $\omega$  - частота отраженного акустического сигнала.

Если  $R(t) < 0$ , или  $R(t) > 0$ , то погрешность измерения фазы в данный момент времени обусловлена временем распространения акустического сигнала от объекта к приемнику. Так при виброскоростях, имеющих среднеквадратичное значение порядка 1 м/с, она соответствует 0,3% при расстояниях от объекта исследований 1 м.

Для извлечения информации о законе движения границы исследуемого объекта отраженный сигнал умножается на опорный  $A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , после которого обычно выделяют низкочастотную часть спектра, то есть рассматривают составляющую спектра:

$$f_n(t) = -\frac{AA_0 \cos(2\omega l(t)R(t)/c + \varphi)}{2},$$

откуда выделяется закон движения  $l(t)$ , считая в квазистатическом приближении  $R(t) = 0$ .

В данном методе измерения микроперемещений информативным параметром является индекс  $m = \omega_d / \Omega$  - частотной модуляции отраженного зондирующего акустического сигнала, где  $\omega_d$  - девиация частоты отраженного акустического сигнала,  $\Omega$  - частота вибраций.

На (рис. 1) представлена функциональная схема экспериментальной установки с ультразвуковым фазовым измерителем микроперемещений 1 по выявлению виброперемещений, обусловленных соотношением скоростей зондирующего сигнала и исследуемых деформаций магнитореологического демпфера 5-6-9 [1,7,8].

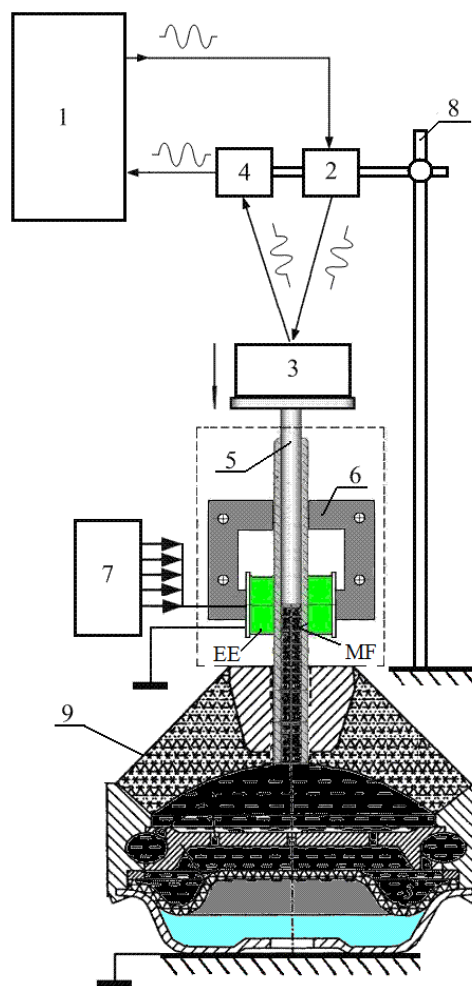


Рис. 1. Функциональная схема экспериментальной установки по выявлению виброперемещений МРТ.

На функциональной схеме (рис. 1) показано: 1 – фазовый измеритель микроперемещений, 2 и 4 – пьезоэлектрические преобразователи, 3 – нагрузка с массой  $m$ , 5 – шток-поршень (материалы: сталь, феррит, латунь), 6 – возбуждающий электромагнит ортогонального магнитного поля, 7 – источник постоянного тока, 8 – консоль, 9 – гидроопора поршневого типа.

В магнитореологическом демпфере цилиндрический зазор, а также объемы рабочих камер заполнены МРЖ. Такая конструкция магнитореологических демпферов предпочтительна для демпфирования ударных нагрузок. На рис. 1 в магнитореологический демпфер с цилиндрическим зазором входит: коаксиальная внутренняя поверхность латунной проходной втулки, внешняя поверхность штока-поршня 5, возбуждающий электромагнит 6 и объемы основной и компенсационной камер гидроопоры поршневого типа 9 с МРЖ [3].

Пьезоэлектрические преобразователи – излучатель 2 и приёмник 4 акустических колебаний закреплены на консоли 8 и настроены на колебания механического и электрического резонансов с частотой 30 кГц [1,7,8].

При помощи ультразвукового фазового измерителя измерялись микроперемещения рабочего штока-поршня 5 с нагрузкой 3.

В работе [1] была выявлена линейная зависимость скорости перемещения латунного штока-поршня в цилиндрическом зазоре с МРЖ от величины магнитной индукции (рис. 2). Замедление скорости перемещения латунного штока-поршня после снятия воздействия магнитного поля в ортогональном магнитном поле возбуждающего электромагнита не зафиксировано.

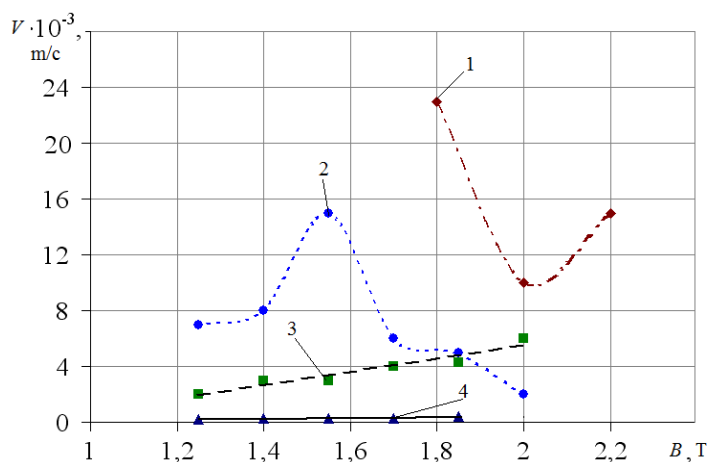


Рис. 2. Скорость релаксации МРЖ от начальной индукции ортогонального магнитного поля: скорости релаксации МРЖ в поперечном (1, 2, 3) и продольном (4) магнитных полях в зависимости от начальной индукции магнитного поля и материала штока-поршня: 1 – сталь, 2 – феррит, 3, 4 – латунь.

В работе [1] установлено замедление скорости перемещения ферритового и стального штоков-поршней после снятия воздействия магнитного поля в ортогональном магнитном поле возбуждающего электромагнита до и после прохождения ими своих экстремумов. Этот результат объясняется магнитореологическим эффектом и релаксацией МРЖ после снятия магнитного поля и остаточной намагниченностью сердечника магнитопровода возбуждающего электромагнита [4,5].

Увеличение скорости для стального штока-поршня обусловлено ростом температуры магнитной жидкости (свыше 40°C) в цилиндрическом зазоре [1,2].

При ударных нагрузках скорость движения штоков-поршней резко меняется [6], и, если она становится одного порядка со скоростью распространения зондирующего сигнала, то спектральный состав отраженного сигнала насыщается высокочастотными гармониками, отсутствующими в реальном процессе [1, 7, 8].

Метод обработки отраженного сигнала должен учитывать абсолютную ошибку в измерении смещения границы  $l(t)$  равную:

$$\Delta = [l(t)R(t) - l(t)] / l(t) = R(t) - 1. \quad (2)$$

Из (2), задаваясь относительной ошибкой измерения:

$$\delta = \Delta l(t) / l(t),$$

где  $\Delta l(t)$  - погрешность измерения.

Получаем следующее условие применимости квазистатического представления:

$$\Delta = R(t) - 1 \leq \delta,$$

и для второго приближения:

$$|l(t)| \leq c\delta.$$

Так для  $\delta = 10^{-2}$  получаем, что скорость движения вибрирующей границы не должна превышать порядка 3 м/с при измерениях в воздухе.

### **Заключение**

Результаты работы показали, что ошибка измерения фазы, а, следовательно, и виброперемещения, обусловлена соотношением скоростей зондирующего сигнала и исследуемых деформаций объекта - магнитореологического демпфера. В тех случаях, когда при ударных воздействиях скорость штока-поршня превышает 3 м/с выделение фазы отраженного сигнала, как информативного параметра, связано с возрастающими погрешностями.

### **Список литературы**

1. Гордеев Б.А., Маслов Г. В., Охулков С.Н., Осмехин А.Н. К вопросу создания цилиндрического магнитореологического трансформатора в ортогональных магнитных полях. Статья. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2014 г. №2 С.15-21.
2. Гордеев Б.А., Бугайский В.В., Охулков С.Н., Осмехин А.Н., Горсков В.П. Влияние температуры рабочей жидкости на динамические характеристики гидропор. Статья. // "Вестник машиностроения".. № 12. 2012 г. С.
3. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В., Мугин О.О. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. – М.: Физматлит, 2004. – 175 с.
4. Шульман З.П., Кордонский В.И. Магнитореологический эффект. – Минск: Наука и техника, 1982. – 184 с.
5. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Титов Д. Ю., Горсков В.П. Течение и релаксация магнитореологической жидкости в дроссельных каналах гидропор.// Вестник машиностроения. 2015 г. №7. С.59-63.
6. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Злобин П.А. Применение магнитореологических жидкостей в машиностроении. Статья. // "Приволжский научный журнал". № 4. 2014 г. С.29-42.
7. Гордеев Б.А., Куклина И.Г., Осмехин А.Н. Измерения параметров вибрации конструкций акустическими методами.// Приволжский научный журнал. 2009 г. №2(10). С.13-20.
8. Гордеев Б.А., Куклина И.Г., Голубева К.В., Гордеев А.Б. Патент № 2472109 на изобретение «Ультразвуковой фазовый вибропреобразователь» по заявке №2011130282/28(044754) от 18 июля 2012 г. Опубликовано 10.01.2013. Бюл.№1.



## **МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ДЕМПФЕР УДАРНЫХ НАГРУЗОК**

**Б.А.Гордеев, С.Н.Охулков, П.А.Злобин**

Институт проблем машиностроения Российской академии наук.  
603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85, e-mail: [gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

В статье рассмотрено влияние фазового рассогласования на частотные сдвиги между входными вибросигналами и управляющими сигналами возбуждения магнитореологического трансформатора, обусловленные гистерезисными эффектами ферромагнитных сердечников. Изложены результаты исследования времени релаксации магнитореологических жидкостей в результате исчезновения ортогональных магнитных полей.

Ключевые слова: Магнитореологический трансформатор, гистерезис ферромагнитных сердечников, фазовые и временные сдвиги функций электромагнитного поля, магнитореологическая жидкость, скорость релаксации.

Основным аспектом проектирования виброзащитных систем для стационарных энергетических установок, эксплуатируемых и вновь вводимых конструктивных объектах является согласование частотных характеристик системы активной виброзащиты и возбудителей. Это позволяет избегать нежелательных резонансных колебаний. Этому требованию в полной мере удовлетворяют гидравлические виброопоры (гидроопоры) нового поколения с магнитореологическими трансформаторами (МРТ), объединяющие в себе упругий резиновый элемент и магнитогидрравлический гаситель колебаний. Основой активных систем виброгашения - нового поколения гидроопор МРТ являются рабочие магнитореологические жидкости (МРЖ). Движением МРЖ в дроссельных каналах гидроопор можно управлять с помощью внутренних и внешних электромагнитных полей [1, 3, 10-15].

В конструкции гидроопор с МРТ нет трущихся частей с фрикционным сухим контактом. Изменение объемов рабочих полостей с МРЖ происходит за счет изменения формы гидроопоры при ее деформации. В качестве компонентов трения выступает конструкционное трение в эластичных элементах и магнитогидрравлическое вязкое сопротивление рабочей жидкости [1-3, 10].

Гидроопоры с МРТ позволяют совместить частотные характеристики виброзащитной системы и возбудителей так как большая часть частот виброзащитной системы, состоящей из гидроопор с МРТ находится в какой-либо из зон частотного спектра возбудителей.

На рис.1 представлена конструкция гидроопоры с МРТ, с электромагнитной системой возбуждающих электромагнитов (ВЭ) [2, 10].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект №15-19-1026).

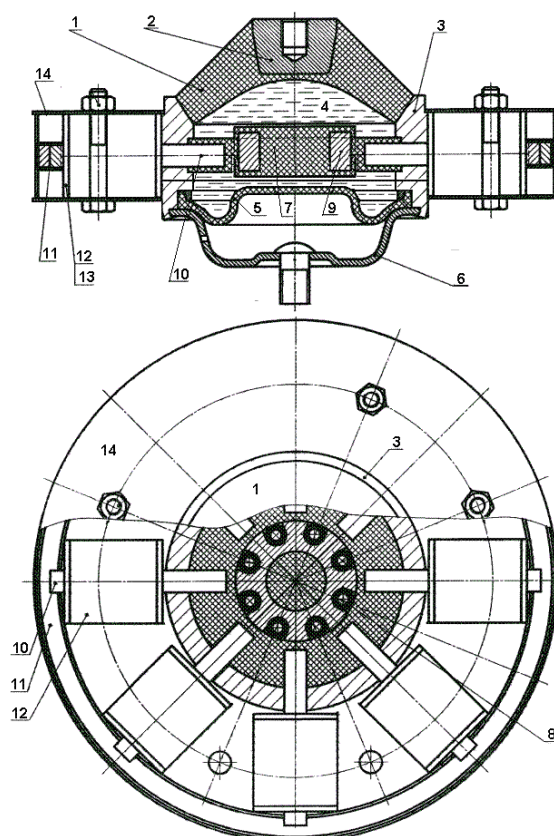
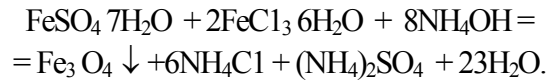


Рис. 1. Гидроопора с МРТ с электромагнитной системой возбуждающих электромагнитов [2, 10]

Гидроопора с МРТ (рис. 1) содержит герметично закрытые рабочую и компенсационную камеры 4. Камеры 4 ограничены общим корпусом 3 с закрепленной в нем разделительной ферромагнитной перегородкой 8, 9 с диамагнитными тангенциальными дроссельными каналами малого внутреннего диаметра 8, порядка 1,5-2,0 мм, расположенных в её поверхностном слое по её образующей между полюсами ВЭ 12. Диамагнитные дроссельные каналы 8 соединяют рабочую и компенсационную камеры 4. Рабочая камера ограничена опорной плитой 2 и эластичной обечайкой поршневого действия 1, а компенсационная – мембраной 5. Металлическая перегородка 9 выполнена в виде кольца из ферромагнитного материала с высокой магнитной проницаемостью, с отверстиями для встраиваемых диамагнитных дроссельных каналов 8 и является частью магнитопровода кольцевой электромагнитной системы. Кольцевая электромагнитная система МРТ состоит из набора ВЭ 12 с ферромагнитными сердечниками в виде цилиндрических стержней 10 с явно выраженными полюсами, внутренней ферромагнитной перегородки 9 и внешним ферромагнитным ярмом-кольцом 11. Здесь, у сердечников 10 ВЭ и перегородки 9 точка Кюри 767°С, что в 5 (пять) раз выше нагрева МРЖ (150°С). Считаем магнитную проницаемость  $\mu_c$  сердечников 10 ВЭ перегородки 9 постоянной. Полюса ВЭ 12 расположены поочередно, т.е. чередуются между собой на полюса S и N. Катушки 13 ВЭ соединяются параллельно так, чтобы соседние полюса имели разную полярность и подключаются к источнику намагничивающего тока ВЭ.

Внутренние камеры гидроопоры с МРТ 4 заполнены МРЖ, которая представляет устойчивый коллоидный раствор. Его получение обеспечивается двумя условиями: мелкими размерами частиц наполнителя (40-100 нм) и использованием специальных веществ - стабилизаторов. Так как частицы магнитного наполнителя могут сильно взаимодействовать между собой, адсорбционно-сольватный слой молекул стабилизатора на поверхности частиц препятствует их объединению и коагуляции. Получение магнитных частиц требуемого размера

достигается путем осаждения солей двух- и трехвалентного железа в щелочной среде по методу Элмора [3]



В результате реакции образуется магнетит - осадок черного цвета, обладающий магнитными свойствами.

Возникающий в сердечниках 10 ВЭ МРТ магнитный поток действует в зоне разнополярных полюсов сердечников S и N на рабочую МРЖ, протекающую в тангенциальных дроссельных каналах 8 изменяя её вязкость пропорционально действующим вибрационным воздействию, и тем самым осуществляя жидкостное демпфирование в гидроопоре с МРТ (рис. 1).

Так гидроопора с МРТ (рис.1) с МРЖ содержит, например, восемь дроссельных тангенциальных каналов 8 с демпфирующей МРЖ, в которых под воздействием электромагнитного поля управляют потоками МРЖ через эти дроссельные каналы 8, изменяя тем самым пропускную способность разделительной дроссельной ферромагнитной перегородки 7 [2, 10].

Гидроопоры с МРТ включаются в замкнутую систему автоматической регулировки (САР) с микропроцессорной системой для цифрового управления - регулирования МРТ с целью оптимального демпфирования вибрационных воздействий путём настройки МРТ на заданные резонансные частоты [2, 10, 11].

Физическая модель активной виброзащиты с МРТ в контуре САР показана на (рис.2). Так, гидроопора с МРТ, установленная на основании содержит, наряду с обычно применяемыми пружиной и демпфером, дополнительный элемент – инерционный трансформатор с приведенной массой  $m_{um} = LA^2$  [1, 2, 11].

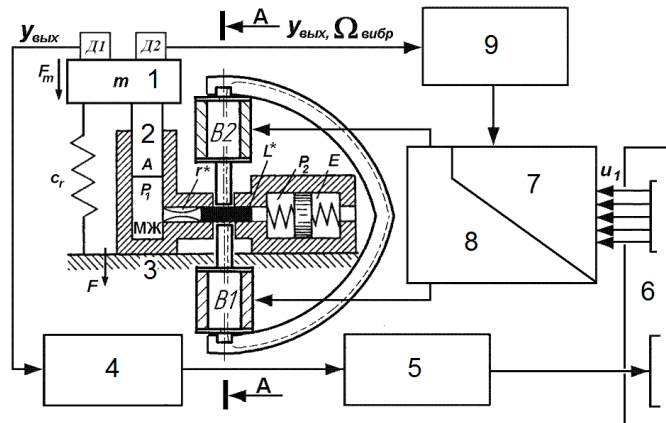


Рис. 2. Физическая модель активной виброзащиты с МРТ в контуре САР.

На рис. 2 показано: 1 – нагрузка с массой  $m$ , кг; 2 – поршень - обечайка; 3 – основание; 4 – полосовой усилитель; 5 – амплитудный детектор; 6 – микропроцессорная система; 7 – цифровые ключи; 8 – источники намагничивающего тока; 9 – блок формирования напряжения возбуждения; B1, B2 – возбуждающие электромагниты; Д1, Д2 – акселерометры;  $c_r$  – жесткость упругой обечайки, Н/м;  $A$  – площадь поршневого действия обечайки,  $\text{м}^2$ ;  $r^*$  и  $L^*$  – гидравлическое и инерционное сопротивления дроссельных каналов, Нс/м;  $E$  – емкость дополнительной камеры;  $P_1, P_2$  – давления в рабочих камерах гидроопоры;  $F_m, F$  – силы, действующие на гидроопору и на основание соответственно, Н [1, 10].

Демпфирование колебаний в гидроопоре с МРТ (рис.1), происходит, в основном, за счет резиновой обечайки - поршня 2 и сил инерции колеблющейся рабочей МРЖ в жидкостных объемах опоры, деформации подвижной гофрированной мембраны 5, коммутации управляемых индукционных дроссельных каналов 8 в ферромагнитной перегородке 7. При

этом, приведенная масса  $m_{ин}$  МРЖ в дроссельных каналах магнитной перегородки превосходит реальную массу рабочей МРЖ в рабочей и компенсационной камерах гидроопоры [1, 2, 11].

Под действием неоднородного магнитного поля в дроссельных каналах можно достичь объемных пондеромоторных сил в МРЖ на несколько порядков, превышающих силу тяжести, и тем самым, увеличивая вязкость МРЖ в их дроссельных каналах [1, 10, 11].

Настройка на заданные частоты вибросигналов МРТ гидроопоры (рис.2) осуществляется посредством выделения полосовым усилителем 4 первой гармоники вибросигнала, выделения амплитудным детектором 5 текущих экспериментальных значений демпфирующих амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) гидроопоры с МРТ, формирования напряжения возбуждения в блоке 9, включения - выключения ВЭ управляемых дроссельных каналов при помощи комбинаций “открыто – закрыто” посредством цифровых ключей 7, коммутирующими источники намагничивающего тока ВЭ 8 [1, 11].

Управление источниками намагничивающего тока ВЭ 8 достигается посредством коммутации цифровых ключей 7  $u_1$  при помощи микропроцессорной системы 6 по заранее заданной программе, задаваемой экспериментальными или расчётными демпфирующими АЧХ динамической жесткости гидроопоры [2, 11].

В результате изменяется динамическая жесткость перестраиваемого МРТ относительно статической жесткости без потери последней. Надлежащим выбором цифровых кодов коммутации ВЭ для МРТ гидроопоры одного типоразмера производится настройка передаточных характеристик в требуемом частотном диапазоне вибросигналов [2, 11]. Установлено, что изменением геометрии дроссельных отверстий и их числа можно изменять положение переходной зоны в частотной области АЧХ [1].

Гидроопоры с МРТ относятся к динамическим системам и их экстремальная демпфирующая АЧХ нестабильны. Имеется случайная зависимость экстремальной демпфирующей АЧХ гидроопор с МРТ от многих факторов. Изменение её экстремумов в зависимости от некоторых параметров – магнитной вязкости, температуры МРЖ, количества возбуждённых электромагнитным полем дроссельных каналов либо известно, либо неизвестно [1, 3, 4 -10].

Оптимальный фазовый сдвиг между действующим на гидроопору с МРТ механическим вибросигналом и электрическим сигналом той же частоты неразрывно связан с обнаружением минимума динамической жёсткости демпфирующей АЧХ гидроопоры (рис. 3).

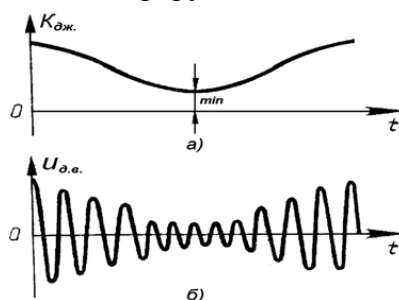


Рис. 3. Положение экстремальной точки минимума амплитудных значений вибросигнала при оптимальном фазовом сдвиге функций Н и В электромагнитного поля (а); вибросигнал с выходного вибродатчика при оптимальной настройке гидроопоры с МРТ (б)

При обнаружении минимума динамической жёсткости демпфирующей АЧХ гидроопоры с МРТ достигается оптимальная и синфазная настройка МРТ на частоту внешнего вибросигнала. При расстройке гидроопоры её динамическая жёсткость демпфирующей АЧХ не достигает своего минимального значения (рис.3), и вследствие этого гидроопора с МРТ не подстраивается под частоту входного вибросигнала.

При введении в МРТ гидроопор управляющей электромагнитной системы с ВЭ (рис. 1), в составе которых присутствуют ферромагнитные сердечники, управляющее магнитное поле должно изменяться синфазно с изменением частоты внешнего вибросигнала [1 - 3].

Для эффективной работы МРТ необходимо усиливать напряженность управляющего магнитного поля, менять его направление с частотой до 100 Гц. При напряженности магнитного поля в дроссельных каналах порядка 140 кА/м в ферромагнитных сердечниках, входящих в состав МРТ, остаточная магнитная индукция в них может достигать 30% от первоначальной [1-3]. Остаточная магнитная индукция увеличивает время переходных процессов при смене полярности внешнего магнитного поля из-за гистерезисных эффектов, ферромагнитных сердечников ВЭ. В результате этого возникает задержка между временными функциями напряженности  $H$  и индукции  $B$  магнитного поля. Возникающие при этом фазовые сдвиги функций  $H$  и  $B$  влияют на демпфирующие свойства гидроопоры с МРТ, и на её динамическую жёсткость. Динамическая жёсткость гидроопоры не достигает своего минимального значения (рис. 2), и вследствие этого она не подстраивается под частоту входного вибросигнала [5, 6, 10, 11].

Введение в конструкцию активных гидроопор с МРТ управляющих элементов с ферромагнитными материалами обуславливает решение следующих задач:

- оценку фазового сдвига динамических демпфирующих характеристик гидроопоры с МРТ с учётом гистерезисных эффектов в сердечниках МРТ;
- построение динамических характеристик гидроопоры с МРТ на базе частотных передаточных функций  $W(j\omega)$  и передаточных функций  $W(s)$ , полученных операторным методом при разной температуре МРЖ:
- учёт остаточной магнитной индукции ферромагнитных сердечников ВЭ;
- оценка непостоянных фазовых сдвигов функций  $H$  и  $B$  электромагнитного поля от гистерезиса ферромагнитных сердечников ВЭ МРТ;
- оценка влияния непостоянных фазовых сдвигов функций магнитного поля на динамическую жёсткость гидроопоры с МРТ.
- построение оптимальной и адаптивной САР с МРТ.

При разработке гидроопор с МРТ одним из основных этапов является определение их динамической жёсткости через их частотные передаточные функции. По частотным передаточным функциям строятся демпфирующие характеристики гидроопор с МРТ – АЧХ, определяющие их динамические жёсткости [1-3, 10, 11].

Так частотная передаточная функция для линейной системы виброизоляции с МРТ представляется в виде:

$$W(j\omega) = \frac{-m_{um}\omega^2 + bj\omega + c}{-(m + m_{um})\omega^2 + bj\omega + c} \quad (1)$$

В выражении (1)  $m$  - масса нагрузки на гидроопору, кг;  $m_{um}$  - приведенная масса МРТ, кг;  $b$  - гидравлический коэффициент трения МРЖ в дроссельных каналах  $c$  - жесткость упругой обечайки, Н/м;  $\omega$  – угловая частота возбуждения, рад;  $j\omega$  - угловая комплексная частота.

Передаточная функция  $W(j\omega)$  получена при решении совместной системы механических и гидравлических уравнений. По частотной передаточной функции вида (1) и с помощью продукта Excel 2003 авторами построены АЧХ динамической жёсткости гидроопоры с МРТ в зависимости от температуры рабочей МРЖ (на основе глицерина, при плотности –  $\rho = 1,26 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и динамической вязкости –  $\eta = 1480 \cdot 10^{-3}$  кг/м·с) в диапазоне температур от 20°C и до 80°C (рис. 4) [3 - 6].

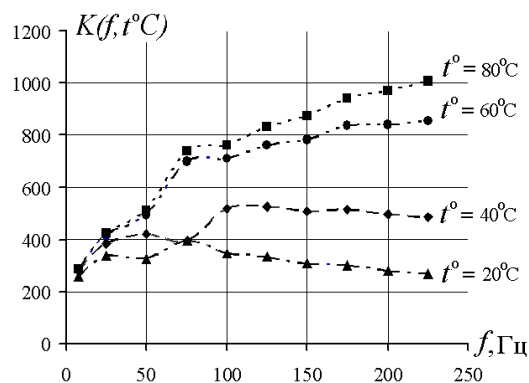


Рис. 4. Зависимости АЧХ динамической жёсткости гидропоры с МРТ в зависимости от температуры рабочей МРЖ (на основе глицерина) в диапазоне от 20°C и до 80°C

На рис. 5 представлена характерная зависимость динамической вязкости рабочей МРЖ гидропоры (на основе глицерина) при температурах рабочей жидкости от 20°C ÷ 80°C [3, 4].

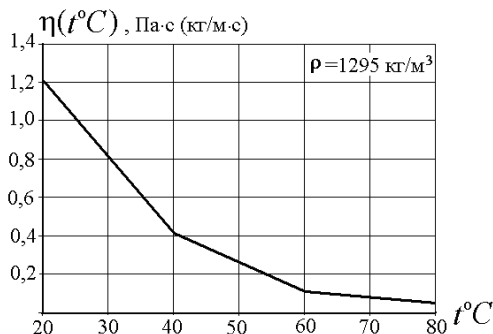


Рис. 5. Зависимость динамической вязкости рабочей МРЖ гидропоры (на основе глицерина) (б) при  $T_{p\text{МЖ}} = 20 \div 80$  °C

Анализ зависимости динамической вязкости рабочей МРЖ гидропоры на основе глицерина показывает, что динамическая вязкость при повышении температуры нетермостойких МРЖ от 20°C ÷ 80°C и выше изменяется и её необходимо учитывать. Поэтому и гидравлический коэффициент трения МРЖ в дроссельных каналах МРТ изменяется с ростом температуры и является *переменным* на каждой частоте возбуждения гидропоры (рис. 5) [3, 4].

Из приведённых зависимостей на (рис. 4) для АЧХ динамической жёсткости гидропоры с МРТ и (рис. 5) для динамической вязкости рабочей МРЖ следует, что для настройки гидропоры с МРТ на заданные частоты необходимо применять термостойкие рабочие МРЖ.

На рис. 6 представлена характерная АЧХ динамической жёсткости гидропоры с МРТ  $W(s)$  в виде гистограмм с учетом частотных сдвигов  $\Delta f_i$ , обусловленных гистерезисом ферромагнитных сердечников ВЭ при температуре МРЖ 20 °C [3 - 6].

Анализ гистограмм (рис. 6) – АЧХ  $W(s)$  показал, что гистерезис в сердечниках ВЭ оказывает отрицательное влияние на работу МРТ – возбуждение дроссельных каналов происходит не синхронно с фазой вибросигнала.

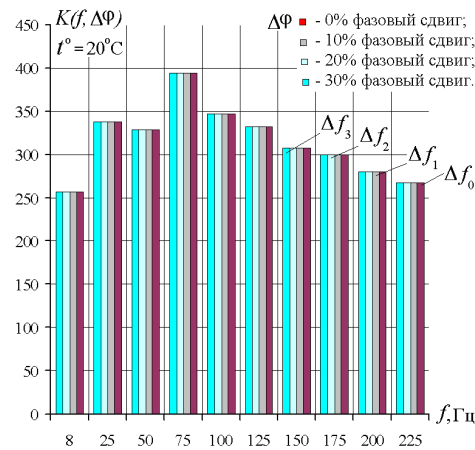


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика динамической жёсткости гидропоры в виде гистограмм при температуре МРЖ 20 °С

Частотные сдвиги  $\Delta f_i$  циклических частот  $f$  возбуждения МРТ, показанные на гистограммах (рис. 5) определялись через фазовые  $\Delta\varphi_i$  сдвиги и угловые частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  периодических функций  $H$  и  $B$ . Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно круговая частота вибросигнала и круговая частота управляющего сигнала ВЭ МРТ [3, 5, 6].

Угловая частота  $\omega_2$  частота электромагнитного поля ВЭ в дроссельных каналах МРТ, и она не совпадает с действительной угловой частотой  $\omega_1$  входного вибросигнала. Фазовый сдвиг между периодическими функциями  $H$  и  $B$  угловых частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при условии изменения вязкости МРЖ в дроссельных каналах при действии индукции магнитного поля ВЭ определяется выражением [3]

$$\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t. \quad (2)$$

С другой стороны, фазовый сдвиг периодических функций  $H$  и  $B$ , обусловленный остаточной индукцией ферромагнитных сердечников МРТ может быть определен

$$\Delta\varphi_r = \omega_1\Delta t_r \quad (3)$$

где  $\Delta t_r = \Delta t$  – временной сдвиг между периодическими функциями  $H$  и  $B$  электромагнитного поля ВЭ, обусловленный гистерезисом сердечников ВЭ и который меняется с изменением угловой частоты возбуждения  $\omega_1$  МРТ гидропоры [3, 5-7].

Эксперимент выполнялся при следующем допущении: изменение магнитной индукции в дроссельных каналах и ферромагнитных сердечниках происходит синхронно, поэтому данные фазовые сдвиги  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\varphi_r$ , определённые выражениями (2) и (3) можно приравнять.

При эксперименте условно приняты четыре уровня остаточной индукции ВЭ сердечников, которые обуславливают фазовые сдвиги  $\Delta\varphi_{r,i}$  между периодическими функциями  $H = H_m \sin \omega t$  и  $B = B_r \sin(\omega t - \varphi)$  в процентах от полного периода  $2\pi$  возбуждающего сигнала МРТ. Значения этих уровней приняты равными: 5%, 10%, 20% и 30%.

Далее, приравнивая правые части уравнений (2) и (3) при  $\Delta t_r = \Delta t$ , приходим к выражению

$$\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t = \omega_1\Delta t. \quad (4)$$

Из (4) находим временной сдвиг между периодическими функциями  $H$  и  $B$  электромагнитного поля ВЭ через угловые частоты возбуждения  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$\Delta t = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1} t. \quad (5)$$

Тогда угловая частота  $\omega_2$  частота управляющего сигнала ВЭ МРТ определяется уравнением

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{\omega_1\Delta t}{t}. \quad (6)$$



В выражении (6) слагаемое  $(-\omega_1 \Delta t/t)$  является непостоянным частотным сдвигом магнитного поля, вычитаемым из действительной угловой частоты  $\omega_1$  вибросигнала. Непостоянный частотный сдвиг магнитного поля обусловлен временной задержкой сигнала возбуждения МРТ из-за гистерезиса сердечников ВЭ [3].

Разделив (6) на  $2\pi$ , перейдем от угловых частот  $\omega$  к циклическим частотам  $f$

$$f_2 = f_1 - f_1 \Delta t/t, \quad (7)$$

где  $\Delta t/t = n$  – безразмерный коэффициент ( $t$  [с] – текущее время). Тогда непостоянная частота электромагнитного поля ВЭ имеет вид

$$f_2 = f_1 - n f_1, \quad (8)$$

где  $-n f_1 = \Delta f$  – непостоянный частотный сдвиг, вычитаемый из действительной частоты  $f_1$  вибросигнала.

В [3, 5, 6, 8] был рассмотрен случай влияния аномальной магнитной вязкости (АМВ) МРЖ в дроссельных каналах на работу МРТ гидропоры. Аномальная магнитная вязкость МРЖ в дроссельных каналах МРТ есть магнитное последствие, то есть, отставание от времени изменения намагниченности МРЖ, обусловленное остаточной индукцией в сердечниках ВЭ.

Из-за АМВ исходная намагниченность МРЖ может устанавливаться после изменения напряжённости поля, то есть, снятия постоянного магнитного поля через время от  $10^{-6}$  с до десятков секунд, что объясняется остаточной намагниченностью сердечников ВЭ с доменной структурой [1 - 8]. При этом возобновление протекания МРЖ в дроссельных каналах происходит через несколько десятков секунд после выключения внешнего постоянного магнитного поля. Это объясняется только через АМВ МРЖ и остаточную индукцию в сердечниках МРТ.

Релаксация МРЖ создает непостоянные частотные сдвиги АЧХ динамической жёсткости [3]. Изменяя частоту и амплитуду магнитного поля можно создать вращение коллоидных частиц и уменьшить вязкость МРЖ. Для размагничивания на МРЖ воздействуют магнитным полем с частотой, кратной периоду времени её релаксации:  $f_{p,мрж} = 3,0 \cdot 10^3$  Гц;  $t_{p,мрж} = 0,33 \cdot 10^{-3}$  с.

Устранять возникающие фазовые сдвиги между входными возмущающими воздействиями на гидроопру с МРТ и управляющими сигналами ВЭ необходимо для синхронного включения и выключения дроссельных каналов [1, 2, 5-7]. Для синхронного включения и выключения дроссельных каналов МРТ переменным магнитным полем с частотой вибросигнала необходимо учитывать остаточную магнитную индукцию, сердечников МРТ гидропоры. Учитывать остаточную магнитную индукцию, обусловленную гистерезисом сердечников ВЭ можно компенсацией фазового сдвига функций  $H$  и  $B$  магнитного поля за счёт управляемой временной задержки первой гармоники вибросигнала на время  $t_3 = T + \Delta t_r$ , где  $\Delta t_r$  – задержка обусловленная гистерезисом сердечников ВЭ;  $T$  – период повторения вибросигнала [2, 10]. Введение задержки временного сдвига на время  $t_3$  идеализируется как [19, 20].

Простейшее периодическое гармоническое колебание (напряжение, напряженность поля), определяется законом

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty$$

В случае простого гармонического колебания

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A \cos \psi(t)$$

набег фазы за какой-либо конечный промежуток времени от  $t = t_1 = t_0 + \Delta t_r$  до  $t = t_2 = t_0 + T + \Delta t_r$  будет равен

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \psi(t_2) - \psi(t_1) = (\omega_0 t_2 + \varphi_0) - (\omega_0 t_1 + \varphi_0) = \omega_0 (t_2 - t_1) = \\ &= \omega_0 [t_0 + T_0 + \Delta t_r - (t_0 + \Delta t_r)] = \omega_0 T_0 = \omega_0 T + \varphi_0 \quad (8) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при постоянной круговой частоте набег фазы за период повторения вибросигнала пропорционален длительности этого периода повторения. При этом фазовый



сдвиг функций  $H$  и  $B$  магнитного поля компенсируется и возбуждение дроссельных каналов в МРТ синхронно и синфазно с частотой вибросигнала.

Учет остаточной магнитной индукции сердечников МРТ неразрывно связан с обнаружением минимума динамической жёсткости демпфирующей характеристики гидропоры с МРТ. При обнаружении минимума динамической жёсткости гидропоры с МРТ достигается оптимальная и синфазная настройка МРТ на частоту внешнего вибросигнала (рис. 3). При этом САР обеспечивает наилучшие показатели качества при заданных реальных условиях работы и ограничениях, и является оптимальной. В этом режиме САР с цепью обратной связи МРТ работает в режиме экстремального поиска, который задается целью управления гидропорой.

#### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

САР гидропоры с МРТ должна работать в режиме самонастройки. Построение оптимального регулятора связано с выявлением внутренних зависимостей параметров системы, параметров режима объекта регулирования и управляющих сигналов. В настоящей работе выявлены зависимости для определения оптимальных фазовых сдвигов между сигналами с датчика обратной связи и управляющим.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект №15-19-10026)

#### **Список литературы**

1. Гордеев Б.А. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. / Б.А. Гордеев, В.И. Ерофеев, А.В. Синева, О.О. Мугин. - М.: Физматлит, 2004. - 175 с.
2. Охулков С.Н. Разработка метода расчёта и конструкции магнитореологических трансформаторов гидропор: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород, 2011. – 21 с.
3. Гордеев Б.А. Течение и релаксация магнитореологической жидкости в дроссельных каналах гидропор / Б.А. Гордеев, С.Н. Охулков, А.С. Плехов, Д.Ю. Титов, В.П. Горсков // Вестник машиностроения. – 2015. - №7. - С. 32-38.
4. Гордеев Б.А. Влияние температуры рабочей жидкости на динамические характеристики гидропор / Б.А. Гордеев, В.В. Бугайский, С.Н. Охулков, А.Н. Осмехин, В.П. Горсков // Вестник машиностроения. – 2012. - №12. - С. 22-26.
5. Гордеев Б.А. Влияние остаточной магнитной индукции на амплитудно-частотные характеристики магнитореологических трансформаторов / Б.А. Гордеев, С.Н. Охулков, В.В. Бугайский, А.Н. Осмехин // Вестник машиностроения. – 2014. - №10. - С. 32-38.
6. Гордеев Б.А. Оценка амплитудно-частотных характеристик электромеханического преобразователя с учетом гистерезисных эффектов в его ферромагнитных сердечниках / Б.А. Гордеев, А.Н. Осмехин, С.Н. Охулков, В.Г. Титов // Вестник ИГЭУ. – 2013. - №5. - С. 54-58.
7. Гордеев Б.А. Устранение гистерезисных эффектов в ферромагнитных сердечниках электромеханических преобразователей гидравлических вибропор / Б.А. Гордеев, А.Н. Осмехин, С.Н. Охулков, А.С. Плехов // Вестник ИГЭУ. – 2013. - №5. - С. 64-68.
8. Гордеев Б.А. К вопросу создания цилиндрического магнитореологического трансформатора в ортогональных магнитных полях / Б.А. Гордеев, В.Г. Маслов, С.Н. Охулков, А.Н. Осмехин // Проблемы машиностроения и надёжности машин. - 2014. - №2. - С. 15 -21.
9. Гордеев Б.А. Динамика протекания магнитореологической жидкости в дроссельных каналах при действии магнитных полей / Б.А. Гордеев, В.И. Ерофеев, С.Н. Охулков, А.В. Синева // Проблемы машиностроения и надёжности машин. - 2007. - №2. - С. 95-99.
10. Гордеев Б.А. Физические основы и конструкция индукционного магнитореологического трансформатора гидропор / Б.А. Гордеев, С.Н. Охулков, А.Н.

Осмехин, В.П. Горсков // Прикладная механика и технология машиностроения. - 2011. – №2. – С. 52-68.

11. Гордеев Б.А. Оптимальное управление магнитореологическими трансформаторами гидроопор в системах виброзащиты / Б.А. Гордеев, С.Н. Охулков, А.Н. Осмехин, В.П. Горсков // Прикладная механика и технология машиностроения. - 2011. - №2. – С. 31-42.

12. Шульман З.П. Магнитореологический эффект. / З.П. Шульман, В.И. Кордонский – Минск: Наука и техника, 1982. – 184 с.

13. Морозов Н.А. Нанодисперсные магнитные жидкости в технике и технологиях / Н.А. Морозов, Ю.Б. Казаков - Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т., 2011. – 264 с.

14. Райхер Ю.Л. Вращательная вязкость вязкоупругой магнитной жидкости / Ю. Л. Райхер, В.В. Русаков // Коллоидный журнал. – 2008. - №70. - С. 85-92.

15. Райхер Ю.Л. Динамическая восприимчивость вязкоупругих ферросуспензий / Ю. Л. Райхер, В.В. Русаков // Труды Минского международного форума по тепло- и массообмену (MIF-96). – Минск: Ин-т тепло- и массообмена им. Лыкова, 1996 г. - Т6. С. 216-220.

## ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ИСПЫТАНИЙ ГИДРООПОР НА ВИБРОСТЕНДЕ

**Б.А. Гордеев, С.Н.Охулков, Л.В.Филатов**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет.  
603950, Нижний Новгород, ул.Ильинская, д.65, e-mail: filatovlv@yandex.ru

Рассмотрены вопросы корреляционного анализа гармонических составляющих спектра входных и выходных сигналов при стендовых испытаниях гидроопор. Определены коэффициенты корреляции гармоник спектров, регрессионные соотношения между амплитудами входных гармоник, воздействующих на гидроопоры и выходных гармоник колебаний нагрузки виброопоры, выяснены гармоники подвергающиеся наибольшему демпфированию на основной частоте возбуждения стенда 6 Гц

Ключевые слова: вибрация в технике, виброзащита, гидравлические виброопоры, стендовые испытания, вибростенд, спектральный и статистический анализ, гашение колебаний, корреляционный и регрессионный анализ

**Постановка задачи.** Задачей статистического анализа данных, получаемых на вибростенде с помещенными на нем гидроопорами [1-3] под нагрузкой, является анализ и установление зависимостей между измеряемыми данными и параметрами гидроопоры. Гидропоры, как устройства предназначены для гашения вибрации, передаваемой на несущую нагрузку, широко применяются в различных технических системах. Фотография гидроопоры ОГ-300 под нагрузкой массой в 108.0 кг на вибростенде приведены на рис.1. Экспериментальные исследования динамических амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) гидравлических виброопор проводились на вибростенде ЭВ-342 (рис.1).



Рис. 1. Фотографии четырёх гидравлических виброопор ОГ-300 под нагрузкой массой в 108,0 кг на вибростенде ЭВ-342.

При экспериментальных исследованиях АЧХ гидравлических виброопор применялся измеритель общей и локальной вибрации ОКТАВА-110В/101ВМ [4], предназначенный для измерения среднеквадратичных, эквивалентных и пиковых уровней виброускорения, а также октавных и третьоктавных уровней виброускорения в децибелах. Вибростенд с установленными на нем нагруженными опорами представляет сложную многофазную и многорезонанс-

ную систему, динамический анализ которой представляется весьма затруднительным. Исследование взаимосвязей входных и выходных сигналов экспериментальными методами позволяет получить обширные данные по временным и частотным отсчетам. Для анализа и обобщения этих данных, выявления связей между сигналами и определения их значимости используются методы статистического анализа. Главной задачей статистического анализа [5,6] является установление связи между входными  $X$  и выходными  $Y$  измеряемыми величинами амплитуд гармоник и определение формы такой связи в виде регрессионных функций:

**Данные измерений.** Учитывая структуру измерительного комплекса и технологию проведения измерений, все полученные данные об амплитудах гармонических составляющих сигналов объединим в пространственно-временной куб данных со следующими условно обозначенными ребрами:

- *Диапазон* объединяет все измерения, получаемые при фиксированной частоте  $f_0$  возбуждения вибростенда.

$$f_0 \in \{6; 8; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55 \text{ Гц}\}.$$

- *Канал* объединяет данные временных отсчетов, получаемые в одном частотном канале в различные моменты времени измерения. Анализатор спектра имеет  $L=24$  гармонических составляющих, не зависящих от частоты основной гармоники вибростенда.

$$f_k \in \{0.8; 1.25; 1.6; 2; 2.5; 3.15; 4; 5; 6.3; 8; 10; 12.5; 16; 20; 25; 31.5; 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160 \} \text{ Гц}.$$

Канал представляет собой вектор временных отсчетов значений амплитуд гармонических составляющих спектра входных и выходных сигналов.

- *Шина* объединяет данные в каналах получаемые в один момент времени измерения и представляет собой вектор 24-х амплитуд во всех диапазонах. Количество таких измерений определяется необходимостью и возможностью измеряющего субъекта (в нашем случае мы имеем 5 измерений).

Кроме того, все данные поделим на **Входные**  $X = (x_{k,i})$  и **Выходные**  $Y = (y_{k,i})$  по отношению к испытуемым на стенде изделиям (гидропорам).

На рис.2 в графическом виде приведены измерения амплитуд входных и выходных сигналов во всех 24-х частотных каналах при возбуждении вибростенда на частоте  $f_0 = 6$  Гц. Всего проведено 5 экспериментальных серий измерений, на рис.2. приведены только 3 серии и усредненная по всем сериям картина. Помимо амплитуд на рисунке представлена так же амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) вибропор, показывающая дополнительные амплитуды вибрации, возникающие в опоре

$$U_k = Y_k^{\hat{a}i \hat{o}i \hat{a}} - X_k^{\hat{a}i \hat{a}}.$$

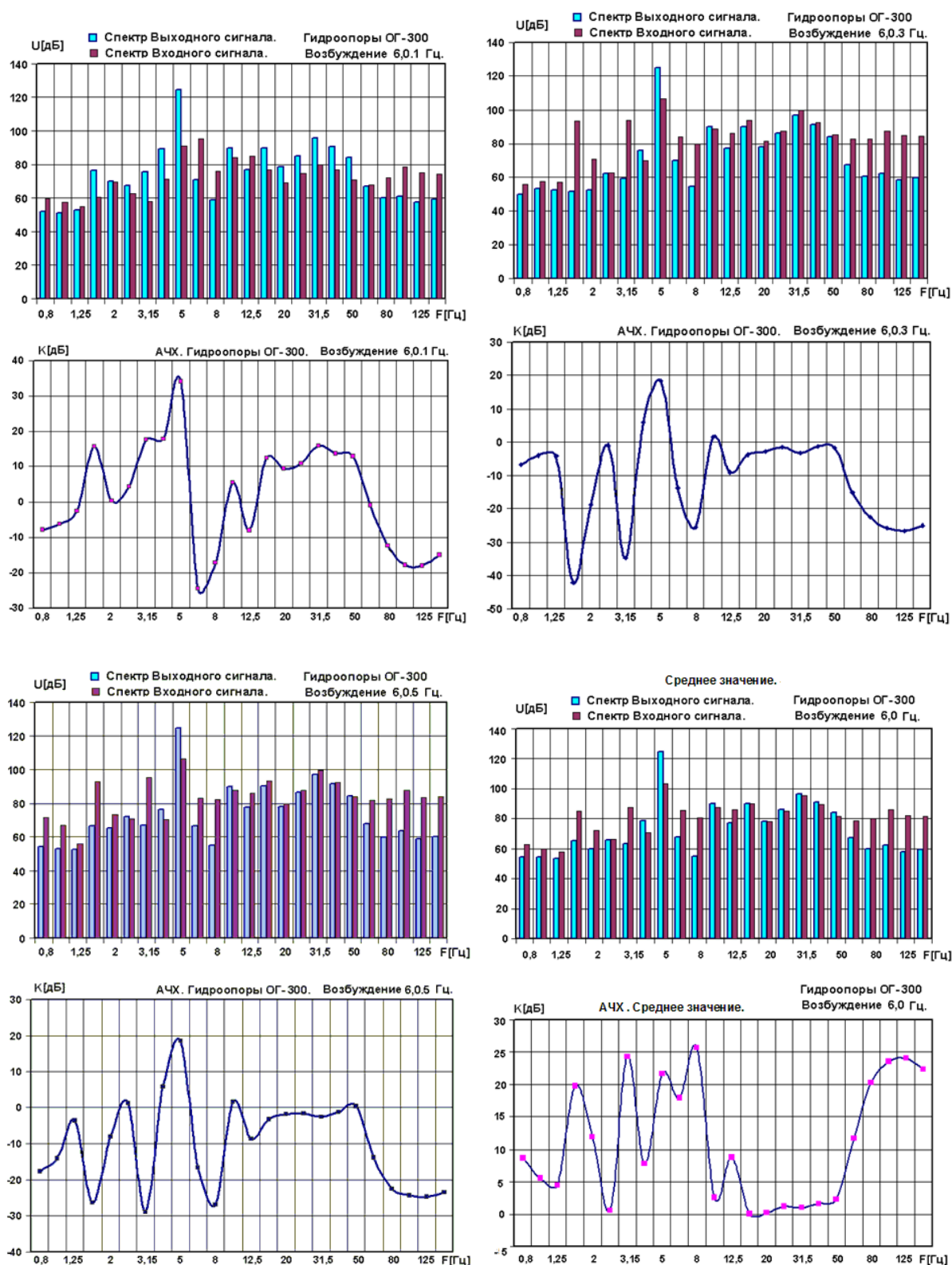


Рис. 2. Спектры входных выходных вибросигналов и АЧХ гидропоры на частоте возбуждения вибростенда 6,0 Гц. Измерения №№ 1, 3,5 и усредненные измерения.

Не рассматривая междиапазонную обработку данных и оставаясь в рамках определенного варианта-диапазона по частоте возбуждения вибростенда, тогда слой куба данных в фиксированном варианте возбуждения вибростенда будет выглядеть следующим образом, изображенном на рис.3:

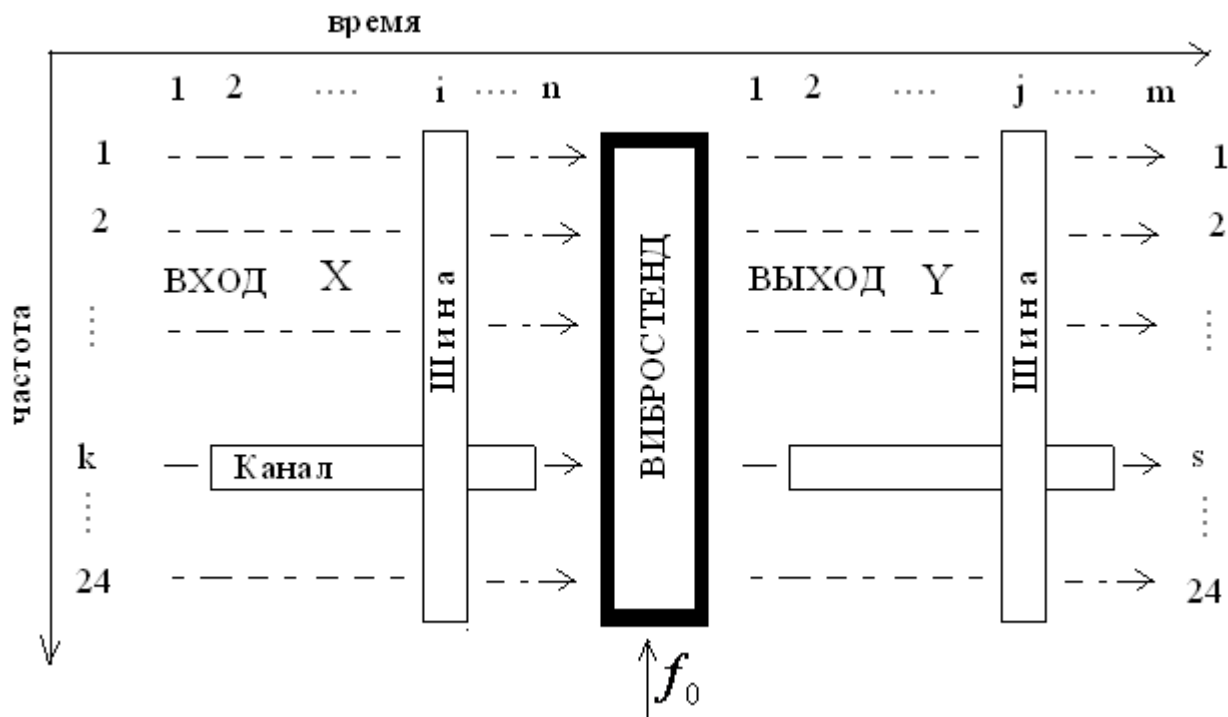


Рис. 3. Структура входных и выходных данных измерительного комплекса ОКТАВА при испытании гидропор на стенде.

Входная и выходная матрицы измерения  $X = (x_{k,i})$  и  $Y = (y_{k,i})$  представляют собой измеренные в децибелах амплитуды вибрации и вместе с основными числовыми характеристиками [7] выглядят для входной матрицы X следующим образом:

$S_{x1}^t$	$D_{x1}^t$	$\bar{x}_1^t$	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	·	·	·	$x_{n,1}$
$S_{x2}^t$	$D_{x2}^t$	$\bar{x}_2^t$	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	·	·	·	$x_{n,2}$
·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S_{xk}^t$	$D_{xk}^t$	$\bar{x}_k^t$	·	·	$(x_{k,i})$	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S_{x24}^t$	$D_{x24}^t$	$\bar{x}_{24}^t$	$x_{1,24}$	$x_{2,24}$	·	·	·	$x_{n,24}$
			$\bar{x}_1^f$	$\bar{x}_2^f$	·	$\bar{x}_i^f$	·	$\bar{x}_n^f$
			$D_{x1}^f$	$D_{x2}^f$	·	$D_{xi}^f$	·	$D_m^f$
			$S_{x1}^f$	$S_{x2}^f$	·	$S_{xi}^f$	·	$S_m^f$

К основным числовым характеристикам относятся средние значения амплитуд  $\bar{x}_k^t$ , дисперсии  $D_{xk}^t$  и стандартные отклонения  $S_{xk}^t$  в каналах и соответственно в шинах  $\bar{x}_k^f, D_{xk}^f, S_{xk}^f$ . Так же и для выходных данных строится матрица измерений  $Y = (y_{k,i})$  и ее основные статистические характеристики.

**Статистический анализ.** Задачей корреляционного анализа[5] является установление связи между измерениями в каналах и в шинах на входе и выходе вибростенда, определение их жесткости и значимости.

Для целей корреляционного анализа вычисляется корреляционная матрица между шинами:

$$R_{ij}^f = \frac{\overline{x_i^f \cdot y_j^f} - \overline{x_i^f} \cdot \overline{y_j^f}}{\sqrt{D_{xi}^f D_{yj}^f}}, \text{ здесь } \overline{x_i^f \cdot y_j^f} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_{ri} \cdot y_{rj} - \text{среднее произведение шин. Каждый}$$

элемент этой матрицы есть парный коэффициент корреляции между входной  $i$ -шиной и выходной  $j$ -шиной. Для определения значимости каждого коэффициента вычисляется наблюдаемая и критическая статистика Стьюдента

$$St_{ij}^f = R_{ij}^f \sqrt{\frac{n-L-1}{1-(R_{ij}^f)^2}}, \quad St_{крит}^f = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(\alpha, n-L-1)$$

где  $\alpha$  уровень значимости проверяемых гипотез об отсутствии связи между шинами (допустимый риск отвергнуть существующую на самом деле связь шин). Критерий Стьюдента по уровню значимости устанавливает порог  $St_{крит}^f$ , превышение которого наблюдаемой статистикой  $St_{ij}^f$  говорит о значимости корреляционной связи между шинами. Жесткостью связи является отношение

$$Sz_{ij}^f = |St_{ij}^f| / St_{крит}^f,$$

которое, чем больше единицы, тем более значима связь между шинами. Для вычисления значимости и жесткости корреляционных связей необходимо, что бы величина степеней свободы  $\nu = n - L - 1 \geq 3$ .

Задачей регрессионного анализа[6] является установление формы связи между коррелирующими каналами и шинами. В основу анализа положена линейная регрессионная модель[6]:

$$\vec{y}_j^f = b_{0j}^f + b_{1j}^f \vec{x}_1^f + b_{2j}^f \vec{x}_2^f + \dots + b_{nj}^f \vec{x}_n^f + \varepsilon_j^f$$

Здесь  $\vec{y}_j^f = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}, \dots, y_{24j})^T$  вектор измерений выходной  $j$ -шины,

$\vec{x}_i^f = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{24i})^T$  вектора измерений входных шин,

$\vec{b}_j^f = (b_{0j}^f, b_{1j}^f, \dots, b_{ij}^f, \dots, b_{nj}^f)^T$  - вектора коэффициентов линейной регрессии для  $j$ -шины,

$\vec{\varepsilon}_j^f = (\varepsilon_{1j}^f, \varepsilon_{2j}^f, \dots, \varepsilon_{sj}^f, \dots, \varepsilon_{24j}^f)^T$  - вектора ошибок (невязок) регрессии.

Линейная регрессия строится методом наименьших квадратов, согласно которому среднее значение вектора ошибок  $\overline{\vec{\varepsilon}_j^f} = 0$ , а его дисперсия  $D(\vec{\varepsilon}_j^f)$  минимальна среди всех линейных зависимостей  $\vec{y}_j^f$  от  $\vec{x}_i^f$ .

Коэффициенты регрессии вычисляются как  $\vec{b}_j^f = (X^N \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot \vec{y}_j^f)$ , при этом вектор  $\hat{\vec{y}}_j^f = (\vec{x}_i^f)^T \cdot \vec{b}_i^f$  - есть объясненная часть зависимости выходной  $j$ -шины от входных шин, а регрессия  $\vec{y}_j^f = \hat{\vec{y}}_j^f + \varepsilon_j^f$  представляется как сумма объясненной и не объясненной части зависимости выходной шины от входных.

Долю дисперсии объясненной части в регрессии в общей дисперсии наблюдаемого выхода называют коэффициентом детерминации для регрессии:  $R_j^2 = D(\hat{y}_j^f) / D(\bar{y}_j^f)$ ,

величину же  $R_j = \sqrt{R_j^2}$  - множественным коэффициентом корреляции, а  $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m R_j$  средним коэффициентом множественной корреляции. Для проверки значимости коэффициентов детерминации вычисляется наблюдаемый вектор статистики Фишера и его критическое значение

$$F_j = \frac{R_j^2 \cdot (n - L - 1)}{1 - R_j^2}, \quad F_{jкрит} = FОБР(\alpha, n, n - L - 1).$$

Превышение наблюдаемой статистики Фишера критического порога, говорит о значимости по уровню  $\alpha$  построенной регрессии для выходной j-шины.

Построенная значимая регрессионная модель по сути объясняет линейную часть преобразования спектра входного сигнала на виброопору в спектр выходного сигнала, что является характеристикой работы виброопоры. Модель может быть использована для прогноза преобразования задаваемой произвольной входной шины  $\vec{x}_p^f$  в выходную  $\hat{y}_p^f$ .

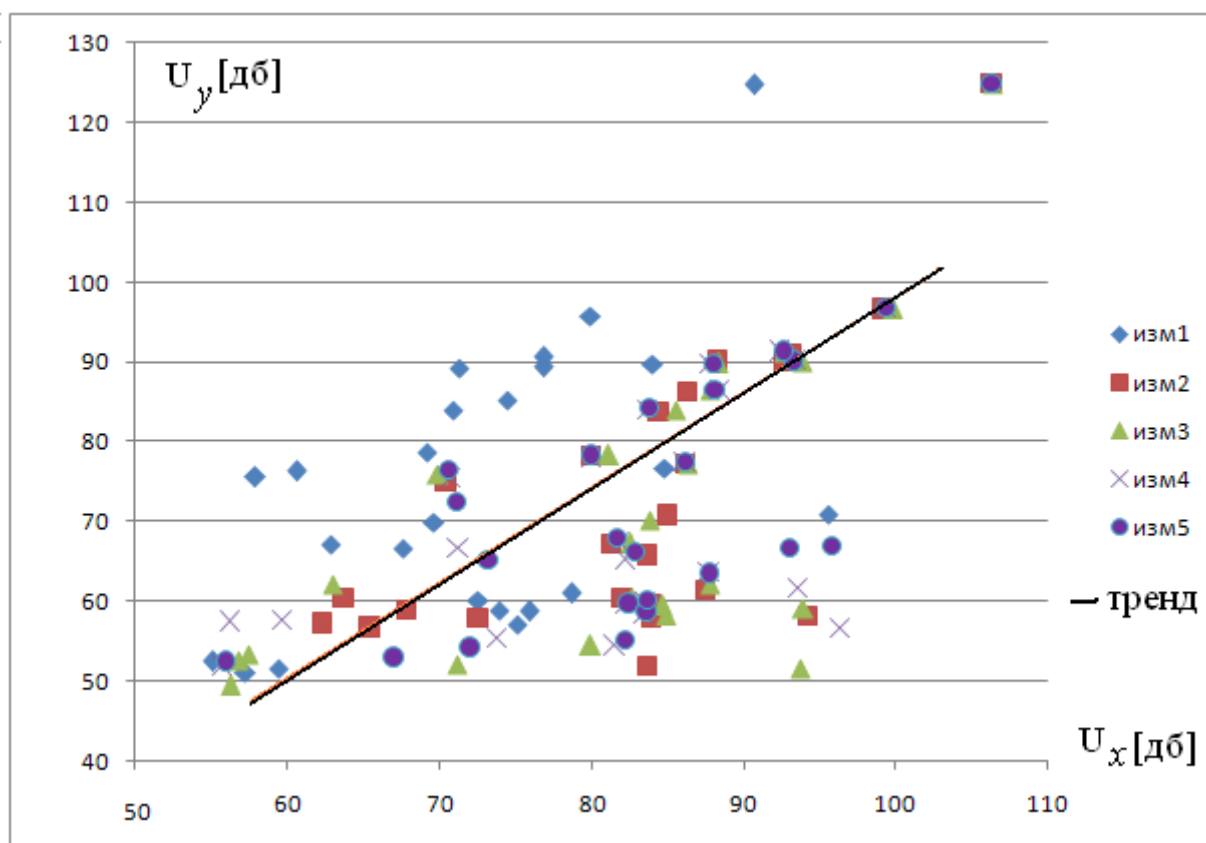


Рис. 4. Корреляционное поле 5-ти измерений в 24-х каналах при возбуждении вибростенда на частоте 6Гц.

Статистический анализ проводился между шинами, анализ между каналами при наличии только 5-ти измерений проводить пока нецелесообразно в силу невозможности установить значимые связи между каналами. На рис.4 приводятся расчеты анализа зависимостей между измерениями в шинах на частоте возбуждения стенда 6 кГц. Строятся матрица корреляции шин и коэффициенты линейной регрессии между входными и выходными шинами. Приводится прямая линия усредненной регрессии на фоне корреляционного поля измерений.



Приведенные расчеты показывают наличие достаточно жесткой по уровню значимости  $\alpha=0.05$  корреляции между измеряемыми входными и выходными шинами. Усредненные по измерениям коэффициенты регрессии  $b_i^f$  позволяют построить значимый линейный тренд, изображенный на рис.4. Тренд имеет положительный наклон с коэффициентов 0,9, что говорит о значимом в среднем по всем частотным каналам гашении гидропорами входных вибровозбуждений.

### **Выводы**

Анализ регрессионных зависимостей выходных сигналов от входных позволяет сделать следующие заключения:

1. Гармонические составляющие спектра в диапазоне 50 Гц представляют слабо коррелированный массив с коэффициентом множественной корреляции 0,5. Выше 50 Гц Коэффициент корреляции достигает уровня порядка 0,8 – 0,9.
2. Регрессионную зависимость выходных сигналов от входных гармонических составляющих выше 50 Гц можно аппроксимировать линейной зависимостью. На более низких гармониках аппроксимировать корреляционную зависимость между сигналами не представляется возможным.
3. Эффект демпфирования наблюдается только на гармониках выше 50 Гц, в среднем на 10 децибел. На нижних гармониках не наблюдается.
4. Исходя из вышеизложенного следует вывод. На частоте возбуждения вибростенда 6 Гц входной сигнал не является гармоническим, что вызвано переходными процессами в самом источнике вибрации, являющемся много резонансной системой.

Работа выполнена при поддержке РФФ №15-19-100-26.

### **Список литературы**

1. Фролов К.В., Тэнг Югенг, Абакумов Е.И., Синев А.В. Гидроупругие технологии виброизоляции - прогрессивное направление в виброзащите мобильных машин.// М., Приводная техника, №6, 2000. С. 13-21.
2. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., и др. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. - М.: Физматлит. 2004. - 176 с.
3. Фролов К.В. Вибрации в технике. Справочник Т.6 Защита от вибрации и ударов. М. Машиностроение. 1981, -456с.
4. Измеритель общей и локальной вибрации портативный ОКТАВА-110В/101ВМ. Руководство по эксплуатации./ РЭ 4277-002-76596538-05./ ГУППА «ОКТАВА-ЭЛЕКТРОНДШАЙН» ООО "ПКФ Цифровые приборы» Москва 2006 г. С. 28.
5. Андерсен Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Наука, 1963. -498с.
6. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. Тот 2. М., Наука, 1973, -895с.
7. Горбиков С.П., Филатов Л.В. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Н.Новгород, ННГАСУ, 2011, -105с.

## РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ КОЛЕБАНИЙ С МНОГОКАНАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

Горбцов А.С.<sup>1</sup>, Рыжов Е.Н.<sup>2</sup>, Полянина А.С.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ВолгГТУ, Волгоград, Россия, e-mail: [vm@vstu.ru](mailto:vm@vstu.ru)

<sup>2</sup>ВолгГТУ, Волгоград, Россия, e-mail: [vm@vstu.ru](mailto:vm@vstu.ru)

<sup>3</sup>Камышинский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ  
403874, г. Камышин, ул. Ленина, 6А, e-mail: [A.S.Churzina@mail.ru](mailto:A.S.Churzina@mail.ru)

Разрабатывается теория аналитического построения генераторов автоколебаний. Возникновение автоколебательных режимов связано с локализацией движений в ограниченных областях пространства состояний системы. Полученные управляющие параметры определяют многомерный генератор асимптотически устойчивых траекторий движения.

**Ключевые слова.** Устойчивость, автоколебания, инвариантность, предельный цикл.

В связи с решением современных задач управляемых колебательных процессов особое место в динамике механических систем занимают способы синтеза автоколебательных режимов движения по замкнутым траекториям различного вида.

Для задания объекта управления в виде пространственной механической системы обычно используются уравнения динамики в форме дифференциально-алгебраических уравнений [2]. Чтобы обеспечить устойчивое движение заданных точек объекта управления предлагается дополнить систему с помощью уравнений связей нелинейными дифференциальными уравнениями – генераторами программных траекторий, решениями которых являются замкнутые, асимптотически устойчивые кривые заданной формы.

Рассмотрим задачу синтеза таких генераторов автоколебаний:

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = \alpha_{2i} x_{2i}^{2m-1} + \beta_{2i} x_{2i}^{2k-1} + \gamma_{2i} x_{2i}^{2l-1}, \\ \dot{x}_{2i} = \alpha_{2i-1} x_{2i-1}^{2m-1} + \beta_{2i-1} x_{2i-1}^{2k-1} + \gamma_{2i-1} x_{2i-1}^{2l-1} + U_i(x_{2i-1}, x_{2i}) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n U_{i,j}(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2i}), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}(t)}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}(t)}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}(t)}{c_i^{2l}} \right) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $m, k, l \in \mathbb{N}$ .

Решение задачи основывается на построении функции Ляпунова. Подход к решению задачи синтеза заключается в нахождении стабилизирующих внутрисистемных управлений  $U_i(x_{2i-1}, x_{2i})$  в фазовом пространстве каждой из  $n$  подсистем и межсистемных управлений  $U_{i,j}(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2i})$ , связывающих эти подсистемы. Данный пункт, в частности, обобщает результаты работы [3].

Будем искать управляющие функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_i(x_{2i-1}, x_{2i}) &= \sigma_i x_{2i} + \beta_{2i-1,2i}^m x_{2i-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^m x_{2i}^{2m+1} + \beta_{2i-1,2i}^k x_{2i-1}^{2k} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^k x_{2i}^{2k+1} + \\ &\quad + \beta_{2i-1,2i}^l x_{2i-1}^{2l} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^l x_{2i}^{2l+1}, \\ U_{i,j}(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2i}) &= \beta_{2j-1,2i}^m x_{2j-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^m x_{2j}^{2m} x_{2i} + \beta_{2j-1,2i}^k x_{2j-1}^{2k} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^k x_{2j}^{2k} x_{2i} + \\ &\quad + \beta_{2j-1,2i}^l x_{2j-1}^{2l} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^l x_{2j}^{2l} x_{2i}, \end{aligned}$$

где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $j \neq i$ .

Введем внутреннюю и внешнюю полукрестности поверхности  $\partial\mathbf{D}^{2n}$ :  $B_{\delta}^{-}(\partial\mathbf{D}^{2n}) = \text{Int}(\mathbf{D}^{2n}) \setminus \{\mathbf{0}\}, B_{\delta}^{+}(\partial\mathbf{D}^{2n})$ ,  $\delta > 0$ , где  $\text{Int}(\mathbf{D}^{2n})$  – внутренность многообразия  $\mathbf{D}^{2n}$ , т.е.

$$B_{\delta}^{-}(\partial\mathbf{D}^{2n}) = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n} \left| 0 < \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right) < 1 \right. \right\},$$

$$B_{\delta}^{+}(\partial\mathbf{D}^{2n}) = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n} \left| 1 < \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right) < 1 + \delta \right. \right\}.$$

**Теорема.** 1) Для того чтобы граница  $\partial\mathbf{D}^{2n}$  являлась инвариантным многообразием системы (1) достаточно выполнения следующих соотношений на коэффициенты управляющих функций:

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = \pm 2ma_{2i-1}^{-2m}, \alpha_{2i} = \mp 2ma_{2i}^{-2m}, \beta_{2i-1} = \pm 2kb_{2i-1}^{-2k}, \beta_{2i} = \mp 2kb_{2i}^{-2k}, \\ \gamma_{2i-1} = \pm 2lc_{2i-1}^{-2l}, \gamma_{2i} = \mp 2lc_{2i}^{-2l}, \beta_{2j-1,2i}^m = \mp \sigma_i a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j,2i}^m = \mp \sigma_i a_{2j}^{-2m}, \\ \beta_{2j-1,2i}^k = \mp \sigma_i b_{2j-1}^{-2k}, \beta_{2j,2i}^k = \mp \sigma_i b_{2j}^{-2k}, \beta_{2j-1,2i}^l = \mp \sigma_i c_{2j-1}^{-2l}, \beta_{2j,2i}^l = \mp \sigma_i c_{2j}^{-2l}, \end{cases}$$

где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

2) Если при этом коэффициенты полиномиальных управлений удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \beta_{2j-1,2i}^m = -\sigma_i a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j-1,2i}^k = -\sigma_i b_{2j-1}^{-2k}, \beta_{2j-1,2i}^l = -\sigma_i c_{2j-1}^{-2l}, \\ \beta_{2j,2i}^m = -\sigma_i a_{2j}^{-2m}, \beta_{2j,2i}^k = -\sigma_i b_{2j}^{-2k}, \beta_{2j,2i}^l = -\sigma_i c_{2j}^{-2l}, \end{cases}$$

где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , то граница  $\partial\mathbf{D}^{2n}$  является асимптотически притягивающей для траекторий, с начальными условиями, определенными внутри многообразия  $\mathbf{D}^{2n}$  и в некотором  $\delta$ -слое, примыкающем к поверхности извне, т.е. множество  $B_{\delta}^{-}(\partial\mathbf{D}^{2n}) \cup B_{\delta}^{+}(\partial\mathbf{D}^{2n})$  является областью асимптотической устойчивости интегрального многообразия  $\mathbf{D}^{2n}$ .

**Доказательство теоремы.**

1) **Инвариантность границы  $\partial\mathbf{D}^{2n}$ .** Рассмотрим знакоопределенную функцию  $F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right)$ . Ее поверхности уровня являются компактными и односвязными. Полная производная функции  $F(\mathbf{X})$  на движения системы (1), учитывая условия 1) теоремы на коэффициенты, равна:

$$\sum_{i=1}^n \left( \dot{x}_{2i-1} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{2i-1}} + \dot{x}_{2i} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{2i}} \right) = P(\mathbf{X})(1 - F(\mathbf{X})), \quad (2)$$

то есть

$$\sum_{i=1}^n \left( (\alpha_{2i} x_{2i}^{2m-1} + \beta_{2i} x_{2i}^{2k-1} + \gamma_{2i} x_{2i}^{2l-1}) \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{2i-1}} + (\alpha_{2i-1} x_{2i-1}^{2m-1} + \beta_{2i-1} x_{2i-1}^{2k-1} + \gamma_{2i-1} x_{2i-1}^{2l-1} + \right.$$

$$\left. U_i(x_{2i-1}, x_{2i}) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n U_{i,j}(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2i}) \right) \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{2i}} \Bigg) = P(\mathbf{X})(1 - F(\mathbf{X})),$$

где  $P(\mathbf{X}) = \pm 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i \left( \frac{mx_{2i}^{2m}}{a_{2i}^{2m}} + \frac{kx_{2i}^{2k}}{b_{2i}^{2k}} + \frac{lx_{2i}^{2l}}{c_{2i}^{2l}} \right)$ .

Равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда вектор  $\mathbf{X}$  принадлежит поверхности  $\sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right) = 1$ . Введенная функция знакопостоянна как на внутренности, ограниченной ее поверхностью уровня, так и в некотором  $\delta$  – слое, примыкающем к границе  $\partial \mathbf{D}^{2n}$  извне.

Соотношение (2) является условием инвариантности поверхности, описываемой уравнением  $1 - F(\mathbf{X}) = 0$ . В нашем случае эта поверхность является границей

$$\partial \mathbf{D}^{2n} \equiv \left\{ \mathbf{X} \in R^{2n} \mid 1 - \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right) = 0 \right\}$$

многообразия  $\mathbf{D}^{2n}$ , т.е. условие инвариантности выполняется только для одной из поверхностей уровня функции  $F(\mathbf{X})$ , для  $\partial \mathbf{D}^{2n}$ .

Таким образом, траектории системы, начинающиеся на границе многообразия, не покинут ее при  $t \rightarrow +\infty$ . Итак, поверхность  $\partial \mathbf{D}^{2n}$  является инвариантным многообразием системы (1).

**2) Асимптотическая устойчивость границы  $\partial \mathbf{D}^{2n}$ .** Пусть полиномиальные управления с обратной связью по вектору состояния имеют вид:

$$\begin{cases} u_i(x_{2i-1}, x_{2i}) = \sigma_i x_{2i} + \beta_{2i-1,2i}^m x_{2i-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^m x_{2i}^{2m+1} + \beta_{2i-1,2i}^k x_{2i-1}^{2k} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^k x_{2i}^{2k+1} \\ \quad + \beta_{2i-1,2i}^l x_{2i-1}^{2l} x_{2i} + \beta_{2i,2i}^l x_{2i}^{2l+1}, \\ u_{i,j}(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2i}) = \beta_{2j-1,2i}^m x_{2j-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^m x_{2j}^{2m} x_{2i} + \beta_{2j-1,2i}^k x_{2j-1}^{2k} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^k x_{2j}^{2k} x_{2i} + \\ \quad \beta_{2j-1,2i}^l x_{2j-1}^{2l} x_{2i} + \beta_{2j,2i}^l x_{2j}^{2l} x_{2i}, \\ i, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i; \end{cases}$$

где  $\beta_{2j-1,2i}^m = -\sigma_i a_{2j-1}^{-2m}$ ,  $\beta_{2j-1,2i}^k = -\sigma_i b_{2j-1}^{-2k}$ ,  $\beta_{2j-1,2i}^l = -\sigma_i c_{2j-1}^{-2l}$ ,  $\beta_{2j,2i}^m = -\sigma_i a_{2j}^{-2m}$ ,  $\beta_{2j,2i}^k = -\sigma_i b_{2j}^{-2k}$ ,  $\beta_{2j,2i}^l = -\sigma_i c_{2j}^{-2l}$ ;  $i$  – номер нелинейной колебательной подсистемы.

Вычислим полную производную функции  $F(\mathbf{X})$  на множестве  $V_\delta^-(\partial \mathbf{D}^{2n}) \cup V_\delta^+(\partial \mathbf{D}^{2n})$ .

На внутренности  $V_\delta^-(\partial \mathbf{D}^{2n})$  полная производная  $\frac{d}{dt} F(\mathbf{X})$  является определено положительной:

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{X}) = 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i \left( \frac{mx_{2i}^{2m}}{a_{2i}^{2m}} + \frac{kx_{2i}^{2k}}{b_{2i}^{2k}} + \frac{lx_{2i}^{2l}}{c_{2i}^{2l}} \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} + \frac{x_i^{2k}}{b_i^{2k}} + \frac{x_i^{2l}}{c_i^{2l}} \right) \right).$$

Следовательно,  $F(\mathbf{X})$  – функция Ляпунова на внутренности  $V_\delta^-(\partial \mathbf{D}^{2n})$ . Определенная положительность означает, что траектории системы на множестве  $V_\delta^-(\partial \mathbf{D}^{2n})$  будут направлены к границе  $\partial \mathbf{D}^{2n}$  изнутри, пересекая поверхности уровня функции  $F(\mathbf{X})$ , принадлежащие  $V_\delta^-(\partial \mathbf{D}^{2n})$ .

Во внешнем  $\delta$ -слое,  $\frac{d}{dt}F(\mathbf{X})$  будет определено отрицательно, т.е.  $F(\mathbf{X})$  также является функцией Ляпунова на  $V_\delta^+(\partial D^{2n})$ , и траектории, определенные в этом слое, будут направлены извне к границе  $\partial D^{2n}$ .

Осталось проверить, что на  $\partial D^{2n}$  нет  $\alpha$ -предельных точек. Для нахождения особых точек следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{2i}x_{2i}^{2m-1} + \beta_{2i}x_{2i}^{2k-1} + \gamma_{2i}x_{2i}^{2l-1} = 0, \\ \alpha_{2i-1}x_{2i-1}^{2m-1} + \beta_{2i-1}x_{2i-1}^{2k-1} + \gamma_{2i-1}x_{2i-1}^{2l-1} + \sigma_i x_{2i} \left( 1 + \frac{1}{\sigma_i} \sum_{j=1}^{2n} (\beta_{j,2i}^m x_j^{2m} + \beta_{j,2i}^k x_j^{2k} + \beta_{j,2i}^l x_j^{2l}) \right) = 0, \end{cases}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $k > m$ ,  $l > m$ . После преобразования система примет вид:

$$\begin{cases} x_{2i}^{2m-1} (\alpha_{2i} + \beta_{2i}x_{2i}^{2(k-m)} + \gamma_{2i}x_{2i}^{2(l-m)}) = 0, & (2i-1) \\ x_{2i-1}^{2m-1} (\alpha_{2i-1} + \beta_{2i-1}x_{2i-1}^{2(k-m)} + \gamma_{2i-1}x_{2i-1}^{2(l-m)}) + \\ \sigma_i x_{2i} \left( 1 + \frac{1}{\sigma_i} \sum_{j=1}^{2n} (\beta_{j,2i}^m x_j^{2m} + \beta_{j,2i}^k x_j^{2k} + \beta_{j,2i}^l x_j^{2l}) \right) = 0, & (2i) \end{cases}$$

Из выполнения условий теоремы на коэффициенты  $\alpha_{2i}$ ,  $\beta_{2i}$ ,  $\gamma_{2i}$ , следует, что выражение  $\alpha_{2i} + \beta_{2i}x_{2i}^{2(k-m)} + \gamma_{2i}x_{2i}^{2(l-m)}$  не равно нулю; тогда  $(2i-1)$ -ое уравнение системы даст  $x_{2i} = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Учитывая это, получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{2i} = 0, \\ x_{2i-1}^{2m-1} (\alpha_{2i-1} + \beta_{2i-1}x_{2i-1}^{2(k-m)} + \gamma_{2i-1}x_{2i-1}^{2(l-m)}) = 0. \end{cases}$$

Аналогично, выражение  $\alpha_{2i-1} + \beta_{2i-1}x_{2i-1}^{2(k-m)} + \gamma_{2i-1}x_{2i-1}^{2(l-m)}$  отлично от нуля и из  $(2i)$ -ого уравнения системы следует, что  $x_{2i-1} = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Таким образом, система имеет только тривиальное решение – единственную точку покоя  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ ; на множестве  $V_\delta^-(\partial D^{2n}) \cup V_\delta^+(\partial D^{2n})$  нет точек покоя,  $\omega$  – предельных точек. Начало координат  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$  является  $\alpha$ -предельной точкой и не принадлежит поверхности  $\partial D^{2n}$ .

Согласно теореме Зубова В.И. [1] об асимптотической устойчивости инвариантных множеств с учетом поведения траекторий на  $V_\delta^-(\partial D^{2n}) \cup \partial D^{2n} \cup V_\delta^+(\partial D^{2n})$  получим, что множество  $V_\delta^-(\partial D^{2n}) \cup V_\delta^+(\partial D^{2n})$  является областью притяжения для  $\partial D^{2n}$ . **Теорема доказана.**

Таким образом, поверхность  $\partial D^{2n}$  является инвариантным асимптотически устойчивым многообразием системы управления (1).

Рассмотрим систему (1), состоящую из трех колебательных двумерных подсистем, связанных между собой нелинейным образом: при  $i = 1, 2, 3$ .

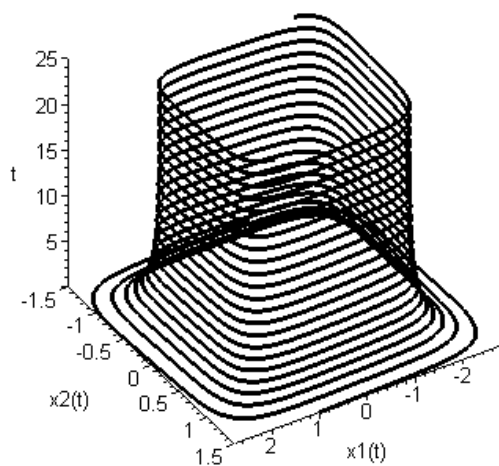


Рис. 1.

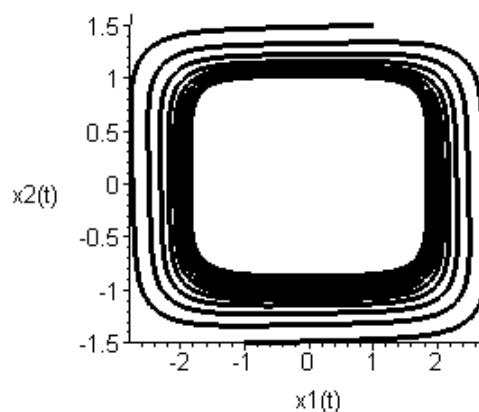


Рис. 2.

На Рис. 1 представлена интегральная трубка процесса формирования автоколебательного режима в фазовом подпространстве  $X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^6$  первой подсистемы. Соответствующий устойчивый предельный цикл приведен на Рис. 2.

Поведение процессов стабилизации наблюдается в подпространстве второй подсистемы: на Рис. 3 приведено движение интегральных кривых, с начальными условиями, выбранными в областях, разделенных устойчивым предельным циклом (рис. 4) в  $X_3 \times X_4 \subset \mathbb{R}^6$ .

Рис. 5 – 6 отражают процесс выхода на режим автоколебаний третьей подсистемы в подпространстве  $X_5 \times X_6 \subset \mathbb{R}^6$ .

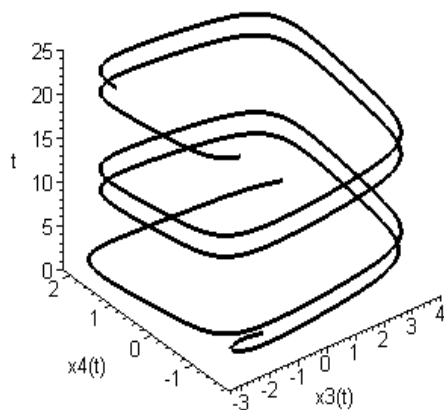


Рис. 3.

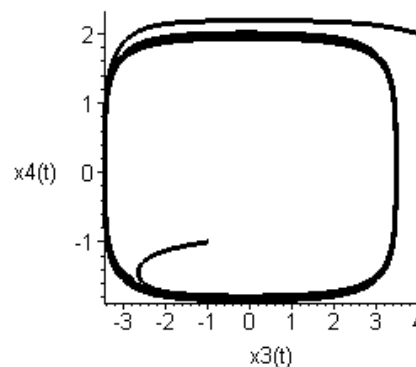


Рис. 4.

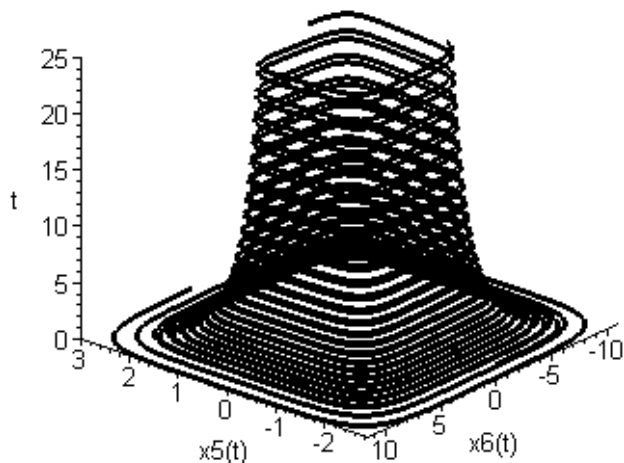


Рис. 5.

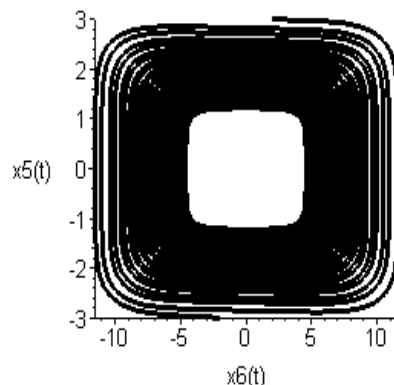


Рис. 6.

Схема синтеза, предложенная в работе, может использоваться в траекторных задачах робототехники, при построении генераторов колебаний и преобразователей частоты.

Рассмотрено использование предложенных дифференциальных уравнений в системах генерации программных движений звеньев роботов, при этом притягивающие инвариантные многообразия обеспечивают устойчивое движение объекта по заданным траекториям.

Траектория, полученная предлагаемым методом, содержит участки постоянного уровня, что необходимо для работы шагающего привода. При этом обеспечивается устойчивость к возмущениям и изменениям параметров системы.

### **Список литературы**

1. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. – М., 2003, 224с.
2. Alessandro Fumagalli, Gabriella Gaias, Pierangelo Masarati. A simple approach to kinematic inversion of redundant mechanisms. ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, p. 1931-1939.
3. Горобцов, А.С. Синтез интегральных поверхностей Ламэ и стабилизация колебаний в их окрестностях / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Динамика сложных систем. – 2009. - Т. 3, № 1. – С. 59-62.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИМЕСИ В ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

**А.В. Грезина, И.В. Малышева, А.Г. Панасенко**

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23,  
e-mail: [aleksandra-grezina@yandex.ru](mailto:aleksandra-grezina@yandex.ru), [A.G.Panasenko@yandex.ru](mailto:A.G.Panasenko@yandex.ru)

Численными методами исследуется распределение примеси в трехмерной изотропной ограниченной среде. Расчеты проведены для кристалла в форме параллелепипеда. Источниками примеси являются прямоугольные пластинки, расположенные на поверхности кристалла. Найдено объемное распределение примеси и концентрационные профили. Обсуждается условие выбора коэффициента диффузии для практических расчетов.

**Ключевые слова:** численное моделирование, диффузия, концентрационный профиль

Широкий класс свойств и процессов, происходящих в непрерывных средах (например, в кристаллах) определяются находящимися в них примесями. Физические свойства таких сред зависят не только от вида примеси, но и от ее распределения в среде. Одним из процессов, который допускает возможность формировать нужное распределение, является диффузия. Диффузией можно управлять, задавая геометрию источника примеси, температуру и время отжига (см., например, [1]). Для выбора оптимальных параметров незаменимо математическое моделирование процесса диффузии. Геометрическая сложность реальных объектов практически исключает аналитические методы решения задачи и заставляет использовать численные методы.

В качестве основы для численного моделирования выбрана система ANSYS, в которой реализуется метод конечных элементов.

Распределение примеси определяется решением уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. В уравнении (1)  $D = D(T)$  - коэффициент диффузии,  $T$  - температура,  $C(x, y, z, t)$  - концентрация примеси в кристалле.

Так как основной целью работы является исследование оптических элементов для лазеров, то в геометрическом смысле здесь кристалл представляется параллелепипедом. Для оптимальной генерации излучения необходимо, чтобы максимальная концентрация активной примеси достигалась в области образца, удаленной от торцов. В этом случае достигается высокая степень генерации лазерного излучения и снижается вероятность лазерного пробоя на торцах активного элемента [2].

Температура, при которой протекает диффузия, определяет коэффициент диффузии и, как следствие, скорость изменения концентрации примеси в кристалле. Данные расчеты относятся к изотермическому процессу, т.е. предполагается, что  $D = \text{const}$ .

При заданных значениях  $D$  распределение примеси  $C(x, y, z, t)$  определяется геометрией кристалла и геометрией и мощностью источников примеси.

Рассмотрим сначала следующую схему диффузии (рис. 1):



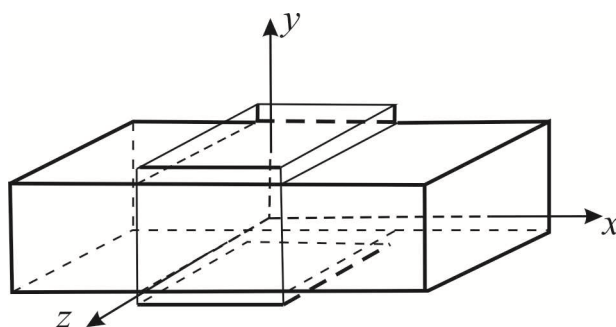


Рис. 1

Кристалл представляет собой пластину длиной  $a$  и толщиной  $b$ . Источниками примеси являются две одинаковые металлические пленки шириной  $d$ , перекрывающие кристалл полностью. В такой системе диффузионные потоки, перпендикулярные плоскости  $(x, z)$ , отсутствуют, уравнение (1) сводится к двумерной (плоской) задаче определения  $C(x, z, t)$ .

Выбирая значения:  $a = 10\text{ мм}$ ,  $b = 2,5\text{ мм}$ ,  $d = 4\text{ мм}$ ,  $D = 5,0 \cdot 10^{-9}\text{ см}^2/\text{с}$  при  $T = 1050^\circ\text{C}$ ,  $t = 10^6\text{ с}$  [1], получим решение, представленное на рис. 2. В расчетах концентрация примеси на поверхности образца принята  $C_0 = 1\text{ см}^{-3}$ .

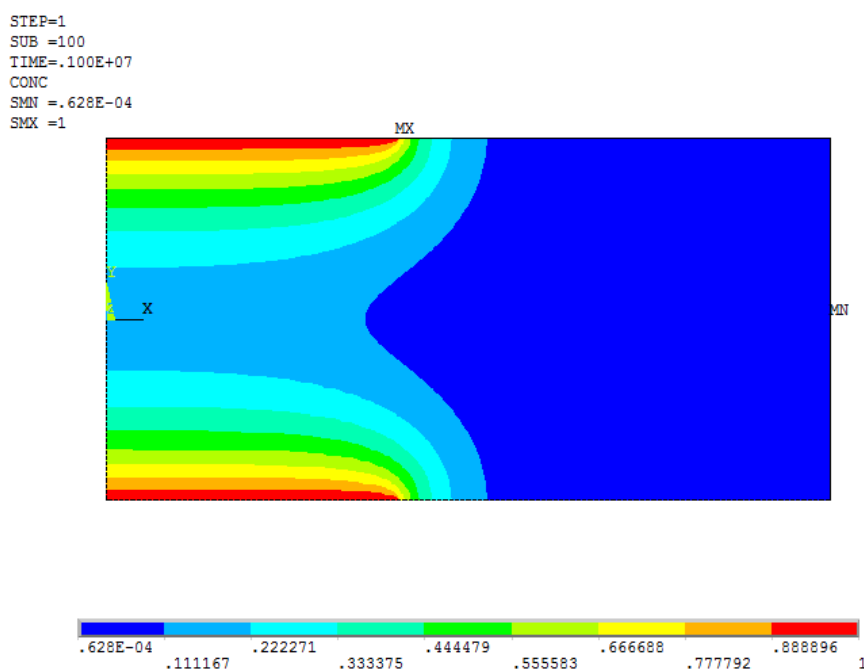


Рис. 2

Как видно из рис. 2, приведенные расчеты позволяют легко определить качественно область распределения концентрации нужного уровня. Для всех численных расчетов принималось значение коэффициента диффузии  $D = 5,0 \cdot 10^{-9}\text{ см}^2/\text{с}$ , которое использовалось в соответствующих расчетах в работе [1]. Поэтому все расчеты, выполненные с помощью системы ANSYS [7], сравнивались с соответствующими расчетами этой работы. Во всех случаях сравнение привело к хорошему совпадению. Сравнение с другими экспериментальными результатами имеет смысл только для установления качественного совпадения. Дело в том, что определение коэффициента диффузии  $D$  является трудной задачей. Экспериментальные значения  $D$ , полученные разными исследователями, довольно сильно различаются. Для иллюстрации приведем несколько значений  $D$  ( $\text{см}^2/\text{с}$ ) в среде ZnSe при  $T = 1000^\circ\text{C}$  для некоторых примесей (Cr, Co, Fe).

Таблица 1.

Структура	Примесь	$D$ (см <sup>2</sup> /с)	Литературный источник
монокристалл	Cr	$8,25 \cdot 10^{-9}$	[3]
	Cr	$1,13 \cdot 10^{-7}$	[4]
	Co	$7,07 \cdot 10^{-9}$ для (100) $3,14 \cdot 10^{-8}$ для (111)	[6]
поликристалл	Cr	$3,59 \cdot 10^{-9}$	[2]
	Co	$3,07 \cdot 10^{-9}$	[4]
	Cr	$5,04 \cdot 10^{-10}$	[5]
	Fe	$7,95 \cdot 10^{-10}$	[5]

Очевидно, лучший результат при численном моделировании распределения примеси будет получен при использовании эмпирического коэффициента диффузии  $D$ , полученного для непосредственно исследуемого материала и тождественных условий технологического процесса. Если это невозможно, то придется проводить расчеты для известных значений  $D$  с дальнейшим критическим анализом.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда пленка (источник примеси) не полностью перекрывает кристалл. Задача определения  $C = C(x, y, z, t)$  становится трехмерной. Для упрощения примем, что кристалл является прямоугольной пластинкой с размерами (мм)  $10 \times 10 \times 2,5$ , а размеры (мм) пленки  $4 \times 5$ . Пластинка и пленки (сверху и снизу) располагаются параллельно с центрами, находящимися на одной оси. Симметрия этой задачи позволяет свести изучение диффузии в системе к изучению диффузии в одном октанте (рис. 3)

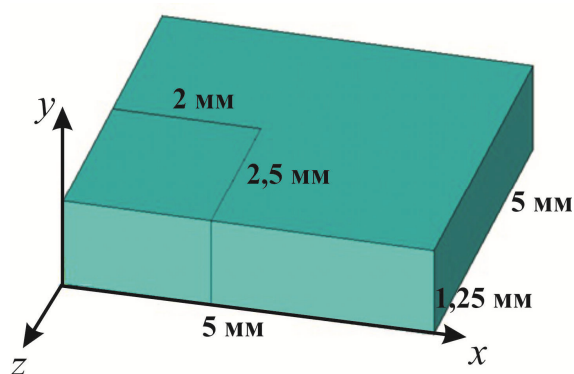


Рис. 3

с граничными условиями:  $C = C_0$  для  $0 \leq x \leq 2,5$ ,  $-2 \leq z < 0$ ,  $y = 1,25$ ; и  $\partial C / \partial n = 0$  на всей остальной поверхности, ограничивающей октант. Для  $t = 10^6$  с решение представлено на рис. 4.

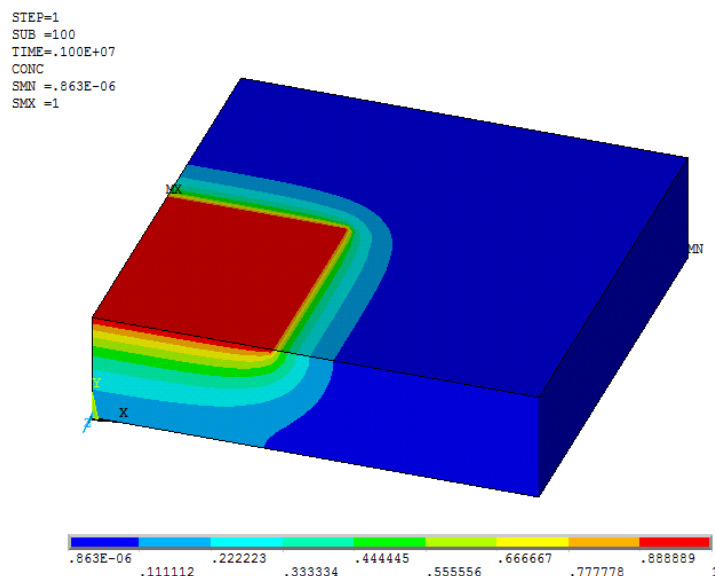


Рис. 4

Лазерное излучение определяется не только абсолютной концентрацией активной примеси, но и профилями ее распределения в объеме активного элемента [2]. Полученное распределение  $C = C(x, y, z)$  (представленное на рис. 4) позволяет получить профили распределения примеси вдоль выбранной оси путем интегрирования  $C(x, y, z)$  по плоскости, перпендикулярной к данной оси. Таким образом получаем  $\gamma(x) = \int C(x, y, z) dy dz$  (рис. 5).

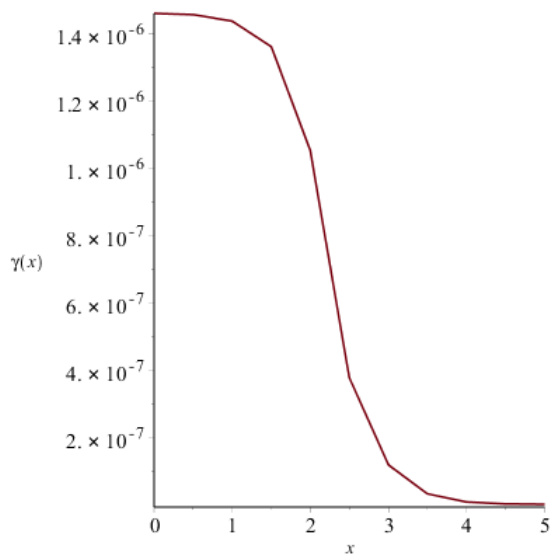


Рис. 5

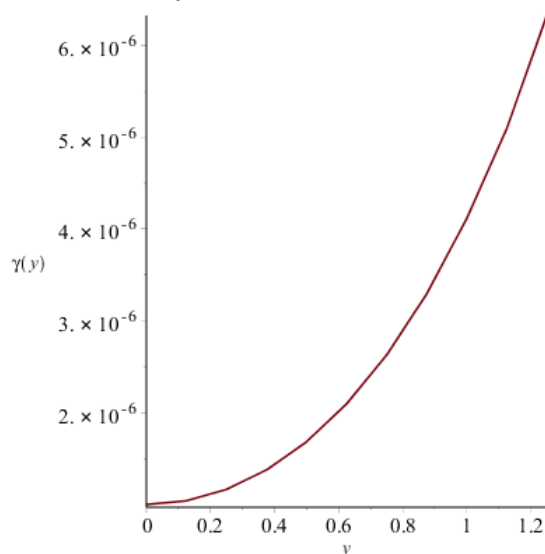


Рис. 6

$\gamma(z) = \int C(x, y, z) dx dy$  качественно подобно распределению  $\gamma(x)$ . А профиль  $\gamma(y) = \int C(x, y, z) dx dz$  имеет вид, представленный на рис. 6.

Проведенные расчеты по определению концентрации и профилей примеси (хрома) в кристалле (селенида цинка) хорошо согласуются с расчетами и экспериментом, представленном в работе [1].

Таким образом, при обоснованном выборе коэффициента диффузии  $D$  можно гарантировать, что расчеты, выполненные с помощью системы ANSYS [7], будут количественно предсказывать результаты эксперимента и трудоемкий экспериментальный анализ можно заменить расчетом.

Для иллюстрации приведены расчеты с коэффициентом диффузии  $D = 5,04 \cdot 10^{-10}$  см<sup>2</sup>/с, взятым из работы [5], результаты которых представлены на рисунках 7,8,9.

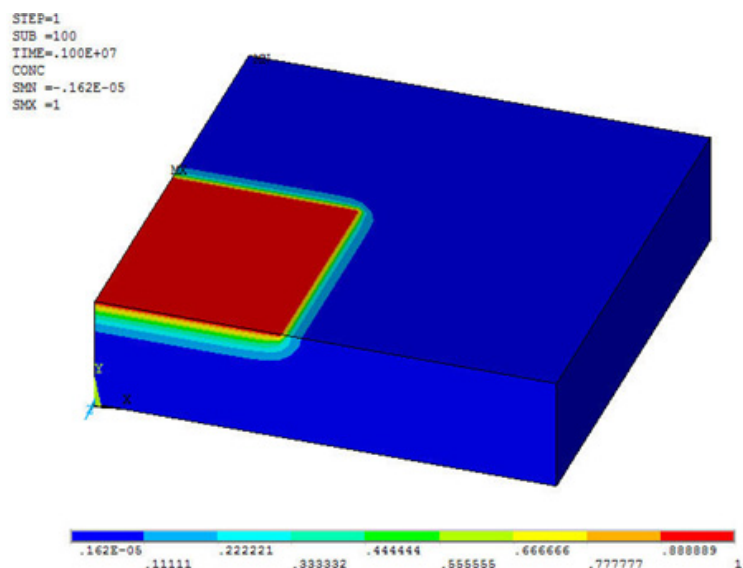


Рис. 7

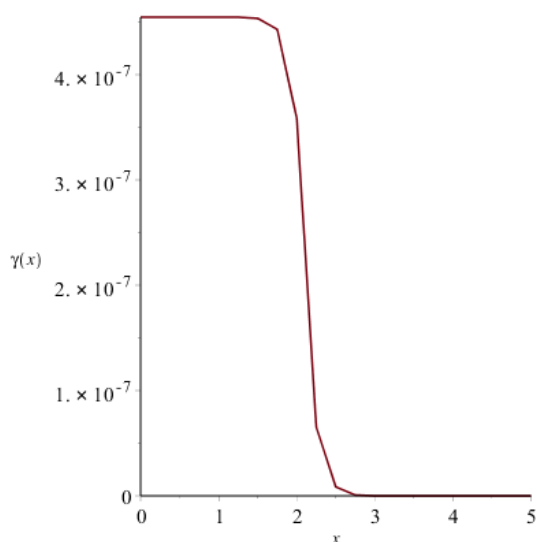


Рис. 8

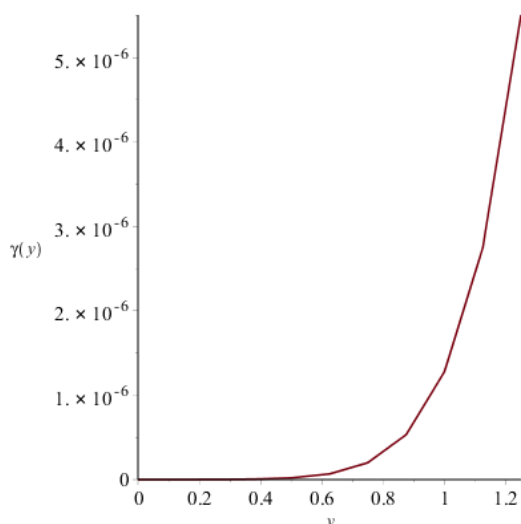


Рис. 9

Сравнивая распределение примеси, представленное на рис. 4 и рис. 7, рис. 5 и рис. 8, а также рис. 6 и рис. 9 видно, что численное отличие весьма значительное. Это сравнение подтверждает высказанное ранее предположение о необходимости критического подхода при выборе значения коэффициента  $D$  для эвристических расчетов.

### Список литературы

1. Родин С.А., Балабанов С.С., Гаврищук Е.М., Еремейкин О.Н. Использование Тm: YLF лазера для определения коэффициента диффузии хрома в ZnSe // Оптический журнал. 2013.80. №5. С. 89-93.
2. Rapoport W.R., Shand M.L. US Patent WO 94/05062.
3. J.O. Ndar, K. Chattopadhyay // of C.G. / 240 (2002) 176-184.
4. Ваксман Ю.Ф., Насибов А.С., Шапкин П.В. // ФТТ 2005. Т. 39. Вып.4. С. 401-404.
5. U. Demirbas. A. Sennaroglu // Opt. Materials 28 (2006). 231-240.
6. Ильичев Н.Н., Шапкин П.В., Насибов А.С. // Неорг. Матер., 2007, Т. 43, № 10, 1175-1178.
7. ANSYS 14.5 Theory Reference ANSYS. Документация.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ЗАХВАТА ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ДВУМЕРНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Д.А.Губайдуллин, П.П.Осипов, Р.Р.Насыров

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук.

420029 Казань, ул. Сибирский тракт, 10/7, e-mail: [info@imm.knc.ru](mailto:info@imm.knc.ru)

Изучен дрейф группы мелкодисперсных частиц в стоячей волне прямоугольного резонатора с учетом вихрей Шлихтинга и Рэлея. Приведены схемы расчета динамики газа и дисперсных частиц. Исследовано влияние размеров частиц на их распределение в резонаторе. Обнаружены области акустического захвата частиц, в которых собственный дрейф частиц уравнивается акустическим течением.

*Ключевые слова:* акустические течения, дрейф частиц, акустические ловушки, резонатор, вихри Рэлея, вихри Шлихтинга.

Для очистки газа от дисперсных частиц используют акустические поля. Исследование влияния волновых полей на взвешенные в газе частицы позволяет управлять их пространственным распределением за счет выбора параметров акустического воздействия. Помимо переноса акустическим течением происходит дрейф частиц, вызванный неоднородностью поля скорости газа. Для создания акустических полей используют резонатор, представляющий собой трубу, на границе которой возбуждаются гармонические колебания. При резонансных частотах в этих трубах образуется либо стоячая, либо периодическая ударная волна. Теоретические основы и математические модели волновых технологий очистки и коагуляции представлены в [1,2]. В [3] приведен обзор экспериментальных работ по нелинейным колебаниям газа в открытом и закрытом резонаторе. В работах [4-16] изучена динамика частиц в стоячей и периодической ударной волнах с учетом различных гидромеханических сил. В настоящий момент не достаточно изучен вопрос о зонах повышенной концентрации частиц (акустических ловушек) в двумерном резонаторе, возникающих вследствие суперпозиции собственного дрейфа и акустического течения.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу о дрейфе дисперсных частиц в двумерном прямоугольном резонаторе длиной  $L$  и высотой  $H$  при колебаниях левой стенки резонатора по гармоническому закону со скоростью  $u = U_0 \sin \omega t$ ,  $v = 0$ , на первой резонансной частоте  $\omega = \pi c_0 / L$ , где  $c_0$  - невозмущенная скорость звука. Справа, сверху и снизу стенки резонатора неподвижны.

**1. Динамика газа.** В зависимости от амплитуды и вязкости газа в резонаторе возникает или стоячая, или периодическая ударная волна. Для описания динамики газа введем функцию  $P = \int_0^p \frac{dp}{c\rho} = \frac{2}{\gamma-1} c$ , где  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  - локальная скорость звука. В безразмерных переменных  $t^* = (c_0 / H)t$ ,  $x^* = x / L$ ,  $y^* = y / H$ ,  $u^* = u / c_0$ ,  $v^* = v / c_0$ ,  $c^* = c / c_0$ ,  $\rho^* = \rho / \rho_0$ ,  $p^* = p / p_0$ ,  $P^* = P / c_0$ ,  $\varepsilon = H / L$ ,  $\omega^* = (H / c_0)\omega$ ,  $Re = \rho c_0 H / \mu$  - характерное число Рейнольдса, опустив звездочки, запишем для вязкого политропного газа уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + c \nabla P &= 1 / Re (\Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) / \mu \nabla D), \\ P_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) P + c D &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nabla = \text{grad} = (\varepsilon \partial / \partial x, \partial / \partial y)$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) = \varepsilon u \partial / \partial x + v \partial / \partial y$ ,

$$D = \text{div } \mathbf{v} = \varepsilon u_x + v_y, \quad \Delta = \varepsilon^2 \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2,$$

$\mu$  - первая вязкость (сдвиговая),  $\xi = \lambda + 2/3\mu$  - вторая вязкость (объемная). Согласно предположению Стокса далее принимается  $\xi = 0$ . Для этой системы задаются начальные условия:  $u = 0, v = 0, p(x, y, 0) = 1, \rho(x, y, 0) = 1, P(x, y, 0) = 2/(\gamma - 1)$ .

*Граничные условия:* На нижней  $y = 0$  и верхней  $y = 1$  границах:  $u = 0, v = 0, \partial p / \partial y = 0$ ;

На левой  $x = 0$  границе:  $u = (U_0 / c_0) \sin(\omega t), v = 0, \partial p / \partial y = 0$

На правой  $x = 1$  границе:  $u = 0, v = 0, \partial p / \partial x = 0$

*Скорость акустического течения.* Эта скорость оценивается осреднением скорости газа по одному периоду  $T = 2\pi / \omega$  по прошествии достаточно большого количества периодов  $t_k = kT$ :

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x, y, t) dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(x, y, t) dt.$$

**2. Динамика частицы.** Известно [4-11], что собственный дрейф частиц сильно зависит от коэффициента увлечения  $\mu_p = 1 / \sqrt{1 + (\omega\tau_v)^2}$ , где  $\tau_v = \frac{2r^2\rho_p}{9\mu}$  - время релаксации,  $\rho_p$  - плотность частицы. Таким образом, коэффициент  $\mu_p$  зависит от радиуса и плотности частицы, а также от вязкости газа. Для описания движения частицы введем безразмерные переменные  $x_p^* = x_p / L, y_p^* = y_p / H, u_p^* = u_p / c_0, v_p^* = v_p / c_0, \tau_v^* = (c_0 / H)\tau_v$  и, опуская звездочки, запишем систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= \varepsilon u_p, & \frac{du_p}{dt} &= -\frac{u_p - u}{\tau_v} \left( 1 + \frac{\sqrt{Re_{12}}}{6} + \frac{Re_{12}}{60} \right), \\ \frac{dy_p}{dt} &= v_p, & \frac{dv_p}{dt} &= -\frac{v_p - v}{\tau_v} \left( 1 + \frac{\sqrt{Re_{12}}}{6} + \frac{Re_{12}}{60} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

где  $Re_{12} = Re_0 \sqrt{(u - u_p)^2 + (v - v_p)^2}$ ,  $Re_0 = 2rc_0\rho / \mu$ . Для этой системы решается задача Коши с заданными начальными положениями  $(x_{p0}, y_{p0})$  и скоростями частиц  $(u_{p0}, v_{p0})$ . Скорость несущей среды  $(u, v)$  и ее плотность  $\rho$  берутся из задачи о динамике газа. В настоящей работе в начальный момент времени  $t = 0$  частицы равномерно распределены по области резонатора с нулевыми скоростями  $(u_{p0} = 0, v_{p0} = 0)$ .

### 3. Методика решения

**3.1. Генерация неравномерной сетки.** Для правильного разрешения пограничных слоев и для ускорения счета генерировалась неравномерная сетка размером  $100 \times 118$ , сгущающаяся к стенкам. Для правильного разрешения вихрей Шлихтинга минимальный шаг сетки по  $y$  выбирался из условия  $\Delta y_{\min} / \delta < 0.1$ , где  $\delta = \sqrt{2(\mu / \rho_0) / \omega}$  - толщина акустического пограничного слоя ( $\omega$  - размерная). Узлы сеток в каждом направлении  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$  определялись решением системы с трехдиагональной матрицей

$$\{1 - 0,5(q_i - 1)\}\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}\{1 + 0,5(q_i - 1)\} = 0, \quad (i = 1, \dots, m - 1)$$

где  $\varphi_0 = 0, \varphi_m = 1$ , а параметр  $q_i \approx (\varphi_{i+1} - \varphi_i) / (\varphi_i - \varphi_{i-1})$  задает отношение длин смежных шагов сетки. В данной работе использовался кусочно-постоянный параметр:  $q_i = 1,05$  для  $i < 0,4 m$ ;  $q_i = 1,0$  для  $0,4 m \leq i < 0,6 m$ ;  $q_i = 1/1,05$  для  $0,6 m \leq i$ .

3.2. Динамика газа. Система (1) предварительно расщеплялась на две задачи акустики вдоль осей  $x, y$  и задачу диффузии скорости (таблица 1). Расщепленные по направлениям задачи акустики решались методом характеристик.

Таблица 1

$x$ - акустика	$y$ - акустика	диффузия
$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon c \frac{\partial P}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left( \Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial D}{\partial x} \right)$
$\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial P}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left( \Delta v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial D}{\partial y} \right)$
$\frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial t} = 0$

Акустика вдоль оси  $x$ . Для решения задачи акустики применяется вариант метода характеристик, использующий upwind схему второго порядка с переключателем на upwind - схему первого порядка. Вводя левый  $F = u + P$  и правый  $S = u - P$  инварианты Римана, запишем одномерные уравнения переноса вдоль оси  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon(u + c) \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \varepsilon(u - c) \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

При этом  $u = 0,5(F + S)$ ,  $P = 0,5(F - S)$ ,  $c = 0,25(\gamma - 1)(F - S)$ . Для вычисления безразмерного давления можно использовать соотношение  $p = c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ . Опустим далее ради простоты индекс  $j$ .

Левый инвариант. Рассмотрим перенос вдоль оси  $x$  параболического профиля левого инварианта, построенного на точках  $F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$ . Пусть профиль левого инварианта в момент  $t$  аппроксимируется параболой  $F = F_i + F_x(x - x_i) + 0,5F_{xx}(x - x_i)^2$

$$\text{где } F_{xx} = \frac{\frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{0,5(x_{i+1} - x_{i-1})}, \quad F_x = \frac{(x_i - x_{i-1}) \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i} + (x_{i+1} - x_i) \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

На основании уравнений переноса (3) в первом приближении будем считать, что за безразмерное время  $\Delta t$  все три точки параболы сместятся вправо на безразмерное расстояние  $s_i = \varepsilon(u_i + c_i)\Delta t$ . При этом в точку  $x_i$  попадет точка  $x = x_i - s_i$  со значением инварианта равным  $F = F_i - F_x s_i + 0,5F_{xx} s_i^2$ . Это обусловит темп изменения инварианта

$$\dot{F}_i = \frac{F - F_i}{\Delta t} = -F_x \varepsilon(u_i + c_i) + 0,5F_{xx} \varepsilon^2(u_i + c_i)^2 \Delta t \tag{4}$$

Экстремум параболической аппроксимации  $F' = F_x + F_{xx}(x - x_i) = 0$  достигается в точке  $x_{extr} = x_i - F_x / F_{xx}$ . Если экстремум лежит внутри интервала  $x_{i-1} < x_{extr} < x_{i+1}$ , то имеет место немонотонность решения и темп определяем не из параболического смещения, а из upwind схемы, которую можно получить, взяв в (4)  $F_x = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x}$ ,  $F_{xx} = 0$ .

Заметим, что на левую границу ( $i = 0$ ) левый инвариант не приносится, а вычисляется по темпам скорости на левой границе и инварианта приходящему справа  $\dot{F}_0 = 2\dot{u}_0 - \dot{S}_0$ .

*Правый инвариант.* Рассмотрим перенос параболического профиля правого инварианта, построенного на точках  $S_{i-1}, S_i, S_{i+1}$ . Профиль левого инварианта в момент  $t$  есть

$$S = S_i + S_x(x - x_i) + 0,5S_{xx}(x - x_i)^2$$

$$\text{где } S_{xx} = \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{S_i - S_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{0,5(x_{i+1} - x_{i-1})}, \quad S_x = \frac{(x_i - x_{i-1})\frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1} - x_i} + (x_{i+1} - x_i)\frac{S_i - S_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

На основании уравнения переноса (3) в первом приближении будем считать, что за безразмерное время  $\Delta t$  все три точки параболы сместятся влево на безразмерное расстояние  $s_i = \varepsilon(u_i - c_i)\Delta t$ . При этом в точку  $x_i$  попадет точка справа  $x = x_i - s_i$  со значением инварианта равным  $S = S_i - S_x s_i + 0,5S_{xx} s_i^2$ . Это обусловит темп изменения инварианта

$$\dot{S}_i = \frac{S - S_i}{\Delta t} = -S_x \varepsilon(u_i - c_i) + 0,5S_{xx} \varepsilon^2(u_i - c_i)^2 \Delta t \quad (5)$$

Экстремум параболической аппроксимации  $S' = S_x + S_{xx}(x - x_i) = 0$ , достигается в точке  $x_{extr} = x_i - S_x / S_{xx}$ . Если экстремум лежит внутри интервала  $x_{i-1} < x_{extr} < x_{i+1}$ , то имеет место немонотонность решения и темп определяем не из параболического смещения, а из upwind схемы, которую можно получить, взяв в (5)  $S_x = \frac{S_{i+1} - S_{ij}}{\Delta x}$ ,  $S_{xx} = 0$ .

Заметим, что на правую границу ( $i = N_x$ ) правый инвариант не приносится. Поэтому темп его изменения вычисляется по темпам скорости на правой границе и инварианта, приходящего слева  $\dot{S}_{N_x} = 2\dot{u}_{N_x} - \dot{F}_{N_x}$ .

*Перенос трансверсальной компоненты  $v$ .* В работе используется upwind схема для определения темпа изменения трансверсальной компоненты скорости газа  $\dot{v} = -\varepsilon u_i \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x}$  если

$$u_i \geq 0, \quad \dot{v} = -\varepsilon u_i \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \quad \text{если } u_i < 0.$$

*Локальное обновление темпов.* Использовалась схема многоуровневого по времени обновления темпов изменения инвариантов [10]. Локальный шаг по времени, через который необходимо обновление темпов в ячейке  $i, j$  вычислялся при  $CFL = 0,8$  из формулы

$$\Delta t_{ij} = \frac{1}{1/\Delta x_i + 1/\Delta y_j} \frac{CFL}{\sqrt{u_{ij}^2 + v_{ij}^2 + c_{ij}^2}}, \quad \text{где} \quad \Delta x_i = \min(x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i),$$

$\Delta y_j = \min(y_j - y_{j-1}, y_{j+1} - y_j)$ . Темпы изменения в каждой ячейке обновляются по условию перешага локального горизонта  $t + \Delta t > t_{ij}$ , где введен минимальный шаг  $\Delta t = \min_{i,j} \Delta t_{ij}$ . Темпы

изменения скорости и давления равны  $\dot{u} = 0,5(\dot{F} + \dot{S})$ ,  $\dot{P} = 0,5(\dot{F} - \dot{S})$ ,  $\dot{p} = \gamma c_p \dot{P}$ .

В отличие от темпов инвариантов, обновление примитивных переменных производится в каждой ячейке на каждом слое времени  $t = t + \Delta t : u_i = u_i + \dot{u} \Delta t$ ,  $v_i = v_i + \dot{v} \Delta t$ ,  $p_i = p_i + \dot{p} \Delta t$ .

*Граничные условия.* На границе слева ( $i = 0, j = 0, \dots, N_y$ ) задана скорость  $u_0 = (U_0 / c_0) \sin(\omega t)$ ,  $v_0 = 0$ . Давление определяется из линейной экстраполяции  $p_0 = (1 + \theta)p_1 - \theta p_2$ , где  $\theta = (x_1 - x_0) / (x_2 - x_1)$ . Более точно давление можно определять на основе темпов  $p_0 = p_0 + \dot{p}_0 \Delta t$ , где  $\dot{p}_0 = \gamma c_0 \rho_0 \dot{P}_0$ ,  $\dot{P}_0 = 0,5(\dot{F}_0 - \dot{S}_0)$ .



Аналогично на правой границе ( $i = N_x, j = 0, \dots, N_y$ ) задана скорость  $u_{N_x} = 0, v_{N_x} = 0$ . Давление определяется из линейной экстраполяции  $p_{N_x} = (1 + \theta)p_{N_x-1} - \theta p_{N_x-2}$ , где  $\theta = (x_{N_x} - x_{N_x-1}) / (x_{N_x-1} - x_{N_x-2})$ . Более точно давление можно определять на основе темпов  $\dot{p}_{N_x} = p_{N_x} + \dot{p}_{N_x} \Delta t$ , где  $\dot{p}_{N_x} = \gamma c_{N_x} \rho_{N_x} \dot{P}_{N_x}, \dot{P}_{N_x} = 0,5(\dot{F}_{N_x} - \dot{S}_{N_x})$ .

Акустика вдоль оси  $y$ . Опустим ради простоты индекс  $i$ .

Вводя нижний  $\tilde{F} = v + P$  и верхний  $\tilde{S} = v - P$  инварианты Римана, запишем уравнения переноса вдоль оси  $y$ :  $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

Из этих уравнений аналогично обновляются темпы скоростей  $\dot{u}, \dot{v}$  и давления  $\dot{p}$  по условию перешага за горизонт  $t + \Delta t > t_{ij}$ . Обновление самих примитивных переменных производится в каждой ячейке на каждом слое времени  $t = t + \Delta t$ :  $u_j = u_j + \dot{u} \Delta t, v_j = v_j + \dot{v} \Delta t, p_j = p_j + \dot{p} \Delta t$ .

После обновления темпов в двух направлениях в какой-либо ячейке по условию  $t + \Delta t > t_{ij}$ , обновляется соответствующий локальный горизонт времени  $t_{ij} = t + \Delta t_{ij}$ .

Учет вязкости. Для решения уравнений Навье-Стокса (1) необходимо учесть вязкость газа. Это может быть осуществлено добавлением к скорости газа диффузионных приращений

$$u = u + \dot{u}_d \Delta t, v = v + \dot{v}_d \Delta t, \text{ где } \dot{u}_d = \frac{1}{Re} \left\{ \Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial D}{\partial x} \right\}, \dot{v}_d = \frac{1}{Re} \left\{ \Delta v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial D}{\partial y} \right\}.$$

3.3. Динамика частиц. Система (2) интегрировалась неявным методом Эйлера. По положению частицы  $(x_p, y_p)$ , методом деления пополам, находилась ячейка сетки  $(i, j)$ - $(i+1, j)$ - $(i+1, j+1)$ - $(i, j+1)$ , содержащая частицу и по значениям скорости газа  $\mathbf{v}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})$  в четырех узлах ячейки проводилась билинейная интерполяция скорости газа  $\mathbf{v} = (u, v)$ :

$$\mathbf{v}_j = (1 - \theta_x) \mathbf{v}_{ij} + \theta_x \mathbf{v}_{i+1j}, \quad \mathbf{v}_{j+1} = (1 - \theta_x) \mathbf{v}_{ij+1} + \theta_x \mathbf{v}_{i+1j+1}, \quad \theta_x = (x_p - x_i) / (x_{i+1} - x_i);$$

$$\mathbf{v} = (1 - \theta_y) \mathbf{v}_j + \theta_y \mathbf{v}_{j+1}, \quad \theta_y = (y_p - y_j) / (y_{j+1} - y_j).$$

### Результаты.

Динамика флюида. Расчеты проводились при следующих параметрах:  $L = 0,008825 \text{ м}, \quad \varepsilon = H / L = 0,0358, \quad U_0 = 1,24 \text{ м/с}, \quad c_0 = 348,92 \text{ м/с},$   
 $\omega = \pi c_0 / L = 124148 \text{ рад/с}, \quad f = \omega / (2\pi) = c_0 / (2L) \cong 19,8 \text{ кГц}, \quad \rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3,$   
 $\mu = 1,935 \times 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}.$  Они подтверждают известный аналитический вывод Рэлея о возникновении в плоском резонаторе акустического течения в виде четырех вихрей Шлихтинга и четырех вихрей Рэлея. На рис. 1 и 2 изображены распределения давления и горизонтальной компоненты скорости вдоль оси симметрии резонатора ( $y = H / 2$ ) в различные фазы периода  $\omega(t - t_{100}) = 0, \pi / 2, \pi, 3\pi / 2$ . Из-за опрокидывания волн, вызванного нелинейными эффектами, профили скорости и давления немного отличаются от идеальной синусоиды. В начале и середине цикла давление достигает наибольшего по модулю значения на границах резонатора. В середине цикла профиль давления примерно симметричен профилю в начале цикла относительно вертикали  $x = L / 2$  и достигает максимума на правой границе. Профили давления, данные для различных моментов времени, пересекают ось  $x$  примерно в  $x = L / 2$ . В отличие от профилей давления, максимумы и минимумы скорости достигаются для фаз  $\pi / 2$  и  $3\pi / 2$  в середине резонатора. Скорость газа на левой стенке равна нулю для  $\pi / 2$  и  $3\pi / 2$ .

Профиль скорости газа через 25 периодов практически перестает меняться, наибольшая скорость достигается при  $\pi/2$  и  $3\pi/2$  в середине резонатора и примерно равна 10 м/с.

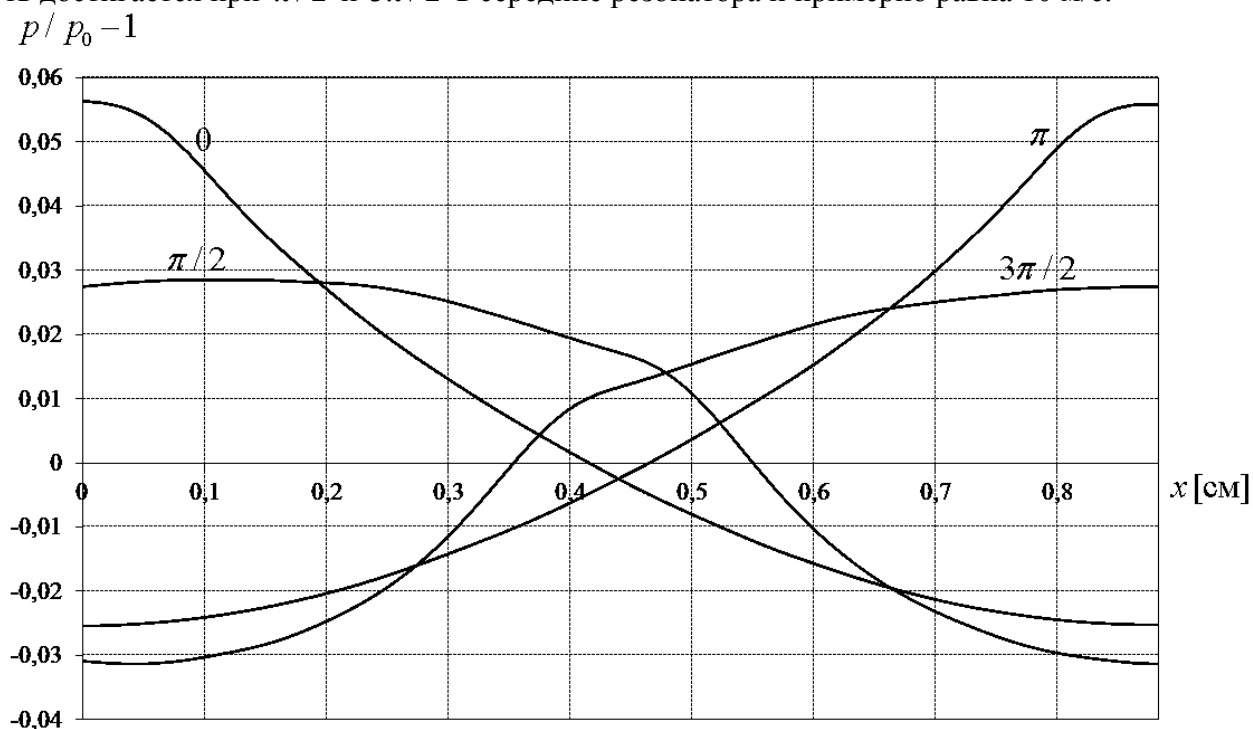


Рис. 1. Распределения давления газа вдоль оси симметрии в различные фазы  $\omega(t - t_{100}) = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

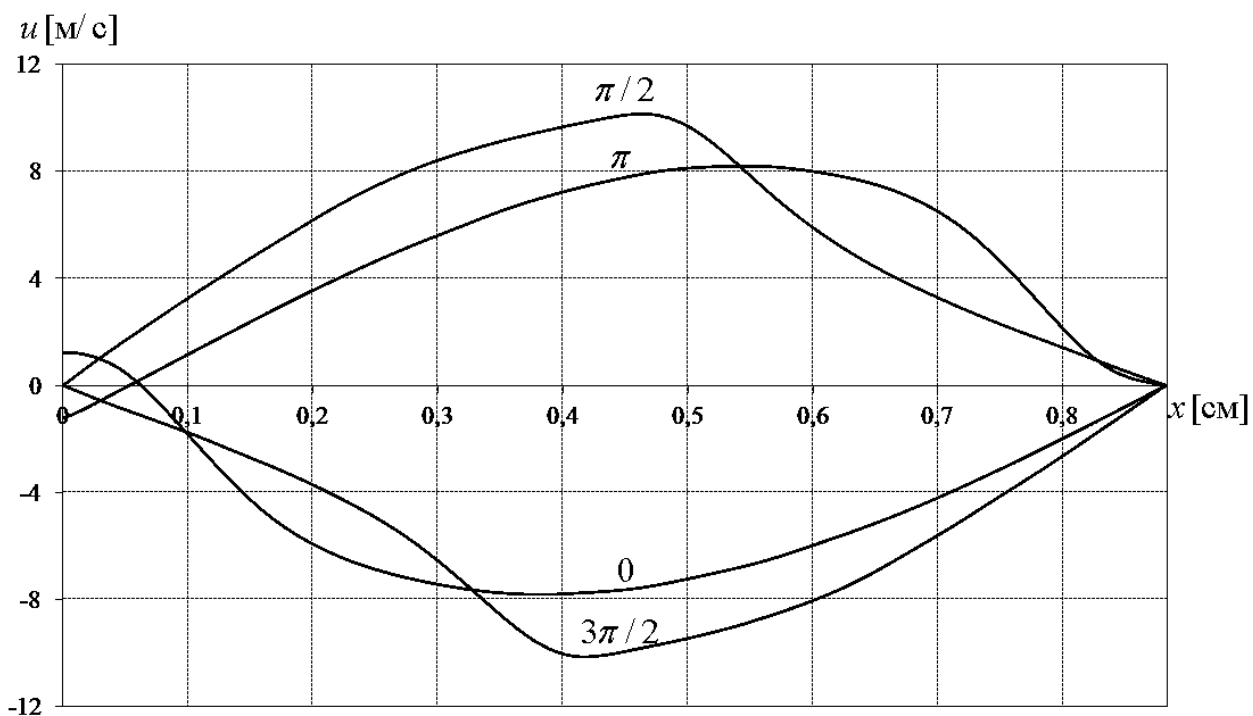


Рис. 2. Распределения горизонтальной компоненты скорости газа вдоль оси симметрии в различные фазы  $\omega(t - t_{100}) = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

На рис. 3 изображено распределение горизонтальной компоненты скорости акустического течения по высоте резонатора в сечении  $x/L = 0,75$ , проходящего через два вихря Шлихтинга и два вихря Рэлея. На оси абсцисс отложена безразмерная горизонтальная компонента скорости газа ( $\bar{u}/u_R$ ), где  $u_R = 3/16 (U_m^2/c_0) = 0,05 \text{ м/с}$  - максимальная скорость акустического течения, индуцированного стоячей синусоидальной волной вдоль плоского резонатора,  $U_m = 10 \text{ м/с}$  - максимальная амплитуда колебаний скорости газа. Горизонтальная составляющая скорости акустического течения максимальна в области между вихрями Рэлея и Шлихтинга ( $y = 2\delta, y = H - 2\delta$ ). На оси резонатора (между двумя вихрями Рэлея) горизонтальная компонента скорости акустического течения также значительна, но вдвое меньше максимального значения. Эта скорость минимальна на стенках резонатора и в областях близких к центрам вихрей Шлихтинга и Рэлея.

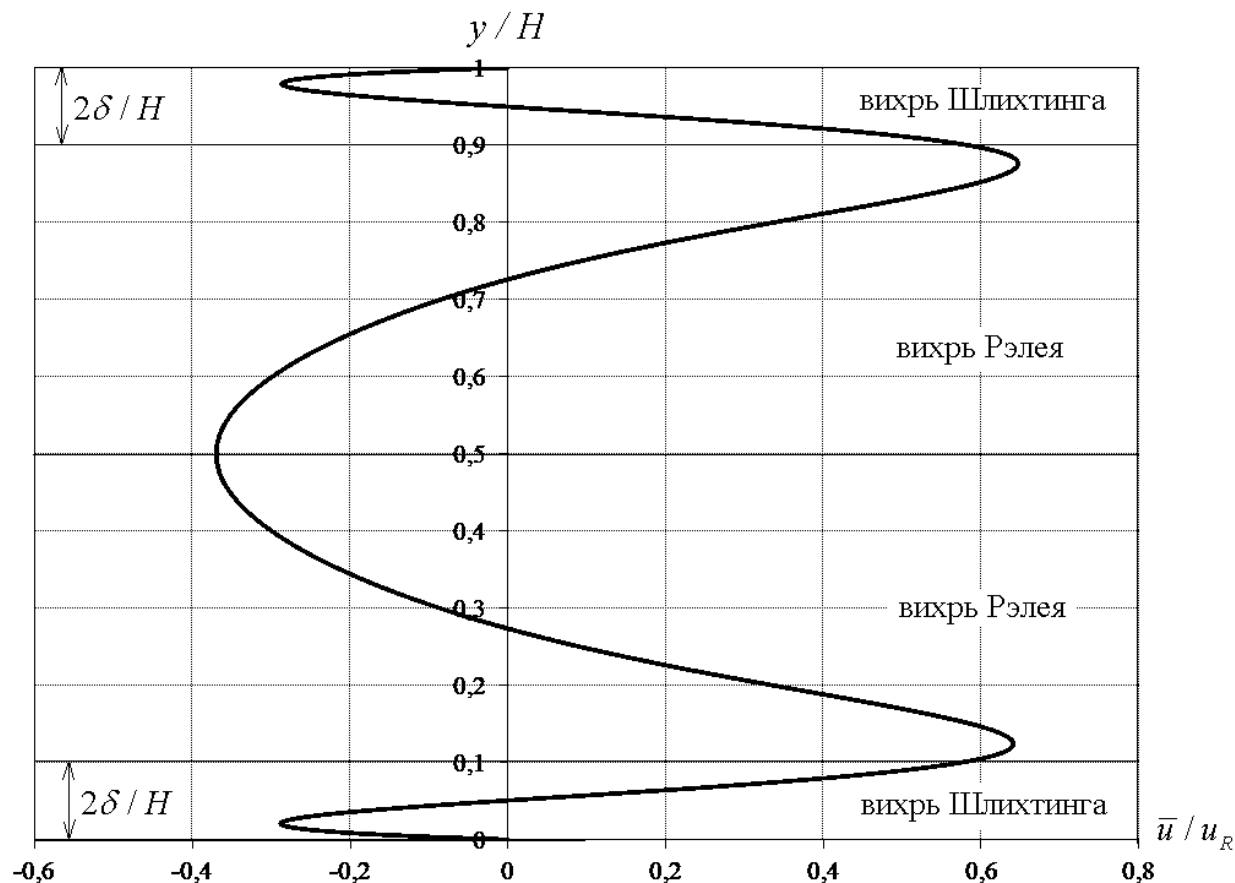


Рис. 3. Распределение средней в интервале  $t \in [t_{100}, t_{101}]$  горизонтальной компоненты скорости газа по высоте резонатора в сечении  $x/L = 0,75$ .

*Динамика частиц.* Рассчитывался дрейф группы капелек воды в воздушном акустическом резонаторе. Изучена динамика частиц с различными радиусами  $r = 13 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $r = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

В дальнейшем частицы изменяют свое местоположение под влиянием собственного дрейфа и переноса акустическим течением. На рис. 4-5 представлены картины распределения частиц в момент времени  $t = t_{2000}$  при различных радиусах частицы.

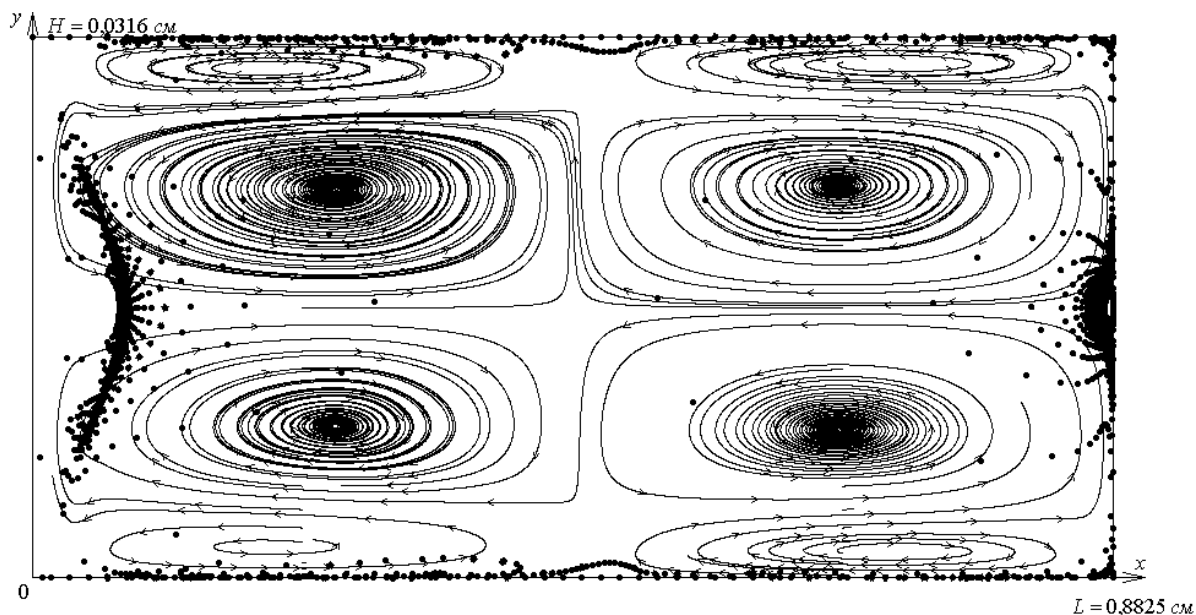


Рис. 4. Распределение частиц радиуса  $r = 13 \cdot 10^{-7}$  м в резонаторе в момент  $t = t_{2000}$  ;

$$\mu_p = 0,27, Re_{12} = 2,7.$$

Видно, что частицы собираются вблизи боковых стенок резонатора, середины задней стенки. Рис. 4 ( $\mu_p = 0,27$ ) и рис. 5 ( $\mu_p = 0,74$ ) показывают, что вблизи левой стенки возникает область акустического захвата частиц (ловушка). При этом местоположение повышенной концентрации частиц смещается вправо по мере приближения к оси резонатора. На местоположение сбора частиц влияет коэффициент увлечения – чем он больше, тем дальше от поршня располагаются частицы.

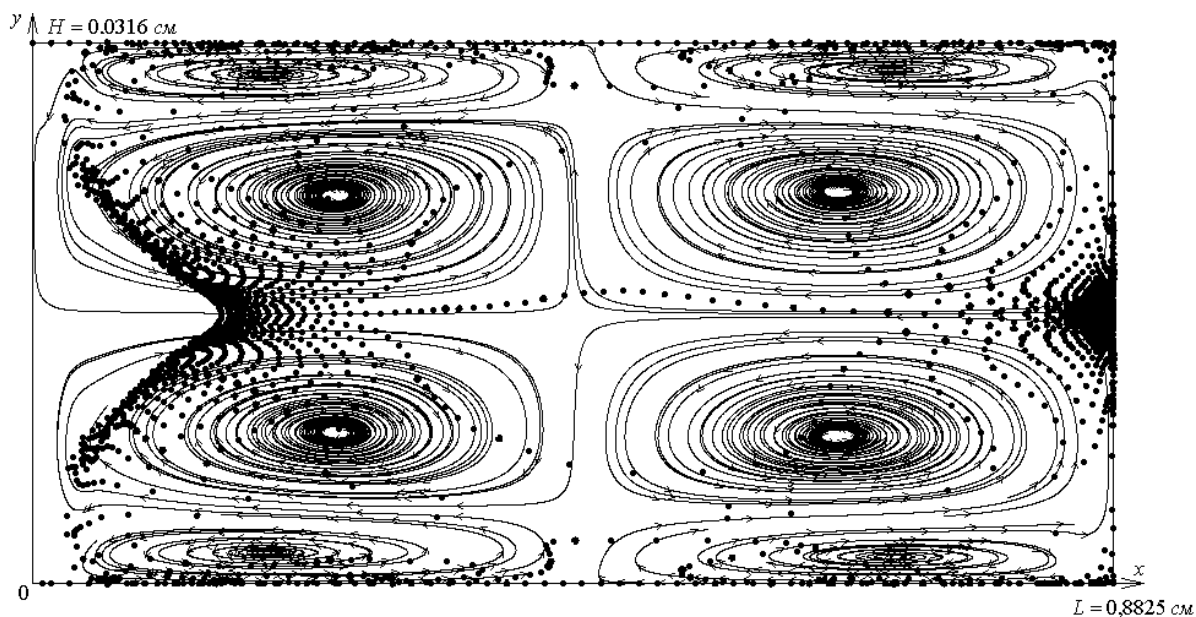


Рис. 5. Распределение частиц радиуса  $r = 7 \cdot 10^{-7}$  м в резонаторе в момент  $t = t_{2000}$  ;

$$\mu_p = 0,74, Re_{12} = 1,4.$$

## **Заключение**

Полученные результаты показывают, что при определенных коэффициентах увлечения в двумерном закрытом резонаторе могут возникать зоны повышенной концентрации дисперсных частиц. Общая тенденция дрейфа заключается в том, что частицы скапливаются около неподвижных стенок резонатора, а также в некоторых зонах внутри резонатора. В этих зонах перенос акустического течения компенсируется собственным дрейфом частиц. В данной работе исследовано акустическое поле близкое к стоячей волне. В этом случае в двумерном закрытом резонаторе образуются четыре вихря Шлихтинга и четыре вихря Рэлея. Максимальный перенос частиц акустическим течением происходит в области соприкосновения вихрей Шлихтинга и Рэлея. На оси резонатора (между двумя вихрями Рэлея) перенос также значителен, но вдвое меньше максимального. При больших амплитудах колебания левой границы образуется периодическая ударная волна. Вопрос о дрейфе частиц в такой волне не изучен и требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-11-10016).

## **Список литературы**

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред // Москва: «Наука», 1978 Часть I, II.
2. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технологии // Москва: Изд-во R&C Dynamics, 2008. 712 с.
3. Ilgamov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B. Nonlinear oscillations of a gas in a tube // *Appl. Mech. Rev.*, 1996. V. 49. P. 137 - 154.
4. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Влияние гидродинамических сил на дрейф включения в волновых полях // *Проблемы энергетики*, 2010. Ч. 1-2. С. 3 - 13.
5. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. О некоторых режимах дрейфа включений в акустических полях // *Инженерно-физический журнал*, 2011. Т. 84, № 2, С. 255 - 262.
6. Gubaidullin D.A., Ossipov P.P. Numerical investigation of particle drift in acoustic resonator with periodic shock wave // *Applied mathematics and computation*, 2013. № 219. P. 4535 - 4544.
7. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Влияние чисел Рейнольдса и Струхала на направление волновой силы, действующей на включения в стоячей синусоидальной волне // *Инженерно-физический журнал*, 2013. Т. 86. № 1. С. 50 - 58.
8. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Закиров А.Н. Диаграммы направления дрейфа частицы в стоячей волне с учетом силы Бассэ // *Инженерно-физический журнал*, 2015. Т. 88. № 3. С. 601 - 608.
9. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р. Влияние положения частицы и коэффициента увлечения на скорость дрейфа в акустическом резонаторе // *Инженерно-физический журнал*, 2016. Т. 89. № 2. С. 400 - 406.
10. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Расчет двумерных течений газа на многоуровневых сетках // *Выч. методы и программирование*, 2013. Т.14. С. 451 - 460.
11. Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Nasyrov R.R. Numerical simulation of Schlichting streaming induced by standing wave in rectangular enclosure // *LTP Coatings 2014 IOP Publishing Journal of Physics: Conference Series 567 (2014) 012017 doi:10.1088/1742-6596/567/1/012017*.
12. Тукмаков А.Л. Распределение твердых частиц в акустическом поле резонансной трубы при различных режимах возбуждения колебаний // *Теплофизика и аэромеханика*, 2005. Т. 12. № 2. С. 219 - 227.
13. Тукмаков А.Л., Губайдуллин Д.А. Численное моделирование движения твердых частиц в нелинейном волновом поле акустического резонатора // *Изв. вуз. Пробл.*

энерг., 2008. № 3 - 4. С. 3 - 13.

14. Тукмаков А.Л. Численное моделирование процесса волновой сепарации твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Акустический журнал, 2009. Т. 55. № 3. С. 342 - 349.

15. Alexeev A., Gutfinger C. Aerosol deposition in periodic shock waves // Physics of Fluids, 2004. V. 16. Issue 4. P. 1028 - 1036.

16. Vainshtein P., Shapiro M. An acoustic trap for submicron aerosol particles // European Aerosol Conference, 2009. Abstract T074A01.

## **ДИНАМИКА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛОЙ ЖИДКОСТИ С ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ**

**Д.А. Губайдуллин<sup>1,2</sup>, А.А. Никифоров<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра  
Российской академии наук

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет  
420111, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31, e-mail: anikiforov1@yandex.ru

Теоретически изучена динамика импульсного возмущения давления малой амплитуды в многослойной среде, содержащей слой жидкости с полидисперсными пузырьками газа. Проведенные расчеты показывают хорошее согласование теоретических расчетов и экспериментальных данных. Показано, что присутствие полидисперсных пузырьков воздуха в слое геля существенно меняет передачу акустического сигнала через многослойную преграду в диапазоне частот, близком к резонансным частотам собственных колебаний пузырьков.

*Ключевые слова:* пузырьковая жидкость, полидисперсность, акустические волны, отражение и прохождение волн.

### **Введение**

В настоящее время все чаще находят применение ультразвуковые методы для определения и изучения технологически полезных свойств различных материалов. Используя акустические волны, охватывающие широкий диапазон частот, можно получить информацию о скорости распространения волн и их затухания в исследуемой системе. Знание законов прохождения и отражения акустических волн от границ системы и распространения волн внутри системы дает возможность определить структуру и состав изучаемого материала, предсказать его поведение при акустическом воздействии. Важнейшим параметром любых акустических волн является скорость распространения их в среде. При изучении акустики жидких сред необходимо учитывать содержащиеся в ней пузырьки. Наличие пузырьков существенно увеличивает сжимаемость жидкости по сравнению с жидкостью без пузырьков, тем самым значительно уменьшая скорость и увеличивая затухание акустических волн. В настоящее время основы механики и теплофизики пузырьков жидкостей, а также наиболее существенные результаты по изучению волновых процессов в таких средах представлены в монографиях [1-2]. Одной из первых работ, где экспериментально были измерены коэффициент затухания и фазовая скорость в воде с воздушными пузырьками, была работа [3]. Несмотря на разброс значений, который объясняется нестабильностью объемной концентрации и полидисперсностью пузырьков, результаты этой работы дали возможность оценить общий характер зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений. В работе [4] предложено уточнение модели пузырьков жидкостей с учетом акустической разгрузки пузырьков. Полученные решения сопоставлены с экспериментальными результатами [3]. Модель распространения плоских волн давления малой амплитуды в смеси жидкости с пузырьками газа представлена в работе [5]. Показано, что модель работает хорошо при объемных содержаниях дисперсной фазы 1%-2% и только для дорезонансных частот. Динамика звуковых волн разной геометрии в двухфракционных смесях жидкости с полидисперсными пузырьками газа изучена в [6]. Проведенное сопоставление с данными эксперимента [3], дало уточнение формулы для акустических поправок из [4], путем замены степени объемного содержания пузырьков на  $1/6$  вместо  $1/3$ , что приводит к улучшению согласования теоретических и опытных значений коэффициента затухания. В экспериментальной работе

[7] представлены результаты измерения динамики акустического сигнала при его падении по нормали к плоскому образцу, состоящему из двух слоев поликарбоната и слоя, содержащего промышленный гель с полидисперсными пузырьками. Ультразвуковые измерения проводились в широком диапазоне частот, в том числе около резонансных частот пузырьков. Целью данной работы является определение основных закономерностей прохождения импульсов давления малой амплитуды через многослойный образец, содержащий слой жидкости с полидисперсными газовыми пузырьками.

### Постановка задачи

Для изучения динамики акустических волн в многослойной среде, содержащей слой жидкости с полидисперсными пузырьками используется следующая схема (рисунок 1). Пусть на плоскую, трехслойную преграду падает под некоторым углом  $\theta$  плоская акустическая волна. Соответственно, среда, из которой падает волна, обозначается номером 1, каждый слой преграды номерами 2-4, а среду, в которую проходит волна – номером 5. Под многослойной преградой понимается слой геля с полидисперсными воздушными пузырьками (обозначается номером 3), ограниченный слоями поликарбоната (обозначаются номерами 2 и 4). В качестве несущей фазы при расчетах используется растворенный в воде и дегазированный гель. Как указано в [7], такой выбор несущей фазы пузырьковой среды связан с тем, что теплофизические свойства геля близки к воде, гель течет в том случае, если приложенное напряжение больше критического значения предела текучести и, если пузырьки достаточно малы, то при вводе пузырьков в такой гель, пузырьки остаются в том месте, куда они были введены. Считается, что преграда помещена в воду, т.е. среды под номерами 1 и 5 это вода.

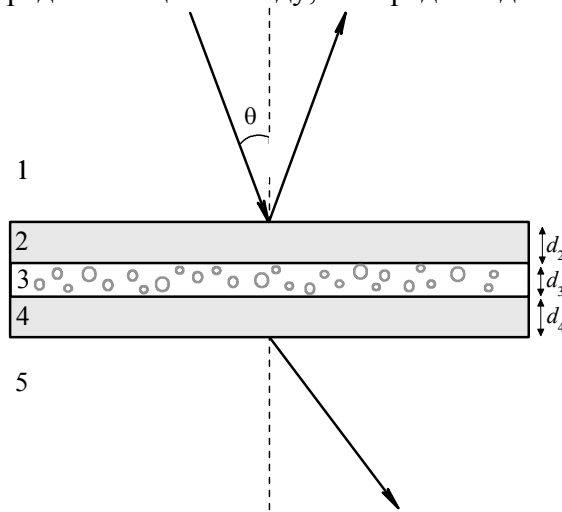


Рисунок 1. Схема задачи.

Для функции распределения пузырьков по размерам принимается следующее соотношение:

$$N(a) = \frac{n_t}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{(\ln(a/a_0))^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}.$$

Здесь  $a$  – радиус пузырька,  $a_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $n_t$  – параметры распределения, взятые из [7].

Начальное импульсное возмущение давления задается с помощью мнимой части вейвлета Морле с частотой всплеска  $\omega_B$ :

$$p'(0, t) = \text{Im}\left(\exp(-i2\pi\omega_B(t-\tau))\exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2\delta^2}\right)\right) \quad (1)$$

Параметр  $\tau$  определяет местоположение,  $\delta$  – ширину всплеска.



### Дисперсионное соотношение

Для описания динамики акустических волн в пузырьковом слое в рамках допущений континуального подхода [1], в системе координат, связанной с невозмущенной средой, записываются линеаризованные уравнения массы, числа пузырьков, импульса и давления. Эти уравнения имеют вид, обобщающий [4, 5] в виду полидисперсности пузырьков, для чего используется интегрирование уравнений по радиусу пузырьков от  $a_{\min}$  до  $a_{\max}$ , аналогично способу, предложенному в [8] для парагазокапельных сред:

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \rho_{j0} \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$(\rho_{l0} + \rho_{g0}) \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'_l}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\left\langle \frac{\partial p'_g}{\partial t} \right\rangle = -3\gamma_g p_0 \left\langle \frac{w'}{a} \right\rangle - 3(\gamma_g - 1) \left\langle \frac{q}{a} \right\rangle, \quad w' = \frac{\partial a'}{\partial t} \quad (4)$$

$$\rho_j = \rho_j^\circ \alpha_j, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) a^3 da \quad (5)$$

$$\langle h \rangle = \frac{1}{\rho_{g0}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} h N_0(a) g(a) da = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} h N_0(a) g(a) da / \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N_0(a) g(a) da,$$

$$\rho_{g0} = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N_0(a) g(a) da, \quad g_0(a) = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_g^\circ, \quad j = l, g$$

Здесь и далее:  $\rho^\circ$ ,  $\rho$  – истинная и средняя плотности,  $v$  – скорость,  $p$  – давление,  $n$  – число пузырьков в единице объема смеси,  $\gamma_g$  – показатель адиабаты газа,  $w$  – скорость радиального движения пузырьков,  $\alpha$  – объемное содержание,  $N(a)$  – функция распределения пузырьков газа по размерам,  $x$  – координата,  $t$  – время. Нижние индексы  $l$  и  $g$  относятся к параметрам жидкой и газовой фаз соответственно, индексом 0 обозначено первоначально невозмущенное состояние. Штрихи обозначают возмущения параметров. Линейный оператор  $\langle h \rangle$  от некоторой функции  $h(a)$  был введен ранее в [8].

Для несущей среды и газа в пузырьках используются уравнения состояния акустически сжимаемой жидкости и совершенного газа

$$p_l - p_{l0} = C_l^2 (\rho_l^\circ - \rho_{l0}^\circ), \quad p_g = \rho_g^\circ RT_g \quad (6)$$

Здесь  $C_l$  – скорость звука в жидкости,  $R$  – газовая постоянная.

При описании радиального движения, согласно уточнению, приведенному в [4], будем полагать, что возмущение массовой радиальной скорости жидкости на поверхности раздела фаз  $w'$  состоит из двух слагаемых:  $w' = w'_R + w'_A$  [4]. Слагаемое  $w'_R$  описывается уравнением Рэлея-Ламба:

$$a_0 \frac{\partial w'_R}{\partial t} + 4 \frac{\nu_l}{a_0} w'_R = \frac{p'_g - p'_l}{\rho_{l0}^\circ}, \quad (7)$$

где  $\nu_l$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Слагаемое  $w'_A$ , учитывающее сжимаемость несущей фазы, определяется из решения задачи о сферической разгрузке сферического пузырька в жидкости в акустическом приближении [4]:

$$w'_A = \frac{p'_g - p'_l}{\rho_{l0} C_l (\alpha_{g0})^\beta}, \quad \beta = \frac{1}{6} \quad (8)$$

Аналогично [5], используется уточнение формулы (8) для акустических поправок из [4], для чего  $\beta$  полагаем равной 1/6 вместо 1/3.

Для определения интенсивности межфазного теплообмена  $q$  примем следующее соотношение [4]:

$$q = (i\omega) a p'_g [y \cdot \coth(y) - 1] / y^2, \quad y = \sqrt{-i\omega a^2 / \kappa} \quad (9)$$

где  $\omega$  – частота возмущений,  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности газа в пузырьках. Соотношение (9) получается из решения уравнения теплопроводности для газового пузырька с соответствующими граничными условиями.

После линеаризации соотношений (5) и уравнений состояния (6) получается замкнутая система линеаризованных уравнений, решение которой ищется в виде плоских прогрессивных волн для возмущений параметров пузырьковой жидкости  $\psi'$  ( $\psi = v, p, n \dots$ ):

$$\psi' = A_\psi \exp[i(K_* x - \omega t)] \quad (10)$$

Здесь  $A_\psi$  – амплитуда возмущение параметра  $\psi$ ,  $K_* = K + iK_{**}$  – комплексное волновое число,  $K_{**}$  – линейный коэффициент затухания, фазовая скорость определяется как  $C_p = \omega / K$ .

Из условия существования у системы (1)-(9) нетривиального решения (10) получается следующая зависимость комплексного волнового числа  $K_*$  от частоты возмущений  $\omega$ :

$$\left(\frac{K_*}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{C_f^2} + \frac{3\alpha_{g0}\alpha_{l0}\rho_{l0}\langle Q \rangle}{3\gamma_g p_{l0} - \langle QS \rangle}, \quad (11)$$

$$C_f = C_l / \alpha_{l0}, \quad S = i\omega a^2 h_a \rho_{l0} / (1 + h_a t_a), \quad Q = 1 + 3(\gamma_g - 1)(y \cdot \coth(y) - 1) / y^2,$$

$$h_a = -i\omega + 4\nu_l / a^2, \quad t_a = a / (C_l (\alpha_{g0})^\beta), \quad \beta = \frac{1}{6},$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\rho_{g0}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) g_0(a) Q da, \quad \langle QS \rangle = \frac{1}{\rho_{g0}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) g_0(a) Q S da.$$

### Расчет динамики импульсных возмущений малой амплитуды

Далее используется методика быстрого преобразования Фурье (БПФ) изложенная в [8]. В соответствие с представлениями Фурье-анализа произвольный пространственно временной импульс может быть представлен в виде следующего интеграла:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \exp[i(K_* x - \omega t)] d\omega. \quad (12)$$

Это соотношение определяет обратное преобразование Фурье функции  $Y(\omega)$ . Спектральная функция  $Y(\omega)$  находится по заданному начальному сигналу:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(0, t) \exp(i\omega t) dt \quad (13)$$

Это соотношение определяет прямое преобразование Фурье функции  $y(0, t)$ .

Для численного расчета динамики импульсного возмущения давления  $p'$  используются методы дискретного преобразования Фурье. Импульс  $p'$  представляется в виде конечной суммы гармонических волн:

$$p'(x, t) = \sum_{m=0}^{L-1} z_m \exp[i(K_*(\omega_m)x - \omega_m t)]. \quad (14)$$

При  $x = 0$  имеем:

$$p'(0, t) = \sum_{m=0}^{L-1} z_m \exp(i\omega_m t) \quad (15)$$

В соответствии с (14) для определения  $p'(x, t)$  необходимо найти коэффициенты  $z_m$ , при этом должно выполняться соотношение (15). Для нахождения коэффициентов  $z_m$  и определения  $p'(x, t)$  используются алгоритмы БПФ. Разложив начальный импульс в дискретный ряд Фурье, и сложив его гармонические составляющие в новом положении, можно получить преобразованный импульс, сформировавшийся под воздействием дисперсии и диссипации в среде.

Для расчета взаимодействия акустического сигнала в воде с многослойным объектом, используется следующая методика расчета. Согласно [9], результатом прохождения плоской монохроматической волны  $\sim \exp(iKx - \omega t)$  через многослойный объект будет плоская волна  $\sim W \exp(iKx - \omega t)$ , где  $W$  есть коэффициент прохождения волны, который определяется через импедансы слоев  $Z_j$  и входные импедансы границ слоев  $Z_j^{in}$ . Для многослойного объекта, состоящего из  $n$  слоев, коэффициент прохождения  $W$  имеет вид:

$$W = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \prod_{j=2}^n \left( \frac{Z_j^{in} + Z_j}{Z_j^{in} + Z_j} \exp(iK_j d_j \cos \theta_j) \right) \quad (16)$$

$$Z_j = \rho_j \frac{\omega}{K_j \cos \theta_j}, \quad Z_j^{in} = \rho_j \frac{Z_{j-1}^{in} - iZ_j \operatorname{tg}(K_j d_j \cos \theta_j)}{Z_j - iZ_{j-1}^{in} \operatorname{tg}(K_j d_j \cos \theta_j)} Z_j, \quad Z_1^{in} = Z_1,$$

где  $d_j$ ,  $K_j$  – толщина и волновое число  $j$ -го слоя,  $\theta_j$  – угол, образуемый направлением распространения волны в слое с нормалью к границам слоя. Волновое число для слоя с пузырьковой жидкостью определяется с помощью дисперсионного соотношения (11).

С помощью обратного преобразования Фурье рассчитываются комплексные амплитуды гармонических составляющих исходного импульса давления  $p'(0, t)$ , где за положение  $x = 0$  принимается граница между средами 1 и 2 (вода–многослойная преграда). Затем, определяются амплитуды гармонических составляющих импульса, прошедшего через преграду в среду под номером 5, т.е. в воду ( $x = d_2 + d_3 + d_4$ ). Изменение давления как функция времени в новом положении рассчитывается с помощью прямого преобразования Фурье.

### Результаты расчетов

На рис.2 и 3 проведено сопоставление наших расчетов с экспериментальными данными [7] по зависимостям фазовой скорости и линейного коэффициента затухания от частоты возмущений для пузырькового геля. Экспериментальные результаты получены при следующих параметрах пузырькового слоя:  $\alpha_{20} = 0.0015$ ,  $a_0 = 0.8 \cdot 10^{-4}$  м,  $\varepsilon = 0.05$ . Имеется хорошее согласование результатов расчетов по дисперсионному соотношению (11) с данными эксперимента [7].

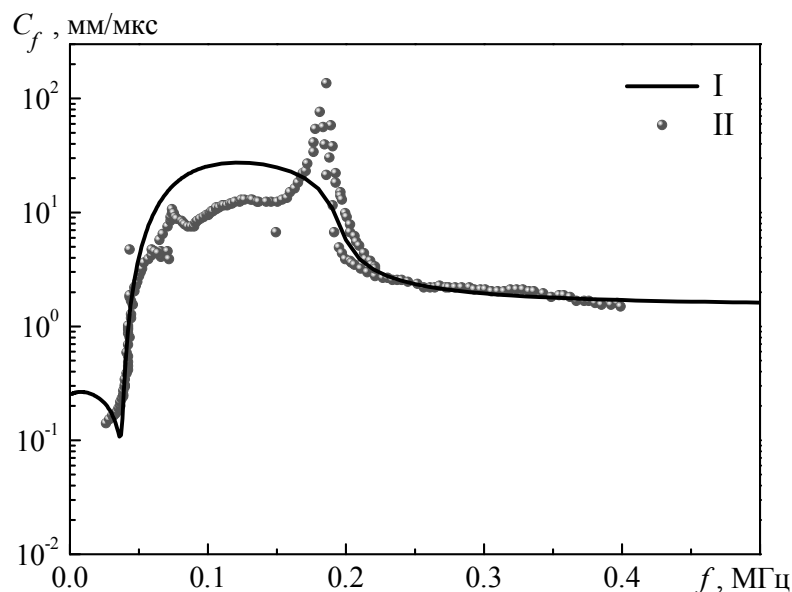


Рисунок 2. Зависимость фазовой скорости от частоты возмущений для полидисперсной смеси геля с воздушными пузырьками (I – расчет, II – экспериментальные данные [7]).

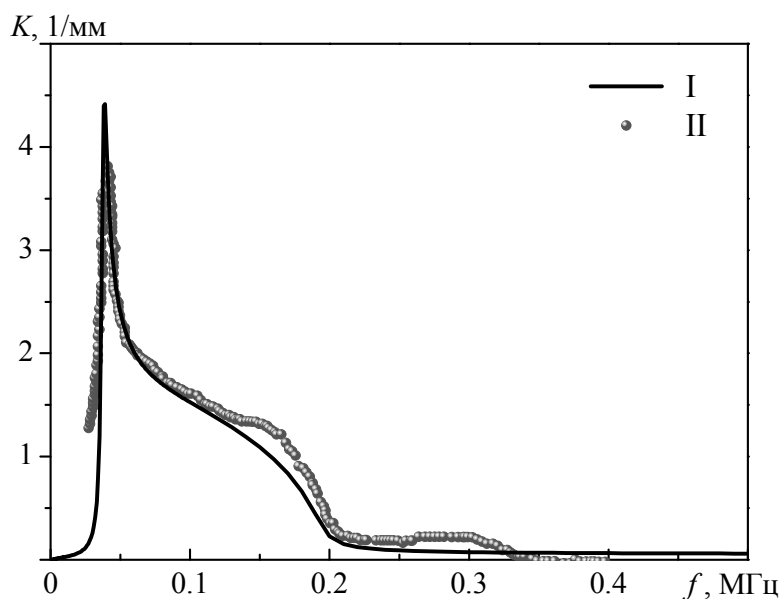


Рисунок 3. Зависимость коэффициента затухания от частоты возмущений для полидисперсной смеси геля с воздушными пузырьками (I – расчет, II – экспериментальные данные [7]).

Результаты, показанные на рис. 4 и 6 показывают, что функция (8) удовлетворительно описывает исходный акустический сигнал, записанный в эксперименте [7]. Число гармоник подпрограммы БПФ [10] подбиралось из условия движения импульса в очищенной воде (когда дисперсия и диссипация отсутствует) без искажения. Рассчитанные зависимости давления от приведенного времени на гидрофоне для импульса, прошедшего через образец с пузырьковым слоем, хорошо согласуются с экспериментом (рис. 5 и 7). Более сильную диссипацию экспериментального сигнала по сравнению с расчетным импульсом можно объяснить

наличием в геле пузырьковых кластеров (на их присутствие указывают авторы эксперимента).

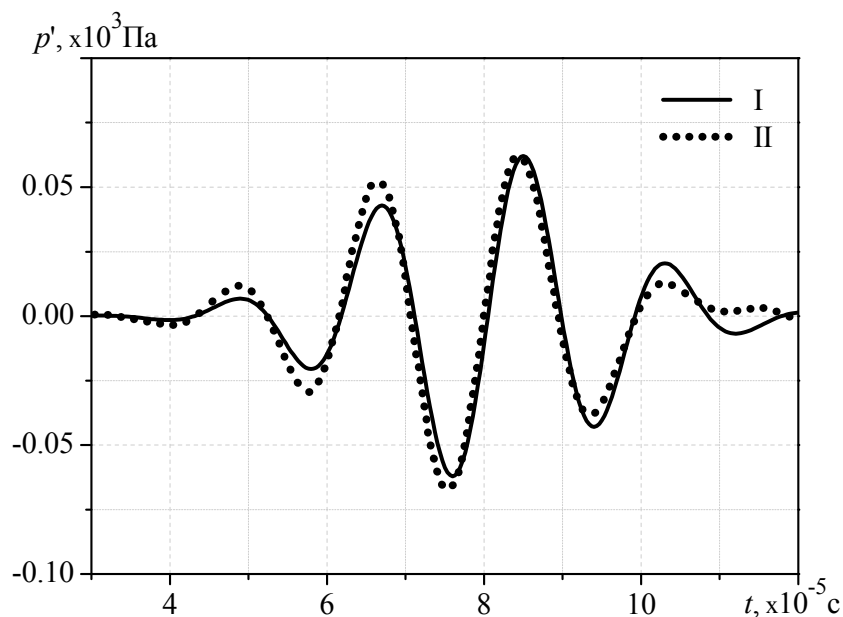


Рисунок 4. Исходный импульс давления с основной частотой 0.05МГц (I – расчет, II – экспериментальные данные [7]).

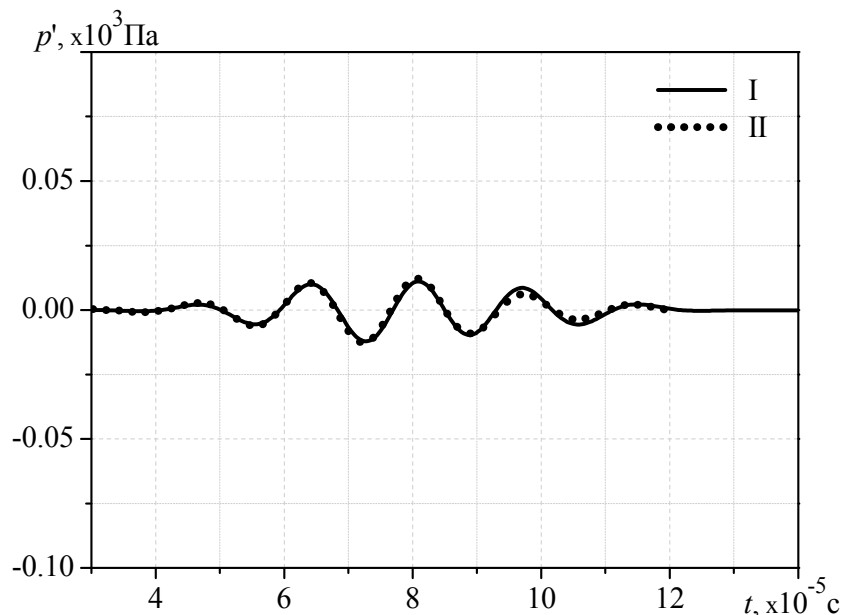


Рисунок 5. Импульс давления с основной частотой 0.05МГц, прошедший через образец с пузырьковым слоем (I – расчет, II – экспериментальные данные [15]).

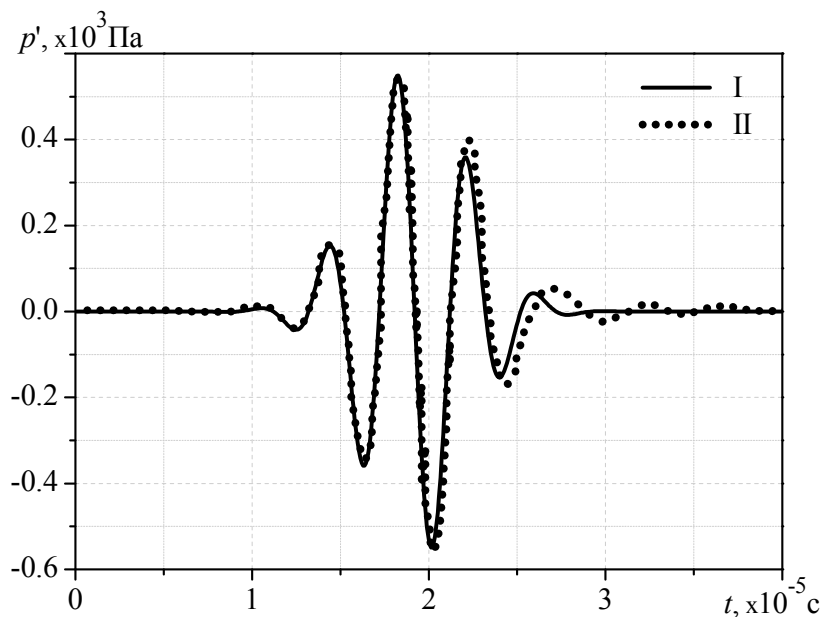


Рисунок 6. Исходный импульс давления с основной частотой 0.25МГц (I – расчет, II – экспериментальные данные [7]).

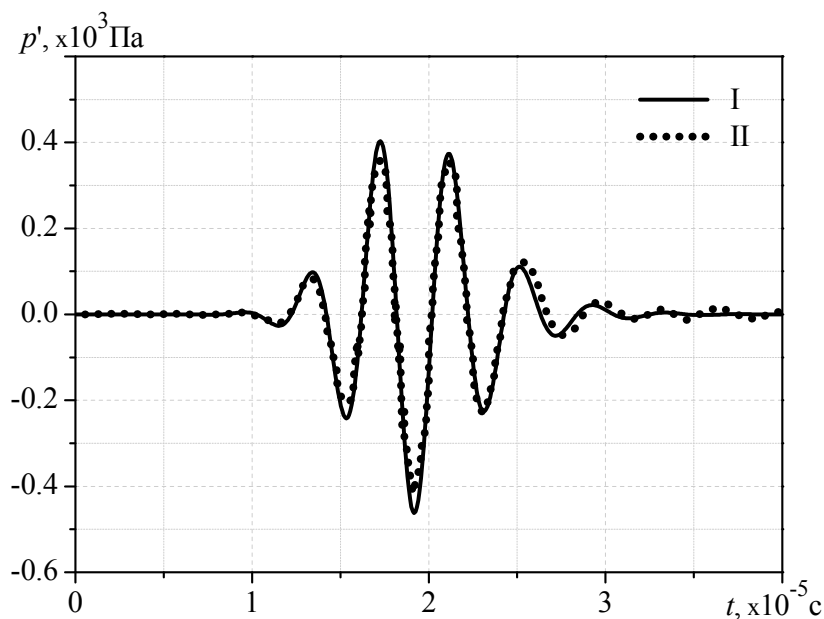


Рисунок 7. Исходный импульс давления с основной частотой 0.25МГц (I – расчет, II – экспериментальные данные [7]).

Экспериментальные результаты [7] получены при следующих параметрах пузырькового слоя:  $h = 2$  мм,  $\alpha_{20} = 0.0015$ ,  $a_0 = 0.08$  мм, и соответствуют среднему расстоянию между пузырьками  $l = a_0 / \alpha_{20}^{1/3} = 0.7$  мм. При этом длина рассматриваемой волны по чистой жидкости  $L = 2\pi C_1 / \omega = 15$  мм. Рассматриваемая континуальная модель пузырьковой жидкости основанная на физических законах и основополагающих предположениях [1] справедлива при

$L \gg l$ ,  $h \gg l$ . Хотя второе условие выполняется не в достаточной степени, но теоретические кривые зависимости давления на гидрофоне от приведенного времени на рис.5 и 7 хорошо согласуются с экспериментом. При значении частоты около 40 кГц на рисунке 3 наблюдается максимум коэффициента затухания. Этот максимум соответствует резонансной частоте пузырьков, которая может быть определена по формуле Миннаэрта для основного радиуса используемой функции распределения пузырьков по размерам  $N(a)$   $a_0 = (a_{\min} + a_{\max})/2 = 0.08$  мм:  $f_0 = \sqrt{3\gamma_g p_0 / \rho_{10}^0} / (2\pi a_0)$ . Здесь  $\gamma_g = 1.4$  – показатель адибаты воздуха.

На частоте 0.05МГц коэффициент затухания принимает значение близкое к максимальному (рис. 3), что объясняет сильное затухание и искажение импульса давления на рис. 5 в сравнении с исходным импульсом. Диссипация прошедшего через многослойный образец импульса с основной частотой 0.25МГц существенно меньше, т.к. при такой частоте значение коэффициента прохождения мало. Поэтому затухание импульса с основной частотой 0.25МГц после прохождения через преграду мало и определяется в основном переотражением волн от границ многослойной среды.

### **Заключение**

Представлен метод расчета искажения акустического сигнала при взаимодействии с многослойным образцом. Проведенные расчеты показывают хорошее согласование теоретических расчетов и экспериментальных данных. Показано, что даже небольшая объемная доля пузырьков воздуха может эффективно блокировать распространение акустических волн с частотами, близкими к резонансным частотам собственных колебаний пузырьков. Небольшое количество пузырьков воздуха (около 0.1% по объему) в тонком слое геля существенно понижает амплитуду волн в диапазоне 0.025 – 0.15МГц в 5 и более раз. При этом имеются диапазоны частот, где влияние пузырькового слоя не значительно.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

### **Список литературы**

- 1 Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1,2. М.: Наука, 1987.
- 2 Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ, 1983.
- 3 Silberman E. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes // Journal of the Acoustical Society of America. 1957. V.29. N.6. P.925–931.
- 4 Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей жидкости при распространении волн в пузырьковой среде // Доклады АН СССР. 1989. Т.304. №5. С.1077–1081.
- 5 Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т.48. №2. С.188–192.
- 6 Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // Доклады Академии Наук. 2012. Т.447. №3. С.284–287.
- 7 Leroy V., Strybulevych A., Page J.H., Scanlon M.G. Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments // Journal of the Acoustical Society of America. 2008. V.123. No.4. P.1931–1940.
- 8 Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Изд-во Казанского математического общества, 1998.
- 9 Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.:Наука, 1973.
- 10 Гапонов В.А. Пакет программ быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препр. АН СССР, Сиб. Отделение: ИТФ, 1976. Т.5. 19 с.

## КАЧЕНИЕ КОЛЕСА СО СТЕРЖНЕВЫМ ПРОТЕКТОРОМ ПО ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Г.В.Гусак, В.Г.Вильке

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
механико-математический факультет.

119991 Москва, Ленинские горы д.1, e-mail: [g\\_gusak@mail.ru](mailto:g_gusak@mail.ru)

Рассматривается задача о качении колеса с деформируемой периферией по шероховатой плоскости под действием сил и момента, приложенных к центру колеса. Колесо моделируется твердым диском и деформируемым протектором, представленным множеством упругих стержней, равномерно распределенных по внешней стороне диска (рис.1). Предполагается, что стержни жестко закреплены на ободе колеса, контакт с дорогой происходит на концах стержней. Динамика продольно-поперечных деформаций стержней анализируется согласно методу разделения движений в квазистатическом приближении. Получены уравнения качения колеса и найдены условия существования стационарных движений.

*Ключевые слова:* качение колеса, стержневой протектор, метод разделения движений, проскальзывание.

Различные модели взаимодействия колеса и дорожного покрытия рассматривались ранее [3-9]. Основное отличие предлагаемой модели состоит в том, что взаимодействие колеса с дорогой представляется как совокупность взаимодействий множества стержней, каждый из которых испытывает продольно-поперечные деформации при учете сил сухого трения в точках контакта концов стержней с дорогой.

Согласно методу разделения движений [2,3] рассматриваемый процесс движения стержней, составляющих протектор, можно изучать в квазистатическом приближении, так как времена, характеризующие переходные процессы при движении стержней протектора, значительно меньше времен, характеризующих динамику самого колеса и связанного с ним транспортного средства.

Модель колеса состоит из бандажа – недеформируемого цилиндрического тела радиуса  $r$ , и протектора – множества гибких растяжимых стержней длины  $h$ , жестко заделанных в бандаже (рис.1). Введем неподвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , относительно которой прямолинейный участок дороги задается уравнением  $x_1 = R = r + h$ , и систему координат, связанную с центром колеса  $Cx_1x_2x_3$ . Полагаем ось  $Cx_1$  направленной по вертикали к дороге, ось  $Cx_2$  – по горизонтали, а плоскость диска колеса совпадающей с плоскостью  $Ox_1x_2$ .

В рамках данной модели в [1] исследовано поведение стержней протектора в зависимости от вертикального перемещения центра колеса, найдены зона контакта и условия, когда она разбивается на части, в которых либо имеет место проскальзывание концов стержней, либо оно отсутствует, в зависимости от величины продольного перемещения центра колеса; рассмотрен аналог непрерывной модели стержневого протектора.

Пусть на колесо действует сила  $P(t)\vec{e}_1 + Q(t)\vec{e}_2$  и момент  $M(t)\vec{e}_3$ . Положение центра колеса  $C$  в неподвижной системе координат  $Ox_1x_2$  зададим координатами  $R_x, R_y$ , а его поворот относительно оси  $Cx_3$  – углом  $\psi$ .



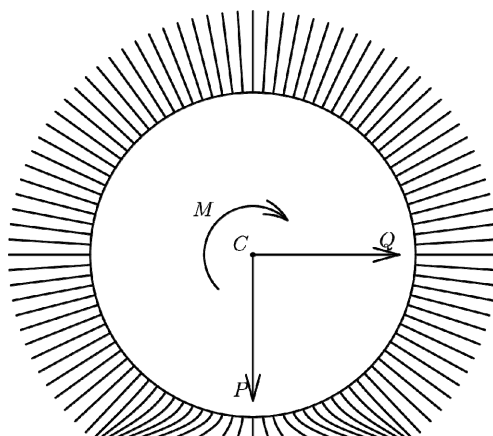


Рис. 1 Модель колеса со стержневым протектором

Предполагая в дальнейшем использовать квазистатическую теорию малых деформаций стержней, пренебрежем кинетической энергией относительного движения (колебаний) стержней в зоне контакта с дорогой. Представим кинетическую энергию колеса с протектором в виде

$$T = \frac{1}{2} [mR^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J\dot{\psi}^2], \quad (1)$$

где  $m, J$  – масса колеса и его момент инерции относительно оси  $Cx_3$ . Функционал потенциальной энергии равен

$$\Pi[x, y, \psi, u, v, t] = -P(t)Rx - Q(t)Ry - M(t)\psi + \frac{R^2}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^h (nu'^2 + \tau v''^2) ds d\varphi. \quad (2)$$

Здесь  $s$  – координата точки на стержне,  $\varphi$  – угол между вертикалью и недеформированной осью стержня,  $Ru(s, \varphi, t), Rv(s, \varphi, t)$  – продольное и поперечное перемещения точек стержней протектора,  $n, \tau$  – удельные значения продольной и изгибной жесткостей стержня. Штрихи обозначают частные производные по переменной  $s$ . Величина зоны контакта  $[-\varphi_0, \varphi_0]$  связана с перемещением центра колеса вдоль оси  $Ox_1$ , а именно  $\cos \varphi_0 = 1 - x$ .

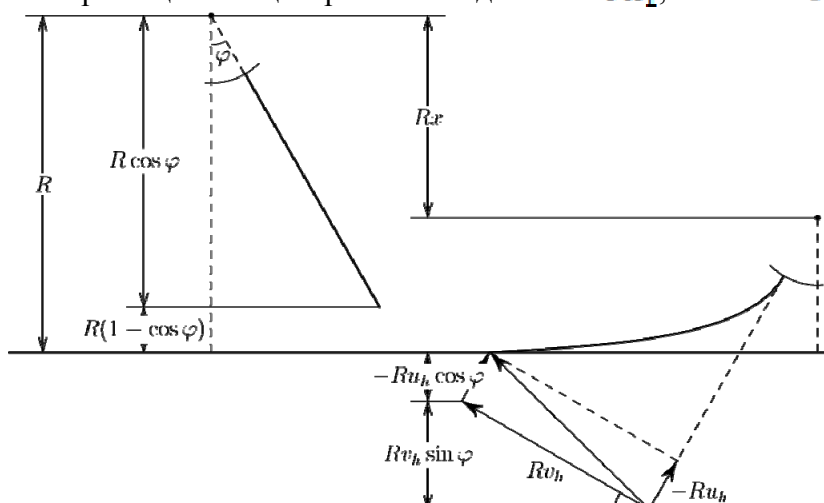


Рис. 2 Деформация элемента протектора

В зоне контакта колеса с дорогой выполняется условие

$$x + (1 + u_h) \cos \varphi - v_h \sin \varphi = 1, \quad u_h = u(h, \varphi, t), \quad v_h = v(h, \varphi, t), \quad |\varphi| \leq \varphi_0 \quad (3)$$

Оно означает, что в момент соприкосновения конца стержня с дорогой происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого становится равной нулю вертикальная составляющая скорости, равная до удара  $-R\dot{\psi} \sin \varphi_0 > 0$ . В результате в стержне возникают

продольные и поперечные перемещения малой амплитуды, что влечет сход конца стержня с односторонней связью (разрыв контакта с дорогой). Очевидно, что через достаточно малый промежуток времени конец стержня вторично выйдет на связь и в дальнейшем повторится описанный выше сценарий.

Поскольку колебания стержней имеют высокую частоту, обусловленную большими значениями жесткостей стержней, то в качестве побочного явления в системе могут возникнуть звуковые волны (шум при качении колеса с пневматической шиной). Будем считать, что этот переходный процесс достаточно быстро затухнет из-за рассеяния энергии в материале стержня, трения о воздух и последовательности неупругих ударов конца стержня о дорогу. Исследование этого процесса достаточно сложно и выходит за рамки данной статьи.

В дальнейшем будем считать, что после первого контакта стержня с дорогой его конец не покидает связь, то есть остается в контакте с дорогой до момента, когда угол, характеризующий положение стержня относительно вертикали, не станет равным  $-\varphi_0 \cong -\arccos(1-x)$ . Таким образом, контакт колеса с дорогой происходит на интервале времени  $[0, -2\varphi_0\omega^{-1}]$ , который, вообще говоря, разбивается на интервалы времени, характеризующиеся проскальзыванием конца стержня вдоль дороги или его отсутствием.

Освободим систему от связей в зоне контакта и введем поле нормальных и касательных сил

$$\begin{aligned} \vec{f}(\varphi, t) &= f_1(\varphi, t)\vec{e}_1 + f_2(\varphi, t)\vec{e}_2 = f_r(\varphi, t)\vec{e}_r + f_\varphi(\varphi, t)\vec{e}_\varphi, \quad |\varphi| \leq \varphi_0 \\ f_r(\varphi, t) &= f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi, \quad f_\varphi(\varphi, t) = -f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Положение концов стержней в зоне контакта определяется векторным полем

$$\vec{R} = R[x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (1 + u_h)\vec{e}_r + v_h\vec{e}_\varphi], \quad (5)$$

вариация которого равна

$$\delta\vec{R} = R\{\delta x\vec{e}_1 + \delta y\vec{e}_2 + \delta\psi\vec{e}_3 \times [(1 + u_h)\vec{e}_r + v_h\vec{e}_\varphi] + \delta u_h\vec{e}_r + \delta v_h\vec{e}_\varphi\}.$$

Найдем работу поля реакций связей (4) на возможных перемещениях точек системы, освобожденной от связей

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \vec{f} \delta\vec{R} d\varphi = R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_1 \{\delta x + (\delta u_h - v_h \delta\psi) \cos \varphi - (\delta v_h + (1 + u_h) \delta\psi) \sin \varphi\} d\varphi + \\ &+ R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_2 \{\delta y + (\delta u_h - v_h \delta\psi) \sin \varphi + (\delta v_h + (1 + u_h) \delta\psi) \cos \varphi\} d\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты при независимых вариациях  $\delta x, \delta y, \delta\psi, \delta u_h, \delta v_h$  в равенстве (6) являются соответствующими обобщенными силами. Уравнения Лагранжа второго рода получим, учитывая соотношения (1), (2). Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_1 d\varphi \\ mR\ddot{y} &= Q + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_2 d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \{-f_1[(1 + u_h) \sin \varphi + v_h \cos \varphi] + f_2[(1 + u_h) \cos \varphi - v_h \sin \varphi]\} d\varphi \\ u''(s, \varphi, t) &= 0, \quad 0 \leq s \leq h \\ v^{IV}(s, \varphi, t) &= 0, \quad 0 \leq s \leq h \\ u(0, \varphi, t) &= 0 \\ nRu'(h, \varphi, t) &= f_r \\ v(0, \varphi, t) = v'(0, \varphi, t) = v''(h, \varphi, t) &= 0 \\ \tau Rv'''(h, \varphi, t) &= -f_\varphi \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Последние два уравнения и граничные условия системы (7) описывают квазистатические формы равновесия стержней в зоне их контакта с дорогой. Решая эти уравнения, найдем перемещения конца стержня

$$u_h(\varphi, t) = \frac{h}{nR} f_r, \quad v_h(\varphi, t) = \frac{h^3}{3\tau R} f_\varphi \quad (8)$$

Касательная и нормальная компоненты поля реакций связаны друг с другом, поскольку найденные перемещения (8) должны удовлетворять соотношению (3). Используя соотношения (4), (8) и введя обозначения  $\kappa = \frac{nR}{h}$  и  $\zeta = \frac{3\tau}{nh^2}$ , представим уравнения (7) в виде

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \cos \varphi - \zeta v_h \sin \varphi) d\varphi \\ mR\ddot{y} &= Q + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \sin \varphi + \zeta v_h \cos \varphi) d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + R\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} [\zeta v_h + u_h v_h (\zeta - 1)] d\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\cos \varphi_0 = 1 - x$ . Система, состоящая из четырех уравнений (3), (9), содержит пять неизвестных  $x, y, \psi, u_h, v_h$  и должна быть дополнена соотношением, связывающим нормальную и касательную компоненты реакций в точках контакта стержней с дорогой. Это соотношение представляется законом сухого трения

$$|f_2(\varphi, t)| \leq f \cdot f_1(\varphi, t) \Rightarrow |u_h \sin \varphi + \zeta v_h \cos \varphi| \leq f \cdot (u_h \cos \varphi - \zeta v_h \sin \varphi) \quad (10)$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения материалов протектора и дороги. Соотношение (10) превращается в равенство, если скорость точки контакта не равна нулю, или заменяется равенством нулю скорости точки контакта.

Для проверки неравенства (10) найдем переменные  $u_h, v_h$  используя соотношения (5)

$$\begin{aligned} u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi &= y_0 - y + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi, \\ u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi &= 1 - x - \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $y_0$  – координата центра колеса в момент  $t_0$ , когда конец стержня вступает в контакт с дорогой;  $\varphi_0$  – угол, который стержень составляет с вертикалью в этот момент; а  $R\beta(\varphi)$  – перемещение конца стержня вдоль дороги в момент времени, когда он составляет с вертикалью угол  $\varphi$ . Функция  $\beta(\varphi_0) = 0$  и остается равной нулю, если проскальзывание конца стержня отсутствует при уменьшении угла  $\varphi$  до величины близкой  $(-\varphi_0)$ , когда конец стержня перестает контактировать с дорогой. Это обстоятельство связано с тем, что для выделенного стержня величины  $x(t), y(t), \varphi(t) = \varphi_0 + \psi(t) - \psi(t_0)$  изменяются в процессе его контакта с дорогой.

Допустим, что время контакта выделенного стержня достаточно мало по сравнению с периодом времени, на котором рассматривается поставленная задача. Заметим, что в случае качения без проскальзывания абсолютно жесткого диска, время контакта фиксированной точки на диске равно нулю. Поскольку время контакта стержня с дорогой мало, то можно принять

$$\begin{aligned} y &\cong y_0 + V(t_0)(t - t_0) \\ \psi &\cong \psi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) \\ \varphi &\cong \varphi_0 + \omega(t_0)(t - t_0) \end{aligned}$$

где  $t_0$  – момент начала контакта, а  $\Delta t = -\frac{2\varphi_0}{\omega}$  – длительность контакта. Отсюда следует, что

$y - y_0 \cong V(t_0) \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\omega(t_0)}$ . Изменение величины  $x$  за время контакта выделенного стержня также незначительно, что позволяет принять  $1 - x = \cos \varphi_0$  и, следовательно, представить формулы (11) в виде

$$\begin{aligned} u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi &= p(\varphi - \varphi_0) + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi, \quad p = -\frac{V(t_0)}{\omega(t_0)} \\ u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi &= \cos \varphi_0 - \cos \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

Величины  $p, \varphi_0$  в формулах (12) представляются функциями «медленного времени», то есть их можно считать постоянными на временах порядка времени контакта выделенного стержня с дорогой. Из уравнений (12) найдем функции  $u_h(\varphi, t), v_h(\varphi, t)$

$$\begin{aligned} u_h &= a \sin \varphi + b \cos \varphi, & a &= p(t)(\varphi - \varphi_0(t)) + \beta(\varphi(t)) + \sin \varphi_0(t) - \sin \varphi \\ v_h &= a \cos \varphi - b \sin \varphi, & b &= \cos \varphi_0(t) - \cos \varphi \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Зависимость от «быстрого времени» определяется через угол  $\varphi$ , а зависимость величин  $u_h(\varphi, t)$ ,  $v_h(\varphi, t)$  от второго аргумента  $t$  («медленного времени») проявляется через зависимость от времени переменных  $p$  и  $\varphi_0$ . Закон сухого трения (10) принимает вид

$$\begin{aligned} &|a(\varphi, t)(\sin^2 \varphi + \zeta \cos^2 \varphi) + b(\varphi, t)(1 - \zeta) \sin \varphi \cos \varphi| \leq \\ &\leq -f[a(\varphi, t)(1 - \zeta) \sin \varphi \cos \varphi + b(\varphi, t)(\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)] \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда параметр  $\zeta = 1$ . Неравенство (14) преобразуется к виду

$$|p(\varphi - \varphi_0) + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi| \leq f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (15)$$

Отсутствие проскальзывания конца стержня вдоль дороги означает выполнение неравенства (15) при  $\beta(\varphi) = 0$ . Считая величину  $(\varphi - \varphi_0)$  малой, разлагая входящие в неравенство (15) функции в ряды Тейлора и сохраняя члены до второго порядка малости относительно  $(\varphi - \varphi_0)$ , представим неравенство (15) в виде

$$\left| p - \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) \right| \leq f \left[ \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) \right] \quad (16)$$

Если неравенство (15) при  $\beta(\varphi) = 0$  выполняется для всех значений  $\varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]$ , то проскальзывание стержней во всей зоне контакта отсутствует. Используя соотношения (13) и вычисляя интегралы в правых частях уравнений (9), получим уравнения движения колеса со стержневым протектором

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P - \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ mR\ddot{y} &= Q + 4\kappa x \left( 1 + \frac{y}{\psi} \right) \\ J\ddot{\psi} &= M + 4R\kappa x \left( 1 + \frac{y}{\psi} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

В формулах (17) отброшены члены высшего порядка малости по  $x$ . Решения уравнений (17) определяются начальными условиями и должны удовлетворять неравенству (15), гарантирующему качение колеса без проскальзывания концов стержней в зоне контакта. Неравенство (16) может быть справедливым при всех  $\varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]$ .

Пусть  $p = \cos \varphi_0$ . В этом случае неравенство (16) примет вид

$$|\varphi - \varphi_0| \leq 2f + f \operatorname{ctg} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0), \quad \varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]$$

и оно справедливо, если

$$f \geq \frac{2\varphi_0}{2 - 2\varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0} \quad (18)$$

Правая часть неравенства (18) стремится к нулю при  $\varphi_0 \rightarrow 0$ , что соответствует стремлению к нулю вертикальной нагрузки  $P$ . Поскольку предполагается, что угол  $\varphi_0$  мал, то режим качения колеса без проскальзывания возможен в случае близости к единице отношения  $-\frac{V}{\omega} = -\frac{y}{\psi}$ .

Если неравенство (18) нарушается, то в зоне контакта появляются области, где возникает скольжение концов стержней по дороге, и в дальнейшем вся зона контакта становится областью скольжения концов стержней. В этом случае колесо движется «юзом». На рис.3 приведены три вида графиков функции

$$G(\varphi) = f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - |p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi|,$$

полученной из неравенства (15) при  $\beta(\varphi) = 0$  и следующих значениях параметров:

$$f = 0.8, \quad \varphi_0 = 0.1, \quad p_1 = 0.9983, \quad p_2 = 1.01, \quad p_3 = 1.1$$

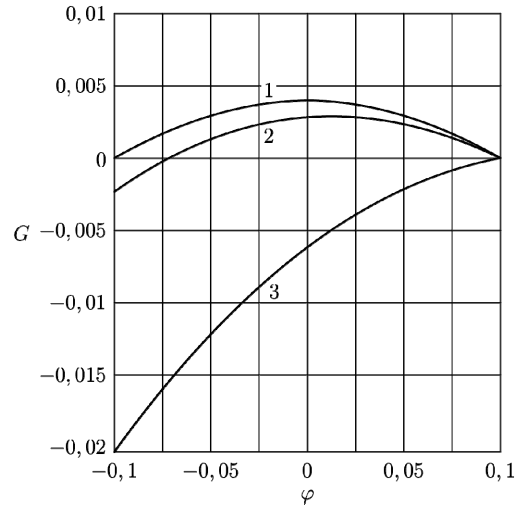


Рис. 3

Как следует из вида графиков, в первом случае функция  $G(\varphi) \geq 0$ , что свидетельствует об отсутствии проскальзывания. На втором графике в задней части зоны контакта функция  $G(\varphi)$  отрицательна и в ней имеет место проскальзывание концов стержней. На третьем графике функция  $G(\varphi) \leq 0$ , то есть колесо движется «юзом», когда проскальзывание имеет место во всей зоне контакта. Уравнения (17) следует использовать только для первого случая.

Отметим, что использование приближенного неравенства (16) для определения области проскальзывания в зоне контакта приводит, согласно численным расчетам, к ошибкам порядка 10%. При наличии области проскальзывания в зоне контакта система уравнений (9) при  $\zeta = 1$  принимает вид

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) d\varphi = P - \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ mR\ddot{y} &= Q - f\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_*} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) d\varphi \cdot \operatorname{sgn} \left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right) + \kappa \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} [p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi] d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + R\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_*} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) [-f \cos \varphi \cdot \operatorname{sgn} \left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right) - \sin \varphi] d\varphi + \\ &+ R\kappa \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} \{ [p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi] \cos \varphi - (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \sin \varphi \} d\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Знак выражения  $\left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right)$  определяет, в какую сторону скользит конец стержня. Величина  $\varphi_*$  является значением угла  $\varphi$ , при котором неравенство (15) обращается в равенство при условии, что  $\beta(\varphi) = 0$ . Другими словами, угол  $\varphi_*$  разделяет зону контакта на области, где имеется проскальзывание концов стержней, и где его нет. Может оказаться, что угол  $\varphi_* = \varphi_0$ , что означает проскальзывание концов стержней во всей зоне контакта. Это движение называется движением колеса «юзом».

Простейшим случаем движения колеса является его качение, когда центр колеса имеет постоянную скорость, направленную по оси  $OX_2$ , и постоянную угловую скорость. Необходимым условием движений этого типа является постоянство сил и момента, приложенных к колесу. Если в зоне контакта выполняется условие (15) при  $\beta(\varphi) = 0$ , то стационарное движение получим из уравнений (17), положив  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = V$ ,  $\dot{\psi} = \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ Q &= -4\kappa x \left( 1 + \frac{V}{\omega} \right) \\ M &= -4R\kappa x \left( 1 + \frac{V}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (20)$$



Если неравенство (15) при  $\beta(\varphi) = 0$  не выполняется при всех  $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ , то колесо катится «юзом» (проскальзывают концы всех стержней в зоне контакта). Угол  $\varphi_* = \varphi_0$ , а уравнения (19) на стационарном движении принимают вид

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ Q &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} f \kappa x^{3/2} \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = -fP \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \\ M &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} f R \kappa x^{3/2} \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = RQ \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда существует угол  $\varphi_* \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ , разделяющий интервал  $(-\varphi_0, \varphi_0)$  на две части  $(-\varphi_0, \varphi_*) \cup [\varphi_*, \varphi_0)$ , в одной из которых неравенство (15) справедливо, а в другой не справедливо. В этом случае система уравнений (19) на стационарном движении примет вид

$$\begin{aligned} P &\cong \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ Q &\cong -\frac{1}{6} f \kappa (\varphi_*^3 - 3\varphi_* \varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) - \frac{1}{2} \kappa (\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \\ M &\cong -\frac{1}{6} R f \kappa (\varphi_*^3 - 3\varphi_* \varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) - \frac{1}{2} R \kappa (\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = RQ \end{aligned} \quad (22)$$

В системах уравнений (20), (21), (22) вертикальная сила  $P$  и отношение  $\frac{V}{\omega}$  задаются произвольным образом. Из первых соотношений определяется вертикальное перемещение центра колеса  $x$  и  $\cos \varphi_0 = 1 - x$ . Далее следует понять, какой тип уравнений необходимо использовать, анализируя неравенство (16). В зависимости от результатов этого анализа выбирается одна из систем уравнений (20), (21), (22) и определяются необходимые для существования стационарного режима значения величин  $Q$  и  $M$ . Мощность активных сил, необходимых для поддержания стационарного режима качения колеса с постоянными скоростями  $V$  и  $\omega$ , равна

$$W = QRV + M\omega = -4\kappa x R \omega \left(1 + \frac{V}{\omega}\right)^2 \geq 0 \quad (23)$$

для стационарного режима, описываемого соотношениями (20). В случае движения «юзом» (соотношения (21)) величина мощности активных сил равна

$$W = QRV + M\omega = -fPR\omega \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \geq 0 \quad (24)$$

Определение касательных и нормальных сил и режимов скольжения в зоне контакта осложняется в случае, когда жесткости стержней в продольном и поперечном направлениях таковы, что безразмерный параметр  $\zeta \neq 1$ .

### Список литературы

1. Вильке В.Г., Гусак Г.В. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором// Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. Вып.3. С.350-354.
2. Вильке В.Г. Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы// Вестн. МГУ. Сер.1 Математика, механика. 1983. №5. С. 54-59.
3. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967.
5. Ишлинский А.Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985.
6. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989
7. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht: Kluwer, 1990
8. Pacejka H.V. Tyre and Vehicle Dynamics. L.: Elsevier. 2005.

9. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости с проскальзыванием// Прикладная математика и механика. 2004. Т.68. Вып.6. С.1010-1024.
10. Шешенин С.В. Трехмерное моделирование шины// Изв. РАН. МГТ. 2007. №3. С.13-21
11. Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1942.

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЖИДКИХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ СМЕСЯХ. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

**В.А. Демин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
кафедра теоретической физики.

614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: [demin@psu.ru](mailto:demin@psu.ru)

Проведено теоретическое исследование тепловой конвекции бинарных смесей, заполняющих тонкие в горизонтальном сечении полости с границами высокой теплопроводности. В качестве рабочих жидкостей рассматривались смеси с разными знаками термодиффузии. Показано, что вследствие сложного перераспределения примеси в горизонтальном сечении конвекция при подогреве снизу в случае положительной термодиффузии должна возникать “мягко” в результате нарастания монотонных возмущений. Установление медленного стационарного течения происходит длительное время и сопровождается пикообразными всплесками в нем. В опытах конвекция начинает регистрироваться только в надкритической области. Течения носят нелинейный колебательный характер и возбуждаются “жестко”.

**Ключевые слова:** Нелинейные колебания, молекулярные смеси, динамические модели в сочетании с методом конечных разностей

**Введение.** В неоднородно нагретых жидких бинарных смесях конвекция возникает за счет пространственных неоднородностей температуры и концентрации, поведение во времени которых существенным образом зависит от двух механизмов диссипации: теплопроводности и диффузии. При этом действуют перекрестные кинетические эффекты: термодиффузия и диффузионная теплопроводность. Эти эффекты являются вторичными, однако при определенных условиях они могут оказывать существенное влияние на структуру конвективных движений жидкостей и газов.

При подогреве снизу в полостях, для которых характерно наличие широких горизонтальных границ, тепловая конвекция в бинарной смеси при нормальном эффекте Соре возникает в результате неустойчивости относительно монотонных возмущений. В случае перепада температуры на верхней и нижней границах в смеси возникает термодиффузионное разделение вдоль вертикали. В результате широко распространено мнение, что колебательная конвекция в бинарной смеси вблизи порога возможна только в случае аномальной термодиффузии, когда существует конкуренция термогравитационного и термоконцентрационного механизмов возбуждения конвекции.

Однако имеются экспериментальные данные, согласно которым при определенных условиях в случае действия положительной термодиффузии колебательная конвекция в жидких бинарных смесях вблизи порога также может наблюдаться. Причины колебательной конвекции, возникающей в бинарных смесях с положительной термодиффузией, могут быть разными. Описываемые в опытах [1] колебательные течения наблюдались в смесях с положительным коэффициентом Соре в длинных вдоль вертикали связанных каналах и возникали пороговым образом. Основная идея, позволившая объяснить наблюдавшиеся в экспериментах эффекты, состоит в том, что в таких гидродинамических системах за сложные колебательные процессы вблизи порога отвечает термодиффузионное разделение смеси в горизонтальной плоскости при движении жидкости преимущественно вдоль вертикальных идеально теплопроводных границ. Примерами полостей, в которых реализуются такие течения, могут служить длинные связанные каналы (конвективная петля) или вертикальная ячейка Хеле-Шоу.

В качестве предварительного обоснования представим некоторые оценки для смеси декана с четыреххлористым углеродом. Пусть жидкость находится в подогреваемой снизу конвективной петле высотой 5 см и толщиной каналов 3 мм. Вследствие большой высоты полости величина вертикальных градиентов температуры при разности температур порядка 1.5



К мала и составляет 0.3 К/см. В результате ошутимое термодиффузионное разделение компонентов возникает только в движущейся жидкости из-за горизонтальных градиентов температуры, равных 3 К/см, а не за счет слабых вертикальных градиентов величиной на порядок меньше. Особенность рассматриваемых эффектов состоит в том, что в состоянии механического равновесия характерное время разделения компонентов вдоль вертикали равно  $10^3$  ч. В циркулирующей жидкости неизбежно возникают горизонтальные градиенты температуры. Время разделения поперек канала составляет приблизительно 1 ч, т.е. жидкая частица успевает за это время поменять свой состав при движении вдоль каждого из каналов. При достаточно медленной циркуляции наблюдается обратное влияние сгенерированных термодиффузией неоднородностей концентрации на конвективное течение. Именно этот механизм, в конечном счете, отвечает за “жесткое” возбуждение колебательных режимов и специфические “перебросовые” течения, наблюдавшиеся в экспериментах [1].

**Постановка задачи и основные уравнения.** В ходе теоретического описания конвективных течений бинарных смесей в длинных связанных каналах будем использовать известную систему уравнений для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. В безразмерной форме эта система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \frac{RaH}{Pr} (T - C) \vec{y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) C = \frac{1}{Sc} (\Delta C + \varepsilon \Delta T), \quad (3)$$

где  $\vec{v}$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $C$  – безразмерные поля скорости, температуры, давления и концентрации примеси. В качестве единиц измерения здесь выбраны полутолщина канала  $d$  (расстояние),  $d^2/\nu$  (время),  $\nu/d$  (скорость),  $\theta$  (температура),  $\theta\beta_t/\beta_c$  (концентрация) и  $\rho\nu^2/d^2$  (давление). Единицы измерения выражаются через следующие параметры:  $\nu$  и  $\chi$  – соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности,  $\rho$  и  $\beta_t$  – средняя плотность жидкости и коэффициент теплового расширения;  $\theta$  – разность температур между верхней и нижней границами. Эффекты, связанные с наличием примеси в жидкости, характеризуются коэффициентом диффузии  $D$ , а также материальными константами  $\beta_c$  и  $\alpha$ . При выводе уравнений (1) – (3) использовалось следующее уравнение состояния:  $\rho = \rho_o (1 - \beta_t T + \beta_c C)$ , где параметр  $\beta_c$  описывает зависимость плотности смеси от концентрации. В нашем случае  $\beta_c > 0$ , т.к. рассматриваются тяжелые примеси. Коэффициент  $\alpha = k_T/T$  характеризует явление термодиффузии в бинарной жидкости ( $k_T$  – термодиффузионное отношение). В рамках рассматриваемого приближения предполагается, что потоки вещества и тепла обусловлены градиентами концентрации и температуры следующим образом:

$$\vec{J} = -\rho D (\nabla C + \alpha \nabla T), \quad \vec{q} = -\kappa \nabla T,$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

Система уравнений (1) – (3) содержит пять безразмерных параметров. Три из них,

$$Pr = \nu/\chi, \quad Sc = \nu/D, \quad Ra = g\beta_t\theta d^3/\nu\chi, \quad (4)$$

соответственно числа Прандтля, Шмидта и Рэлея ( $g$  – величина ускорения силы тяжести). Дополнительными числами подобия в задаче являются безразмерная высота каналов  $H$  и параметр  $\varepsilon$ , который характеризует явление термодиффузии в смеси:

$$\varepsilon = \alpha\beta_c/\beta_t.$$

При вычислении поля скорости на твердых вертикальных границах каналов ставится условие прилипания

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0.$$

Вследствие высокой теплопроводности вертикальных стенок каналов, на границах расчетной области возмущения температуры полагались равными нулю. Твердые стенки каналов считались непроницаемыми для вещества, поэтому нормальная компонента плотности диффузионного потока была равна нулю. Обезразмеренное выражение для плотности потока вещества дает граничное условие вида

$$\left( \frac{\partial C}{\partial \vec{n}} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Дополнительным условием является равенство нулю потока жидкости через сечение обоих каналов

$$\iint_S \left( v_z^{(1)} + v_z^{(2)} \right) dx dy = 0.$$

С учетом большой высоты каналов  $H \gg d$  можно упростить уравнение (1). Предполагая, что справедливо приближение прямолинейных траекторий, имеем  $\vec{v}(0, 0, u)$ . Здесь  $u(x, y, t)$  –  $z$ -компонента скорости, функция времени и координат в поперечном сечении. Чтобы исключить градиент давления, уравнение (1) интегрировалось вдоль каналов по замкнутому контуру. В итоге уравнение Навье – Стокса приобрело форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{Ra}{2Pr} \int_0^H \left( T^{(1)} - T^{(2)} \right) dz - \frac{Ra}{2Pr} \int_0^H \left( C^{(1)} - C^{(2)} \right) dz, \quad (6)$$

где верхние индексы отвечают соответственно левому и правому каналам.

**Состояние механического равновесия.** При некотором распределении температуры и концентрации в жидкости имеет место состояние механического равновесия, которое характеризуется тем, что жидкость неподвижна (скорость равна нулю), и это состояние не меняется с течением времени:

$$\partial/\partial t = 0, \quad \vec{v} = 0, \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad C = C_0,$$

где  $T_0, p_0, C_0$  – равновесные поля температуры, давления и концентрации примеси. Для бинарной смеси, находящейся в состоянии механического равновесия, из (1) – (3) получаем следующую систему уравнений:

$$[\nabla T_0 - \nabla C_0] \times \vec{\gamma} = 0, \quad \Delta T_0 = 0, \quad \Delta C_0 = 0. \quad (7)$$

В соответствии с экспериментом будем анализировать специальный случай линейного распределения температуры вдоль вертикали, когда

$$\nabla T_0 = -\vec{\gamma}/H,$$

где  $H$  – безразмерная высота полости. Такой градиент температуры отвечает линейному распределению температуры  $T_0 = -z/H$  (подогрев снизу). В этом случае уравнение Лапласа для температуры в системе (7) удовлетворяется тождественно.

Уравнения системы (7) позволяют определить равновесное распределение концентрации примеси в каналах, возникающее в результате действия термодиффузии. С учетом краевого условия (5) на верхней и нижней границах каналов получим с точностью до аддитивной постоянной линейное по вертикали распределение для концентрации тяжелой примеси  $C_0 = -\varepsilon z/H$ . Таким образом, в случае нормальной термодиффузии возникает потенциально неустойчивое равновесное распределение примеси в каналах.

**Стационарные течения.** В приближении прямолинейных траекторий система уравнений (2), (3) и (6) с соответствующими граничными условиями имеет решение, описывающее одномерное стационарное течение. Опуская детали, обсудим лишь окончательные формулы и вытекающие из них выводы. Подробное описание методики и результатов расчетов можно найти в [2].

Произведя предварительно расчет распределений температуры и концентрации вдоль вертикали, можно из (6) получить трансцендентное уравнение, связывающее амплитуду скорости с числом Рэля. Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится. Для однородной жидкости в предельном случае  $u \rightarrow 0$  и  $\varepsilon = 0$  из него получается выражение, определяющее границу устойчивости равновесия относительно монотонных возмущений в зависимости от высоты канала

$$Ra_c = 0.25\pi^4 / \left(1 - \frac{1}{z_1} \tanh z_1\right), \quad (8)$$

где  $z_1 = \pi H / 2\sqrt{2}$ .

Формула (8) показывает, что критическое число Рэля уменьшается при увеличении длины каналов. В пределе  $H \rightarrow \infty$  формула дает известное значение критического числа Рэля  $Ra = \pi^4/4$  для бесконечных каналов. В случае произвольных значений термодиффузионного параметра, чисел Шмидта и Прандтля выражение для критических чисел Рэля имеет вид

$$Ra_c = \frac{\pi^4}{4} \left\{ (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{z_1} \tanh z_1\right) + \frac{\varepsilon Sc}{Pr} \left(0.45 - \frac{1}{z_2} \tanh z_2\right) \right\}^{-1} \quad (9)$$

Здесь параметр  $z_2$  вычисляется по формуле  $z_2 = 3\sqrt{10}\pi H/20$ .

При наличии термодиффузии порог стационарной конвекции зависит от числа Прандтля. В случае отрицательного термодиффузионного параметра критическое число Рэля с ростом числа Прандтля уменьшается. Для положительного термодиффузионного эффекта пороговое число Рэля растет при увеличении числа Прандтля и в пределе  $Pr \rightarrow \infty$  выходит на асимптотическое значение  $Ra_c \approx 24.5$ .

Трансцендентное уравнение позволяет вычислить амплитуду стационарного течения для произвольных значений числа Рэля. Кривые 1, 2 на рис. 1 построены для следующего набора параметров:  $H = 30.5$ ,  $Sc = 1000$ ,  $Pr = 7$ . Из вида амплитудных кривых можно легко опре-

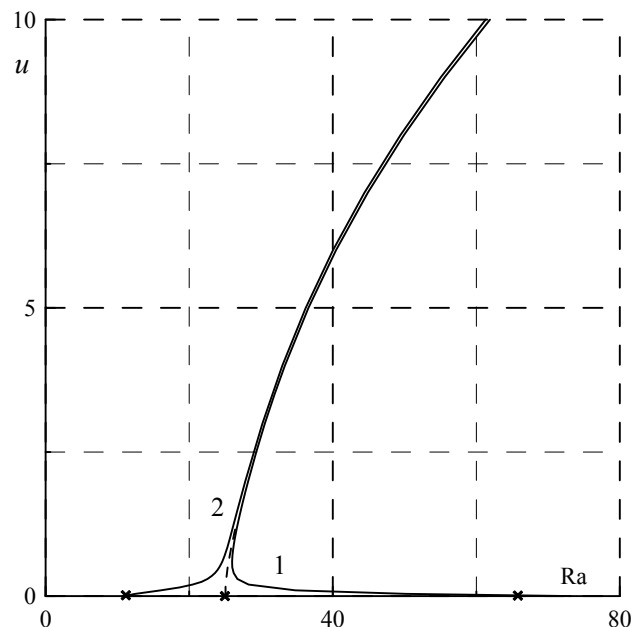


Рис. 1. Амплитудные кривые: 1, 2 –  $\varepsilon = -0.01, 0.02$ ; штриховая линия –  $\varepsilon = 0$

делить характер возбуждения конвекции. Кривая 2, построенная для положительного  $\varepsilon$ , показывает, что в случае нормального эффекта Соре стационарные течения отщепляются мягко. При аномальном эффекте Соре (кривая 1) имеет место “жесткое” возбуждение конвекции. Амплитудные кривые показывают, что наличие примеси значительно сказывается на

течении только при малых значениях надкритичности. С ростом числа Рэлея интенсивность течения увеличивается, и примесь размывается по каналам.

**“Перебросовые” колебания.** Отметим, что приближение прямолинейных траекторий приводит к линеаризации уравнения Навье – Стокса (1), которое преобразуется к уравнению (6). Для детального разрешения полей концентрации, скорости и температуры в поперечном сечении и описания трехмерного перераспределения примеси в каналах, уравнения (2), (3) совместно с (6) решались численно методом конечных разностей в сочетании с процедурой Галеркина-Канторовича. Экспериментальные измерения показывают, что температура по вертикали имеет характерное распределение, Фурье-анализ которого демонстрирует, что в первом приближении эта зависимость может быть аппроксимирована двумя гармоническими функциями

$$T = T_1(x, y, t) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + T_2(x, y, t) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

Для удобства введем новую переменную  $F = C + \varepsilon T$ . Учитывая структуру уравнений, поле  $F(x, y, z, t)$  представим в виде разложения

$$F = F_1(x, y, t) + F_2(x, y, t) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + F_3(x, y, t) \cos\left(\frac{2\pi z}{H}\right).$$

Подставляя разложения  $T$  и  $F$  в исходные уравнения (2), (3), (6), получим после применения процедуры Галеркина – Канторовича “амплитудные” уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_1 u + \frac{2\text{Ra}H}{\pi\text{Pr}} [T_1(1 + \varepsilon) - F_1], \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\pi}{H} u T_2 = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta_1 T_1 - \frac{\pi^2}{\text{Pr}H^2} T_1 + \frac{4}{\pi H} u, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\pi}{H} u T_1 = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta_1 T_2 - \frac{\pi^2}{\text{Pr}H^2} T_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} - \frac{2}{H} u F_2 = \frac{1}{\text{Sc}} \Delta_1 F_1 + \frac{2\varepsilon}{\pi\text{Pr}} \Delta_1 T_1 - \frac{2\pi\varepsilon}{\text{Pr}H^2} T_1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{16}{3H} u F_3 = \frac{1}{\text{Sc}} \Delta_1 F_2 - \frac{\pi^2}{\text{Sc}H^2} F_2 + \frac{\varepsilon}{\text{Pr}} \Delta_1 T_2 - \frac{\varepsilon\pi^2}{\text{Pr}H^2} T_2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{4}{3H} u F_2 = \frac{1}{\text{Sc}} \Delta_1 F_3 - \frac{4\pi^2}{\text{Sc}H^2} F_3 - \frac{4\varepsilon}{3\pi\text{Pr}} \Delta_1 T_1 + \frac{4\pi\varepsilon}{3\text{Pr}H^2} T_1. \quad (15)$$

Здесь введен оператор  $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Нестационарные уравнения (10) – (15) совместно с граничными условиями

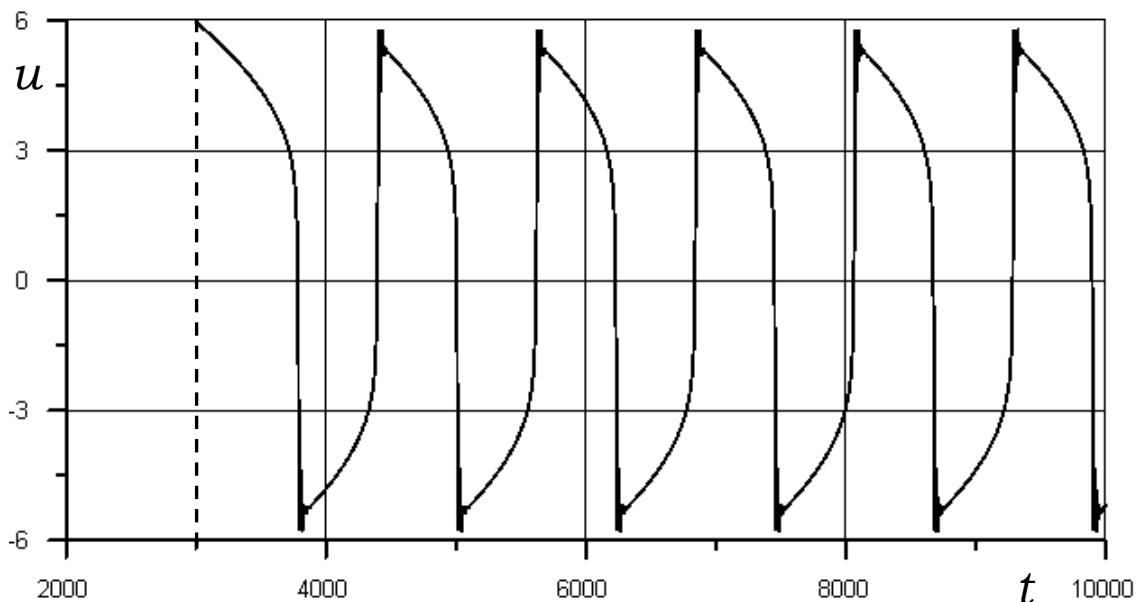
$$x = 0, -2; y = \pm 1: \quad u = 0, \quad T_1 = T_2 = 0, \quad F_1' = F_2' = F_3' = 0$$

решались численно методом конечных разностей. Компьютерный модуль был написан на языке программирования FORTRAN-90. Алгоритм был разработан в соответствии с явной схемой решения уравнений в частных производных. Расчетная схема была реализована на основе двухполевой методики. При аппроксимации производных по времени и производных по координатам использовались, соответственно, односторонние и центральные разности. Рабочее количество узлов в сечении канала было равно  $33 \times 33$ . В ходе расчетов применялся метод установления.

Таким образом, для численного моделирования нестационарных режимов предложена комбинированная схема напоминающая, с одной стороны, динамическую модель, а с другой, – эта методика обладает всеми достоинствами сеточного расчета.

При достаточно больших значениях надкритичности (выше порога для однородной жидкости) амплитудные кривые 1 и 2, характеризующие стационарные течения, хорошо согла-

суются с экспериментальными данными, полученными в [1] для смеси четыреххлористого углерода  $CCl_4$  с деканом  $C_{10}H_{22}$  и раствора сульфата натрия в воде. В то же время в промежуточной области чуть выше порога в экспериментах наблюдались сложные нелинейные колебательные течения, поэтому главной задачей численного моделирования было теоретическое описание этих нестационарных конвективных движений бинарных смесей в связанных каналах конечной высоты.



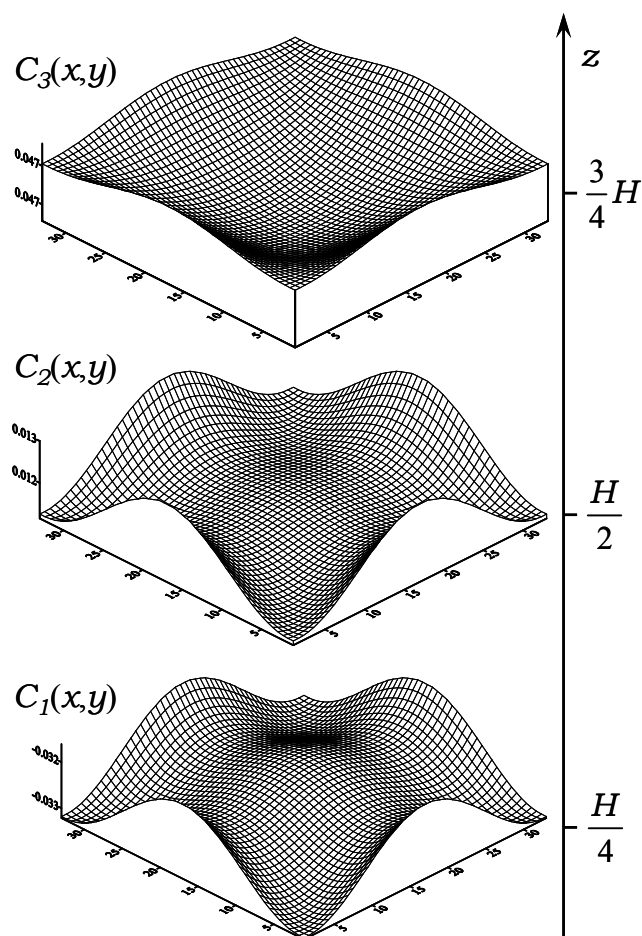
**Рис 2.** Форма перебросовых колебаний при нормальной термодиффузии.  
Скорость в середине канала как функция времени

Для подтверждения основных гипотез, выдвинутых еще при объяснении первых экспериментов, главное внимание уделялось расчету поля концентрации в горизонтальном сечении каналов. В результате было показано, что вне зависимости от знака термодиффузии развитая конвекция возникала в области чуть выше порога, соответствующего  $\varepsilon = 0$ . Причем в смесях с положительной термодиффузией сначала пороговым образом возникали колебания близкие по форме к гармоническим. Затем с ростом числа Рэлея они сменялись сложными нелинейными колебаниями типа “перебросов” (рис. 2). При дальнейшем увеличении числа Рэлея период “перебросов” неограниченно нарастал: в жидкости устанавливалось течение с определенной циркуляцией, т.е. стационарное течение. В случае отрицательной термодиффузии в результате переходных колебательных процессов в смесях всегда устанавливались стационарные конвективные течения.

На рис. 3 изображено поле концентрации примеси, вычисленное с помощью уравнений (10) – (15) методом конечных разностей в разных сечениях канала, которое иллюстрирует действие термодиффузии в смеси. Видно, что на входе в канал преобладает конвективный механизм переноса примеси, постепенно при движении вдоль канала нормальная термодиффузия “распрямляет” сложный концентрационный профиль, перераспределяя примесь к боковым стенкам.

Расчеты показывают, что на определенной высоте в каналах с подъемным и опускным течениями в среднем имеет место недостаток или, наоборот, избыток тяжелой примеси. Таким образом, конвективная петля может использоваться как установка для разделения смесей на компоненты. Процесс разделения смесей происходит в динамике, на фоне конвективного переноса, т.е. быстрее, чем в статике. В отличие от термодиффузионной колонны в связанных

каналах отсутствуют встречные гидродинамические потоки, т.е. в области высоких надкритичностей течение дольше остается ламинарным.



**Рис. 3.** Поле концентрации в горизонтальном сечении на разной высоте в канале с подъемным течением

**Заключение.** В работе теоретически изучено влияние, оказываемое наличием тяжелой примеси в жидкости, на тепловую конвекцию в связанных каналах. В широком диапазоне управляющих параметров численно методом конечных разностей изучены переходные режимы и установившиеся конвективные течения. Показано, что в зависимости от величины надкритичности и знака термодиффузии в бинарной смеси возможны как стационарные, так и колебательные установившиеся режимы тепловой конвекции.

### Список литературы

1. Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Конвекция бинарной смеси в связанных каналах при подогреве снизу // Известия РАН, Механика жидкости и газа, № 2, 2007, С.13-23.
2. Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. О разделении смесей в связанных каналах // Прикладная механика и техническая физика, 2009, Т.50, №1, С.68-77.

## РОТОРНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ; ИЗУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Н.В. Дерендяев, Д.Н. Дерендяев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23. [derendyaevdm@mail.ru](mailto:derendyaevdm@mail.ru)

В серии работ [1-6] одним из авторов был предложен и разработан (совместно с учениками) оригинальный метод исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость и имеющих привод, поддерживающий вращение. Ротор предполагался осесимметричным, закрепления его оси изотропными. В данной работе содержится обобщение ранее предложенного метода, которое позволяет распространить его на системы с анизотропными закреплениями оси ротора.

*Ключевые слова:* роторная система, полость, содержащая вязкую жидкость, режим стационарного вращения, устойчивость и автоколебания.

Задачи динамики роторных систем с жидкостью несомненно представляют интерес как с общетеоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений в различных областях техники. Исследование динамики таких систем сопряжено с большими трудностями, вызванными необходимостью учитывать совместное действие таких факторов как быстрое вращение, наличие свободной поверхности и вязкости жидкости, а также неконсервативных внешних сил.

Типичная роторная система, содержащая жидкость, представлена на рис. 1. Система содержит собственно ротор - 1, ось которого - 2 расположена в вязкоупругих закреплениях - 4, полость ротора - 5, которая содержит вязкую жидкость - 6. При отклонениях оси ротора - 2 от неподвижной оси стационарного вращения - 3 возникают действующие на ротор силы реакции закреплений. К ротору приложен момент привода  $M$ , поддерживающий угловую скорость вращения постоянной.

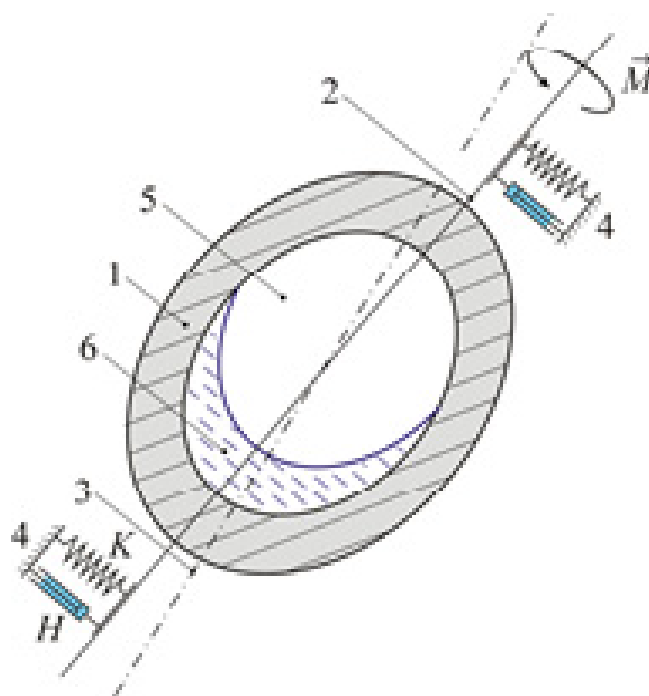


Рис. 1. Типичная роторная система

В серии работ [1-6] был предложен и разработан оригинальный метод исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость и имеющих привод, поддерживающий угловую скорость вращения постоянной. В основе метода две теоремы, согласно которым изменение степени неустойчивости связано с возможностью осуществления возмущенного движения типа круговой прецессии. Такое движение обладает замечательным свойством: поле скоростей и форма поверхности жидкости не зависит от времени в специально выбранной неинерциальной системе отсчета, связанной с линией центров. Нахождение условий осуществимости круговой прецессии позволяет эффективно строить границы областей устойчивости режима стационарного вращения в пространстве параметров задач. Кроме того, изучение возникновения круговой прецессии позволяет найти условия, при которых в роторной системе имеет место докритическая (закритическая) бифуркация Андронова-Хопфа и выделить «опасные» («безопасные») участки границ областей устойчивости.

В данной работе предложенный ранее метод исследования устойчивости распространяется на системы, в которых ось ротора располагается в анизотропных закреплениях лавалевского типа. На рис. 2 схематически представлен лавалевский ротор и поперечный разрез ротора плоскостью  $O_1x_1x_2$ , перпендикулярной оси стационарного вращения. Полость ротора частично заполнена вязкой жидкостью. В режиме стационарного вращения точка  $O$  пересечения оси ротора с плоскостью  $O_1x_1x_2$  совпадает с точкой пересечения оси стационарного вращения с той же плоскостью, а жидкость располагается в слое постоянной толщины на поверхности цилиндрической полости ротора и вращается вместе с ним как одно целое с угловой скоростью  $\Omega$ .

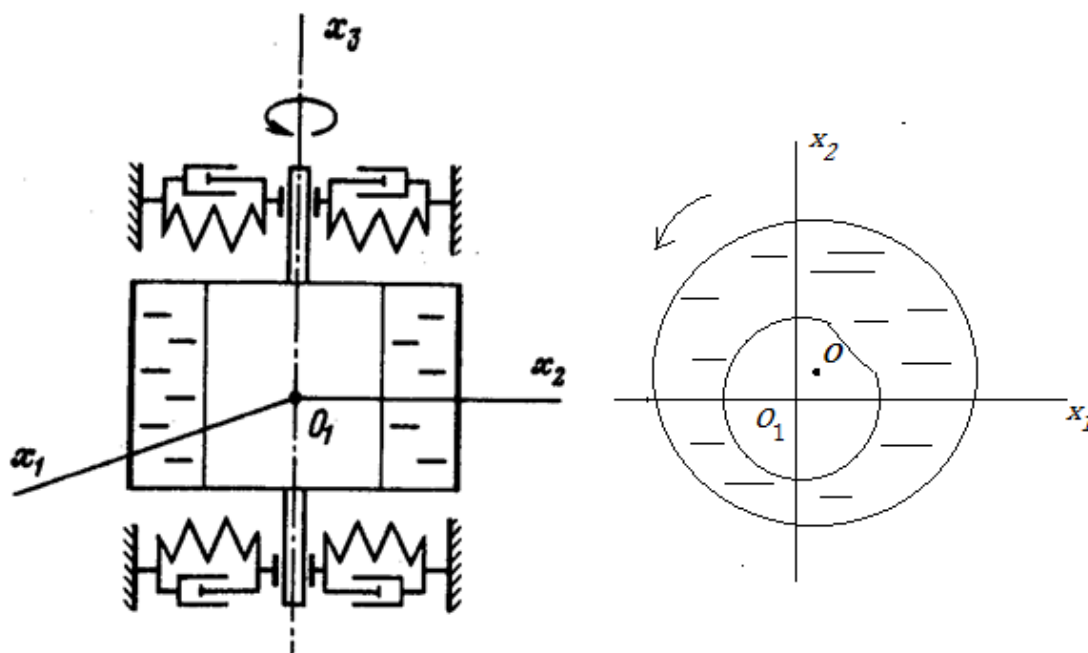


Рис. 2. Лавалевский ротор.

**1. Линеаризованные уравнения движения в отклонениях от режима стационарного вращения (в плоской модели) содержат:**

1) уравнения поступательного движения цилиндра параллельно плоскости  $O_1x_1x_2$ , линеаризованные вблизи состояния цилиндра при стационарном вращении:

$$M\ddot{x}_l^0 + H_l\dot{x}_l^0 + K_lx_l^0 = F_l, \quad l = 1, 2$$



где  $x_i^0$  – координаты точки  $O$ ;  $F_i$  – результирующая сил, с которыми заполняющая жидкость действует по поверхности полости ротора,  $M$  – масса ротора,  $H_1, H_2$  и  $K_1, K_2$  коэффициенты демпфирования и жесткости закреплений по осям  $x_1, x_2$  соответственно.

2) условие постоянства угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси  $O_1x_3$ :  
 $\Omega = \text{const}$

3) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости  $O_1x_1x_2$ , линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси  $O_1x_3$ :

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j^0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^i}{\partial x_j} + \nu \Delta v_j$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; v_1^0 = -\Omega x_2; v_2^0 = \Omega x_1;$$

где  $v_j$  – отклонение поля скоростей жидкости,  $p^i$  – отклонение давления от соответствующих величин при квазитвердом вращении,  $\rho$  – плотность жидкости, которая принимается постоянной.

4) условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от состояния стационарного вращения на поверхности  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$  и  $x_1^2 + x_2^2 = b^2$  соответственно:

$$v_1 = \dot{x}_1^0 + \Omega x_2^0; v_2 = \dot{x}_2^0 + \Omega x_1^0; x_1^2 + x_2^2 = a^2;$$

$$\sigma_{ik}^i n_k^0 = -\rho \Omega^2 b s n_i^0; \sigma_{ik}^i = -p^i \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right);$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \left( -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) s = v_j n_j^0; x_1^2 + x_2^2 = b^2$$

Здесь  $s$  – отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенной поверхности по нормали к ней.

5) Формулы, определяющие  $F_1$  и  $F_2$  через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении:

$$F_j = - \oint \sigma_{jk}^i n_k dl + \rho \frac{\Omega^2 a^2}{2} x_j^0; \quad j = 1, 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

В рассматриваемой модели закрепления анизотропны, а взаимодействие ротора с жидкостью и закреплениями оси ротора представлено потенциальной, циркулярной, диссипативной и гироскопической силами.

Система уравнений в отклонениях 1)-5) допускает частные решения, пропорциональные  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  характеристическое число. Будем считать стационарное вращение устойчивым, если все  $\lambda$  лежат слева от мнимой оси, и неустойчивым, если хотя бы одно  $\lambda$  справа от мнимой оси.

2. При исследовании роторных систем указанного типа удастся связать изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенных движений типа эллиптической прецессии. Можно показать что мнимые характеристические числа уравнений в отклонениях от режима стационарного вращения возможны только в случае, когда существует возмущен-

ное движение в виде эллиптической прецессии. В таком движении точка  $O$  описывает эллипс с частотой  $\omega$ . Оси эллипса, вообще говоря, повернуты относительно осей координатной системы  $O_1x_1x_2$ . Решение гидродинамической части задачи при движениях типа эллиптической прецессии существенно упрощается, т. к. поле скоростей и форма свободной поверхности жидкости в случае эллиптической прецессии описываются в виде суперпозиции соответствующих элементов, отвечающих двум круговым прецессиям с частотами  $\omega$  и  $-\omega$ . Это позволяет эффективно находить гидродинамические силы, действующие на ротор.

Рассмотрим сначала осесимметричный случай, когда закрепления изотропны,  $K_1 = K_2, H_1 = H_2$ . Этот случай изучался в работах [1-6]. Имеют место:

Теорема 1. Мнимые значения характеристических чисел  $\lambda$  существуют в том и только в том случае, когда система уравнений в отклонениях допускает частное решение, описывающее круговую прецессию.

Теорема 2. В случае круговой прецессии ротора движение жидкости в системе отсчета  $O\xi\eta$ , связанной с линией центров  $O_1O$ , не зависит от времени.

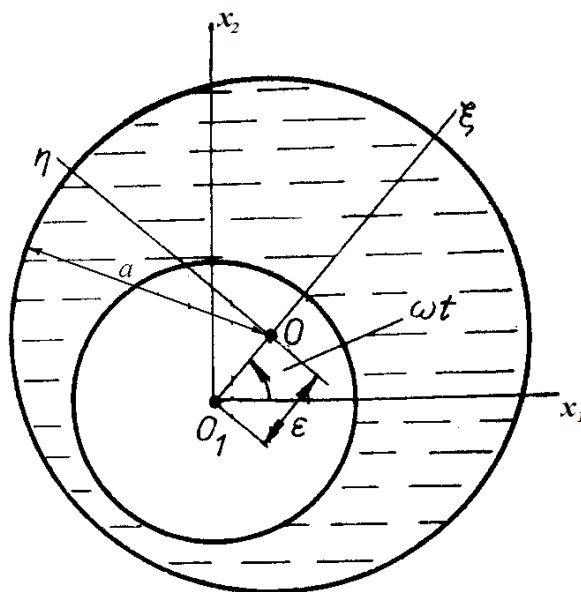


Рис. 3 Круговая прецессия и неинерциальная система отсчета  $O\xi\eta$ , связанная с линией центров  $O_1O$

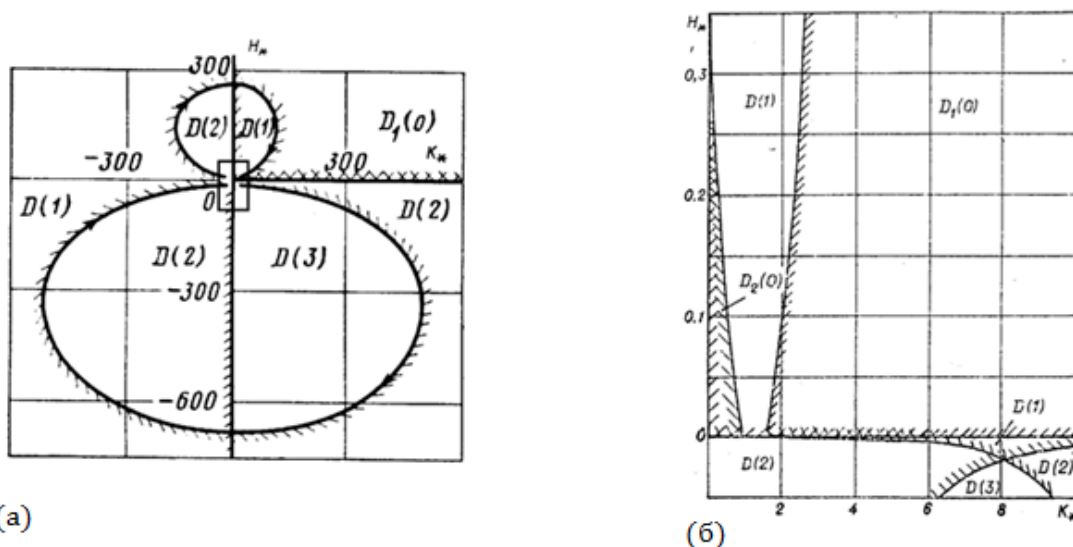


Рис. 4. Пример разбиения плоскости параметров закрепления оси цилиндра на области с различной степенью неустойчивости. Осесимметричный случай.

$$H_s = H/m\Omega \quad K_s = K/m\Omega^2 \quad K_s = \frac{H^2 m K}{K^2}$$

В случае анизотропных закреплений оси ротора имеет место:

Теорема 3. Мнимые значения  $\lambda = \pm i\omega$  существуют тогда и только тогда, когда возможно возмущенное движение, в котором точка  $O$  (центр сечения цилиндра) описывает эллипс на частоте  $\omega$  (или  $-\omega$ ), а гидродинамические элементы периодически изменяются во времени в системе  $O_1 x_1 x_2$ .

### 3. Гидродинамическая задача в случае эллиптической прецессии

Введем неинерциальную систему отсчета  $O_2 \xi_1 \eta_1$ . Оси системы  $O_1 x'_1 x'_2$  направлены по главным осям эллипса.

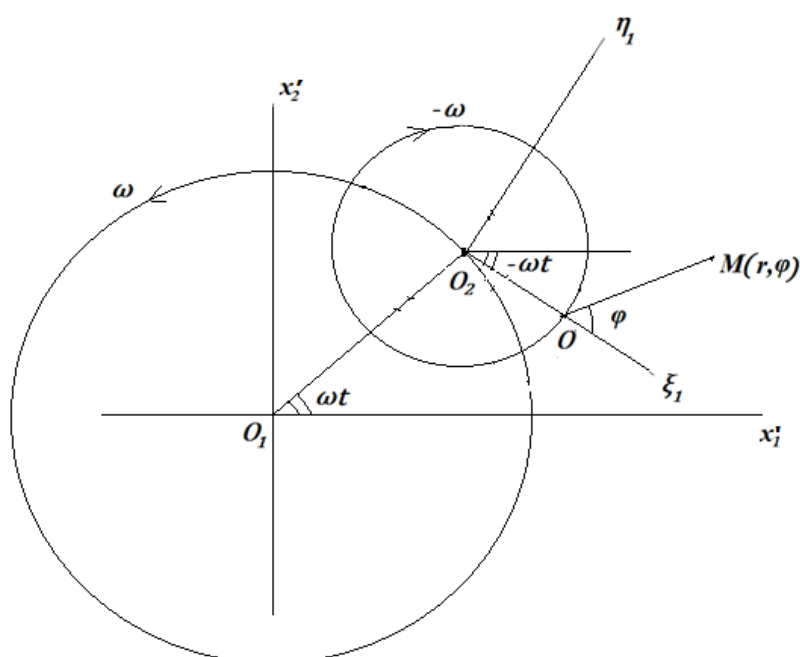


Рис. 5. Точка  $O$  – центр поперечного сечения цилиндра, описывает эллипс в системе  $O_1 x_1 x_2$  на частоте  $\omega$ . Радиус цикла  $O_1 O_2 = s_2$ , радиус эпицикла  $O_2 O = s_1$ ; Точка  $O_1$  – пересечение оси стационарного вращения с плоскостью поперечного сечения цилиндра.

### 4. Поле сил инерции в пространстве отсчета $O_2 \xi_1 \eta_1$ в цилиндрической системе координат с полюсом в точке $O$

$$f = \epsilon_r [\omega^2 s_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2 (r + s_1 \cos \varphi) - 2\omega v] + \epsilon_\varphi [\omega^2 s_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \omega^2 s_1 \sin \varphi + 2\omega u],$$

где  $u, v$  – радиальная и азимутальная компоненты поля скоростей в полярной системе координат. Пусть

$$u = U(r, \varphi, \omega, s), \quad v = V(r, \varphi, \omega, s), \quad p^r = P(r, \varphi, \omega, s), \quad s = S(\varphi, \omega, s)$$

решение гидродинамической задачи в системе  $O\xi\eta$  в случае круговой прецессии, записанное в полярных координатах  $(r, \varphi)$ .

*Теорема 4.* Решение гидродинамической задачи в системе  $O_2\xi_1\eta_1$  в случае эллиптической прецессии представляет собой суперпозицию решений для двух круговых прецессий:

$$\begin{aligned} u &= U(r, \varphi - 2\omega t, \omega, s_2) + U(r, \varphi, -\omega, s_1), \\ v &= V(r, \varphi - 2\omega t, \omega, s_2) + V(r, \varphi, -\omega, s_1), \\ p' &= P(r, \varphi - 2\omega t, \omega, s_2) + P(r, \varphi, -\omega, s_1), \\ s &= S(\varphi - 2\omega t, \omega, s_2) + S(\varphi, -\omega, s_1) \end{aligned}$$

Здесь  $(r, \varphi)$ - полярные координаты в системе  $O_2\xi_1\eta_1$  с полюсом в точке  $O$ .

### 5. Гидродинамические силы, действующие на цилиндр в случае эллиптической прецессии

$$\begin{aligned} F_1 &= (F_{\xi}(\omega, s_2) + F_{\xi}(-\omega, s_1))\cos\omega t - - (F_{\eta}(\omega, s_2) - F_{\eta}(-\omega, s_1))\sin\omega t, \\ F_2 &= (F_{\xi}(\omega, s_2) - F_{\xi}(-\omega, s_1))\sin\omega t - - (F_{\eta}(\omega, s_2) + F_{\eta}(-\omega, s_1))\cos\omega t, \end{aligned}$$

где  $F_{\xi}(\omega, s)$ ,  $F_{\eta}(\omega, s)$  – проекции гидродинамической силы, действующей на цилиндр в случае круговой прецессии с частотой  $\omega$  и радиусом  $s$ , на оси системы отсчета  $O\xi\eta$ .

### 6. Бифуркационные значения параметров

Подставляя в уравнения движения цилиндра в системе  $O_1x_1'x_2'$   $x_1'^{\omega} = (s_1 + s_2)\cos\omega t$ ,  $x_2'^{\omega} = (s_2 - s_1)\sin\omega t$  и выражения для гидродинамических сил, действующих на цилиндр в случае эллиптической прецессии, получим конечную систему уравнений для бифуркационных значений параметров.

$$\begin{cases} -M\omega^2(s_1 + s_2) = F_{\xi}(\omega, s_2) + F_{\xi}(-\omega, s_1) - (s_1 + s_2)(K_1\cos^2\alpha + K_2\sin^2\alpha) + (s_2 - s_1)\frac{\omega}{2}\sin 2\alpha(H_1 - H_2), \\ -M\omega^2(s_2 - s_1) = F_{\xi}(\omega, s_2) - F_{\xi}(-\omega, s_1) - (s_2 - s_1)(K_1\sin^2\alpha + K_2\cos^2\alpha) - (s_1 + s_2)\frac{\omega}{2}\sin 2\alpha(H_1 - H_2), \\ F_{\eta}(-\omega, s_1) - F_{\eta}(\omega, s_2) + (s_2 - s_1)\frac{(K_1 - K_2)}{2}\sin 2\alpha + \omega(s_1 + s_2)(H_1\cos^2\alpha + H_2\sin^2\alpha) = 0, \\ F_{\eta}(\omega, s_2) + F_{\eta}(-\omega, s_1) + (s_1 + s_2)\frac{(K_1 - K_2)}{2}\sin 2\alpha - \omega(s_2 - s_1)(H_1\sin^2\alpha + H_2\cos^2\alpha) = 0. \end{cases}$$

В случае, когда  $H_1 = H_2 = H$ :

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &= \sqrt{\frac{F_{\eta}^{\omega}(\omega) - \omega H}{F_{\eta}^{\omega}(-\omega) + \omega H}} \\ (K_1 - K_2)\sin 2\alpha - - 2\sqrt{(F_{\eta}^{\omega}(\omega) - \omega H)(F_{\eta}^{\omega}(-\omega) + \omega H)}, \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что для осуществимости эллиптической прецессии  $H$  должно быть таким, что  $(F_{\eta}^r(\omega) - \omega H)(F_{\eta}^r(-\omega) + \omega H) > 0$ .

Далее, из первых уравнений системы при  $H_1 = H_2 = H$  следует

$$\begin{cases} -\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \left( m\omega^2 + \widetilde{F}_{\xi}^r(-\omega) - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \right) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) - \left( m\omega^2 + \widetilde{F}_{\xi}^r(\omega) \right) \\ -m\omega^2 = \widetilde{F}_{\xi}^r(\omega) - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) - \frac{c_1}{2g_2}(K_1 - K_2)\cos 2\alpha \end{cases}$$

Здесь  $\widetilde{F}_{\xi}^r(\omega) = \frac{F_{\xi}^r(\omega, \alpha)}{g}$ ,  $F_{\eta}^r(\omega) = \frac{F_{\eta}^r(\omega, \alpha)}{g}$ .

Из последней системы определяются  $K_1$  и  $K_2$  как функции параметра  $\omega$ . Эти значения параметров принадлежат границе областей с различной степенью неустойчивости.

### Список литературы

1. Дерендяев Н. В., Сандалов В. М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578-586.
2. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1073-1076.
3. Дерендяев Н. В., Сеняткин В. А. Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1984. №1. С. 34-44.
4. Дерендяев Н.В. Бифуркация Андронова-Хопфа в динамике роторной системы, содержащей жидкость // ДАН СССР. 1988. Т.301. №4. С. 798-801.
5. Derendyaev N.V., Vostrukhov A. V., Soldatov I. N. Stability and Andronov-Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models // ASME. J. Appl. Mech. 2006. v. 73, No. 4. P. 580-589.
6. Дерендяев Н. В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость: Монография. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2014.- 154 с.

## МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Ю.И. Дмитриенко, Е.А. Губарева, Д.О. Яковлев

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана  
кафедра вычислительной математики и математической физики  
105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, д.5, e-mail: [dimit@bmstu.ru](mailto:dimit@bmstu.ru)

Предложена теория вязкоупругих многослойных тонких пластин при установившихся моногармонических колебаниях, построенная из общих уравнений трехмерной теории вязкоупругости путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру - отношению толщины к длине пластины, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения амплитуд перемещений и напряжений по толщине пластины. Разработанная теория позволяет вычислить все 6 компонент тензора комплексных амплитуд напряжений, включая амплитуды поперечных нормальных напряжений и амплитуды напряжения межслойного сдвига. Предложен алгоритм расчета диссипативных характеристик вязкоупругих многослойных пластин.

**Ключевые слова:** асимптотическая теория вязкоупругих пластин, многослойные пластины, вязкоупругость, композиты, метод асимптотической гомогенизации, рассеяние энергии

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматривается многослойная пластина постоянной толщины, для которой можно ввести малый параметр  $\kappa = h/L \ll 1$ , как отношение общей толщины пластины  $h$  к характерному размеру всей пластины  $L$ . Вводятся безразмерные глобальные  $x_k$  и локальная  $\xi$  координаты:  $x_k = \tilde{x}_k / L$ ,  $\xi = x_3 / \kappa$ ,  $k=1,2,3$ , где  $\tilde{x}_k$  - размерные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось  $O\tilde{x}_3$  направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси  $O\tilde{x}_1$ ,  $O\tilde{x}_2$  принадлежат срединной поверхности пластины. Для пластины рассматривается 3-х мерная задача линейной теории вязкоупругости при установившихся квазистатических колебаниях [1]

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij}^* &= \rho \omega^2 u_i^*, & \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i^* + \nabla_i u_j^*), & \sigma_{ij}^* &= C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^*, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^* &= -\tilde{p}_{\pm}^* \delta_{i3}, & \Sigma_T : u_i^* &= u_{ei}^*, & \Sigma_S : [\sigma_{i3}^*] &= 0, & [u_3^*] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}^*$  - компоненты тензора комплексных амплитуд напряжений,  $\varepsilon_{ij}^*$  - компоненты тензора комплексных амплитуд деформаций,  $u_j^*$  - компоненты вектора комплексных амплитуд перемещений,  $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$  - оператор дифференцирования по декартовым координатам,  $C_{ijkl}^*(\xi, \omega)$  - компоненты тензора комплексных модулей упругости,  $\omega$  - частота колебаний,  $\Sigma_{3\pm}$  - внешняя и внутренняя поверхности,  $\Sigma_T$  - торцевая поверхность,  $\Sigma_S$  - поверхности контакта слоев пластины,  $[u_3^*]$  - скачок функций.

Принимаем основное допущение, что амплитуда колебаний давления  $\tilde{p}_{\pm}^*$  на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости  $O(\kappa^3)$  по сравнению с  $E_0$  - ха-

рактерным значением модуля упругости,  $\text{Re } \tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 \text{Re } p_{\pm}$ ,  $\text{Im } \tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 \text{Im } p_{\pm}$ ,  $\text{Re } p_{\pm} = O(1)E_0$ ,  $\text{Im } p_{\pm} = O(1)E_0$ .

Решение задачи (2) ищем в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_k^{*(0)}(x_I) + \kappa u_k^{*(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{*(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{*(3)}(x_I, \xi) + \dots \\ \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij}^{*(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{*(2)} + \dots, \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij}^{*(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{*(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{*(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами  $I, J, K, L$  принимают значения 1,2, а индексы  $i, j, k, l$  - значения 1,2,3. Введены обозначения для производных:

$$u_{i/3}^{*(1)} = \partial u_i^{*(1)} / \partial \xi, \quad u_{i,j}^{*(1)} = \partial u_i^{*(1)} / \partial x_j, \quad \text{а также операцию осреднения: } \langle u_i^{*(1)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{*(1)} d\xi.$$

Подставляя асимптотические разложения (4) в систему уравнений (2), и собирая в ней члены при одинаковых степенях от  $\kappa$ , получаем рекуррентную последовательность специальных локальных задач теории вязкоупругости 0-го, 1-го, 2-го и 3-го и т.д. приближений для нахождения всех членов асимптотических разложений (2). После удерживания только главных членов ряда, получаем, что амплитуды перемещений в пластине имеют вид:

$$\begin{aligned} u_I^* &= u_I^{*(0)} + \kappa(-\xi u_{3,I}^{*(0)} + \varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{IKL}^*(\xi)), \\ u_3^* &= u_3^{*(0)} + \kappa \varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{3KL}^*(\xi), \end{aligned} \quad (3)$$

где обозначены:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{KL}^{*(0)} &= \frac{1}{2}(u_{K,L}^{*(0)} + u_{L,K}^{*(0)}), \\ U_{iKL}^*(\xi) &= 2 \left( \int_{-0.5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{j3KL}^* d\xi \right) - \int_{-0.5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{j3KL}^* d\xi. \end{aligned}$$

### ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Для вычисления амплитуд перемещений нулевого приближения  $u_k^{*(0)}$ , следуя общему алгоритму метода для упругих многослойных пластин [2-6], получаем осредненные уравнения равновесия вязкоупругих пластин

$$\begin{aligned} T_{IJ,J}^* + \bar{\rho} \omega^2 U_I^* &= 0, \\ Q_{J,J}^* + \bar{\rho} \omega^2 U_3^* &= \Delta \bar{p}^*, \\ M_{IJ,J}^* - Q_I^* + \bar{\rho} \omega^2 \Gamma_I^* &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T_{IJ}^*$  - амплитуды усилий,  $M_{IJ}^*$  - моментов и  $Q_I^*$  - перерезывающих сил, здесь обозначено  $\Delta \bar{p}^* = \kappa^2 \Delta p^*$ ,  $\Delta p^* = p_+^* - p_-^*$ , которые вводятся, по аналогии с упругим решением [2], а также обозначены

$$\begin{aligned} U_i^* &= u_i^{*(0)} \quad \bar{\rho} \Gamma_I^* = \kappa \langle \rho u_{3,I}^{*(1)} \xi \rangle = -R u_{3,I}^{*(0)} + \varepsilon_{KL}^{*(0)} R_{IKL}, \\ R_{IKL} &= 2\kappa \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{i3KL}^* d\xi \right\rangle \langle \rho \xi \rangle - 2\kappa \left\langle \rho \xi \int_{-0.5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{i3KL}^* d\xi \right\rangle, \\ R &= \kappa \langle \rho \xi^2 \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (4) для деформаций и напряжений  $\sigma_{IJ}^{*(0)}, \sigma_{IJ}^{*(1)}$ , а также определяющие соотношения системы (1), в выражение для  $T_{IJ}^*, M_{IJ}^*$  и  $Q_I^*$ , и удерживая в них только первые два приближения, получаем осредненные определяющие соотношения теории вязкоупругих пластин

$$\begin{aligned} T_{IJ}^* &= \bar{C}_{IJKL}^* \varepsilon_{KL}^{*(0)} + B_{IJKL}^* \eta_{KL}^* + K_{IJKLM}^* \varepsilon_{KL,M}^{*(0)} + \omega^2 \bar{G}_{Iji}^* u_i^{*(0)}, \\ M_{IJ}^* &= B_{IJKL}^* \varepsilon_{KL}^{*(0)} + D_{IJKL}^* \eta_{KL}^* + \bar{K}_{IJKLM}^* \varepsilon_{KL,M}^{*(0)} + \omega^2 \hat{G}_{Iji}^* u_i^{*(0)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначены тензоры осредненных вязкоупругих констант пластины

$$\bar{C}_{IJKL}^* = \langle C_{IJKL}^{*(0)} \rangle = \langle C_{IJKL}^* \rangle - \langle C_{Ijk3}^* C_{k3i3}^{*-1} C_{i3KL}^* \rangle, \quad C_{IJKL}^{*(0)} = C_{IJKL}^* - C_{Ijk3}^* C_{k3i3}^{*-1} C_{i3KL}^*,$$

а также введены тензоры

$$B_{IJKL}^* = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{*(0)} \rangle, \quad \bar{D}_{IJKL}^* = \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{*(0)} \rangle$$

$$K_{IJKLM}^* = \kappa \langle \tilde{N}_{IJKLM}^{*(0)} \rangle, \quad K_{IJKL}^* = \kappa \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{*(0)} \rangle - C_{IJKL}^{*(0)}) d\xi \right\rangle,$$

$$\bar{G}_{Iji}^* = \kappa \langle G_{Iji} \rangle = \kappa \langle C_{Ijk3}^* C_{k3i3}^{*-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle,$$

$$\hat{G}_{Iji}^* = \kappa^2 \langle \xi G_{Iji}^* \rangle = \kappa^2 \langle C_{Ijk3}^* C_{k3i3}^{*-1} \xi \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle,$$

$$\bar{G} = \kappa \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \right\rangle$$

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{*(0)} = N_{IJKLM}^{*(0)} + \Phi_{IJKLM}^*$$

$$\Phi_{KLMNS}^* (\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}^* (\xi) - \langle \tilde{\Phi}_{KLMNS}^* (\xi) \rangle$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}^* (\xi) = - \int_{-0.5}^{\xi} (C_{K3i3}^{*-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{*-1} \delta_{SK}) C_{i3MN}^* d\xi$$

$$N_{IJKLM}^{*(0)} = C_{Ijk3}^* C_{k3P3}^{*-1} \int_{-0.5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{*(0)} \rangle - C_{PMKL}^{*(0)}) d\xi -$$

В систему осредненных определяющих соотношений (12) входят деформации нулевого приближения  $\varepsilon_{KL}^{*(0)}$  (10), кривизны  $\eta_{KL}^* = -u_{3,KL}^{*(0)}$  и градиенты деформаций  $\varepsilon_{KL,N}^{*(0)}$ , которые зависят от 3 функций  $u_I^{*(0)}$ ,  $u_3^{*(0)}$  глобальных переменных  $x_I$ .



## РАСЧЕТ АМПЛИТУД НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ

Сохраняя в асимптотическом разложении (2) только главные ненулевые члены, и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем следующие выражения для всех 6 компонент амплитуд тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^* &= \sigma_{IJ}^{*(0)}, \\ \sigma_{13} &= \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(0)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_1^{(0)}) d\xi +, \\ &+ \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)} + \omega^2 (\langle \rho u_1^{(1)} \rangle - \rho u_1^{(1)})) d\xi \\ \sigma_{33} &= \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi + \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(1)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(1)}) d\xi + \\ &+ \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0.5)) + \int_{-0.5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \rho u_i^{(2)})) d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

Входящие в эти выражения напряжения  $\sigma_{13}^{*(1)}$ ,  $\sigma_{IJ}^{*(1)}$  и  $\sigma_{13}^{*(2)}$  вычисляются по формулам, подобным формулам для упругих пластин [2,3]. Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти асимптотически точное выражение для всех шести компонент тензора напряжений.

### ДИССИПАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Функцию диссипации энергии, осредненную за 1 цикл колебаний, а также плотность накопленной энергии вязкоупругой среды вычисляем по формулам [1]:

$$w^* = \frac{\omega}{2} \text{Im} \Pi_{ijkl}^* (\text{Re} \sigma_{ij}^* \text{Re} \sigma_{kl}^* + \text{Im} \sigma_{ij}^* \text{Im} \sigma_{kl}^*), \quad \psi = \frac{\omega}{2} \text{Re} \Pi_{ijkl}^* \text{Re} \sigma_{ij}^* \text{Re} \sigma_{kl}^*, \quad (8)$$

где  $\text{Im}(\Pi_{ijkl}^*)$  - компоненты мнимой части тензора комплексных податливостей  $\Pi_{ijkl}^*$ , обратного к  $C_{ijkl}^*(\omega, \xi)$ . Локальный и интегральный коэффициенты рассеяния энергии вязкоупругой пластины определим следующим образом:

$$\delta = \frac{w^*}{\psi}, \quad \bar{\delta} = \frac{W^*}{\Psi}, \quad W^* = \int_V w^* dV = \int_{\Sigma} \int_{-0.5}^{0.5} w^* d\xi d\Sigma, \quad \Psi = \int_V \psi dV = \int_{\Sigma} \int_{-0.5}^{0.5} \psi d\xi d\Sigma, \quad (9)$$

### ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим случай, когда многослойная пластина представляет собой слоисто-волокнустый композит (СВК), каждый слой которого является однонаправленным материалом, повернутым на угол  $\phi_\alpha$  вокруг оси  $O\xi_3$ . Тогда в повернутой (собственной) системе координат  $O\xi_i^{(\alpha)}$ , ось  $O\xi_1^{(\alpha)}$  которой совпадает с направлением ориентации волокон каждого слоя, компоненты  $C_{ijkl}^{*0}$  тензоров комплексных модулей упругости определяются как обратные к тензорам комплексных податливостей:  $C_{ijkl}^{*0} = (\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$ , а компоненты  $(\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$  имеют следующую структуру [1]

$$(\Pi_{ijkl}^{*0}) = \begin{bmatrix} \Pi_{1111}^{*0} & \Pi_{1122}^{*0} & \Pi_{1133}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{2222}^{*0} & \Pi_{2233}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{3333}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\Pi_{1313}^{*0} & 0 & 0 \\ сим. & & & & 2\Pi_{2323}^{*0} & 0 \\ & & & & & 2\Pi_{1212}^{*0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & \frac{1}{E_T^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & \frac{1}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_T^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} \end{bmatrix} \quad (10)$$

где  $E_L^*$  – продольный комплексный модуль упругости 1D композита в направлении ориентации волокон,  $E_T^*$  – поперечный комплексный модуль упругости нити,  $\nu_L^*$  – продольный комплексный коэффициент Пуассона,  $\nu_T^*$  – поперечный комплексный коэффициент Пуассона,  $G_L^*$  – продольный комплексный модуль сдвига,  $G_T^* = \frac{E_T^*}{2(1+\nu_T^*)}$  – поперечный комплексный модуль сдвига. Эти характеристики 1D композита вычисляются по смесевым формулам для 1D композита

$$E_L^* = E_f \varphi_f + E_m^* (1 - \varphi_f), \quad E_T^* = \left( \frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1 - \varphi_f}{E_m^*} \right)^{-1},$$

$$\nu_L^* = \nu_f \varphi_f + \nu_m^* (1 - \varphi_f), \quad \nu_T^* = \nu_m^*, \quad G_L^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_f (1 + \nu_f)}{E_f} + \frac{(1 - \varphi_f)(1 + \nu_m^*)}{E_m^*} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Волокна полагаются упругими, а матрица – вязкоупругой, в формулах (12) обозначены:  $E_f$  – модуль упругости волокон,  $\nu_f$  – продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон,  $G_f$  – продольный модуль сдвига моноволокон,  $\varphi_f$  – относительное объемное содержание волокон в 1D композите,  $E_m^*$  и  $\nu_m^*$  – комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, которые вычисляются по через комплексный модуль сдвига  $G_m^*$  и модуль объемного сжатия  $K_m$  по формулам [7]:  $E_m^* = \frac{9K_m G_m^*}{3K_m + G_m^*}$ ,  $\nu_m^* = \frac{3K_m - 2G_m^*}{6K_m + 2G_m^*}$ . Предполагается, что матрица при всестороннем сжатии проявляет только упругие свойства, тогда  $K_m$  является вещественной константой. Для комплексного модуля сдвига матрицы  $G^*$  примем модель экспоненциальных ядер [1], с учетом температурно-временной аналогии, тогда для  $G^*$  имеем следующее аналитическое выражение от частоты колебаний [7]

$$G^* = \text{Re}(G^*) + i \text{Im}(G^*), \quad \text{Re}(G^*) = G + \sum_{\gamma=1}^N \frac{A_\gamma}{1 + (\tilde{\omega} \tau_\gamma)^2}, \quad \text{Im}(G^*) = \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_\gamma \tilde{\omega} \tau_\gamma}{1 + (\tilde{\omega} \tau_\gamma)^2}. \quad (12)$$

$$\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta), \quad a_\theta = \exp\left(-\frac{a_1 \Delta \theta}{a_2 + \Delta \theta}\right),$$

где  $G$ ,  $A_\gamma$ ,  $\tau_\gamma$ ,  $a_1, a_2$  – константы, а  $\tilde{\omega}$  – приведенная частота колебаний,  $\theta$  – температура,  $\Delta \theta = \theta - \theta_0$ , а  $\theta_0$  – начальное значение температуры.

В единой для всех слоев системе координат СВК  $O\xi_i$  компоненты тензора модулей упругости  $\alpha$ -го слоя вычисляются с помощью формул преобразования компонент тензора 4-го

ранга [1]:  $C_{ijkl}^*(\xi) = C_{mnpq}^{*0} Q_{im}^\alpha Q_{jn}^\alpha Q_{kp}^\alpha Q_{lq}^\alpha$ ,  $\xi \in V_{\xi\alpha}$ , здесь  $Q_{im}^\alpha$  – элементы матрицы поворота слоя с номером  $\alpha$ .

При численных расчетах использовались следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа:  $G_m = 0,345 \text{ ГПа}$ ;  $K_m = \frac{2G_m}{3} \frac{1+\nu_m}{(1-\nu_m)}$ ,  $\nu_m = 0.45$ ,  $n_m = 1$ ,  $A_1 = 1 \text{ ГПа}$ ,  $\tau_1 = 0.01c$ ,  $a_1 = 20K$ ,  $a_2 = 300K$ , а также характеристики волокон, которые считались чисто упругими:  $E_f = 200 \text{ ГПа}$ ;  $\nu_f = 0.25$ ,  $A_k = 0$ . Коэффициент армирования 1D однонаправленных слоев композита был принят равным 0.6. СВК имел следующую 4-х слойную структуру:  $[0/+45/-45/0]$ , с равным соотношением всех 4-х слоев - по 25% каждого слоя. Геометрические размеры пластины были выбраны:  $L=1 \text{ м}$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , давление на поверхностях пластины  $\text{Re}(\tilde{p}_+^*) = 0,2 \text{ МПа}$ ,  $\text{Re}(\tilde{p}_-^*) = 0,1 \text{ МПа}$ .

На рисунках 1-3 приведены распределения действительных частей комплексных амплитуд тензоров изгибных напряжений  $\text{Re} \sigma_{11}^*$ , сдвиговых напряжений  $\text{Re} \sigma_{13}^*$  и поперечных напряжений по толщине  $\text{Re} \sigma_{33}^*$  пластины для различных значений продольной координаты  $x$ . Максимальные значения изгибных напряжений  $\text{Re} \sigma_{11}^*$  реализуются в 1-м и 4-м слоях с продольной ориентацией волокон  $\phi_1 = \phi_4 = 0^\circ$  в срединной части пластины, а максимальные значения сдвиговых напряжений  $\text{Re} \sigma_{13}^*$  реализуются на краях пластины при  $x=0$  и 1, в 2 и 3-м слоях с ориентацией волокон  $\phi_2 = 45^\circ, \phi_3 = -45^\circ$ . Поперечные напряжения  $\text{Re} \sigma_{33}^*$  одинаковы для всех значений  $x$ . Для рассмотренного типа композита все действительные части комплексных амплитуд тензоров напряжений  $\text{Re} \sigma_{ij}^*$  практически не зависят от частоты колебаний  $\omega$ , в том числе сдвиговые и поперечные напряжения. Этот факт объясняется тем, что напряжения  $\text{Re} \sigma_{13}^*$  и  $\text{Re} \sigma_{11}^*$  согласно формулам (29) определяются значениями комплексного модуля упругости  $C_{1111}^{*(0)}$ , которые практически не зависят от вязкоупругих свойств матрицы.

На рис. 4 представлены распределения мнимых частей комплексных амплитуд напряжений  $\text{Im} \sigma_{11}^*$ . Эти напряжения существенно зависят от частоты колебаний, однако их значения существенно меньше соответствующих значений действительных частей амплитуд тензоров напряжений, т.е. выполняется условие  $|\text{Im}(\sigma_{ij}^*)| \ll |\text{Re}(\sigma_{ij}^*)|$ .

На рисунке 7 представлены распределения локального коэффициента (23) рассеяния энергии по пластине. Результаты расчетов показывают, что основные значения коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины с ориентацией волокон  $\pm 45^\circ$ . Значения коэффициента рассеяния энергии в слоях с продольной ориентацией волокон  $0^\circ$  меньше почти на порядок.

На рисунке 8 показан график зависимости интегрального коэффициента рассеяния энергии (24) от частоты колебаний. Эта зависимость имеет характерный максимум на частоте 15 Гц, которая отличается от частоты  $\omega_m = 6 \text{ Гц}$ , на которой достигается максимальное значение тангенса угла потерь матрицы  $\text{tg} \delta(G^*(\omega))$ , где  $\text{tg} \delta(G^*(\omega)) = \text{Im}(G^*) / \text{Re}(G^*)$ . Значения интегрального коэффициента рассеяния энергии примерно в 4 раза меньше максимальных значений локального коэффициента рассеяния энергии: 0.16 и 0.63, соответственно.

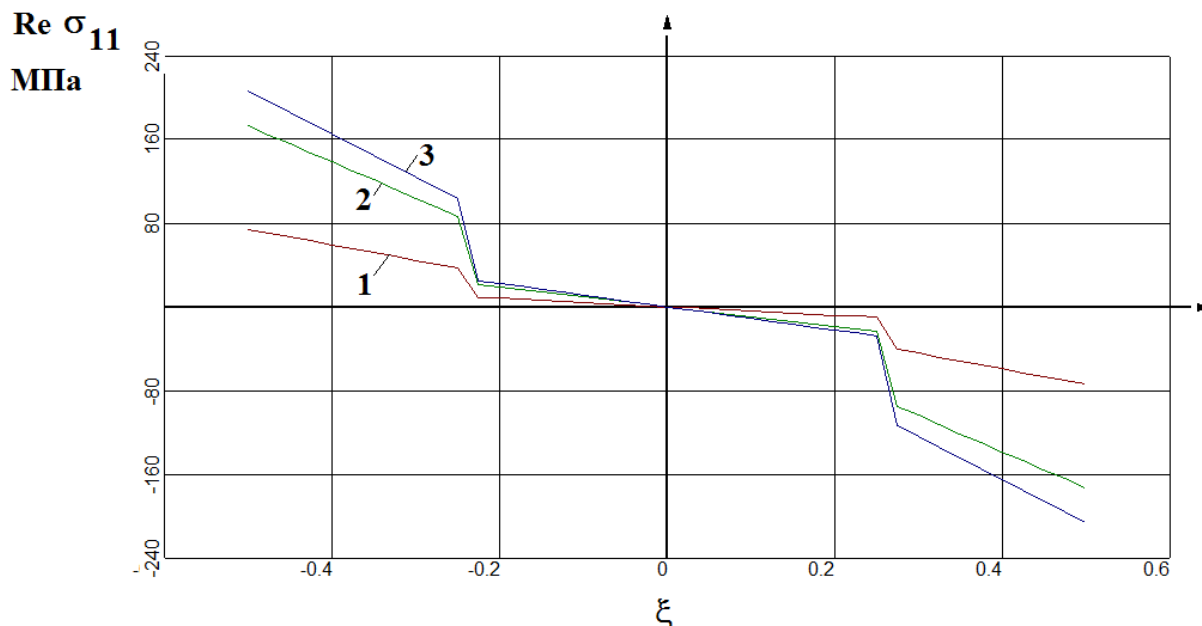


Рис. 1. Распределение действительной части амплитуды изгибных напряжений  $Re \sigma_{11}^*$  по толщине композитной пластины в различных зонах:  $x=0$  (1), 0.25 (2), 0.5 (3), для часты 1 Гц.

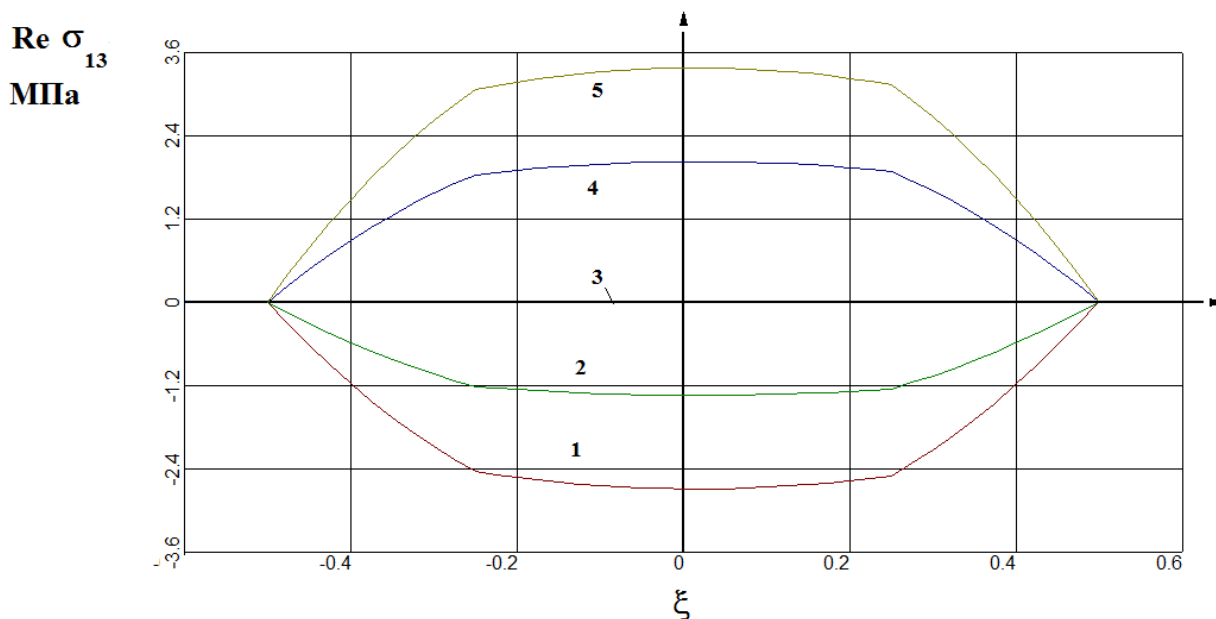


Рис.2. Распределение действительной части амплитуды касательных напряжений  $Re \sigma_{13}^*$  по толщине композитной пластины в различных зонах:  $x=0$  (1), 0.25 (2), 0.5 (3), 0.75 (4), 1 (5), для часты 1 Гц.

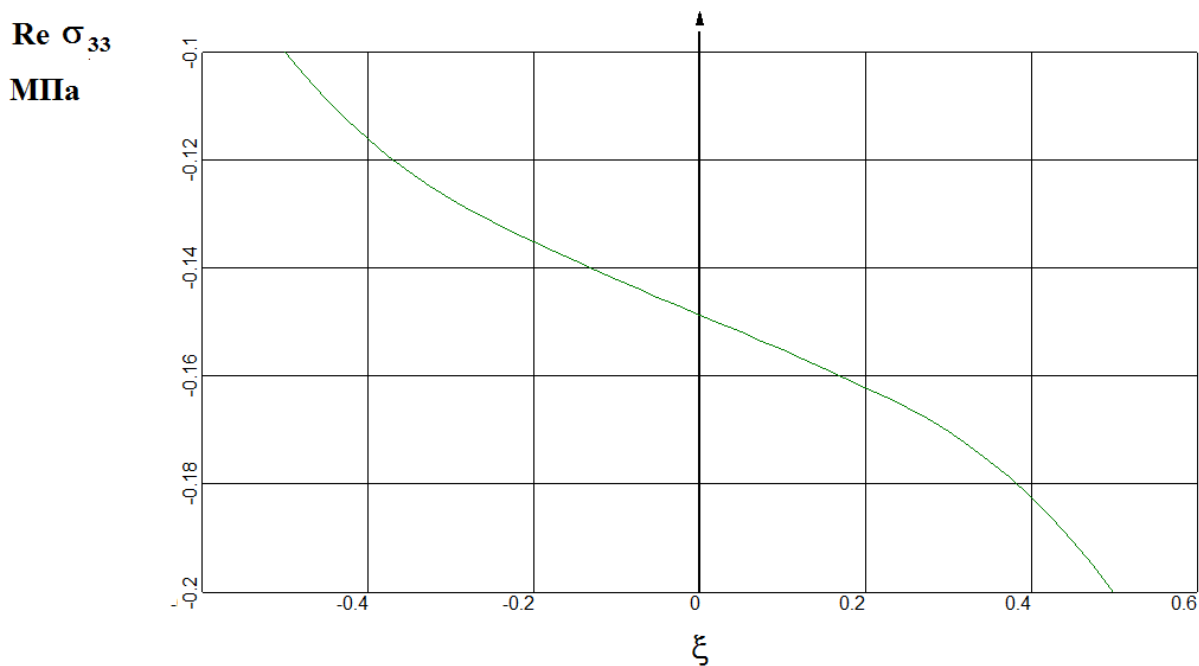


Рис. 3. Распределение действительной части амплитуды поперечного напряжения  $\text{Re } \sigma_{33}^*$  по толщине композитной пластины для часты 1 Гц.

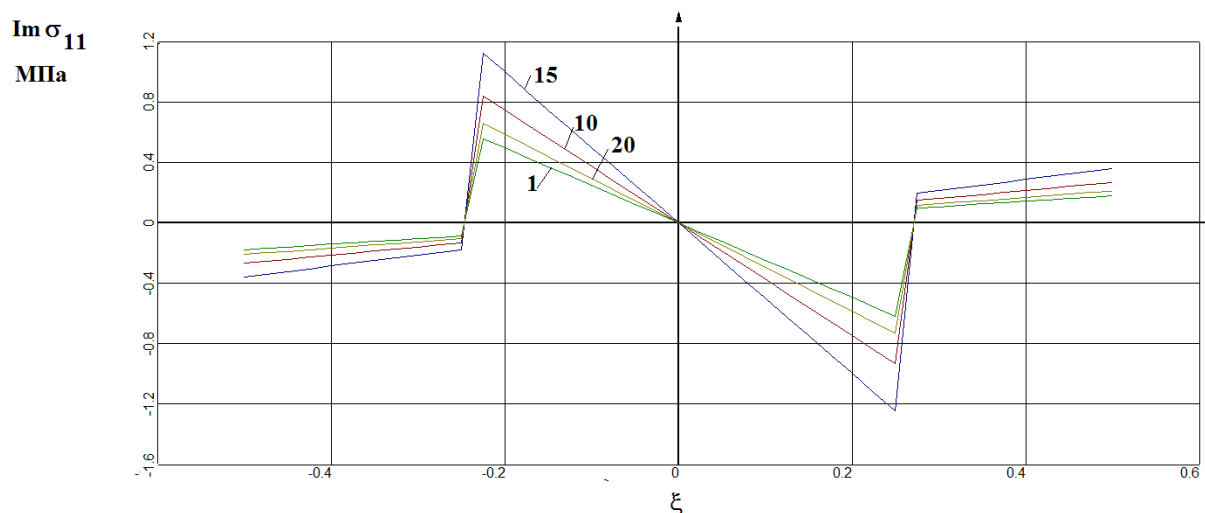


Рис.4. Распределение мнимой части амплитуды изгибных напряжений  $\text{Im } \sigma_{11}^*$  по толщине композитной пластины в ее срединной зоне для различных частот колебаний

На этом же рисунке показаны сравнительные результаты расчетов коэффициента рассеяния энергии по точной формуле (24), в которой учтены все ненулевые напряжения данной задачи (это  $\sigma_{11}^* \sigma_{22}^* \sigma_{12}^* \sigma_{13}^* \sigma_{33}^*$ ), и по приближенной формуле, в которой не учитываются напряжения  $\sigma_{13}^*$  и  $\sigma_{33}^*$ . Этот случай не учета напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений реализуется, если использовать для расчета напряженно-деформированного состояния классические теории пластин, типа теории Киргофа-Лява. Результаты сравнения показывают, что в этом случае ошибка в определении значений коэффициента рассеяния энергии весьма существенная - она достигает 12-15 %, поскольку, несмотря на относительно малые значения значений напряжений  $\sigma_{13}^*$  и  $\sigma_{33}^*$ , вязкоупругие свойства композитного материала при сдвиге и поперечном растяжении, характеризуемые компонентами  $\text{Im}(\Pi_{1313}^*(\omega, \xi))$  и  $\text{Im}(\Pi_{3333}^*(\omega, \xi))$ , как раз являются наиболее значимыми.

Таким образом, расчет коэффициентов рассеяния энергии в тонких вязкоупругих композитных пластинах необходимо осуществлять по теориям, учитывающим все ненулевые компоненты амплитуд тензора напряжений. Такая теория предложена в данной работе. Ее ключевой результат - это возможность расчета всех компонент тензора амплитуд напряжений по сравнительно простым аналитическим формулам (18), или (27) - для частного случая изгибных колебаний.

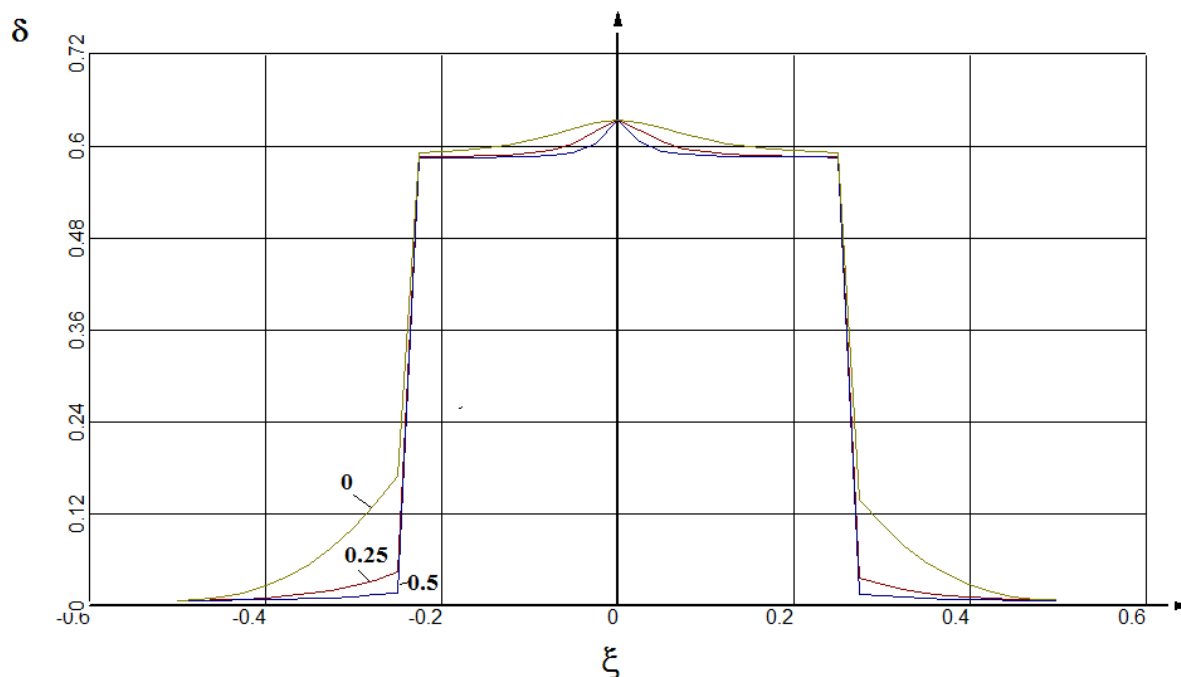


Рис. 5. Распределение локального коэффициента демпфирования  $\delta(x, \xi)$  по толщине композитной пластины для различных ее зон ( $x=0, 0.25, 0.5$ ) для частоты 15 Гц.

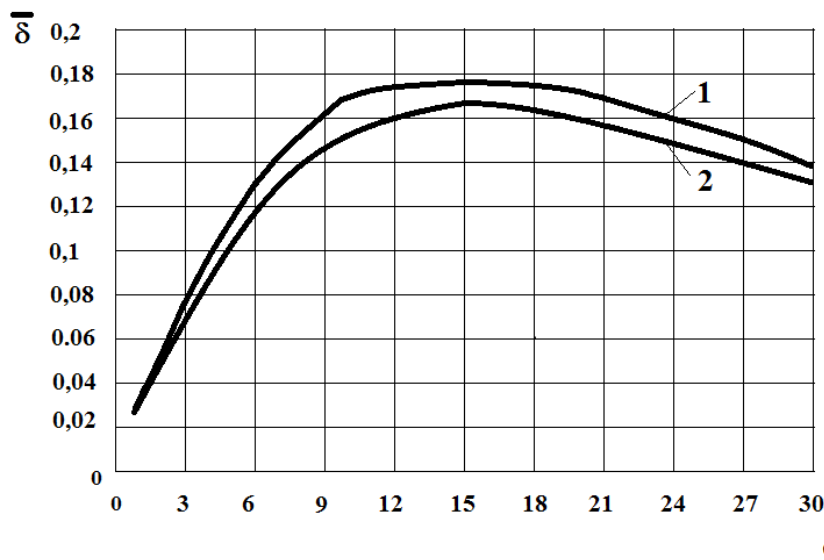


Рис. 6. Зависимость интегрального коэффициента рассеяния энергии от частоты колебаний композитной пластины для случая учета всех компонент тензора напряжений (1) и без учета напряжений межслойного сдвига  $\sigma_{13}^*$  и поперечных напряжений  $\sigma_{33}^*$  (2).

### Выводы

1. Разработана теория вязкоупругих многослойных тонких пластин при установившихся моногармонических колебаниях, построенная из общих уравнений трехмерной

теории вязкоупругости путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру - отношению толщины к длине пластины, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения амплитуд перемещений и напряжений по толщине пластины.

2. Разработанная теория позволяет вычислить все 6 компонент тензора комплексных амплитуд напряжений, включая амплитуды поперечных нормальных напряжений и амплитуды напряжения межслойного сдвига.

3. Предложен алгоритм расчета диссипативных характеристик вязкоупругих многослойных пластин, основанный на расчете функции диссипации энергии, локального коэффициента демпфирования и интегрального коэффициента демпфирования.

4. Проведено численное моделирование напряжений в вязкоупругой пластине из композитного слоисто-волоконистого материала при изгибных колебаниях, которое показало, что действительные части амплитуд напряжений, в том числе и напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений, практически не зависят от частоты колебаний. Этот факт обусловлен спецификой задачи об изгибных колебаниях, в ней все напряжения зависят только от продольной компоненты комплексного модуля упругости, которая, в свою очередь, главным образом, зависит только от упругих свойств армирующих волокон. Вязкоупругие же свойства матрицы практически не влияют на действительные части амплитуд напряжений.

#### **Список литературы**

1. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердых сред/ Механика сплошной среды. Т.4.-Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2013. 580 с.
2. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. №3. С.86-100.
3. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости// Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>
4. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой//Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С.36-57.
5. Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем// Композиты и наноструктуры. 2014. № 1. т.6. С.32-48.
6. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций// Наука и образование. Электронный журнал.2014. № 7. DOI: 10.7463/0714.0717805 <http://technomag.bmstu.ru/doc/717805.html>
7. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов// Наука и образование. Электронный журнал. # 11, ноябрь 2014. DOI: 10.7463/1114.0734246

## **МИГРАЦИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ КАК РОТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В БЛОКОВОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ (ГЕОСРЕДЕ)**

**А.А. Долгая<sup>1,2</sup>, А.И. Герус<sup>1,3</sup>, А.В. Викулин<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН,  
лаборатория геодинамики и геофизики.

683006 Петропавловск-Камчатский, б. Пийпа, 9, e-mail: [adolgaya@kscnet.ru](mailto:adolgaya@kscnet.ru)

<sup>2</sup> Камчатский государственный технический университет,  
кафедра информационных систем.

683003 Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35

<sup>3</sup> Камчатский государственный университет им. В. Беринга,  
кафедра математики и физики.

683032 Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

Рассмотрены результаты исследования пространственно-временных и энергетических закономерностей геодинамического процесса, протекающего в пределах тектонически активных поясов планеты. С помощью разработанных авторами методов доказано, что миграция является характерным свойством сейсмической и вулканической активности планеты, имеющим, таким образом, волновую природу. На основании полученных данных построена принципиально новая модель волнового геодинамического процесса, которая позволяет, в том числе, количественно описать основные свойства сейсмического процесса в очаге землетрясения: форшоковую и афтершоковую стадии и главный толчок.

Ключевые слова: блоковая вращающаяся среда, миграция, геодинамический процесс, ротационная волновая модель, солитон.

### **Введение**

Данные, полученные многими исследователями, позволяют предположить [1], что закономерности пространственного, временного и пространственно-временного распределений очагов землетрясений и извержений вулканов имеют волновую природу. Авторским коллективом на протяжении ряда лет проводятся исследования волновых свойств геодинамического процесса в рамках блоковых представлений о строении вращающейся среды на примере геологической среды – геосреды [1].

Геодинамический процесс в пределах тектонически активных зон планеты проявляется в виде сейсмических и вулканических событий, распределенных вдоль длинных и узких поясов, что позволяет моделировать развитие сейсмического и/или вулканического процесса в виде «одномерной» последовательности событий. В теории случайных процессов такая модель соответствует одномерному случайному блужданию, порождаемому суммами взаимно независимых одинаково распределённых величин или цепей Маркова. Для исследования пространственно-временных закономерностей проявления сейсмической и вулканической активности необходимо было выявить и проанализировать марковские цепи событий, в совокупности моделирующие геодинамическую активность. Для этого в модель вводились поглощающие экраны, накладывающие ограничения на допустимые значения координат и времен событий, формирующих цепочки. Для изучения пространственно-временных распределений очагов землетрясений и извергавшихся вулканов в рамках предложенного подхода был разработан [4] и программно реализован вычислительный метод исследования миграции сейсмической и вулканической активности (ИМСИВА) [8].

### **Особенности энергетического распределения геодинамической активности**

Результаты проведенного нами исследования показали, что существуют вполне определенные зависимости между скоростями миграции  $V$  сейсмической и вулканической активно-



сти и энергетическими характеристиками геодинамического процесса [7]:  $M$  – магнитудой для землетрясений, пропорциональной логарифму выделившейся сейсмической энергии, [Дж] и  $W$  – индексом вулканической активности для извержений вулканов, пропорциональной логарифму объема выброшенного на поверхность Земли материала, [км<sup>3</sup>] (рис. 1):

$$\begin{aligned} M &\approx (7,6 \pm 1,0)LgV; & M &\approx (6,7 \pm 0,5)LgV; & M &\approx (-4,6 \pm 0,2)LgV & (1 \text{ а, б, в}) \\ W &\approx (-3,1 \pm 0,6)LgV; & W &\approx (-3,9 \pm 1,0)LgV; & W &\approx (-0,8 \pm 0,2)LgV & (1 \text{ г, д, е}) \end{aligned}$$

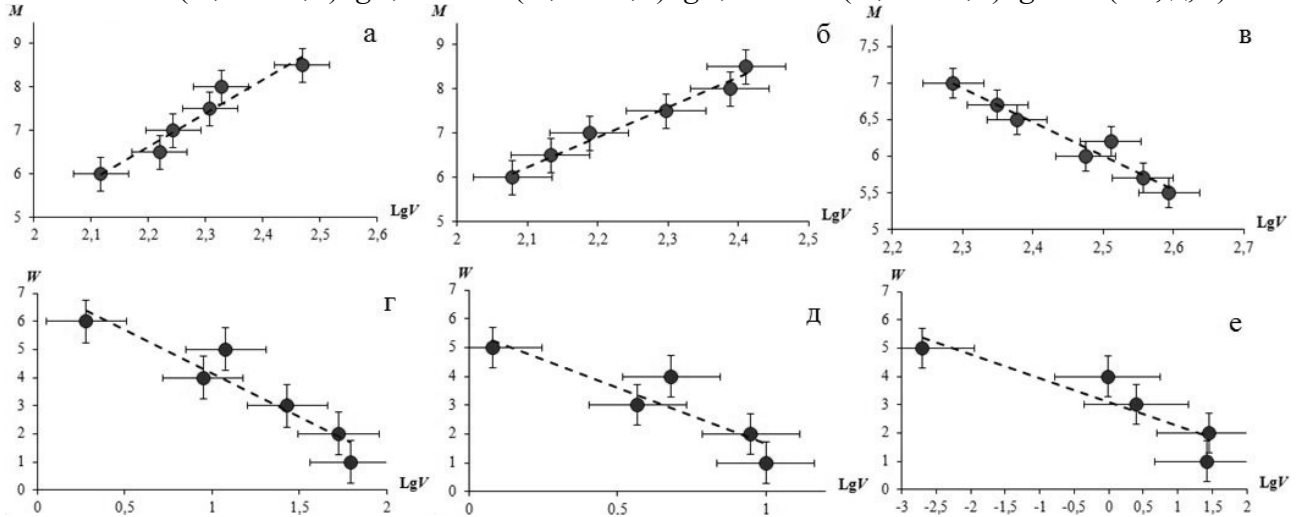


Рис. 1. Зависимости между скоростями миграции  $V$  очагов землетрясений (а, б, в) и вулканических извержений (г, д, е) и энергетическими характеристиками событий  $M$  и  $W$ . а) и г) – для окраины Тихого океана; б) и д) – для Альпийско-Гималайского пояса; в) и е) – для Срединно-Атлантического хребта.

Параметр  $p$ , характеризующий наклон зависимостей  $LgV(M)$  и  $LgV(W)$ , «чувствителен» к тектоническим обстановкам в поясах [14]: положителен для областей субдукции (окраины Тихого океана) и коллизии (Альпийско-Гималайского пояса) тектонических плит, характеризующихся сжатием (1 а, б), и отрицателен для областей раздвигания тектонических плит (Срединно-Атлантического хребта) (1 в) и вулканических поясов (1 г-е), характеризующихся растяжением.

Анализ значений коэффициентов «наклона»  $p$  показал, что сумма значений наклонов всех сейсмических (1 а-в) и вулканических (1 г-е) зависимостей с учетом точности их определения близка нулю при примерно равных по модулю средних «положительных»  $p_+ = \{p_{M1,2} > 0\}$  и «отрицательных»  $p_- = \{p_{W1,2,3,M3} < 0\}$  значениях [7]. Возможность такого представления коэффициентов  $p$ , «чувствительных» к геодинамическим обстановкам в регионах, т.е. к направлению течения геодинамического процесса (сжатию или растяжению), позволяет интерпретировать их в совокупности как векторную сохраняющуюся геодинамическую величину.

Для вращающейся геосреды была предложена ротационная модель сейсмотектонического процесса на примере окраины Тихого океана [1], движение блоков в которой определяется уравнением син-Гордона (СГ):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta, \quad (2)$$

где  $\theta = \beta/2$ ,  $\xi = k_0 z$  и  $\eta = c_0 k_0 t$  – безразмерные координаты,  $z$  – расстояние вдоль цепочки блоков,  $t$  – время,  $\beta$  – функция угла поворота,  $c_0$  – предельная скорость процесса,  $k_0$  – волновое число.

Уравнение СГ имеет решения в виде односолитонной бегущей волны ( $\theta(\xi - u\eta)$ ):

$$\theta = 4 \arctg \left[ \exp(\pm \gamma(\xi - \xi_0 - u\eta)) \right], \quad \gamma = (1 - u^2)^{-1/2}, \quad u^2 = \frac{U^2}{c_0^2}, \quad c_0^2 = \frac{3\sqrt{15}}{8\pi^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \Omega R_0, \quad (3)$$

где  $U$  – скорость распространения уединенной волны деформации (поворота),  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\rho$ ,  $G$  – плотность и модуль сдвига геосреды,  $R_0$  – размер блока.

Известно, что солитоны подобны частицам [5]: при взаимодействии с другими такими возмущениями они не разрушаются, а, изменяя фазу, продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной. В рамках ротационной модели геосреды такое «солитонное» свойство геодинамических возмущений позволяет миграцию сейсмической и вулканической активности описывать в виде волнового процесса со свойствами дальнего действия [3].

Таким образом, геодинамический параметр  $p$  может быть интерпретирован как такая векторная сохраняющаяся величина, физическим аналогом которой в рамках концепции блоковой вращающейся среды (геосреды) [1, 3] и волновой модели геодинамического процесса может быть момент импульса, связанный с поворотными движениями блоков земной коры.

В солитонном решении (3) уравнения (2) выделяется величина, по физическому смыслу соответствующая импульсу  $\vec{p}$ :

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{U}|}{\sqrt{1 - U^2/c_0^2}} = U\gamma. \quad (4)$$

При этом вектор  $\vec{p}$  имеет направление, соответствующее сжатию или растяжению – направлению геодинамического процесса. В результате закономерности миграции сейсмической активности вдоль областей сжатия и растяжения (рис. 1) можно интерпретировать как солитонные решения, соответствующие скоростям миграции, закономерным образом увеличивающимся или уменьшающимся с изменением энергии процесса ( $M$ ,  $W$ ).

### **Математическое моделирование сейсмического процесса**

В модели движения среды, описываемой уравнением СГ (2), блоки являются равновеликими и равномерно поворачиваются друг относительно друга, взаимодействуя между собой упругими полями с моментами силы [3]. Скорость распространения волны вдоль такой цепочки постоянна во времени. Для более реального описания сейсмического процесса уравнение (2) должно быть дополнено другими слагаемыми, в том числе связанными с диссипацией энергии.

Обратимся к теории возмущений разработанной для уравнения СГ Д. Маклафлином и Э. Скоттом [12], и сформируем структурное возмущение для уравнения (2). А именно, дополним нашу модель (2) эффектами отклонения моментов сил блоков от равновесных положений  $\mu$  и трения на границах  $\alpha$ . В результате структурное возмущение может быть представлено в виде:

$$\mathcal{E} = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \mu \delta(\xi) \sin \theta, \quad (5)$$

и соответствующее ему возмущенное уравнение СГ запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \mu \delta(\xi) \sin \theta, \quad (6)$$

где  $\delta(\xi)$  – Функция Дирака. Здесь трение понимается не как механизм взаимодействия блоков между собой за счет из зацепления друг за друга, а как диссипативный фактор, препятствующий их моментному взаимодействию.

Уравнение (6) не имеет аналитических решений, так как в формуле одиночного солитона (3) скорость  $u$  и фаза  $\xi_0$  в присутствии структурного возмущения (5) приобретают зависимость от времени:

$$X = \int_0^t u(t') dt' + \xi_0(t), \quad \frac{dX}{dt} = u(t) + \frac{d\xi_0(t)}{dt}, \quad (7)$$

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{\xi - X(t)}{\sqrt{1 - u(t)^2}} \right) \right]. \quad (8)$$

Следуя методике авторов [12], в результате подстановки (7)-(8) в (6) мы получили систему уравнений, из которой и были численно рассчитаны динамические параметры модели – значения координаты  $X$  и скорости  $u$ . Кроме того, нами была рассчитана производная по времени от функции угла поворота блока – скорость поворотного деформирования:

$$\dot{\theta} = \frac{d\beta}{dt} = 20 \sqrt{\frac{\Omega \sqrt{G/\rho}}{R_0}} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{X - u\eta}{\sqrt{1 - u^2}} \right), \quad (9)$$

которая для описания деформационного процесса во вращающихся средах является физически более информативной величиной.

Начальные условия  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $u_0 = 10^{-10}$  ( $u = U/c_0$  – безразмерная скорость) в соответствии с [2] выбирались таким образом, чтобы скорость деформирования не превышала значения  $\dot{\theta}_0 \leq 10^{-13} \text{ с}^{-1}$ , что близко к средней скорости деформации в сейсмоактивных [10] и вулканических [9] областях и заметно отличается от глобальной средней скорости деформации (вращения отдельных блоков) в различных регионах Земли, оцениваемой величиной  $5,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1} \approx 1\text{-}2 \text{ град/млн. лет}$  [11]. В процессе вычислений были выбраны характерные для земной коры значения физических параметров  $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $G = 5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $R_0 \approx 10^5 \text{ м}$ ,  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

При  $\alpha = \mu = 0$  уравнение (6) сводится к невозмущенному уравнению (2), для которого солитон (3) движется равномерно, т.е. имеет постоянные значения  $U$  и  $\dot{\theta}$ .

Анализ решений возмущенного СГ-уравнения (6) проводился при значениях параметра  $\alpha = 0,4\text{--}0,8$ , соответствующих реальным разломам [13], с фиксированной величиной коэффициента неоднородности  $\mu = 0,0005$ , а также при значениях  $\mu$  в пределах  $\mu = 0,0001\text{--}0,0005$  и фиксированном  $\alpha = 0,6$ .

В результате нами численно были получены решения [6] (рис. 2), близкие представленным в [2].

Скорость волны и скорость поворотной деформации в присутствии структурного возмущения (5) меняются со временем, причем первая всегда имеет один локальный максимум  $U_{max}$ , а вторая – два максимума  $\dot{\theta}_{max1}$ ,  $\dot{\theta}_{max2}$  и один минимум  $\dot{\theta}_{min}$  между ними. После «колебаний» оба параметра выходят на асимптотику. Значение координаты  $X$  асимптотически стремится к размеру блока –  $R_0 \approx 10^5 \text{ м}$ .

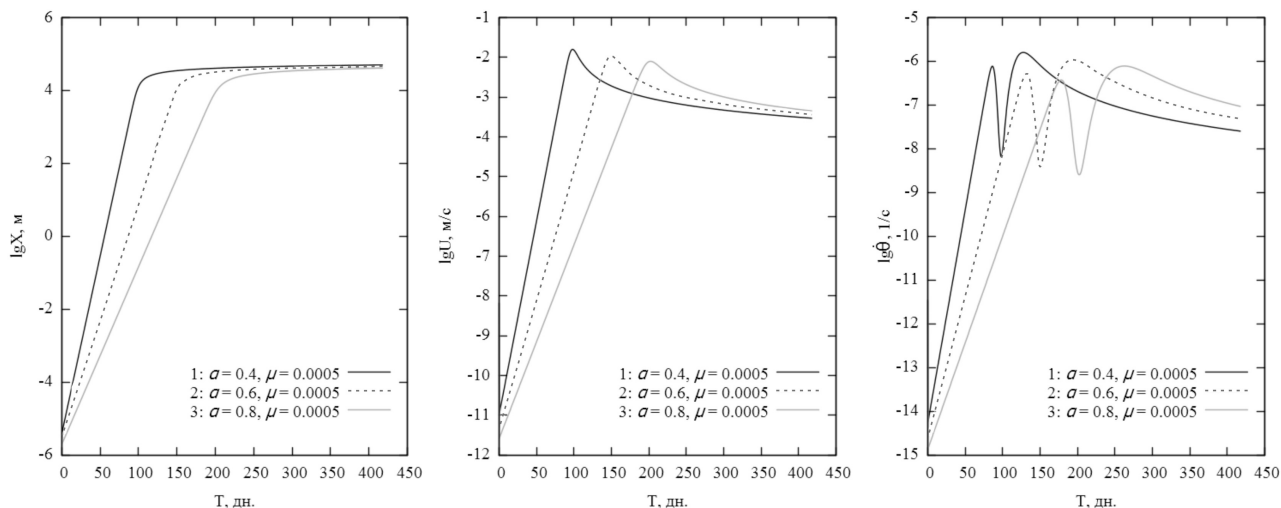


Рис. 2. Динамика изменения параметров  $X$ ,  $U$  и  $\dot{\theta}$  при  $\alpha = 0,4; 0,6; 0,8$ .

Проведенные нами расчеты позволили сформулировать следующие выводы:

1) При увеличении коэффициента трения  $\alpha$  уменьшаются значения  $U_{\max}$  (максимума скорости),  $\dot{\theta}_{\max 1}$ ,  $\dot{\theta}_{\max 2}$ ,  $\dot{\theta}_{\min}$ , а соответствующие им характерные времена увеличиваются. Таким образом, процесс распространения солитона замедляется и сглаживается.

2) При увеличении значения коэффициента неоднородности  $\mu$ , наоборот, увеличиваются значения  $U_{\max}$ ,  $\dot{\theta}_{\max 1}$ ,  $\dot{\theta}_{\max 2}$ ,  $\dot{\theta}_{\min}$ , а соответствующие им характерные времена уменьшаются. Таким образом, моделируемый процесс идет быстрее и резче.

3) При одновременном увеличении или уменьшении значений  $\alpha$  и  $\mu$  меняется и временной масштаб процесса.

4) Асимптотическое значение  $X$ , т.е.  $X_{\max}$ , при любых  $\alpha$  и  $\mu$  всегда соответствует равенству  $X_{\max} \approx R_0$ , где  $R_0$  – радиус блока.

5) Для любых  $\alpha$  и  $\mu$  волна достигает значений  $U_{\max}$ ,  $\dot{\theta}_{\min}$  и выхода  $X$  на асимптотику одновременно.

Кроме того, существуют еще и другие инвариантные величины, не зависящие от  $\alpha$  и  $\mu$ , но характерные для сейсмического процесса в целом:

1) отношение максимумов скорости деформации  $\dot{\theta}_{\max 2} / \dot{\theta}_{\max 1} \approx 2$ ;

2) отношение продолжительностей максимумов скорости деформации  $\Delta T_{\max 2} / \Delta T_{\max 1} \approx 6$ .

В работе [1] показано, что интервалы времени, в течение которых форшоки и афтершоки происходят относительно сильнейших толчков, соотносятся в пропорции  $\Delta t_a / \Delta t_\phi = 69/11 = 6,3$ , близкой к отношению продолжительностей максимумов скорости деформации  $\Delta T_{\max 2} / \Delta T_{\max 1} \approx 6$ . В то же время, при близости значений магнитуд наиболее сильных форшоков и афтершоков:  $M_\phi \approx M_a$ , их числа  $N_a$  и  $N_\phi$ , а, следовательно, и суммарные сейсмические энергии  $E_a$  и  $E_\phi$ , выделяемые в течение форшоковой и афтершоковой стадий, соотносятся между собою в пропорции  $N_a / N_\phi = E_a / E_\phi = 2,3$ , близкой к отношению величин максимумов скоростей деформации  $\dot{\theta}_{\max 2} / \dot{\theta}_{\max 1} \approx 2$ .

Интерпретация решений для скорости деформации  $\dot{\theta}$  может быть следующей. Особенностью взаимодействия сейсмофокальных блоков, по сути, является перераспределение и высвобождение накопленных напряжений при землетрясении, которое происходит в результате локализации неустойчивой деформации в определенный момент времени ( $\dot{\theta}_{\min}$ ). В рамках такого подхода, первой и второй стадиям взаимодействия тектонической волны с сейсмофокальным блоком (первый и второй максимумы на кривой  $\dot{\theta}$ ) могут соответствовать форшоковая и афтершоковая стадии сейсмического цикла.

Кроме того, в рамках ротационной модели предельная скорость миграции глобальной сейсмической активности составляет  $c_{0,\max} = 1-10$  см/с, и энергетический характер миграционной зависимости соответствует солитонному типу возбуждения [3]. В нашей численной модели (6) солитонное решение также характеризуется значением  $U_{\max} = 1-10$  см/с, – которую мы можем интерпретировать как его предельную скорость  $c_0$  в (3).

Таким образом, в рамках ротационной концепции блоковой вращающейся среды (геосреды) предложена новая, волновая модель геодинамического процесса, которая позволяет интерпретировать миграцию геодинамической активности как ротационные волны, распространяющиеся в блоковой геосреде. Построенная модель позволяет, в том числе, количественно описать такие важные свойства сейсмического процесса, как его форшоковую и афтершоковую стадии и заключенный между ними главный толчок.

## Список литературы

1. Викулин А.В. Физика волнового сейсмического процесса. Петропавловск-Камчатский: Изд-во КГПУ, 2003. 151 с.

2. Викулин А.В., Быков В.Г., Лунева М.Н. Нелинейные волны деформации в ротационной модели сейсмического процесса // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5. № 1. С. 31-39.
3. Викулин А.В., Махмудов Х.Ф., Иванчин А.Г. и др. О волновых и реидных свойствах земной коры // Физика твердого тела, 2016. Т. 58, № 3. С. 547-557.
4. Викулин А.В., Мелекесцев И.В., Акманова Д.Р. и др. Информационно-вычислительная система моделирования сейсмического и вулканического процессов как основа изучения волновых геодинамических явлений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 3. С. 34-54.
5. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний // УФН. 1979. Т. 128. С. 579-624.
6. Герус А.И., Викулин А.В. Численное исследование параметров солитонного решения возмущенного уравнения синус-Гордона в рамках ротационной модели // Материалы XIX региональной научной конференции «Вулканизм и связанные с ним процессы», посвящённой Дню вулканолога, 29-30 марта 2016 г. Петропавловск-Камчатский: ИВиС ДВО РАН, 2016. С. 171-179.
7. Долгая А.А., Викулин А.В. Закономерности геодинамического процесса. Методы и результаты исследования // Материалы Четвертой молодежной тектонофизической школы-семинара. М.: ИФЗ РАН, 2015. С. 95-100.
8. Долгая А.А., Викулин А.В., Герус А.И. Моделирование пространственно-временных закономерностей геодинамического процесса методом ИМСиВА // Вулканизм и связанные с ним процессы. XVIII ежегодная научная конференция, посвящённая Дню Вулканолога. Петропавловск-Камчатский, 2016. С. 132-137.
9. Мелекесцев И.В. Вихревая вулканическая гипотеза и некоторые перспективы ее применения // Проблемы глубинного вулканизма. М.: Наука. 1979. С.125-155.
10. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. М.: Недра. 1986. 301 с.
11. England P., Molnar P. The field of crustal velocity in Asia calculated from Quaternary rates of slip on faults // Geophys. J. Int. 1997. 130. № 3. P. 551-582.
12. McLaughlin D. W., Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. 1978. 18. P. 1652-1680.
13. Nur A., Ron H., Scotti O. Fault mechanics and the kinematics of block rotation // Geology. 1986. 14. P. 746-749.
14. Vikulin A.V., Akmanova D.R., Vikulina S.A. et al. Migration of seismic and volcanic activity as display of wave geodynamic process // Geodynamics & Tectonophysics. 2012. V. 3. № 1. P. 1-18.

## **ВЛИЯНИЕ МАЛОЦИКЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НА АКУСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В ПОВРЕЖДЕННОМ МАТЕРИАЛЕ**

**Ерофеев В.И., Иляхинский А. В., Никитина Е.А., Родюшкин В.М.**  
603024, Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия  
e-mail: [nikitina.ea.nn@gmail.com](mailto:nikitina.ea.nn@gmail.com)

На примере использования различных способов обработки результатов зондирования металла упругими волнами изучены пути повышения чувствительности ультразвукового метода и достоверности расшифровки показаний акустических приборов с учетом поврежденности конструкционного материала. Проведена оценка влияния поврежденности материала на проявление эффекта акустоупругости, применяющегося для определения напряжений акустическим методом.

**Ключевые слова:** материал, поврежденность, акустоупругость, ультразвуковое зондирование, информационно-статистический подход.

Одним из наиболее перспективных методов при исследовании НДС длительно эксплуатируемых конструкций является акустический метод. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования позволили установить связь между акустическими параметрами упругой волны и уровнем механических напряжений в конструкции [1-3].

Вместе с тем, опыт использования акустоупругости показывает, что существенное влияние на параметры упругой волны имеет также структура конструкционного материала. При длительной эксплуатации происходит деградация структуры и механических свойств сталей. В свою очередь, уровень деградации зависит от условий эксплуатации и режима нагружения конструкции. К основным повреждающим факторам следует отнести:

- нестационарный режим нагружения конструкции (малоцикловый - и многоцикловый режимы нагружения);
- коррозионные процессы в металле, при этом наличие механических напряжений существенно ускоряет процесс разрушения;
- эффект старения конструкционных сплавов, который выражается в изменении прочностных и деформационных характеристик длительно эксплуатируемых конструкций;
- изменение структуры металла, подвергнутого наводораживанию.

Параметры поврежденности материала и, как следствие, его прочностные параметры находятся в функциональной или корреляционной связи с акустическими характеристиками распространяющихся в материале ультразвуковых волн. Многопараметрический взаимосвязанный процесс влияния среды на закономерности распространения упругой волны в деградирующем материале приводит к тому, что процессы, определяющие характер этого влияния, становятся не очевидными. Реальная ситуация такова, что эффект изменения параметров зондирующих волн, например, скорости, вызван совокупностью факторов и априори, не зная о том, в каком состоянии находится металл, выбрать какую-либо одну модель для решения обратной задачи и построения диагностического принципа представляется некорректным.

В работах [4, 5] теоретически изучено влияние параметров, характеризующих поврежденность материала, на фазовую и групповую скорости акустической волны. Показано, что поврежденность материала вносит частотно-зависимое затухание и дисперсию фазовой скорости акустической волны. Получено кинетическое уравнение, анализ которого показывает, что нарастание поврежденности имеет экспоненциальный характер. Произведена оценка параметров, при которых накопление повреждений можно считать линейным. Полученные зависимости могут быть положены в основу методики оценки поврежденности материалов акустическим методом.

Экспериментальная часть изучения эволюции поврежденности металла состояла в исследовании закономерности изменения параметров акустической волны в зависимости от режима нагружения. Испытания проводились на одинаковых плоских образцах, изготовленных из стали марки Ст 10. Размеры образцов соответствовали размерам образца №21 ГОСТ1497-84. Металл образца имел следующие характеристики: предел текучести 290 МПа, предел прочности 412 МПа. В ходе испытаний каждый образец имел различную историю нагружения – уровень напряжений, временную выдержку между циклами нагружения и количество циклов мягкого режима нагружения. В ходе испытаний исследовалось изменение скорости распространения упругой волны в зависимости как от поврежденности металла, так и от величины действующих напряжений. Программа эксперимента состояла из нескольких этапов, при этом выполнены измерения акустических параметров упругой волны:

- 1) в неповрежденном материале (образец 1) в исходном состоянии и под напряжением 120 МПа и 240 МПа ;
- 2) в образце, предварительно подвергнутом циклическому нагружению с напряжением 0.6 от предела текучести при 300 циклов мягкого нагружения (образец 5);
- 3) в образце предварительно нагруженном до образования шейки (образец 4).

Нагружение образцов проводилось на универсальной испытательной машине фирмы Tinius Ollsen Ltd, модель H100KU, реализующей соответствующие режимы испытания.

Регистрация времени задержки зондирующего релеевского импульса частотой 5 МГц при изучении влияния поврежденности и уровня напряженного состояния, проводилась при фиксированной базе между излучателем и приемником с использованием приемного преобразователя П121-5,0-90S осциллографом TDS2022B, обеспечивающим частоту дискретизации при записи исследуемого сигнала 5 нс. Поскольку величина базы (расстояние между излучателем и приемником) фиксирована, то относительные изменения времени распространения волн Рэлея определяются только характеристиками материала между излучающим и приемным преобразователем.

Кроме этого, выполнено определение изменения информационной структуры зондирующего Релеевского импульса  $K_C$  [6], частотой 5 МГц с использованием приемного преобразователя П121-10,0-90S с частотой 10 МГц. Результаты изменения параметров акустической волны в зависимости от режима нагружения приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения параметров упругих волн Рэлея для образцов, подвергнутых различным видам нагружения.

	Задержка, нсек	$K_C$
<b>Образец 1</b>		
Без напряжения	6560	1.146±0.125
120 МПа	6569	1.089±0.103
240 МПа	6592	1.076±0.098
<b>Образец 5</b>		
Без напряжения	6590	0.653±0.182
<b>Образец 4</b>		
Без напряжения	6610	0.453±0.152

Сравнительный анализ результатов эксперимента показывает, что при упругом деформировании и относительно небольшом количестве числе циклов нагружения образцов снижение скорости волн (возрастание задержки), при имеющейся предельной чувствительности измерений, значимо не проявляется. Влияние поврежденности начинает сказываться ближе



к началу пластического деформирования. При этом снижение скорости (увеличение времени задержки) происходило пропорционально увеличивающейся нагрузке.

В отличие от изменения скорости распространения упругой волны изменение информационной структуры (акустической нелинейности) зондирующего импульса мало зависит от величины напряжения в области упругой деформации, а связано с изменением структуры материала, вызванного процессом накопления повреждений. Выполненные исследования позволяют проследить тенденции изменения параметров зондирующего импульса, а для численной оценки необходимо выполнить ряд повторных экспериментов с увеличением количества образцов. Тем не менее, полученные теоретические и экспериментальные соотношения и дальнейшие исследования позволят связать параметр поврежденности с реальным нарушением структуры материала в зависимости от известного эксплуатационного режима конструкции. На примере двух различных способов зондирования металла упругими волнами продемонстрированы пути повышения чувствительности ультразвукового метода и достоверности расшифровки показаний акустических приборов с учетом

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант №15-08-01836).

#### Список литературы

1. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. - М.: Наука, 2009. - 279 с. .
2. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. – Нижний Новгород: ТАЛАН, 2005. - 208 с.
3. Мишакин В.В., Митенков Ф.М., Данилова Н.Н., Клюшников В.А. Использование акустического метода для оценки поврежденности стали 08X18H10T при усталостном разрушении // Контроль. Диагностика. 2012. №7. С. 9-13.
4. Ерофеев В.И. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности акустическим методом / В.И.Ерофеев, Е.А.Никитина // Акустический журнал. -2010.-Т.56, №4.- С.554-557.
5. Ерофеев В.И. Дисперсия и затухание акустической волны, распространяющейся в поврежденном материале / В.И.Ерофеев, Е.А.Никитина, П.А.Хазов // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит.ун-т.–2014.–№ 4.С–.22-28.
6. Иляхинский А.В. Родюшкин В.М. Распределение Дирихле в задаче оценки состояния металла методом акустического зондирования// Дефектоскопия.2015.№7.с.13-17.



## КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ КАК СПОСОБ УПРАВЛЕНИЯ СВОЙСТВАМИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Д.Ю.Жиленко, О.Э.Кривоносова

119192, Москва, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
Институт механики.

Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: [jilenko@imec.msu.ru](mailto:jilenko@imec.msu.ru)

Во вращающихся сферических слоях периодические колебания скорости вращения одной из границ позволяет управлять ламинарно-турбулентным переходом и свойствами формирующейся в результате перехода турбулентности. Экспериментально и численно показано, что виды спектров азимутальной скорости турбулентных течений, а также вид структурной функции третьего порядка скорости зависят от частоты и амплитуды модуляции. Установлена возможность формирования трехмерной и двумерной турбулентности. Показана также возможность формирования турбулентности, спектры которой качественно соответствуют спектрам, полученным ранее при натурных измерениях в атмосфере Земли.

Ключевые слова: турбулентные течения в сферических слоях, модуляция скорости вращения

1. Проведены экспериментальные и численные исследования свойств турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости. Рассматривается модельное сферическое течение Куэтта, вызываемое вращением границ сферического слоя. Модуляция скорости вращения одной из границ ведет к вынужденной синхронизации течения. С увеличением амплитуды модуляции при ее фиксированной частоте происходит разрушение исходного течения, и при переходе от взаимной синхронизации к вынужденной формируется турбулентность. Цель работы – изучение зависимости вида турбулентных течений от амплитуды и частоты модуляции.

Эксперимент проводился на установке, представляющей собой две коаксиальные сферы – внутренняя с радиусом  $r_1 = 0.075$  м и внешняя с радиусом  $r_2 = 0.150$  м. Зазор между сферами заполнен высоковязким ( $\nu = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) силиконовым маслом. Скорость вращения периодически изменяется с погрешностью не более 0.5% по закону  $\Omega_i(t) = \Omega_{i0} (1 + A_i \sin(2\pi f_i t + \Phi_i))$ , где  $A_i$ ,  $f_i$  – амплитуда и частота модуляции, начальное значение фазы  $\Phi_i$  произвольно. Рассматривались частоты модуляции скорости вращения  $f_1 = 0.01 - 0.1$  Hz, и  $f_2 = 0.01 - 0.02$  Hz, не превышающие средних величин частот вращения сфер. Измерения скорости течения  $u_\varphi$  проводились лазерным анемометром. Точка измерения расположена около внешней сферы на расстоянии 0.078 м от плоскости экватора и 0.105 м от оси вращения. Течение описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot}U - \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right) - \nu \text{rotrot}U, \text{div}U = 0, \text{ где } U, p, \nu, \rho - \text{ скорость, давление, вязкость и плотность жидкости.}$$

Уравнения рассматриваются в сферической системе координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями, для которой условия непротекания и прилипания на границах имеют вид:  $u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin\theta$ ,  $u_r(r = r_k) = 0$ ,  $u_\theta(r = r_k) = 0$ ,  $k = 1, 2$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  – азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, индекс 1 соответствует внутренней сфере, индекс 2 – внешней. Используемый алгоритм численного решения основан на дискретизации уравнений Навье – Стокса по пространству и полу неявной схеме 3-го порядка точности при интегрировании по времени [1]. Дискретизация по пространству проводится на неравномерных по  $r$  и  $\theta$  сетках, со сгущением сетки вблизи границ и экватора, и общим количеством узлов  $5.76 \cdot 10^5$ .

2. Установлено, что при уменьшении частоты модуляции увеличиваются различия в характере поведения азимутальной и меридиональной составляющих кинетической энергии

течения. Первая составляющая остается периодической, тогда как у второй наблюдается смена периодического поведения на хаотическое. Подавление турбулентных пульсаций скорости в азимутальном направлении создает предпосылки для формирования квазидвумерной турбулентности, характеризующейся наличием обратного каскада передачи энергии, которому соответствуют положительные значения продольной структурной функции скорости третьего порядка ( $D_{LLL} > 0$ ). Показано, что вид спектров турбулентных пульсаций скорости зависит от того, скорость вращения какой из сфер подвергается модуляции, а также от ее амплитуды и частоты. При модуляции скорости внутренней сферы в эксперименте и расчете получены спектры, характерные для двумерной турбулентности: с постоянным наклоном  $-5/3$  и обратным каскадом на меньших частотах, а также наклоном  $-3$  и прямым каскадом ( $D_{LLL} < 0$ ) на больших частотах. При модуляции внешней сферы вид спектров неоднороден по пространству (рис. 1). Так, вблизи внутренней сферы наблюдаются спектры, характерные для трехмерной турбулентности: с постоянным наклоном  $-5/3$  и  $D_{LLL} < 0$ . Вблизи внешней сферы наблюдаются спектры, качественный вид которых соответствует результатам натуральных измерений в верхних слоях атмосферы: с постоянным наклоном  $-3$  на меньших частотах и наклоном  $-5/3$  на больших частотах. Для обоих участков  $D_{LLL} < 0$ , что также соответствует результатам обработки натуральных измерений.

Установлено, что во всех рассмотренных выше случаях уровень синхронизации между скоростью вращения границы и скоростью течения различен. Наименьшая синхронизация наблюдается там, где спектры подобны спектрам трехмерной турбулентности, наибольшая – там, где они подобны спектрам атмосферной турбулентности. Полученные результаты [2] позволяют предположить, что вид спектров турбулентности в верхних слоях атмосферы может объясняться вынужденной синхронизацией атмосферных течений внешним периодическим воздействием - сезонными вариациями притока солнечного тепла.

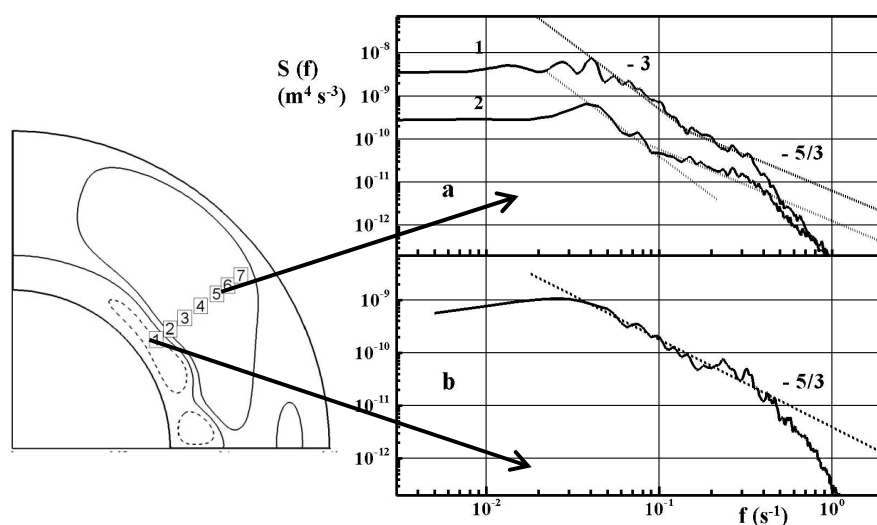


Рис. 1 Спектры азимутальной составляющей скорости при модуляции скорости вращения внешней сферы, 1а - эксперимент, б, 2а – расчет, а - наклон и взаимное расположение участков спектра соответствуют атмосферной турбулентности, б – трехмерная турбулентность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 14-08-00204 и 16-05-00004.

**Список литературы**

1. N. Nikitin. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys., 2006, т. 217, №2. P. 759-782.
2. Д.Ю. Жиленко, О.Э.Кривоносова. Квазидвумерная и трехмерная турбулентность во вращающихся сферических слоях жидкости // Письма в ЖЭТФ, 2015, т. 101, вып. 8. С. 583-588.

## ДИНАМИКА ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

М.В. Зайцев, В.С.Метрикин

Научно исследовательский институт механики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского»  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [v.s.metrikin@mail.ru](mailto:v.s.metrikin@mail.ru)

Исследуется динамика виброударного механизма с учетом трения наследственного типа, математическая модель которого представляет собой существенно-нелинейную систему с переменной структурой. Возможные режимы движения механизма отыскиваются численно – аналитическим способом, сводящимся к изучению свойств нестандартного одномерного точечного отображения отрезка в себя с плавающими границами, зависящими от вида характеристики коэффициента трения относительного покоя, представляющего собой монотонно возрастающую функция времени относительного покоя. Разработан программный продукт, позволивший отыскать в пространстве параметров системы области существования различных типов периодических и хаотических режимов движений механизма.

**Ключевые слова:** математическая модель, трение наследственного типа, устойчивость, метод точечных отображений, бифуркационная диаграмма.

### 1. Математическая модель

Рассматривается физическая модель (рис. 1),

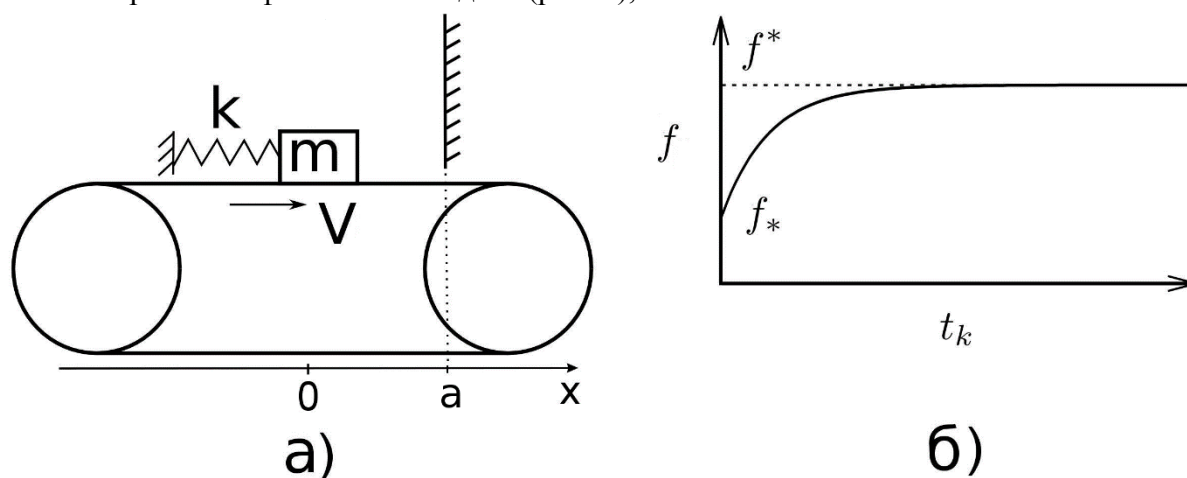


Рис.1

состоящая из тела массой  $m$ , закрепленного к неподвижной преграде пружиной с коэффициентом жесткости  $k$ , расположенная на шероховатой ленте, совершающей направленное движение постоянной величины. На расстоянии «а» расположена жесткая преграда, при соприкосновении с которой происходит ударное взаимодействие, характеризующийся коэффициентом восстановления скорости при ударе  $0 < R < 1$ . Принимая во внимание гипотезу Ишлинского А.Ю. и Крагельского Н.В. об описании движения тела по шероховатой поверхности [1], уравнения динамики рассматриваемой системы можно записать в виде

$$m\ddot{x} + kx = -f_* P \text{sign}(\dot{x} - V), \dot{x} \neq V, x < a \quad (1)$$

$$|cx| \leq f_{on}(t_k) P, \dot{x} = V, x < a \quad (2)$$

$$\dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, x = a, \dot{x}^- > 0 \quad (3)$$

Следует заметить, что при  $a \gg 1$  система (1)-(3) совпадает с уравнениями работы [2] (движения без ударов о преграду), а  $\dot{x}^-$  и  $\dot{x}^+$  – скорость массы  $m$  непосредственно до и после удара о неподвижную преграду. Вводя безразмерные время  $\tau = \omega t$ , переменную  $\xi = cx / f_* P$  и параметр  $\theta = V_0 \sqrt{c/m} / f_* P$ , систему (1)-(3) перепишем в виде

$$\ddot{\xi} + \xi + \text{sign}(\dot{\xi} - \theta) = 0, \dot{\xi} \neq \theta, \xi < b \quad (4)$$

$$|\xi| \leq 1 + \varepsilon_k, \dot{\xi} = \theta, \xi < b \quad (5)$$

$$\dot{\xi}^+ = -R\dot{\xi}^-, \xi = b, \dot{\xi}^- > 0 \quad (6)$$

где  $b = ca / f_* P$ ,  $\varepsilon(\tau) = (f_{on}(\tau) - f_*) / f_*$ ,  $\varepsilon_k = \varepsilon(\tau_k)$ .

## 2. Структура фазового пространства

Фазовое пространство системы (4)-(6) двумерное (рис. 2) в координатах  $\xi, \dot{\xi}$ ,

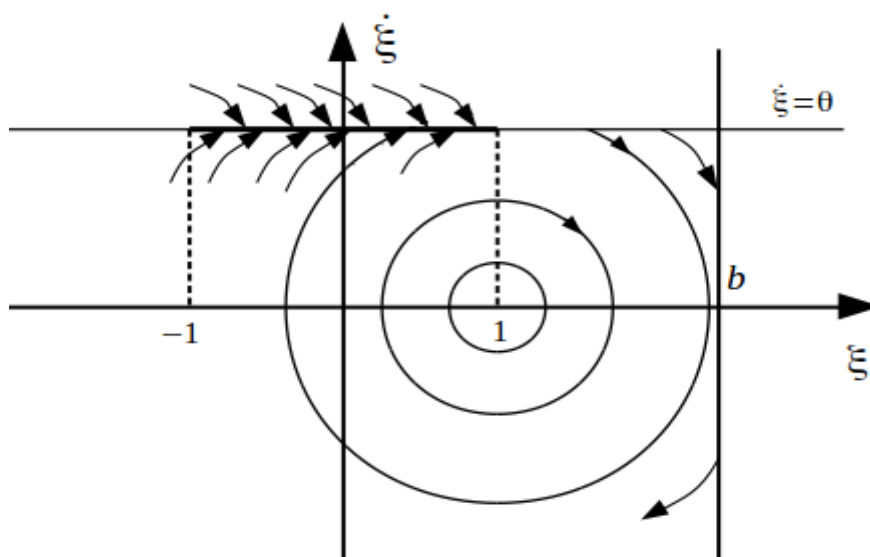


Рис.2

усечено по фазовой координате  $\xi \leq b$ . Прямой  $\dot{\xi} = \theta$  оно разбивается на три подпространства, в каждом из которых фазовые траектории подчиняются одному из уравнений систем (4)-(6). Очевидно, что фазовые траектории для  $\xi < b$  представляют собой окружности вида: в подпространстве  $\dot{\xi} < \theta$   $(\xi - 1)^2 + \dot{\xi}^2 = R_1^2$ , в подпространстве  $\dot{\xi} > \theta$   $(\xi + 1)^2 + \dot{\xi}^2 = R_2^2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  определяются начальными условиями. На прямой  $\dot{\xi} = \theta$  существует отрезок  $L$  ( $\dot{\xi} = \theta, -1 \leq \xi \leq 1$ ) стыка фазовых траекторий, попав на который изображающая точка совершает движение согласно уравнению  $\dot{\xi} = \theta$  до момента времени, определяемого из уравнения (если  $\xi < b$ )

$$\theta\tau + \xi_0 = 1 + \varepsilon(\tau) \quad (7)$$

где  $\xi_0$  – координата изображающей точки, принадлежащая отрезку  $L$ , а величина  $\tau$ , определяемая как корень (7), определяет длительность относительного покоя массы  $m$ . Надо отметить, что координата выхода изображающей точки с прямой  $\dot{\xi} = \theta$  в подпространство  $\dot{\xi} < \theta$  существенно зависит от формы коэффициента трения относительного покоя.

## 3. Функция последования

В связи с тем, что в системе (4)-(6) имеется потеря энергии (сила трения и ударное взаимодействие тела о неподвижную опору), то изображающая точка при условии

$\dot{\xi}^+ + (b-1)^2 > 0$  всегда со временем попадет на отрезок  $L$  скользящих движений и будет находиться на прямой  $\dot{\xi} = \theta$  время, определяемое уравнением (7). Поэтому динамику виброударной системы можно изучить с помощью точечного отображения полупрямой  $L$  ( $\xi > -1, \dot{\xi} = \theta$ ) в себя. Рассмотрим случай, когда выход ( $\xi = \xi_b$ ) изображающей точки с полупрямой  $L$  в подпространство  $\dot{\xi} < \theta$  удовлетворяет неравенству  $\xi_b < b_k$ , а качественный вид фазовых траекторий соответствует представленному на рис. 3.

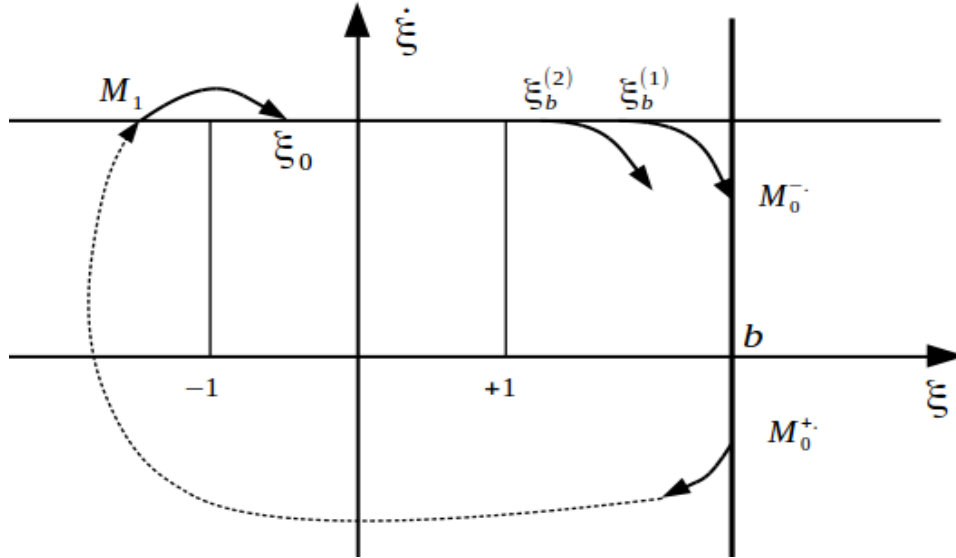


Рис.3

Пусть в начальный момент  $\tau = 0$   $\xi_b = 1 + \varepsilon_k, \dot{\xi}_b = \theta$ , тогда координата точки  $M_0^-$  будет следующей  $M_0^-(\xi = b^{(i)}, \dot{\xi}_2^- = \sqrt{\theta^2 + \varepsilon_k})$ . Координаты точки  $M_0^+$  согласно уравнению (6) будут  $(\xi = b, -R\dot{\xi}_2^-)$ . Предположим, что траектория, вышедшая из точки  $M_0^+$  совершает  $i$  оборотов вокруг отрезка скользящих движений, не пересекая отрезок  $L$ . Тогда, используя метод математической индукции, можно получить, что координаты последующих точек  $M_i \in (\dot{\xi} = \theta)$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \xi_i &= (-1)^i (1 - 2i + g(\tau_k)), g(\tau_k) > 2j, i = 1, 2, \dots \\ g(\tau_k) &= \sqrt{R^2 \varepsilon_k^2 + (1 - R^2)[(1 - b)^2 - \theta^2]} \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть  $\xi_i \in L$ . Тогда координата следующего выхода с полупрямой  $L$  изображающей точки  $\xi_b^{(2)}$  определяется из системы

$$\begin{aligned} \theta \tau_{k+1} + \xi_i &= 1 + \varepsilon_{k+1} \\ \xi_b^{(2)} &= \theta \tau_{k+1} + \xi_i \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда, с очевидностью, можем получить вид функции последования

$$\psi(\tau_{k+1}) = \varphi(\tau_k) \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \theta \tau - \varepsilon(\tau) \\ \varphi(\tau) &= 1 - (-1)^i [1 - 2i + g(\tau)], 2(i-1) < g(\tau) < 2i, i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Графики функций  $\psi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  представлены на рис. 4.

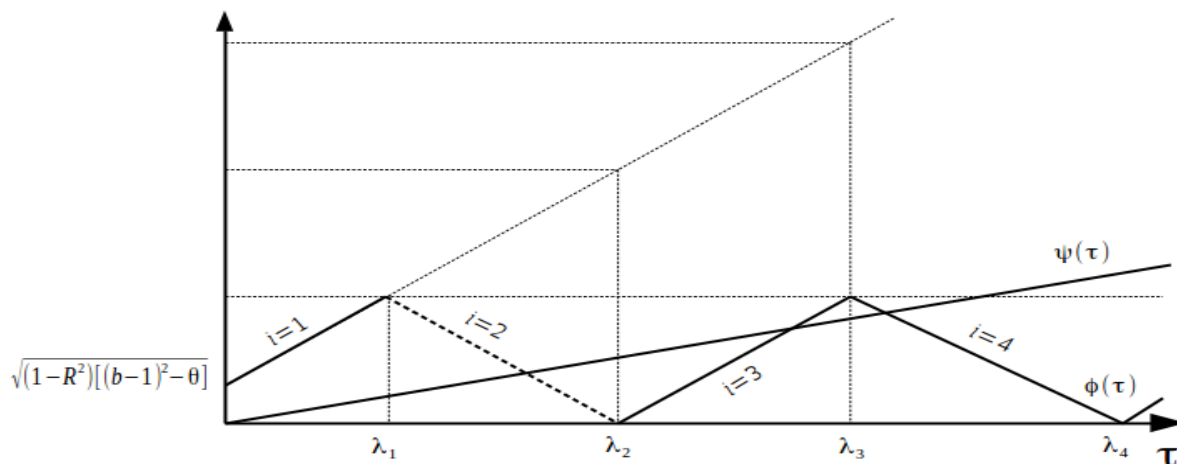


Рис.4

Из уравнений (11) следует:

1. Функции  $\psi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  являются непрерывными функциями, если функция  $\varepsilon(\tau)$  является также непрерывной.
2. Функция  $\varphi(\tau)$  – кусочно-непрерывная, ее производная претерпевает разрыв в точке  $\tau = \lambda_i (i = 1, 2, \dots)$ , определяемой из уравнения  $\varepsilon(\lambda_i) = 2i$ .
3. Функция  $\psi(\tau)$  имеет асимптоту  $y = \theta\tau - \varepsilon_*$  ( $\varepsilon_* = (f^* - f_*) / f_*$ ), а функция  $\varphi(\tau)$  – прямую  $\varepsilon_* = y$ .

Простые неподвижные точки, соответствующие периодическим режимам движения с  $i$  оборотами около отрезка скользящих движений, с одной длительной остановкой (с одним относительным покоем тела) и с одним ударом о неподвижную преграду находятся из уравнения

$$\psi(\tau^*) = \varphi(\tau^*) \quad (12)$$

Как следует из рис. 4 и свойств функций  $\psi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ , неподвижных точек в зависимости от параметров системы (решений уравнения (12)) может быть несколько. Причем с увеличением скорости ленты  $\theta$  их число уменьшается.

Устойчивость в малом, найденных из уравнения (12) неподвижных точек определяется из условия, которое можно записать в следующем виде

$$R^2 \varepsilon(\tau^*) \varepsilon'(\tau^*) < | \{ (\theta - \varepsilon'(\tau^*)) [\theta \tau^* - (1 + \varepsilon(\tau^*)) + (-1)^{i+1} (1 - 2i)] \} | \quad (13)$$

В докладе далее обсуждаются результаты численных экспериментов в зависимости от параметров системы. Бифуркационные диаграммы позволили изучить влияние параметров на характер режимов движения рассматриваемого механизма. Так на рис.5 (а,б,в,г) представлены фрагменты фазовых траекторий, отвечающих периодическим режимам тела с одним ударом за период при изменении (в данном случае увеличении) параметра «b» - начального расстояния тела от преграды.

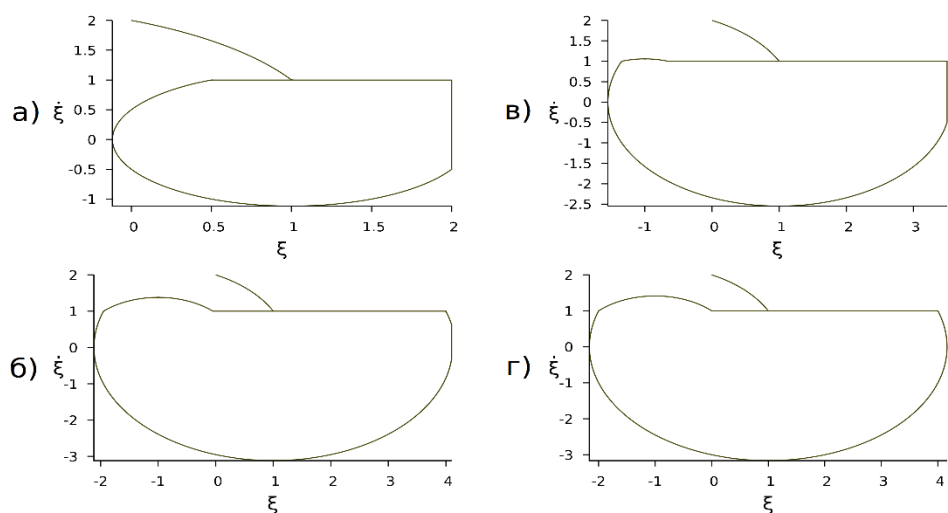


Рис.5

### Список литературы

1. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журн. техн. физики. 1944. Е.14. Вып.4/5. С.276–282
2. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа// ПММ, 1996. Т.60. Вып.5. С. 859-864.



УДК 534

## **РЕАКЦИЯ ТРУБОПРОВОДА НА ВНУТРЕННЕЕ УДАРНОЕ ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ**

**Д.М. Зарипов**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова

Рассмотрен нелинейный изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости с учетом влияния продольной силы на изгиб. Решение нелинейного уравнения задачи получено численным методом. Приводятся сравнение результатов в линейной и нелинейной постановках. Показано, что в нелинейном случае возникает колебательный режим движения трубопровода, в отличие от линейного случая, когда происходит экспоненциальный рост амплитуды прогиба трубопровода.

**Ключевые слова:** трубопровод, ударное давление, колебания.

### **Введение**

Исследованию взаимодействия труб и цилиндрических оболочек и содержащейся в них жидкости или газа посвящена обширная литература. В этих работах рассматриваются различные факторы, влияющие на поведение гидроупругих систем. Так, например, в работе Н.Е. Жуковского [1] учитывается сжимаемость жидкости. Показано, что в данной осесимметричной задаче несущественно влияние инерционных и моментных членов в уравнении движения трубы. В последующих работах учитывались различные уточняющие модель факторы, в том числе среднее течение жидкости и неосесимметричные деформации. Обзор литературы приведен, например, в [2].

Вопросы статики и динамики трубопроводов рассмотрены в [3] и в других изданиях. В [2-5] определено влияние внутреннего перепада давления в трубе на ее статический и динамический изгиб, экспериментальное изучение которого дано в [5]. Самовозбуждение периодических и хаотических колебаний при стоячих и бегущих волнах давления в транспортируемой жидкости рассмотрено в [7, 8] и последующих работах. Для изучения этих режимов колебаний нужно исходить из нелинейных соотношений. В частности, в работе [8] найдено критическое значение внутреннего давления  $p^*$ , при превышении которого происходит потеря устойчивости статического положения равновесия трубопровода и при периодическом возбуждении волн давления могут возникать сложные колебания, в том числе и хаотические.

### **Постановка задачи**

Рассматривается изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости. Предполагается, что трубопровод испытывает только упругие деформации, расстояние между опорами  $L$  на порядок больше радиуса трубопровода  $R$ , который на порядок больше толщины стенки  $h$ . Принимается также, что при изгибе поперечное сечение сохраняет круговую форму, остается плоским и перпендикулярным к изогнутой осевой линии. Влияние течения жидкости в трубопроводе не учитывается. Жидкость принимается идеальной и несжимаемой, поэтому давление в жидкости по длине трубопровода устанавливается мгновенно и состоит из постоянной и переменной частей  $p = p_0 + p(t)$  ( $t$  – время). Расчетная схема представлена на рис. 1.

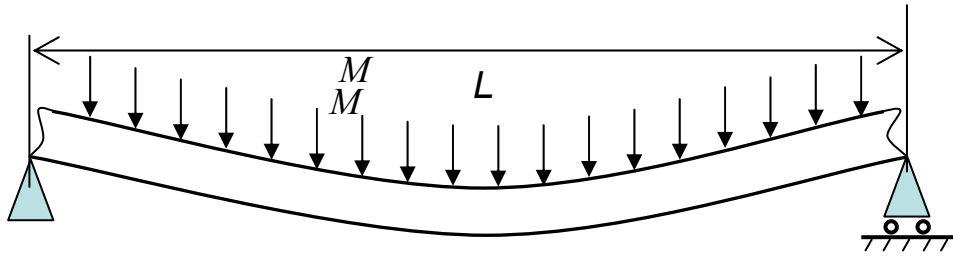


Рис. 1

Функция переменной части давления, принимается в виде [9]

$$p = 6.75 p_e \tau (1 - \tau)^2. \quad (1)$$

Здесь безразмерное время  $\tau = t/t_e$ , где  $t_e$  – длительность ударной волны. Максимальное значение  $p = p_e$  достигается при  $\tau = 1/3$ . Будет рассмотрен и случай, когда давление после достижения максимального значения остается постоянным ( $p_0 + p_e$ ). Функции давления представлены на рис. 2.

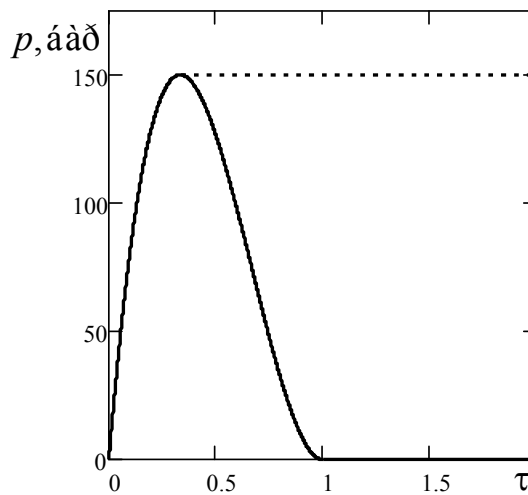


Рис. 2

Уравнение движения трубопровода относительно прогиба записывается в виде [1]

$$D \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} + \left[ \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) (p_0 + p) - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = Mg. \quad (2)$$

Здесь  $D = \pi ERh$  – изгибная жесткость трубопровода,  $M = \pi R(2hr + R\rho_f)$  – масса трубопровода единичной длины с внутренним радиусом  $R$ , толщиной стенки  $h$ , плотностями материала трубы  $\rho$  и жидкости  $\rho_f$ .

При записи  $D$  и  $M$  пренебрегаем величиной  $h/R$  по сравнению с единицей. Положительное направление гравитационного ускорения  $g$  и прогиба принято вниз,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Коэффициент линейно-упругой податливости опор  $\lambda = CL/(2\pi RhE)$ , где  $C$  – жесткость опоры в продольном направлении. Если жесткость опоры мала по сравнению с продольной жесткостью трубы, то  $\lambda \rightarrow 0$ , при большой жесткости опоры ( $\lambda \rightarrow \infty$ ).

Прогиб  $w_* = w_0(x) + w(x, t)$  состоит из статической части  $w_0(x)$ , вызываемой собственным весом  $gM$  и давлением  $p_0$ , и динамической части  $w(x, t)$ , вызываемой давлением  $p$ . Первый член уравнения (2) характеризует упругие силы, второй – инерционные силы. Изгиб трубы с внутренним давлением  $p_0 + p$  и кривизной  $\partial^2 w_*/\partial x^2$  приводит к образованию распределенной боковой силы [3]

$$\pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) (p_0 + p) \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2},$$

направленной в сторону выпуклости осевой линии. Здесь. При изгибе трубопровода возникает продольная сила в следствии удлинения его осевой линии, которая равна

$$N = \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx,$$

где  $EF$  – продольная жесткость трубопровода. Продольная сила  $N$  взята со знаком минус поскольку противодействует изгибу трубопровода. Настоящая работа отличается от исследования приведенного в [1] учетом этой продольной силы.

Граничные условия относительно функции прогиба записываются в виде:

$$w_* = \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L \quad (3)$$

### Решение нелинейного уравнения движения трубопровода

Приближенные выражения  $w_0$  и  $w$  для случая свободного опирания концов (3) принимаются в виде

$$w_0 = W_0 \sin \beta x, \quad w = W \sin \beta x \quad (\beta = \pi/L). \quad (4)$$

Статическая составляющая прогиба трубопровода под действием собственного веса и давления  $p_0$  описывается следующим уравнением (в линейном случае)

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) p_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = gM, \quad (5)$$

решение которого относительно амплитуды прогиба (4) имеет вид

$$W_0 = \frac{\pi g M}{2D\beta^4(1-\eta_0^2)}, \quad \eta_0^2 = \frac{p_0}{p_0^*}, \quad p_0^* = \frac{D\beta^2}{\left(1 - \frac{2\nu}{1+\lambda}\right)\pi R^2}. \quad (6)$$

Здесь  $p_0^*$  – критическое значение давления  $p_0$ , когда линейное решение возрастает неограниченно. Предполагается, что  $\eta_0^* < 1$ .

Нелинейное уравнение статики имеет следующий вид:

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \left[ \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) p_0 - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = gM \quad (7)$$

Решение этого уравнения сводится к решению следующего алгебраического уравнения:

$$W_0^3 + a_1 W_0 + a_0 = 0, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения

$$a_0 = -\frac{2gLM(1+\lambda)}{EF\beta^3}, \quad a_1 = \frac{4D(1+\lambda)}{EF} + 3 \left( \frac{gLM(1+\lambda)}{EF\beta^3} \right)^{2/3}.$$

Как известно, при  $Q = (a_1/3)^3 + (a_0/2)^2 > 0$  существует единственный действительный корень уравнения (8):

$$W_0^{(1)} = A + B, \quad A = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{Q}}.$$

При  $Q = 0$  имеются два действительных корня, один из которых совпадает с приведенным выше, а второй равен

$$W_0^{(2)} = -(A + B)/2.$$

В этом случае  $A = B = (-a_0/2)^{1/3}$  и потому

$$W_0^{(1)} = 2(-a_0/2)^{1/3}, \quad W_0^{(2)} = -W_0^{(1)}/2.$$

При  $Q < 0$  действительных корней три:

$$W_0^{(1)} = 2\sqrt[3]{-\frac{a_1}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad W_0^{(2,3)} = -2\sqrt[3]{-\frac{a_1}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),$$

где  $\cos \alpha = -\frac{a_0}{2\sqrt{-a_1/3}}$ .

Можно выписать формулу для критического значения  $p_0$ , при превышении которого появляются второе и третье статические положения равновесия:

$$p_{cr}^* = p_0^* \left[ 1 + \frac{3}{4D\beta^2} \left( \frac{EF(gLM)^2}{1+\lambda} \right)^{1/3} \right] \quad (9)$$

Примем следующие исходные данные:  $L = 4$  м,  $R = 0.05$  м,  $h = 0.002$  м,  $E = 2 \cdot 10^6$  бар =  $2 \cdot 10^{11}$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $p_0 = 30$  бар,  $p_e = 150$  бар,  $\rho = 7800$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $\rho_f = 1000$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $t_e = 0.001$  с,  $\nu = 0.3$ . Значение статического прогиба в линейном случае равно  $W_0 = 0.019$  ( $p^* = 137.1$  бар), а нелинейном случае  $W_0 = 0.021$  ( $p_{cr}^* = 236,4$  бар).

Решение исходной задачи строится для уравнения относительно амплитуды динамического прогиба, которое получается вычитанием из (2) уравнения (5), с учетом выражения для давления (1) и приближений Бубного-Галёркина (4). Получается уравнение относительно амплитуды динамического прогиба

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} + [\omega^2 - \mu^2\tau(1-\tau)^2 - \gamma^2W^2]W = \mu^2\tau(1-\tau)^2W_0, \quad (7)$$

$$\mu^2 = \frac{27 \left(1 - \frac{2\nu}{1+\lambda}\right) \pi R^2 p_e \beta^2 t_e^2}{4M}, \quad \omega^2 = \Omega^2(1-\eta_0^2), \quad \Omega^2 = \frac{D\beta^4 t_e^2}{M}, \quad \gamma^2 = \frac{\pi EF}{4L(1+\lambda)M}$$

где  $\Omega$  и  $\omega$  – собственные частоты колебаний трубопровода при нулевом перепаде давления и внутреннем перепаде  $p_0$ , умноженные на  $t_e$ .

Для решения уравнения (7) используется методика, подробно описанная в работе [8].

### Обсуждение результатов моделирования

Для тестирования программы использовались аналитические решения для линейного уравнения полученные в работе [9]. Как видно из рисунков (3, 4 и 5) численное интегрирование хорошо согласуется с аналитическими решениями, как для функции ударного давления по формуле (1), так и для случая установления в системе постоянного внутреннего давления  $p_0 + p_e$  после достижения максимального значения ударного давления ( $\tau \geq 1/3$ , рис. 2 штриховая линия). В первом случае в системе устанавливается колебательный режим (рис. 3, 4). Во втором случае вместо осциллирующего решения имеется экспоненциальный рост динамического прогиба (в рамках линейной теории изгиба, рис. 5).

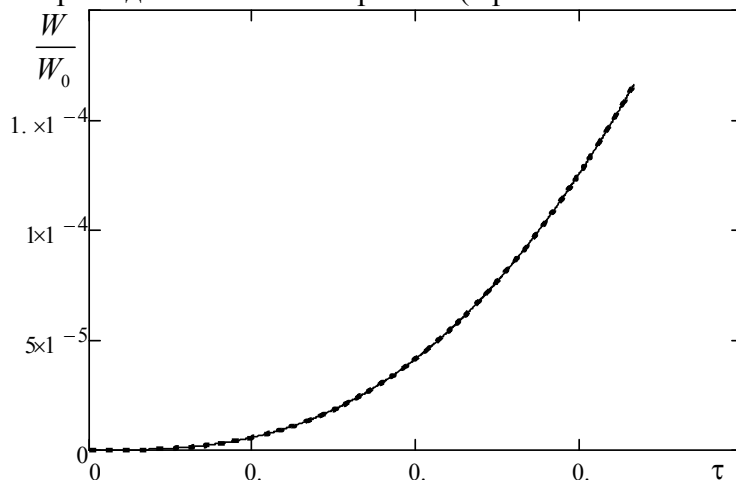


Рис. 3

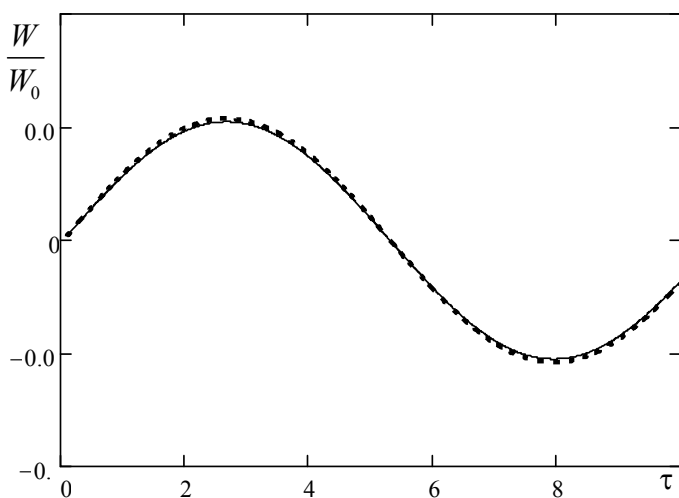


Рис. 4

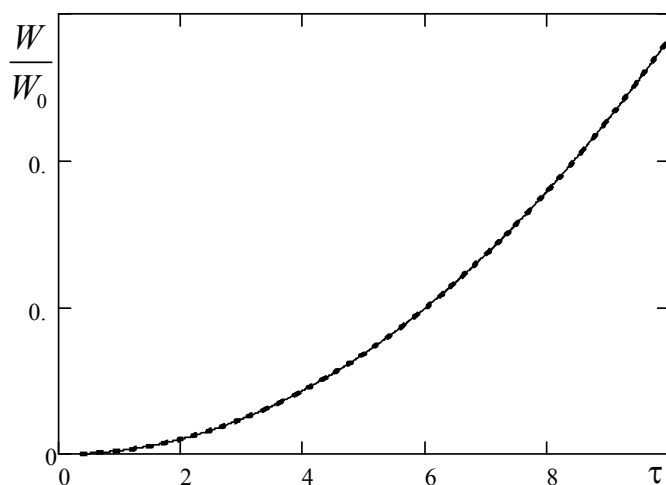


Рис. 5

На рис. 6 дана зависимость динамического прогиба в рамках линейной теории изгиба (штриховая линия) и с учетом продольной силы (сплошная кривая) для значений коэффициента линейно-упругой податливости опор равных:  $\lambda = 0$  – неподвижные опоры и  $\lambda = 1$  ( $\nu=0.3$ ). Как видно из рисунка в случае учета нелинейной продольной силы возникает колебательный режим, т.е. решение ограничено, и не происходит экспоненциального роста динамического прогиба. Для  $\lambda = 1$  амплитуда колебаний возрастает при этом частота падает.

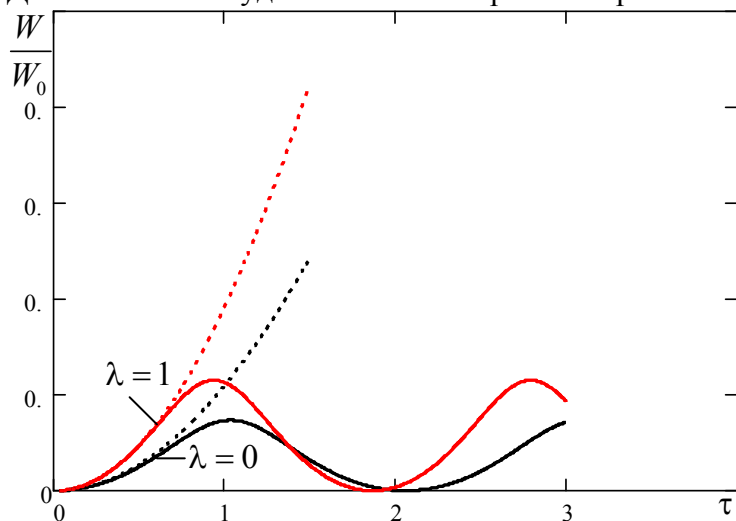


Рис. 6

Таким образом, в статье произведен сравнительный анализ динамической реакции и напряженно-деформированного состояния трубопровода при действии внутренней ударной волны в линейной [10] и нелинейной постановках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00740).

### Список литературы

1. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – М.-Л.: Гостехиздат. 1949. 107 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 184 с.
3. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение. 1982. 280 с.
4. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. // J. Fluids and Structures. – 1993. – Vol. 8. – P. 139-156
5. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. - Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1998. - 208 p.
6. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. – 1995. – Vol. 62, № 3. – P. 595-600.
7. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 1997. – №1. – С. 181-192.
8. Ильгамов М.А., Лукманов Р.Л., Зарипов Д.М. Механизм возбуждения гидроупругих колебаний трубопровода. //Сб. трудов Института механики УНЦ РАН. 2003. С. 21-52.
9. Павлов А.А., Ильгамов М.А. // Труды семинара по теории оболочек. КФТИ АН СССР. – 1974. Вып. IV. – С. 181-195.
10. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление //ПМНМ, 2016.

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К УДАРНЫМ ВОЛНАМ**

**Р.Г.Зарипов, Л.А.Ткаченко, Л.Р.Шайдуллин**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук  
420111 Казань, ул. Лобачевского, 2/31, e-mail: luda\_tkachenko@inbox.ru

Экспериментально изучены нелинейные колебания газа в режиме перехода к ударным волнам в акустическом резонаторе, на одном конце которого расположен поршень, колеблющийся по синусоидальному закону, а второй конец закрыт. Рассмотрено влияние амплитуды и частоты возбуждения на размах колебаний давления газа при переходе к ударным волнам.

*Ключевые слова:* Нелинейные колебания, акустический резонатор, эпюры давления.

Трубопроводные системы конечной длины с покоящейся или движущейся рабочей средой часто встречаются в различных установках и аппаратах энергомашиностроения. Исследование волновой динамики в таких средах вблизи резонансных частот представляет значительный интерес. Анализ работ по колебаниям однородного газа в трубах посвящены обзоры [1, 2]. Резонансные режимы колебаний сопровождаются возникновением периодических ударных волн с перепадами давления до 0.8 атм, вторичными течениями, акустотермическими эффектами и т.п.

Целью настоящей работы является экспериментальное выявление особенностей нелинейных колебаний однородного газа в акустическом резонаторе при переходе к ударным волнам при малых значениях амплитуд возбуждения.

Экспериментальные исследования проводились на установке, состоящей из виброгенератора марки TIRA vib S 5220/LS фирмы Tira с усилителем мощности, пьезоэлектрического ИЕРЕ акселерометра марки 4513 фирмы Bruel & Kjaer, контроллера типа VR9500 фирмы Vibration Research Corporation, датчика давления диаметром 5 мм модели 8530C-15 фирмы Bruel & Kjaer, трехканального мостового усилителя напряжения ENDEVCO модель 136 фирмы Bruel & Kjaer, осциллографа модель DSO 3062A фирмы Agilent Technologies, акустического резонатора в виде закрытой трубы и компьютера.

На стол виброгенератора вворачивался стержень, который закреплялся плоский поршень диаметром 0.1 м. Поршень перемещался в цилиндре по гармоническому закону с заданной частотой  $\nu$  в Гц. Для того чтобы предотвратить передачу вибрации вибростенда об пол, он располагался на пневматических амортизирующих подушках. Четыре стяжки закреплялись на металлические уголки, которые привинчивались к основанию вибростенда. На этих стяжках находилась станина со специальной нижней насадкой и цилиндром. В отверстие насадки с помощью эпоксидной смолы клеивалась стеклянная труба длиной 0.916 м. Она удерживалась в вертикальном положении при помощи стяжек, установленных на нижней и верхней насадках. Труба также клеивалась к верхней насадке эпоксидной смолой. На верхнюю насадку при помощи болтов закреплялась герметично крышка высотой 22 мм.

Управление и контроль вибростендом осуществлялось через компьютер посредством акселерометра и контроллера через специальное программное обеспечение. В отверстие нижней насадки закручивался датчик давления, сигнал с которого через усилитель подавался на осциллограф, а затем через RS-232 интерфейс на компьютер.

Эксперименты проводились в следующей последовательности. Запускались синусоидальные испытания. После того как частота и размах колебаний поршня достигали заданного значения, наблюдали выходной сигнал с датчика давления на виртуальной панели и записывали его на компьютере. После пошагового просмотра полученных осциллограмм, выбирали и сохраняли необходимую запись колебаний давления среды и определяли соответствующие значения напряжения  $\Delta U$  в мВ с точностью до 0.3 мВ. Те же действия выполняли для всех

исследуемых частот и амплитуд колебаний поршня. Далее полученные значения напряжения в мВ переводили в значения размаха колебаний давления в барах, используя переводной коэффициент  $\Delta P$  (бар) = 0.00025 (бар/мВ) ×  $\Delta U$  (мВ).

Рассмотрим результаты эксперимента. На рис. 1 представлены осциллограммы с записями колебаний давления газа во времени при различных частотах возбуждения на амплитуде хождения поршня  $l = 0.375$  мм при переходе через резонанс. Вдали от резонанса ( $\nu = 176$  Гц) газ колеблется по гармоническому закону. Далее при увеличении частоты ( $\nu = 178$  Гц) в области разряжения формируется излом и амплитуда увеличивается. Наблюдается увеличение крутизны переднего фронта волны давления. На резонансе ( $\nu = 182$  Гц) амплитуда становится максимальной и передний фронт волны близок к ударному. За резонансом ( $\nu = 186$  Гц) амплитуда уменьшается, наблюдается излом на гребне волны. Вдали от резонанса ( $\nu = 188$  Гц) амплитуда колебаний газа продолжают уменьшаться и колебания газа снова носят гармонический характер.

$\nu =$             172 Гц    178 Гц    182 Гц    186 Гц    190 Гц

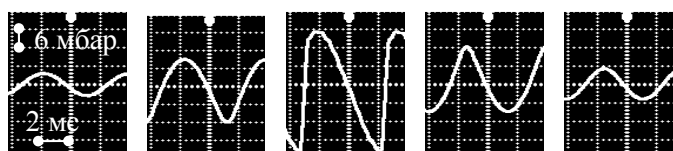


Рис. 1. Осциллограммы с записями колебаний давления во времени.

На рис. 2 приведена амплитудно-частотная характеристика в безразмерном виде с  $\Delta \bar{p} = (\Delta p / p_0) \times 10^2$  ( $p_0$  – атмосферное давление,  $\Delta p = p_2 - p_1$ ,  $p_2$  и  $p_1$  есть максимальное и минимальное значение давления за период колебаний поршня) и  $\bar{\nu} = \nu / \nu_1$  ( $\nu_1$  – первая собственная частота газа с учетом поглощения на стенках трубы). Значение размаха колебаний давления газа на резонансной частоте в 4 раза больше, чем вдали от резонанса. Частота  $\nu_1$

вычисляется по формуле [3]  $\nu_1 = \frac{c_0}{2L(1+\beta')}$ , где  $c_0$  – скорость звука,  $L$  – длина трубы,

$\omega = 2\pi\nu$  – циклическая частота,  $\beta' = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\text{Pr}}}\right) \frac{\delta}{2R}$  есть коэффициент диссипации,

$\delta = \sqrt{2\mu/\omega\rho}$ ,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\rho$  – плотность,  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $\kappa$  – показатель адиабаты. Точечной линией отмечено отношение частоты к первой собственной частоте, рассчитанной с учетом поглощения  $\nu_1$ , штриховой – отношение частоты к частоте, рассчитанной без учета поглощения  $\nu_{10} = c_0/2L$  [1]. Резонансная частота, рассчитанная с учетом поглощения, равна 182 Гц и совпадает с наблюдаемой резонансной частотой и имеет несколько меньшее значение, чем рассчитанная по линейной теории акустики 182.8 Гц. Это связано с влиянием вязкости за счет пристеночных потерь при колебаниях газа.

На рис. 3 приведена зависимость безразмерного размаха колебаний давления газа от параметра  $\varepsilon = (l/L) \times 10^4$  для наблюдаемой резонансной частоты. С ростом параметра  $\varepsilon$  размах колебаний давления газа увеличивается. Это связано с тем, что в закрытой трубе размах колебаний давления газа пропорционален величине  $\varepsilon^n$  ( $n > 0$ ) [1], характеризующей интенсивность колебаний. В экспериментах с образованием ударных волн показатель степени в резонансе имеет значение  $n = 0.5$ . Аппроксимация полученных экспериментальных данных также дает степенную зависимость  $\Delta \bar{p} = a\varepsilon^n$ . Здесь  $a = 0.82$ ,  $n = 0.5$  для наблюдаемой первой собственной частоты. Таким образом, в настоящих экспериментах при малых амплитудах возбуж-



дения, когда пристеночные потери велики по сравнению с потерями на сжатие газа в нелинейных волнах, имеет место отличие в значениях  $n$  в резонансе с колебаниями, при которых формируются периодические ударные волны.

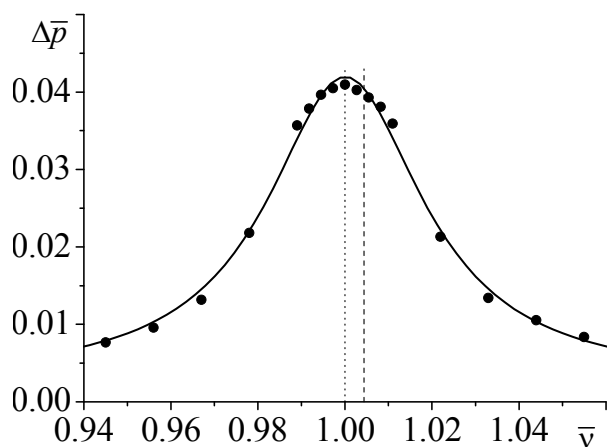


Рис. 2. Зависимость размаха колебаний давления газа от частоты возбуждения на амплитуде хождения поршня  $l = 0.375$  мм. Точки – эксперимент, сплошная линия – аппроксимация Лоренца.

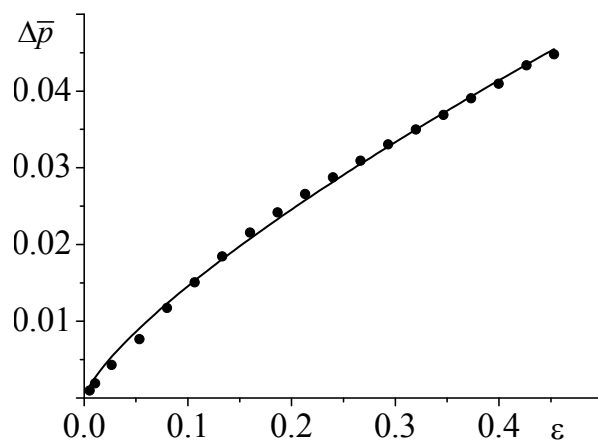


Рис. 3. Зависимость размаха колебаний давления газа от параметра  $\varepsilon$  на наблюдаемой первой собственной частоте. Точки – эксперимента, линия – степенная аппроксимация.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

### Список литературы

1. Ilgamov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B. Nonlinear oscillations of a gas in a tube // *Appl. Mech. Rev.* 1996. V.49. №3. P.137-154.
2. Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р. Нелинейные колебания газа в трубах // Тематический сборник «Актуальные проблемы механики сплошной среды К 10-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, 2001. С. 19-35.
3. Галиуллин Р.Г., Ткаченко Л.А. Нелинейные колебания газа в трубах: Учебное пособие по курсу «Нелинейные колебания газа в трубах». Казань: КГУ, 2007. 116 с.

## **К ЗАДАЧЕ О БРАХИСТОХРОНЕ С ПОСТОЯННОЙ РАЗГОНЯЮЩЕЙ СИЛОЙ**

**А.В.Зароднюк, А.С.Логинова, О.Ю.Черкасов**

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
механико-математический факультет.

119991 Москва, Ленинские Горы, .1, e-mail: oyuche@yandex.ru

Рассмотрена задача о максимизации горизонтальной координаты точки, движущейся в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, вязкого трения, пропорционального  $n$ -ой степени скорости и постоянной разгоняющей силы, и взаимосвязанная с ней задача о брахистохроне. Задача оптимального управления сведена к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Проведен качественный анализ траекторий этой системы, установлены их характерные свойства, позволяющие уточнить результаты, полученные в других работах. Обсуждена оптимальность найденных экстремалей.

*Ключевые слова:* вязкое сопротивление, оптимальное управление, фазовый портрет

### **Введение**

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести и в однородной сопротивляющейся среде под действием разгоняющей силы. Задача состоит в определении формы траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при движении её из заданного начального состояния за фиксированный промежуток времени. Эта задача связана с модифицированной задачей о брахистохроне – задаче выбора формы траектории, время движения по которой под действием рассматриваемых сил от начальной заданной точки в вертикальной плоскости до фиксированной вертикальной прямой будет минимальным.

Различные обобщения задачи о брахистохроне, кроме методического интереса, привлекательны возможными приложениями. Примерами могут служить задача оптимизации траекторий летательных аппаратов, для которых можно управлять подъемной силой без изменения силы сопротивления, задача оптимального догона прямолинейно движущегося самолёта [1] и др. Решение задачи о брахистохроне также имеет практическое применение для проектирования оптимального профиля при условии минимизации затрат энергии на преодоление сил сопротивления в процессе перемещения колонны бурильных и обсадных труб в скважины с заданными начальной и конечной точками [2], при определении формы лотков для различных сыпучих материалов, которая оптимизирует время движения или скорость выхода, при построении профиля железнодорожных сортировочных горок, выборе формы эвакуационных трапов, аттракционов типа «американские горки» и т.д.

Обобщения классической задачи о брахистохроне с учётом разгоняющей силы рассматривались в работах [3-8]. В работе [3] приведены результаты моделирования для случая разгоняющей силы, пропорциональной первой степени скорости, а в работе [4] такая же задача численно решалась при помощи генетического алгоритма. В работе [5] случай разгоняющей силы, пропорциональной первой степени скорости, исследован методом фазовой плоскости, установлены качественные свойства траекторий, подтверждающие численные решения работ [3,4]. В работе [6] задача изучалась при наличии постоянной разгоняющей силы и силы линейного вязкого трения. В статье [7] исследован случай квазипостоянной разгоняющей силы. При этом рассматривался класс оптимальных траекторий, для которых время прохождения каждой её внутренней точки минимально для этой точки. В статье [8] аналитически исследованы свойства траекторий с квазипостоянной разгоняющей силой без трения и приведены результаты моделирования при наличии трения.

Целью предлагаемой статьи является качественный анализ задачи о брахистохроне при наличии вязкого сопротивления, пропорционального  $n$ -й степени скорости и постоянной

разгоняющей силы, позволяющий установить характерные свойства траекторий без численного моделирования.

### 1. Постановка задачи

Модифицированная постановка задачи о брахистохроне формулируется следующим образом: среди кривых, лежащих в вертикальной плоскости и соединяющих заданную начальную точку с фиксированной вертикальной прямой найти ту, движение по которой из начальной точки до указанной прямой будет минимальным. Для удобства исследования в данной работе рассматривается задача максимизации горизонтальной дальности за фиксированное время. Предполагается, что зависимость максимальной дальности от времени носит монотонный характер. Тогда задача о брахистохроне и задача максимизации дальности за заданное время взаимосвязаны в следующем смысле. Примем полученное в результате решения задачи с фиксированным временем максимальное значение дальности в качестве заданного конечного условия для задачи быстрогодействия. Тогда минимальное время, полученное в результате решения последней, совпадает с тем временем, которое было фиксировано при решении задачи максимизации дальности. Траектории также совпадают.

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = p - v^n - \sin \theta. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  – соответственно горизонтальная и вертикальная координаты точки,  $v$  – скорость,  $n, n > 0$  – показатель степени,  $p, p > 0$  – постоянная разгоняющая сила,  $\theta$  – угол наклона траектории к горизонту, рассматриваемый в качестве управления.

Начальные и конечные условия для системы (1) имеют вид

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, \quad (2)$$

$x(T), y(T), v(T)$  – свободны,  $x_0, y_0, v_0, T$  – заданные параметры.

Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T) \rightarrow \min_{\theta} \quad (3)$$

на траекториях динамической системы (1) с краевыми условиями (2) при помощи управления  $\theta, T$  – заданный момент окончания процесса. Предполагается, что ограничения на управление отсутствуют. Иначе говоря, нужно максимизировать горизонтальную координату точки в заданный момент  $T$  окончания процесса. Поскольку условия на конечное значение  $y(T)$  отсутствует, решение задачи (1)–(3) дает достижимую верхнюю оценку максимальной возможной дальности. Соответственно решение задачи быстрогодействия дает нижнюю оценку времени перевода материальной точки из заданных начальных условий в точку с заданными финальными координатами.

### 2. Условия оптимальности

Для исследования поставленной задачи применим принцип максимума Понтрягина [9]. Функция Понтрягина для задачи (1)–(3) запишется в форме

$$H = \psi_x v \cos \theta + \psi_y v \sin \theta + \psi_v (p - v^n - \sin \theta) = C, \quad (4)$$

где  $C$  – неизвестная константа, а уравнения относительно сопряженных переменных имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = 0, \\ \dot{\psi}_y = 0, \\ \dot{\psi}_v = nv^{n-1}\psi_v - \psi_x \cos \theta - \psi_y \sin \theta. \end{cases} \quad (5)$$

Из условий трансверсальности определяются конечные значения для сопряженных переменных

$$\psi_x(T) = 1, \psi_y(T) = 0, \psi_v(T) = 0, \psi_w(T) = 0, \quad (6)$$

Из соотношений (5), (6) следует  $\psi_x(t) = 1, \psi_y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ .

Максимизация функции  $H$  по управлению  $\theta$  приводит к соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow -\psi_v \cos \theta - v \sin \theta = 0, \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} < 0 \Leftrightarrow \psi_v \sin \theta - v \cos \theta < 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0. \quad (8)$$

Дифференцируя соотношение (7) по времени в силу систем (1), (5), получаем уравнение для управляющей переменной  $\theta$ :

$$\dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + ((n+1)v^n - p) \sin \theta).$$

Соответствующее граничное условие вытекает из условий (6), (7):  $\theta(T) = 0$ .

Итак, задача оптимального управления (1)-(3) сведена к следующей краевой задаче: найти решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = p - v^n - \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + ((n+1)v^n - p) \sin \theta), \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$v(0) = v_0, \theta(T) = 0. \quad (10)$$

После того, как решения  $v(t), \theta(t)$  краевой задачи (9), (10) найдены, траектория в плоскости  $(x, y)$  определяется из первых двух уравнений системы (1) при помощи квадратур.

### 3. Анализ краевой задачи

Стационарные решения системы (9) находятся из условий  $v(t) = v^*, \theta(t) = \theta^*$ , где  $v^*, \theta^*$  - константы. Подставляя эти значения в систему (9), получим следующие состояния равновесия:

$$(v_{11}^*)^2 = \frac{p(n+2) - \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)}}{2(n+1)}, \sin \theta_{11}^* = \frac{pn + \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)}}{2(n+1)},$$

$$(v_{12}^*)^2 = \frac{p(n+2) + \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)}}{2(n+1)}, \sin \theta_{12}^* = \frac{pn - \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)}}{2(n+1)},$$

$$v_{21}^* = \sqrt[n]{p+1}, \theta_{21}^* = -\frac{\pi}{2}, v_{22}^* = \sqrt[n]{p-1}, \theta_{22}^* = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что условия  $v_{11}^* > 0$  и  $\sin \theta_{11}^* \leq 1$  не могут быть выполнены при одних и тех же значениях  $p$ . Следовательно, при  $p \in [0, 1]$  система (9) имеет два стационарных решения  $(v_{12}^*, \theta_{12}^*)$  и  $(v_{21}^*, \theta_{21}^*)$ , а при  $p > 1$  к ним прибавляется ещё решение  $(v_{22}^*, \theta_{22}^*)$ . Решениям  $(v_{21}^*, \theta_{21}^*)$  и  $(v_{22}^*, \theta_{22}^*)$  в плоскости  $(x, y)$  отвечает движение вертикально вниз и вертикально вверх соответственно, а решению  $(v_{12}^*, \theta_{12}^*)$  - прямолинейное наклонное движение.

Проведя линеаризацию системы (9) в окрестности найденных стационарных решений и решив соответствующие характеристические уравнения, получим, что для решения  $(v_{21}^*, \theta_{21}^*)$   $\lambda_{1,2} = -n(p-1)^{1-\frac{1}{n}}$ , а для  $(v_{22}^*, \theta_{22}^*)$   $\lambda_{1,2} = -n(p+1)^{1-\frac{1}{n}}$ . Следовательно, оба решения являются особыми точками типа устойчивого дикритического узла. Для решения  $(v_{12}^*, \theta_{12}^*)$  характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^2 = c$ , где

$$c = \frac{n^2 \left( p(n+2) + \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)} \right)^{1-2/n} \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)} \left( 2(n+1) + p \left( \sqrt{p^2 n^2 + 4(n+1)} - pn \right) \right)}{4(n+1)^3 (2(n+1))^{-2/n}}.$$

Устанавливается, что при положительных значениях  $p$  и  $n$  величина  $c$  также положительна, следовательно, решению  $(v_{12}^*, \theta_{12}^*)$  соответствует особая точка типа седла.

Фазовый портрет системы (9) для случая сопротивления, пропорционального второй степени скорости ( $n = 2$ ), представлен на рис.1, где изображена развёртка фазового цилиндра на часть плоскости, соответствующую неравенству  $|\theta| \leq \pi/2$ .

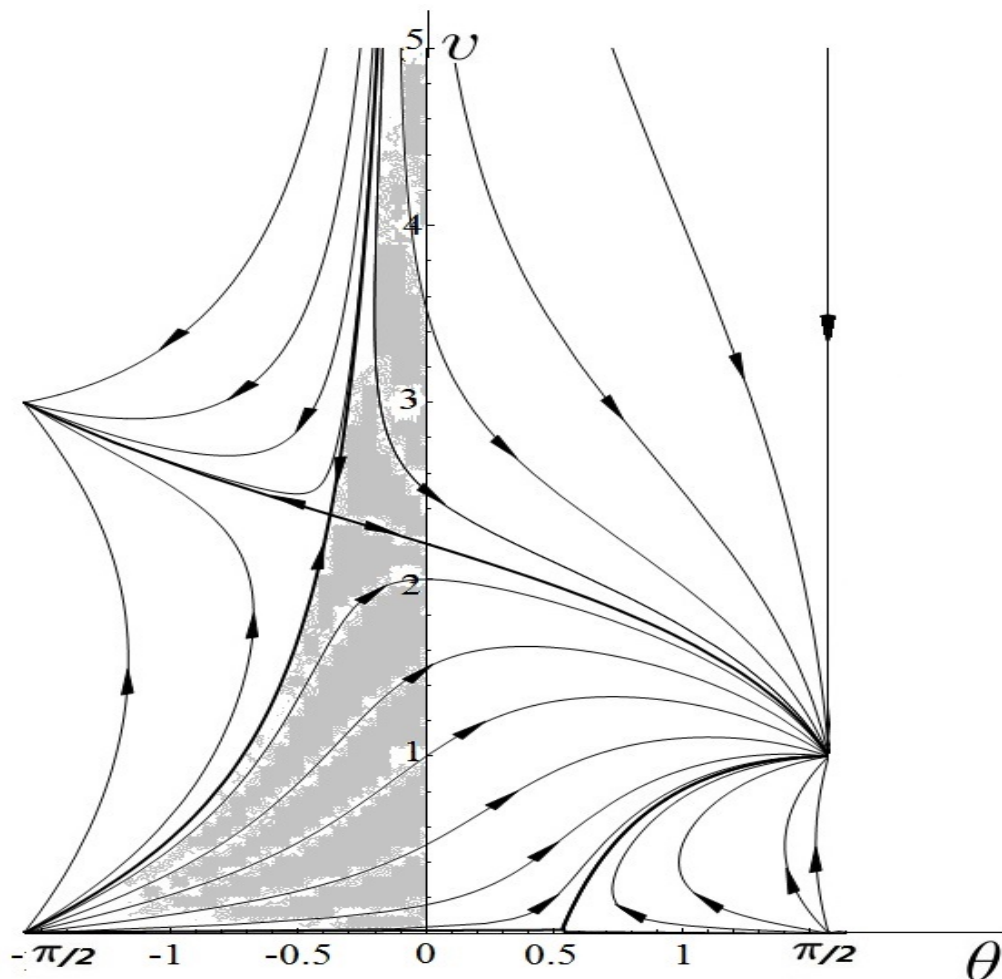


Рис.1. Фазовые траектории в плоскости  $(\theta, v)$  для  $p = 2, v(0) = 0,5$ .

Фазовый портрет позволяет проанализировать качественные свойства решений краевой задачи (9), (10). Видно, что при фиксированном значении  $v(0)$  начальное значение  $\theta(0)$  должно выбираться между сепаратрисами, входящими в точку седла, и осью ординат, с тем, чтобы к моменту окончания процесса траектория оказалась на прямой  $\theta(T) = 0$ . Множество возможных начальных условий отмечено на рис.1 затемнённой областью. При достаточно больших значениях времени  $T$  оптимальная траектория состоит из трех участков: первый из

них соответствует быстрому движению из начальной точки в окрестность седловой точки, второй – медленному «дрейфу» в окрестности седловой точки, а третий – быстрому выходу из окрестности седла в конечную точку на оси ординат. Описанному «дрейфу» фазовой траектории в окрестности седловой точки в плоскости  $(x, y)$  соответствует участок, близкий к прямолинейному, что соответствует результатам моделирования, приведённым в [6]. Отметим, что в результатах расчетов, приведённых в работе [8], где рассматривался случай квазипостоянной разгоняющей силы, описанная особенность траектории не проявилась из-за специфического выбора краевых условий. В работе [10] установлено, что при достаточно больших значениях  $T$  наличие почти прямолинейного участка движения в вертикальной плоскости, соответствующее седловой точке, является характерным свойством задач о брахистохроне при наличии вязкого сопротивления.

Из соотношений (4), (7) получаем первый интеграл системы (9):

$$v(1 + (v^n - p) \sin \theta) = C \cos \theta.$$

Каждой траектории системы (9) соответствует своё значение константы  $C$ , которое легко определяется. Например, в точках пересечения траектории с осью ординат выполнено  $C = v$ . Иными словами, траектория, удовлетворяющая принципу максимума, необходимому условию оптимальности, единственна. Поэтому экстремаль является оптимальной траекторией, разумеется, в предположении, что последняя существует.

#### 4. Численное моделирование

Решение краевой задачи осуществлялось методом стрельбы. После нахождения этого решения  $v(t), \theta(t)$  траектории в плоскости  $(x, y)$  определялись интегрированием первых двух уравнений системы (1). Результаты моделирования представлены на рис.2. для случая. Отчетливо видно, что брахистохрона в плоскости  $(x, y)$  включает в себя квази-прямолинейный участок, соответствующий медленному движению точки в плоскости  $(v, \theta)$  в окрестности седла.

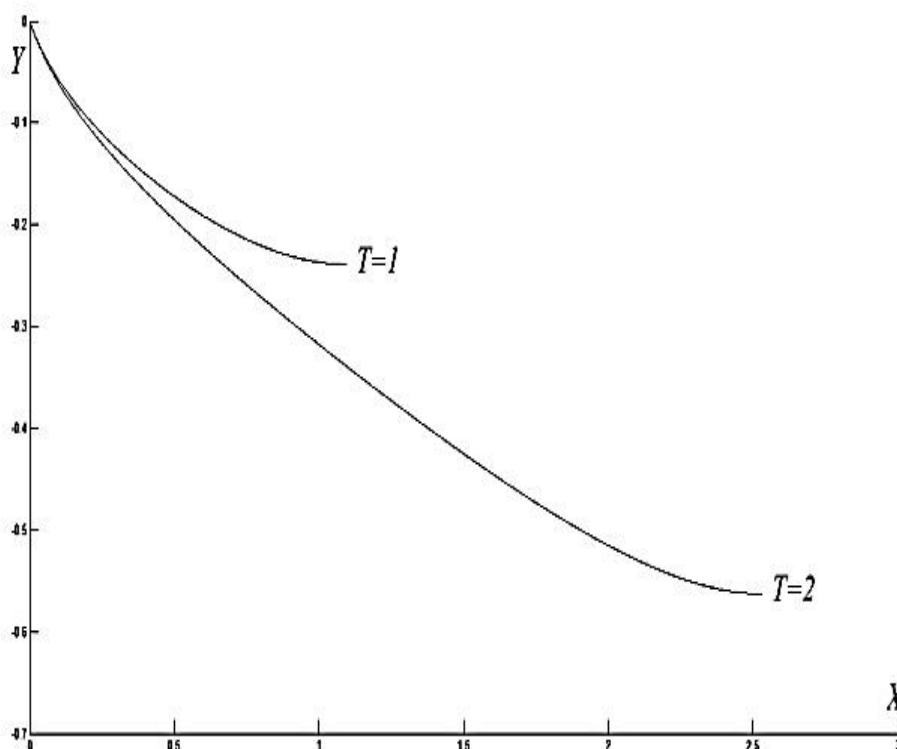


Рис.2 Траектории в плоскости  $(x, y)$  для  $p = 2, v(0) = 0,5$ .

### **Заключение**

Проведённый анализ задачи о брахистохроне с разгоняющей силой при свободном значении конечной высоты позволяет обосновать результаты численного моделирования и уточнить свойства аналитических решений, приведённые в работах [6,7,8]. В дальнейшем предполагается провести исследование экстремальных задач максимизации дальности и быстрого действия для твёрдого тела, скользящего вдоль кривой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-31-00204, 14-08-01130).

### **Список литературы**

1. В.Н. Медников. Динамика полёта и пилотирование самолётов. Изд-во ВВА, 1976.
2. Оганов Г.С., Прохоренко В.В., Ширин-Заде С.А., Сароян А.Е. Энергосберегающий профиль направленной скважины – новое проектное решение НПО «Буровая техника» – ВНИИБТ// Наука и техника в газовой промышленности, №1(41).
3. B. Vratana and M. Saje. On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field// Int. J. Non-Linear Mechanics. 1998. Vol.33, No.3, С.489-505.
4. D. Chen, G. Liao, J. Wang. The Solution of Brachistochrone Problem Based on the Genetic Algorithm// International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2015, Vol.4, №4, С.76-88.
5. Cherkasov O.Yu., Zarodnyuk A.V. [Brachistochrone problem with linear and quadratic drag and accelerating force](#)//[Mathematics in Engineering, Science and Aerospace \(MESA\)](#), 2015, Vol. 6, № 1, С. 35-44.
6. J. E. Drummond and G. L. Downes. The Brachistochrone with Acceleration: A Running Track// Journal of Optimization Theory and Applications: 1971, Vol.7, No. 6, С. 444-449.
7. [Вондрухов А.С.](#), [Голубев Ю.Ф.](#) Брахистохрона с разгоняющей силой//Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. №6.С.42-57.
8. [Вондрухов А.С.](#), [Голубев Ю.Ф.](#) Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с разгоняющей силой//Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. №3. С.13-23.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1983.
10. Зароднюк А.В, Черкасов О.Ю. Качественный анализ траекторий движения материальной точки в сопротивляющейся среде и задача о брахистохроне.// Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. №1.С.41-49.

## **ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН БЫСТРО ДВИЖУЩИМСЯ ВИБРОИСТОЧНИКОМ**

**Ю.М. Заславский**

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН)»  
Россия 603950, Нижний Новгород, Ульянова ул., 46  
E-mail: zaslav@appl.sci-nnov.ru

Представлен расчет упругих волновых полей, излучаемых в твердое полупространство осциллирующей силой, имеющей нормальную ориентацию к свободной плоской поверхности, точка приложения которой равномерно и прямолинейно движется вдоль границы. Показано, что при пересечении неровной границы воздух-твердое полупространство движущимся фронтом  $N$ -волны в последнем генерируются продольные и поперечные волны со специфической направленностью: продольные волны излучаются почти вертикально вниз, поперечные – под малыми почти скользящими к границе углами.

*Ключевые слова:* продольная, поперечная волны, упругое полупространство, осциллирующая сила, перемещающаяся точка воздействия

Исследование особенностей, сопровождающих излучение упругих волн быстро движущимися источниками колебаний, представляет значительный интерес, поскольку они наблюдаются в различных приложениях. Их проявление имеет место при проведении бесконтактной акустической диагностики неоднородных сред, при генерации сейсмических колебаний источниками естественного и искусственного происхождения и в ряде других случаев, в которых реализуются аналогичные эффекты, сопутствующие указанной специфике волнового возбуждения.

Быстро перемещающееся вдоль свободной границы вибровоздействие на полуограниченное пространство, заполненное жидкой или твердой средой, реализуется, например, при падении на нее узкого светового пучка, создаваемого источником мощного оптического лазерного излучения, при его угловом сканировании [1]. В этом случае осциллирующее силовое воздействие на границу среды обусловлено эффектами теплового расширения, либо электрострикции, возникающими при падении на границу модулированного светового пучка, который поглощается в приповерхностном слое среды. Скорость перемещения локальной области воздействия на границе может быть произвольной.

Модель движущегося источника привлекается в сейсмологии для объяснения генерации сейсмических колебаний, т.е. явлений, происходящих в очаге (источник естественного происхождения) – это модель бегущей вспарывающейся трещины [2].

Возбуждение упругих возмущений быстро движущимся источником рассматривается в ряде проблем механики. К ним относятся исследования по анализу процессов возбуждения волн в системах с движущимися границами и нагрузками [3], явлений, связанных с разрушением твердого тела под действием взрывных нагрузок, с образованием трещин на его поверхности и в толще [4, 5]. В [5] вычислено поле акустических волн, порождаемых в безграничной «скалярной» среде за счет действия сложного источника, эквивалентного осциллирующей силе, распределенной по бесконечно тонкой круговой кромке, радиус которой нарастает с постоянной скоростью, с нормальной ориентацией вектора силы к плоскости кромки. Рассматриваемая там модель упрощенная, поскольку реально при снятии напряжений вблизи вершины трещины, движущейся вдоль свободной границы твердого тела, возникает возмущение в виде «компенсированного диполя» – пары сил. При этом область приложения силы является окружностью, концентрически разбегающаяся вдоль плоской границы по-



лупространства. В результате решения проанализированы особенности углового распределения акустического поля в зависимости от скорости движения кромки и от параметров среды.

Вместе с тем, значительный интерес вызывает рассмотрение особенностей применительно к более реальной модели – к случаю движения трещины вблизи свободной границы твердого тела, и поскольку оно происходит со скоростью, равной или близкой по величине к скорости поверхностных рэлеевских волн  $V = c_R$ , его следует отнести к быстрым. Возбуждение и излучение поверхностных рэлеевских волн движущимся источником осциллирующей силы также исследовалось, например, в работе [6], где указаны особенности углового распределения амплитуды этой волны и показаны отличия от аналогичного для звуковых волн в атмосфере.

Движущиеся источники упругих возмущений в упругом полупространстве, такие как перемещающаяся вдоль границы силовая нагрузка, рассматривались и ранее [7]. В указанной монографии проанализирована пространственная конфигурация упругих возмущений в полуграниченной среде в случае, классифицируемом как дозвуковой, при котором скорость движения источника удовлетворяет условиям  $V < c_t < c_l$ . Там же изложен анализ аналогичной задачи и в сверхзвуковом случае  $V > c_l > c_t$ . В практическом отношении такие абсолютные скорости движения с достаточно высокими околосвуковыми значениями апробируются на транспорте в экспериментальном порядке. Расчет пространственного распределения упругих смещений, порождаемых неизменной по величине и ориентации статической силовой нагрузкой с движущейся по границе упругого полупространства точкой воздействия, находит применение в ряде приложений. Их актуальность очевидна ввиду проблем безаварийного движения скоростного наземного транспорта [8, 9]. Особое место занимает раздел прикладных исследований сейсмических и акустических полей и сигналов, порождаемых объектами движущегося транспорта, на регистрации которых основывается работа охранных систем. Сюда же относится существующая до настоящего времени проблема борьбы с экологическими нарушениями, порождаемыми вредным воздействием на человеческий организм, на здания и сооружения фронта  $N$ -волны, идущего за самолетом, движущимся на сверхзвуковых режимах вблизи территорий аэропортов, и создающего сильный хлопок [10, 11, 12].

Ввиду перечисленного выше, представляет интерес рассмотрение аналогичной ситуации, связанной с быстро перемещающейся знакопеременной нагрузкой, поэтому далее вычислим и проанализируем поле упругих продольной и поперечной волн осциллирующего силового источника с точкой приложения, движущейся вдоль границы твердого полупространства. Какие изменения привносятся в излучаемые вибросейсмические поля осциллирующего источника за счет его быстрого движения? Применительно к источникам естественной природы желательно получить характеристики волн, обусловленные фактором движения и могущие быть полезными при формировании сигналов прогноза катастрофических событий или минимизации негативного их развития. Применительно к техногенным – такое рассмотрение позволит указать оптимальные подходы к построению устройств сигнализации, оповещения или предотвращения аварийных ситуаций, например, на транспорте.

Далее рассматривается возбуждение упругих волн в упругом полупространстве осциллирующей нормально ориентированной силой (гармонический процесс  $e^{-i\omega_0 t}$ ), воздействующей на плоскую границу полубесконечной среды в точке, которая поступательно и равномерно движется вдоль нее (рис. 1). Постановка задачи отличается от классической наличием движущейся точки приложения, что в ряде работ, например, в [7], сопровождается переходом к системе, связанной с движущимся источником при записи граничных условий. В данной работе граничные условия записываются в неподвижной системе, связанной со средой, что демонстрируется далее при проведении выкладок.

Для описания волнового поля в рассматриваемой простейшей модели в виде полупространства со свободной границей, заполненного упругой средой, привлекается скалярный потенциал  $\varphi$  и две компоненты векторного потенциала  $\psi_x, \psi_y$ , которые удовлетворяют волновым уравнениям [7]:

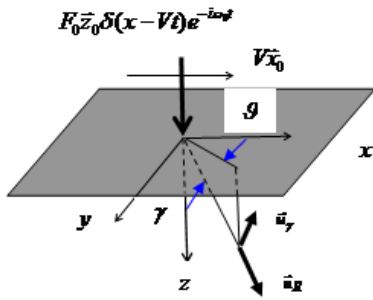


Рис. 1. Схема осциллирующего источника с точкой воздействия ( $x = Vt$ ), движущейся вдоль свободной границы ( $z = 0$ )

новым уравнениям [7]:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - (1/c_t^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2 &= 0, \\ \Delta \psi_x - (1/c_t^2) \partial^2 \psi_x / \partial t^2 &= 0, \\ \Delta \psi_y - (1/c_t^2) \partial^2 \psi_y / \partial t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c_{l,t}$  – скорости продольных и поперечных волн в упругой среде.

С их помощью упругие перемещения выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \nabla \varphi + [\nabla, \vec{\psi}], \\ u_x &= \partial \varphi / \partial x - \partial \psi_y / \partial z, \quad u_y = \partial \varphi / \partial y + \partial \psi_x / \partial z, \\ u_z &= \partial \varphi / \partial z + (\partial \psi_y / \partial x - \partial \psi_x / \partial y). \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциалы представим в виде интегральных разложений через Фурье-образы:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (3)$$

$$\psi_x = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (4)$$

$$\psi_y = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (5)$$

где  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$ , в которых используются неизвестные коэффициенты  $A, B, C$ , являющиеся функциями  $\omega, k_x, k_y$ .

Компоненты упругих волновых смещений с учетом (2) можно записать в виде:

$$u_x = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \left( k_x A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} - \sqrt{k_t^2 - k^2} C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y, \quad (6)$$

$$u_y = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \left( k_y A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} + \sqrt{k_t^2 - k^2} B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y, \quad (7)$$

$$u_z = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \left( \sqrt{k_l^2 - k^2} A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} + k_x C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} - k_y B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y. \quad (8)$$

Используя связи между напряжениями и смещениями, вытекающими из обобщенного закона Гука, нетрудно представить компоненты напряжений, имеющих отношение к условиям на почти всей свободной границе  $z = 0$  (за исключением точки воздействия), следующими разложениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{\rho_z c_t^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \\ &\left( (2k^2 - k_t^2) A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} + 2k_y \sqrt{k_t^2 - k^2} B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} - 2k_x \sqrt{k_t^2 - k^2} C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{\rho_z c_t^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \\ &\left( -2k_x \sqrt{k_l^2 - k^2} A e^{i\sqrt{k_l^2 - k^2} z} + k_x k_y B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} - (k_x^2 + k^2 - k_t^2) C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{\rho_z c_t^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} \left( -2k_y \sqrt{k_t^2 - k^2} A e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} + (k_y^2 + k^2 - k_t^2) B e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} - k_x k_y C e^{i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} \right) d\omega dk_x dk_y, \quad (11)$$

где  $\rho_z$  – плотность среды.

Должны быть выполнены три граничных условия, выражающие:

1) равенство Фурье-образа упругого напряжения  $\hat{\sigma}_{zz}$  внутри среды при предельном переходе  $z \rightarrow 0$  и напряжения  $\hat{F}_z$ , вызванного внешним воздействием с  $\delta$ -образным распределением по площади,

2) обращение в нуль Фурье-образов напряжений  $\hat{\sigma}_{zx}(z=0) = 0$ ,  $\hat{\sigma}_{zy}(z=0) = 0$ .

В системе координат, связанной с неподвижной средой, справедливо следующее выражение для пространственно-временного Фурье-образа силового воздействия:

$$F_z(\omega, k_x, k_y) = \frac{F_{z0}}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t - ik_x x - ik_y y} \delta(x - Vt) \delta(y) dx dy dt. \quad (12)$$

После интегрирования в (1) по координатам  $x, y$  и последующего интегрирования по времени  $t$  приходим к пространственно-временному спектру равномерно движущейся и осциллирующей силы:

$$F_z(\omega, k_x, k_y) = \frac{F_{z0}}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t - ik_x Vt} dt = \frac{F_{z0}}{4\pi^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V). \quad (13)$$

Из системы трех уравнений, которая получится из записи граничных условий (ее явный вид здесь ввиду громоздкости не приводится), могут быть найдены неизвестные коэффициенты. В частности, коэффициент  $A$ , определяющий ту часть поля, которая соответствует продольной волне:

Из системы трех уравнений, которая получится из записи граничных условий (ее явный вид здесь ввиду громоздкости не приводится), могут быть найдены неизвестные коэффициенты. В частности, коэффициент  $A$ , определяющий ту часть поля, которая соответствует продольной волне:

$$A = \frac{F_0}{\rho_z c_t^2} \frac{(2k^2 - k_t^2) \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}}. \quad (14)$$

Аналогично этому нетрудно получить запись коэффициентов  $B, C$ , соответствующих поперечной волне:

$$B = \frac{F_0}{\rho_z c_t^2} \frac{2k_y \sqrt{k_t^2 - k^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}}, \quad (15)$$

$$C = \frac{-F_0}{\rho_z c_t^2} \frac{2k_x \sqrt{k_t^2 - k^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}}. \quad (16)$$

Формулы (8) – (10) для компонент волновых смещений в продольной волне приобретают вид:

$$u_x = \frac{iF_0}{4\pi^2 \rho_z c_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x (2k^2 - k_t^2) \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (17)$$

$$u_y = \frac{iF_0}{4\pi^2 \rho_z c_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_y (2k^2 - k_t^2) \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (18)$$

$$u_z = \frac{iF_0}{4\pi^2 \rho_z c_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_y (2k^2 - k_t^2) \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y. \quad (19)$$

Для компонент поперечной волны имеют место формулы, подобные выписанным выше:

$$u_x = \frac{iF_0}{2\pi^2 \rho_c t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (20)$$

$$u_y = \frac{iF_0}{2\pi^2 \rho_c t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_y \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y, \quad (21)$$

$$u_z = \frac{-iF_0}{2\pi^2 \rho_c t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \delta(\omega - \omega_0 - k_x V)}{(2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2}} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + i\sqrt{k_t^2 - k^2} z} d\omega dk_x dk_y. \quad (22)$$

Интегрирование по частоте  $\omega$  и по волновым векторам  $k_x, k_y$  в формулах (17) – (19) и (20) – (22) выполняется путем свертки с  $\delta$ -функцией и методом асимптотической оценки интегралов (метод стационарной фазы), причем система координат предполагается неподвижной, связанной со средой.

Для продольной волны представляет интерес радиальная компонента упругих волновых смещений  $u_R$ , которая в сферической системе координат  $R, \vartheta, \gamma$  (рис.1) выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$u_R = u_x \cos \vartheta \sin \gamma + u_y \sin \vartheta \sin \gamma + u_z \cos \vartheta. \quad (23)$$

В результате указанного интегрирования в (17) – (19) приходим к выражению для  $u_R$  – радиальной компоненты волновых смещений в дальнем поле излучения продольной волны ( $\omega R/c_l \gg 1$ ):

$$u_R = \frac{\frac{F_0}{2\pi^3 \rho_l c_l^2 R} \cos \gamma (2(c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma - 1) \exp \left[ \frac{-i\omega_0(t - R/c_l)}{1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta} \right]}{\left( (2(c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma - 1)^2 + 4(c_t^3/c_l^3) \sin^2 \gamma \cos \gamma \sqrt{1 - (c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma} \right) (1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta)}, \quad (24)$$

где  $R$  – радиус в точку наблюдения.

Поперечная волна в сферической системе характеризуется угломестной (поперечной) компонентой волновых смещений  $u_\gamma$ :

$$u_\gamma = u_x \cos \vartheta \cos \gamma + u_y \sin \vartheta \cos \gamma - u_z \sin \gamma. \quad (25)$$

Подобным же образом, но с учетом (20) – (22), вычисляются волновые смещения в поперечной волне, колебания которой поляризованы в вертикальной плоскости  $R, \gamma$ . Поперечная компонента описывается формулой:

$$u_\gamma = \frac{\frac{F_0}{4\pi^3 \rho_l c_l^2 R} \sin 2\gamma \sqrt{(c_t^2/c_l^2) - \sin^2 \gamma} \exp \left[ \frac{-i\omega_0(t - R/c_l)}{1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta} \right]}{\left( (1 - 2 \sin^2 \gamma)^2 + 4 \sin^2 \gamma \cos \gamma \sqrt{(c_t^2/c_l^2) - \sin^2 \gamma} \right) (1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta)}. \quad (26)$$

Доплеровское смещение частоты продольных и поперечных волн описывается зависимостью:

$$\Omega = \frac{\omega_0}{1 - (V/c_{l,t}) \sin \gamma \cos \vartheta}, \quad (27)$$

аналогичной частотному смещению, известному для случая движущихся источников в воздушной акустике [13].

Полученные результаты можно использовать, например, для оценки параметров сейсмических волн в грунте, порождаемых так называемой  $N$ -волной в атмосфере, пересекающей земную поверхность, покрытую периодическими неровностями. В частности известно, что

вслед за самолетом, летящим на высоте  $H$  над земной поверхностью, движущимся со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе  $V > c$ , тянется «Маховский конус», на фронте которого присутствует скачок давления. Если твердая граница гладкая, скорости упругих волн соотносятся как  $c_l > c_t > V > c$ , т.е. превышают скорость звука и скорость тела, движущегося на высоте  $H$  над поверхностью раздела, то излучение упругих волн отсутствует, хотя в области у границы, сопровождающей место пересечения движущейся конусной поверхности с горизонтальной границей, возникает локальное деформационное возмущение [7].

Если на указанной границе присутствуют неровности (например, в виде периодического по высоте рельефа), то при пересечении движущейся конусной поверхностью указанной границы возникает рассмотренное выше периодическое силовое воздействие с нормальной к ней ориентацией, частота которого в сопровождающей системе оценивается как  $\omega_0 = 2\pi V/\Lambda$ , где  $\Lambda$  – масштаб пространственной периодичности. Поскольку проводимый анализ ограничивается качественным рассмотрением, для оценок можно использовать приближенную запись для «амплитуды силы»  $F_0$ , величина которой будет определяться скачком давления, высотой трассы летящего над границей тела, его геометрическими параметрами ( $S$ ,  $L$  – поперечное сечение и длина тела), а также параметрами неровностей ( $\sigma$ ,  $\Lambda$  – дисперсия неровностей профиля и масштаб периодичности). При расчетах волновых смещений, куда входит характерная величина «амплитуды силы», в соответствии с [10, 11, 12] для оценки последней можно воспользоваться приближенной формулой:

$$F_0 = \frac{V^2 \rho_e SL}{2\sqrt{2}(M^2 - 1)H} \frac{\sigma}{H}, \quad (28)$$

где  $\rho_e$  – плотность воздуха,  $M = V/c$ .

Так, при  $S = 10\text{ м}^2$ ,  $L = 50\text{ м}$ ,  $H = 1\text{ км}$ ,  $M = 1.5$ ,  $\sigma = 50\text{ м}$  оценка по формуле (28) показывает  $F_0 \approx 10^4\text{ н}$ .

Вместе с тем, отметим, что формулы (24), (26), описывают волны, возбуждаемые переменным давлением на границу в том случае, когда движущаяся область приложения воздействия  $\delta$ -образна, т.е. имеет точечный характер. В рассматриваемом случае пересечение  $N$ -волны с земной поверхностью происходит по узкой серповидной области, уровень воздействия которой спадает от оси к краям, в связи с чем необходимо учесть указанную пространственную распределенность воздействия, которая будет влиять как на структуру сейсмического поля, так и на величину его параметров. При оценках будем приближенно считать, что областью приложения осциллирующей силы является узкая полоска или просто линейный отрезок длиной  $H$  (равный высоте полета тела над границей раздела) вдоль оси  $y$ :  $-H/2 \leq y \leq H/2$ , перемещающийся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ . Это потребует выполнить в формулах (24), (26) интегрирование по области воздействия источника. Для модифицированной модели источника (с учетом пространственной распределенности воздействия) эти формулы преобразуются следующим образом:

$$u_R = \frac{\frac{F_0}{2\pi^3 \rho_e c_l^2 R_0} \cos \gamma \left( 2(c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma - 1 \right) \frac{\sin \left( \frac{\omega_0 H \sin \gamma \sin \vartheta / 2c_l}{1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta} \right)}{\omega_0 H \sin \gamma \sin \vartheta / 2c_l} \exp \left[ \frac{-i\omega_0(t - R_0/c_l)}{1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta} \right]}{\frac{1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta}{\left( (2(c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma - 1)^2 + 4(c_t^3/c_l^3) \sin^2 \gamma \cos \gamma \sqrt{1 - (c_t^2/c_l^2) \sin^2 \gamma} \right) (1 - (V/c_l) \sin \gamma \cos \vartheta)}}, \quad (29)$$

$$u_\gamma = \frac{F_0}{4\pi^3 \rho_2 c_t^2 R_0} \sin 2\gamma \sqrt{(c_t^2/c_l^2) - \sin^2 \gamma} \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 H \sin \gamma \sin \vartheta / 2c_t}{1 - (V/c_t) \sin \gamma \cos \vartheta}\right)}{\frac{\omega_0 H \sin \gamma \sin \vartheta / 2c_t}{1 - (V/c_t) \sin \gamma \cos \vartheta}} \exp\left[\frac{-i\omega_0(t - R_0/c_t)}{1 - (V/c_t) \sin \gamma \cos \vartheta}\right] \frac{1}{\left((1 - 2\sin^2 \gamma)^2 + 4\sin^2 \gamma \cos \gamma \sqrt{(c_t^2/c_l^2) - \sin^2 \gamma}\right) (1 - (V/c_t) \sin \gamma \cos \vartheta)}, \quad (30)$$

где  $R_0$  – расстояние от центра отрезка до точки наблюдения.

В угловой зависимости амплитуды волн, генерируемых таким источником, появляется форм-фактор  $\sin \Phi_{l,t} / \Phi_{l,t}$ , где  $\Phi_{l,t} = Q_{l,t} \frac{\sin \gamma \sin \vartheta}{1 - (V/c_{l,t}) \sin \gamma \cos \vartheta}$ , который определяется дополнительным параметром: в случае продольных волн  $Q_l = \omega_0 H / 2c_l$ , а в случае поперечных  $Q_t = \omega_0 H / 2c_t$ . Угловые зависимости для амплитуды продольной волны демонстрируются на рис.2 а (кривые 1, 2, 3), а на рис.2 б, в для амплитуды поперечной волны в случае, когда значения вышеуказанных параметров следующие  $Q_l = 60$ ,  $Q_t = 60 \cdot \sqrt{3}$ . Отличия характеристик направленности излучения волн относительно общеизвестных обусловлены пространственной распределенностью источника по отрезку линии вдоль оси  $y$  (длины  $H$ ), а также влиянием фактора движения. Увеличение области распределенности



**Рис.2** Характеристики направленности упругих волн по углу места  $\gamma^\circ$  (азимутальное направление  $\vartheta = 0.03$ ) для движущегося источника осциллирующего воздействия, распределенного по перемещающейся области линейного отрезка  
 а – продольная волна (1 –  $M_l = 0$ , 2 –  $M_l = 0.144$ , 3 –  $M_l = 0.289$ )  
 поперечная волна б –  $M_t = 0.25$ , в –  $M_t = 0.5$

воздействия источника относительно случая  $\delta$ -образной его локализации ведет к сужению угловой характеристики излучения продольных волн и максимум ее лепестка приобретает почти вертикальную направленность (близкую к нормали к границе). Трансформация угловой характеристики поперечной волны проявляется в возрастании интенсивности на направлениях под малыми наклонами к границе. Таким образом, за счет движения источника в излучении возникает асимметрия с преобладанием амплитуды в направлении вектора  $\vec{V}$ , причем степень асимметрии увеличивается с ростом скорости движения, т.е. при увеличении числа Маха  $M_{l,t}$ . Но в комбинации с ранее известными особенностями в амплитудно-угловом распределении объемных волн, обусловленными, движением вибрационного источника вдоль границы однородного упругого полупространства, появляются дополнительные особенности, связанные с наличием континуума точек воздействия – быстро перемещающегося по границе и распределенного по области в виде линейного отрезка.

В реальной слоистой, например, грунтовой среде, кроме выше рассмотренных упругих волн, вдоль границ слоев возбуждаются также критически преломленные волны. Преломленные волны широко применяются на практике, в частности, при инженерной сейсмораз-

ведке. Их регистрация вблизи ж.-д. полотна, в том числе в тоннелях метро, и использование для мониторинга движения скоростного ж.-д. транспорта с целью повышения безаварийности его эксплуатации также представляется перспективной. В этой связи в дальнейшем будет интересно выполнить аналогичный анализ влияния скорости движения виброисточника на генерируемые им преломленные волны.

### Список литературы

1. Лямшев Л.М. Оптико-акустические источники звука // УФН 1981 г. Декабрь Том 135, вып.4, с.637-665.
2. Ben Menahem A. Radiation of seismic surface-waves from finite moving sources // Bull. Seismol. Soc. Am. 1961. **51**, pp.401-435.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. — 320 с. — ISBN 5-9221-0172-2.
4. Алтуков В.Н., Ильющенко П.Н., Фонарев А.В. Моделирование трещинообразования в материалах под действием взрывных нагрузок // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 1. С.5-12.
5. Заславский Ю.М. К теории акустического излучения развивающихся трещин. Физика Земли. 1989. №10, с.95
6. Заславский Ю.М. Особенности поверхностных рэлеевских волн, возбуждаемых осциллирующей силой, равномерно движущейся вдоль поверхности полупространства. Акустический журнал. 1988. Т. 34. № 3. с.536.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.
8. Proceedings of European Conference on Noise. (Euro Noise 2015) Netherland. Maasterichts. 2015.
9. Wersäll Carl, Bodare Anders and Massarsch K. Rainer Localization of Vibration Sources along Railway Tracks. Geo Risk & Vibration Scandinavia AB, Solna Torg 13, SE-17145 Solna, Sweden, 2007.
10. Авиационная акустика. Под ред. А.Г. Мунина, В.Е. Квитки М.: Машиностроение. 1973.
11. Whithem G.B. The behavior of a supersonic flow past a body of a resolution far from the axis. Proc. Roy. Soc. Vol.201, N.1054, 1950.
12. Whithem G.B. The flow pattern of a supersonic projectile. Common Pure Appl. Math.vol.5, N.3, 1952.
13. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 280с.

## **ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ВИБРАЦИОННЫМ ДВИЖИТЕЛЕМ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

**О.С. Захарова<sup>1</sup>, А.Н. Нуриев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,  
420008 Казань, ул. Кремлевская, д.8, e-mail: [zakharovaos.mex@gmail.com](mailto:zakharovaos.mex@gmail.com)

<sup>2</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, НИИ механики  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [nuriev\\_an@mail.ru](mailto:nuriev_an@mail.ru)

Настоящая работа посвящена изучению оптимального управления двухмассовой системой с вибрационным двигателем в вязкой несжимаемой жидкости. Исследование осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматриваются упрощенные модели вязкой жидкости. С их использованием задача оптимального управления решается с точки зрения минимизации энергозатрат. Полученные оптимальные законы изучаются на втором этапе методами прямого численного моделирования.

**Ключевые слова:** движения системы с вибрационным двигателем, вязкая жидкость, оптимальное управление, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса

### **Введение**

Разработка альтернативных двигателей для перемещения микроустройств в вязкой жидкости является актуальной проблемой современной механики и робототехники в силу малой эффективности традиционных систем, применяемых для передвижения более крупных объектов. В настоящее время развивается несколько популярных концепций таких двигателей. Одна из них основана на использовании подвижной внутренней массы. Устройства подобного типа часто называют вибророботами. Их преимущества – односвязность поверхности корпуса, гладкость и герметичность – обеспечивают возможность их внедрения в эко- и био- системы без разрушения хрупких границ в условиях сильной ограниченности пространства, а также позволяют минимизировать возмущения изучаемой среды, возникающие при интеграции и движении объекта. Известно, что в ньютоновской жидкости вибрации движущегося тела могут служить стабилизирующим фактором для формирующихся течений. В связи с этим особый интерес представляет изучение динамики движения вибророботов в вязкой жидкости. Данная работа в частности посвящена выбору оптимальных режимов движения вибророботов в вязкой жидкости, анализу эффективности их использования и моделированию возникающих течений.

Впервые вопрос оптимизации движения двухмассового виброробота, состоящего из корпуса и заключенной внутри него подвижной массы, был поставлен Ф.Л. Черноусько для случая движения по шероховатой поверхности [1]. Изучением вибрационных мобильных устройств в настоящее время занимаются отечественные и зарубежные ученые: Н.Н. Болотник, Т.Ю. Фигурина, И.М. Зейдис, С. Ф. Яцун, А.Г. Егоров, К. Zimmermann, А. Fidlin, К. Furuta, Н. Li и другие. Основная часть проведенных исследований посвящена прямолинейному движению вибрационных механизмов по шероховатой плоскости при наличии кулоновского трения.

Основная сложность исследований движения виброробота в вязкой жидкости состоит в описании взаимодействия корпуса с внешней средой, которое обязывает разрешать численно нелинейную систему уравнений Навье-Стокса либо задавать гидродинамические силы сопротивления в аналитическом представлении. В данной работе используются оба подхода: с помощью аналитических исследований проводится выбор оптимальных законов движения и прогнозируется их эффективность, в рамках прямого численного моделирования реализуется верификация и апробация аналитических моделей, а также исследование гидродинамических сил сопротивления.



### **Постановка задачи оптимизации**

Виброробот моделируется как двухмассовая система, состоящая из корпуса массы  $M$  и тела массы  $m$ , помещенного внутри него – внутренней массы. Совершая колебания вдоль горизонтальной оси корпуса по закону  $x(t)$ , внутренняя масса обеспечивает перемещение виброробота, помещенного в сопротивляющуюся среду, в заданном направлении со скоростью  $u(t)$  при наличии нелинейной реакции  $R(u)$  со стороны окружающей среды. Основное уравнение, описывающее движение  $u(t)$  тела при заданном законе  $x(t)$  движения внутренней массы, имеет вид

$$(m + M)\dot{u} + R(u) = -m\ddot{x} \quad (1)$$

Для любого заданного периодического с периодом  $T$  закона  $x(t)$  уравнение (1) однозначно определяет периодическую с тем же периодом функцию  $u(t)$ , а  $x(t)$  играет роль кинематического управления.

Обозначая угловыми скобками среднее по периоду, определим следующие функционалы:

$$U(u) = \langle u \rangle - \text{средняя скорость движения тела,}$$

$N(u) = \langle u \cdot R(u) \rangle$  - средняя мощность, затрачиваемая на преодоление сил сопротивления,

Задача оптимизации движения внутренней массы сводится [2] к задаче нахождения периодической с периодом  $T$  функции  $u(t)$ , минимизирующей функционал мощности  $N(u)$  с учетом ограничений

$$\langle u \rangle = U, \quad (2)$$

$$\langle R \rangle = 0. \quad (3)$$

Для описания энергетических затрат на движение робота с помощью внутреннего движителя (подвижной внутренней массы), введем энергетический коэффициент

$$\eta = N(\langle u \rangle) / N(u), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (4)$$

как отношение мощности  $UR(U)$ , необходимой для движения тела с постоянной скоростью  $U$ , к реально затрачиваемой при периодическом движении мощности  $N(u)$ . Указанное двойное неравенство следует из выпуклости и неотрицательности функции  $uR(u)$ .

Как было отмечено выше, сложность задачи определяется выбором формы сил сопротивления. Рассмотрим несколько модельных законов сил сопротивления движению робота сферической формы при различных допущениях.

### **Оптимальное движение сферического виброробота в условиях квазистационарности**

Периодическое движение внутренней массы предполагает возникновение колебаний корпуса в вязкой жидкости. Тогда на интервале периодичности можно выделить две фазы движения корпуса: вперед в направлении оси  $ox$  и назад – в обратном направлении. Рассмотрим задачу в условиях квазистационарности, предполагая периоды настолько большими, что на каждой фазе движение можно считать стационарным, а силы сопротивления однозначно определяющимися мгновенной скоростью корпуса. Тогда для описания возникающих при движении сферического корпуса вязких сил справедливо использовать квадратичную зависимость от мгновенной скорости корпуса

$$R = C_x \cdot u |u|, \quad (5)$$

в которой коэффициент сопротивления является немонотонной функцией безразмерной скорости  $C_x = C_x(u)$ . Данная зависимость аппроксимирует известные экспериментальные данные [3], полученные при стационарном обтекании шара потоком вязкой несжимаемой жид-

кости (рис. 1). Силы инерции в уравнении (1) могут быть учтены за счет увеличения кажущейся массы корпуса.

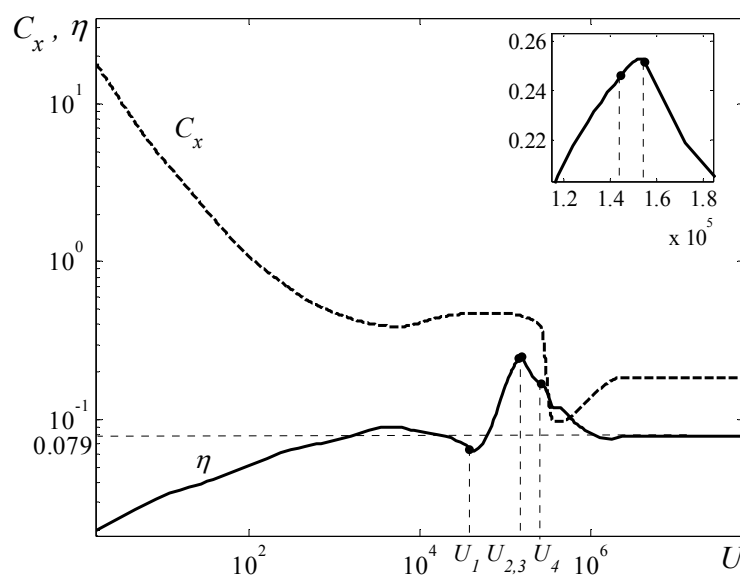


Рис.1. Зависимости коэффициентов  $C_x$  и  $\eta$  от числа Рейнольдса  $U$

Метод, предложенный [4] для отыскания энергетически оптимальных законов  $u(t)$ , отвечающих условиям (2), (3), позволяет строить оптимальные законы в зависимости от безразмерной средней скорости движения числа Рейнольдса  $U$ .

В довольно широких диапазонах  $U < 3.76 \cdot 10^4$ ,  $U > 2.63 \cdot 10^5$ , где показатель эффективности  $\eta$  не превышает значения 0.079, реализуется двухфазный режим, который характеризуется постоянством скоростей на прямой и обратной фазе движения. Наличие кризиса сопротивления обеспечивает возникновение на интервалах  $U \in (3.76 \cdot 10^4, 1.44 \cdot 10^5)$  и  $U \in (1.55 \cdot 10^5, 2.63 \cdot 10^5)$  переходных трехфазных режимов движения и наиболее эффективного режима на интервале  $U \in (1.44 \cdot 10^5, 1.55 \cdot 10^5)$  с медленной докризисной возвратной фазой и быстрой кризисной фазой прямого движения, а также приводит к. существенному росту эффективности с 7.9% до 25% (рис .1).

Решая задачу в диапазоне невысоких чисел Рейнольдса  $U < 400$ , характерных для движения мини- и микророботов в вязкой жидкости, получим, что данный диапазон отвечает базовому двухфазному режиму оптимальных законов. Характеризующие его параметры – постоянные скорости  $u_+$  и  $u_-$  на каждой фазе, соотношение  $a$  продолжительностей фаз, определяемое продолжительностью возвратной фазы  $a_-$  – изменяются в зависимости от средней скорости движения (табл. 1). Величина  $a$  с ростом средней скорости  $U$  слабо изменяется в сравнении с остальными характеристиками оптимальных законов.

Таблица 1: Параметры движения виброробота в докризисном диапазоне

$U$	$\eta$	$a$	$u_+$	$u_-$
30	0.039	0.04605	49.70	-363.1
99.05	0.053	0.0456	148.1	-926.6
202.5	0.063	0.04374	287.8	-1663
303.8	0.065	0.04144	422.3	-2410
360	0.066	0.04102	495.7	-2802
402.9	0.067	0.04022	551.3	-3138

Этот факт позволяет реализовать возможность построения универсального закона с неизменной продолжительностью  $a = a^0$  для всего диапазона  $U < 400$ . Для этого достаточно доопределять значения параметров  $u_+$  и  $u_-$  из условий (2), (3), принимающих вид

$$u_+(1-a) + u_-a = U \quad (6)$$

$$R(u_+)(1-a) + R(u_-)a = 0 \quad (7)$$

В качестве  $a^0$  выбирались значения  $a = 0.046$  и  $a = 0.041$  из оптимальных законов для  $U = 30$  и  $U = 360$  соответственно. В обоих случаях универсальный закон обеспечил результаты близкие по эффективности к оптимальным (рис. 2).

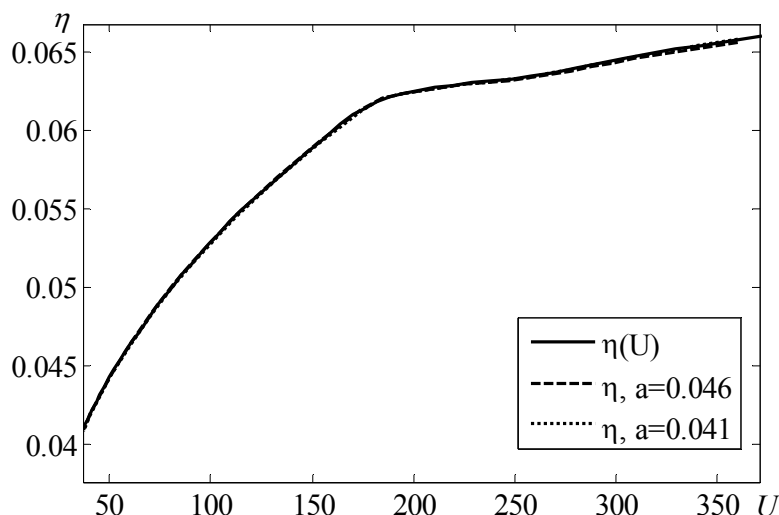


Рис. 2. Зависимости энергетического коэффициента  $\eta$  от средней скорости  $U$ , полученные в ходе решения задачи оптимизации и с использованием универсальных законов

Относительная и абсолютная потери эффективности при использовании универсальных законов составляют менее 4% во всем диапазоне скоростей  $U < 3.76 \cdot 10^4$ . Таким образом, в области докризисных скоростей оправдано использование универсального закона неизменной длины возвратной фазы, который доопределяется для конкретной средней скорости  $U$  из условий (6),(7).

### Оптимизация движения сферического виброробота при учете наследственных эффектов

При движении тела в вязкой жидкости условие квазистационарности гидродинамических сил сопротивления применимо лишь при малых ускорениях тела, и, следовательно, неизбежно нарушается с ростом частоты колебаний внутренней массы. Как известно, до сих пор не получено выражение для реальных действующих на сферу гидродинамических сил. Однако [5] показано, что для описания сил допустимо представление

$$R = C_x(|u| \cdot \text{Re})|u|u + sR_H[u], \quad R_H[u] = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \quad (8)$$

полученное путем обобщения на случай средних скоростей формулы сил, справедливой в пределе бесконечно малых чисел Рейнольдса [6]. Задавая коэффициент  $C_x$  функцией мгновенной скорости как и в квазистационарной модели, мы приходим к выражению сил отличному от (5) лишь дополнительным слагаемым  $R_H[u]$  – силами Бассе, описывающими предысторию движения путем учета наследственных эффектов. Два безразмерных параметра

$$\text{Re} = \frac{2aU}{\nu}, \quad s = \frac{12}{U\sqrt{\pi T/\nu}}$$

– классическое число Рейнольдса и комплекс  $s$  характеризуют соответственно среднюю скорость и период движения виброробота.

Задача минимизации мощности при ограничениях (2),(3) в этом случае принимает вид

$$N = \langle C_x(|u| \cdot \text{Re})|u|^3 \rangle + s \langle u \cdot R_H[u] \rangle \rightarrow \min \quad (9)$$

$$\langle C_x(|u| \cdot \text{Re})|u|u \rangle = 0 \quad (10)$$

$$\langle u \rangle = 1 \quad (11)$$

С помощью метода множителей Лагранжа задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( C_x(|u| \cdot \text{Re})|u|^3 \right) + s \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau) \frac{\text{sign}(t-\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}} d\tau + \lambda |u| - \mu = 0, \quad (12)$$

которое должно рассматриваться совместно с уравнениями (10), (11), где  $\lambda$  и  $\mu$  - множители Лагранжа. Совокупность уравнений (10)-(12) при заданном значении параметров  $\text{Re}$  и  $s$  решается численно методом Ньютона. В качестве начального приближения для конкретного  $\text{Re}$  выбирается квазистационарное решение, соответствующее  $s = 0$ , после чего осуществляется метод последовательного продолжения по  $s$ .

Результаты решения представлены на рис. 3, 4. На рис. 3 в логарифмическом масштабе изображен вид оптимальных законов движения  $u(t; \text{Re}; s)$  для фиксированного числа Рейнольдса  $\text{Re} = 120$  и различных значений параметра  $s$ . Увеличение параметра  $s$  приводит к исчезновению скачка при смене фаз и постепенному сглаживанию перехода между фазами. Аналогичные картины можно получить для произвольного числа  $\text{Re}$ .

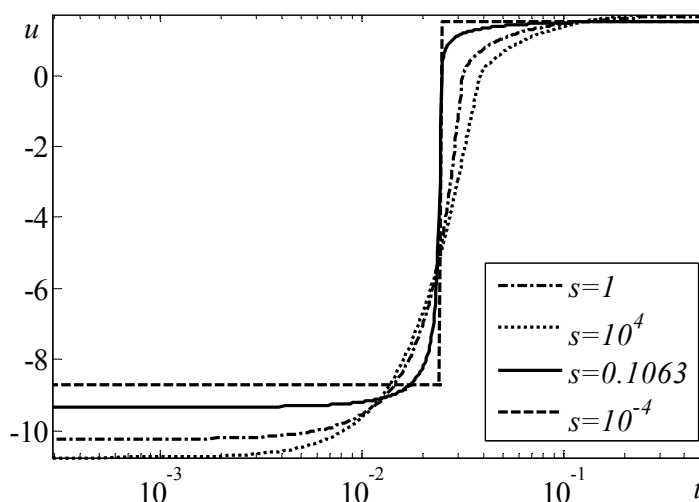


Рис. 3. Закон  $u(t, \text{Re}, s)$  при различных значениях параметра  $s$  при  $\text{Re}=120$

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента эффективности  $\eta(\text{Re}, s)$  от параметра  $s$  при различных значениях числа  $\text{Re}$ . С ростом параметра  $s$  эффективность от значений, полученных в квазистационарной модели, при  $s \rightarrow 0$  убывает до 0 при  $s \rightarrow \infty$ . Рост средней скорости оказывает положительное влияние на эффективность движения в диапазоне  $s < 0.1$ . При  $s > 0.1$  эффективность движения перестает зависеть от числа  $\text{Re}$ , так как влияние вязких сил ослабевает на фоне возникающего преобладания сил Бассе.

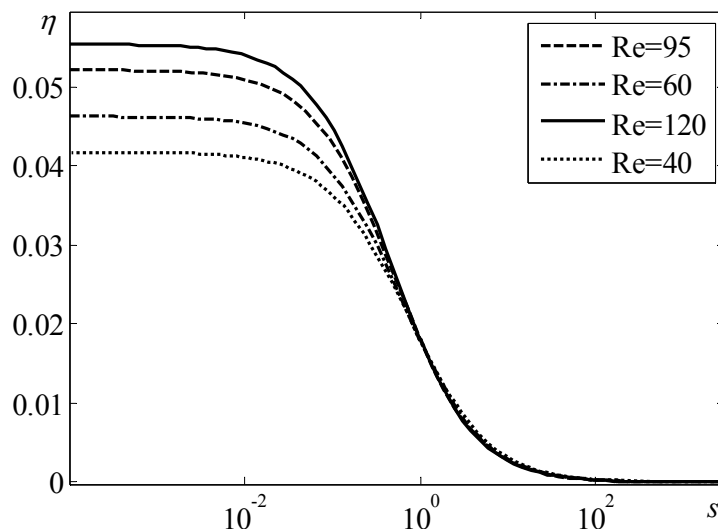


Рис.4. Зависимость  $\eta(\text{Re}, s)$  при  $\text{Re}=[120;95;60;40]$

Малозначительное изменение характеристик оптимальных законов  $u(t, \text{Re}, s)$  в зависимости от управляющих параметров обеспечивает возможность нахождения универсального закона взамен множества слабо отличающихся оптимальных законов. Выбор универсальных законов для различных чисел  $\text{Re}$  из оптимальных законов, соответствующих различным  $s$ , проводится таким образом, чтобы для конкретного числа  $\text{Re}$  выбранный универсальный закон во всем диапазоне  $s$  обеспечивал эффективность близкую к максимальной.

Для полученных универсальных законов характерны подобие и практически одинаковая длительность возвратных фаз (рис. 5). Исходя из этого, совершенно естественно, выбрав один  $u_0(t) = u(t, \text{Re}_c, s_c)$  из выделенных законов, использовать его в качестве универсального для всех чисел Рейнольдса. При использовании его при  $\text{Re} \neq \text{Re}_c$  необходимо обеспечить выполнение условий (10), (11), для чего будут использоваться преобразования подобия

$$u_n = c(u_0(t) - u_0^{\max}) + b$$

в котором константы  $c$  и  $b$  должны подбираться для каждого конкретного числа  $\text{Re}$  из условий (10), (11). Использование универсального закона в таком виде позволяет строить законы близкие по эффективности к оптимальным, способствуя сокращению вычислений.

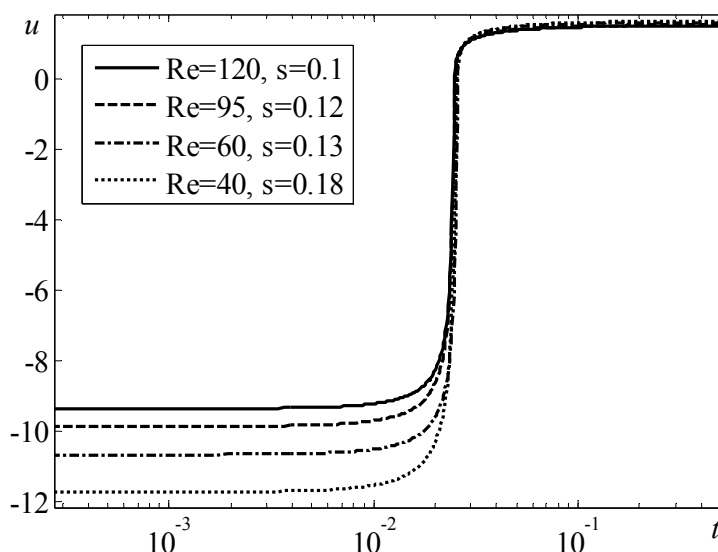


Рис.5. Универсальные законы для различных  $\text{Re}$

Потери эффективности, вычисляемые по формулам

$$\xi_{rel} = \frac{|\eta - \eta_c|}{\eta} \cdot 100\%, \quad \xi_{abs} = \frac{|\eta - \eta_c|}{\eta^{\max}} \cdot 100\%,$$

где  $\eta_c = \eta_c(\text{Re}, s)$  – эффективность универсального закона  $u_0(t)$ ,  $\eta^{\max} = \max_{s, \text{Re}}(\eta)$  – максимальная эффективность оптимальных законов составляют менее 5%.

### Численное моделирование

Для того чтобы разработать более точную модель взаимодействия вибрационной системы с вязкой жидкостью требуется детальный анализ гидродинамической силы. С этой целью во второй части исследования осуществляется численное моделирование движения виброробота на основе решения полных уравнений Навье-Стокса. Законы движения выбираются из результатов задачи оптимизации, представленной в предыдущем разделе. Скорость корпуса определяется с точностью до константы, которая определяется из условий периодичности движения внутренней массы.

Результирующая модель управляется двумя безразмерными комплексами – числом Рейнольдса  $\text{Re}$  и безразмерным периодом  $T_0$ :

$$\text{Re}_n = \frac{U_m D}{\nu}, \quad T_n = \frac{U_m T}{D}$$

Здесь  $U_m$  – максимум модуля скорости корпуса,  $D$  – диаметр корпуса. Безразмерные параметры  $\text{Re}_n, T_n$  связаны с параметрами  $s, \text{Re}$  оптимизационной задачи следующим образом:

$$\text{Re}_n = \text{Re} \frac{U_m}{U}, \quad T_n = \frac{144}{\pi s^2 \text{Re}} \frac{U_m}{U}.$$

Далее по тексту индекс  $n$  будет опущен. Численное моделирование взаимодействия вибрационной системы с вязкой жидкостью проводилось в пакете OpenFOAM с использованием численных схем представленных [7], [8].

Численное моделирование проводилось в диапазоне  $300 < \text{Re} < 2500$  при фиксированном безразмерном периоде  $T = 40$ . Для данного диапазона выбирался универсальный закон  $u(t)$  движения корпуса на основе данных аналитической модели таким, чтобы обеспечить теоретическую высокую эффективность во всей области исследования. Соответствующая зависимость  $u(t)$  представлена на рис.6.

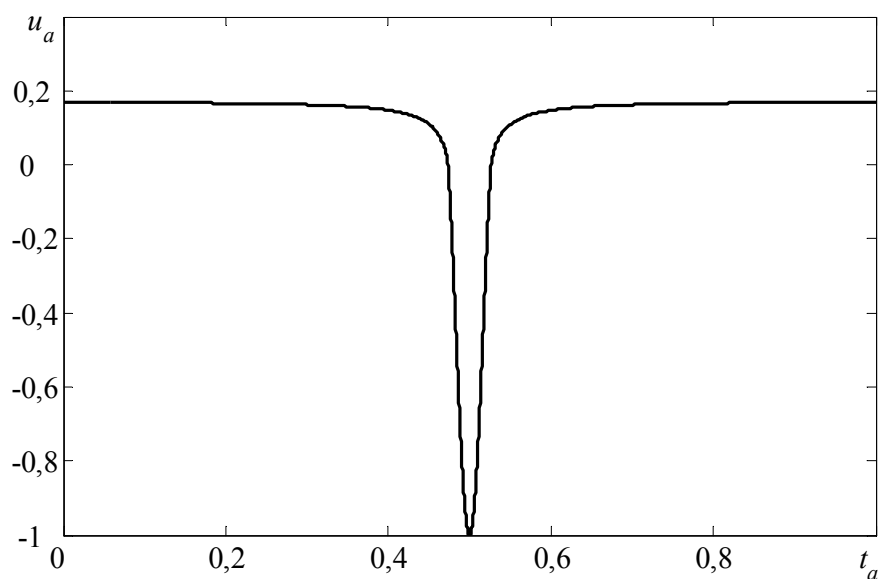


Рис.6. Закон движения корпус

Несмотря на высокое значение максимального числа Рейнольдса структура потока вокруг виброробота сохраняет осевую симметрию в рассматриваемом диапазоне Re. Это связано с тем, что максимальная скорость движения достигается в интервале времени (см. рис. 6), который является слишком коротким для развития асимметрии. В то же время, значения скорости фазы прямого движения на порядок меньше, чем максимум, так что все асимметричные возмущения затухают во время этой фазы. На рисунке 7 представлены основные структуры потока, наблюдаемые в исследуемом диапазоне. Визуализация выполнена при помощи цветных невесомых частиц. В первом случае (рис 7, слева), в следе за телом происходит безвихревое движение жидкости. Такой режим наблюдается в диапазоне  $Re < 2000$ . Во втором случае, след состоит из постепенно диссипирующих вихревых колец (рис 7, справа).

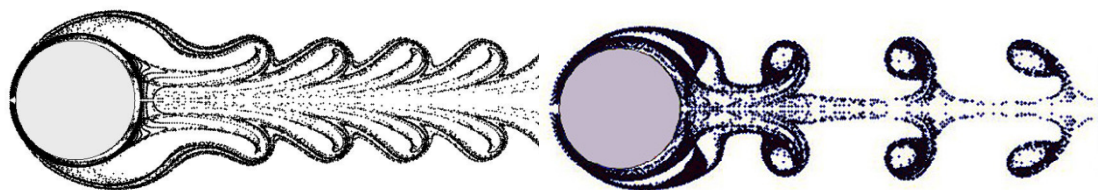


Рис.7. Режимы течений для значений параметров  $T=40, Re=500$  (слева) и  $T=40, Re=2500$  (справа)

Эффективность движения  $\eta$  растет с увеличением числа Рейнольдса. Динамика изменения энергетического коэффициента  $\eta$  показана на рисунке 8. Однако значения  $\eta$ , полученные при численном моделировании более чем в два раза ниже предсказанных теоретической моделью. Для того чтобы проанализировать причины этого расхождения, изучается структура сил, действующих на виброробот.

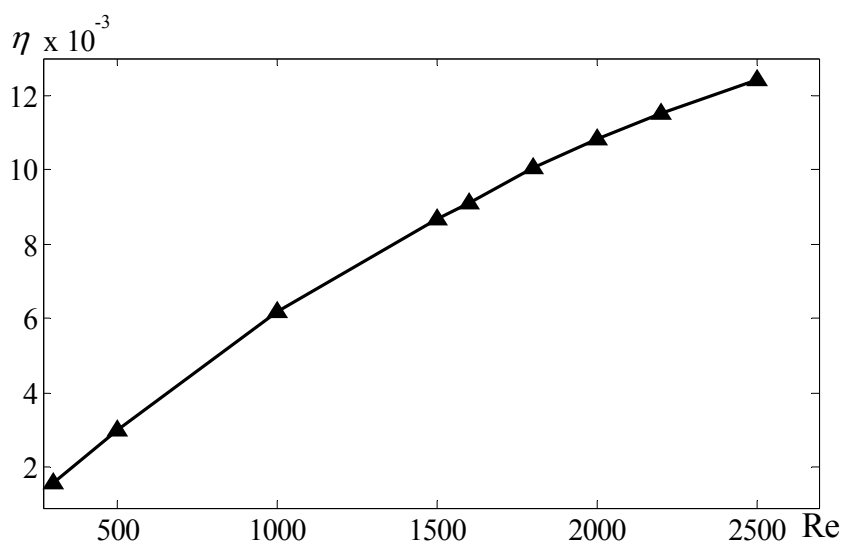


Рис. 8. Зависимость эффективности  $\eta$  от числа Рейнольдса Re

Результирующую силу представляется как сумма вязких, инерционных сил и сил Бассе в виде

$$R(C_x, C_m, C_b, t) = C_x u(t) |u(t)| + C_m a(t) + C_b \int_{-\infty}^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (13)$$

В силу наличия двух ярко выраженных фаз движения корпуса с различными характерными скоростями полагается, что коэффициент вязких сил  $C_x$  может принимать два значения  $C_{x+}$  при  $u(t) > 0$  и  $C_{x-}$  при  $u(t) < 0$  на интервале периодичности, а коэффициенты при силах инерции и силах Бассе  $C_m, C_b$  - константы.

Для определения неизвестных коэффициентов рассматривается задача минимизации среднеквадратичного отклонения разложения (13) от сил  $R^{num}$ , полученных в численном счете:

$$L(C_{x+}, C_{x-}, C_b, C_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (R(C_{x+}, C_{x-}, C_b, C_m, t_i) - R_i^{num})^2} \longrightarrow \min$$

$$\langle R \rangle = 0 .$$

В результате решения определяются комбинации констант  $(C_{x+}, C_{x-}, C_b, C_m)$  для каждого числа Рейнольдса, при которых выражение сил (13) оказывается хорошей аппроксимацией сил  $R^{num}$  во всем диапазоне скоростей. Коэффициент  $C_m$  при силах инерции практически не зависит от числа  $Re$  и близок к константе. Коэффициента  $C_b$  принимает малые значения, при которых вклад в силу третьего слагаемого оказывается незначительным. Значения  $C_{x+}$  и  $C_{x-}$  изменяются с ростом числа Рейнольдса как показано на рис. 9. Можно видеть, что образующаяся зависимость от числа Рейнольдса не полностью согласуется с экспериментальной кривой [3], используемой в аналитических моделях.

Таким образом, полученное приближение сил отличается от того, которое используется в задачах оптимизации. Это объясняет различия в оценках эффективности движения. Следующим шагом является использование нового представления для решения задачи оптимизации. Как показывают первые результаты, новое представление сил не вносит существенных изменений в характерный вид оптимальных законов движения, однако сказывается на эффективности оптимальных законов, приближая ее к значениям, полученным при численном моделировании.

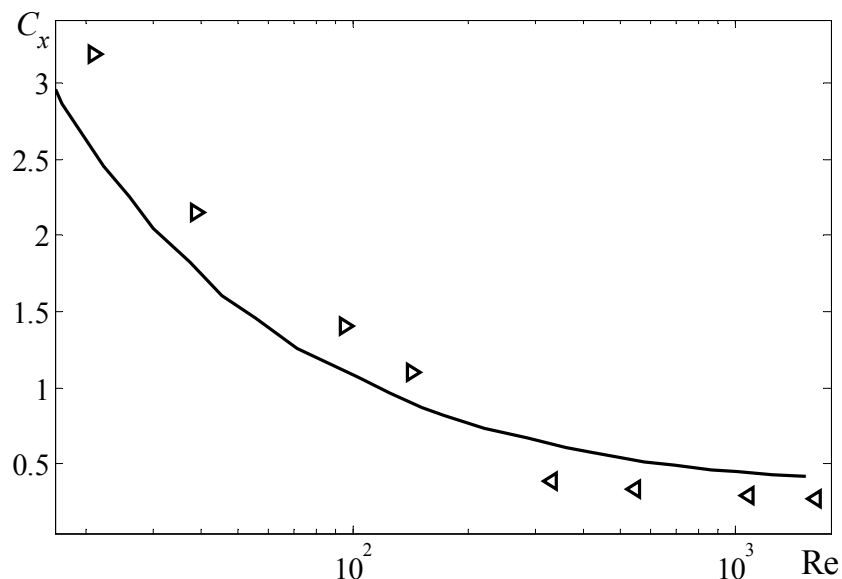


Рис. 9. Силы сопротивления. Маркерами отмечены значения  $C_{x+}$  и  $C_{x-}$ , сплошной линией – экспериментальная зависимость

Основные результаты работы получены при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-31-00462). Численная модель движения виброробота в жидкости разработана при финансовой поддержке гранта РНФ № 15-19-10039 в Нижегородском государственном университете.



### **Список литературы**

1. Черноушко Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 1. С.56-60.
2. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620-632.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
4. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости// Изв. Вузов. Матем. 2012. №2. С. 57-64.
5. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение виброробота в среде с наследственным законом сопротивления// Изв. РАН. ТиСУ. 2015. №3. С.212-220.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. Нуриев А.Н., Зайцева О.Н. Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM.// Вестник Казан. технолог. ун-та. 2013. Т. 8. С. 116-123.
8. Egorov A. G., Kamalutdinov A. M., Nuriev A. N. and Paimushin V. N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 2. Aerodynamic component of damping// Mechanics of Composite Materials. 2014. Vol. 50 (No. 3). P. 267-278.

## **НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**А.И.Землянухин, А.В.Бочкарев**

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
физико-технический факультет.

410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: [zemlyanukhinai@sstu.ru](mailto:zemlyanukhinai@sstu.ru)

Установлено, что для интегрируемых и близких к ним уравнений, непрерывная дробь, соответствующая ряду метода возмущений на основе линеаризованной задачи, обрывается, и оставшаяся подходящая дробь представляет собой искомое точное решение. Показано, что солитоноподобное решение возникает в предельном случае – как сумма геометрического ряда метода возмущений.

*Ключевые слова:* непрерывные дроби, точные решения, метод возмущений, нелинейные дифференциальные уравнения.

Существование точных решений уравнений неклассической математической физики имеет большое значение для лучшего понимания природы изучаемых явлений, а также – для развития аналитических и верификации численных методов исследования нелинейных математических моделей. Совсем недавно, в 1990 году в известной монографии [1, стр. 77] отмечалось, что «Нестационарное уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса (КдВБ) не имеет аналитических решений, и основным инструментом его исследования являются численные методы». За последнюю четверть века сделан огромный шаг вперед в развитии аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений и методов построения соответствующих точных решений [2]. В настоящее время для уравнения КдВБ и для большинства интегрируемых и близких к ним уравнений, возникающих в приложениях, построены широкие классы точных и даже квазиточных решений [3], разработано порядка десяти новых аналитических методов. Выбор метода в каждом конкретном случае определяется внутренней структурой эволюционных или квазигиперболических уравнений и классом интересующих исследователя решений. Наибольший интерес, традиционно, вызывают солитоноподобные (уединенно – волновые) решения.

Уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4] обладают рядом выделенных свойств среди которых наиболее важны бесконечный набор законов сохранения, наличие пар Лакса, существование  $N$  – солитонных решений.

Реальные физические процессы моделируются уравнениями, содержащими один или несколько малых параметров. Сами уравнения чаще всего возникают в результате применения какой – либо асимптотической процедуры к исходной модели, поэтому представляется логичным использование метода возмущений для построения точного решения. Основная сложность, стоящая на этом пути, состоит в том, что солитон, будучи существенно нелинейным объектом, не может быть получен ни в каком порядке метода возмущений на основе решения линеаризованной задачи.

Цель данного доклада состоит в том, чтобы продемонстрировать общее свойство интегрируемых и неинтегрируемых уравнений, обладающих точными уединенно – волновыми решениями. Оказывается – ряд метода возмущений для таких уравнений является геометрическим, так что его сумма представляет собой искомое точное решение. Таким образом, солитон возникает не в каком-то конечном порядке метода возмущений, а в предельном случае – как точная сумма геометрического ряда [5].

Для установления геометричности ряда метода возмущений или выявления необходимых для этого условий используем аппарат непрерывных дробей. Будет показано, что непрерывная дробь на солитоноподобных решениях обрывается аналогично обрыванию асимптотического ряда для билинейного уравнения в методе Хироты [6].

Известно, что степенному ряду с ненулевыми коэффициентами  $a_n$

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

можно поставить в соответствие непрерывную дробь [7]

$$\frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + \frac{b_4 z}{1 + \dots}}}} \quad (2)$$

коэффициенты  $b_n$  которой вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} b_2 &= -a_2, \\ b_3 &= \frac{a_2^2 - a_3}{a_2}, \\ b_4 &= \frac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2 (a_2^2 - a_3)}, \\ b_5 &= -\frac{(a_2^2 a_5 - 2a_2 a_3 a_4 + a_3^3 - a_3 a_5 + a_4^2)}{(a_2^2 - a_3)(a_2 a_4 - a_3^2)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Первые  $n$  уровней дроби (7) образуют ее  $n$ -ю подходящую дробь  $\frac{P_n}{Q_n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= z, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{z}{1 + b_2 z}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + b_3 z}} = \frac{z + b_3 z^2}{1 + (b_2 + b_3)z}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + b_4 z}}} = \frac{z + (b_3 + b_4)z^2}{1 + (b_2 + b_3 + b_4)z + (b_2 b_4)z^2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (3) можно получить, приравнявая подходящие дроби  $\frac{P_n}{Q_n}$  соответствующим частичным суммам ряда (1).

Подходящие дроби (4) ряда (1) образуют ступенчатую последовательность аппроксимант Паде  $[A/B]$  этого ряда [8]:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \begin{cases} \left[ \frac{n/n}{2/2} \right], & n - \text{четное}, \\ \left[ \frac{n+1/n-1}{2/2} \right], & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Непрерывная дробь (2) обрывается и становится конечной  $N$ -й подходящей дробью, если для любого  $n$ , начиная с некоторого  $N$ , выполняется

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n}{Q_n}. \quad (5)$$

Разность двух последовательных подходящих дробей удовлетворяет условию [9]

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n z^{n+1} b_2 b_3 \dots b_{n+1}}{Q_{n+1} Q_n}. \quad (6)$$

Из (6) следует достаточное условие обрывания непрерывной дроби:  $\forall n \geq N$  выполняется

$$B_n \equiv b_2 b_3 \dots b_{n+1} = 0 \quad (7)$$

Обрывание непрерывной дроби, соответствующей степенному ряду, означает, что ряд является геометрическим, возможно, после перегруппировки членов. В рассматриваемых ниже примерах степенной ряд есть ряд метода возмущений для решаемого уравнения. Установление геометричности ряда равносильно нахождению точного уединенно-волнового решения.

В качестве первого примера рассмотрим эволюционное уравнение 5-го порядка из иерархии КдВ [10]

$$u_t + \alpha u_{xxxxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + \lambda u^2 u_x = 0 \quad (8)$$

В соответствии с прямым методом возмущений [11] будем искать решение уравнения (8) в форме функционального ряда по степеням формального параметра  $\varepsilon$ :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \quad (9)$$

Подставим (9) в (8) и сгруппируем результат по степеням  $\varepsilon$ . Получим бесконечную систему уравнений для определения функций  $u_n(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & u_{1t} + \alpha u_{1xxxxx} = 0, \\ \varepsilon^2: & u_{2t} + \alpha u_{2xxxxx} = -\beta u_1 u_{1xxx} - \delta u_{1x} u_{1xx}, \\ \varepsilon^3: & u_{3t} + \alpha u_{3xxxxx} = -\beta(u_1 u_{2xxx} + u_2 u_{1xxx}) - \delta(u_{1x} u_{2x})_x - \lambda u_1^2 u_{1x}, \\ \varepsilon^4: & u_{4t} + \alpha u_{4xxxxx} = -\beta(u_1 u_{3xxx} + u_2 u_{2xxx} + u_3 u_{1xxx}) - \delta((u_{1x} u_{3x})_x + u_{2x} u_{2xx}) - \\ & - \lambda u_1 (u_1 u_{2x} + 2u_2 u_{1x}), \\ & \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из уравнений системы (10) имеет частное решение  $u_1 = \exp(kx - \omega t)$  при условии

$$\omega = \alpha k^5. \quad (11)$$

Отыскивая решения следующих уравнений системы (10) в форме  $u_n = K_n u_1^n$ , определим постоянные  $K_2, K_3, \dots$ . Вводя обозначение  $z = \varepsilon u_1$ , разложению (9) можно придать форму степенного ряда

$$\begin{aligned} u = z - \frac{(\beta + \delta) z^2}{30\alpha k^2} - \frac{(10\alpha\lambda - 3\beta^2 - 5\beta\delta - 2\delta^2) z^3}{2400\alpha^2 k^4} + \\ + \frac{(450\alpha\beta\lambda + 330\alpha\delta\lambda - 79\beta^3 - 180\beta^2\delta - 135\beta\delta^2 - 34\delta^3) z^4}{1836000\alpha^3 k^6} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Построим для ряда (12) соответствующую непрерывную дробь. Вычисляя значения  $b_n$  по формулам (3), запишем выражения для последовательности  $B_n$  (7):

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{\beta + \delta}{30\alpha k^2}, \\
 B_2 &= -\frac{30\alpha\lambda - \beta^2 + \beta\delta + 2\delta^2}{7200\alpha^2 k^4}, \\
 B_3 &= -\frac{1}{29376000\alpha^3 k^6 (\beta + \delta)} \left( 15300\alpha^2 \lambda^2 - 1980\alpha\beta^2 \lambda - 2820\alpha\beta\delta\lambda - 840\alpha\delta^2 \lambda + 113\beta^4 + \right. \\
 &\quad \left. + 446\beta^3 \delta + 621\beta^2 \delta^2 + 356\beta\delta^3 + 68\delta^4 \right), \\
 B_4 &= -\frac{1}{5410080000\alpha^4 k^8 (30\alpha\lambda - \beta^2 + \beta\delta + 2\delta^2)} \left( 10\alpha\lambda - \beta^2 - \beta\delta \right) \left( 173400\alpha^2 \lambda^2 - 31870\alpha\beta^2 \lambda - \right. \\
 &\quad \left. - 47230\alpha\beta\delta\lambda - 16700\alpha\delta^2 \lambda + 1147\beta^4 + 3116\beta^3 \delta + 3537\beta^2 \delta^2 + 2180\beta\delta^3 + 612\delta^4 \right), \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

Начиная с  $n = 4$ , все величины  $B_n$  содержат общий множитель  $(10\alpha\lambda - \beta^2 - \beta\delta)$ . Приравняв его нулю, получаем условие

$$\lambda = \frac{\beta(\beta + \delta)}{10\alpha}, \tag{14}$$

при котором все  $B_n$ , начиная с  $n = 4$ , обращаются в ноль. Следовательно, непрерывная дробь, соответствующая ряду (12), обрывается и вырождается в подходящую дробь 4-го порядка (диагональную аппроксиманту Паде [2/2])

$$\frac{P_4}{Q_4} = [2/2] = \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + b_4 z}}} = \frac{3600\alpha^2 k^4 z}{[60\alpha k^2 + (\beta + \delta)z]^2}. \tag{15}$$

Степенной ряд (12) при выполнении (14) принимает вид:

$$u = z - \frac{(\beta + \delta)z^2}{30\alpha k^2} + \frac{(\beta + \delta)^2 z^3}{1200\alpha^2 k^4} - \frac{(\beta + \delta)^3 z^4}{54000\alpha^3 k^6} + \frac{(\beta + \delta)^4 z^5}{2592000\alpha^4 k^8} - \dots \tag{16}$$

Представив дробь (15) как сумму ряда геометрической прогрессии

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{z}{1 - \left( -\frac{(\beta + \delta)z}{30\alpha k^2} - \left( \frac{(\beta + \delta)z}{60\alpha k^2} \right)^2 \right)} = z \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{(\beta + \delta)z}{30\alpha k^2} - \left( \frac{(\beta + \delta)z}{60\alpha k^2} \right)^2 \right)^n$$

и группируя слагаемые последнего выражения по степеням  $z$ , получим ряд (16). Другими словами, построение непрерывной дроби позволяет перестроить ряд метода возмущений для уравнения (8) в геометрический таким образом, что сумма ряда совпадает с соответствующей подходящей дробью и представляет собой точное решение исходного уравнения. В самом деле, после обратной замены

$$z = \varepsilon u_1 = \varepsilon \exp(kx - \alpha k^5 t)$$

дробь (15) преобразуется к выражению

$$\frac{3600\alpha^2 k^4 \varepsilon \exp(kx - \alpha k^5 t)}{\left[ 60\alpha k^2 + (\beta + \delta) \varepsilon \exp(kx - \alpha k^5 t) \right]^2},$$

являющееся точным решением уравнения (8).

Заметим, что существует связь между порядком полюса решения уравнения и порядком подходящей дроби, обрывающей непрерывную дробь для ряда метода возмущений. В дан-

ном случае, уравнение (8), как и любое уравнение из иерархии КдВ, имеет решение с полюсом второго порядка,  $p = 2$ . Из (15) видно, что соответствующая подходящая дробь имеет порядок  $2p$ , то есть аппроксиманты Паде перестают изменяться, начиная с порядка  $[p/p]$ .

В качестве второго примера найдем решение неинтегрируемого уравнения Курамото-Сивашинского [3]

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \quad (17)$$

Подставляя (9) в (17), после группировки по степеням  $\varepsilon$  имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & u_{1t} + u_{1xx} + \alpha u_{1xxx} + \beta u_{1xxxx} = 0, \\ \varepsilon^2: & u_{2t} + u_{2xx} + \alpha u_{2xxx} + \beta u_{2xxxx} = -u_1 u_{1x}, \\ \varepsilon^3: & u_{3t} + u_{3xx} + \alpha u_{3xxx} + \beta u_{3xxxx} = -(u_1 u_2)_x, \\ \varepsilon^4: & u_{4t} + u_{4xx} + \alpha u_{4xxx} + \beta u_{4xxxx} = -(u_1 u_3)_x - u_2 u_{2x}, \\ & \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Первое уравнение системы (18) имеет частное решение  $u_1 = \exp(kx - \omega t)$  при условии

$$\omega = \beta k^4 + \alpha k^3 + k^2. \quad (19)$$

Последовательно получая решения следующих уравнений системы (18) в форме  $u_n = K_n u_1^n$ , после введения обозначения  $z = \varepsilon u_1$  для ряда (9) получим

$$\begin{aligned} u = z - \frac{z^2}{2k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} + \frac{z^3}{4k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} - \\ - \frac{(27\beta k^2 + 10\alpha k + 3)z^4}{24k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Анализ доминантных членов уравнения (17) показывает, что выражению (20) соответствует функция с полюсом 3-го порядка. Такая функция представляется подходящей дробью порядка не ниже  $P_6/Q_6$  или диагональной аппроксимантой Паде [3/3] и выше. Подходящие дроби высокого порядка являются достаточно громоздкими и трудно обозримыми даже с использованием современных систем компьютерной математики. Значительно упростить вычисления можно при помощи соответствующего преобразования ряда метода возмущений (20). Воспользуемся тем, что кубический корень из степенного ряда (20) соответствует функции с полюсом 1-го порядка.

Чтобы извлечь кубический корень из (20), составим уравнение

$$u = z^{-2} v^3, \quad (21)$$

в котором

$$v = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

и приравняем коэффициенты в обеих частях (21) при одинаковых степенях  $z$ . Разрешив полученные равенства относительно  $c_n$ , найдем

$$\begin{aligned} v = z - \frac{z^2}{6k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} + \frac{(8\beta k^2 + 5\alpha k + 2)z^3}{36k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2} - \\ - \frac{(210\beta^2 k^4 + 170\alpha\beta k^3 + 50\alpha^2 k^2 + 49\beta k^2 + 36\alpha k + 7)z^4}{324k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^3} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Как и ранее, вычислим для ряда (22) коэффициенты  $b_n$  соответствующей непрерывной дроби по формулам (3) и запишем выражения для последовательности  $B_n$  (7):

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{6k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)}, \\
 B_2 &= \frac{-5\beta k^2 + \alpha k + 1}{36k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2}, \\
 B_3 &= \frac{1}{648k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)^2(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^3} (1428\beta^3 k^6 + \\
 &\quad + 100\alpha\beta^2 k^5 - 115\alpha^2\beta k^4 + 25\alpha^3 k^3 - 514\beta^2 k^4 - 312\alpha\beta k^3 + 13\alpha^2 k^2 - 68\beta k^2 + 8\alpha k + 2), \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

Первой дробью из последовательности подходящих дробей (4), которой может соответствовать решение с полюсом 1-го порядка, является  $P_2/Q_2$  (аппроксиманта Паде [1/1]). Для того чтобы непрерывная дробь, соответствующая ряду (22), обрывалась и совпадала с  $P_2/Q_2$ , необходимо обращение в ноль всех величин (23), начиная с  $B_2$ . Из условия  $B_2 = 0$  находим

$$\alpha = \frac{5\beta k^2 - 1}{k}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), имеем

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{12k(11\beta k^2 - 1)}, \\
 B_2 &= 0, \\
 B_3 &= \frac{\beta k^2 - 1}{5184k^3(23\beta k^2 - 2)(11\beta k^2 - 1)^3}, \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{25}$$

Как видим, одного лишь условия (24) недостаточно. Потребовав, чтобы  $B_3 = 0$ , получим второе условие

$$\beta = \frac{1}{k^2}. \tag{26}$$

Двух условий (24), (26) достаточно, чтобы непрерывная дробь обрывалась и совпадала с подходящей дробью  $P_2/Q_2$ , которая в данном случае принимает вид

$$v = \frac{P_2}{Q_2} = [1/1] = \frac{120zk}{z + 120k}.$$

Подставляя найденное выражение для  $v$  в (21), получаем  $u$  в виде

$$u = \frac{120^3 k^3 z}{(z + 120k)^3}. \tag{27}$$

Возвращаясь в (27) к переменным  $x$  и  $t$  с учетом равенств (19), (24) и (26) получим точное решение уравнения Курасото-Сивашинского

$$u = \frac{120^3 k^3 \varepsilon \exp(kx - 6k^2 t)}{[\varepsilon \exp(kx - 6k^2 t) + 120k]^3}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176-а).

### Список литературы

1. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004
3. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом "Интеллект", 2010.
4. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
5. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9. №2. С. 182-191.
6. R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett. 1971. V.27. pp. 1192-1194.
7. Джоунс У. Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
8. Cohen H. Numerical Approximation Methods. New York: Springer-Verlag, 2011.
9. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Meshkov A.G, Sokolov V.V. Integrable evolution equations with the constant separant // Ufa Math. J. 2012. V.4, № 3, pp. 104-153.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.



## БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СВЯЗАННЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

**Иванов В.А., Купреев В.А., Ручинский В.С., Павлович Д.Д.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
(МАИ); Москва. e-mail: [2svr@mail.ru](mailto:2svr@mail.ru)

В данной работе изучается метод определения качественных структур и бифуркационных значений параметров движения связанных космических объектов, которые определяют всю совокупность характеристик управляемого движения тросовых систем на эллиптических орбитах.

*Ключевые слова:* КА – космический аппарат; НС – наноспутник; БО – базовый объект; ПО – привязной объект; ТС – тросовая система (связка); ЦМ – центр масс.

Орбитальные тросовые системы (ТС) представляют собой отдельно сформировавшееся направление перспективных технологий [1-7].

Принимая во внимание, что центр масс (ЦМ) ТС совершает движение по кеплеровой траектории, можно во многих случаях рассматривать только относительное движение связанных объектов [1]. При нахождении ТС на связи, расстояние до центра масс каждого из концевых объектов связки определяется через их соотношение масс, см. [3]. , поэтому далее будем рассматривать движение одного из концевых объектов относительно центра масс ТС (рис. 1).

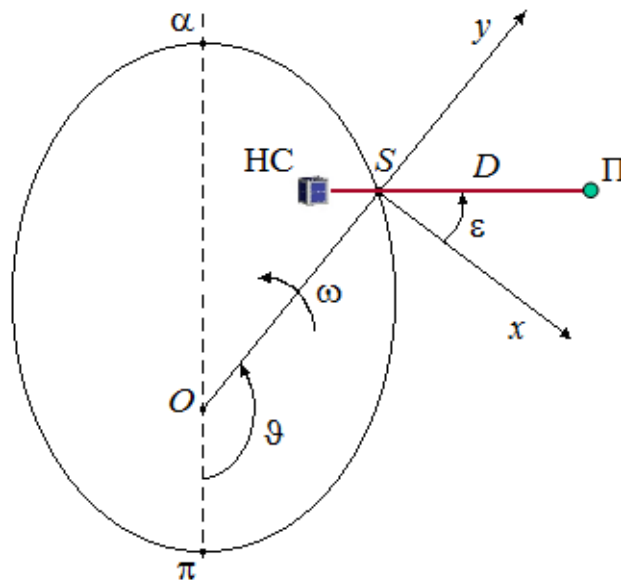


Рис. 1. Движение центра масс (точка S) тросовой системы по эллиптической орбите (π, α – перигей и апогей орбиты, П – привязной объект)

Введем следующие обозначения:

$D$  – расстояние между наноспутником (НС) и привязным объектом (П),

$$k = \frac{\dot{D}}{nD} = \frac{\dot{D}_1}{nD_1} = \frac{\dot{D}_2}{nD_2}; \quad \Omega_{\text{оп}} = \frac{\dot{\epsilon}}{n}; \quad D_r = \frac{D_{1,2}}{r}; \quad (1)$$

$n$  – средняя орбитальная угловая скорость центра масс АТУ:

$$n = \sqrt{\frac{\pi_0}{p}} \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{p}; \quad (2)$$

$D_{1,2}$  – расстояние между первым объектом связки (НС) и ЦМ ( $D_1$ ) или расстояние между вторым объектом связки (ПО) и ЦМ ( $D_2$ ), выбор конкретного значения подразумевает дальнейшее исследование продольного движения выбранного объекта связки относительно ЦМ;  $\varepsilon$  – текущее значение угла между осью  $x$  орбитальной системы координат и вектором относительной дальности выбранного объекта связки ( $\bar{D}_1$  или  $\bar{D}_2$ ).

$\vartheta$  – угол истинной аномалии, определяющий текущее положение центра масс ТС на орбите;

$\Omega_{\text{оп}} = \dot{\varepsilon}/n$  – безразмерная угловая скорость;

$e, p$  – соответственно эксцентриситет и фокальный параметр орбиты центра масс связки;  $\pi_0 = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$  – гравитационная постоянная Земли.

Поскольку на рис. 1 выбран привязной объект в составе ТС с номером «2», тогда  $D_{1,2} = D_2$ , а угол  $\varepsilon$  – текущее значение угла между осью  $x$  орбитальной системы координат и вектором относительной дальности  $\bar{D}_2$ .

Принимая во внимание (1) и переходя от независимой переменной времени к истинной аномалии  $\vartheta$ , запишем математическую модель относительного движения связки для компланарного случая в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\vartheta} &= \frac{1}{(1+e\cos\vartheta)^2} \left\{ (1-e^2)^{3/2} (\Omega_{\text{оп}}^2 - k^2) + (1+e\cos\vartheta)^2 \left[ 2\Omega_{\text{оп}} + \frac{(1+e\cos\vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{(1+e\cos\vartheta)^3}{D_r(1-e^2)^{3/2}} \left[ \sin\varepsilon - \frac{D_r + \sin\varepsilon}{(1+D_r^2 + 2D_r\sin\varepsilon)^{3/2}} \right] \right\} - \frac{\lambda p^2 (1+e\cos\vartheta)}{\pi_0 D_r (1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right); \\ \frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\vartheta} &= \frac{(1+e\cos\vartheta)}{(1-e^2)^{3/2}} \left\{ 2e\sin\vartheta + \frac{\cos\varepsilon}{D_r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+D_r^2 + 2D_r\sin\varepsilon)} \right] \right\} - \\ &- 2k \left[ 1 + \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}} \right]; \\ \frac{dD_r}{d\vartheta} &= \frac{D_r}{(1+e\cos\vartheta)} \left[ \frac{k(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)} - e\sin\vartheta \right]; \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для реальных размеров связки  $D_r \ll 1$ . Тогда, применяя для выражения  $(1+D_r^2 + 2D_r\sin\varepsilon)^{-3/2}$  формулу бинома Ньютона и отбрасывая в разложении члены второго и более высоких порядков малости можно получить, см. [1]:

$$\begin{aligned} (1+D_r^2 + 2D_r\sin\varepsilon)^{-3/2} &= 1 - 3D_r\sin\varepsilon. \\ \frac{dk}{d\vartheta} &= 2\Omega_{\text{оп}} + \frac{(1+e\cos\vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} + \frac{(\Omega_{\text{оп}}^2 - k^2)(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} - \\ &- \frac{(1+e\cos\vartheta)(1-3\sin 2\varepsilon)}{(1-e^2)^{3/2}} - \frac{\lambda p^2}{\pi_0 D_r (1-e^2)^{3/2} (1+e\cos\vartheta)} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right); \\ \frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\vartheta} &= -2k \left[ 1 + \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}} \right] + \frac{1+e\cos\vartheta}{(1-e^2)^{3/2}} \left( 2e\sin\vartheta + \frac{3}{2}\sin 2\varepsilon \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{dD_r}{d\vartheta} = \frac{D_r}{1 + e \cos \vartheta} \left[ \frac{k(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e \cos \vartheta} - e \sin \vartheta \right];$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}}.$$

Проведенные ранее исследования управляемого движения связки на круговых орбитах (например, [1]) показали достаточно высокую эффективность применения экспоненциального закона регулирования длины соединительного троса. Для эллиптических орбит этот закон записывается в виде соотношения:

$$\dot{D} = knD, \tag{5}$$

где  $k$  – некоторый постоянный параметр управления. Для безразмерной относительной дальности  $D_r$  закон (5) преобразуется в

$$\dot{D}_r = \frac{D_r}{p} \sqrt{\frac{\pi_0}{p}} \left[ k(1 - e^2)^{3/2} - e(1 + e \cos \vartheta) \sin \vartheta \right]. \tag{6}$$

Зависимость (5) может быть проинтегрирована

$$D = D_0 \exp(knt), \tag{7}$$

где  $D_0$  – начальное значение расстояния  $D$ . Для установления зависимости относительной дальности от текущего значения угла истинной аномалии можно воспользоваться уравнением

$$\frac{dD_r}{d\vartheta} = \frac{D_r}{1 + e \cos \vartheta} \left[ \frac{k(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e \cos \vartheta} - e \sin \vartheta \right]. \tag{8}$$

Необходимо теперь записать математическую модель, определяющую вращательное движение связки вокруг ЦМ. Воспользуемся уравнениями (4). В случае экспоненциального закона регулирования длины троса первое уравнение этой системы пропадает, так как  $k = const$ , а продольное движение связки характеризуется зависимостями (5) – (7). Следовательно, математическая модель управляемого углового движения определяется следующей системой двух уравнений:

$$\frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\vartheta} = \frac{1 + e \cos \vartheta}{(1 - e^2)^{3/2}} \left( 2e \sin \vartheta + \frac{3}{2} \sin 2\varepsilon \right) - 2k \left[ 1 + \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}} \right]; \tag{9}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}}.$$

Значения параметра  $k$  выбирается с учетом реализации требуемого относительного движения связанных объектов. Чтобы движение связки происходило при натянутом тросе необходимо выполнение условия:

$$\left[ (1 - e^2)^{3/2} \Omega_{\text{оп}} + (1 + e \cos \vartheta)^2 \right]^2 - (1 - 3 \sin^2 \varepsilon)(1 + e \cos \vartheta)^3 > (1 - e^2)^3 k^2. \tag{10}$$

При экспоненциальном законе регулирования параметр управления  $k = const$ . Однако, уравнения (9) определяют угловое движение связки и при переменном параметре  $k$ . Поэтому, используя (9), можно выбрать такой закон изменения  $k$ , при котором обеспечивается требуемый характер углового движения связки.

Для математической модели в случае круговой орбиты БО в системе (9) необходимо принять  $e = 0$ , а угол истинной аномалии заменить текущей угловой дальностью  $\varphi = \omega t$  ( $\omega$  – орбитальная угловая скорость движения БО). Таким образом, уравнения (9) могут быть

трансформированы в известную математическую модель углового движения связки на круговых орбитах при экспоненциальном законе регулирования длины троса, см.[12].

$$\frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\varphi} = \frac{3}{2} \sin 2\varepsilon - 2k(1 + \Omega_{\text{оп}}); \quad \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \Omega_{\text{оп}}. \quad (11)$$

Математическая модель (1.89) представляет собой автономную динамическую систему, для исследования которой может быть использован математический аппарат качественной теории динамических систем и теории бифуркаций, см. [8].

Значения параметра  $k$  выбирается с учетом реализации требуемого относительного движения связанных объектов.

При фиксированной длине натянутого троса  $k = 0$  и поэтому система уравнений (9) трансформируется в динамическую систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{\text{оп}}}{d\vartheta} &= \frac{1 + e \cos \vartheta}{(1 - e^2)^{3/2}} \left( 2e \sin \vartheta + \frac{3}{2} \sin 2\varepsilon \right), \\ \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \Omega_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Условие поддержания троса в натянутом состоянии определяется неравенством

$$\left[ (1 - e^2)^{3/2} \Omega_{\text{оп}} + (1 + e \cos \vartheta)^2 \right]^2 - (1 - 3 \sin^2 \varepsilon)(1 + e \cos \vartheta)^3 > 0. \quad (13)$$

Наибольший практический интерес имеет изучение относительное движение элементов ТС при натянутом тросе.

Анализ условия (13) показывает, что для угловых диапазонов ориентации связки  $35,264^\circ < \varepsilon < 144,736^\circ$  и  $-144,736^\circ < \varepsilon < -35,264^\circ$  движение АТУ при любых значениях  $e$ ,  $\Omega_{\text{оп}}$ ,  $\vartheta$  будет происходить при натянутом тросе. При прохождении значений  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = 180^\circ$  система будет на связи при выполнении условий:

$$\Omega_{\text{оп}} > \frac{1 - \sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{(1 + e^2)^3}}, \quad \Omega_{\text{оп}} < -\frac{1 + \sqrt{(1 + e^2)}}{\sqrt{(1 - e^2)^3}}. \quad (14)$$

Движение ТС при  $D = \text{const}$  в зависимости от начальных условий может осуществляться либо в режиме колебаний связки относительно вертикального положения, либо в режиме вращения вокруг ЦМ. С практической точки зрения наибольший интерес представляет режим колебаний, так как режим вращения имеет ограничения только по условиям схода системы со связи (14).

В таблицах 1 – 3 приведены результаты математического моделирования колебаний ТС с использованием (12) и (13) для различных исходных данных. Данные таблицы 1 иллюстрируют колебания связки на эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e = 0,3$  для  $\varepsilon_0 = \pm 90^\circ$  и  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\Omega_{\text{оп}} = 0$ . В случае  $\varepsilon_0 = 90^\circ$  колебания НС происходят над ЦМ, а в случае  $\varepsilon_0 = -90^\circ$  – под ЦМ. Видно, что эти колебания совершаются симметрично. Для каждого значения угла  $\vartheta$ , определяющего положение ЦМ на эллиптической орбите, разница между углами  $\varepsilon$  (для  $\varepsilon_0 = 90^\circ$  и  $\varepsilon_0 = -90^\circ$ ) составляет  $180^\circ$ . Первый и второй объекты ТС все время располагаются на одной прямой. Это следовало ожидать по физическим соображениям и исходя из уравнений колебаний. Безразмерные угловые скорости  $\Omega_{\text{оп}}$  для колебаний вверху и внизу оказываются равными. Поэтому достаточно рассмотреть колебания НС только в верхней полусфере (над ЦМ). По мере движения ТС от перигея к апогею угол  $\varepsilon$  сначала возрастает, достигая  $\varepsilon_{\text{max}} = 117^\circ$  при  $\vartheta = 140^\circ$ , а затем начинает убывать до  $\varepsilon_{\text{min}} = 60^\circ$  при  $\vartheta = 250^\circ$ . Далее при движении связки угол  $\varepsilon$  снова возрастает и по завершении связкой одного витка по орбите  $\varepsilon$  достигает  $95^\circ$ , то есть на  $5^\circ$  больше первоначального значения. Таким образом,

на первом витке угол  $\varepsilon$  изменяется от  $60^\circ$  до  $117^\circ$ , то есть соответствует диапазону, в котором система находится на связи. Угловая скорость  $\Omega_{op}$  в процессе колебаний на первом витке связи изменяется от  $-0,511$  до  $0,703$ .

Таблица 1

**Колебания ТС при  $e = 0,3$ , для  $\varepsilon_0 = \pm 90^\circ$**

$\vartheta$	$\varepsilon_0 = 90^\circ$		$\varepsilon_0 = -90^\circ$	
	$\varepsilon$	$\Omega_{op}$	$\varepsilon$	$\Omega_{op}$
0	$90^\circ$	0	$-90^\circ$	0
$20^\circ$	$90,186^\circ$	0,0525	$-89,814^\circ$	0,0525
$40^\circ$	$91,452^\circ$	03,1852	$-88,548^\circ$	03,1852
$60^\circ$	$94,665^\circ$	0,3325	$-85,335^\circ$	0,3325
$80^\circ$	$100,162^\circ$	0,4160	$-79,838^\circ$	0,4160
$100^\circ$	$107,279^\circ$	0,3813	$-72,721^\circ$	0,3813
$120^\circ$	$113,696^\circ$	0,2265	$-66,031^\circ$	0,2265
$140^\circ$	$116,904^\circ$	-0,0073	$-63,096^\circ$	-0,0073
$160^\circ$	$112,489^\circ$	-0,2647	$-67,511^\circ$	-0,2647
$180^\circ$	$99,403^\circ$	-0,4665	$-80,597^\circ$	-0,4665
$200^\circ$	$81,897^\circ$	-0,5056	$-98,103^\circ$	-0,5056
$220^\circ$	$67,735^\circ$	-0,3628	$-112,265^\circ$	-0,3628
$240^\circ$	$61,018^\circ$	-0,1252	$-118,982^\circ$	-0,1252
$260^\circ$	$61,024^\circ$	0,1357	$-118,976^\circ$	0,1357
$280^\circ$	$65,506^\circ$	0,3828	$-114,494^\circ$	0,3828
$300^\circ$	$72,443^\circ$	0,5800	$-107,557^\circ$	0,5800
$320^\circ$	$80,296^\circ$	0,6890	$-99,704^\circ$	0,6890
$340^\circ$	$87,957^\circ$	0,6903	$-92,043^\circ$	0,6903
$360^\circ$	$94,704^\circ$	0,5975	$-85,296^\circ$	0,5975

В таблице 2 приведены максимальные и минимальные величины угла  $\varepsilon$  и угловой скорости  $\Omega_{op}$  для шести витков связки по орбите. Видно, что от витка к витку предельные значения угла  $\varepsilon$  и угловой скорости  $\Omega_{op}$  несколько изменяются.

Таблица 2

**Предельные отклонения угла  $\varepsilon$  и угловой скорости  $\Omega_{op}$  при колебаниях ТС на 6 витках при  $e = 0,3$ ,  $\varepsilon_0 = 90^\circ$ ,  $(\Omega_{op})_0 = 0$**

№ витка	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_{max}$	$116,904^\circ$	$107,590^\circ$	$124,508^\circ$	$102,549^\circ$	$117,284^\circ$	$119,554^\circ$
$\vartheta$	$140^\circ$	$90^\circ$	$130^\circ$	$140^\circ$	$110^\circ$	$140^\circ$
$\varepsilon_{min}$	$60,317^\circ$	$78,544^\circ$	$55,774^\circ$	$70,685^\circ$	$66,268^\circ$	$58,322^\circ$
$\vartheta$	$250^\circ$	$310^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$220^\circ$	$250^\circ$
$(\Omega_{op})_{max}$	0,7030	0,5273	0,7246	0,6171	0,6295	0,7350
$\vartheta$	$330^\circ$	$20^\circ$	$60^\circ$	$360^\circ$	$40^\circ$	$320^\circ$
$(\Omega_{op})_{min}$	-0,5112	-0,2127	-0,6207	-0,2658	-0,4624	-0,5580
$\vartheta$	$190^\circ$	$160^\circ$	$190^\circ$	$210^\circ$	$160^\circ$	$190^\circ$

Данные таблицы 3 иллюстрируют зависимость экстремальных величин угла  $\varepsilon$  и угловой скорости  $\Omega_{op}$  от эксцентриситета орбиты ЦМ ТС  $e$  для одного витка связки по орбите. С увеличением эксцентриситета  $e$  амплитуда колебаний связки  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$  и изменение угловой скорости  $\Delta\Omega_{op} = (\Omega_{op})_{max} - (\Omega_{op})_{min}$  возрастают. Так для  $e = 0,05$ ,  $\Delta\varepsilon = 7,90^\circ$ ,  $\Delta\Omega_{op} = 0,177$ ; для  $e = 0,1$ ,  $\Delta\varepsilon = 15,97^\circ$ ,  $\Delta\Omega_{op} = 0,346$ ; для  $e = 0,3$ ,  $\Delta\varepsilon = 56,59^\circ$ ,  $\Delta\Omega_{op} = 1,214$ .

Таблица 3

**Колебания ТС при различных значениях эксцентриситета орбиты ЦМ**

для  $\varepsilon_0 = 90^\circ$ ,  $(\Omega_{op})_0 = 0$

$e$ Параметры	0,05	0,1	0,3
$\varepsilon_{max}$ g	93,482° 130°	97,223° 130°	116,904° 140°
$\varepsilon_{min}$ g	85,584° 260°	81,249° 260°	60,317° 250°
$(\Omega_{op})_{max}$ $\varepsilon$ g	0,0854 88,726° 320°	0,1703 87,655° 320°	0,7030 84,205° 330°
$(\Omega_{op})_{min}$ $\varepsilon$ g	-0,0912 89,233° 200°	-0,1754 88,116° 200°	-0,5112 90,711° 190°

**Выводы**

В данной работе предложен эффективный способ формирования режимов управляемого движения связанных космических объектов для решения практических задач.

Метод, базирующийся на математическом аппарате качественной теории динамических систем и теории бифуркаций, позволяет установить все типы качественных структур динамической системы управляемого движения связанных объектов, определить все бифуркации изучаемой системы и бифуркационные значения параметров, которые определяют всю совокупность характеристик управляемого движения ТС на эллиптических орбитах. Это дает возможность составить полное представление о характере возможных траекторий управляемого движения ТС при любых значениях параметра управления, при любых начальных условиях движения и на любом отрезке времени.

**Список литературы**

1. *Иванов, В.А Ситарский Ю.С.* Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. - М.: Машиностроение, 1986. – 248 с.
2. *Алпатов, А.П.* Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями/ *А.П. Алпатов [и др.]* – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 559 с

3. *Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С.* Разработка и исследование математических моделей движения связанных космических объектов при испытаниях летательных аппаратов и спуске с орбиты на Землю : учеб. пособие. МАТИ-Российский гос. технол. ун-т им. К.Э. Циолковского, Хабаров. гос. техн. университет. – Хабаровск: изд-во ХГТУ, 2001. -72 с.
4. *Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С.* Динамика полета и математическое моделирование орбитального функционирования системы связанных космических объектов. - М.: ИЦ «МАТИ»-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 2008. - 200 с.
5. *Иванов В.А., Купреев С.А., Либерзон М.Р.* Сближение в космосе с использованием тросовых систем. – М.: Хоружевский, 2010. – 360 с.
6. *Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С.* Космические тросовые системы. – М.: Альфа-М: ИНФРА-М, 2014. -208 с.
7. *Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С.* Орбитальное функционирование связанных космических объектов. – М.: ИНФРА-М , 2014. -320 с.
8. Андронов, А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488 с.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОРОВАЗКОУПРУГОЙ ДИНАМИКИ

Л.А. Игумнов, А.А. Ипатов, С.Ю. Литвинчук

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Научно-исследовательский институт механики  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: ipatov@mech.unn.ru

Исследуется динамика трехмерных поровязкоупругих тел. Поровязкоупругая постановка опирается на полную модель насыщенного пороупругого среды Био. Для описания вязкоупругих свойств скелета используются классические модели вязкоупругости, такие как модель стандартного вязкоупругого тела и модель со слабосингулярным ядром. Приведены дифференциальные уравнения для полной модели Био в преобразованиях Лапласа. Решение исходной задачи строится в пространстве Лапласа. Для получения решения в изображениях по Лапласу записывается система граничных интегральных уравнений (ГИУ) прямого подхода. Рассматриваются регуляризованные ГИУ и вводится согласованная гранично-элементная дискретизация. Применяются согласованная поэлементная аппроксимация и метод коллокации. Численное обращение преобразования Лапласа реализовано на основе модифицированного алгоритма Дурбина с переменным шагом интегрирования. Рассматривается задача о действии возрастающего давления в сферической полости поровязкоупругого куба.

**Ключевые слова:** трехмерные краевые задачи, метод граничных элементов, классические модели вязкоупругости, поровязкоупругость, обращение преобразования Лапласа.

### Введение

В развитии механики пористых материалов заинтересованы специалисты химических, нефтехимических отраслей, а также специалисты по механике грунтов и биомеханике. Для широкого класса насыщенных материалов, таких как водонасыщенные грунты, насыщенные нефтепродуктами скальные породы и другие образования с воздушными порами классическая теория упругости не может быть применена для корректного их описания. Возникла необходимость развития новой теории, началом развития такой теории стали работы Френкеля Дж. [1] и М. Biot [2–4]. Модель Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды, состоящей из упругого скелета и жидкого или газообразного наполнителя. В последующие годы теория получила распространение на анизотропный случай и так же для динамики. Состояние вопроса можно составить по работам M.Schanz [5], R. de Boer [6] и др. [7–9]. Некоторые аналитические решения для насыщенных пористых материалов в одномерном случае были получены в работах [10–12].

Классическая теория вязкоупругости представлена, к примеру, у Кристенсена Р. [13]. Теория пористых материалов обладающих вязкоупругими свойствами впервые была предложена М. Biot [4]. В дальнейшем на эту тему были опубликованы работы по квази-статике R.K. Wilson и E.C. Aifantis [14] и динамики I. Vgenopoulou и D.E. Beskos [15]. Одномерное аналитическое решение для стержня в случае динамической поровязкоупругости представлено М. Schanz и Cheng [16].

### Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений теории Био в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования  $s$ ) для смещения  $\hat{u}_i$  и порового давления  $\hat{p}$  принимает вид [5]:

$$G\hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\hat{u}_{j,ij} - (\psi - \beta)\hat{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_i = -\hat{F}_i,$$
$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\psi - \beta)s\hat{u}_{i,i} = -\hat{a},$$



$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2s^2}{\phi^2s + s^2k(\rho_a + \phi\rho_f)}, R = \frac{\phi^2K_fK_s^2}{K_f(K_s - K) + \phi K_s(K_s - K_f)}$$

где  $G, K$  – константы упругости,  $\phi$  – пористость,  $k$  – проницаемость,  $\psi$  – эффективный коэффициент напряжений,  $\rho, \rho_a, \rho_f$  – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды,  $\hat{F}_i, \hat{a}$  – объемные силы.

Рассмотрим следующие типы граничных условий:

$$u_l(x, s) = f_l(x, s), u_4(x, s) = p(x, s) = f_4(x, s), x \in \Gamma^u, l = \overline{1, 3},$$

$$t_l(x, s) = g_l(x, s), t_4(x, s) = q(x, s) = g_4(x, s), x \in \Gamma^\sigma, l = \overline{1, 3},$$

где  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^\sigma$  – части границы  $\Gamma$ , где заданы соответствующие обобщенные перемещения и обобщенные поверхностные усилия.

*Поровязкоупругое* решение рассчитывается из пороупругого решения путем пересчета модулей упругости  $K$  и  $G$  в области, преобразованной по Лапласу, и получения функций  $\hat{K} = \hat{K}(s)$  и  $\hat{G} = \hat{G}(s)$ .

Модель стандартного вязкоупругого тела:

$$\hat{K}(s) = K \cdot \left[ (\omega^2 - 1) \frac{is}{is + \gamma} + 1 \right], \hat{G}(s) = G \cdot \left[ (\omega^2 - 1) \frac{is}{is + \gamma} + 1 \right].$$

Модель со слабосингулярным ядром типа Абеля:  $\bar{K} = \frac{K}{1 + hs^{\alpha-1}}, \bar{G} = \frac{G}{1 + hs^{\alpha-1}}$

Вектор перемещений во внутренних точках связан с перемещениями на границе и поверхностными усилиями следующим образом:

$$u_l(x, s) = \int_{\Gamma_k} U_{lj}^s(x, y, s) t_j(y, s) d_y S - \int_{\Gamma_k} T_{lj}^s(x, y, s) u_j(y, s) d_y S, l = 1, 2, 3, x \in \Omega,$$

где  $U_{lj}$  и  $T_{lj}$  – компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений.

### Метод решения

Пусть  $s = \alpha + i\omega$ , тогда обратное преобразование Лапласа методу Дурбина [17] запишется в виде:

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \bar{f}(\alpha + i\omega) \right] d\omega, f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[ \bar{f}(\alpha + i\omega) \right] \cos \omega t - \operatorname{Im} \left[ \bar{f}(\alpha + i\omega) \right] \sin \omega t \right\} d\omega, t > 0.$$

Модификация метода Дурбина на основе формул трапеций с переменным шагом для всей подынтегральной функции имеет вид:

$$f(0) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(f(\alpha + i\omega_k) + f(\alpha + i\omega_{k+1}))}{2\pi} \Delta_k, f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{(f(\alpha + i\omega_k) e^{i\omega_k t} + f(\alpha + i\omega_{k+1}) e^{i\omega_{k+1} t})}{2} \Delta_k.$$

Использование варианта метода Дурбина с переменным шагом позволяет уменьшить время, необходимое для решения задачи, не теряя при этом в точности полученного решения.

Применяется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) для получения численных решений. Решение задачи строится в пространстве Лапласа.

Численная схема основана на прямом подходе с использованием формулы Грина-Бетти-Соммильяны. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное уравнение:

$$\alpha_{\Omega} v_k(x, s) + \int_S (T_{ik}(x, y, s) v_i(y, s) - T_{ik}^0(x, y, s) v_i(x, s) - U_{ik}(x, y, s) t_i(y, s)) dS = 0,$$

$$(x \in S), \quad t = [t_1, t_2, t_3, q]^T, \quad u(u_1, u_2, u_3, p),$$

где  $\tilde{U}_{ik}, \tilde{T}_{ik}$  – матрицы фундаментальных и сингулярных решений;  $\tilde{T}_{ik}^0$  – матрица компонент, содержащих особенности.

В качестве функций формы при описании границы тела выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. При поэлементном численном интегрировании используется метод Гаусса и иерархический алгоритм интегрирования. Гранично-элементные схемы созданы на основе согласованной аппроксимации граничных функций. Применяется метод коллокации. Решения в явном времени строятся с использованием модифицированного алгоритма Дурбина

### Численные примеры

Рассматривается изотропный поровязкоупругий куб с ребром  $L = 2$ , содержащий сферическую полость радиуса  $R = 0.5$  м (рис. 1). Куб жестко закреплен на грани  $x_3 = -1$  м и полость подвержена равномерно распределенному внутреннему давлению:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ с} \\ P_0 t / 0.0005, & \text{для } 0 \leq t \leq 0.0005 \text{ с} \\ P_0, & \text{для } t > 0.0005 \text{ с}, \end{cases} \quad P_0 = 10^5 \text{ Па.}$$

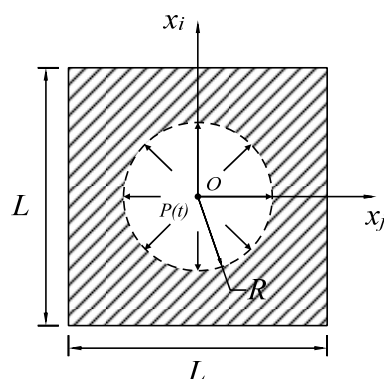


Рис. 1. Куб со сферической полостью.

Исходный пороупругий материал – песчаник Berea. Параметры пористого материала :  $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2$ ,  $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2$ ,  $\rho = 2458 \text{ кг / м}^3$ ,  $\phi = 0.66$ ,  $K_s = 3.6 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг / м}^3$ ,  $K_f = 3.3 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2$ ,  $k = 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4 / (\text{Н} \cdot \text{с})$ . Вводится гранично-элементная сетка, содержащая 432 элемента и 436 узлов.

На рис.2, 3. продемонстрированы динамические отклики перемещений  $u_3(t)$  и поровых давлений  $p(t)$  соответственно в узле с координатами  $(0, 0, 1)$  м. Проведено сравнение пороупругих решений с поровязкоупругими решениями, полученными по модели стандартного вязкоупругого тела с различными значениями параметров модели  $\omega = 2$ ,  $\gamma = 1000, 100, 1$  и  $0.1$ .

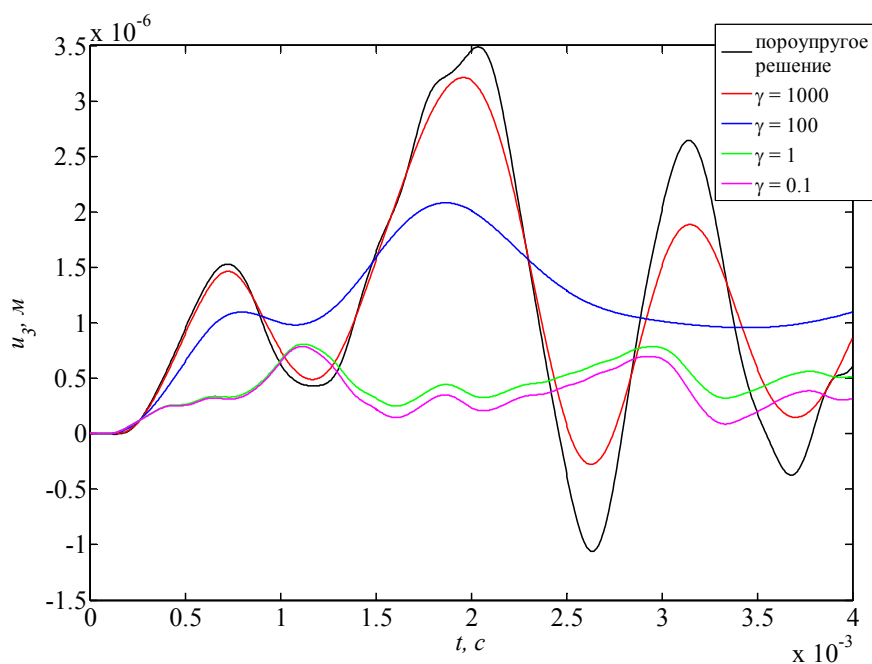


Рис. 2. Перемещения  $u_3$  в точке  $(0, 0, 1)$  м.

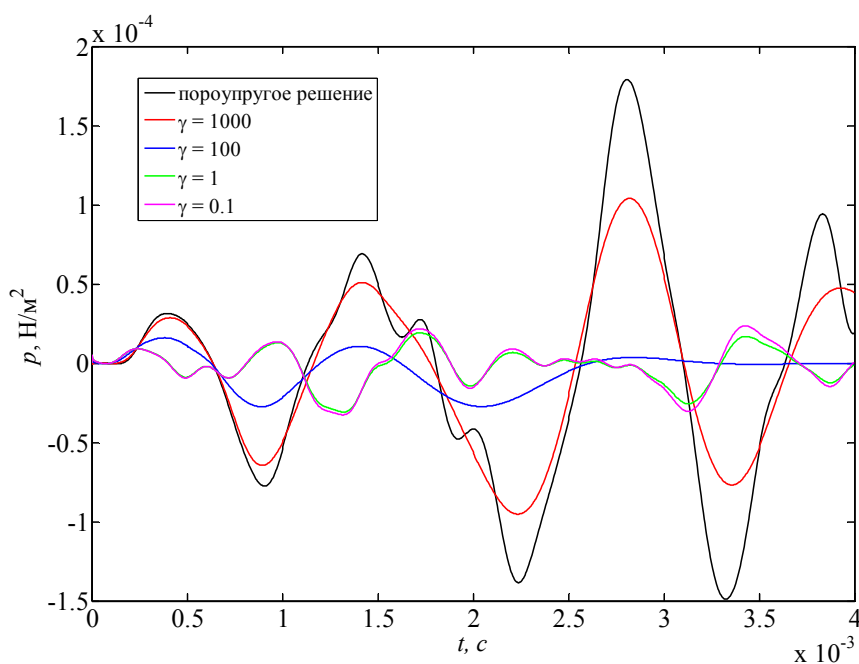


Рис. 3. Поровые давления  $p$  в точке  $(0, 0, 1)$  м.

На Рис. 4, 5. продемонстрированы динамические отклики перемещений  $u_3(t)$  и поровых давлений  $p(t)$  соответственно в узле с координатами  $(0, 0, 1)$  м. Проведено сравнение пороупругих решений с поровязкоупругими решениями в случае модели со слабосингулярным ядром Абелевого типа.

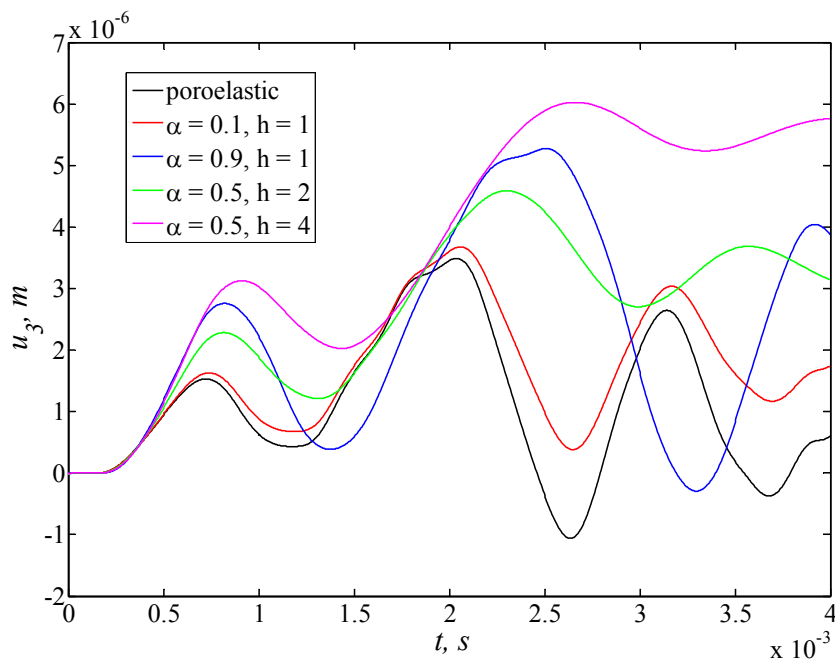


Рис. 4. Перемещения  $u_3$  в точке  $(0, 0, 1)$  м.

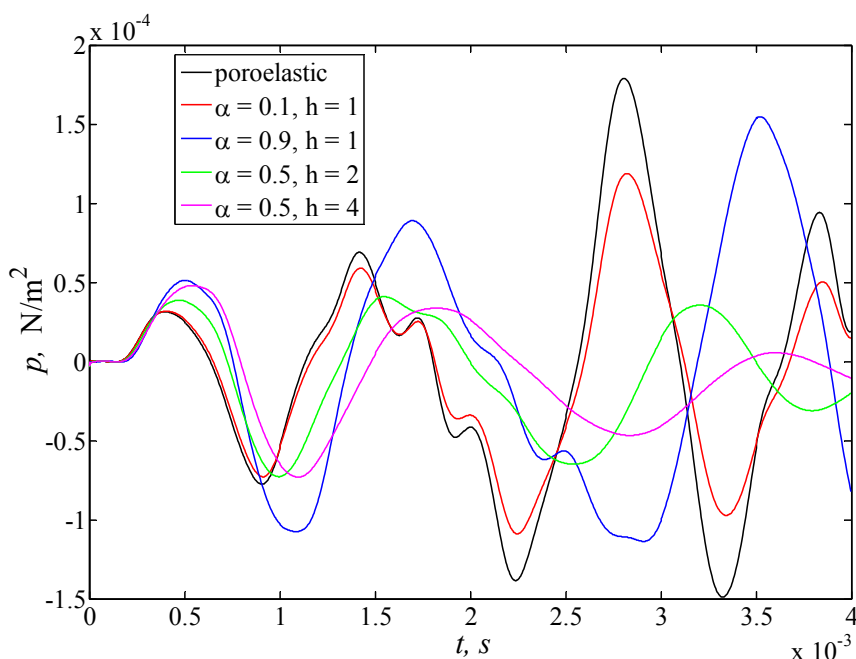


Рис. 5. Поровые давления  $p$  в точке  $(0, 0, 1)$  м.

### Заключение

Исследуется распространение волн в поровязкоупругом материале. Приведена система дифференциальных уравнений для полной модели Био в преобразованиях Лапласа. Для описания вязкоупругих свойств скелета используется модель стандартного вязкоупругого тела. Численное обращение преобразования Лапласа реализовано на основе модифицированного алгоритма Дурбина с переменным шагом интегрирования. Получены численные решения задачи о действии возрастающего давления в сферической полости поровязкоупругого куба. Продемонстрировано влияние вязкости материала на динамические отклики перемещений и поровых давлений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты № 16-31-450-мол\_а, 14-08-00811-а, 15-48-02333\_поволжье)

### Список литературы

1. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil // *Journal of Physics*, 1944. Vol. 8, pp 230-241.
2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // *J. Appl. Phys.* 1941. Vol. 12(2), pp.155-164.
3. Biot M.A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid // *J. Appl. Phys.* 1956. Vol. 27(5), pp.459-467
4. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // *J. Appl. Phys.* 1955. Vol. 26(2), pp.182-185.
5. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua*. Berlin Springer, 2001.170 p.
6. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods // *Appl. Mech. Rev.* 2009, 62(3), 15 p.
7. de Boer R. Erratum: "Highlights in the Historical Development of the Porous Media Theory: Toward a Consistent Macroscopic Theory" // *Appl. Mech. Rev.* 1996. Vol. 49(4), pp. 201-262.
8. Nikolaevskiy V. N. Biot–Frenkel Poromechanics in Russia (Review) // *J. Eng. Mech.* Vol. 131(9), pp. 888-897.
9. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media // *J Appl Phys* 1974. Vol. 45, pp.1968-1974.
10. Simon B.R., Zienkiewicz O.C., Paul D.K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids // *Int J Num Anal Meth Geomech* 1984. Vol. 8, pp.381-398.
11. Schanz M., and Cheng A. H.-D., Transient Wave Propagation in a One-Dimensional Poroelastic Column // *Acta Mech.* 2000. Vol. 145, pp. 1-8.
12. de Boer R., Wolfqang E., Liu Z.F. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media // *Arch Appl Mech* 1993. Vol. 63, pp.59-72.
13. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
14. Wilson R. K., Aifantis E. C. On the Theory of Consolidation With Double Porosity // *Int. J. Eng. Sci.* 1982. Vol. 20, pp. 1009-1035.
15. Vgenopoulou I. and Beskos D. E., Dynamic Behavior of Saturated Poroviscoelastic Media // *Acta Mech.* 1992. Vol. 95, pp. 185-195.
16. Schanz M., and Cheng A. H.-D. Dynamic Analysis of a One-Dimensional Poroviscoelastic Column // *J. Appl. Mech.* 2001. Vol. 68, pp.192-198.
17. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // *Computer Journal* 1974, Vol. 17, №4. pp. 371-376.

## ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

**Л.А.Игумнов, И.П.Марков**

Научно-исследовательский институт механики Национального Исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6, e-mail: [markov@mech.unn.ru](mailto:markov@mech.unn.ru)

В докладе представлена схема прямого подхода метода граничных элементов для решения трехмерных задач теории электромагнитоупругости. Гранично-элементная методика основана на граничном интегральном уравнении для перемещений. Пространственная дискретизация опирается на совместное использование смешанных граничных элементов и метода коллокаций. Приведены результаты статического и динамического гранично-элементного моделирования.

*Ключевые слова:* метод граничных элементов, электромагнитоупругость, интегральное уравнение, преобразование Лапласа, связанные задачи, анизотропия

### Введение

Электромагнитоупругие материалы обладают ярко выраженной способностью преобразовывать один вид энергии в другой (между механической, энергией электрического и магнитного полей). Подобная связность полей различной физической природы делает электромагнитоупругие материалы востребованными во многих областях науки и техники. Для решения статических и динамических задач электромагнитоупругости за последние два десятилетия были предложены различные полуаналитические и численные методы [1-10], однако область их применения часто ограничена двумерным случаем или частными случаями геометрии рассматриваемой области.

Метод граничных элементов (МГЭ) имеет ряд известных преимуществ перед широко используемыми методами конечных элементов и конечных разностей и может быть использован для численного моделирования статики и динамики электромагнитоупругих тел. Существенная специфика применения МГЭ для решения подобных задач связана с отсутствием явных выражений для фундаментальных решений. Различные выражения для трехмерных статических функций Грина можно найти в работах [11, 12]. Получение динамических функций Грина подробно изложено в работе [13].

В докладе представлено совместное использование прямого подхода МГЭ и интегрального преобразования Лапласа по переменной времени для решения статических и нестационарных динамических задач электромагнитоупругости. Предложенная гранично-элементная схема основана на интегральных выражениях фундаментальных решений. Пространственная дискретизация опирается на использование смешанных граничных элементов [14]. Приведены результаты численного моделирования.

### Постановка задачи

Рассматривается трехмерное однородное твердое тело занимающее объем  $\Omega \subset R^3$ , ограниченный поверхностью  $\Gamma = \partial\Omega$ . При отсутствии массовых сил, свободных зарядов и тока проводимости и при допущении, что электрическое и магнитное поля являются квазистатическими, основные уравнения электромагнитоупругости принимают вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i \text{ в } \Omega, \quad i, j = \overline{1,3}, \\ D_{i,i} &= 0 \text{ в } \Omega, \\ B_{i,i} &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijlm}^E \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k - q_{kij} H_k \text{ в } \Omega, \quad k, l = \overline{1,3}, \\ D_i &= e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \gamma_{ij} E_j + \lambda_{ij} H_j \text{ в } \Omega,\end{aligned}$$

$$B_i = q_{ijk} \varepsilon_{jk} + \lambda_{ij} E_j + \mu_{ij} H_j \text{ в } \Omega,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ в } \Omega,$$

$$E_i = -\phi_{,i} \text{ в } \Omega,$$

$$H_i = -\psi_{,i} \text{ в } \Omega,$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $B_i$  – тензор напряжений, вектор электрической индукции и вектор магнитной индукции;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $E_i$ ,  $H_i$  – тензор деформаций, вектор напряженности электрического поля и вектор напряженности магнитного поля;  $u_i$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  – это упругие перемещения, электрический и магнитный потенциалы;  $\rho$  – плотность материала.  $C_{ijkl}^E$ ,  $e_{ijk}$ ,  $q_{ijk}$  обозначают тензоры упругих модулей, пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств;  $\lambda_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  это магнито-электрические коэффициенты, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей. Справедливы следующие соотношения симметрии:

$$C_{ijkl}^E = C_{klij}^E = C_{jikl}^E = C_{ijlk}^E, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad q_{ijk} = q_{ikj}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Для объединения переменных в обобщенные векторы и тензоры вводятся следующие обозначения:

$$U_k = \begin{cases} u_k, & k = \overline{1,3}, \\ \phi, & k = 4, \\ \psi, & k = 5, \end{cases}$$

$$T_j = \begin{cases} t_j = \sigma_{jk} n_k, & j = \overline{1,3}, \\ D_n = D_k n_k, & j = 4, \\ B_n = B_k n_k & j = 5, \end{cases}$$

$$C_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}^E, & i, j, k, l = \overline{1,3}, \\ e_{lij}, & i, l, j = \overline{1,3}, k = 4, \\ e_{ikl}, & i, l, k = \overline{1,3}, j = 4, \\ q_{lij}, & i, l, j = \overline{1,3}, k = 5, \\ q_{ikl}, & i, l, k = \overline{1,3}, j = 5, \\ -\lambda_{il}, & i, l = \overline{1,3}, j = 4, k = 5 \text{ или } k = 4, j = 5, \\ -\gamma_{il}, & i, l = \overline{1,3}, j, k = 4, \\ -\mu_{il}, & i, l = \overline{1,3}, j, k = 5, \end{cases}$$

где  $n_k$  – это компоненты единичного вектора внешней нормали к границе.

Совместное использование интегрального преобразования Лапласа по переменной времени и введенных обобщенных обозначений позволяет записать уравнения движения сплошной электромагнитоупругой среды в виде:

$$C_{ijkl} \bar{U}_{k,il} = \rho s^2 \delta_{jk}^* \bar{U}_k, \quad i, l = \overline{1,3}, \quad j, k = \overline{1,5},$$

$$\delta_{jk}^* = \begin{cases} \delta_{jk}, & j, k = \overline{1,3}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $s$  – это параметр интегрального преобразования Лапласа.

Обобщенные граничные условия записываются в виде:

$$\bar{U}_k = \bar{U}_k^*, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_U,$$

$$\bar{T}_k = \bar{T}_k^*, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T.$$

### Гранично-элементная схема

Гранично-интегральные уравнения (ГИУ) для обобщенных перемещений имеют вид:

$$c_{jk} \bar{U}_k(\mathbf{x}, s) = \int_{\Gamma} \bar{g}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{T}_k(\mathbf{y}, s) d\Gamma(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} \bar{h}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{U}_k(\mathbf{y}, s) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где  $\mathbf{x}$  – это точка коллокации,  $\mathbf{y}$  – точка наблюдения;  $\bar{g}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  и  $\bar{h}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  – динамические фундаментальные и сингулярные решения в изображениях по Лапласу.

Граница области аппроксимируется четырехугольными восьмиузловыми элементами. Пространственная дискретизация ГИУ основана на применении смешанных граничных элементов: обобщенные перемещения и поверхностные усилия интерполируются на каждом граничном элементе линейными и постоянными функциями формы, соответственно. Для получения решения во временной области используется модифицированный метод Дурбина численного обращения преобразования Лапласа. Фундаментальные решения в изображениях по Лапласу могут быть записаны в виде суммы:

$$\bar{g}_{jp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \bar{g}_{jp}(\mathbf{r}, s) = g_{jp}^S(\mathbf{r}) + \bar{g}_{jp}^R(\mathbf{r}, s),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

где  $g_{jp}^S$  – сингулярная (статическая) часть,  $\bar{g}_{jp}^R$  – регулярная (динамическая) часть фундаментального решения.

Статическая часть может быть записана в виде следующего интеграла [11, 12]:

$$g_{jk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{d}|=1} \Gamma_{jk}^{-1}(\mathbf{d}) dS(\mathbf{d}), \quad j, k = \overline{1,5},$$

где  $\Gamma_{jk}(\mathbf{d}) = C_{ijkl} d_i d_l$ , через  $|\mathbf{d}|=1$  обозначена единичная окружность, определяемая как пересечение единичной сферы с центром в точке  $\mathbf{x}$  и плоскости, проходящей через точку  $\mathbf{x}$  и перпендикулярной к  $\mathbf{r}$ .

Динамическая часть записывается как интеграл по единичной полусфере [13]:

$$\bar{g}_{jp}^R(\mathbf{r}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0}} \sum_{m=1}^Q \frac{k_m \bar{P}_{jp}^m}{\rho c_m^2} e^{-k_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|} dS(\mathbf{n}),$$

где

$$\bar{P}_{jp}^m = \begin{cases} E_{jp}^m / E_{kk}^m, & j, p = \overline{1,3}, \\ \alpha_i^j E_{lp}^m / E_{kk}^m, & j = \overline{4,5}, p = \overline{1,3}, i, k, l = \overline{1,3}, \\ \alpha_i^j \alpha_k^p E_{lk}^m / E_{kk}^m, & j = p = \overline{4,5}, \end{cases}$$

$$E_{il}^m = \text{adj}(Z_{il}(\mathbf{n}) - \rho c_m^2 \delta_{il}), \quad Z_{ik} = \Gamma_{ik} + \alpha_k^4 \Gamma_{i4} + \alpha_k^5 \Gamma_{i5},$$

$$\Gamma_{jp}(\mathbf{n}) = C_{ijkl} n_k n_l,$$

$$\alpha_k^4 = \frac{\Gamma_{4k} \Gamma_{55} - \Gamma_{45} \Gamma_{5k}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}}, \quad \alpha_k^5 = \frac{\Gamma_{44} \Gamma_{5k} - \Gamma_{4k} \Gamma_{54}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}},$$

$$c_m = \sqrt{\lambda_m / \rho}, \quad k_m = s / c_m,$$

где  $c_m$  – это фазовые скорости упругих волн,  $k_m$  – это волновые числа,  $\mathbf{n}$  – это единичный вектор направления распространения волн,  $\lambda_m$  – это собственные значения матрицы  $Z_{il}(\mathbf{n})$ ,  $Q$  – число различных собственных значений.



### Численные примеры

В первом примере рассматривается электромагнитоупругое призматическое тело [5] с размерами  $L = 0.2$  м,  $w = 0.04$  м и  $h = 0.02$  м, как показано на Рис. 1. На стороне  $x_3 = \pm h/2$  заданы поверхностные усилия  $t_3 = p(x_1) = p_0 \sin(\pi x_1/L)$ ,  $p_0 = -10$  Па.

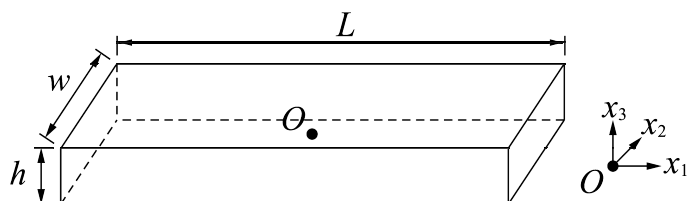


Рис. 1. Геометрия призматического электромагнитоупругого тела.

На сторонах  $x_1 = \pm L/2$  рассматриваются два набора граничных условий: электрический и магнитный потенциалы приняты равными нулю и задана либо скользящая, либо жесткая заделка. Остальная поверхность свободна от обобщенных поверхностных усилий. Рассматриваемый электромагнитоупругий материал имеет следующие параметры [5]:

$$C^E = \begin{bmatrix} 166 & 77 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 166 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ 78 & 78 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44.5 \end{bmatrix} \text{ ГПа}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 11.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.6 & 0 & 0 \\ -4.4 & -4.4 & 18.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 11.2 & 0 & 0 \\ 0 & 11.2 & 0 \\ 0 & 0 & 12.6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{ Кл/Вм}, \quad q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 550 & 0 & 0 \\ 580.3 & 580.3 & 699.7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Н/Ам},$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \text{ Нс/ВКл}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2.$$

Для случая жесткой заделки в таблице 1 приведено сравнение полученных гранично-элементных решений с численными результатами из [5]. Для случая скользящей заделки сравнение с численными результатами и точными решениями из [5] приведено в Таблице 2. Максимальная относительная погрешность полученных результатов не превышает 0.45%.

Таблица 1

Результаты для случая жесткой заделки

Точка		$u_3$ , м	$\phi$ , В	$\psi$ , А
(0.0, 0.02, 0.0) м	ГЭ-решение	-4.46884E-10	-2.02073E-02	-1.88074E-03
	ГЭ-решение из [5]	-4.23100E-10	-2.08600E-02	-1.82700E-03
(0.025, 0.02, 0.0) м		-3.90664E-10	-1.84451E-02	-1.74348E-03
		-3.71100E-10	-1.90600E-02	-1.69400E-03
(0.05, 0.02, 0.0) м		-2.45280E-10	-1.34221E-02	-1.35259E-03
		-2.37200E-10	-1.39800E-02	-1.31900E-03
(0.075, 0.02, 0.0) м		-7.76060E-11	-5.88912E-03	-7.67559E-04
		-8.22200E-11	-6.31720E-03	-7.54000E-04
(0.00, 0.02, 0.01) м		-4.45004E-10	-1.55589E-02	-2.02107E-03
		-4.21400E-10	-1.64300E-02	-1.96300E-03
(0.025, 0.02, 0.01) м		-3.89255E-10	-1.48802E-02	-1.85555E-03
		-3.69900E-10	-1.56600E-02	-1.80300E-03
(0.05, 0.02, 0.01) м		-2.45211E-10	-1.29425E-02	-1.38411E-03
		-2.37100E-10	-1.34500E-02	-1.35200E-03
(0.075, 0.02, 0.01) м		-7.95330E-11	-1.00107E-02	-6.78672E-04
		-8.39100E-11	-1.01700E-02	-6.71800E-04

Таблица 2

Результаты для случая скользящей заделки

Точка		$u_3$ , м	$\phi$ , В	$\psi$ , А
(0.0, 0.02, 0.0) м	ГЭ-решение	-1.9922E-09	-2.2961E-02	-1.8018E-03
	Точное решение	-2.0000E-09	-2.3140E-02	-1.8080E-03
	ГЭ-решение из [5]	-1.9770E-09	-2.3000E-02	-1.7940E-03
(0.025, 0.02, 0.0) м		-1.8406E-09	-2.1215E-02	-1.6646E-03
		-1.8470E-09	-2.1380E-02	-1.6710E-03
		-1.7960E-09	-2.1230E-02	-1.5880E-03
(0.05, 0.02, 0.0) м		-1.4089E-09	-1.6241E-02	-1.2741E-03
		-1.4140E-09	-1.6370E-02	-1.2790E-03
		-1.3780E-09	-1.6250E-02	-1.2580E-03
(0.075, 0.02, 0.0) м		-7.6275E-10	-8.8003E-03	-6.8951E-04
		-7.6520E-10	-8.8570E-03	-6.9210E-04
		-7.6920E-10	-8.7980E-03	-6.8200E-04
(0.00, 0.02, 0.01) м		-1.9860E-09	-8.8213E-03	-2.1707E-03
		-1.9930E-09	-8.7280E-03	-2.1650E-03
		-1.9720E-09	-8.8070E-03	-2.1650E-03
(0.025, 0.02, 0.01) м		-1.8349E-09	-8.1504E-03	-2.0056E-03
		-1.8420E-09	-8.0630E-03	-2.0180E-03
		-1.8640E-09	-8.1320E-03	-2.0030E-03
(0.05, 0.02, 0.01) м		-1.4045E-09	-6.2377E-03	-1.5352E-03
		-1.4090E-09	-6.1720E-03	-1.5440E-03
		-1.3740E-09	-6.0970E-03	-1.5590E-03
(0.075, 0.02, 0.01) м		-7.6039E-10	-3.3557E-03	-8.3134E-04
		-7.6280E-10	-3.3400E-03	-8.3570E-04
		-7.6980E-10	-3.2810E-03	-8.3330E-04

В следующем примере рассматривается квадратная электромагнитоупругая пластина с центральным квадратным отверстием [6], как показано на рис. 2. Размеры пластины  $L \times L \times h$  где  $L = 1.0$  м. Квадратное отверстие имеет длину стороны  $t = 0.6L$ . На боковых сторонах пластины задана скользящая заделка и нулевые электрический и магнитный потенциалы. К верхней стороне пластины приложены равномерно распределенные поверхностные усилия  $t_3 = 1$  Па. Остальная поверхность пластины свободна от обобщенных поверхностных усилий. Параметры материала такие же, как в предыдущем примере. На рис. 3-5 представлены сравнения полученных ГЭ-решений для откликов вертикальных перемещений  $u_3$ , электрического потенциала  $\phi$  и магнитного потенциала  $\psi$  в узлах  $(0.3L, 0.3L, x_3)$  для трех значений отношения  $h/L$ . Для удобства сравнения, приведенные величины нормированы соответствующими максимальными значениями. Кроме того, решен динамический вариант задачи (плотность материала  $\rho = 5800$  кг/м<sup>3</sup>), когда на верхней стороне пластины заданы поверхностные усилия  $t_3 = t_3^*H(t)$ ,  $t_3^* = 1$  Па, где  $H(t)$  это функция Хевисайда. Полученные результаты приведены на рис. 6-8 для перемещений  $u_3(t)$ , электрического потенциала  $\phi(t)$  и магнитного потенциала  $\psi(t)$  в точке  $(0.3L, 0.3L, h/2)$ .

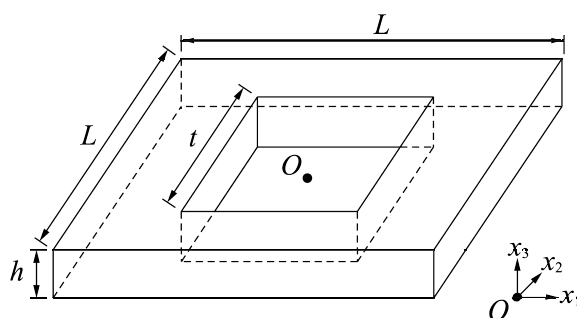


Рис. 2. Геометрия квадратной электромагнитоупругой пластины с квадратным отверстием

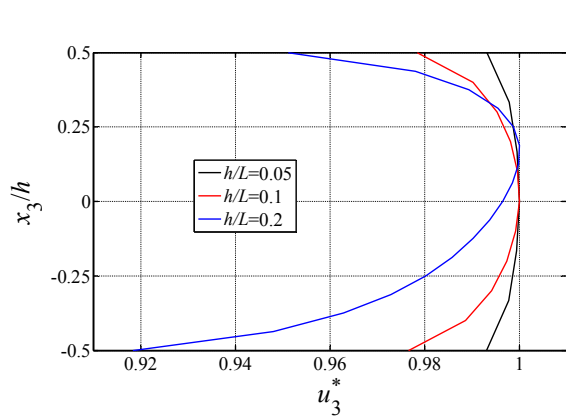


Рис. 3. Обезразмеренные перемещения  $u_3$

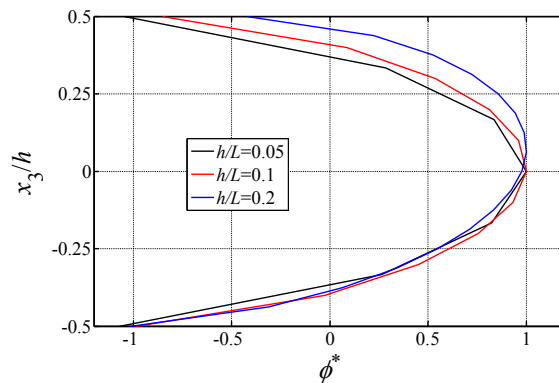


Рис. 4. Обезразмеренный электрический потенциал  $\phi$

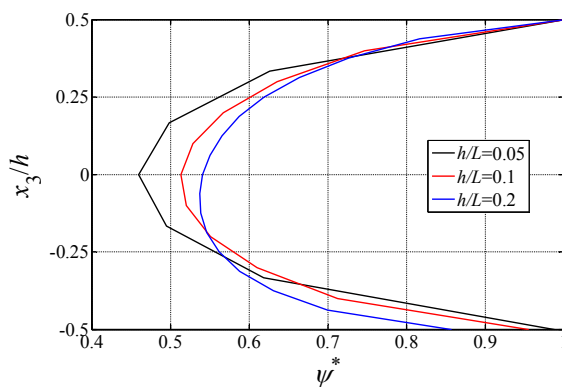


Рис. 5. Обезразмеренный магнитный потенциал  $\psi$

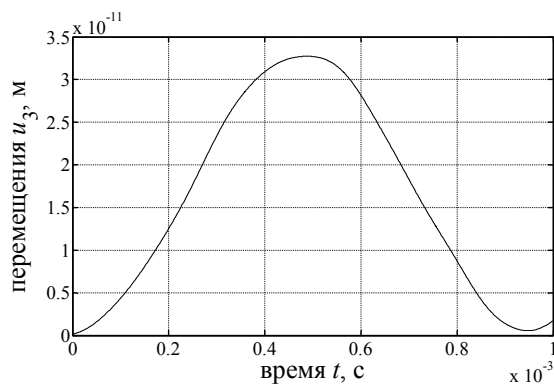


Рис. 6. Перемещения  $u_3(t)$

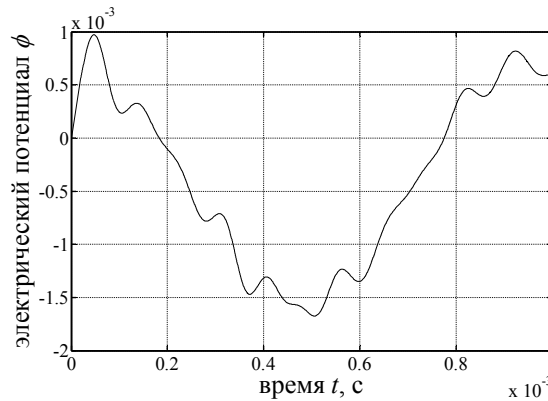


Рис. 7. Электрический потенциал  $\phi(t)$

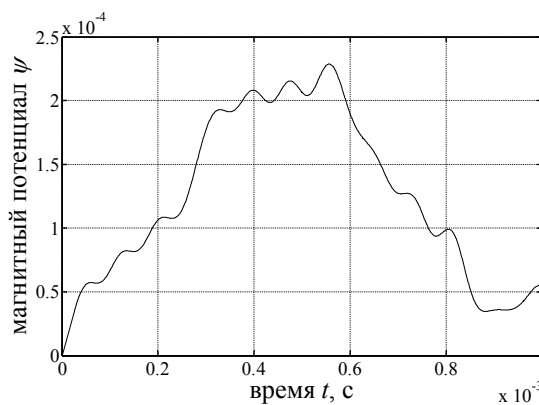


Рис. 8. Магнитный потенциал  $\psi(t)$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-38-60097 мол\_а\_дк, № 16-38-50142 и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-5395.2016.1.

#### Список литературы

1. Pan E., Heyliger P.R. Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending // *Int. J. Solids. Struct.* 2003. Т.40, С.6859-6876.
2. Heyliger P.R., Pan E. Static fields in magneto-electro-elastic laminates // *AIAA J.* 2004. Т.42. С.1435–1443.
3. Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *J. Appl. Mech.* 2001. Т.68. С.608-618.
4. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Transient Dynamic Response of Cantilever Magneto-Electro-Elastic Beam Using Finite Elements // *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech.* 2009. Т.10. Вып.3. С.173-185.
5. Ding H., Jiang A. A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media // *Comput. Struct.* 2004. Т.82. С.1599-1607.
6. Liu J., Zhang P., Lin G., Wang W., Lu S. Solutions for the magneto-electro-elastic plate using the scaled boundary finite element method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2016. Т.68. С.103-114.
7. Milazzo A., Orlando C., Alaimo A. An analytical solution for the magneto-electro-elastic bimorph beam forced vibrations problem // *Smart. Mater. Struct.* 2009. Т.18. Вып.8. С.085012.
8. Li X.-C., Yao W.-A. Virtual boundary *element*-integral collocation method for the plane magneto-electro-elastic solids // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2006. Т.30. С.709-717.
9. Zhu X., Huang Z., Jiang A., Chen W.Q., Nishimura N. Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2010. Т.34. Вып.11. С.927-933.
10. Milazzo A., Orlando C. A beam finite element for magneto-electro-elastic multilayered composite structures // *Compos. Struct.* 2012. Т.94. Вып.12. С.3710-3721.
11. Pan E. Three-dimensional Green's function in anisotropic magneto-electro-elastic biomaterials // *Z Angew Math. Phys.* 2002. Т.53. С.815-838.
12. Buroni F.C., Saez A. Three-dimensional Green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto-electro-elastic coupling // *Proc. R. Soc. A.* 2010. Т.466. Вып.2114. С.515-537.
13. Rojas-Diaz R., Saez A., Garcia-Sanchez F., Zhang Ch. Time-harmonic Green's functions for anisotropic magneto-electro-elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2008. Т.45. Вып.1. С.144-158.
14. Игумнов Л.А., Марков И.П. Моделирование динамики трехмерных однородных электроупругих тел методом граничных элементов // *Проблемы прочности и пластичности.* 2014. Т.76. Вып.3. С.191-197.

УДК 534.21: 620.179.16

## ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МЕТАЛЛОВ УЛЬТРАЗВУКОВЫМ МЕТОДОМ.

Иляхинский А.В.

Институт Проблем Машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен информационно-статистический способ количественной оценки акустической нелинейности. В основе оценки лежит представление процессов влияющих на изменение параметров упругой волны статистической моделью в виде распределения Дирихле. Проведена оценка в терминах статистической модели Дирихле акустической нелинейности материала 12Х18Н10Т подвергнутого испытанию на малоцикловую усталость, материала 13ХФА подвергнутого наводораживанию и материала Ст10 подвергнутого мягкому циклическому нагружению.

**Ключевые слова:** акустическая нелинейность, упругая волна, энтропия, статистическая модель, распределение Дирихле.

Исследования акустической нелинейности твердых тел были и остаются одной из ключевых задач далекой от окончательного разрешения [1]. Распространяясь в металле, упругая волна изменяется под воздействием среды, проявляются связи между структурными частями и элементами такой среды, обусловленные диссипативными процессами, такими как трение, диффузия и рассеяние. Структурная самоорганизация в пространстве приводит к самоорганизации во времени параметров упругой зондирующей волны. Имеют место как минимум шесть волновых эффектов изменения параметров упругой волны [2]. При интегральной оценке акустической нелинейности среды среди множества сложившихся к настоящему времени классических методик в основном применяются методы математической обработки параметров сигнала – модели данных, не использующие вовсе или использующие в ограниченном объеме гипотезы о структуре моделируемой системы [2-7]. Если подходить к анализу акустической нелинейности на основе принципов и гипотез о структурно-функциональной организации данного явления, возможных механизмах, лежащих в основе его функционирования, используя модели систем, то процессы, определяющие это явление можно представить статистической моделью (образом) в виде распределения вероятностей. Такое представление, согласно предложенной Клодом Шенноном [8] термодинамической концепции информации, позволяет рассматривать процессы, протекающие в анализируемой системе, с позиции термодинамики и одного из важнейших ее понятий - энтропии. Для нашего обсуждения важно, что энтропия, как универсальная функция состояния материи, состоит из производства и потока [9]. Отвечающий за процессы самоорганизации поток характеризует обмен объекта веществом или энергией с внешней средой, а производство - часть энтропии, обусловленная протеканием необратимых процессов. Было показано [10], что при решении задачи зондирования в качестве статистической модели может быть выбрано определенное на  $k$  – мерном симплексе распределение Дирихле с функцией плотности вероятности

$$D(x_1, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(a_n)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(v_i)} \prod_{i=1}^k x_i^{v_i-1} (1 - \sum_{i=1}^k x_i)^{a_n-1} \quad (1)$$

где  $0 \leq \sum x_i \leq 1$ ;  $v_i \geq 0, \dots, v_n \geq 0$ ;  $\sum_{i=1}^n v_i = a_n$ ;  $n = k + 1$ .

Энтропия распределения Дирихле может быть представлена в виде суммы

$$H(D) = H_1(v_1, \dots, v_n) + H_2(a_n), \quad (2)$$

в которой всегда положительное слагаемое

$$H_1(v_1, \dots, v_n) = \ln \prod_{i=1}^n \Gamma(v_i) - \sum_{i=1}^n (v_i - 1) \psi(v_i) \quad (3)$$

представляет собой, производство энтропии, а слагаемое

$$H_2(a_n) = -\ln \Gamma(a_n) + (a_n - n) \psi(a_n) \quad (4)$$

представляет собой поток энтропии и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Здесь  $\Gamma(x)$  - гамма функция, а  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$  - логарифмическая производная гамма функции. Как статистическая модель, распределение Дирихле отражает результат совместной реализации  $n-1$  независимых процессов  $x_j$ , протекающих со скоростями (интенсивностями)  $v_j$  и противоположного им по смыслу процесса, протекающего со скоростью  $v_n$ . В этом смысле распределение информационно эквивалентно объекту любой природы и степени сложности, включая многопараметрическую взаимосвязанную систему влияния среды на закономерности распространения упругой волны. Было показано [11], что представление процессов определяющих воздействие среды на параметры упругой волны статистической моделью в виде распределения Дирихле, позволяет с позиций синергетики количественно охарактеризовать изменения структуры отраженного импульса. Если считать, что в терминах модели Дирихле вклад в процессы самоорганизации моделей каждой из размерностей от двухмерной до двенадцатимерной является элементом (уровнем) нелинейного взаимодействия упругой волны со средой, то количественной характеристикой этого взаимодействия может выступить отношение

$$K_0^i = \frac{K_{D-}^i}{\sum K_{D+}^i} \quad (5)$$

где  $K_{D-}^i$  - количество выявленных за анализируемый период во временном ряде упругой волны двухмерных, трехмерных, четырехмерных, пятимерных и т.д. моделей Дирихле, имеющих отрицательное значение внешней энтропии, а  $\sum K_{D+}^i$  - суммарное количество выявленных за анализируемый период двухмерных, трехмерных, четырехмерных, пятимерных и т.д. моделей Дирихле, имеющих положительное значение внешней энтропии.

Естественно, что сумма  $\sum K_0^i$  равна  $K_c$ . Поэтому, если параметр  $K_c$  в терминах модели Дирихле выступает в качестве меры нелинейности зондирующей волны, то  $K_0^i$  характеризует структуру этой нелинейности.

### Методика

В качестве примера применения информационно-статистического подхода при оценке нелинейных свойств исследуемого материала был проведен анализ амплитудных спектров импульса зондирующего образца стали 12X18H10T подвергнутого испытанию на малоцикловую усталость при жестком нагружении и образцов стали 13ХФА подвергнутого наводо-раживанию. Изменения нелинейных свойств материала Ст10 подвергнутого 50 циклам мягкого циклического нагружения до напряжения 0.6 0.7 и 0.8 предела текучести и изменение нелинейных свойств при нагружении с выдержкой при максимальной нагрузке показано на примере анализа формы зондирующего импульса.

Методологически результат достигался тем, что каждая выборка амплитудного спектра или сигнала объема  $N$  непрерывно-скользящим методом при шаге смещения на одно значение базовой выборки  $m$  равной 24 разбивалась на последовательность выборок  $m_i$ , где  $i = 1, \dots, N-m$ . Для каждой выборки  $m_i$  определяли значение коэффициента асимметрии и показателя эксцесса, по которым находили параметры формы  $v_i$  последовательности бета-

распределений (одномерных распределений Дирихле) [12]. В соответствии с правилами информационно-статистической теории, изложенными в [13], ограничившись двенадцатимерной моделью, проводили свертку следующих друг за другом бета-распределений к последовательности распределений Дирихле. По значению параметра  $a_n$  вычисляли значения внешней энтропии (4) распределений Дирихле каждой из размерностей. По количеству распределений Дирихле в анализируемой выборке  $N$ , имеющих положительное  $D_{k+}$  и отрицательное  $D_k$  значение внешней энтропии, в соответствии с (5) определяли значение  $K_0^t$ .

### Результаты исследования

Результаты вычисления параметров  $K_c$  и  $K_0^t$  представлены на рисунках 1-4.

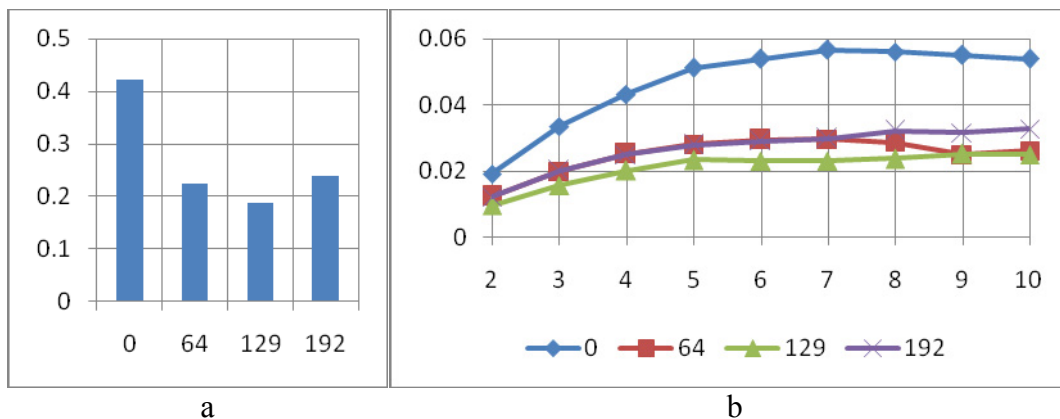


Рисунок 1. Влияние времени наводораживания на изменение величины (а) и структуры (б) параметров акустической нелинейности стали 13ХФА

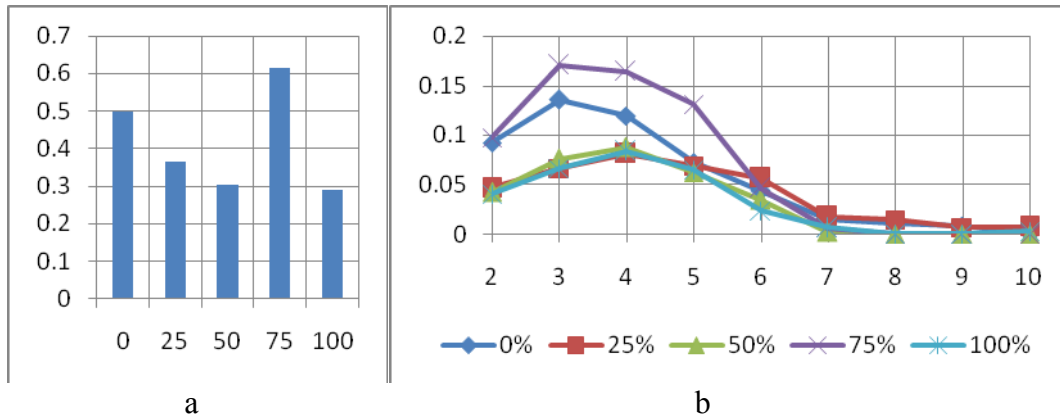


Рисунок 2. Влияние времени испытания на малоцикловую усталость при жестком нагружении на изменение величины (а) и структуры (б) параметров акустической нелинейности стали 12Х18Н10Т.

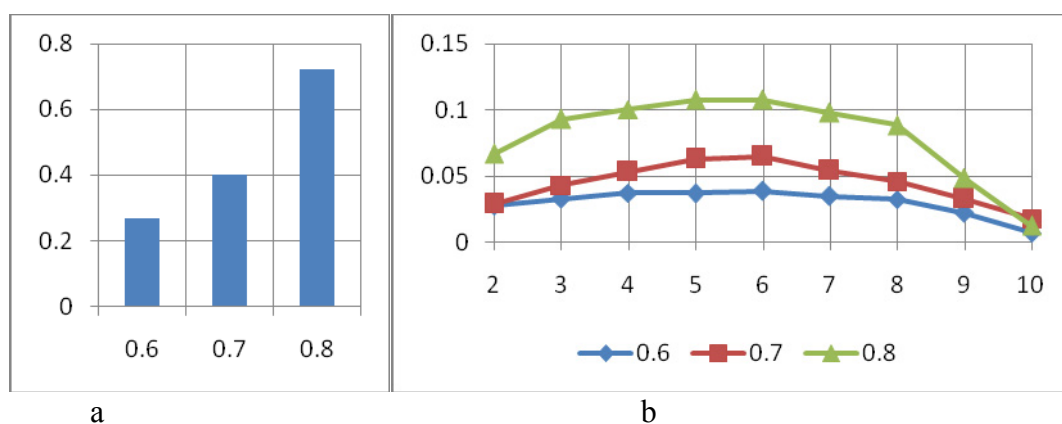


Рисунок 3. Влияние максимального напряжения при мягком циклическом нагружении на изменение величины (а) и структуры (б) параметров акустической нелинейности стали Ст10.

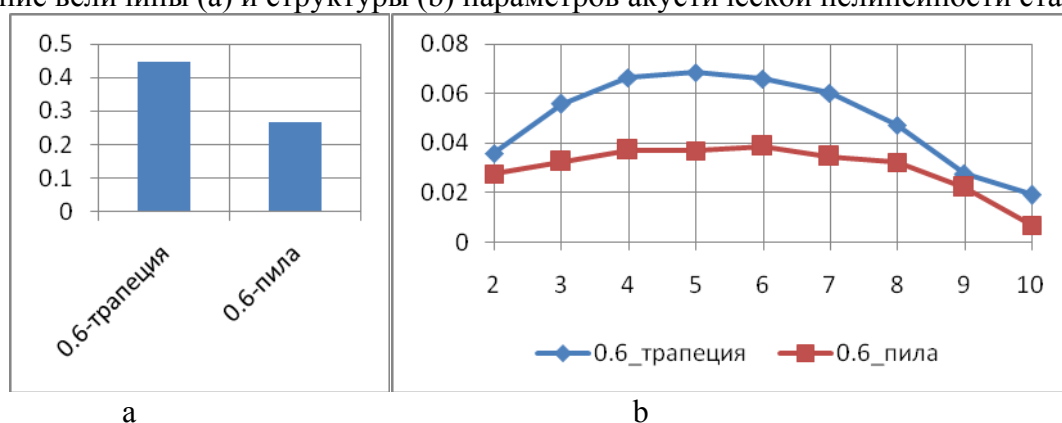


Рисунок 4. Влияние пяти минутной выдержки при максимальной нагрузке при мягком циклическом нагружении на изменение величины (а) и структуры (б) параметров акустической нелинейности стали Ст10.

Как видно из результатов, приведенных на рисунках 1-4 изменение характера внешнего воздействия приводит к изменению информационной структуры нелинейных параметров упругой волны. При этом следует отметить, что это влияние зависит от механизма воздействия. Так увеличение в материале концентрации водорода, вызванного увеличением времени выдержки при наводороживании до 192 часов, приводит к уменьшению акустической нелинейности стали 13ХФА в основном за счет размерностей 7-10 (рис. 1). Малоцикловая усталость с жестким нагружением при увеличении числа циклов нагружения до 75% приводит к увеличению нелинейности в основном за счет малых размерностей 2-4 (рис. 2). Здесь и далее за размерность акустической нелинейности принята размерность статистической модели распределения Дирихле. За меру нелинейности принят вклад этой модели в процесс самоорганизации. При мягком циклическом нагружении стали Ст10 с увеличением максимальной нагрузки цикла акустическая нелинейность возрастает за счет размерности 5-7 (рис.3). Изменение соотношения статического и усталостного повреждений за счет увеличения времени выдержки при максимальном напряжении равном 0.6 от предела текучести до пяти минут привело (рис.4) к возрастанию акустической нелинейности в основном за счет размерностей 3-8.

### Заключение

Таким образом, приведенные результаты подтверждают эффективность информационно-статистического метода при контроле акустической нелинейности ультразвуковым методом. Информационно-статистический подход позволяет оценить не только уровень акустической нелинейности зондируемой системы, но и оценить структуру этой нелинейности.



## **Список литературы**

1. В. Ю. Зайцев, В. Е. Назаров, В. И. Таланов «Неклассические» проявления микро-структурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики»// УФН, 176:1 (2006), 97–102
2. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Угло-ва А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н.: отв. ред Ф.М.Митенков.-М.:2009.-229с.
3. Руденко О.В., Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176, № 1. С. 97-102.
4. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Шульга А.Е. Дисперсионные и диссипативные свойства микронеоднородных сред // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 3, С. 348-355.
5. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е. О линейной частотной зависимости коэффициента поглощения упругих волн в микронеоднородных средах // Акуст. журн. 1999. Т. 45, № 5. С. 552-556.
6. Мишакин В.В., Родюшкин В.М. Нелинейность как индикатор преддефектного состояния материала // Безопасность труда в промышленности. 2009. №7. с.48-53
7. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. Нелинейные акустические свойства контакта шероховатых поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей // Акустический журнал.-1994, т.40, №4, с.668-672.
8. Shannon C. E. S., Weaver W. The Mathematical Theory of Communications, University of Illinois Press, Urbana, 1949.
9. Пригожин И. Время, структура и флуктуации// Успехи физических наук, 1980, т. 131, вып. 2, С. 185-207.
10. Иляхинский А.В. Серeda Ю.С. Статистические модели в задачах зондирования.// Известия ВУЗов, Радиофизика, 1989, т.32, 12, с.1502-1505.
11. Иляхинский А.В. Родюшкин В.М. Распределение Дирихле в задаче оценки состояния металла методом акустического зондирования// Дефектоскопия.2015.№7.с.13-17
12. Хан Г. Шапиро А. Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
13. Проблемы информационно-статистической теории.- Н.Новгород: ООО "Типография "Поволжье", 2007 - 356 с.

## СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТА МАНИПУЛЯТОРА С ТРЕМЯ ЗВЕНЬЯМИ С НЕЖЕСТКИМ СОЕДИНЕНИЕМ

М.А. Исанькин, А.И. Маликов

Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ).  
420111 Казань, Карла Маркса, 10, e-mail: a\_i\_malikov@mail.ru

Манипулятор с тремя звеньями с нежестким соединением имеет привод только для первого звена. Решается задача синтеза управления в виде обратной связи по состоянию или по состоянию наблюдателя, обеспечивающего стабилизацию заданного положения при действии неопределенных ограниченных возмущений и учете ограничений на управление.

**Ключевые слова:** Трехзвенный манипулятор, упругое соединение, ограниченные возмущения, ограниченность на конечном интервале, стабилизация заданного положения

### Введение

Рассматривается манипулятор с тремя звеньями, соединенных между собой упругими шарнирами (смотри рис.1.) Предполагается, что движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости. Использование манипуляторов с нежестким соединением позволяет увеличить рабочую область манипулятора, без использования длинных звеньев, создающих дополнительную сложность управления, за счет внутренней упругости, а также снизить риски поломки звена при действии внешних неопределенных возмущений.

Однако применение манипуляторов с нежесткими соединениями имеет ряд негативных факторов. Воздействие внешних нагрузок и сил тяжести (внешние неопределенные возмущения), а также колебания звеньев, возникающие при их движении, не позволяют точно переместить рабочий орган в заданную точку пространства и увеличивают время переходного процесса при движении рабочего органа из одной точки в другую. В результате управляемость и быстродействие манипулятора с нежесткими соединениями значительно снижаются, что ограничивает возможности его использования. Таким образом, создание систем эффективного управления манипуляторами с нежестким соединением является актуальной научно-технической проблемой.

Также при решении задач управления манипуляторами одной из существенных проблем является отсутствие полной информации о состоянии системы. Измеряются, как правило, значения только части переменных, описывающих состояние манипулятора. В связи с этим актуальной задачей является синтез эффективного регулятора с неполными сведениями о состоянии системы (по наблюдателю).

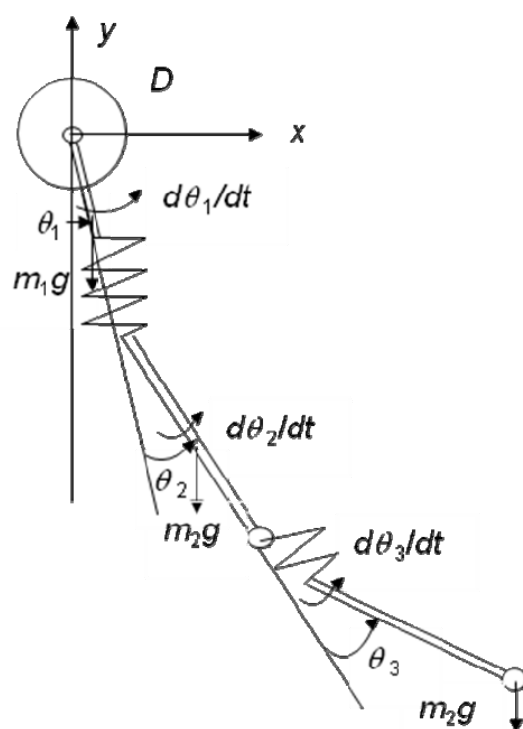


Рисунок 1 Кинематическая модель

Манипулятор приводится в действие с помощью двигателя постоянного тока, выходной вал которого через редуктор соединен с первым звеном. Положение звеньев манипулятора определяют углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , которые доступны для измерения.

В первом пункте приводится модели динамики манипулятора с учетом нелинейностей и неопределенных возмущений. Во втором пункте представлены уравнения равновесия для заданного положения и линеаризованная модель относительно выбранного положения. В третьем пункте рассмотрены системы с неопределенными нелинейностями и ограниченными возмущениями, для которых в четвертом пункте решается задача оценивания состояния на конечном интервале, а в пятом – предложен алгоритм синтеза управления в виде обратной связи по состоянию. Работа завершается представлением результатов моделирования системы с полученными регуляторами при действии неопределенных ограниченных возмущений.

Отметим, что задачи управления аналогичными объектами для случая с двумя звеньями в условиях невесомости, без учета возмущений, нелинейности и динамики привода, решались в [1]. Для манипулятора с двумя звеньями с учетом возмущений, нелинейности и динамики привода задачи оценивания состояния и синтеза управления решены в [2].

Здесь эти задачи решаются на основе матричных систем сравнения (МСС) и дифференциальных линейных матричных неравенств (ЛМН) [3,4,5]. Задачи синтеза управления, обеспечивающего стабилизацию заданного положения манипулятора сводятся к численному решению ЛМН с минимизацией на каждом шаге дискретизации по времени следа матрицы инвариантного эллипсоида для состояний, или ограничивающего выход эллипсоида.

### 1. Модель системы

Кинетическая энергия звеньев манипулятора с тремя звеньями:

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + I_{p_1}) \dot{\theta}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 [L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] + \frac{1}{2} I_{p_2} \dot{\theta}_2^2.$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 [L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2L_2 l_3 \cos(\theta_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_3^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2] + \frac{1}{2} I_{p_3} \dot{\theta}_3^2$$

Полная кинетическая энергия

$$T_{полн} = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + I_{p_1}) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] + \frac{1}{2} I_{p_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 [L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2L_2 l_3 \cos(\theta_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_3^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2] + \frac{1}{2} I_{p_3} \dot{\theta}_3^2.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1;$$

$$\Pi_2 = -m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2));$$

$$\Pi_3 = -m_3 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3));$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) - m_3 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3));$$

$Q_{p_1}, Q_{p_2}, Q_{p_3}$  – моменты, приложенные к звеньям манипулятора (неконсервативные обобщенные силы):

$$Q_{p1} = T - B_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - w_1, \quad Q_{p2} = -f(\theta_2) - B_{\theta_2} \dot{\theta}_2 - w_2, \quad Q_{p3} = -f(\theta_3) - B_{\theta_3} \dot{\theta}_3 - w_3,$$

$T$  - управляющий момент, создаваемый двигателем постоянного тока,  $B_{\theta_i} \dot{\theta}_i$  - демпфирующий момент  $i$ -го звена (за счет вязкого трения),  $f(\theta_2)$  - неопределенный момент, вызванный силами упругости при изгибе второго звена относительно первого,  $f(\theta_3)$  - неопределенный момент, вызванный силами упругости при изгибе третьего звена относительно второго,  $w_1, w_2, w_3$  - неопределенные моменты сил сопротивления (сухое трение, сопротивление среды, возмущения).

Пренебрегая электромагнитными переходными процессами в якорной обмотке двигателя и полагая, что момент двигателя пропорционален току, выражение для момента  $T$  представляется в виде:

$$T = \frac{K_g K_m}{R_m} V - \frac{(K_g K_m)^2}{R_m} \dot{\theta}_1, \quad (1)$$

где  $K_g, K_m, R_m$  коэффициенты редукции, пропорциональности и активное сопротивление обмотки двигателя,  $V$  - управляющее напряжение. Таким образом, момент, приложенный к первому звену, является функцией входного напряжения якорной обмотки двигателя. Второй член пропорционален угловой скорости со знаком минус потому, что ЭДС вращения вызывает противодействующий момент по сравнению с моментом, создаваемым входным напряжением.

С помощью метода Лагранжа получаем дифференциальные уравнения, описывающие динамику манипулятора с тремя звеньями с упругим соединением:

1-е уравнение:

$$\begin{aligned} & [m_1 l_1^2 + I_{p1} + m_2 (L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos \theta_2) + m_3 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2 + 2L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2L_2 l_3 \cos \theta_3 + \\ & + l_3^2)] \ddot{\theta}_1 + [m_2 (L_1 l_2 \cos \theta_2 + l_2^2) + m_3 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2)] \ddot{\theta}_2 + \\ & + m_3 [L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2] \ddot{\theta}_3 = 2(m_2 L_1 l_2 + m_3 L_1 L_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + 2m_3 L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 + \\ & + 2m_3 L_2 l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + [(m_2 L_1 l_2 + m_3 L_1 L_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + m_3 L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2m_3 L_2 l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3] \dot{\theta}_2 + \\ & + m_3 [L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + L_2 l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3] \dot{\theta}_3 - g(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \sin \theta_1 - \\ & - g(m_2 l_2 + m_3 L_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_3 g l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + T - B_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - w_1 = \\ & = (m_2 L_1 l_2 + m_3 L_1 L_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_3 L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \\ & + m_3 L_2 l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - g(m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \sin \theta_1 - \\ & - g(m_2 l_2 + m_3 L_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_3 g l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + T - B_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - w_1 \end{aligned}$$

2-е уравнение

$$\begin{aligned} & [m_2 l_2^2 + m_3 L_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 + m_3 (L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2)] \ddot{\theta}_1 + \\ & + [m_2 l_2^2 + I_{p2} + m_3 (L_2^2 + 2L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2)] \ddot{\theta}_2 + m_3 (L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2) \ddot{\theta}_3 = m_3 L_2 l_3 \sin \theta_3 (2\dot{\theta}_1 + \\ & + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 - (m_2 l_2 + m_3 L_2) L_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - m_3 L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - g(m_2 l_2 + m_3 L_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - \\ & - m_3 g l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - f(\theta_2) - B_{\theta_2} \dot{\theta}_2 - w_2 \end{aligned}$$

3-е уравнение

$$\begin{aligned} & m_3 [L_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2] \ddot{\theta}_1 + m_3 (L_2 l_3 \cos \theta_3 + l_3^2) \ddot{\theta}_2 + (m_3 l_3^2 + I_{p3}) \ddot{\theta}_3 = \\ & = -m_3 L_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - m_3 L_2 l_3 \sin \theta_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - m_3 g l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - f(\theta_3) - B_{\theta_3} \dot{\theta}_3 - w_3. \end{aligned}$$

## 2. Уравнения равновесия и линеаризованная модель

Уравнения равновесия (из уравнений динамики (2))



С параметрами модели указанными в Таблице 1 получены матрицы линеаризованной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.9025 & -4.4198 & 184.8449 & 2.7317 & -101.0701 & 0.3155 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.9516 & 5.4668 & -253.8017 & -4.3141 & 217.4049 & 1.059 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.8272 & 0.6315 & 28.3970 & 1.0509 & -233.4455 & -5.3045 \end{pmatrix}$$

$$B = (0 \ 0.0964 \ 0 \ -0.1193 \ 0 \ -0.0138)^T$$

### 3. Системы с неопределенными нелинейностями и ограниченными возмущениями

Рассматривается динамическая система, представленная следующей моделью в пространстве состояний в непрерывном случае

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + D(t)w + \Phi(t)\varphi(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \\ z &= C(t)x, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $x \in R^n$  - вектор состояния,  $w(t) \in W_r \subset R^r$  - входное возмущение,  $z \in R^l$  - вектор управляемого выхода,  $A(t) \in R^{n \times n}$ ,  $D(t) \in R^{n \times r}$ ,  $\Phi(t) \in R^{n \times q}$ ,  $C(t) \in R^{q \times n}$  - известные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $T > 0$  - заданная константа (при рассмотрении на конечном интервале) или  $T = \infty$  (при рассмотрении на бесконечном интервале).

Нелинейная векторная функция  $\varphi(t, x)$  удовлетворяет коническому (обобщенному секторному) условию, заданному в виде

$$\|\varphi(t, x)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x(t)\|^2, \quad \forall t \in [t_0, T], x \in R^n, \tag{6}$$

где  $C_f(t) \in R^{q \times n}$  - известная матрица с непрерывными и ограниченными элементами при всех  $t \in [t_0, T]$ . Здесь и далее  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора,  $\mu_0, \mu_1 \geq 0$  - заданные параметры.

Отметим, что условие (6) при  $\mu_0 = 0$  охватывает секторные нелинейности и локально-липшицевые, заданные так, что они равны нулю в начале координат.

Предположим, что неопределенные возмущения являются непрерывными функциями, ограниченными в каждый момент времени:

$$\|w(t)\|^2 \leq 1, \quad \forall t \geq t_0. \tag{7}$$

### 4. Задача оценивания состояния и ограниченности на конечном интервале

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  состояние системы является неопределенным, известно, что оно принадлежит эллипсоиду

$$E(Q_0) = \{x \in R^n : x^T Q_0^{-1} x \leq 1\}, \tag{8}$$

где  $Q_0 \in G^+$  - заданная положительно определенная симметрическая матрица.

Предполагается, что пара  $(A(t), D(t))$  управляема.

Требуется на заданном интервале времени получить эллипсоидальную оценку множества состояний для процессов системы (5), начинающихся из заданного эллипсоида  $E(Q_0)$  при нелинейностях, удовлетворяющих (6), и неопределенных возмущениях из (7).

Оценка вектора состояния будет находиться в виде эволюционирующего эллипсоида, инвариантного для процессов системы (5).

Напомним, что инвариантным эллипсоидом для динамической системы называется эллипсоид

$$E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t)x \leq 1\}, \quad Q(t) > 0, \quad (9)$$

обладающий следующим свойством: любая траектория системы  $x(t, t_0, x_0)$ , исходящая из точки  $x(t_0) = x_0 \in E(Q(t_0))$ , в любой момент времени  $t$  принадлежит этому эллипсоиду, т.е.  $x(t, t_0, x_0) \in E(Q(t))$ .

Теорема 1 [3]. Эллипсоид  $E(Q(t))$ , где  $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$  - решение матричной системы дифференциальных уравнений

$$dQ(t)/dt = AQ + QA^T + \alpha Q + \frac{1}{\alpha - \frac{\mu_0}{\beta}} DD^T + \beta \Phi \Phi^T + \frac{\mu_1}{\beta} QC_f^T C_f Q, \quad (10)$$

или удовлетворяет при всех  $t \in [t_0, T]$  и некоторых  $\beta > 0, \alpha \geq \mu_0 / \beta$  дифференциальным линейным матричным неравенствам

$$\begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + AQ + QA^T + \alpha Q + \beta \Phi \Phi^T & D & QC_f^T & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ * & * & * & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (11)$$

является инвариантным для траекторий системы (2), стартующих из начального эллипсоида  $E(Q_0)$ .

В [3] показано, что уравнение (10) является матричной системой сравнения (МСС) для исходной системы. На основе свойств МСС, установленных в [5] можно показать существование положительно определенных решений, инвариантность некоторых множеств для решений МСС (10), а также получить эллипсоидальные оценки состояния для исходной системы.

Пусть заданы в виде эллипсоидов  $E(R) = \{x \in R^n : x^T R^{-1}x \leq 1\}$ ,  $E_w(I) = \{w \in R^n : w^T w \leq 1\}$ ,  $E(S(t)) = \{x \in R^n : x^T S^{-1}(t)x \leq 1\}$  ( $R, S(t)$  – известные симметрические положительно определенные матрицы) соответственно множество начальных состояний, множество допустимых внешних возмущений и множество допустимых состояний в моменты времени  $t \in [t_0, T]$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что система (5) обладает на  $[t_0, T]$  свойством ограниченности относительно заданных множеств  $[E(R), E_w(I), E(S(t))]$  (при отсутствии неопределенных внешних возмущений – свойством устойчивости относительно заданных множеств  $[E(R), E(S(t))]$ ), если для всех  $x_0 \in E(R)$  существуют на  $[t_0, T]$  решения

$x(t) = x(t, t_0, x_0)$  системы (5) с начальными данными  $x(t_0) = x_0$ , и для них имеет место  $x(t, t_0, x_0) \in E(S(t))$  при всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $w(t) \in E_w(I)$  и всех нелинейностях из (6) (соответственно  $x(t, t_0, x_0) \in E(S(t))$  при всех  $t \in [t_0, T]$  и всех нелинейностях из (6), где  $\mu_0 = 0$ ).

Теорема 2. Система (5) обладает на  $[t_0, T]$  свойством ограниченности относительно заданных множеств  $[E(R), E_w(I), E(S(t))]$  (при отсутствии внешних возмущений и  $\mu_0 = 0$  свойством устойчивости относительно  $[E(R), E(S(t))]$ ) при любых нелинейных функциях из (6), если существует решение  $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$  матричной системы сравнения (10) (или ДЛМН (11)) с начальными данными  $Q_0 \geq R$ , удовлетворяющее неравенству  $Q(t) \leq S(t)$  для всех  $t \in [t_0, T]$ .

### 5. Синтез управления, обеспечивающего ограниченность на конечном интервале

Рассмотрим непрерывную систему с управлением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)u + D(t)w + \Phi(t)\varphi(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \\ z &= C(t)x + B_2(t)u, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x \in R^n$  - вектор состояния,  $w(t) \in R^r$  - внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (6),  $u \in R^m$  - управление,  $z \in R^l$  - вектор управляемого выхода. Нелинейная векторная функция  $\varphi(t, x, u) \in R^q$  удовлетворяет ограничению

$$\|\varphi(t, x, u)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x(t) + B_f(t)u(t)\|^2, \quad \forall t \in [t_0, T], x \in R^n, u \in R^m, \quad (13)$$

где

$$A(t) \in R^{n \times n}, B(t) \in R^{n \times m}, D(t) \in R^{n \times r}, \Phi(t) \in R^{n \times q}, C(t) \in R^{q \times n}, B_z(t) \in R^{q \times m}, C_f(t) \in R^{q \times n},$$

$B_f(t) \in R^{q \times m}$  - известные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех  $t \in [t_0, T]$ . Предполагается, что пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию

$$u = K(t)x, \quad (14)$$

1) стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего начальные отклонения и воздействие внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ ;

2) обеспечивающего ограниченность замкнутой системы.

Задача синтеза сводится к оптимизации критерия при ограничениях в виде дифференциальных линейных матричных неравенств. В качестве критерия обычно берется след матрицы, определяющей размер инвариантного или ограничивающего выход эллипсоида.

Теорема 3 [3]. Решение  $Q^*(t) = Q^*(t, t_0, Q_0), Y^*(t), Z^*(t)$  задачи

$$\text{trace}[CQC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + AQ + QA^T + BY + Y^T B^T + \alpha Q + \beta \Phi \Phi^T & D & QC_f^T + Y^T B_f^T & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ * & * & * & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q(t) = Q^T(t) \in R^{n \times n}$ ,  $Y(t) \in R^{n \times m}$ ,  $Z(t) \in R^{l \times l}$ , скалярной переменной  $\beta > 0$  и скалярному параметру  $\alpha \geq \mu_0 / \beta$ , определяет при



каждом  $t \in [t_0, T)$  матрицу  $Q^*(t)$  ограничивающего эллипсоида для вектора состояния  $x(t)$ , матрицу  $CQ^*C^T + CY^*B_2^T + B_2Y^*C^T + B_2Z^*B_2^T$  ограничивающего эллипсоида для вектора выхода  $z(t)$  системы (12) и зависимую от времени матрицу коэффициентов соответствующего регулятора по состоянию  $K^*(t) = Y^*(t)Q^{*-1}(t)$ . Если, кроме того, матрица  $Q^*(t)$  удовлетворяет дополнительно ограничениям  $Q_0 \geq R$  и  $Q(t) \leq S(t)$  для всех  $t \in [t_0, T]$ , где  $R$  и  $S(t)$  – заданные положительно определенные симметрические матрицы, то искомый регулятор обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств  $[E(R), E_w(I), E(S(t))]$  при всех нелинейностях из (13).

### 6. Результаты моделирования

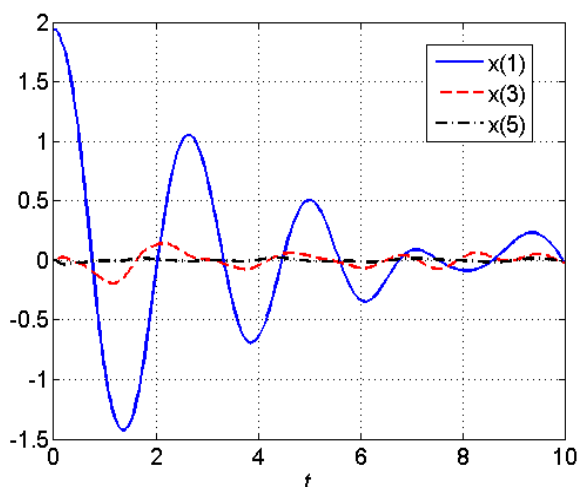


Рисунок 2. Переходные процессы в разомкнутой системе при действии неопределенных возмущений

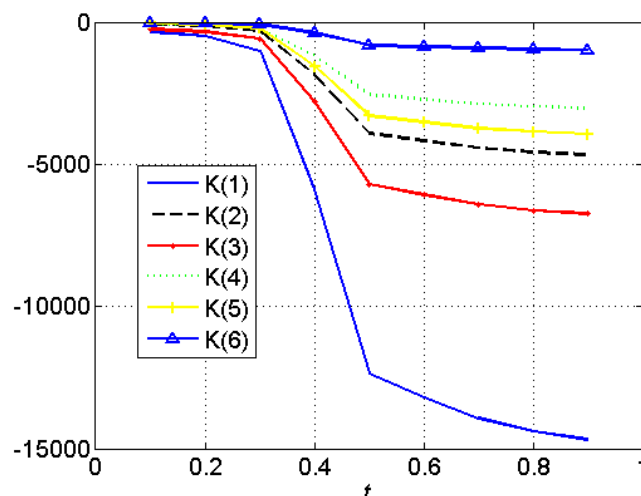


Рисунок 3. Коэффициенты усиления регулятора

$m_1$	0.210	$l_2$	0.3048
$m_2$	0.455	$l_3$	0.3048
$m_3$	0.455	$K_g$	3.7
$I_{p1}$	0.02	$K_m$	0.0767
$I_{p2}$	0.04	$R_m$	2,6
$I_{p3}$	0.04	$B_{\theta 1}$	0.5
$L_1$	0.3048	$B_{\theta 2}$	0.25
$L_2$	0.6096	$B_{\theta 3}$	0.25
$L_3$	0.6096	$x_p$	0
$l_1$	0.1524	$y_p$	1.5240

Таблица 1 Значения параметров модели

моделирования системы представлены в таблице 1. На рисунке 2 показаны переходные процессы в разомкнутой системе при действии неопределенных возмущений без регулятора из точки  $x_0 = (1.8482, 0, 0, 0, 0)^T$ .

Проведен синтез регулятора по состоянию при действии неопределенных ограниченных по норме возмущений, из условия минимальности следа матрицы предельного инвариантного эллипсоида и синтез регулятора по состоянию наблюдателя при действии неопределенных возмущений. Значения параметров для

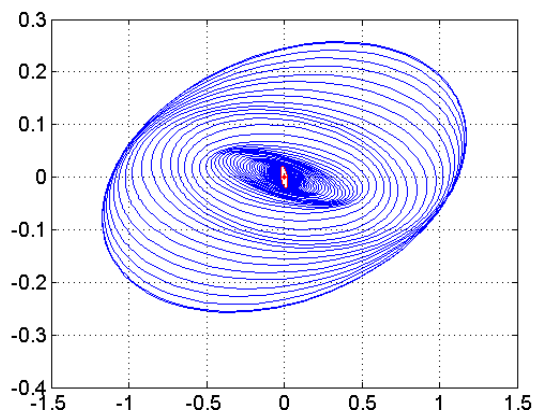


Рисунок 4. След матрицы эволюционирующего инвариантного эллипсоида

На основе теоремы 3 проведен синтез регулятора при действии неопределенных ограниченных возмущений из условия минимальности следа матрицы предельного инвариантного эллипсоида. Полученные значения коэффициентов усиления регулятора представлены на рисунке 3, при данных значениях регулятора собственные значения матрицы замкнутой системы имеют отрицательные реальные части.

На рисунке 4 показаны сечения в плоскости  $(\theta_1, \theta_2)$  эволюционирующего инвариантного эллипсоида, полученного в результате численного интегрирования МСС (10) с начальной матрицей, определяющей эллипсоид из области притяжения исходной нелинейной системы с регулятором. На рисунке 5 показаны переходные процессы в замкнутой нелинейной системе при действии неопределенных возмущений с полученными коэффициентами регулятора. Регулятор переводит манипулятор в заданное положение менее чем за 1 секунду.

Проведен синтез регулятора по состоянию наблюдателя при действии неопределенных возмущений. Результаты моделирования системы показаны на рисунке 6. Вектор состояния наблюдателя имеет вид  $x' = (\hat{\theta}_1, \dot{\hat{\theta}}_1, \hat{\theta}_2, \dot{\hat{\theta}}_2, \hat{\theta}_3, \dot{\hat{\theta}}_3)^T$ . Состояние наблюдателя сходится к вектору состояния системы менее чем за 2 секунды.

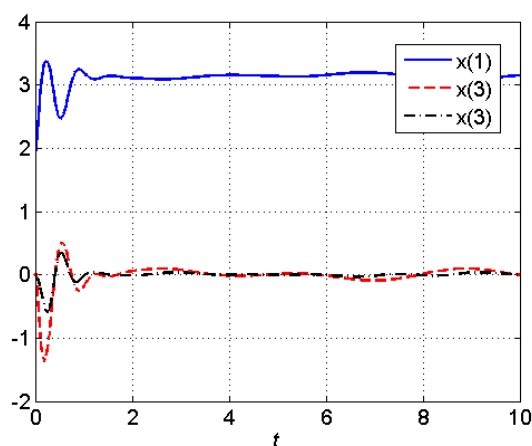


Рисунок 5. Переходные процессы в системе с полученными значениями регулятора

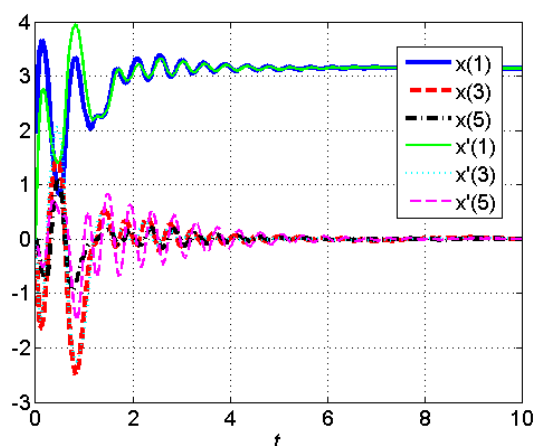


Рисунок 6 Переходные процессы в системе с регулятором по состоянию наблюдателя

### Заключение

Использование манипуляторов с нежестким соединением позволяет увеличить рабочую область манипулятора, без использования длинных звеньев, создающих дополнительную сложность управления, а также снизить риски поломки звена при действии внешних неопределенных возмущений. Найдено управление в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающего для рассматриваемого трехзвенного манипулятора стабилизацию с заданной точностью требуемого положения и устойчивость переходов из одного положения в другое при ограничениях на фазовые переменные и действии неопределенных возмущений. Решена задача синтеза регулятора по состоянию наблюдателя при неполной информации о состоянии системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 15-08-05575)

### Список литературы

1. Fantony I., Lorano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag, 2002.
2. Исанькин М.А., Маликов А.И. Анализ динамики и стабилизация при неопределенных возмущениях манипулятора с двумя звеньями с нежестким соединением. //Устойчивость

- и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого), Москва, Россия, 1-3 июня 2016 г./ Материалы XIII Международной конференции. С. 169-171
3. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями. // Автоматика и телемеханика. 2016. №5. С. 19-36.
  4. Маликов А.И. Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности // Изв. ВУЗов. Математика. 2000. №8. С. 35-45.
  5. Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Sector Nonlinearities and Bounded Disturbances // IFAC-PapersOnLine. 2015. V 48, Is. 11. P. 440-445.

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**А.Л.Калашников**

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
институт информационных технологий математики и механики  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [allk123@yandex.ru](mailto:allk123@yandex.ru)

Рассматривается задача оптимального управления в КВ-линеале с единицей. На основе метода регуляризации А.Н.Тихонова приводятся условия порядковой сходимости регуляризирующей последовательности к оптимальному множеству управлений в КВ-линеале ограниченных элементов. В конкретных функциональных пространствах это приводит к усиленной регуляризации.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, КВ-линеал, порядковая сходимость, усиленная регуляризация.

В работе рассматривается задача минимизации функционала при операторном и функциональных ограничениях на состояние  $x$  и управление  $u$ . Пространство управлений  $U$  здесь КВ-линеал с единицей  $e$ . Отметим, что к такой постановке приводят многие задачи оптимального управления, в которых банахово пространство управлений является и полуупорядоченным пространством. Например, задача оптимального управления с интегральными ограничениями и интегральным целевым функционалом, в которой  $U = L_2^n[t_0, t_1]$ , а единицей  $e$  является вектор-функция  $e(t) = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Как известно [1], в КВ-линеале с единицей можно ввести КВ-линеал  $e$ -ограниченных элементов  $U_e$ . При этом из сходимости в  $U_e$  следует сходимость в  $U$  к тому же пределу, что означает более сильную метрику в  $U_e$ , чем в  $U$ . Если априорно известно, что для оптимального множества  $U^0$  управлений исходной задачи  $U^0 \subset U_e$ , то целесообразно строить минимизирующие последовательности сходящиеся ко множеству  $U^0$  в метрике  $U_e$ . Возможно в этом случае при наличии такой априорной информации сузить пространство управлений до  $U_e$ . Так для  $U = L_2^n[t_0, t_1]$  подлинеал  $U_e = L_\infty^n[t_0, t_1]$  и сходимость в  $U_e$  будет почти всюду равномерная. Но при замене пространства  $U$  на  $U_e$  возникает вопрос о корректности исходной задачи оптимизации в  $U_e$ . Это связано с тем, что хотя в  $U$  может быть корректность, но в более "узком" пространстве  $U_e$  отсутствовать. Тем более подобное относится к тому случаю, когда в  $U_e$  задача оптимизации некорректна. Приведём пример такой задачи:

$$\int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0; 1], \quad \int_0^1 u^2(t) dt \leq 1, \quad (1)$$

где  $u \in L_2[0; 1]$ , а  $x \in C[0; 1]$ . Как нетрудно показать, здесь единственное оптимальное управление  $u_0(t) \equiv 0$  и соответствующее состояние  $x_0(t) \equiv 0$ . Очевидно,  $u_0 \in L_\infty[0; 1]$ . Тем самым  $u_0 \in U_e = L_\infty[0; 1]$ , где  $e(t) \equiv 1$ . Пусть  $\{u_k\}$  – любая минимизирующая последовательность в задаче (1). Тогда, поскольку  $\inf$  в ней равен нулю, то  $\lim_k \int_0^1 (x_k^2(t) + u_k^2(t)) dt = 0$ . Отсюда,

вследствие положительности слагаемых,  $\lim_k \int_0^1 u_k^2(t) dt = 0$ . Поэтому  $\lim_k u_k = 0$  в  $L_2[0;1]$ . Так как по [2] расстояние  $\rho(u_k, U^0) = \|u_k\|$  в  $L_2[0;1]$ , то  $\lim_k \rho(u_k, U^0) = 0$  при  $U^0 = \{u_0 = 0\}$ . Таким образом, на основе [2] задача (1) корректна в  $L_2[0;1]$ . Возьмём, теперь, последовательность  $\{u_k\}$  вида:  $u_k(t) \equiv 0$  на  $[0; 1 - \frac{1}{k})$  и  $u_k(t) \equiv k^{\frac{1}{4}}$  на  $[1 - \frac{1}{k}; 1]$ . Очевидно,  $\int_0^1 u_k^2(t) dt = k^{-\frac{1}{2}} < 1$  и, тем самым,  $u_k$  есть допустимое управление. Траектория  $x_k(t) = \int_0^t u_k(\tau) d\tau$  и  $x_k(t) \equiv 0$  на  $[0; 1 - \frac{1}{k}]$  и  $x_k(t) = k^{\frac{1}{4}}(t - 1 + \frac{1}{k})$  на  $[1 - \frac{1}{k}; 1]$ . Нетрудно показать, что  $\int_0^1 x_k^2(t) dt = \frac{1}{3} k^{-\frac{5}{2}}$  и, тем самым,  $\lim_k \int_0^1 (x_k^2(t) + u_k^2(t)) dt = 0$ . Поэтому последовательность  $\{u_k\}$   $\square$  минимизирующая в задаче (1). В пространстве же  $L_\infty[0;1]$  норма  $\|u_k\| = k^{\frac{1}{4}}$  и  $\rho(u_k, U^0) = \|u_k\|_{L_\infty} = k^{\frac{1}{4}}$ . Тогда  $\lim_k \rho(u_k, U^0) = \infty$ . Следовательно, задача (1) некорректна в  $L_\infty[0;1]$ . Для некорректных задач оптимизации разработаны методы регуляризации [2]. В настоящей работе на основе метода А. Н. Тихонова строится регуляризирующая последовательность  $\{u_k\}$ . Приведены условия  $e$ -ограниченности оптимальных управлений и порядковая сходимость  $\{u_k\}$  в  $U_e$ . Отметим, что такая усиленная (в порядковом смысле) регуляризация, получена здесь без стабилизатора определение, которого дано в [2].

### **Порядковая ограниченность оптимального множества**

Рассматривается 0-задача:  $g_0(x, u) \rightarrow \inf$

$$F(x, u) = 0, g_j(x, u) \leq 0, x \in X, u \in U, j = \overline{1, n}.$$

Здесь операция  $F : X \times U \rightarrow Z$ , где  $X, Z$  – банаховы пространства, а  $U$  является КВ-линеалом с единицей  $e$ . Функционалы  $g_0, g_j$  и операция  $F$  класса  $C^1$  на  $X \times U$ . В дальнейшем будем называть  $U$  пространством управлений, а  $X$  пространством состояний. Пусть для всех  $u \in U$  уравнение  $F(x, u) = 0$  имеет единственное решение  $x = x(u)$  класса  $C^1$ . Такое, в частности, будет при выполнении условий теоремы о существовании неявной функции в банаховом пространстве. Тогда 0-задача сводится к задаче минимизации функционала  $g_0(x(u), u)$  с ограничениями  $g_j(x(u), u) \leq 0, j = \overline{1, n}, u \in U$ . Очевидно, все функционалы  $g_j(x(u), u)$  для  $j = \overline{0, n}$  непрерывны и класса  $C^1$  на  $U$ . Предположим, также, что  $D \neq \emptyset$ , где  $D$  – допустимое множество управлений в 0-задаче, и существует некоторое множество  $S \subset U$ , для которого  $D \subset S$ . Например, такое  $S$  может быть получено на основе одного из неравенств  $g_j(x(u), u) \leq 0$ . Обозначим  $U^0$  множество оптимальных управлений в 0-задаче и пусть  $U^0 \neq \emptyset$ . Достаточные условия этого имеются, например, в [2]. Очевидно, для оптимального управления  $u_0 \in U^0$  оптимальное состояние  $x_0 = x(u_0)$ .

Исходная 0-задача может быть некорректна в пространстве  $U$  или в более "узком" подпространстве при наличии дополнительной информации об оптимальном управлении. По-

этому здесь применимы методы регуляризации, например, метод Тихонова А.Н. [2] с функцией  $T_k(x(u), u) = g_0(x(u), u) + \alpha_k \omega(u)$  при  $u \in U$  и  $k \geq 1$ , где функционал  $\omega(u) \geq 0$  класса  $C^1$  на  $U$ , а числовая последовательность  $\alpha_k \rightarrow +0$ . Рассмотрим  $k$ -задачи:  $T_k(x(u), u) \rightarrow \inf$

$$g_j(x(u), u) \leq 0, j = \overline{1, n}, u \in U.$$

Пусть,  $g_j(x, u) = a_j(u) + b_j(x, u)$  для  $j = \overline{0, n}$ , где  $a_j(u)$ ,  $b_j(x, u)$  – некоторые функционалы класса  $C^1$  на  $X \times U$ . Предположим, что сопряженное пространство  $U^*$  является КВ-линеалом с единицей  $a$ . Введём  $U_e$  – КВ-линеал  $e$ -ограниченных элементов в  $U$ , а  $U_a^*$  есть КВ-линеал  $a$ -ограниченных элементов в  $U^*$ . Обозначим  $\|\cdot\|_e$  – норму в  $U_e$ , а  $\|\cdot\|_a$  – норму в  $U_a^*$ . Их определение имеется в [1] и из сходимости последовательности в  $U_e$  следует её сходимость в  $U$  к тому же пределу. Аналогичное выполнено и для  $U_a^*$ . Поэтому функционалы непрерывные в  $U$  будут непрерывны и в  $U_e$ . Тем самым  $g_j(x(u), u)$ ,  $\omega(u)$  при  $j = \overline{0, n}$  непрерывны в  $U_e$ . Обозначим через  $|u|$  модуль для  $u \in U$  и  $\{v_{k_m}\}$  подпоследовательность последовательности  $\{v_k\}$ . Введем для  $u \in U_e$  и множества  $Q \subset U_e$  расстояние  $\rho_e(u, Q) = \inf_{v \in Q} \|u - v\|_e$  и обозначим числом  $d_0 = \inf$  в 0-задаче.

**Лемма.** Пусть последовательность  $\{s_k\} \subset U_e$  и компактна в  $U_e$ , а любая её предельная точка  $v \in Q \subset U_e$ . Тогда  $\lim_k \rho_e(s_k, Q) = 0$ .

**Доказательство.** Так как  $\rho_e(s_k, Q) \geq 0$ , то  $0 \leq \lim_k \rho_e(s_k, Q)$ . По определению верхнего предела существует  $\{s_{k_m}\}$  для которой  $\overline{\lim}_k \rho_e(s_k, Q) = \lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m}, Q)$ . В силу компактности  $\{s_k\}$  считаем для удобства обозначения  $\{s_{k_m}\}$  сходящейся к некоторой предельной точке  $v = \lim_{k_m} s_{k_m}$  в  $U_e$ . На основе условия леммы  $v \in Q$ . Нетрудно установить неравенство:  $\rho_e(s_{k_m}, Q) = \inf_{u \in Q} \|s_{k_m} - u\|_e \leq \|s_{k_m} - v\|_e$ . Но  $\lim_{k_m} \|s_{k_m} - v\|_e = 0$ . Тогда  $\lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m}, Q) = 0$  и поэтому  $\overline{\lim}_k \rho_e(s_k, Q) = \lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m}, Q) = 0$ . Поскольку  $0 \leq \lim_k \rho_e(s_k, Q) \leq \overline{\lim}_k \rho_e(s_k, Q) = 0$ , то получаем  $\lim_k \rho_e(s_k, Q) = \overline{\lim}_k \rho_e(s_k, Q) = 0$ . Отсюда  $\lim_k \rho_e(s_k, Q) = 0$ . Лемма доказана.

Обозначим  $U_e^0$  – множество  $e$ -ограниченных оптимальных управлений  $u_0$  в 0-задаче.

**Теорема 1.** Пусть 1) существуют числа  $\mu, \gamma > 0$ , для которых при  $j = \overline{0, n}$  и всех  $u \in S$  модули  $|a'_{j,u}(0)| \leq \mu a$  и  $|b'_{j,u}(x(u), u)| \leq \gamma a$ ; 2) существует линейный оператор  $B > 0 : U^* \rightarrow U$  с  $0 < Ba < \beta e$  для некоторого числа  $\beta > 0$  и такой, что при всех  $u, v \in S$ , чисел  $\lambda_j \geq 0$  с

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \text{ будет } |u - v| \leq B |\varphi'_u(u, \bar{\lambda}) - \varphi'_u(v, \bar{\lambda})|, \text{ где } \varphi(u, \bar{\lambda}) = \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j(u) \text{ и вектор } \bar{\lambda} \in R^{n+1}.$$

Тогда для любого оптимального управления  $u_0$  имеем  $|u_0| \leq (\gamma + \mu)\beta e$  и  $U_e^0 \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Введём функцию Лагранжа  $L(x(u), u, \bar{\lambda}) = \sum_{j=0}^n \lambda_j (a_j(u) + b_j(x(u), u))$ . Тогда по [3] для любого  $u_0 \in U_e^0$  существуют множители  $\lambda_j^0 \geq 0$  с  $\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 = 1$ , для которых

$L'_u(x(u_0), u_0, \bar{\lambda}^0) = 0$ . Отсюда  $\varphi'_u(u_0, \bar{\lambda}^0) = -\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0), u_0)$ . Поскольку  $u_0 \in S$ , то по условию 1)  $b'_{j,u}(x(u_0), u_0) \in U_a^*$ . Поэтому  $(-\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0), u_0)) \in U_a^*$ . Тогда и  $\varphi'_u(u_0, \bar{\lambda}^0) \in U_a^*$ .

На основе условия 1) теоремы 1 получаем  $|\varphi'_u(0, \bar{\lambda}^0)| \leq \sum_{j=0}^n \lambda_j^0 |a'_{j,u}(0)| \leq \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 \mu\right) a = \mu a$  и

$$|\varphi'_u(u_0, \bar{\lambda}^0)| \leq \sum_{j=0}^n \lambda_j^0 |b'_{j,u}(x(u_0), u_0)| \leq \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 \gamma\right) a = \gamma a.$$

Используя же условия 2) доказываемой теоремы, выводим неравенства

$$|u_0| \leq B |\varphi'_u(u_0, \bar{\lambda}^0) - \varphi'_u(0, \bar{\lambda}^0)| \leq B (|\varphi'_u(u_0, \bar{\lambda}^0)| + |\varphi'_u(0, \bar{\lambda}^0)|) \leq \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 (\gamma + \mu)\right) Ba.$$

Но  $0 < Ba < \beta e$  и  $\sum_{j=0}^n \lambda_j^0 = 1$ . Тогда  $|u_0| \leq (\gamma + \mu)\beta e$ . Отсюда любое  $u_0$  будет  $e$ -ограниченным.

Таким образом, множество  $U_e^0 \neq \emptyset$  Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** В теореме 1 приводятся условия, когда  $U^0 \subset U_e$  и содержится в некотором порядковом отрезке. Тогда имеем априорную информацию о  $e$ -ограниченности оптимальных управлений 0-задачи и локализации области поиска  $U^0$ . Отсюда возможно построение минимизирующих последовательностей в более сильной метрике пространства  $U_e$ .

Обозначим  $a_{0,k}(u) = a_0(u) + \alpha_k \omega(u)$ . Тогда  $T_k(x(u), u) = a_{0,k}(u) + b_0(x(u), u)$ . Введём при  $k \geq 1$  функции Лагранжа  $L_k(x, u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 T_k(x, u) + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j(x, u)$  с  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j=0}^n$  и функционалы

$$\theta_k(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 a_{0,k}(u) + \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j(u), \quad p(x, u, \bar{\lambda}) = \sum_{j=0}^n \lambda_j b_j(x, u).$$

Очевидно,  $L_k(x, u, \bar{\lambda}) = \theta_k(u, \bar{\lambda}) + p(x, u, \bar{\lambda})$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и 1) в любой  $k$ -задаче существует оптимальное управление  $u_k^0$ ; 2) существуют число  $\eta > 0$ , для которого при  $j = \bar{0}, n$  и всех  $u \in S$   $|a'_{0,k,u}(0)|, |a'_{j,u}(0)| \leq \eta a$ ; 3) существует линейный оператор  $C > 0: U^* \rightarrow U$  с  $0 < Ca \leq \xi e$  для некоторого числа  $\xi > 0$  такой, что при всех  $u, v \in S$  и  $\bar{\lambda} \in R^{n+1}$  с  $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$  и  $\lambda_j \geq 0$  имеем

неравенство (\*):  $|u - v| \leq C |\theta'_{k,u}(u, \bar{\lambda}) - \theta'_{k,u}(v, \bar{\lambda})|$ . Тогда I)  $u_k^0 \in U_e$  и модуль  $|u_k^0| \leq (\gamma + \eta)\xi e$ ; II)  $\lim_k g_0(x(u_k^0), u_k^0) = d_0$  и  $\{u_k^0\}$  — минимизирующая в 0-задаче; III)  $\omega(u_k^0) \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0)$ .

**Доказательство.** Поскольку условия теоремы 2 аналогичны условиям теоремы 1, то доказательство I) проводится также аналогично. Докажем II). Имеем неравенства:

$$\begin{aligned} d_0 &\leq g_0(x(u_k^0), u_k^0) \leq g_0(x(u_k^0), u_k^0) + \alpha_k \omega(u_k^0) = T_k(x(u_k^0), u_k^0) \leq \\ &\leq T_k(x(u_0), u_0) = g_0(x(u_0), u_0) + \alpha_k \omega(u_0) = d_0 + \alpha_k \omega(u_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Из (2)  $d_0 \leq g_0(x(u_k^0), u_k^0) \leq d_0 + \alpha_k \omega(u_0)$ . Тогда  $\lim_k g_0(x(u_k^0), u_k^0) = d_0$  при  $\alpha_k \rightarrow +0$  и  $\{u_k^0\}$  минимизирующая в 0-задаче. Из (2) получаем  $g_0(x(u_k^0), u_k^0) + \alpha_k \omega(u_k) \leq d_0 + \alpha_k \omega(u_0)$ . Но так как  $d_0 \leq g_0(x(u_k^0), u_k^0)$ , то  $\alpha_k \omega(u_k) \leq \alpha_k \omega(u_0)$  или  $\omega(u_k) \leq \omega(u_0)$ . Отсюда  $\omega(u_k^0) \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0)$ .

Тем самым установлена справедливость III) и теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и для всякой  $\{v_k\} \subset S$  и  $j = \overline{0, n}$  последовательность  $\{b'_{j,u}(x(v_k), v_k)\}$  компактна в  $U_a^*$ . Тогда  $\{u_k^0\}$  компактна в  $U_e$ , а любая её предельная точка  $v \in U_e^0$ .

**Доказательство.** I) Поскольку  $\{u_k^0\} \subset S$ , то на основе условия теоремы 3 получаем компактность  $\{b'_{j,u}(x(u_k^0), u_k^0)\}$  в  $U_a^*$ . Согласно [3] существуют  $0 \leq \bar{\lambda}_k^0$  с  $\sum_{j=0}^n \lambda_{j,k}^0 = 1$  для которых

$L'_{k,u}(x(u_k^0), u_k^0, \bar{\lambda}_k^0) = 0$  или  $\theta'_{k,u}(u_k^0, \bar{\lambda}_k^0) = -p'_u(x(u_k^0), u_k^0, \bar{\lambda}_k^0)$ . Так как  $0 \leq \lambda_{j,k}^0 \leq 1$ , то нетрудно установить компактность  $\{-p'_u(x(u_k^0), u_k^0, \bar{\lambda}_k^0)\}$  в  $U_a^*$ . Отсюда следует и компактность  $\{\theta'_{k,u}(u_k^0, \bar{\lambda}_k^0)\}$  в  $U_a^*$ . Обозначим  $w_k = \theta'_{k,u}(u_k^0, \bar{\lambda}_k^0)$ . Тогда  $\{w_k\} \subset U_a^*$  и компактна в  $U_a^*$ . На основе неравенства (\*) условия 3) теоремы 2 получаем  $|u_k^0 - u_m^0| \leq C |w_k - w_m|$ . Для компактности  $\{u_k^0\}$  в  $U_e$  достаточно показать, что у всякой ее  $\{u_{k_j}^0\}$  существует сходящаяся в  $U_e$  подпоследовательность. По компактности  $\{w_k\}$  для  $\{w_{k_j}\}$  существует  $\{w_{k_{j_m}}\}$  сходящаяся в  $U_a^*$ , которая, очевидно, будет фундаментальной в  $U_a^*$ . Тогда для всякого числа  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$ , что при всех  $k_{j_{m1}}, k_{j_{m2}} \geq N$  получаем  $|w_{k_{j_{m1}}} - w_{k_{j_{m2}}}| < \varepsilon a$ . Следовательно,  $|u_{k_{j_{m1}}}^0 - u_{k_{j_{m2}}}^0| \leq C |w_{k_{j_{m1}}} - w_{k_{j_{m2}}}| < \varepsilon Ca < \varepsilon \xi e$ , так как  $0 < Ca \leq \xi e$  для некоторого числа  $\xi > 0$ , что доказывает фундаментальность  $\{u_{k_{j_m}}^0\}$  в  $U_e$  и, тем самым, ее сходимости. Таким образом,  $\{u_k^0\}$  компактна в  $U_e$ . Пусть  $v \in U_e$  есть любая предельная точка для  $\{u_k^0\}$ . Тогда существует  $\{u_{k_m}^0\}$  с  $\lim_{k_j} u_{k_j}^0 = v$  в  $U_e$ . По непрерывности операции  $x(u)$  получаем  $\lim_{k_m} x(u_{k_m}^0) = x(v)$  в  $X$ .

Из сходимостей  $\{u_{k_m}^0\}$  и  $\{x(u_{k_m}^0)\}$  и непрерывности  $a_j(u)$ ,  $b_j(x, u)$  при  $j = \overline{1, n}$  получаем

$$a_j(u_{k_m}^0) \rightarrow a_j(v), \quad b_j(x(u_{k_m}^0), u_{k_m}^0) \rightarrow b_j(x(v), v).$$

Так как  $g_j(x, u) = a_j(u) + b_j(x, u)$ , то  $g_j(x(u_{k_m}^0), u_{k_m}^0) \rightarrow g_j(x(v), v)$ . Но  $g_j(x(u_{k_m}^0), u_{k_m}^0) \leq 0$ . Тогда в пределе  $g_j(x(v), v) \leq 0$  для  $j = \overline{1, n}$ . Следовательно, предельная точка  $v \in U_e$  допустимое управление в 0-задаче.

II) По теореме 2  $\{u_k^0\}$  минимизирующая в 0-задаче и по доказанному в I) компактна в  $U_e$ . Пусть  $v \in U_e$  любая предельная в  $U_e$  точка для  $\{u_k^0\}$ . Тогда существует  $\{u_{k_m}^0\}$  с  $\lim_{k_m} u_{k_m}^0 = v$  в  $U_e$ , а по [1] следует и сходимости в  $U$ . Из непрерывности функционала  $g_0(x(u), u)$  получаем  $\lim_{k_m} g_0(x(u_{k_m}^0), u_{k_m}^0) = d_0$ . Но  $\lim_{k_m} g_0(x(u_{k_m}^0), u_{k_m}^0) = g_0(x(v), v)$ . Отсюда  $g_0(x(v), v) = d_0$ . По доказанному в пункте I)  $v$  является  $e$ -ограниченным допустимым управлением в 0-задаче. Тогда управление  $v$  будет оптимально в ней и, тем самым,  $v \in U_e^0$ . Теорема 3 доказана.



**Порядковая сходимость регуляризирующей последовательности**

**Теорема 4.** Пусть 1) выполнены условия теоремы 3; 2) для всех  $k \geq 1$  существует  $v_k \in D$  с  $(v_k - u_k^0) \in U_e$  и  $\|v_k - u_k^0\|_e \leq \delta_k$  при  $\delta_k \rightarrow +0$ . Тогда А)  $\{v_k\} \subset U_e$ , компактна в  $U_e$ , а любая её предельная точка  $v \in U_e^0$ ; В)  $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^0) = \lim_k \rho_e(v_k, U_e^0) = 0$ ; С)  $\lim_k g_0(x(v_k), v_k) = d_0$ .

**Доказательство.** По теоремам 2,3  $u_k^0 \in U_e$  и  $\{u_k^0\}$  компактна в  $U_e$ , а любая её предельная точка  $u \in U_e^0 \neq \emptyset$ . Из условия 2) теоремы 4  $(v_k - u_k^0) \in U_e$  и  $\|v_k - u_k^0\|_e \leq \delta_k$  с  $\delta_k \rightarrow +0$ . Тогда  $\{v_k\} \subset U_e$  и  $\lim_k \|v_k - u_k^0\|_e = 0$ . Отсюда  $\{v_k\}$  компактна в  $U_e$ , а ее предельные точки  $v$  совпадают с предельными для  $\{u_k^0\}$  и, тем самым,  $v \in U_e^0$ . Следовательно, А) доказано.

Используя А) и применяя лемму для случаев  $s_k = u_k^0$  и  $s_k = v_k$  при  $Q = U_e^0$ , получаем  $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^0) = \lim_k \rho_e(v_k, U_e^0) = 0$ , что и доказывает В).

По установленному в А)  $\{v_k\} \subset U_e$ , компактна в  $U_e$ , а любая её предельная точка  $v \in U_e^0$ . Тогда для  $v$  существует  $\{v_{k_j}\}$  с  $\lim_{k_j} v_{k_j} = v$  в  $U_e$ , а по [1]  $\lim_{k_j} v_{k_j} = v$  и в  $U$ . Из непрерывности функционала  $g_0(x(u), u)$ , получаем  $g_0(x(v), v) = \lim_{k_j} g_0(x(v_{k_j}), v_{k_j})$ . Но так как по А)  $v \in U_e^0$ , то  $g_0(x(v), v) = d_0$ . Отсюда  $\{g_0(x(v_k), v_k)\}$  компактна и, как нетрудно установить, число  $d_0$  — её единственный частичный предел. Следовательно,  $\lim_k g_0(x(v_k), v_k) = d_0$ . Таким образом, верно С) и теорема 4 доказана.

**Замечание 2.** Приближение  $v_k$  можно получить каким-либо методом минимизации. Теорема 4 приводит условия усиленной регулярности в  $U_e$  минимизирующей  $\{u_k^0\}$ . Тогда по терминологии [2] такую регулярность в  $U_e$  можно назвать  $\epsilon$ -регулярностью.

Рассмотрим минимизацию функционала  $\omega(u)$  на  $U_0$ . Введём число  $\omega_n = \inf_{u \in U_0} \omega(u)$ . Поскольку  $\omega(u) \geq 0$ , то существует  $\omega_n \geq 0$ . Определим  $\omega$ -нормальное решение  $u_n^0 \in U_0$  как  $\omega(u_n^0) = \omega_n$ . Если же  $u_n^0 \in U_e^0$ , то  $u_n^0$  назовем  $\omega_e$ -нормальным решением, а  $U_{e,n}^0$  — множеством  $\omega_e$ -нормальных решений.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4 и функционал  $\omega(u)$  непрерывен на  $U$ .

Тогда  $U_{e,n}^0 \neq \emptyset$  и любая предельная в  $U_e$  точка последовательностей  $\{u_k^0\}, \{v_k\}$  принадлежит  $U_{e,n}^0$ , а  $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_{e,n}^0) = \lim_k \rho_e(v_k, U_{e,n}^0) = 0$ .

**Доказательство.** Согласно теоремам 3,4  $\{u_k^0\}, \{v_k\}$  компактны в  $U_e$ , а любая их предельная точка принадлежит  $U_e^0$ . Пусть  $u_p$  — предельная точка для  $\{u_{k_m}^0\}$ . Тогда существует  $\{u_{k_m}^0\}$  такая, что  $\lim_{k_m} u_{k_m}^0 = u_p$  в  $U_e$ . Поскольку по [1] из сходимости в  $U_e$  следует сходимость в  $U$ , то существует  $\lim_{k_m} u_{k_m}^0 = u_p$  в  $U$ . По непрерывности  $\omega(u)$  в  $U$  имеем  $\lim_{k_m} \omega(u_{k_m}^0) = \omega(u_p)$ . На основе III) теоремы 2, получаем  $\omega(u_{k_m}^0) \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0)$ . Тогда в пределе  $\omega(u_p) \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0) = \omega_n$ . По теореме 3  $u_p \in U_e^0$ . Отсюда  $\omega(u_p) = \omega_n$ . Следовательно, любая для  $\{u_k^0\}$  предельная точка

$u_p$  будет  $e$ -ограниченным  $\omega$ -нормальным решением. Поэтому  $U_{e,n}^0 \neq \emptyset$ , а  $u_p \in U_{e,n}^0$ . По условию теоремы 4  $\|v_k - u_k^0\|_e \leq \delta_k$ , где  $\delta_k \rightarrow +0$ . Тогда  $\lim_k \|u_k^0 - v_k\|_e = 0$ . По заключению А) теоремы 4  $\{v_k\} \subset U_e$  и компактна в  $U_e$ . Тогда нетрудно показать, что  $\{v_k\}$  имеет такие же предельные точки, что и  $\{u_k^0\}$ . Отсюда все предельные точки для  $\{v_k\}$  принадлежат  $U_{e,n}^0$ . Применяя лемму для  $s_k = u_k^0$ ,  $s_k = v_k$  и множества  $Q = U_{e,n}^0$ , получаем  $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_{e,n}^0) = 0$ ,  $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_{e,n}^0) = 0$ . Теорема 5 доказана.

Рассмотрим в интегральной форме 0-задачу оптимального управления:

$$g_0(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} (a_0(u, t) + b_0(x, t)) dt \rightarrow \inf$$

$$F(x, u)(t) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t (A(x, \tau) + B(\tau)u) d\tau = 0, \quad (3)$$

$$g_j(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} (a_j(u, t) + b_j(x, t)) dt \leq 0, \quad j = \overline{1, N}$$

где состояние  $x \in X = C([t_0, t_1], R^m)$ , управление  $u \in U = L_2^n[t_0, t_1]$ , а все функции, входящие в задачу (3), достаточно гладкие. Здесь единица  $e$  есть вектор-функция  $e(t) = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Функционал  $\omega(u)$  можно взять, например, как  $\omega(u) = \|u\|^2$  в  $L_2^n[t_0, t_1]$ . В работах [4], [5] приведены примеры выбора  $\omega(u)$  и функций задачи (3), при которых выполняются условия теорем 1-5, применительно к задаче (3). Для  $U = L_2^n[t_0, t_1]$  пространство  $U_e = L_\infty^n[t_0, t_1]$ . Поэтому сходимость регуляризирующей последовательности будет в  $L_\infty^n[t_0, t_1]$ , то есть в более сильной метрике, чем в  $L_2^n[t_0, t_1]$ . Отметим, что интегральная форма задачи (3) оптимального управления позволяет проверить выполнение условий теорем 1-5 более удобным образом

#### Список литературы

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
4. Калашников А.Л. Усиленная регуляризация в методе А.Н. Тихонова для задачи оптимального управления// Вестник ННГУ «Математическое моделирование и оптимальное управление». Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 1997. С.104-107.
5. Калашников А.Л. Аппроксимация и ограниченность оптимального множества управлений для динамической системы// Вестник ННГУ «Математическое моделирование и оптимальное управление». Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2003. Вып.1(26). С.138-141.

## ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА С ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВНЕШНЕЙ СТЕНКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИИ

**А.В. Калинина, Д.В. Кондратов, Ю.Н. Кондратова, А.А. Попова**

Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал РАНХиГС  
410031, г. Саратов, ул. Соборная, 23/25, e-mail: kali1598@yandex.ru

Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал РАНХиГС  
410031, г. Саратов, ул. Соборная, 23/25, e-mail: KondratovDV@yandex.ru

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,  
410031, г. Саратов, ул. Соборная, 23/25, e-mail: kondratovaun@mail.ru

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: anay\_p@bk.ru

Рассмотрено построение математической модели механической системы, представляющая собой трубу кольцевого профиля, образованную двумя поверхностями соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью, внешняя из которых является геометрически нерегулярной, а внутренняя – геометрически регулярной, при воздействии вибрации. Представленная математическая модель состоит из уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, уравнений динамики геометрически нерегулярной и геометрически регулярной оболочек и соответствующих граничных условий.

**Ключевые слова:** гидроупругость, геометрически нерегулярная оболочка, вязкая несжимаемая жидкость, соосные оболочки, вибрация

Современные конструкции, используемые в различных отраслях техники, в процессе работы подвергаются различным воздействиям, таким как , например, вибрация. Поэтому возникает необходимость создания таких элементов конструкции которые были бы устойчивы к таким воздействиям. Кроме того, возникает необходимость в уменьшении веса конструкции. Для этого используются тонкостенные элементы конструкции. Часто встречаются элементы конструкции могут быть описаны моделью, которая состоит из двух цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, между которыми расположена жидкость. Примерами использования модели с двумя цилиндрическими оболочками можно считать двигатели внутреннего сгорания, поплавковые приборы навигации, жидкостные ракетные двигатели, телескопические шасси, силовые цилиндры с полым плунжером [1-5]. Следует отметить, что в такой модели жидкость между оболочками может служить как для демпфирования собственных колебаний оболочек, так и для охлаждения этих оболочек. Кроме того, внешняя оболочка может быть геометрически нерегулярной, а внутренняя – абсолютно жесткой.

Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

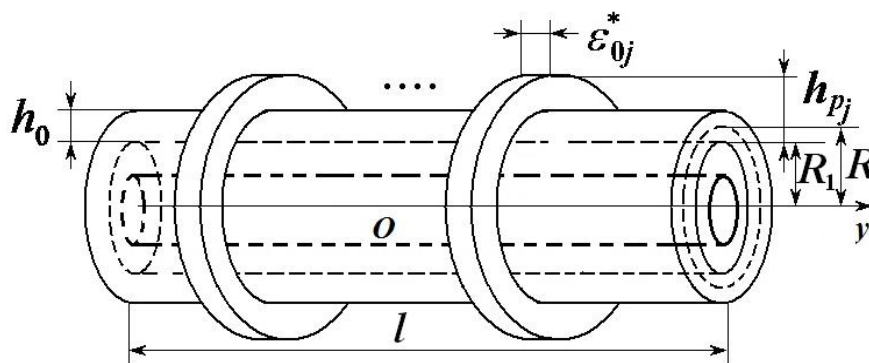


Рис. 1

### Механическая модель

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе кольцевого сечения, образованного поверхностями соосных упругих цилиндрических оболочек конечной длины свободно опертых на концах, причем внешняя оболочка является упругой геометрически нерегулярной, а внутренняя оболочка - геометрически регулярной. Внутренний  $R_1$  и срединной поверхности  $R^{(1)}$  радиусы внешней оболочки, а также внешний  $R_2$  и срединной поверхности  $R^{(2)}$  радиусы внутренней и внешней оболочек значительно больше ширины  $h_0^{(1)} = 2(R^{(1)} - R_1) \ll R^{(1)}$  и  $h_0^{(2)} = 2(R_2 - R^{(2)}) \ll R^{(2)}$  цилиндрической щели кольцевого сечения. Толщина внешней и внутренней  $h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$  оболочек значительно меньше радиусов срединной поверхности  $R^{(1)}$  и  $R^{(2)}$  соответственно. Радиус координатной поверхности оболочки  $R^{(1)}$ , а ее толщина на участках, где отсутствуют ребра жесткости, равна. Длины оболочек  $l$  – одинаковы, а упругие перемещения внешней оболочки значительно меньше ширины  $\delta$  цилиндрической щели. На механическую систему действует гармонический по времени внешний источник вибрации. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной.

Внешняя поверхность внешней оболочки является геометрически нерегулярной и имеет  $n$  ребер жесткости ступенчато изменяющейся высоты. Ребра представляют собой внешние шпангоуты. Высота  $j$ -го ребра равна  $h_{pj}$ , а его длина  $\varepsilon_{0j}^*$ . Геометрически нерегулярная оболочка на торцах имеет свободное опирание. Ступенчатый характер изменения высоты ребра опишем с помощью разностей функций Хевисайда по продольной координате.

Таким образом, общее уравнение, описывающее внешнюю поверхность оболочки можно представить в виде

$$z_2 = \frac{h_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}}\right) h_{pj} \Delta \Gamma_{sj},$$

где  $\Delta \Gamma_{yj} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$ ,  $\Gamma(y)$  – единичная функция Хевисайда по продольной координате;  $y_j$  - точка появления ребра по продольной координате.

Течение жидкости между оболочками осесимметричное и описывается уравнениями Навье-Стокса, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} W_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ W_\theta &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right), \\ W_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} W_r &= W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta + \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_r}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{r}, \\ W_\theta &= -W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_\theta}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{r}, \\ W_y &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_y}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Здесь  $V_y, V_\theta, V_r$  – компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат  $(\bar{n}_r, \bar{j})$ , начало  $O$  которой находится в центре внутренней оболочки;  $p$  – давление жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $y$  – координата вдоль оси симметрии  $Oy$ ;  $r$  – расстояние от оси  $Oy$ ;  $t$  – время.

Граничные условия представляют собой условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$\begin{aligned} V_r = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_\theta = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_y = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = r^{(i)}, \quad i = 1, 2 \\ r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}, \quad r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_1^{(i)} = u_1^{(i)}(y, t)$  – продольное упругое перемещение оболочки, положительное в направлении  $\bar{n}_s$ , противоположным направлению  $\bar{j}$ ;  $u_2^{(i)} = u_2^{(i)}(y, \theta, t)$  – окружное упругое перемещение оболочки в направлении  $\bar{n}_\theta$ ;  $u_3^{(i)} = u_3^{(i)}(y, t)$  – прогиб оболочки, положительный в направлении  $\bar{n}$ , совпадающим с  $\bar{n}_r$  и противоположным направлению к центру кривизны;  $\bar{u}^{(i)} = u_1^{(i)}\bar{n}_s + u_2^{(i)}\bar{n}_\theta + u_3^{(i)}\bar{n}$  – вектор упругих перемещений оболочки.

Здесь и далее верхний индекс  $i = 1$  относится к внешней оболочке, а  $i = 2$  – к внутренней оболочке.

Уравнения динамики внешней геометрически нерегулярной оболочки, для введенной в рассмотрение цилиндрической системы координат, полученной исходя из вариационного интегрального принципа Гамильтона, имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^p}{\partial y} + \frac{1}{R^{(1)}} \frac{\partial S^p}{\partial \theta} - h_0^{(1)} \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) &= -q_s^{(1)}, \\ \frac{\partial S^p}{\partial y} + \frac{1}{R^{(1)}} \frac{\partial N_2^p}{\partial \theta} + \frac{1}{(R^{(1)})^2} \frac{\partial M_2^p}{\partial \theta} + \frac{2}{R^{(1)}} \frac{\partial H^p}{\partial y} - h_0^{(1)} \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) &= -q_\theta^{(1)}, \\ \frac{\partial^2 M_1^p}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(1)})^2} \frac{\partial^2 M_2^p}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R^{(1)}} \frac{\partial H^p}{\partial y \partial \theta} - \frac{1}{R^{(1)}} N_2^p - h_0^{(1)} \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) &= -q_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} S^p &= \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{2(1 + \mu_0^{(1)})} \left\{ \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{R^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} \right) \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \frac{2}{R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y \partial \theta} \right) h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj} \right\}, \\ H^p &= \frac{E^{(1)} (h_0^{(1)})^3}{12(1 + \mu_0^{(1)}) R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y \partial \theta} \right) \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \\ &+ \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{2(1 + \mu_0^{(1)})} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{R^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} \right) h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj}, \\ N_1^p &= \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{1 - (\mu_0^{(1)})^2} \left\{ \left[ \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} + \mu_0^{(1)} \frac{1}{R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} + u_3^{(1)} \right) \right] \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \mu_0^{(1)} \frac{1}{(R^{(1)})^2} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj} \right\}, \\ N_2^p &= \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{1 - (\mu_0^{(1)})^2} \left\{ \left[ \frac{1}{R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} + u_3^{(1)} \right) + \mu_0^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} \right] \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{1}{(R^{(1)})^2} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right\} h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj} \Bigg\}; \\
 M_1^p & = \frac{E^{(1)} (h_0^{(1)})^3}{12 (1 - (\mu_0^{(1)})^2)} \left( \mu_0^{(1)} \frac{1}{(R^{(1)})^2} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \\
 & + \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{1 - (\mu_0^{(1)})^2} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} + \mu_0^{(1)} \frac{1}{R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} + u_3^{(1)} \right) \right) h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj}, \\
 M_2^p & = \frac{E^{(1)} (h_0^{(1)})^3}{12 (1 - (\mu_0^{(1)})^2)} \left( \frac{1}{(R^{(1)})^2} \left( \frac{\partial \partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial \theta^2} \right) - \mu_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2} \right) \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{sj} \right) + \\
 & + \frac{E^{(1)} h_0^{(1)}}{1 - (\mu_0^{(1)})^2} \left( \mu_0^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{R^{(1)}} \left( \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta} + u_3^{(1)} \right) \right) h_0^{(1)} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj}.
 \end{aligned}$$

Основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява скалярные уравнения динамики внутренней упругой цилиндрической геометрически регулярной оболочки, запишутся в виде [7]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} & = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{Os}^{(i)} - q_s^{(i)}]; \\
 - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y \partial \theta} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} & + \\
 + (a_0^{(i)})^2 \left[ 2(1 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] & + \\
 + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[ (2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] & = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{O\theta}^{(i)} - q_\theta^{(i)}], \\
 - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[ (2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] & + \\
 + \frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}} + (a_0^{(i)})^2 \left[ (R^{(i)})^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] & = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [-\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{On}^{(i)} + (-1)^i q_n^{(i)}], \quad i = 2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициент Пуассона материала оболочки;  $E^{(i)}$  – модуль Юнга материала оболочки;  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала оболочки,  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к срединной поверхности оболочки;  $\bar{s}$  – единичный вектор в продольном направлении в срединной поверхности оболочки, противоположный единичному вектору  $\bar{j}$ ;  $\bar{n}_r, \bar{j}$  – единичные векторы введенной цилиндрической системы координат.

$$\begin{aligned}
 k_1(y) & = 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{sj}, \quad k_2(y) = \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{sj}, \quad k_3(y) = 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{sj}, \quad k_{1j} = \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}, \\
 k_{2j} & = \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^2}{2h_0^2}, \quad k_{3j} = \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \left( 4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}, \\
 q_s^{(i)} & = -[P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j})]_{r=r^{(i)}}; \\
 q_\theta^{(i)} & = [P_{r\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j})]_{r=r^{(i)}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_n^{(i)} &= \left[ P_{rr} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right]_{r=r^{(i)}}; \quad i = 1, 2, \\
 r^{(1)} &= R_2 + \delta + u_3^{(1)}; \quad r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}, \\
 P_{rr} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad P_{r\theta} = \rho v \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right); \\
 P_{\theta\theta} &= -p + 2\rho v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right); \quad P_{ry} = \rho v \left( \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y} \right); \\
 P_{yy} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_y}{\partial y}; \quad P_{\theta y} = \rho v \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \theta} \right); \quad \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}}; \quad \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta}; \\
 \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) &= -\frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y}; \quad |\bar{N}|^{(i)} = \left\{ \left( r^{(i)} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} \right]^2 + \left( \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \left( a_0^{(i)} \right)^2 = \frac{\left( h_0^{(i)} \right)^2}{12 \left( R^{(i)} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Граничные условия для перемещений оболочек состоящие в условиях свободного опирания на торцах[8]:

$$\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} = 0, \quad u_2^{(i)} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{l}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, получим поставленную связанную задачу гидроупругости для трубы кольцевого профиля с упругими внешней геометрически нерегулярной и внутренней геометрически регулярной цилиндрическими оболочками конечной длины свободно опираемыми на концах трубы.

Полученная связанная задача гидроупругости решается в безразмерных переменных методом возмущений в предположении гармонического закона вибрации системы. Решение уравнений динамики жидкости ищется в виде одночленных разложений по малому параметру, характеризующему относительную толщину поддерживающего слоя жидкости, и по малому параметру, называемому характеризующему относительный прогиб для каждой из оболочек.

В результате решения получим выражения для прогибов внешней геометрически нерегулярной и внутренней геометрически регулярной оболочек, а также их амплитудные и фазовые частотные характеристики прогиба. Исследовано влияние размеров механической системы на величины АЧХ.

Выполнено при поддержке грантов РФФИ 15-01-01604-а, 16-01-00175-а и гранта Президента РФ МД-6012.2016.8.

## Список литературы

1. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика./ Башта Т.М. – М.: Машгиз, 1963.–696 с.
2. Могилевич Л.И. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении/ Л.И. Могилевич, В.С. Попов – Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. – 156 с
3. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании// Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 3. С. 11-21.
4. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту / Л.И. Могилевич, А.А. Попова, В.С. Попов // Наука и техника транспорта. – 2007. – №2. – С. 64-72.

5. Епишкина И.Н., Могилевич Л.И., Попов В.С., Симдянкин А.А. Математическое моделирование вынужденных колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 4. С. 19-26
6. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации// Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
7. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам / Ю.Н. Кондратова, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – №1(37). – С.33-40
8. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall// Applied Mathematical Sciences. 2014. T. 8. № 157-160. С. 7899-7908.



## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ЛОКАЛЬНОМ УДАРЕ

Т.Д. Каримбаев<sup>1</sup>, Ш.М.Мамаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Центральный институт авиационного моторостроения, Москва,  
e-mail: karimbayev@ciam.ru

<sup>2</sup>Таразский инновационно-гуманитарный университет, Республика Казахстан, город Тараз, ул. Желтоксан, 69б, e-mail: sch\_mamaev@mail.ru

Методом бихарактеристик численно решена в трехмерной постановке задача о локальном поперечном ударе по балке цилиндрического профиля, один конец которой закреплен, а другой – свободен. Локальный характер нагружения сказывается на величине нормальных осевых и окружных напряжений, во много раз превышающей уровень действующих нагрузок. Исследуется эффект взаимного влияния отраженных от закрепленной, боковой границы волн напряжений и динамических возмущений от локальных ударов по различным площадкам. На основе анализа численных результатов устанавливаются ожидаемые области разрушения и их причины.

**Ключевые слова:** метод бихарактеристик, балка, нормальное окружное напряжение, осевое напряжение, радиальное перемещение, разрушение

Проблемы напряженности корпусов при локальном воздействии статическими нагрузками и моментами рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2] и др.). В [3, 4] рассмотрены волны напряжений, возникающие в полой упругой и упругопластической толстой цилиндрической оболочке при локальном нагружении, симметрично относительно торцов. В [5] методом бихарактеристик [6] в трехмерной постановке решена задача о локальном поперечном ударе по цилиндрической оболочке. Показано, что максимальные напряжения в оболочке при локальном ударе реализуются в области площадки удара и в моменты времени действия нагрузки. В [7] исследовано влияние места расположения площадки локального удара на уровень напряжений в области закрепленного торца оболочки. Ниже рассмотрена задача о локальном поперечном ударе по балке цилиндрического профиля. Исследованы напряженное состояние балки.

**Определяющая система уравнений.** Система уравнений, описывающая процесс распространения пространственных динамических возмущений в упругой изотропной линейной среде, в цилиндрических координатах  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \varphi$ ,  $x_3 = z$  в безразмерной форме имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 - \sigma_{11,1} - \frac{1}{r} \sigma_{12,2} - \sigma_{13,3} &= \frac{1}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}), & \dot{v}_2 - \sigma_{21,1} - \frac{1}{r} \sigma_{22,2} - \sigma_{23,3} &= \frac{2}{r} \sigma_{21}, \\ \dot{v}_3 - \sigma_{31,1} - \frac{1}{r} \sigma_{32,2} - \sigma_{33,3} &= \frac{1}{r} \sigma_{31}, & \dot{\sigma}_{11} - c_{11} v_{1,1} - \frac{1}{r} c_{12} v_{2,2} - c_{13} v_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{12} v_1, \\ \dot{\sigma}_{22} - c_{21} v_{1,1} - \frac{1}{r} c_{22} v_{2,2} - c_{23} v_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{22} v_1, & \dot{\sigma}_{33} - c_{31} v_{1,1} - \frac{1}{r} c_{32} v_{2,2} - c_{33} v_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{32} v_1, \\ \dot{\sigma}_{12} - s_{12} \left( \frac{1}{r} v_{1,2} + v_{2,1} \right) &= -\frac{1}{r} v_2, & \dot{\sigma}_{23} - s_{23} \left( \frac{1}{r} v_{3,2} + v_{2,3} \right) &= 0, \\ \dot{\sigma}_{31} - s_{31} (v_{1,3} + v_{3,1}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $c_{ij} = \begin{cases} \lambda + 2\mu & \text{при } i = j, \\ \lambda & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad s_{ij} = \mu$

$\lambda, \mu$  – постоянные Ламе, точка над переменной и запятая перед индексом означают соответственно дифференцирование по времени и пространственной переменной. Безразмерные компоненты вектора скорости  $v_i$ , тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) определяются через соответствующие размерные величины:

$$x_i = \bar{x}_i / l, \quad t = \bar{t} c_1 / l, \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} / \rho c_1^2, \quad v_i = \bar{v}_i / c_1, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad (2)$$

где с чертой обозначены размерные величины,  $t$  – время,  $l$  – характерная длина,  $\rho$  – плотность среды,  $c_1$  – скорость распространения продольной волны.

**Постановка задачи.** Рассматривается консольно-закрепленная балка цилиндрического профиля толщиной  $H$ , внутренним радиусом  $R$ , длиной  $L$ , шириной  $\varphi=30^\circ$ . Балка в начальный момент времени находится в состоянии покоя

$$v_i = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

В любой другой момент времени  $t$  на участок  $\Omega = \{x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^1, x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^1\}$  внешней поверхности балки (граница  $x_1=R+H$ ) действует нестационарная нормальная к поверхности оболочки нагрузка  $f(x_2, x_3; t)$ , изменяющаяся во времени и по координатам

$$\sigma_{11} = \begin{cases} f(x_2, x_3; t) & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases} \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = R + h, \quad (4)$$

Предполагается, что торец  $x_3=L$  жестко закреплен

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \text{при} \quad x_3 = L, \quad (5)$$

а торец  $x_3=0$  свободен от нагрузок, т.е.

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0. \quad (6)$$

Кроме того, вся внутренняя и боковые поверхности оболочки свободны от действия каких-либо нагрузок, т.е.

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = R \quad (7)$$

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \varphi \quad (8)$$

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1) при нулевых начальных (3) и граничных (4-8) условиях.

В расчетах рассматривалась балка цилиндрического профиля конечных размеров:  $H=4h_1$ ,  $R=200h_1$ ,  $L=200h_3$ ,  $|x_2| \leq 20h_2$  (боковая поверхность). При численной реализации задачи выбиралась следующая форма динамического нагружения

$$f(x_2, x_3; t) = A [1 - \cos(2\pi \cdot t / T)] (x_3^0 - x_3) (x_3^1 - x_3) \cos(\eta x_2) / \left( (x_3^1 - x_3^0) / 2 \right)^2 \quad (9)$$

в которой  $A$  – постоянный коэффициент, характеризующий максимальное значение действующей нагрузки,  $T$  – период её действия. В расчетах принималось  $A=0.5$ ,  $T=200\tau$ ,  $x_2^0=-8h_2$ ,  $x_2^1=8h_2$ ,  $\eta=15$ . С целью исследования взаимного влияния отраженных от закрепленной, боковой границы волн напряжений и динамических возмущений от локальных ударов по различным площадкам, место расположения участка воздействия внешней нагрузки дискретно менялось в направлении оси  $x_3$  цилиндра. Рассматривались следующие варианты расположения участка нагружения: 1)  $x_3^0=60h_3$ ,  $x_3^1=100h_3$ ; 2)  $x_3^0=100h_3$ ,  $x_3^1=140h_3$ ; 3)  $x_3^0=120h_3$ ,  $x_3^1=160h_3$ ; 4)  $x_3^0=130h_3$ ,  $x_3^1=170h_3$ ; 5)  $x_3^0=140h_3$ ,  $x_3^1=180h_3$ ; 6)  $x_3^0=160h_3$ ,  $x_3^1=200h_3$ . Задача решалась на сетке  $5 \times 21 \times 201$ . Шаги сетки по времени  $\tau=0.002$  и пространственным координатам  $h_1 = h_3 = h = 0.005$ ; шаг  $h_2 = \pi/240 = 0.01309$ . Величины  $h$  и  $h_2$  выбирались в соответствии с условием устойчивости [9]. В куполообразной форме нагружения (9) минимальное значение внешней нагрузки достигается в центре площадки удара в точке  $x_2 = 0$ ,  $x_3=0.5(x_3^0+x_3^1)$  в момент времени  $T=100\tau$  и она направлена в обратном направлении к нор-

мали внешней поверхности балки:  $f(0, 0.5(x_3^0 + x_3^1)h_3; 100\tau) = -1$ . Материал балки имеет следующие характеристики:  $E=202$  ГПа,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7.8$  г/см<sup>3</sup>.

**Анализ результатов численных расчетов.** Принятая форма нагружения (9.5.24) является симметричной относительно сечения  $x_2=0$ . Это обстоятельство позволяет ограничить область исследования сектором окружности  $0 \leq x_2 \leq \varphi$ . В этом случае на поверхностях  $x_2=0$  ставятся и выполняются условие симметрии т.е.

$$v_2 = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{23} = 0, v_{1,2} = \sigma_{11,2} = \sigma_{22,2} = 0. \quad (10)$$

На рис. 1 приведены осциллограммы (вариант 1) нормальных окружных  $\sigma_{22}$  (а) и осевых  $\sigma_{33}$  (б) напряжений в девяти точках: по три точки на внутренней поверхности 1(0, 0, 80h), 2(0, 8h<sub>2</sub>, 80h), 3(0, 20h<sub>2</sub>, 80h), на срединной поверхности 4(2h, 0, 80h), 5(2h, 8h<sub>2</sub>, 80h), 6(2h, 20h<sub>2</sub>, 80h) и на внешней поверхности 7(4h, 0, 80h), 8(4h, 8h<sub>2</sub>, 80h), 9(4h, 20h<sub>2</sub>, 80h) в сечении  $x_3=80h$ , на которое приходится наибольшее значение внешней нагрузки.

На внешней  $x_1=R+N$  – поверхности приложения нагрузки реализуются напряжения сжатия. Исключением является точка 8(0, 8h<sub>2</sub>, 80h) внешней поверхности, принадлежащая границе приложенной нагрузки (см. рис. 1а). В этой точке в начальные моменты времени окружные напряжения  $\sigma_{22}$  являются растягивающимися. Появление растягивающих напряжений на границе действия внешней нагрузки согласуется с общими представлениями о распределении локальных напряжений под штампом [10]. Максимальная величина окружных напряжений достигается в момент времени  $t=180\tau$ , которая в 1.5 раза превосходит максимум внешней нагрузки, что может способствовать развитию разрушения с внешней стороны балки.

На срединной поверхности  $x_1=R+0.5N$  как окружные, так и осевые напряжения незначительны и их отличия от нуля обусловлены динамическими эффектами.

На внутренней поверхности  $x_1=R$  балки реализуются напряжения растяжения. В точке 1 осевая и окружная компоненты напряжений достигают наибольшего значения в моменты времени близкие к времени действия внешней нагрузки и их уровни с течением времени после окончания действия внешней нагрузки сильно понижаются. Окружная компонента напряжения  $\sigma_{22}$  в 5.3 раза, а осевая составляющая напряжений  $\sigma_{33}$  в 5.9 раза превосходят максимум внешней нагрузки в моменты времени 260 - 270 $\tau$  в центре области действия внешней нагрузки. Известно [1], что в области действия локальных нагрузок с характерным размером  $r$  напряжения растяжения имеют особенность типа  $\ln(R/r)$  ( $R$ –радиус оболочки) и, кроме того, они обратно пропорциональны квадрату толщины оболочки  $N$ . В точке ребра (пересечение боковой и внутренней поверхности) 3(0, 20h<sub>2</sub>, 80h) осевое напряжение принимает наибольшее значение в более позднее время  $t=875\tau$ . Оно обусловлено краевым эффектом и в 8.5 раза превосходит максимум внешней нагрузки и является наиболее опасной областью с точки зрения сохранения целостности конструкции. Полученный результат вполне гармонирует с описанными в [5] эффектами влияния близости области удара от границы. Если энергия удара достаточна, то разрушение может произойти со стороны удара на границе действия внешней нагрузки. Эти разрушения обусловлены в основном растягивающим окружным нормальным напряжением  $\sigma_{22}$ . В этой области больших значений 0.9 достигают также напряжения сдвига  $\sigma_{23}$ , которые могут способствовать начатому разрушению. В начальные моменты времени в центре области действия внешней нагрузки может произойти разрыв на внутренней поверхности из-за растягивающего осевого напряжения. Если энергия удара недостаточна в этой точке, то в более позднее время может произойти разрыв в точке ребра.

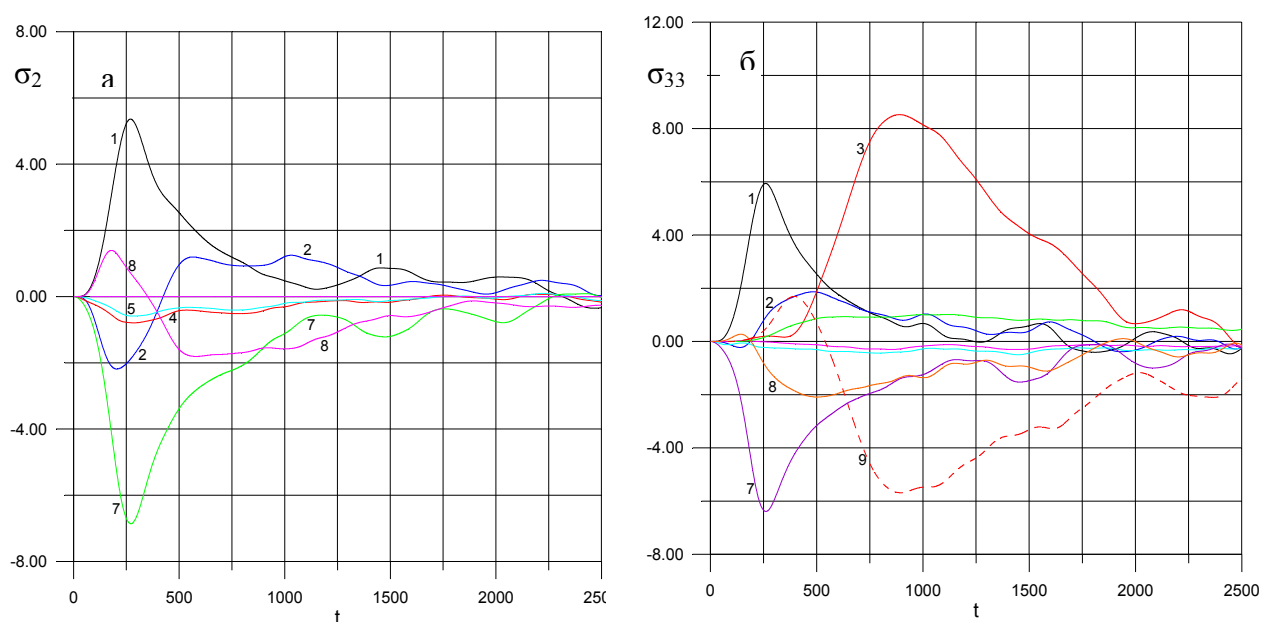


Рис. 1. Осциллограммы напряжений  $\sigma_{22}$ (а) и  $\sigma_{33}$ (б) для точек 1(0,0,80h), 2(0,8h<sub>2</sub>,80h), 3(0,20h<sub>2</sub>,80h), 4(2h,0,80h), 5(2h,8h<sub>2</sub>,80h), 6(2h,20h<sub>2</sub>,80h), 7(4h,0,80h), 8(4h,8h<sub>2</sub>,80h), 9(4h,20h<sub>2</sub>,80h).

Осевая компонента напряжения  $\sigma_{33}$  достаточно большая, а окружная составляющая напряжения  $\sigma_{22}$  несколько уступает ей по величине. Этот эффект связан с окружной и осевой жесткостью конструкции или влиянием боковой границы.

Графики, приведенные на рис. 1а, б для окружных и осевых напряжений, качественно подобны графикам для цилиндра [5] (для точек 1,2,4,5,7,8 не принадлежащих боковой поверхности). Однако они количественно различаются из-за присутствия свободной грани по окружности. Уровни максимальных окружных и осевых напряжений в балке понижаются по сравнению с цилиндром ( $\sigma_{22}$  в балке в 5.3 раза, в цилиндре 6.74, в балке 1.5 раза (точка 8), в цилиндре 2.2 (точка 3),  $\sigma_{33}$  в балке 5.9 раза, в цилиндре 6.27 раза повышаются).

На рис. 2 приведены осциллограммы (вариант 1) нормальных окружных  $\sigma_{22}$  (а) и осевых  $\sigma_{33}$  (б) напряжений в девяти точках: по три точки на внутренней поверхности 1(0, 0, 200h), 2(0, 8h<sub>2</sub>, 200h), 3(0, 20h<sub>2</sub>, 200h), на срединной поверхности 4(2h, 0, 200h), 5(2h, 8h<sub>2</sub>, 200h), 6(2h, 20h<sub>2</sub>, 200h) и на внешней поверхности 7(4h, 0, 200h), 8(4h, 8h<sub>2</sub>, 200h), 9(4h, 20h<sub>2</sub>, 200h) в жестко-закрепленном сечении  $x_3=200h$  балки.

Из осциллограммы окружного напряжения  $\sigma_{22}$  видно, что наибольшее растягивающее напряжение будет в точке 1 внутренней поверхности, величина которой в 1.15 раза превышает максимум внешней нагрузки, и в пять раз меньше по сравнению с уровнем напряжений, имеющем место в центре области действия внешней нагрузки (сравни рис. 1а и 2а). Поэтому для окружного напряжения определяющим является наибольшее напряжение соответствующее сечению  $x_3=80h$ , на которое приходится наибольшее значение внешней нагрузки. Из рис. 2б видно, что осевое напряжение в точке 1 в 3.8 раза, в точке 7 в 3 раза, в точке 3 в 6 раз, в точке 9 в 5.8 раза превышает максимум внешней нагрузки. Для осевого напряжения определяющим вначале является напряжение в точке ребра (угловая точка) 3 внутренней поверхности, а затем по истечению времени определяющим становится напряжение в точке ребра (угловая точка) 9 внешней поверхности.

На рис.3 представлены изолинии нормальных окружных  $\sigma_{22}$  (слева) и сдвиговых  $\sigma_{23}$  (справа) напряжений в трех сечениях по толщине в момент времени  $t=180\tau$ , при котором окружное напряжение в точке 8 достигает максимума (см. рис. 1, кривая 8). Нетрудно видеть, что нормальное напряжение достигает максимума в центре области действия внешней на-

грузки. Сдвиговые напряжения при переходе линии  $x_2=80h$  (линия действия максимума внешней нагрузки) меняют знаки. На линии границы действия нагрузки они достигают экстремального значения равного 1, имеют два пика на этой линии.

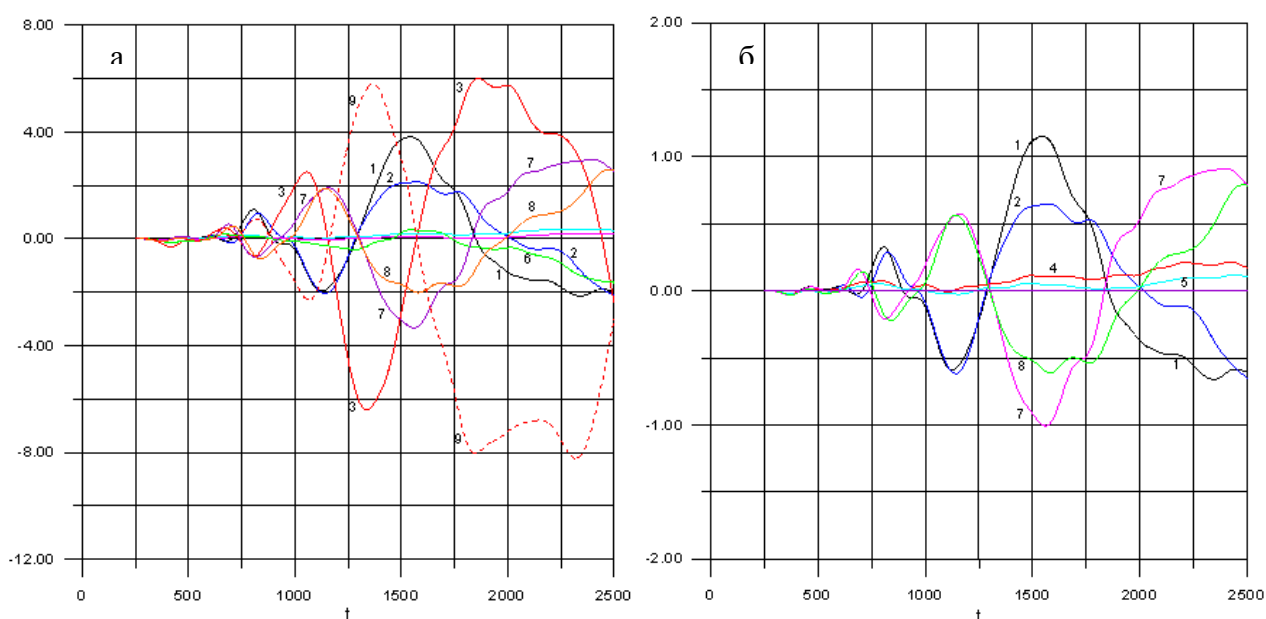


Рис. 2. Осциллограммы напряжений  $\sigma_{22}$ (а) и  $\sigma_{33}$ (б) для точек 1(0,0,200h), 2(0,8h<sub>2</sub>, 200h), 3(0,20h<sub>2</sub>,200h), 4(2h,0,200h), 5(2h,8h<sub>2</sub>,200h), 6(2h,20h<sub>2</sub>,200h), 7(4h,0,200h), 8(4h,8h<sub>2</sub>,200h), 9(4h,20h<sub>2</sub>,200h).

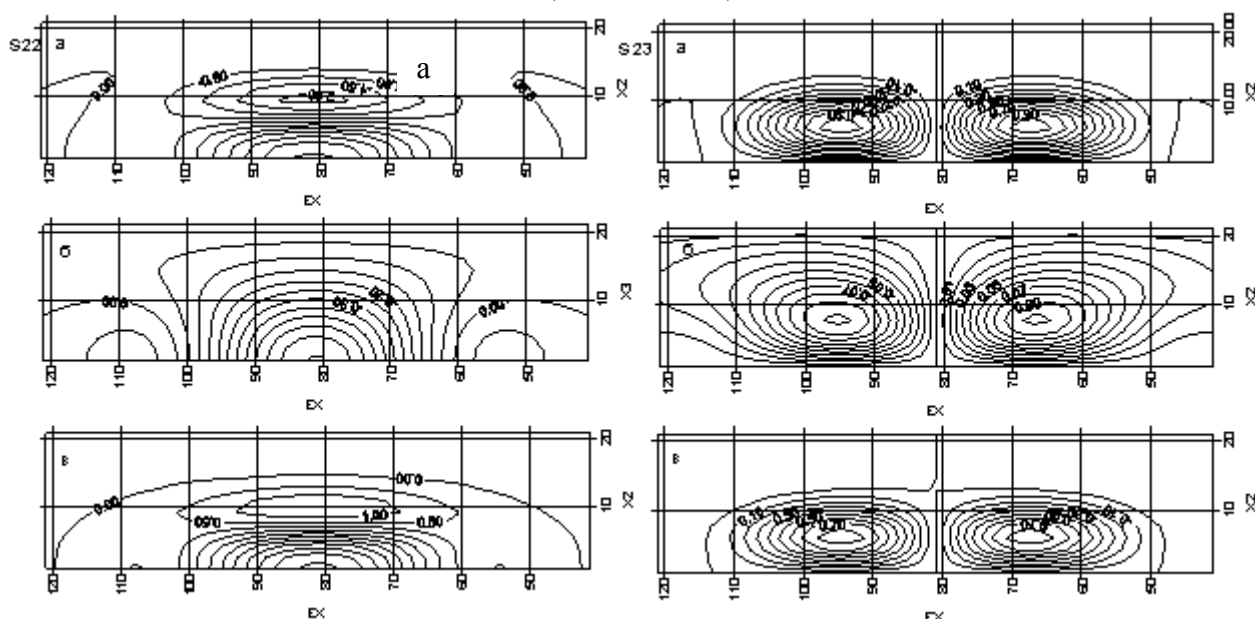


Рис. 3. Распределение окружного  $\sigma_{22}(x_2, x_3)$  и касательного  $\sigma_{23}(x_2, x_3)$  напряжений на внутренней (а) срединной (б) и наружной (в) поверхностях цилиндра в момент времени  $t=180\tau$ .

На рис. 4 приведены осциллограммы (вариант 1) касательного напряжения  $\sigma_{31}$  для точек закрепленного торца, которые имеют наибольшее значение, равное  $0.96\sigma_{11}^{\max}$  максимуму внешней нагрузки в точке 6 (-0.96, 0.95) на пересечении срединной и боковой поверхности.

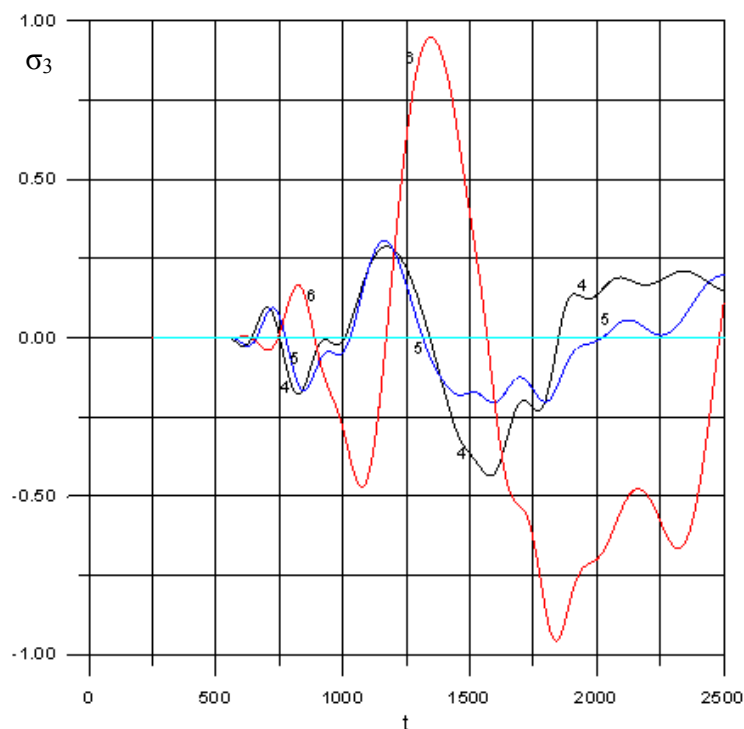


Рис. 4. Осциллограммы напряжений  $\sigma_{31}$  для точек 1(0,0,200h), 2(0,8h<sub>2</sub>,200h), 3(0,20h<sub>2</sub>,200h), 4(2h,0,200h), 5(2h,8h<sub>2</sub>,200h), 6(2h,20h<sub>2</sub>,200h), 7(4h,0,200h), 8(4h,8h<sub>2</sub>,200h), 9(4h,20h<sub>2</sub>,200h).

На рис. 5 приведены осциллограммы (вариант 1) касательного напряжения  $\sigma_{23}$  для точек закрепленного торца, которые имеют наибольшее значение равное  $0.38\sigma_{11}^{\max}$  максимуму внешней нагрузки в точке 2(-0.37, 0.38) внутренней поверхности на линии границы действия нагрузки.

На рис. 6 приведены осциллограммы нормальных осевых напряжений  $\sigma_{33}$  на внутренней  $x_1=R$  (кривые 4, 5, 6) и внешней  $x_1=R+4h$  (кривые 1, 2, 3) поверхностях оболочки в точках 3(0, 20h<sub>2</sub>, 200h), 7(4h, 0, 200h) жестко-закрепленного торца, где достигаются наибольшие и наименьшие значения для трех вариантов расположения площадки удара: 2)  $x_3^0 = 100h_3$ ,  $x_3^1 = 140h_3$  (кривые 4, 1); 5)  $x_3^0 = 140h_3$ ,  $x_3^1 = 180h_3$  (кривые 5, 2); 6)  $x_3^0 = 160h_3$ ,  $x_3^1 = 200h_3$  (кривые 6, 3). Из графиков видно, по мере приближения площадки удара к закрепленному торцу время достижения на этом торце наибольших и наименьших значений напряжений снижается и приближается к времени достижения наибольшего значения внешней нагрузки T.

Из результатов расчета для 2-ого, 5-ого, 6-ого вариантов расположения площадки удара для точки 7 (кривые 1, 2, 3) закрепленного торца видно, по мере приближения площадки удара к закрепленному торцу уровни наибольших напряжений растут, особенно заметен рост напряжений в области закрепленного конца. В точке 3(кривые 4, 5, 6) закрепленного торца расположенной на пересечении боковой и внутренней поверхности оболочки уровни наибольших напряжений по мере приближения площадки удара к закрепленному торцу уменьшаются. Из приведенного анализа следует, что при динамическом локальном ударе более опасным является случай, когда площадка удара прилегает к закрепленному концу.

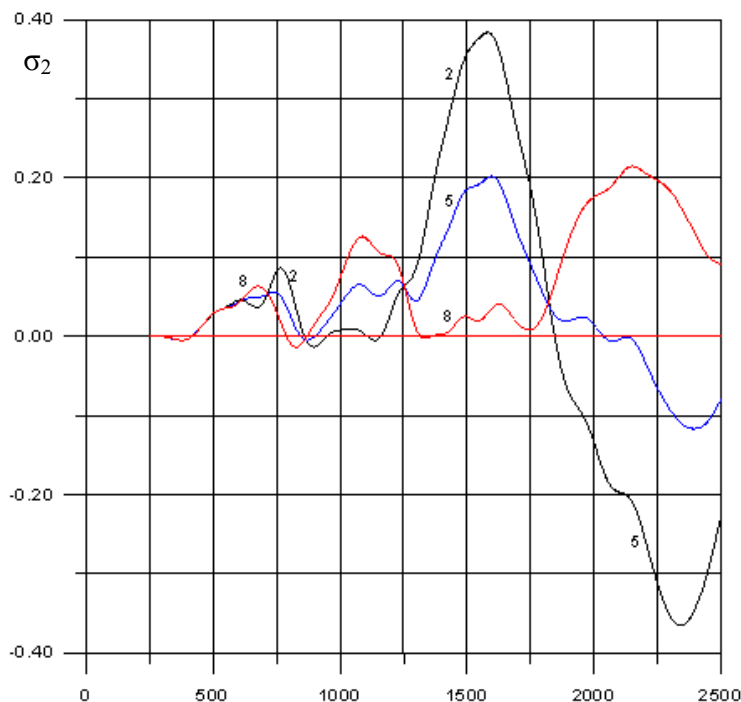


Рис. 5. Осциллограммы напряжений  $\sigma_{23}$  для точек 1(0,0,200h), 2(0,8h<sub>2</sub>,200h), 3(0,20h<sub>2</sub>,200h), 4(2h,0,200h), 5(2h,8h<sub>2</sub>,200h), 6(2h,20h<sub>2</sub>,200h), 7(4h,0,200h), 8(4h,8h<sub>2</sub>,200h), 9(4h,20h<sub>2</sub>,200h).

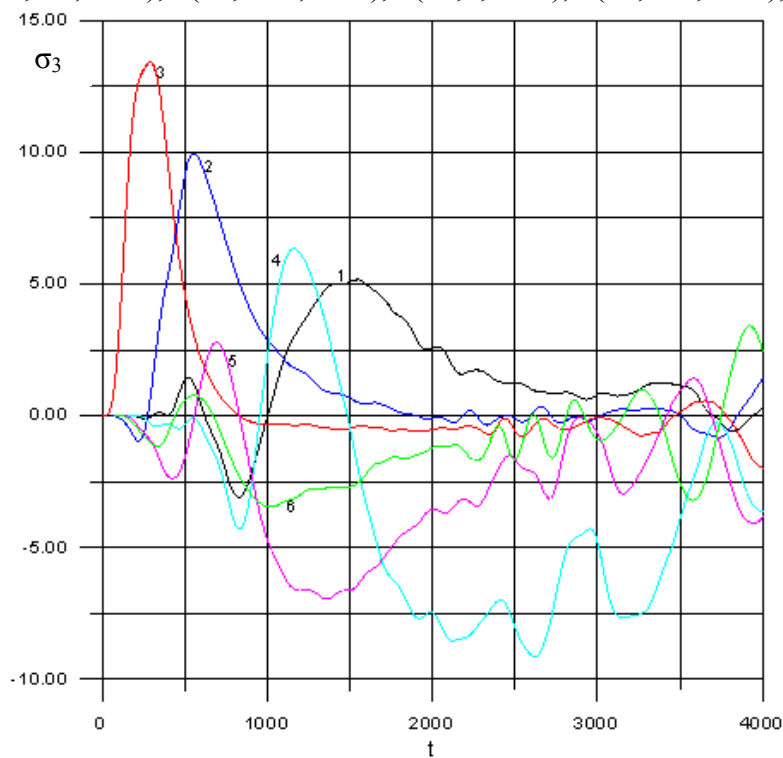


Рис. 6. Осциллограммы осевого напряжения  $\sigma_{33}$  в точках 3(0,20h<sub>2</sub>,200h), 7(4h,0,200h) закрепленного торца балки для вариантов расположения площадки удара: 2 (кривая 4,1), 5 (кривая 5,2), 6 (кривая 6,3).

На рис. 7 приведены зависимости максимального значения осевого  $\sigma_{33}$  растягивающего напряжения в точках 1(0, 0, 200h), 3(0, 20h<sub>2</sub>, 200h), 7(4h, 0, 200h), 9(4h, 20h<sub>2</sub>, 200h) закрепленного конца балки и в точках 1'(0,0,(x<sub>3</sub><sup>0</sup>+x<sub>3</sub><sup>1</sup>)/2), 3'(0,20h<sub>2</sub>, (x<sub>3</sub><sup>0</sup>+x<sub>3</sub><sup>1</sup>)/2) в сечении, на которое приходится наибольшее значение внешней нагрузки, от места приложения нагрузки. Видно, что в точке 7 внешней поверхности, расположенной на линии  $x_2=0$ , напряжения с приближе-

нием места приложения нагрузки к закрепленному концу всюду растут, а в точке 9, принадлежащей ребру, всюду убывают. Сравнивая кривые 3 и 7, можно видеть, что при расположении центра площадки удара в области  $(x_3^0+x_3^1)/2 < 130h(0.65L)$  уровни осевых напряжений в точке 3 боковой поверхности становятся преобладающими. В противном случае уровни осевых напряжений становятся преобладающими в точке 7. Из кривых 1' и 3' видно, что уровни напряжений сохраняют постоянные значения. Однако с приближением к закрепленному концу уровень напряжений падает в точках ребра (кривая 3'), а в точках линии  $x_2=0$  возрастает (кривая 1'). Сравнивая кривые 3' и 7, можно видеть, что при расположении центра площадки удара в области  $(x_3^0+x_3^1)/2 < 153h(0.765L)$  уровни осевых напряжений в точке 3' ребра становится преобладающим, в противном случае уровни осевых напряжений в точке 7 закрепленного конца становятся преобладающими. Из кривой 4 (рис. 7) видно, уровень максимального значения окружного напряжения  $\sigma_{22}$  в точке  $1(0,0,200h)$  закрепленного конца при приближении центра площадки удара к закрепленному концу растет. Из кривой 2 видно, уровень напряжения  $\sigma_{22}(0,0,(x_3^0+x_3^1)/2)$  в сечении, на которое приходится наибольшее значение внешней нагрузки, остается постоянной при расположении центра площадки удара в области  $(x_3^0+x_3^1)/2 \leq 160h(0.8L)$ , т.е. влияние закрепленного конца не сказывается, в противном случае начинает расти. В обоих случаях уровень максимального окружного напряжения уступает уровню максимального значения осевого напряжения.

Таблица 1. Наибольшие значения окружного, осевого и касательного напряжения в закрепленном торце балки и в сечении наибольшего значения внешней нагрузки

Компонента напряжения	Номера точки балки	Варианты					
		1	2	3	4	5	6
$\sigma_{22}$	$1(0,0,(x_3^0+x_3^1)/2)$	5.36	5.36	5.36	5.36	5.36	5.82
		-6.86	-6.86	-6.86	-6.86	-6.86	-7.54
$\sigma_{22}$	$1(0,0,200h)$	1.15	1.57	1.98	2.41	3.03	4.07
		-1.01	-1.31	-1.67	2.15	-2.68	-3.91
$\sigma_{33}$	$1(0,0,(x_3^0+x_3^1)/2)$	5.94	5.94	5.94	5.93	5.9	8.14
	$3(0,20h_2,(x_3^0+x_3^1)/2)$	8.53	8.57	8.44	8.59	8.56	4.44
$\sigma_{33}$	$1(0,0,200h)$	3.82	3.54	2.96	2.6	1.51	1.98
	$3(0,20h_2,200h)$	6.02	6.34	4.95	3.98	2.78	3.41
	$7(4h,0,200h)$	2.96	5.16	6.5	7.92	9.95	13.4
	$9(4h,20h_2,200h)$	5.81	3.43	2.95	2.51	2.39	2.47
$\sigma_{31}$	$6(2h,20h_2,200h)$	-0.96	-1.16	-1.16	-1.05	-0.85	0
		0.95	0.713	0.532	0.501	0.44	0
$\sigma_{32}$	$2(0,8h_2,200h)$	-0.365	-0.492	-0.649	-0.869	-1.18	-1.48
	$8(4h,8h_2,200h)$	0.384	0.254	0.177	0.232	0.34	0.646



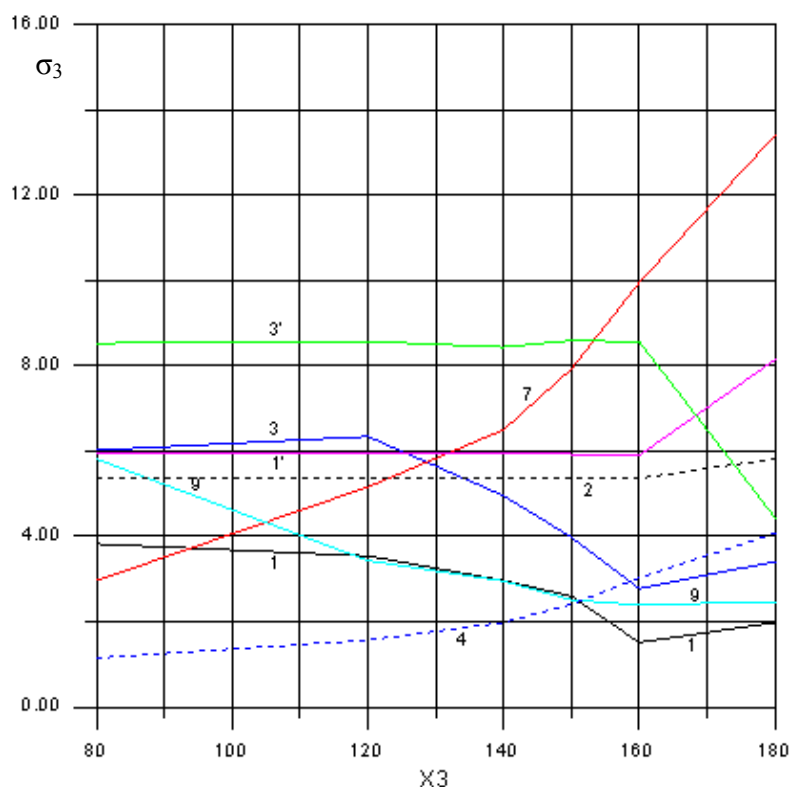


Рис. 7 Зависимость осевого напряжения  $\sigma_{33}$  в точках 1(0, 0, 200h), 3(0, 20h<sub>2</sub>, 200h), 7(4h, 0, 200h), 9(4h, 20h<sub>2</sub>, 200h) закрепленного и 1'(0,0,(x<sub>3</sub><sup>0</sup>+x<sub>3</sub><sup>1</sup>)/2), 3'(0,20h<sub>2</sub>, (x<sub>3</sub><sup>0</sup>+x<sub>3</sub><sup>1</sup>)/2) в сечении, на которое приходится наибольшее значение внешней нагрузки, от места приложения нагрузки.  $\sigma_{22}(0,0,(x_3^0+x_3^1)/2)$  – кривая 2,  $\sigma_{22}(0, 0, 200h)$  – кривая 4.

**Влияние широты балки на уровни напряжений.** Место расположения участка воздействия внешней нагрузки: вариант 1. Размеры балки радиус, толщина, длина оставались прежними, широта менялась:  $x_2=16h_2, 20h_2, 30h_2$ . С увеличением широты (угла  $\varphi$ ) уровень осевого напряжения  $\sigma_{33}$  в точке 3(0,  $x_2, 80h$ ) (пересечение внутренней поверхности с боковой поверхностью) падает: 9.1; 8.53; 6.47. С увеличением широты площадь поверхности балки увеличивается, площадь действия нагрузки не меняется (постоянная).

Осевое напряжение  $\sigma_{33}$  в точке 1(0,0,80h) в зависимости от широты имеют следующие наибольшие величины: 5.96(16h<sub>2</sub>); 5.94(20h<sub>2</sub>); 5.94(30h<sub>2</sub>). Видно увеличение широты на величину напряжения в рассмотренных случаях не влияет. Окружное напряжение  $\sigma_{22}$  в точке 1(0,0,80h) в зависимости от широты имеют следующие наибольшие величины: 5.47(16h<sub>2</sub>); 5.36(20h<sub>2</sub>); 5.35(30h<sub>2</sub>). Видно увеличение широты на величину напряжения в рассмотренных случаях не влияет.

**Выводы.** В трехмерной постановке решена динамическая задача о локальном поперечном ударе по балке цилиндрического профиля, один конец которой закреплен, а другой – свободен. Исследовано влияние места расположения локальной площадки удара на уровни напряжений в сечениях наибольшего значения внешней нагрузки и в области закрепленного конца балки.

Локальный характер нагружения приводит к тому, что величина нормальных осевых и окружных напряжений в точках внутренней поверхности закрепленного конца во много раз превышает уровень действующих нагрузок.

С увеличением широты балки уровень осевого напряжения  $\sigma_{33}$  в точке пересечения боковой поверхности с внутренней поверхностью в сечении, где внешняя нагрузка максимальна, падает.

При принятых параметрах и расположении центра площадки удара в области  $(x_3^0+x_3^1)/2 < 153h(0.765L)$  влияние закрепленного конца на наибольшие величины осевого на-

пряжения незначительно. Точки пересечения внутреннего ребра боковой поверхности с сечением, где внешняя нагрузка максимальна, становится критической с точки зрения разрушения. В противном случае  $(x_3^0 + x_3^1)/2 \geq 153h(0.765L)$  уровни осевых напряжений в точках внешней поверхности закрепленного торца становятся преобладающими и критическими с точки зрения разрушений.

### Список литературы

1. Даревский В.М. Оболочки под действием локальных нагрузок. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.2. Справочник в трех томах. М.: Машиностроение, 1968. С. 49-96.
2. Шаринов Л.И. Действие на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки, приложенной к свободному краю // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. №3. С. 24-29.
3. Бабич Ю.Н., Алпаидзе З.Г., Галиев Ш.У. Напряженное состояние полого цилиндра при импульсном локальном нагружении // Проблемы прочности. 1987. №10. С. 89-94.
4. Зеленский А.С., Кукуджанов В.Н. Численное решение пространственных динамических задач для осисимметричных упругопластических тел // Препринт №384. Институт проблем механики АН СССР. 1989. 40 с.
5. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Волны напряжений в цилиндрической оболочке при локальном поперечном ударе // Журнал «Деформация и разрушения материалов». 2014. №3. С. 12-16.
6. Тарабин Г. Т. Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № С.83-95.
7. Эффект жестко закрепленной границы на уровни напряжений при локальном ударе по цилиндрической оболочке // Вестник КГТУ. 2014. №2. С.175-180.
8. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. 841 с.
9. Магомедов К.М. , Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 288 с.
10. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.:Наука, 1980. 304 с.

## **РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОГО ВИБРАЦИОННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОЗИЦИОНИРУЮЩЕГО МЕХАНИЗМА**

**К.А. Каримов**

Ташкентский государственный технический университет им. А.Р.Беруни,  
Механико-машиностроительный факультет  
100095 Ташкент, ул. Университетская, 2, e-mail: [kamolxon.karimov@gmail.com](mailto:kamolxon.karimov@gmail.com)

В данной работе приводятся результаты исследований по изучению общих принципов управляемого вибрационного перемещения твердого тела по горизонтальной шероховатой плоскости - позиционирующего механизма. Составлена математическая модель уравнения плоского вибрационного перемещения под действием вращающегося с постоянной угловой скоростью дебаланса. Показаны различные способы изменения величины силы трения скольжения (или нормального давления тела на основание). Установлено, что в исходном приближении получается задача о движении материальной точки по плоскости, совершающей круговые гармонические вибрации в своей плоскости, которая получила название задача Н.Е.Жуковского.

**Ключевые слова:** Управляемые механизмы, кинематическая пара низшего класса, прецизионные механизмы, прецизионная вибромеханика, сила сухого трения, фрикционное сопряжение, позиционирующее устройство, метод малого параметра.

При разработке теоретических основ механических систем и новых конструкций механизмов и машин с управляемыми параметрами и связями ведомых звеньев перспективным является широкое использование принципов прецизионной вибромеханики [1-2]. В точном машиностроении и приборостроении весьма важным является вопрос точного позиционирования и ориентации исполнительных механизмов технологических машин. В особенности, актуальным является задача управления законом движения подвижных звеньев по заданной траектории при учете технологических требований [3].

В работах [4-5] была разработана и аналитически реализована математическая модель управляемого поступательного движения позиционирующего устройства, основанный на изменении силы трения между фрикционно сопряженными звеньями кинематической пары низшего класса. Проведены качественные исследования нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с целью определения основных характеристик управляемого движения исследуемой механической системы

Для дальнейших исследований представляет интерес изучение общих принципов управляемого плоского движения твердого тела (позиционирующего устройства) по горизонтальной шероховатой плоскости под действием вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  неуравновешенного ротора. При этом управление ведется посредством непрерывного или дискретного угла отклонения эксцентриситета от касательной к идеальному пути перемещения - программному (управляемому) перемещению. В зависимости от величины этого угла определенным образом изменяется величина силы трения скольжения или же в соответствии с законом сухого трения силы динамического взаимодействия тела с шероховатым основанием.

Составим математическую модель уравнения плоского вибрационного перемещения твердого тела (позиционирующего устройства). Пусть на горизонтальном основании введена неподвижная декартова система координат  $OXY$ . Уравнение программной кривой на плоскости имеет общий вид  $y = r(x)$ , причем эта функция является непрерывной вместе со своей первой производной  $dy/dx = r'(x)$ . В произвольный момент времени центр вращения

дебаланса точка  $G$  имеет текущие координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а единичный вектор эксцентриситета дебаланса будет (рисунок 1)

$$\bar{l} = \cos \omega t \bar{i} + \sin \omega t \bar{j} \quad (1)$$

где  $\bar{i}$  и  $\bar{j}$  - орты осей  $x$  и  $y$ .

В этот момент времени ближайшая к центру точка программной кривой (точка  $K$ ) имеет координаты  $\xi$  и  $r(\xi)$ , а орт касательной к этой кривой в сторону идеального перемещения равен

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}} (\bar{i} + \eta' \bar{j}) \quad (2)$$

где  $\eta' = dr / d\xi$ .

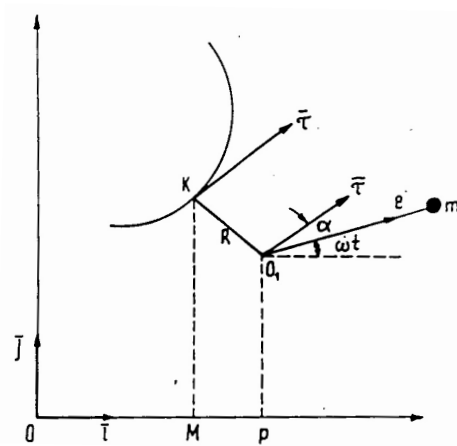


Рисунок 1- к изучению общих принципов управляемого движения твердого тела по горизонтальной шероховатой плоскости

Вектор расстояния от центра вращения дебаланса до кривой

$$\bar{o}_1 k = \bar{R} = (x - \xi) \bar{i} + (y - \eta) \bar{j} \quad (3)$$

ориентирован по нормали к кривой. Следовательно, скалярное произведение  $\bar{\tau} \cdot \bar{R} = 0$  или в развернутом виде

$$x - \xi + \eta' (y - \eta) = 0 \quad (4)$$

Именно это дифференциальное равенство устанавливает связь между координатами точек  $O_1(x, y)$  и  $K(\xi, \eta)$ . Управляющей параметр  $\alpha$  имеет смысл, в соответствии с вышесказанным, угла между векторами  $\bar{l}$  и  $\bar{\tau}$ . Поэтому можно написать

$$\cos \alpha = \bar{\tau} \cdot \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}} (\cos \omega t + \eta' \sin \omega t) \quad (5)$$

Изменение величины силы трения скольжения (или нормального давления тела на основание) может быть осуществлено различными способами. Например, эффективный коэффициент сухого трения может быть изменен посредством изменения закона колебаний пьезокерамического преобразователя, установленного на основание тела. В любом случае для реализации движения близкого к программному необходимо, чтобы при  $\alpha = 0$  (центробежная сила дебаланса направлена в сторону программного движения) эффективная сила трения принимала бы минимальное значение, а с ростом угла рассогласования по модулю эта

сила монотонно увеличивалась бы по модулю. В связи с этим, предположим, что эффективная сила давления на основание изменяется по закону

$$P = G - a \cos \alpha \quad (6)$$

Величину  $G$  в этой формуле естественно отождествить со статическим весом вместе с дебалансом. Что же касается амплитуды переменной составляющей  $\alpha$ , то она в случае позиционирующего устройства, приближенно, в усредненном виде, характеризует изменение эффективного коэффициента трения. Отметим, что равенство (6) при учете (5) может быть переписано в виде

$$P = G - \frac{a}{\sqrt{1 + \eta'^2}} (\cos \omega t + \eta' \sin \omega t) \quad (7)$$

Приведем теперь уравнение плоского вибрационного перемещения подвижного элемента под действием вращающейся с постоянной угловой скоростью центробежной силы, рассмотренное в работах [4-5]

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} = mr\omega^2 \cos \omega t - fP \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \\ (M + m)\ddot{y} = mr\omega^2 \sin \omega t - fP \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $f$  - коэффициент трения скольжения, который в общем случае можно считать заданной функцией модуля абсолютной скорости проскальзывания  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . При заданной программной зависимости  $\eta = \eta(\xi)$  соотношения (4), (7) и (5) образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно неизвестных  $x$  и  $y$ .

Перейдем теперь в уравнениях (8) к новым переменным  $x_1$  и  $y_1$ , которые будут иметь вид после осуществления поворота осей неподвижной декартовой системы на угол  $\theta = \arctg K$  согласно формулам

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Результирующее уравнение после некоторых преобразований приводится к виду

$$\begin{cases} (M - m)\ddot{x}_1 = mr\omega^2 \cos(\omega t - \theta) - fP \frac{x_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}}, \\ (M - m)\ddot{y}_1 = mr\omega^2 \sin(\omega t - \theta) - fP \frac{y_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}}, \end{cases} \quad (9)$$

Примем в качестве безразмерного аргумента угол рассогласования  $\alpha$  и введем новые безразмерные переменные

$$U = \frac{(M + m)\dot{x}_1}{mr\omega}, \quad V = \frac{(M + m)\dot{y}_1}{mr\omega} \quad (10)$$

имеющие смысл безразмерных проекций абсолютной скорости центра масс тела на продвинутые оси  $x_1$  и  $y_1$ . В результате получим

$$\begin{cases} U' = \cos \alpha - (\sigma - \delta \cos \alpha) \frac{U}{\sqrt{U^2 + g^2}} \\ g' = \sin \alpha - (\sigma - \delta \cos \alpha) \frac{U}{\sqrt{U^2 + g^2}} \end{cases} \quad (11)$$

В целом, задача о вибрационном перемещении тела под действием гармонической возмущающей силы, которая формулируется уравнениями (9), была ранее в более общем виде рассмотрена в монографии [6]. Соответствующие уравнения, как известно, не могут быть проинтегрированы в квадратурах. В то же время представляет интерес периодическое решение этих уравнений в виде рядов по степеням малого параметра  $\delta$ . Физическая малость  $\delta$  означает слабость управления трением и, в связи с этим, и незначительность динамической добавки  $\alpha$  по сравнению со статическим весом тела  $G$ . В данном случае, как показано в [6], в исходном приближении получается задача о движении материальной точки по плоскости, совершающей круговые гармонические вибрации в своей плоскости, которая получила название задача Н.Е.Жуковского [6-7].

Эта задача допускает асимптотическое устойчивое в большом решение, которое также отвечает гармоническим круговым колебаниям точки. В силу этого, вследствие известной в теории малого параметра теоремы И.Г.Малкина [7] «возмущенная задача» допускает решение в виде рядов по степеням малого параметра, которое также устойчиво и при  $\delta = 0$  обращается в решение Н.Е.Жуковского.

Статья подготовлена в рамках выполнения фундаментального проекта Ф-2-29 «Создание теоретических основ механизмов с управляемыми параметрами и связями с целью разработки нового поколения их конструкций».

### **Список литературы**

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т. // Под ред. академика К.В.Фролова – М.: Машиностроение, 1978-1981. т.1-6.
2. Клюев В.В. Прецизионная вибромеханика и вибротехника. Научная школа К.М.Рагульскаса. – М.: Издательский дом «Спектр», 2012. - 192 с.
3. Каримов К.А. Управляемые прецизионные механизмы: фундаментальные и прикладные проблемы. Сборник научных статей Международной научной конференции «Инновация – 2015». Ташкент, 2015. С. 90-93.
4. Karimov K. and etc. Development and analytical realization of the mathematical model of controlled motion of a positioning mechanism. Part 1. European Applied Sciences, # 3 – 2015, pp. 61-63. Stuttgart, Germany.
5. Karimov K. and etc. Development and analytical realization of the mathematical model of controlled motion of a positioning mechanism. Part 2. European Applied Sciences, # 4 – 2015, pp. 63-66. Stuttgart, Germany.
6. Нагаев Р.Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. – М: Наука. 1978.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М: Наука, 1966.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИВОДА НА НАГРУЖЕННОСТЬ ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ УПРАВЛЯЮЩЕГО КУЛАЧКА

Р.И. Каримов, Р.Э. Шахобутдинов

Ташкентский государственный технический университет им. А.Р.Беруний,  
механико-машиностроительный факультет  
100095 Ташкент, ул. Университетская, 2, e-mail: [rus-0373@mail.ru](mailto:rus-0373@mail.ru)

В статье приводятся динамическая и математическая модели нагруженности высшей кинематической пары кулачок-толкатель при учете упругости привода. Даны результаты реализации математической модели на ЭВМ.

**Ключевые слова:** математическая модель, кулачок, толкатель, упругость, ременная передача, закон движения, электродвигатель, нагруженность, MathCAD 15.

Кулачковые механизмы получили большое применение в современных технологических машинах, т.к. они позволяют получить достаточно сложные законы движения ведомого звена [1,2]. При этом значительный интерес представляет исследование влияния упругости привода на нагруженность высшей кинематической пары кулачок-толкатель. Рассмотрим аксиальный кулачковый механизм с возвратно-поступательно движущимся толкателем.

Передача движения от асинхронного электродвигателя к валу кулачка осуществляется посредством ременной передачи.

Динамическую модель кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем при учёте упруго-диссипативных свойств ременной передачи, можно представить в следующем виде, рис. 1., где  $M_D$  - движущий момент асинхронного электродвигателя,  $J_D$  - суммарный момент инерции ротора электродвигателя и ведущего шкива,  $\varphi_D$  - угол поворота ротора электродвигателя,  $c_1, b_1$  - упруго-диссипативные параметры ременной передачи,  $J_{np,k}$  - суммарный момент инерции ведомого шкива и кулачка,  $\varphi_k$  - угол поворота кулачка,  $S_T$  - функция положения толкателя,  $m_T$  - масса толкателя,  $F_c$  - сила сопротивления действующая на толкатель.

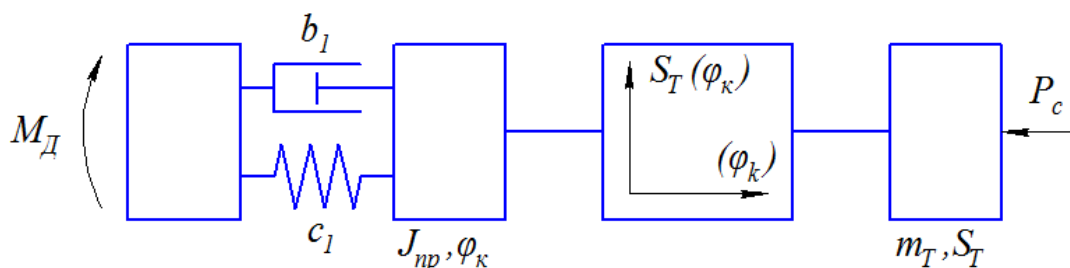


Рисунок 1 – Динамическая модель кулачкового механизма при учёте упругости ременной передачи.

Для данной динамической модели составим соответствующей ей математическую модель, используя уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_\partial} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_\partial} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_\partial} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_\partial} &= Q_\partial \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_K} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_K} &= Q_K. \end{aligned} \quad (1)$$

Определим составляющие, входящие в уравнения Лагранжа 2-го рода (1)

Кинетическая энергия

$$T = \frac{J_\partial \cdot \dot{\varphi}_\partial^2}{2} + \frac{J_{npk} \cdot \omega_K^2}{2} + \frac{m_T \cdot v_T^2}{2},$$

Диссипативная функция

$$\Phi = \frac{b_1 (\dot{\varphi}_K - \dot{\varphi}_\partial u_{K\partial})^2}{2},$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{c_1 (\varphi_K - \varphi_\partial u_{K\partial})^2}{2},$$

Подставляя полученные выражения в уравнения Лагранжа 2-го рода, а также учитывая движущий момент развиваемый асинхронным электродвигателем в виде его динамической характеристики получим математическую модель для рассматриваемого кулачкового механизма.

$$\begin{aligned} \frac{dM_\partial}{dt} &= (\omega_c - P \omega_K u_{\partial K}) \psi - \omega_c s_K M_\partial \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2 \omega_c s_K M_K - \omega_c s_K \psi - (\omega_c - P \omega_K u_{\partial K}) M_\partial \\ J_{np.k} \ddot{\varphi}_K + \frac{\dot{\varphi}_K^2}{2} \frac{dJ_{np.k}}{d\varphi_K} &= M_\partial u_{\partial.k} - M_{c.np.k} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_c$  – круговая частота сети;  $\omega_K$  – угловая скорость кулачка;  $P$  – число пар полюсов электродвигателя;  $u_{\partial K}$  – передаточное отношение между валом ротора электродвигателя и валом кулачка;  $M_c$  – момент сопротивления на валу ротора;  $t$  – время;  $s_K$  – критическое скольжение;  $M_K$  – критический момент;  $M_{c.np.k}$  – приведенный к валу кулачка момент от силы сопротивления действующий на толкатель.

$$\begin{aligned} s_K &= s_H \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right); \\ M_H &= 9549 \frac{N_H}{n_H}; \\ M_K &= M_H \lambda. \end{aligned} \quad (3)$$



где  $s_n$  – номинальное скольжение;  $M_n$  – номинальный момент;  $\lambda$  – коэффициент перегрузки;  $N_n$  – номинальная мощность;  $n_n$  – номинальные обороты.

Все данные, входящие в уравнения (3), определяются из паспортных данных двигателя.

где  $\psi$  – вспомогательная переменная имеющая размерность момента.

Для определения сил реакции действующих на толкатель разработана расчетная схема, которая представлена на рис.2

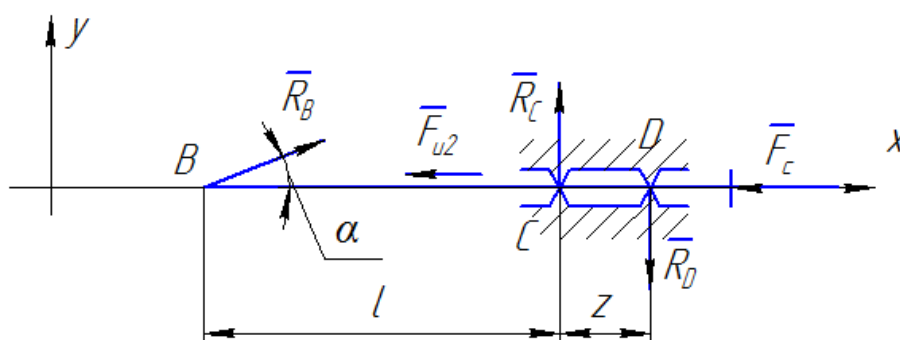


Рисунок 2- Расчетная схема для определения сил реакции действующих на толкатель кулачкового механизма

В - точка контакта кулачка и толкателя,  $\bar{R}_B$  - нормальная реакция в высшей кинематической паре,  $\alpha$  - угол давления,  $F_{uT}$  - сила инерции толкателя,  $\bar{F}_C$  - сила сопротивления действующая на толкатель,  $R_C$  и  $R_D$  - реакции направляющей толкателя.

Для определения, сил реакций действующие на толкатель составлены следующие уравнения.

$$-F_C - F_X + F_{u2} + R_B \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

$$R_B \sin \alpha + R_C - R_D = 0, \quad (5)$$

$$R_C l - R_D (l + z) = 0. \quad (6)$$

$l$  - расстояние от точки В до точки С,  $z$  - расстояние от верхней точки С до точки Д.

Закон движения толкателя принят в виде синусоидального закона, изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма.

Уравнения (2), (3), (4), (5), (6) решались в среде MathCAD 15 при следующих параметрах механизма:  $m_1 = 4$  кг,  $m_2 = 4$  кг, максимальный ход толкателя  $h = 0,1$  м, угол удаления  $\varphi_y = 100^\circ$ , угол дальнего выстоя  $\varphi_{\text{дв}} = 60^\circ$ , угол сближения  $\varphi_c = 100^\circ$ . Силу сопротивления действующую на толкатель на фазе удаления определяли по формуле  $F_c = -c_{II} S_T$ , а на фазе дальнего выстоя  $F_c = -c_{II} S_T \max$ , где  $S_T$  – перемещение толкателя;  $c_{II}$  – коэффициент жесткости замыкающей пружины. Значение коэффициента  $c_{II}$  при этом равнялось  $6 \cdot 10^4$  Н/м. По результатам расчётов на ЭВМ были получены закономерности изменения реакций в кинематических парах толкателя  $R_B$ ,  $R_D$  и  $R_C$ . С целью изучения влияния упруго-диссипативных параметров ременной передачи на нагруженность высшей кинематической пары, реакция высшей кинематической паре определялась при вариации коэффициента жесткости ременной передачи с  $400$  Нм/рад до  $2000$  Нм/рад с шагом в  $400$  Нм/рад. По результатам расчетов на ЭВМ было выявлено что при допуссаемом угле давления  $\alpha = 30^\circ$

реакция в высшей кинематической паре уменьшается с 850 Н до 620 Н. Разработанная методика динамического расчета кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем в настоящее время используется для нарезания винтовых калибров на токарно-винторезном станке.

### **Список литературы**

1. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. - Л.: Машиностроение, 1976. - 328 с.
2. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К., и др. Теория механизмов и машин. - М.: Высшая школа, 1998.- 496 с.

## О ВРАЩЕНИЯХ МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Н.В. Киселева, Е.А. Гусева

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [natalja.kiseleva@itmm.unn.ru](mailto:natalja.kiseleva@itmm.unn.ru),  
[guseva.k@mail.ru](mailto:guseva.k@mail.ru)

В работе качественно-численными методами исследуются периодические вращательные движения маятника под действием периодического момента, описываемые трехпараметрическим нелинейным неавтономным дифференциальным уравнением. В ограниченной области пространства параметров, представляющей наибольший интерес, выделены области существования и устойчивости  $2\pi$ - и  $6\pi$ - периодических вращений. Изучены бифуркации, приводящие к их возникновению и смене характера устойчивости.

*Ключевые слова:* периодические движения, устойчивость, бифуркации, метод точечных отображений, неподвижная точка.

### Введение

В работе исследуется математическая модель маятника, находящегося под действием периодического момента:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + a \sin x = v \sin t, \quad (1)$$

где  $x$  – угол отклонения маятника от вертикали, положительные параметры  $a$ ,  $h$ ,  $v$  характеризуют соответственно момент силы тяжести, коэффициент линейного вязкого трения, амплитуду колебаний оси вращения.

Периодическим движениям маятника отвечают решения  $\Gamma_{p,q}$ :  $x=x(t)$  уравнения (1), удовлетворяющие условию  $x(t+2\pi p)=x(t)+2\pi q$  ( $p=1,2,\dots$ ,  $q=0,\pm 1, \pm 2,\dots$ ). При  $q=0$  решение  $\Gamma_{p,q}$  отвечает  $2\pi p$ -периодическому колебанию маятника, при  $q \neq 0$  – периодическому вращению: за период  $2\pi p$  происходит  $|q|$  оборотов маятника в положительном ( $q>0$ ) или отрицательном ( $q<0$ ) направлении.

Периодические колебания маятника изучены в работе [1]. В настоящей работе исследованы периодические вращательные движения, в процессе которых маятник совершает один или три оборота вокруг оси. Для отыскания соответствующих им периодических решений  $\Gamma_{1,1}$  (первичные резонансы) и  $\Gamma_{3,3}$  (вторичные резонансы) уравнения (1) использован метод точечных отображений [2]. Для каждого решения определялись координаты начальной точки  $(x(0), \dot{x}(0))$  и его мультипликаторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , характеризующие устойчивость в первом приближении. Начальная точка для решений  $\Gamma_{1,1}$  отыскивалась как неподвижная точка точечного отображения  $T$  поверхности  $H\{x \pmod{2\pi}, \dot{x}\}$  в себя, которое порождается фазовыми траекториями уравнения (1). Для решений  $\Gamma_{3,3}$  в качестве начальной точки брались координаты одной из трёх точек соответствующего ему цикла отображения  $T$  периода 3. Построение и исследование отображения  $T$  проведено численными методами [3].

### Области существования и устойчивости $2\pi$ -периодических вращений

Бифуркационная диаграмма  $2\pi$ -периодических вращений маятника представлена на рис.1 при  $h=0.001$ . Область существования  $2\pi$ -периодических вращательных движений лежит выше кривой  $g_0$ , которая соответствует возникновению сложного периодического решения  $\Gamma_{1,1}$  типа седло-узел. На кривой  $g_0$  один из мультипликаторов  $\rho_1, \rho_2$  этого решения обращается в  $+1$ . При переходе через кривую  $g_0$  снизу вверх оно распадается на два периодиче-

ских решения: устойчивое  $\Gamma_{1,1}^1$  и седловое  $\Gamma_{1,1}^2$ . Решению  $\Gamma_{1,1}^1$  соответствует неподвижная точка  $A^+$  отображения  $T$ , решению  $\Gamma_{1,1}^2$  соответствует неподвижная точка  $B^+$ .

Определение координат точки  $B^+$  и её типа в зависимости от параметров  $a, v$  показало, что она является седловой во всей области существования. Неподвижная точка  $A^+$  устойчива в области, ограниченной кривыми  $g_0$  и  $g_1$ . На кривой  $g_1$  один из корней характеристического уравнения точки  $A^+$  принимает значение  $-1$ . Неподвижная точка  $A^+$  становится седловой, при этом одновременно возникает устойчивый двучленный цикл  $\{A_1^+, A_2^+\}$  двукратных неподвижных точек отображения  $T$ , который соответствует устойчивому  $4\pi$ -периодическому вращению маятника  $\Gamma_{2,2}$ , повторяющемуся после двух оборотов.

Проиллюстрируем переход через кривые  $g_0, g_1$  с ростом параметра  $v$  при фиксированном параметре  $a=0.4$ . При  $v=0.006$  возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел  $(4.3853, 0.9787)$ . При увеличении  $v$  она распадается на устойчивую неподвижную точку  $A^+$  и седловую неподвижную точку  $B^+$ . Так, при  $v=0.35$ , существует неподвижная точка  $A^+$   $(6.2628, 1.0553)$  типа устойчивый фокус ( $\rho_1 = -0.400 + 0.912i, \rho_2 = -0.400 - 0.912i$ ) и неподвижная точка  $B^+$   $(3.1534, 0.3691)$  типа седло ( $\rho_1 = 5.446, \rho_2 = 0.182$ ). При  $v=0.57$  один из мультипликаторов неподвижной точки  $A^+$  обращается в  $-1$  и с увеличением  $v$  точка  $A^+$  становится седловой. Например, при  $v=1.95$  имеем две седловые неподвижные точки  $A^+$   $(6.2771, -1.1217)$  с мультипликаторами  $\rho_1 = -0.515$  и  $\rho_2 = -1.928$  и  $B^+$   $(3.1446, -0.8227)$  с  $\rho_1 = 19.010$  и  $\rho_2 = 0.052$ . При  $v=2.38$  неподвижная точка  $A^+$  вновь становится устойчивой. Например, при  $v=2.4$  имеем неподвижную точку  $A^+$   $(6.2751, -1.7415)$  типа устойчивый фокус ( $\rho_1 = -0.986 + 0.141i, \rho_2 = -0.986 - 0.141i$ ) и неподвижную точку  $B^+$   $(3.1446, -1.1456)$  типа седло ( $\rho_1 = 18.310, \rho_2 = 0.054$ ).

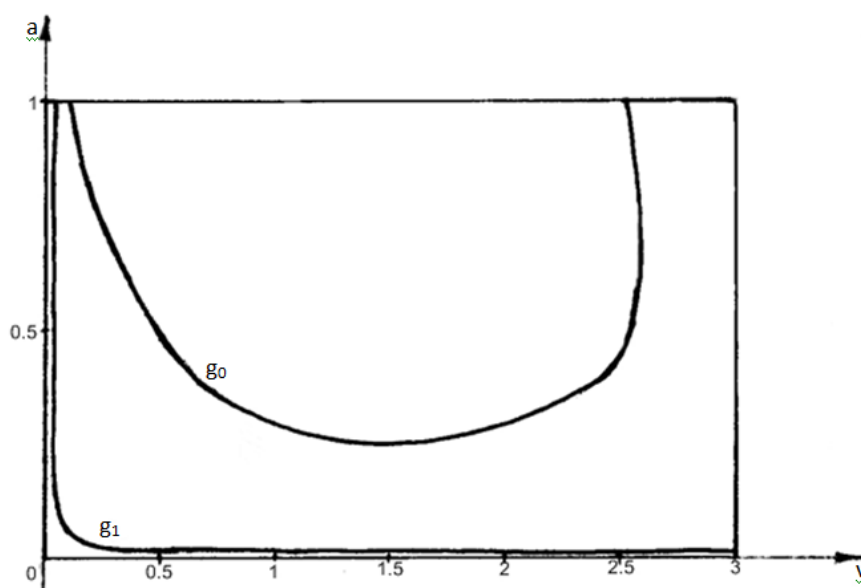


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма  $2\pi$ -периодических вращательных движений ( $h = 0.001$ )

### Области существования и устойчивости $6\pi$ -периодических вращений

Бифуркационная диаграмма  $6\pi$ -периодических вращений маятника представлена на рис.2 при  $h=0.001$ . Возникновение периодических решений  $\Gamma_{3,3}$  происходит на кривой  $g_3^1$  в результате бифуркации возникновения сложного периодического решения  $\Gamma_{3,3}$  типа седло-узел, для которого один из мультипликаторов равняется +1. Это решение распадается на седловое периодическое решение  $\Gamma_{3,3}^1$  и узловое  $\Gamma_{3,3}^2$ . Решение  $\Gamma_{3,3}^1$  не меняет свой седловой тип. Решение  $\Gamma_{3,3}^2$  существует между кривыми  $g_3^1, g_3^2$ , оставаясь устойчивым ниже кривой  $h_3^2$ . На линии  $h_3^2$  один из его мультипликаторов обращается в -1, и, соответственно, выше этой кривой решение  $\Gamma_{3,3}^2$  имеет седловой тип. Так, в области  $D_1$ , ограниченной кривыми  $g_3^1$  и  $g_3^2$ , при  $v=1, a=0.21$  (ниже кривой  $h_3^2$ ) седловому периодическому решению  $\Gamma_{3,3}^1$  с мультипликаторами  $\rho_1 = 1.026, \rho_2 = 0.956$  соответствует трёхчленный цикл трёхкратных неподвижных точек  $A_1 = \{(6.2793, 0.1257), (0.0296, 0.1109), (6.2221, 0.1132)\}$ ; устойчивому решению  $\Gamma_{3,3}^2$  ( $\rho_{1,2} = -0.865 \pm 0.481i$ ) отвечает трёхчленный цикл  $A_2 = \{(6.2698, 0.2593), (0.6681, 0.0292), (5.5877, 0.0282)\}$ . При том же  $v$ , но  $a=0.24$  (выше кривой  $h_3^2$ ) имеем два седловых цикла  $A_1 = \{(0.6244, 0.1807), (0.0013, 0.0149), (5.6205, 0.1742)\}$  с мультипликаторами  $\rho_1 = 2.374, \rho_2 = 0.418$  и  $A_2 = \{(6.2551, 0.4313), (1.3272, -0.0675), (4.9350, -0.0715)\}$  с мультипликаторами  $\rho_1 = -0.633, \rho_2 = -1.549$ .

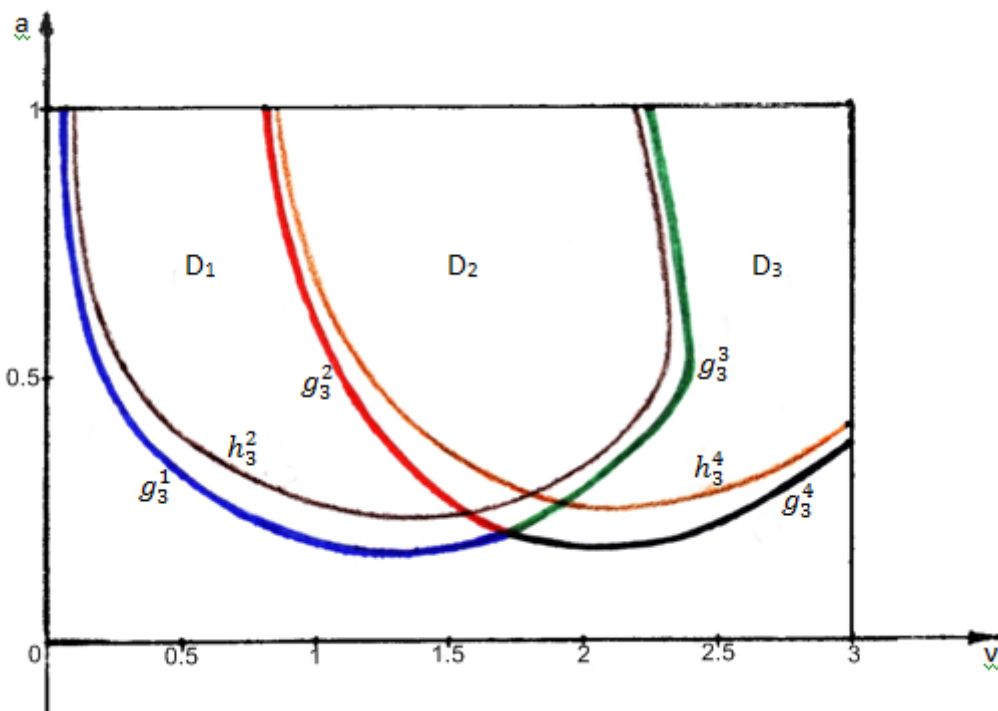


Рис 2. Бифуркационная диаграмма  $6\pi$ -периодических вращательных движений ( $h = 0.001$ )

На кривой  $g_3^2$  возникает ещё одно сложное периодическое решение  $\Gamma_{3,3}$  типа седло-узел, имеющее один из мультипликаторов, равный +1. При переходе через кривую  $g_3^2$  в область  $D_2$  это решение распадается на седловое периодическое решение  $\Gamma_{3,3}^2$  и узловое  $\Gamma_{3,3}^3$ . Решение  $\Gamma_{3,3}^3$  существует между кривыми  $g_3^2, g_3^3$ , оставаясь устойчивым ниже кривой  $h_3^3$ . На линии  $h_3^3$  один из его мультипликаторов обращается в -1, и, соответственно, выше этой кривой решение  $\Gamma_{3,3}^3$  имеет седловой тип. Решение  $\Gamma_{3,3}^2$  существует между кривыми  $g_3^2, g_3^3$ , сохраняя свой седловой тип. Таким образом, в области  $D_2$ , ограниченной кривыми  $g_3^2, g_3^3$ , суще-

ствуют четыре периодических решения  $\Gamma_{3,3}$  и соответственно четыре трехчленных цикла отображения  $T$ . Например, при  $a=0.21$ ,  $v=1.8$  имеем два седловых цикла:

$$A_1 = \{(0.4235, -0.5822), (0.6478, -1.0674), (4.9984, -0.8343)\}, \rho_1 = 1.701, \rho_2 = 0.576$$

$$A_2 = \{(1.2886, 0.8045), (5.7180, -1.0864), (5.7136, -0.5859)\}, \rho_1 = 1.621, \rho_2 = 0.605$$

$$A_3 = \{(6.2586, -0.5451), (1.1087, -0.9532), (5.1661, -0.9556)\}, \rho_{1,2} = -0.857 \pm 0.496i$$

$$A_4 = \{(1.1706, 0.6975), (6.1803, 1.1601), (5.2295, -0.6582)\}, \rho_{1,2} = -0.829 \pm 0.542i$$

Кривая  $g_3^3$  соответствует слиянию устойчивого решения  $\Gamma_{3,3}^1$  и седлового решения  $\Gamma_{3,3}^2$  в сложное решение типа седло-узел и его исчезновению при переходе в область  $D_3$ , ограниченную кривыми  $g_3^3, g_3^4$ . Например, в области  $D_3$  имеем при  $v=2$  и  $a=0.21$  (ниже кривой  $h_3^4$ ) седловой цикл

$$A_1 = \{(6.2633, -0.8375), (0.9067, -1.1736), (5.3629, -1.1740)\}, \rho_1 = 1.727, \rho_2 = 0.568$$

и устойчивый цикл

$$A_2 = \{(1.1510, -0.8953), (6.2355, -1.4214), (5.1555, -0.8803)\}, \rho_{1,2} = -0.575 \pm 0.806i$$

А при  $v=2$  и  $a=0.26$  (выше кривой  $h_3^4$ ) – два седловых цикла:

$$A_1 = \{(0.2448, -0.6875), (1.1115, -1.3263), (4.5054, -1.0629)\} с \rho_1 = 3.963, \rho_2 = 0.247, A_2 =$$

$$= \{(1.7161, -0.7834), (6.2494, -1.6516), (4.5880, -0.7724)\} с \rho_1 = -0.204, \rho_2 = -4.810.$$

На кривой  $g_3^4$  происходит слияние устойчивого периодического решения  $\Gamma_{3,3}^1$  и седлового решения  $\Gamma_{3,3}^2$  в сложное решение  $\Gamma_{3,3}$  типа седло-узел и его исчезновение.

Динамику решений  $\Gamma_{3,3}$  в областях  $D_1, D_2$  и  $D_3$  отражают рис. 3а, рис.3б и рис.3в соответственно, где представлено изменение положения периодических точек соответствующих им трёхчленных циклов отображения  $T$  при  $a = 0.21$  с увеличением параметра  $v \in (0.97, 2.41)$ . Линии сиреневого цвета отвечают точкам седлового цикла  $A_1$ , линии розового цвета – точкам цикла  $A_2$ , линии желтого цвета – точкам седлового цикла  $A_3$ , линии зеленого цвета – точкам цикла  $A_4$ . Звездочкой на кривых отмечено положение сложных неподвижных точек типа седло – узел, стрелки соответствуют возрастанию параметра  $v$ , пунктиром показано поведение неподвижных точек в предыдущих областях.

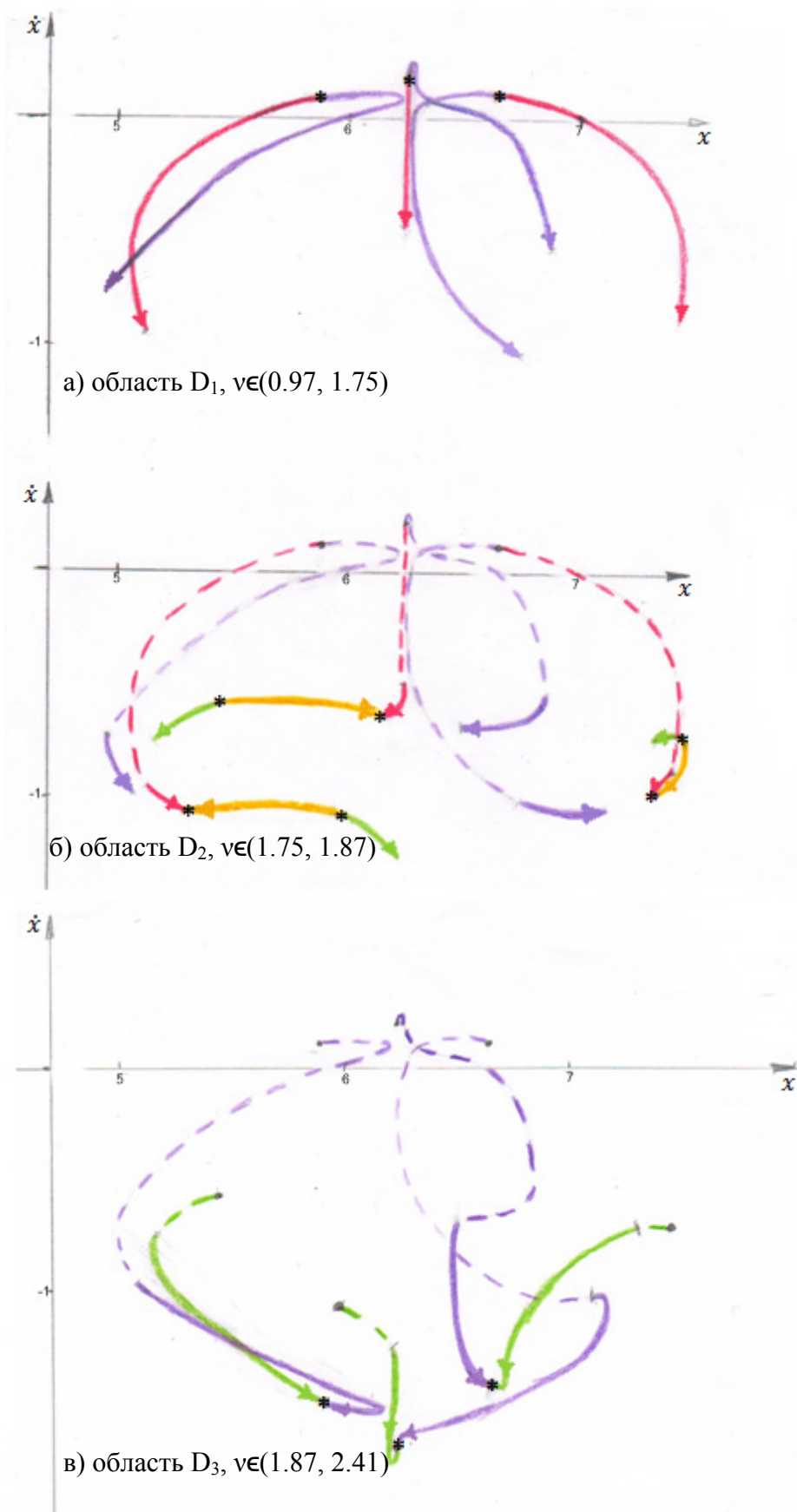


Рис 3. Динамика решений  $\Gamma_{3,3}$  при  $h = 0.001$ ,  $a = 0.21$  с ростом параметра  $\nu$

Видно, что решение  $\Gamma_{3,3}^1$  существует в областях  $D_1, D_2, D_3$ ;  $\Gamma_{3,3}^2$  существует в областях  $D_1, D_2$ ; решение  $\Gamma_{3,3}^3$  существует в области  $D_2$ ; решение  $\Gamma_{3,3}^4$  существует в областях  $D_2, D_3$ .

Таким образом, в областях  $D_1, D_3$  имеется два периодических решения  $\Gamma_{3,3}$ , в области  $D_2$  – четыре таких решения.

### **Список литературы**

1. Баталова З.С., Киселева Н.В. О колебаниях маятника под действием периодического момента // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. №1(23). С.45-49.
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 472 с.
3. Исследование неавтономных динамических систем второго порядка: Методическое описание учебно-лабораторного комплекса/ Сост. Н.А. Ежевская, Н.В. Киселева, А.С. Загранцев, Е.А. Павлов. Нижний Новгород: ННГУ. 2008.



## **КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ПОТОКОМ СРЕДЫ**

**Климина Л.А.**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
НИИ механики МГУ,  
119192 Москва, Мичуринский просп., 1, e-mail: klimina@imec.msu.ru

Построена математическая модель шарнирного механизма антипараллелограмма, испытывающего воздействие сплошной среды, сосредоточенное в середине шатуна механизма. Использована квазистатическая модель взаимодействия со средой. С помощью метода Пуанкаре–Понтрягина описаны установившиеся движения шарнирного механизма в случае наличия малого параметра в системе. Показано, что механизм антипараллелограмма, на шатуне которого установлена ветроприемная пластина, может быть положен в основу конструкции ветроэнергетической установки. Построены оценки характеристик рабочих режимов такого устройства.

Ключевые слова: шарнирный механизм антипараллелограмма, аэродинамическое воздействие, квазистатическая модель, метод Пуанкаре–Понтрягина, бифуркационные диаграммы.

### **Введение**

В данной работе проведено исследование математической модели шарнирного механизма в сопротивляющейся среде при помощи метода Пуанкаре–Понтрягина [1].

Исследование движения шарнирных механизмов в потоке среды актуально для разработки новых типов ветро/гидроэнергетических установок, лопасти которых совершают колебательные, или волновые движения [2-5]. Характерное преимущество ветроэнергетических установок (ВЭУ) на базе шарнирных механизмов: вращающиеся элементы конструкции расположены вдали от лопастей, что позволяет, не загромождая поток вблизи лопастей, защитить вращающиеся элементы от нежелательного воздействия среды (например, поместить в кожух).

В данной работе в качестве базового конструктивного элемента малогабаритной ВЭУ предложен шарнирный механизм антипараллелограмма. Ветроприемная лопасть крепится вертикально посередине шатуна. Проведенный анализ математической модели показал, что в широком диапазоне параметров поток будет поддерживать движение механизма, в том числе при наличии момента сопротивления в оси одного из кривошипов, что соответствует нагрузке со стороны потребителей в локальной цепи генератора ВЭУ.

Использование механизма антипараллелограмма обеспечивает устройству следующее преимущество по сравнению с классическими ВЭУ (пропеллерными, Дарье, Савониуса): средний кинетический момент системы остается нулевым, что предпочтительно, если ВЭУ установлена на подвижном несущем основании.

Принципиальное отличие механизма от предшествующих колебательных/волновых установок [2-5] заключается в том, что в нашем случае траектории всех точек пластины не содержат возвратных точек. Таким образом, на рабочем режиме центр пластины (более того, любая из точек пластины) движется по траектории, во всех точках которой абсолютная скорость может быть сколь угодно велика.

Нельзя не отметить такое свойство предложенной конструкции, как использование механизма с особенностями: в двух особых положениях конструкция допускает перестройку антипараллелограмма в параллелограмм. Причем в варианте параллелограмма устройство ведет себя как флюгер, а не как ветряк: выходит в устойчивое положение, в котором пластина максимально смещена по потоку. Однако в ходе экспериментов с тестовым образцом ВЭУ в аэродинамической трубе было установлено, что воздействие потока способствует сохранению антипараллелограмма уже после небольшого разгона ветряка. Устройство функционирует на установившемся рабочем режиме без перестроек.

## 1. Описание механизма

Схема механизма и фото первого прототипа представлены на рис. 1. Кривошипы  $OA$  и  $O_1B$  длины  $r$  каждый вращаются вокруг вертикальных осей  $O$  и  $O_1$  соответственно. Шатун  $AB$  длины  $l$  шарнирно соединен с кривошипами в точках  $A$  и  $B$ . Шатун расположен таким образом, что  $OABO_1$  – антипараллелограмм.

На шатуне  $AB$  в его центре  $C$  жестко закреплена ветроприемная пластина (характерная площадь пластины  $S$ ) так, что плоскость пластины вертикальна и параллельна  $AB$ . Пластина взаимодействует с потоком среды плотности  $\rho$ , имеющим на бесконечности скорость  $V$ , направленную вдоль оси  $Ox$  перпендикулярной отрезку  $OO_1$ .

Ось  $O$  соединена с ротором электрогенератора установки. Генератор подключен к локальной внешней цепи. Отметим, что в принципе возможно наличие второго генератора на оси  $O_1$ , тогда конструкция будет полностью симметрична. В данной работе для наглядности остановимся на случае одного генератора.

Обозначим  $J$  – момент инерции тела “кривошип  $OA$  + ротор генератора” относительно оси  $O$ , центр масс этого тела будем считать расположенным в точке  $O$ . Момент инерции кривошипа  $O_1B$  относительно его центра масс  $O_1$  будем считать также равным  $J$ . Обозначим  $J_2$ ,  $m$  – центральный моменты инерции и массу тела “шатун  $AB$  + пластина”, центр масс этого тела находится в середине  $C$  отрезка  $AB$ .

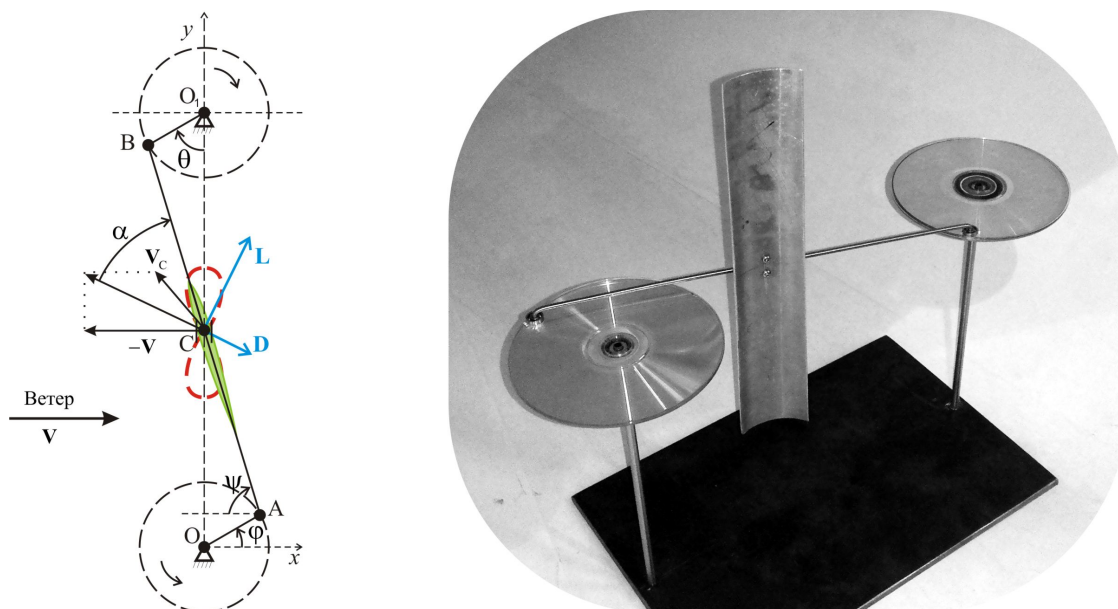


Рис. 1. Схема ВЭУ и фотография прототипа.

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$  между осью  $Ox$  и кривошипом  $OA$ .

## 2. Модель активных сил

Будем считать, что система находится под действием аэродинамических сил, приложенных к пластине, и электромеханического момента в оси  $O$ . Электромеханический момент будем считать линейным по угловой скорости  $\dot{\varphi}$  ротора генератора; значения аэродинамических сил определяются на основе квазистатического подхода ([6]).

Считаем, что точка приложения аэродинамических сил постоянно совпадает с точкой  $C$ . При численных расчетах использовались зависимости коэффициентов  $C_d(\alpha)$ ,  $C_l(\alpha)$  силы сопротивления и подъемной силы от мгновенного угла атаки  $\alpha$ , соответствующие стационарным аэродинамическим характеристикам плоской пластины удлинения 8 [7].

### 3. Динамические уравнения

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d\varphi / d\tau = pk^{-1}(\varphi); \\ dp / d\tau = 0.5k'(\varphi)k^{-2}(\varphi)p^2 + \varepsilon(Q(\varphi, p) - cpk^{-1}(\varphi)). \end{cases} \quad (1)$$

$$k(\varphi) = 2 + a^{-2}\psi'^2 + 2a^{-1}\psi' \cos(\varphi + \psi) + J_2 J^{-1}\psi'^2 + mr^2 J^{-1}(1 + 0.25a^{-2}\psi'^2 + a^{-1}\psi' \cos(\varphi + \psi)),$$

$$Q(\varphi, p) = p^{-1}k(\varphi)\sqrt{u_x^2 + u_y^2} (C_l(\alpha)u_y - C_d(\alpha)(u_x^2 + u_y^2 + u_x)).$$

Здесь  $\tau = Vt / r$ ;  $\alpha = \arctan(u_y / u_x) + \psi$ ;  $u_x = pk^{-1}(\varphi)(0.5a^{-1}\psi' \sin \psi - \sin \varphi) - 1$ ;  
 $u_y = pk^{-1}(\varphi)(\cos \varphi + 0.5a^{-1}\psi' \cos \psi)$ ;  $c = C^2 / (R_e V \rho S r^2)$  – коэффициент электрической нагрузки (чем больше нагрузка на ВЭУ со стороны потребителей электрической энергии, тем больше коэффициент  $c$ );  $C$  – коэффициент электромеханического взаимодействия;  $R_e$  – внешнее сопротивление в цепи генератора;  $a = r / l < 1$ ;  $\varepsilon = \rho S r^3 J^{-1}$ ;  
 $\psi = \psi(\varphi) = \pi / 2 - 2 \arcsin(\cos \varphi / \sqrt{(a^{-1} - \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi})$ ,  $\psi' = d\psi / d\varphi$ .

### 4. Постановка задачи

Правая часть (1)  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi$ . Таким образом, система (1) имеет цилиндрическое фазовое пространство. Притягивающая периодическая траектория системы (1), охватывающая фазовый цилиндр, соответствует рабочему режиму ВЭУ. В работе [8] на основе метода Пуанкаре–Понтрягина [1] получены достаточные условия существования притягивающих периодических траекторий системы (1) и оценена механическая мощность ВЭУ на соответствующих режимах в зависимости от параметров модели при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В данной работе ставится задача построения бифуркационных диаграмм, описывающих зависимость характерной величины безразмерного импульса  $p$  на периодической траектории от коэффициента  $c$  внешней нагрузки при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В качестве характерного значения  $p$  вдоль периодической траектории будем использовать  $p$  при  $\varphi = 0$ .

Бифуркационные диаграммы  $\{c, p(0)\}$  позволяют непосредственно сделать выводы о характере перестроек фазового портрета системы (1) при изменении коэффициента  $c$  внешней нагрузки.

Будем рассматривать периодические траектории системы (1), целиком расположенные в верхней половине фазового цилиндра (для траекторий, целиком лежащих в нижней половине фазового цилиндра справедливы аналогичные рассуждения).

### 5. Бифуркационные диаграммы при $\varepsilon \rightarrow 0$

Введем обозначение:  $z(h, \varphi) = \sqrt{hk(\varphi)}$  – траектория системы (1) при  $\varepsilon = 0$  (т.е. в случае, когда система консервативна), соответствующая начальному уровню энергии  $h > 0$ .

$$Q_h(\varphi) = Q(\varphi, z(h, \varphi)) \text{ – функция } Q \text{ вдоль кривой } z(h, \varphi).$$

Вычислим также значение следующей вспомогательной функции вдоль кривой  $z(h, \varphi)$ :

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Q_h(\varphi) - cz(h, \varphi)k^{-1}(\varphi)) d\varphi, \text{ при } h > 0.$$

Итак, для системы (1) выполнены условия теоремы Пуанкаре–Понтрягина, что дает следующие достаточные условия существования и устойчивости периодических траекторий системы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

Если для некоторого  $h = \chi > 0$  интеграл  $I(\chi)$  равен нулю, а его производная по параметру  $h$  ненулевая, то существует  $\delta_0 > 0$  такое что, для любого  $\delta \in (0, \delta_0)$  найдется  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$  у системы (1) в  $\delta$ -окрестности кривой  $z(\chi, \varphi)$  существует единственная периодическая траектория  $\tilde{p}_\chi(\varphi)$ , причем  $\tilde{p}_\chi(\varphi)$  является грубой траекторией и стремится к кривой  $z(\chi, \varphi)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Более того, при  $\left. \frac{dI(h)}{dh} \right|_{h=\chi} < 0$  траектория  $\tilde{p}_\chi(\varphi)$  притягивающая, а при  $\left. \frac{dI(h)}{dh} \right|_{h=\chi} > 0$  траектория  $\tilde{p}_\chi(\varphi)$  отталкивающая.

Поскольку функция  $I(h)$  зависит от параметра  $c$  линейно, условие  $I(\chi) = 0$  позволяет получить явное выражение для параметра  $c$  в соответствующих точках бифуркационной диаграммы через  $h$ :

$$\tilde{c}(h) = \frac{\int_0^{2\pi} Q(\varphi, z(h, \varphi)) d\varphi}{\int_0^{2\pi} z(h, \varphi) k^{-1}(\varphi) d\varphi} \text{ при } h > 0.$$

Таким образом, бифуркационная диаграмма системы (1) содержит кривую, которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к предельной кривой  $\{\tilde{c}(h), z(h, 0)\}$ . Параметризация через  $h$  потребовалась в данном случае для устранения неоднозначности, связанной с возможным существованием нескольких корней  $h = \chi_i$  уравнения  $I(h) = 0$  при заданном  $c$ .

Отметим, что полученное условие является достаточным и не исключает существования других ветвей бифуркационной диаграммы, в том числе при сколь угодно малом  $\varepsilon$ .

Полученные предельные бифуркационные диаграммы  $\{\tilde{c}(h), z(h, 0)\}$  для различных значений параметра  $a$  приведены на рис. 2. Сплошными линиями изображены ветви диаграмм, отвечающие притягивающим периодическим траекториям, пунктирными – отталкивающим. В частности, при  $a \leq a_0 \approx 0.3$  существует диапазон значений параметра  $c$ , при котором система (1) имеет три периодических траектории: две притягивающих, одну отталкивающую.

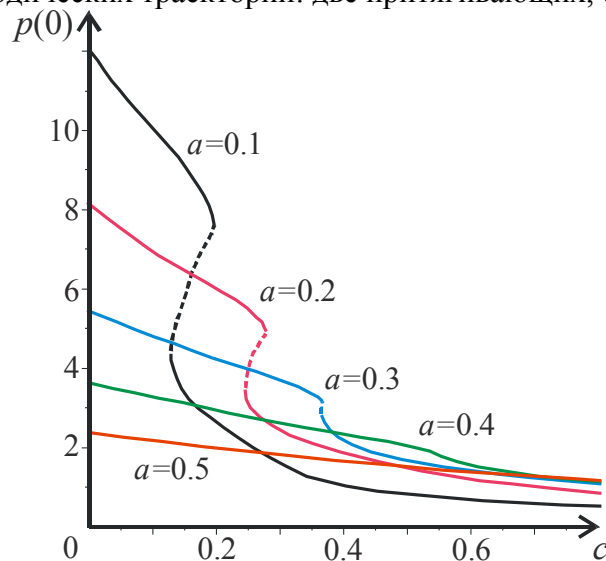


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы  $\{c, p(0)\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  при нескольких значениях параметра  $a$ .

При создании лабораторного макета ВЭУ использовано значение  $a = 0.2$ , поскольку исходя из полученных теоретических диаграмм, в таком случае можно ожидать существование

режимов движения с относительно высокой угловой скоростью кривошипов по сравнению с большими значениями параметра  $a$ .

### **Заключение**

На основе качественных методов анализа математической модели получены оценки характеристик движения шарнирного механизма, находящегося под действием потока среды. Результаты исследования модели использованы для создания лабораторного макета ВЭУ на основе шарнирного механизма антипараллелограмма.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 14-08-01130, 15-01-06970, 16-31-00374.

### **Список литературы**

1. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ. 1934. 4. 9. С. 234-238.
2. Jones K.D., Davids S.T., Platzler M.F. Oscillating-wing power generation // 3rd ASME/JSME joint fluids engineering conference, San Francisco, CA. 1999, pp. 1-6. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.41.1622&rep=rep1&type=pdf>
3. Andronov P.R., Dosaev M.Z., Dynnikova G.Ya., Selyutskii Yu.D., Strekalov S. D.: Modeling of oscillating wind turbine // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, Springer, August 2009, Volume 38, Issue 4, 2009, pp 383-387.
4. Isoc, T.; Leach, F.; Bolean, C.; Pavel, V.; Vadan, I.: Study and design of a wing oscillating wind system. In: Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), 2011 7th International Symposium. 2011, pp.1-4. <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5952221&isnumber=5952135>
5. Klimina L.: Dynamics of a slider-crank wave-type wind turbine. In: Proceedings of the Fourteenth International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress (2015 IFToMM World Congress). 7p. <http://elite.newhopetek.com.tw/IFToMM2015CD/PDF/OS13-007.pdf>
6. Dosaev M.Z., Lin Ching-Huei, Lu Wen-Lung, Samsonov V.A. and Selyutskii Yu.D. A qualitative analysis of the steady modes of operation of small wind power generators // J. Appl. Math. Mech. vol. 73, no. 3, 2009, pp. 259-263.
7. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // М. Труды ЦАГИ. Вып. 1621. 1974, С. 79-93.
8. Климина Л. А., Досаев М. З., Селюцкий Ю. Д., О динамике ветроэнергетической установки с рабочим элементом на основе механизма антипараллелограмма // Мехатроника, автоматизация, управление. М. Изд-во «Новые технологии». N8, 2016, С. 536-540. DOI: 10.17587/mau.17.536-540.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

**М.А.Ковалева, В.В.Смирнов, Л.И.Маневич**

ФГБУН Институт химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук,  
119991 Москва, ул. Косыгина, 4, e-mail: [makovaleva@chph.ras.ru](mailto:makovaleva@chph.ras.ru)

В работе представлен анализ взаимодействия двух маятников с гармонической связью. Данная модель является базовой для многих физических и механических систем: взаимодействия спиновых систем, цепочек парафинов, молекул ДНК. В настоящей работе мы анализируем существенно нелинейную систему, что предполагает отказ от квазилинейного приближения. Найдены аналитические выражения для нелинейных нормальных мод системы. Описан режим стационарных биений между двумя маятниками при соответствующих начальных условиях, который предполагает выделение двух масштабов времени: быстрого масштаба, соответствующего характерному времени осцилляций маятника и медленного – времени передачи энергии в процессе биений. Исследование режимов представлено при помощи фазового портрета в медленном масштабе времени и при помощи сечений Пуанкаре исходной системы

Ключевые слова: Связанные маятники, предельные фазовые траектории, существенно нелинейные системы

В настоящей работе представлено исследование режимов движения системы двух идентичных маятников, связанных гармоническим потенциалом. Модели такого типа могут использоваться как для описания связанных спиновых систем, так и для взаимодействия различных органических молекул, включая парафины и молекулы ДНК [1].

Движение связанных осцилляторов широко исследовано в огромном количестве работ. Здесь можно отметить многочисленные работы по синхронизации, основанные на фазовом приближении [2 и ссылки в обзоре]. Такие исследования основаны на предположении о неизменности или малых изменениях амплитуды колебаний. В случае движений с сильными амплитудными модуляциями такие приближения недопустимы. В таком случае адекватным будет подход, основанный на концепции Предельных Фазовых Траекторий (ПФТ) [3]. Этот подход предполагает описание движений с большими изменениями амплитуды как эволюцию режима с максимальным энергообменом между маятниками, что позволяет предсказать бифуркации решений, соответствующие переходу между энергообменом и локализацией энергии [3-8]. Кроме того, в значительном числе случаев удается получить аналитическое описание сильно модулированных движений.

В отличие от многих работ, посвященных взаимодействию нелинейных систем, мы не предполагаем малой нелинейности как самих маятников, так и связи между ними слабой. Это означает принципиальную неприменимость методик исследования, принятых для квазилинейных систем. Анализ системы двух линейно связанных маятников показал [9], что при подходящем выборе комплексных переменных описание динамики системы может быть сведено к двум переменным, что позволяет использовать метод фазовой плоскости. Настоящая работа продолжает исследование для более сложного случая, когда невозможно предположить малость нелинейности связи между маятниками.

Гамильтониан исследуемой системы:

$$H = \sum_{j=1,2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dq_j}{dt} \right)^2 + (1 - \cos(q_j)) + \frac{1}{2} \beta (1 - \cos(q_j - q_{3-j})) \right)$$

,  $\beta$  - характеризует связь между маятниками.

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \beta \sin(q_j - q_{3-j}) + \sin(q_j) = 0, j = 1, 2 \quad (1)$$

Определим комплексные переменные:

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{dq_j}{dt} + i\sqrt{\omega} q_j \right); q_j = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}} (\psi_j - \psi_j^*); \frac{dq_j}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\omega}} (\psi_j + \psi_j^*), j = 1, 2,$$

где  $\omega$  - пока неопределенная частота колебаний.

После подстановки в уравнения движения и разложения потенциала по степеням аргумента мы получаем систему в следующем виде:

$$i \frac{d}{dt} \psi_j + \frac{\omega}{2} (\psi_j + \psi_j^*) + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left( \frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \right)^{2k+1} (\psi_j - \psi_{3-j} - c.c.)^{2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left( \frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \right)^{2k+1} (\psi_j - c.c.) = 0. \quad (2)$$

Следует заметить, что такое преобразование является точным при условии, что гармонические члены представлены именно бесконечными рядами.

Мы ищем колебательные решения в виде:

$$\psi_j = \varphi_j e^{i\omega t}, j = 1, 2$$

Поскольку нас интересуют физические решения, то мы исключаем члены, приводящие к бесконечному росту решений. После исключения секулярных членов мы получаем следующие уравнения для движения маятников:

$$i \frac{d}{d\tau} \varphi_j - \frac{\omega}{2} \varphi_j + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} |\varphi_j - \varphi_{3-j}| \right) \frac{\varphi_j - \varphi_{3-j}}{|\varphi_j - \varphi_{3-j}|} + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} |\varphi_j| \right) \frac{\varphi_j}{|\varphi_j|} = 0 \quad (3),$$

$$j = 1, 2$$

## Моды системы

### Синфазная мода

Стандартной процедурой для исследования многих нелинейных систем является поиск нелинейных нормальных мод системы. Мы нашли аналитические выражения для синфазной и антифазной мод системы.

При реализации моды следующие условия

$$\varphi_j = const = \sqrt{X} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} Q; \varphi_j = \varphi_{3-j}$$

приводят к уравнению маятника:

$$-\frac{\omega}{2} \varphi_j + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} |\varphi_j| \right) \frac{\varphi_j}{|\varphi_j|} = 0$$

Тогда частота синфазной моды может быть найдена из уравнения:

$$-\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\omega X}} J_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} X\right) = -\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\omega Q} J_1(Q) = 0$$

или:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{Q} J_1(Q)} \quad (4)$$

### Антифазная мода

Частота антифазной моды может быть найдена из тех же уравнений, но при условии:

$$\varphi_j = -\varphi_{3-j}$$

$$-\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} J_1\left(2\sqrt{\frac{\omega}{2}} X\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} X\right) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{\omega Q} J_1(2Q) + \frac{1}{\omega Q} J_1(Q) = 0$$

Частота антифазной моды тогда будет выражаться так:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2}{Q} (\beta J_1(2Q) + J_1(Q))} \quad (5)$$

Заметим, что при малых значениях параметра связи частота антифазной моды приближается к частоте синфазной моды.

Сравнение аналитических выражений с численными результатами для частот синфазной и антифазной мод приведено на рис.1. Как мы видим, аналитическое представление хорошо согласуется с численными результатами при начальных условиях, соответствующих начальному возбуждению вплоть до  $Q=9/10\pi$ .

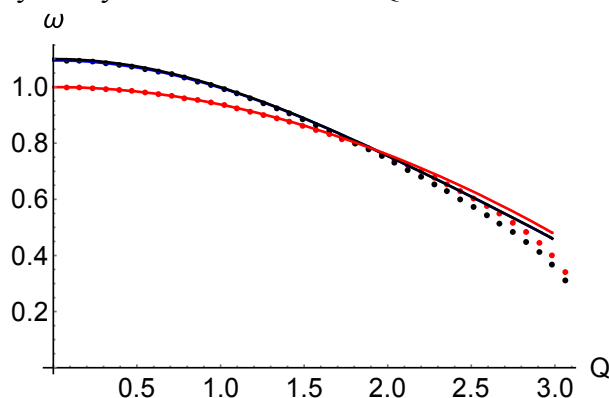


Рисунок 1. Сравнение аналитических выражений с численными результатами для частот синфазной и антифазной мод. Сплошные кривые соответствуют аналитическим выражениям (5, 6); точки — результаты численного моделирования при  $\beta=0.1$

### Преобразование системы и анализ на фазовой плоскости

Используя дополнительный интеграл системы  $X$ , можно редуцировать фазовое пространство системы до двумерного, введя относительные амплитуды и фазы колебаний маятников. Однако, физически значимыми являются не абсолютные значения фаз, а только их разность [4-



8]. Поэтому описание динамики системы может быть представлено в терминах «угловых» переменных  $\theta$  и  $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ :

$$\varphi_1 = \sqrt{X} \cos(\theta) e^{i\delta_1}, \varphi_2 = \sqrt{X} \sin(\theta) e^{i\delta_2}$$

Такое преобразование позволяет представить систему уравнений на плоскости:

$$\dot{\theta} = \frac{Q^{5/4} \beta J_1(Q \sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}) \sin \Delta}{2^{7/4} J_1(Q)^{1/4} \sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}}$$

$$\sin 2\theta \dot{\Delta} = \frac{1}{2} Q (J_1(Q \cos \theta) \sin \theta - J_1(Q \sin \theta) \cos \theta) + \frac{Q^{5/4} \beta J_1(Q \sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}) \cos \Delta \cos 2\theta}{2^{3/4} J_1(Q)^{1/4} \sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}} \quad (6)$$

, где  $\Delta = \delta_1 - \delta_2$  - разность фаз двух маятников.

Фазовые портреты системы представлены на Рисунке 2.

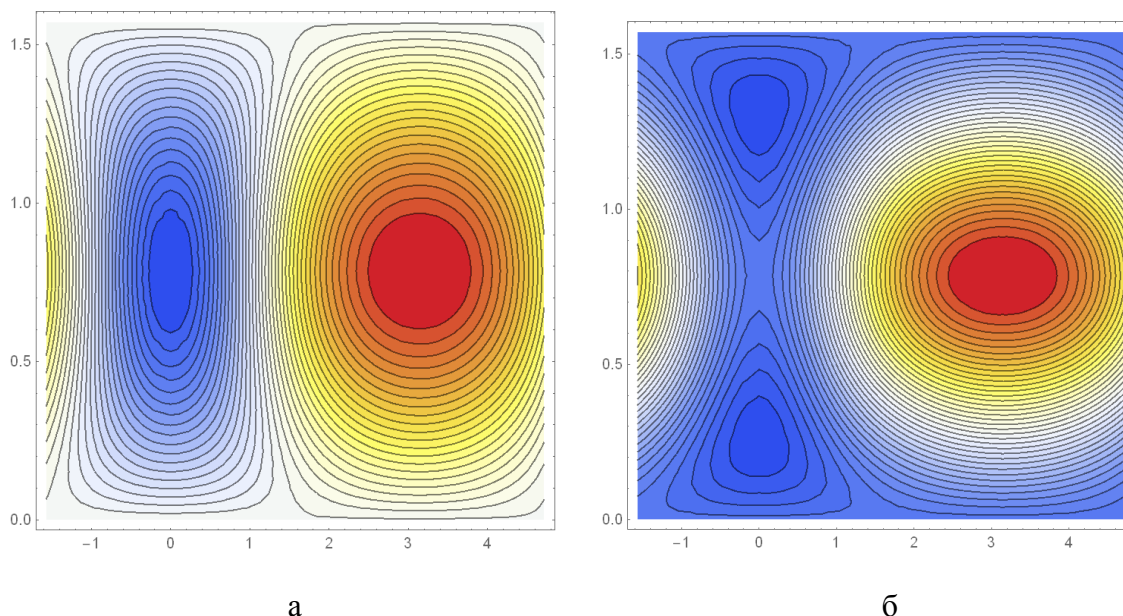


Рисунок 2. Фазовая плоскость  $(\Delta, \theta)$  для  $Q = \pi/2$  и различных значений параметра связи: а)  $\beta = 0.3$  б)  $\beta = 0.1$ .

Фазовые плоскости разбиваются на периодические ячейки, поэтому для анализа мы рассмотрим одну ячейку фазового пространства:  $(\Delta \in [-\pi/2, 3\pi/2], \theta \in [0, \pi/2])$ . Значение  $\theta = 0$  соответствует всей энергии, сосредоточенной на одном маятнике,  $\theta = \pi/2$  - соответствует всей энергии на втором. Значение  $\theta = \pi/4$  соответствует равному распределению энергии в системе.

При относительно больших значениях параметра связи  $\beta$  (Рисунок 2а) фазовые плоскости содержат только две стационарные точки, соответствующие двум нелинейным нормальным модам:  $(\Delta=0, \theta=\pi/4)$  – синфазная мода и  $(\Delta=\pi, \theta=\pi/4)$  – антифазная мода. Предельная фазовая траектория - траектория, проходящая через точку  $(\Delta=\pi, \theta=0)$  в начальный момент времени. Она показывает, сколько энергии может быть перенесено с одного маятника на другой, если начальные условия соответствуют импульсу на первом маятнике. В нашем случае, траектория во время эволюции проходит через точку  $(\Delta=\pi, \theta=\pi/2)$ , что соответствует полной передаче энергии на второй маятник. В исходной системе такая траектория соответствует периодическому обмену энергией между маятниками – биениям.

При уменьшении связи между маятниками, происходит бифуркация, синфазная мода теряет устойчивость, рождаются две новые локальные моды, разделенные сепаратриссой. При совпадении сепаратриссы и ПФТ, полная передача возбуждения с первого маятника на второй становится невозможна. Этот факт может быть использован как критерий локализации энергии на первом маятнике.

Эволюция фазового пространства может быть подтверждена исследованием сечений Пуанкаре для полной системы (1). (Сечение построено для случая  $q_2 = 0$ ;  $\frac{dq_2}{dt} > 0$ ,  $Q = \pi / 2$ )

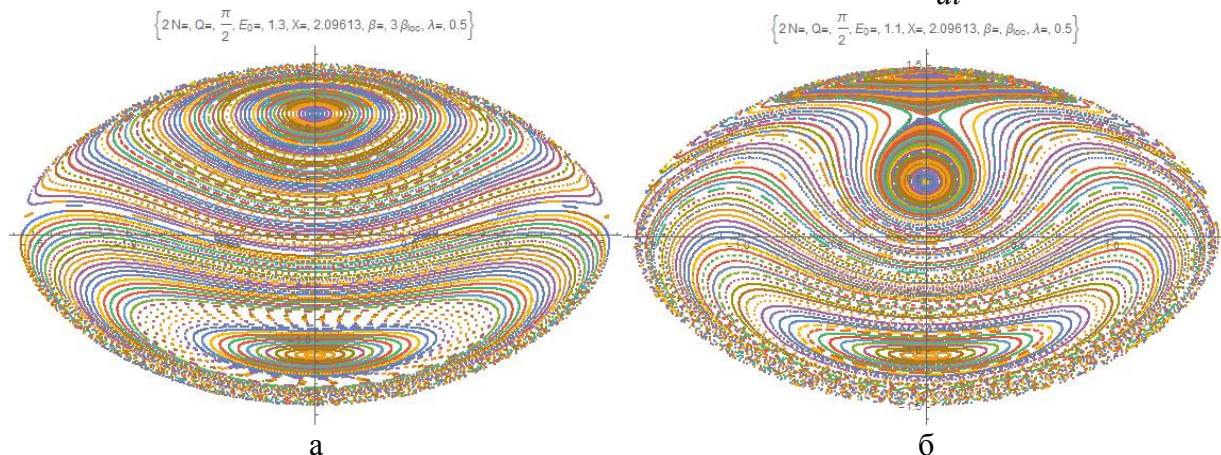


Рисунок 3. Сечения Пуанкаре для системы (1) при  $Q = \pi / 2$  и различных значениях параметра связи: а)  $\beta = 0.3$  б)  $\beta = 0.1$ .

В настоящей работе были представлены результаты исследования системы двух гармонически связанных маятника. Для исследования системы без предположения о квазилинейности было проведено преобразование к комплексным переменным и выделение решений колебательного вида. Получены аналитические выражения для зависимости частоты синфазной и антифазной моды от амплитуды начальных условий. Преобразование системы к угловым переменным позволяет рассмотреть эволюцию системы на плоскости при различных значениях параметра связи. Анализ фазового пространства проведен также при помощи построения сечений Пуанкаре исходной системы. Представленные результаты говорят о хорошем соответствии поведения асимптотической (5) и полной (1) систем.

Авторы благодарят Российский Фонд Фундаментальных Исследований за поддержку (Грант № 16-33-60186).

### Список литературы

1. Takeno Sh., Homma, S. A Sine-Lattice (Sine-Form Discrete Sine-Gordon) Equation – One- and Two-Kink Solutions and Physical Models // Journal of Physical Society of Japan. 1986. Vol.55. No.1. P.65-75.
2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление./ М.: Техносфера, 2003. 494 с.
3. L.I. Manevitch (2007). New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. Arch. Appl. Mech. 77, 301–312.
4. A. Kovaleva, L.I. Manevitch, E.L. Manevitch (2010). Intense energy transfer and superharmonic resonance in a system of two coupled oscillators. Phys Rev E 81, 056215(1- 12).
5. L. I. Manevitch, V. V. Smirnov (2010). Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains. Phys. Rev. E 82, 036602(1 – 9).
6. L.I. Manevitch, V.V. Smirnov (2010). Resonant energy exchange in nonlinear oscillatory chains and limiting phase trajectories: from small to large systems. In: A.F. Vakakis, ed. Advanced

- Nonlinear Strategies for Vibration Mitigation and System Identification, 207-258. Springer, Berlin.
15. L.I. Manevitch, A. Kovaleva, E.L. Manevitch, D.S. Shepelev (2011). Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator. Part 1. A non-dissipative oscillator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 16, 1089–1097.
  16. L.I. Manevitch, A. Kovaleva, E.L. Manevitch, D.S. Shepelev (2011). Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator. Part 2. A dissipative oscillator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 16, 1098–1105.
  17. Manevitch, L. I., Romeo, F. Non-stationary resonance dynamics of weakly coupled pendula // *EPL* 2015. Vol. 112. 30005 .doi: 10.1209/0295-5075/112/30005.

## **ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН**

**Т. Н. Комиссарова, В. Е. Хроматов**

Национальный Исследовательский Университет «МЭИ»,  
Кафедра Динамики и прочности машин им. В. В. Болотина,  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, e-mail: [khromatovvy@mpei.ru](mailto:khromatovvy@mpei.ru)

Рассматриваются колебания и динамическая устойчивость прямоугольных пластин и стержней, изготовленных из ферромагнитных материалов, находящихся в переменном продольном магнитном поле, нагруженных продольными силами. Выведены соотношения для определения областей устойчивости и неустойчивости пластин. Проведен анализ влияния величины индукции внешнего магнитного поля на основные характеристики параметрического резонанса.

**Ключевые слова:** ферромагнитная пластина, параметрические резонансы, области неустойчивости, индукция магнитного поля.

При динамическом нагружении элементов конструкций возможна потеря устойчивости и возникновение параметрических резонансов [1, 2]. Одним из факторов, приводящих к динамической потере устойчивости пластин, является магнитное поле [3, 4]. Первыми работами, в которых были построены теоретические модели деформирования и колебаний упругих тел в магнитном поле, являются работы [5, 6]. В [7] рассмотрены колебания ферромагнитных прямоугольных пластин в постоянном поперечном и продольном магнитном поле, в [8, 9] рассмотрены задачи динамической устойчивости прямоугольных пластин в переменном поперечном магнитном поле.

В данной работе, на основе методов, изложенных в [1, 2, 6], рассматриваются задачи динамической устойчивости прямоугольных ферромагнитных пластин в переменном продольном магнитном поле, пластин, нагруженных продольными силами.

### **Устойчивость диэлектрической и идеально проводящей ферромагнитной пластины в переменном продольном магнитном поле**

Рассмотрим упругую шарнирно-опертую по краям  $x_1 = 0, l$  прямоугольную пластину толщиной  $2h$ , отнесенную к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  и которая в силу нагружения и закрепления находится в состоянии цилиндрического изгиба.

Пластина изготовлена из упругого магнитомягкого диэлектрического ферромагнитного материала и колеблется во внешнем переменном продольном магнитном поле с вектором магнитной индукции  $\vec{B}(B_1; 0; 0)$  (рис. 1).

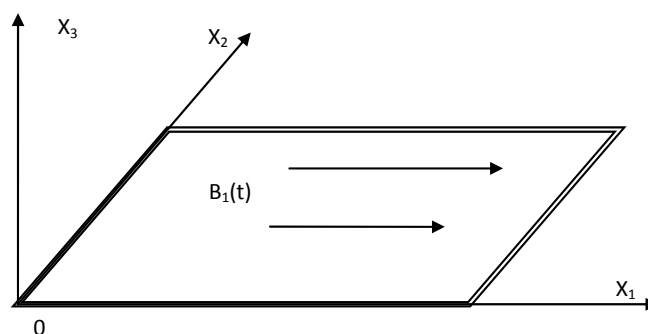


Рис. 1. Пластина в продольном магнитном поле

На основе допущений, изложенных в [6] считаем, что влиянием токов проводимости можно пренебречь, магнитное поле в колеблющейся пластине в любой момент времени определяется магнитным полем стационарной пластины, имеющей мгновенную конфигурацию реальной пластины.

Внешнее магнитное поле меняется по гармоническому закону:

$$B_1(t) = B_0 \cos \Omega t, \quad (1)$$

и предполагается однородным, но зависящим от времени с достаточно низкой частотой для того, чтобы не нарушать предположение о квазистатичности -  $\Omega < 2 / \mu_0 \mu_r \sigma h^2$ . Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная,  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость материала пластины,  $\sigma$  - коэффициент электропроводности пластины.

Уравнения связанных магнитоупругих колебаний пластин в магнитном поле дополняются уравнениями Максвелла для определения компонент невозмущенного и возмущенного магнитного поля. В работах [5,6], для тонкостенной пластины получены сингулярные интегро-дифференциальные уравнения относительно параметров магнитного поля. При определении параметров магнитного поля решения для возмущений и потенциалов, входящих в уравнение движения пластины, искали в классе гармонических функций [5,6], зависящих от неизвестных волновых чисел. На основе принятых предположений имеем следующее уравнение колебаний диэлектрической ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле [6]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $w(x_1, t)$  - нормальный прогиб пластины,  $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость,  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\rho$  - плотность материала пластины,  $N_1$  - коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_1$  и магнитных характеристик материала пластины [4, 6]:

$$N_1 = \frac{2\chi h B_1^2(t)}{\mu_0 \mu_r}, \quad (3)$$

где  $\chi = (\mu_r - 1)$  - магнитная восприимчивость.

Для случая шарнирно опертой по обоим краям пластины функция прогибов для гармонических колебаний имеет вид [1, 2]:

$$w(x_1, t) = f(t) \sin(k_1 x_1), \quad (4)$$

где  $k_1$  - волновое число, которое для шарнирно опертой пластины имеет вид:  $k_1 = m_1 \pi / a_1$  ( $m_1 = 1, 2, \dots$ ).

Подставляя (4) в (2) получаем уравнение для определения функции  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{Df(t)k_1^4}{2\rho h} - \frac{N_1 f(t)k_1^2}{2\rho h} = 0, \quad (5)$$

После подстановки в (5) соотношения (3) получим следующее уравнение для функции  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_m^2 \left( 1 - \frac{B_1^2(t)}{B_{\text{кр}}^2 k_1^4} \right) f = 0 \quad (6)$$

где  $\omega_m^2 = Dk_1^4 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля,

$B_{\text{кр}}^2 = \frac{\mu_0 \mu_r D k_1^4}{2\chi h k_1^2}$  - значение индукции внешнего продольного магнитного поля, при котором происходит потеря статической устойчивости в магнитном поле [4, 5].

Для гармонического закона изменения индукции внешнего магнитного поля (1) уравнение (6) с учетом соотношения  $B_1^2(t) = B_0^2 \cos^2 \Omega t = B_0^2(1 + \cos 2\Omega t) / 2$  принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bm}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0, \quad (7)$$

где

$$\omega_{bm}^2 = \omega_m^2 \left[ 1 - \frac{B_0^2}{2B_{kp}^2 k_1^4} \right], \quad 2\eta_m = \frac{B_0^2}{2B_{kp}^2 k_1^4 - B_0^2} \quad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение Матье. Его решение может быть неустойчивым и устойчивым во времени в зависимости от значений как параметров  $\omega_{bm}$  и  $\eta_m$ , так и частоты возбуждения  $\Omega$ .

Для построения границ областей неустойчивости воспользуемся трансцендентным выражением, полученным Хиллом [2] (при достаточно малых значениях параметра  $\eta_m$ ):

$$\Omega = \frac{2\omega_{bm}}{p} \sqrt{1 \pm \eta_m}. \quad (9)$$

В соответствии с теоремой Хаупта:  $\sqrt{1 - \eta_m} < \frac{\Omega}{2\omega_{bm}} < \sqrt{1 + \eta_m}$

при  $p = 1$ , имеем главную область параметрического резонанса:

$$\Omega = 2\omega_{bm} \sqrt{1 \pm \eta_m}. \quad (10)$$

Рассмотрим решение этого уравнения на плоскости  $(\Omega/\omega_m)$ -  $\eta_m$ . После преобразований (9) получим:

$$\Omega/\omega_m = \sqrt{\frac{4(1 \pm \eta_m)}{p^2(1 + 2\eta_m)}}. \quad (11)$$

Здесь  $\eta_m$  определяется соотношением (8)

В случае идеально проводящей ферромагнитной пластины уравнение динамической устойчивости идеально проводящей ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле имеет вид:

$$D\Delta\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2B_1^2}{\mu_0 k} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad (12)$$

$k = \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}$ ,  $k_1, k_2$  - волновые числа. Подставляя (4) в (12) после ряда преобразований с учетом соотношения  $B_1^2(t) = B_0^2 \cos^2 \Omega t = B_0^2(1 + \cos 2\Omega t) / 2$  получаем уравнение (7) для определения функции  $f(t)$ , где

$$\omega_{bm}^2 = \omega_m^2 \left[ 1 + \frac{B_0^2}{\mu_0 D k k_1^2} \right], \quad 2\eta_m = \frac{B_0^2}{\mu_0 D k k_1^2 + B_0^2} \quad (13)$$

Для построения границ областей неустойчивости аналогично диэлектрической пластине воспользуемся трансцендентным выражением, полученным Хиллом [2] (при достаточно малых значениях параметра  $\eta_m$ ). Рассмотрим решение этого уравнения на плоскости  $(\Omega/\omega_m)$ -  $\eta_m$  (11), где  $\eta_m$  определяется соотношением (13)

На рис. 2, 3 показаны результаты численного построения областей неустойчивости для основной формы колебаний ( $m_1 = 1$ ) в случае диэлектрической и идеально проводящей ферромагнитной пластины. Вдоль линий, отмеченных символами  $a_1$  и  $b_1$ , решения являются периодическими с периодом  $2\pi/\Omega$ . Площадь, ограниченная этими двумя линиями отмечена розовой штриховкой и является главной областью неустойчивости. Вдоль линий, отмечен-

ных символами  $a_2$  и  $b_2$ , решения являются периодическими с периодом  $4\pi / \Omega$ . Они ограничивают вторую область неустойчивости для основной формы колебаний, отмеченной голубой штриховкой. Продольное переменное магнитное поле может приводить к динамической потере устойчивости.

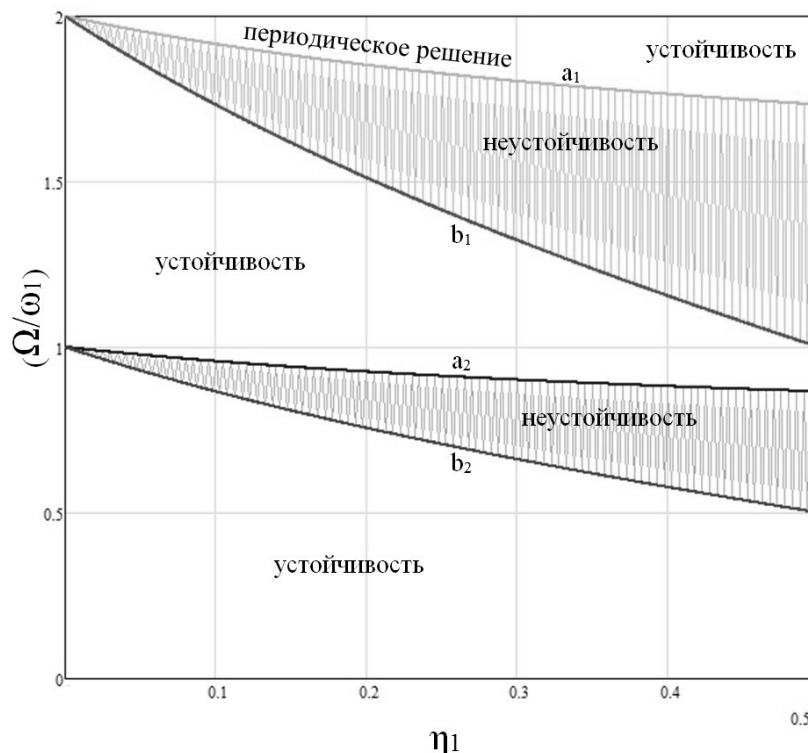


Рис. 2. Теоретические области неустойчивости диэлектрической ферромагнитной пластины в переменном продольном магнитном поле

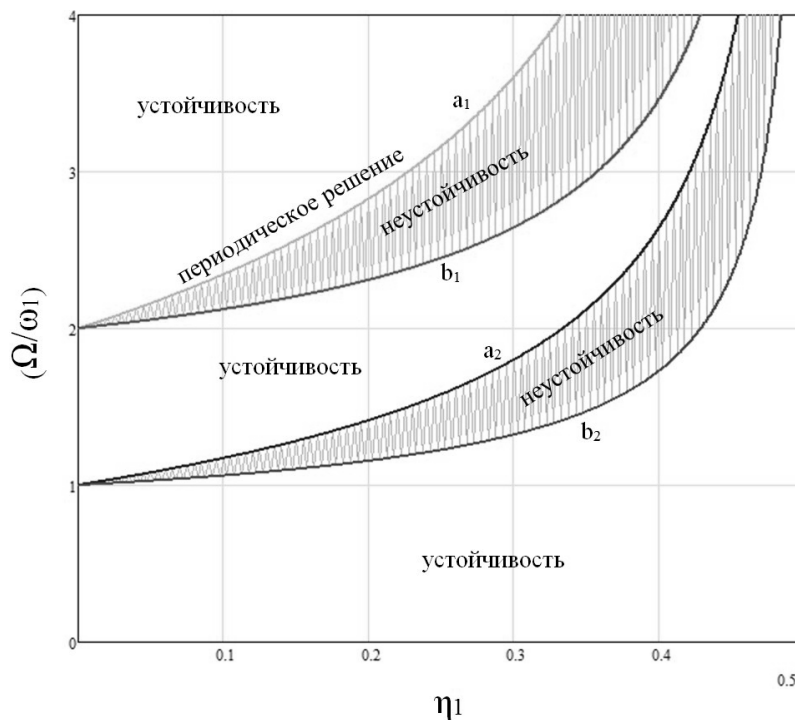


Рис. 3. Теоретические области неустойчивости идеально проводящей ферромагнитной пластины в переменном продольном магнитном поле

**Устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины под действием переменных продольных сил в продольном магнитном поле**

Рассмотрим шарнирно-опертую по всему контуру прямоугольную пластину, находящуюся в постоянном продольном магнитном поле с индукцией  $B_1$  и нагруженную сжимающими усилиями  $P(t)$  переменными во времени (рис. 4):

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t . \quad (14)$$

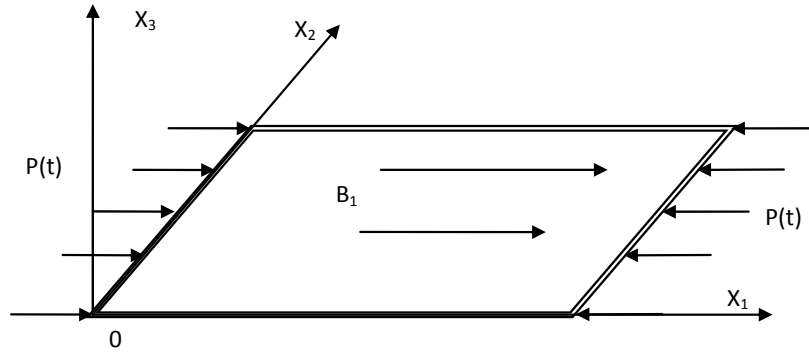


Рис. 4. Пластина в постоянном продольном магнитном поле при сжатии в продольном направлении

Уравнение устойчивости диэлектрической пластины в продольном магнитном поле имеет вид [6]:

$$D\Delta\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + [P(t) + \frac{2\chi h}{\mu_0\mu_r} B_1^2] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad , \quad (15)$$

здесь  $N_1 = \frac{2\chi h B_1^2}{\mu_0\mu_r}$  - коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_1$  и магнитных характеристик материала пластины [5, 6].

Для случая шарнирно опертой по обоим краям пластины функция прогибов для гармонических колебаний имеет вид [2]:

$$w(x_1, x_2, t) = f(t) \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) . \quad (16)$$

где  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ,  $k_1, k_2$  - волновые числа и для шарнирно опертой пластины имеют вид:  $k_1 = m\pi / a_1, k_2 = n\pi / a_2$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ).

Подставляя (16) в (15) получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2}{2\rho h} \left( 1 - \frac{P(t)k_1^2}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} - \frac{Nk_1^2}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} \right) f = 0 \quad (17)$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_{mn}} - \frac{N}{P_{mn}} \right) f = 0 \quad (18)$$

где  $\omega_{mn}^2 = D(k_1^2 + k_2^2)^2 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля;  $P_{mn} = \frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2}{k_1^2}$  - значение критического усилия при потере статической устойчивости пластины в отсутствии магнитного поля.



Для случая гармонического изменения продольных сил (14) уравнение (18) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bm}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0 \quad (19)$$

где

$$\omega_{bm}^2 = \omega_m^2 \left[ 1 - \frac{P_0}{P_{mn}} - \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r} \frac{B_1^2}{P_{mn}} \right], \quad \eta_{mn} = \frac{P_1}{2P_{mn}} \left[ 1 - \frac{P_0}{P_{mn}} - \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r} \frac{B_1^2}{P_{mn}} \right]^{-1} \quad (20)$$

Из (18) в случае, когда пластина сжимается статической силой  $P_0$ , ее критическое значение равно:

$$P_{0kr} = P_{mn} \left[ 1 - \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r} \frac{B_1^2}{P_{mn}} \right] \quad (21)$$

Формула (21) показывает, что присутствие продольного магнитного поля может существенно уменьшить величину статической критической силы.

На рис. 5 представлен график зависимости относительной критической статической силы  $P_{0kr} / P_{mn}$  от индукции внешнего продольного магнитного поля при различных толщинах ферромагнитной диэлектрической пластины ( $2h = 0,5$  мм, 1 мм, 1,5 мм).

В расчетах взята диэлектрическая ферромагнитная пластина со сторонами -  $a_1 = a_2 = 0,05$  м. Пластина изготовлена из феррита - модуль упругости  $E = 172$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 5260$  кг/м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 30$ , электропроводность  $\sigma = 1,00$  (Ом×м)<sup>-1</sup>

Как видно из графика (рис. 5) в случае диэлектрического материала магнитное поле может существенно сузить область статической устойчивости пластин. Большее влияние магнитное поле оказывает на тонкие пластины.

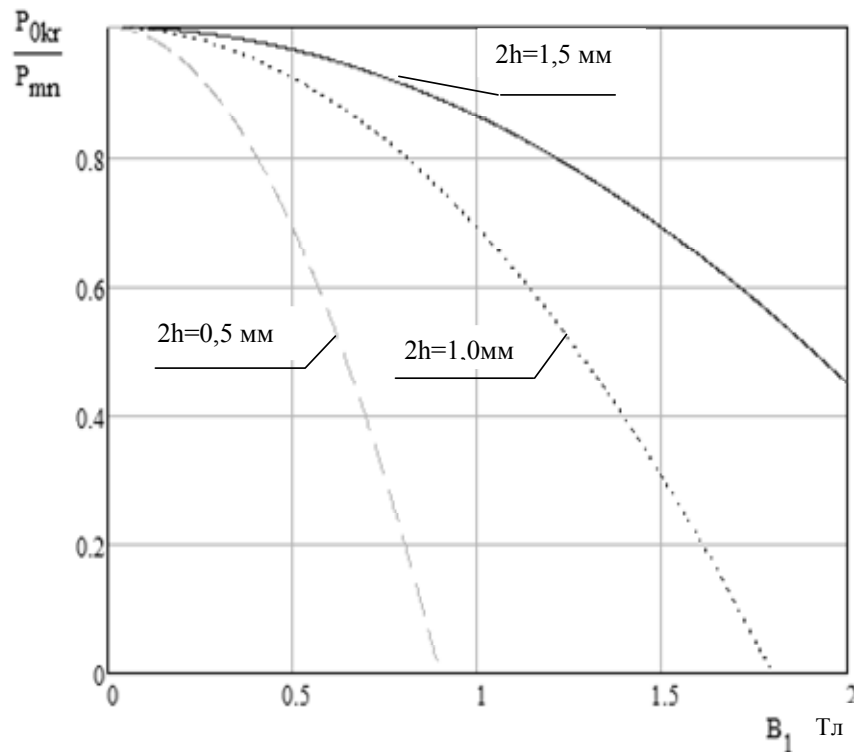


Рис. 5. График зависимости относительной критической статической силы  $P_{0kr} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля  $B_1$

Уравнение (19) представляет собой уравнение Матье, его решение может быть неустойчивым и устойчивым во времени в зависимости от значений как параметров  $\omega_{bm}$  и  $\eta_{mn}$ , так и частоты возбуждения  $\Omega$ .

Для построения границ областей неустойчивости воспользуемся трансцендентным выражением, полученным Хиллом [1, 2]. В соответствии с теоремой Хаупта при  $p = 1$ , имеем главную область параметрического резонанса (11)

С учетом соотношений (19)-(20) при  $P_0 = 0$  формулу (12) можно представить в виде:

$$\frac{\Omega}{2\omega_{mn}} = \left[ 1 - \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r} \frac{k_1^2 B_1^2}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} \pm \frac{P_1}{2P_{mn}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

из которого видно, что с увеличением величины магнитной индукции, ширина главной области неустойчивости увеличивается.

На рис. 6 приведен график зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta = (\Omega^+ - \Omega^-) / 2\omega_{mn}$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля при  $m, n = 1$ ,  $2h = 1,0$  мм и коэффициенте возбуждения при отсутствии магнитного поля  $P_1 / 2P_{mn} = 0.3$ .

В случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости. Продольное магнитное поле понижает устойчивость пластины.

Из графика (рис. 6) видно, что с увеличением величины магнитной индукции, ширина главной области неустойчивости увеличивается. Продольное магнитное поле понижает устойчивость ферромагнитной диэлектрической пластины, выполненной из феррита.

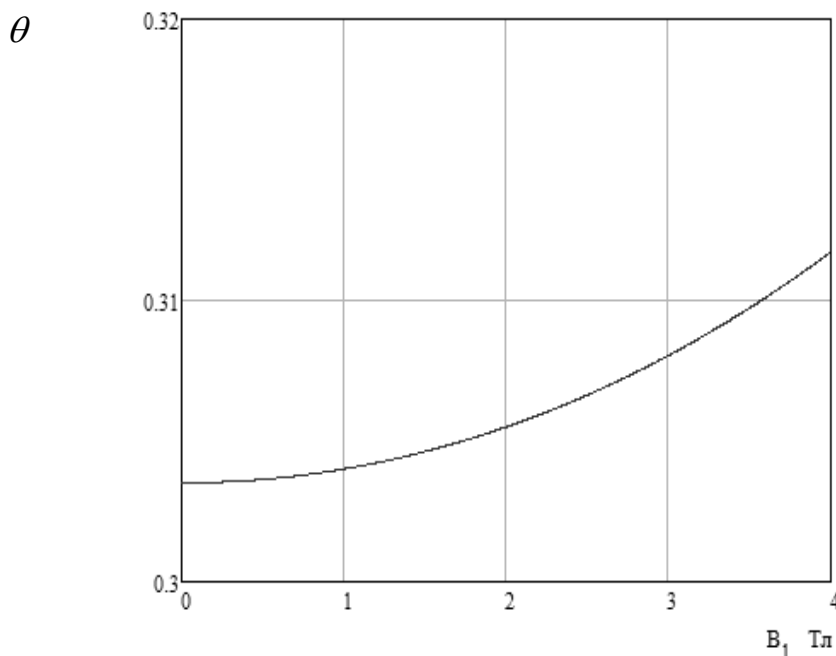


Рис. 6. График зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля  $B_1$

**Устойчивость идеально проводящей ферромагнитной пластины под действием переменных продольных сил в продольном магнитном поле**

В этом случае уравнение динамической устойчивости идеально проводящей ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле имеет вид:

$$D\Delta\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[ P(t) - \frac{2B_1^2}{\mu_0 k} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad (23)$$

Подставляя (16) в (23) получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_{mn}} + \frac{2B_1^2}{\mu_0 k P_{mn}} \right) f = 0 \quad (24)$$

где  $\omega_{mn}^2 = D(k_1^2 + k_2^2)^2 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля;  $P_{mn} = \frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2}{k_1^2}$  - значение критического усилия при потере статической устойчивости пластины в отсутствие магнитного поля.

Для случая гармонического изменения продольных сил (14) уравнение (24) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bm}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0 \quad (25)$$

где

$$\omega_{bm}^2 = \omega_{mn}^2 \left[ 1 - \frac{P_0}{P_{mn}} + \frac{2B_1^2}{\mu_0 k P_{mn}} \right], \quad \eta_m = \frac{P_1}{2P_{mn}} \left[ 1 - \frac{P_0}{P_{mn}} + \frac{2B_1^2}{\mu_0 k P_{mn}} \right]^{-1} \quad (26)$$

Из уравнения (25) и условия статической устойчивости ( $\omega_{bm} = 0$ ) можно найти следующие значения силы  $P_0$ , при которых пластинка теряет статическую устойчивость:

$$\frac{P_{0кр}}{P_{mn}} = 1 + \frac{2B_1^2}{\mu_0 k P_{mn}} \quad (27)$$

Уравнение (27) показывает, что присутствие продольного магнитного поля может существенно уменьшить величину статической критической силы. На основе уравнения (10) при  $P_0 = 0$  для определения границ главной области неустойчивости, с учётом уравнений (25)-(26) получим следующее выражение:

$$\frac{\Omega}{2\omega_{mn}} = \left[ 1 + \frac{3(1-\nu^2)(k_1 h)^2}{[(k_1 h)^2 + (k_2 h)^2]^{\frac{5}{2}}} \frac{B_1^2}{\mu_0 E} \pm \frac{P_1}{2P_{mn}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

В случае идеально проводящего ферромагнитного материала, магнитное поле уменьшает ширину главной области динамической неустойчивости. Продольное магнитное поле способствует увеличению устойчивости пластины.

На рис. 7 представлен график зависимости относительной критической статической силы  $P_{0кр} / P_{mn}$  от индукции внешнего продольного магнитного поля при различных толщинах ферромагнитной идеально проводящей пластины ( $2h = 0,5$  мм, 1 мм, 1,5 мм).

В расчетах взята идеально проводящая ферромагнитная пластина со сторонами -  $a_1 = a_2 = 0,05$  м. Пластина изготовлена из стали - модуль упругости  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,28$ , плотность  $\rho = 7700$  кг/м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 5000$ , электропроводность  $\sigma = 0,21 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>

Формула (28) и построенный на её основе график (рис. 7) показывают, что присутствие продольного магнитного поля в случае идеально проводящего материала может существенно расширить область статической устойчивости тонких пластин.

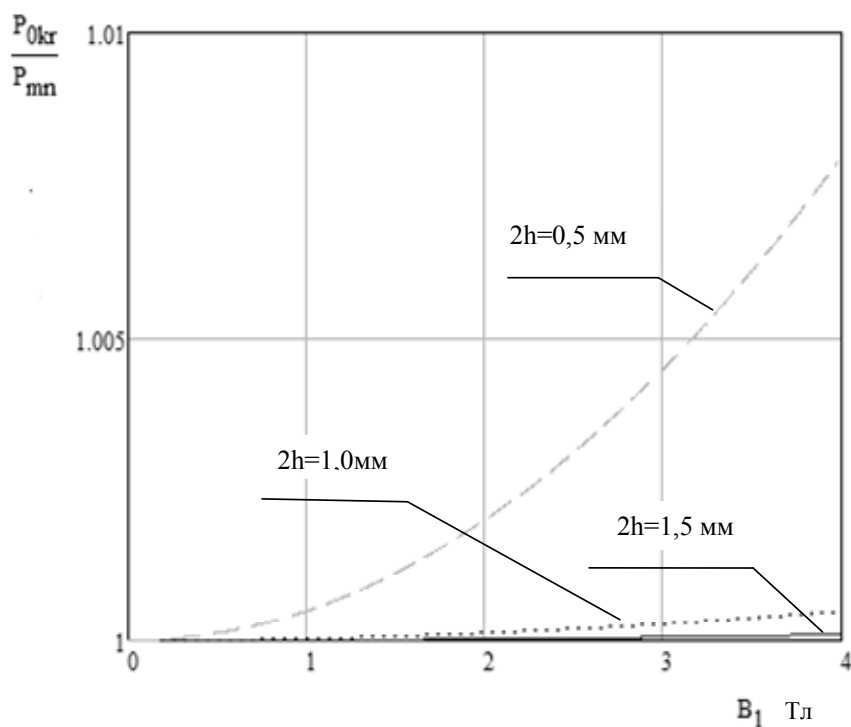


Рис. 7. График зависимости относительной критической статической силы  $P_{0kr} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля  $B_1$

На рис. 8 приведен график зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta = (\Omega^+ - \Omega^-) / 2\omega_{mn}$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля при  $m, n = 1$ ,  $2h = 1,0$  мм и коэффициенте возбуждения при отсутствии магнитного поля  $P_1 / 2P_{mn} = 0.3$ .

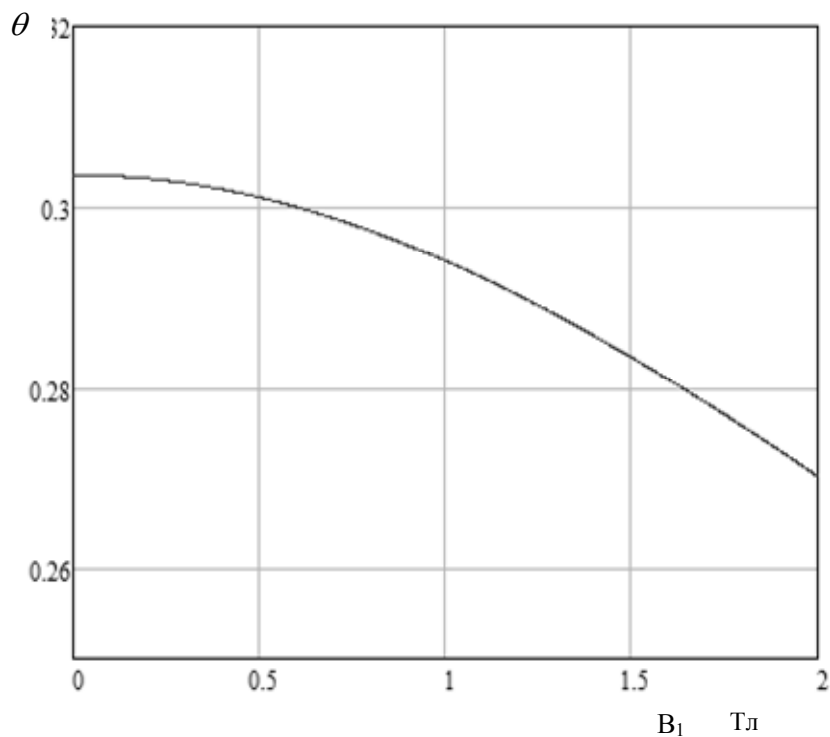


Рис. 8. График зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля  $B_1$

Из рис. 8 видно, что с увеличением величины магнитной индукции, ширина главной области неустойчивости уменьшается. Продольное магнитное поле способствует увеличению устойчивости ферромагнитной идеально проводящей пластины, выполненной из стали.

#### **Выводы.**

1. Проведено исследование устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластин, находящейся в продольном магнитном поле с гармонически изменяющейся индукцией внешнего магнитного поля. Построены графики областей неустойчивости ферромагнитной диэлектрической пластины и графики областей неустойчивости ферромагнитной идеально проводящей пластины. Продольное переменное магнитное поле может приводить к динамической потере устойчивости.

2. Проведено исследование устойчивости сжатой переменными силами пластины в постоянном продольном магнитном поле. Установлено, что в случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости и понижает устойчивость пластины. В случае идеально проводящей пластины, магнитное поле уменьшает ширину главной области динамической неустойчивости и способствует увеличению устойчивости пластины.

#### **Список литературы**

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1956. 600 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6-и томах. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение. 2-е изд. 1999. 506 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 1-е изд. - М: Наука, 1964. 338 с.; 5-е изд. – М.: КомКнига, 2006. 352 с.
4. Мун Ф. С., Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле. – Прикл. Механика, 1969, №1 (Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. ПМ. 1969. Т. 36. С. 98-108)
5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272 с.
6. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Тигран Мец. 1999. 436 с.
7. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н. Колебания и устойчивость ферромагнитных пластин в магнитных полях.// Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 г.) Нижний Новгород: «Наш дом», 2012. С. 967-975.
8. Голубева Т.Н. Динамическая устойчивость ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле// Справочник. Инженерный журнал. 2013. № 5. С. 20-24.
9. Комисарова Т.Н. О колебаниях и устойчивости ферромагнитных пластин при воздействии магнитных полей// Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятчи, 15-19 февраля 2016 г.) Т.1.- М.: ООО «ТР-принт», 2016. С. 67-68.

## **О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ BALL AND BEAM КАК МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ**

**А.Я. Красинский, А.Н. Ильина**

Московский авиационный институт,  
факультет прикладной математики и физики.  
125993 Москва, Волоколамское шоссе, д.4

В работе демонстрируется метод стабилизации положений равновесия мехатронных систем с геометрическими связями на примере учебно-лабораторного стенда GBV 1005 Ball and Beam. С помощью уравнений в форме М.Ф. Шульгина для систем с избыточными координатами строится строгая нелинейная математическая модель. Несмотря на обязательное наличие по крайней мере одного нулевого корня характеристического уравнения, установлена асимптотическая устойчивость равновесий в этой системе. Коэффициенты линейного стабилизирующего управления находятся по методу Н.Н. Красовского. Показана возможность формирования управления по оценке фазового вектора, полученной по измерению только положения шара на желобе.

**Ключевые слова:** геометрические связи, избыточные координаты, уравнения М.Ф. Шульгина, устойчивость, стабилизация, положение равновесия.

### **Введение**

Учебно-лабораторный стенд Ball and Beam относится к одному из наиболее распространенных классов лабораторных установок, используемых для изучения в реальном времени динамики нелинейных управляемых объектов. Механическая компонента стенда GBV 1005 Ball and Beam (рис. 1) состоит из шара, перемещающегося в желобе под действием силы тяжести. Его положение управляется посредством изменения наклона желоба связанного с выходным колесом редуктора электропривода некоторым стержнем постоянной длины. Таким образом, на углы наклона желоба и поворота приводного колеса наложена нелинейная геометрическая связь, не позволяющая выразить один угол через другой. Непосредственное применение уравнений Лагранжа второго рода для описания динамики системы здесь оказывается невозможным, так как параметры, задающие конфигурацию системы, не являются независимыми.

В подавляющем большинстве работ [1-6], посвященных изучению динамики этой системы, при моделировании механической компоненты системы без всякого обоснования используется линеаризация сложной нелинейной геометрической связи, за счёт чего совершается переход к модели меньшей размерности, полученной для независимых координат. Поэтому используемые в таких работах математические модели являются нестрогими, что имеет принципиальное значение, особенно в задачах устойчивости и стабилизации [6-9]. Сравниваются [6] только типы законов управления и применяемые для их формирования методы, а не математические модели и корректность их применения. Отметим также, что во всех работах исследуется только одно положение равновесия из двух возможных.

В данной работе ставится цель построения строгой нелинейной математической модели системы GBV 1005 Ball and Beam, нахождение всех возможных положений равновесия и стабилизирующих законов управления (при условии выполнимости критерия управляемости) как линейных функций от координат фазового вектора. Проверяется возможность формирования управления по оценке фазового вектора, полученной по измерению только положения шара на желобе.

В данной работе на примере стенда GBV 1005 Ball and Beam решается практически важная задача – построение управления, стабилизирующего положение равновесия, при использовании минимального числа измерительных устройств. Предложенный метод построения системы управления при неполной информации о состоянии может быть использован для

других мехатронных систем с геометрическими связями (например, различных манипуляторов).

### Уравнения движения систем с геометрическими связями в форме М.Ф. Шульгина

В многочисленных актуальных технических задачах, в частности, управления многозвенными манипуляторами и другими мехатронными системами, целесообразно [7-11] задавать конфигурацию механической системы параметрами

$$q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m}, \quad (1)$$

взятыми в числе, превосходящем необходимое  $n$  – число степеней свободы системы. Тогда  $m$  из этих параметров называются *избыточными координатами*. Пусть соответствующие геометрические связи между параметрами  $q_1, \dots, q_{n+m}$  описываются  $m$  независимыми соотношениями

$$F_k(q_1, \dots, q_{n+m}) = 0, \quad k = \overline{1, m}; \quad \text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_{n+m})} = m. \quad (2)$$

Для удобства дальнейшего изложения, обозначим,  $r' = (q_1, \dots, q_n)$  – вектор независимых координат,  $s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$  – вектор зависимых координат,  $q' = (q_1, \dots, q_{n+m}) = (r', s')$  – вектор всех координат системы и  $F' = (F_1, \dots, F_m)$ .

При наличии геометрических связей (2) параметры (1), описывающие систему, не являются независимыми. Поэтому использование уравнений Лагранжа второго рода для описания динамики такой системы невозможно. В данной работе для построения строгой нелинейной математической модели системы Ball and Beam будем использовать уравнения движения в форме, предложенной М.Ф. Шульгиным [12]. Эти уравнения свободны от множителей связей и позволяют достаточно просто получить строгие математические модели для систем с геометрическими связями. Выбор именно такого способа моделирования обоснован проведенным анализом [7-10] различных форм уравнений движения систем с избыточными координатами.

Продифференцировав по времени уравнения связей (2), выразим скорости зависимых координат через независимые:

$$\dot{s} = - \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) \dot{r} = B(r, s) \dot{r}. \quad (3)$$

Тогда уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина [12] могут быть записаны в виде [7-10]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r^* + B'(q) \cdot \left( \frac{\partial L^*}{\partial s} - Q_s^* \right), \quad (4)$$

где  $L = T - \Pi$  – функция Лагранжа,  $Q_r, Q_s$  – непотенциальные силы, соответствующие координатам  $r$  и  $s$  соответственно. Символ (\*) означает, что зависимые скорости в выражениях были исключены с помощью соотношений (3).

*Замечание 1.* Система уравнений (4) может рассматриваться как частный случай уравнений движения неголономных систем с однородными связями в форме Воронца, в предположении интегрируемости кинематических связей (3). Таким образом, к исследованию динамики систем с избыточными координатами применимы все методы, разработанные для изучения динамики неголономных систем. С другой стороны, из-за отсутствия членов неголономности, уравнения (4) обладают своей особой структурой и особенностями, которые требуют дальнейшего изучения и использования.

*Замечание 2.* Для полного описания движения системы уравнения (4) следует рассматривать совместно с уравнениями связей (2). В полной математической модели мехатронной системы должна быть учтена также и динамика электропривода.

## Математическое моделирование системы Ball and Beam

Построим полную нелинейную математическую модель, описывающую динамику системы GVB 1005 Ball and Beam.

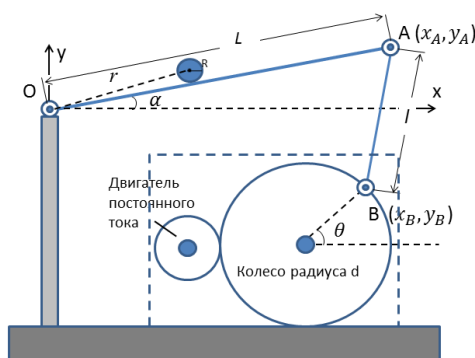


Рис. 1. Схема системы GVB 1005 Ball and Beam

Схема системы приведена на рис.1. Механическая компонента стенда состоит из шара радиуса  $R$ , перемещающегося в желобе под действием силы тяжести. Его положение управляется посредством изменения угла наклона  $\alpha$  желоба  $OA$  длины  $L$ , связанного с выходным колесом редуктора радиуса  $d$  электропривода некоторым стержнем  $AB$  постоянной длины  $l$ . Необходимо стабилизировать положение шара на желобе в некотором заданном положении  $0 < r_0 < L$ . Управление системой будем осуществлять за счёт дополнительного напряжения на якоре двигателя.

Таким образом, на угол наклона  $\alpha$  желоба и угол  $\theta$  поворота приводного колеса наложена геометрическая связь, выражаемая равенством [10]

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2. \quad (5)$$

Эта сложная нелинейная связь не позволяет выразить один угол через другой. Как уже было отмечено выше, в этом случае уравнения Лагранжа второго рода для динамики этой системы оказываются неприменимыми.

*Замечание 3.* В подавляющем большинстве работ [1-6], посвящённых изучению этой системы связь (5) заменялась безо всяких оснований уравнением  $\alpha \approx \frac{d}{L}\theta$  или даже  $\alpha = \frac{d}{L}\theta$  в предположении малых значений  $\alpha$ .

Положив  $\alpha = 0$  из (5) получим значения угла поворота колеса, соответствующие положениям равновесия. Геометрически возможны две различные конфигурации, представленные на рис. 2 и рис. 3. Условно назовём их нулевое и ненулевое положение равновесия.

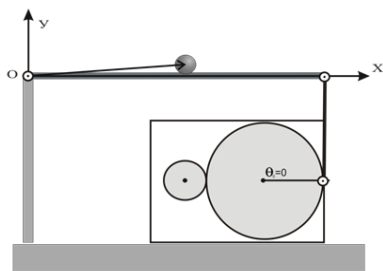


Рис. 2. Нулевое положение равновесия

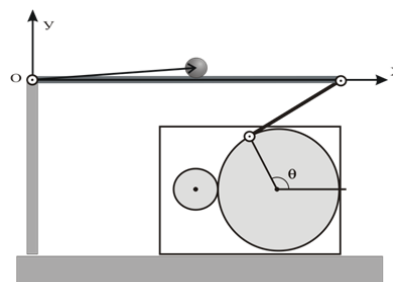


Рис. 3. Ненулевое положение равновесия



Нулевому положению равновесия соответствует значение  $\theta_0 = 0$ ; ненулевому положению равновесия –  $\theta_{1,2} = -2 \arcsin\left(\frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}\right) \pm \pi$ .

В качестве избыточной координаты при математическом моделировании динамики системы, как следует из уравнения связи (5), можно выбрать или угол  $\alpha$  или угол  $\theta$ . Динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением описывает уравнение Кирхгофа [13]:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_3 \frac{d\theta}{dt} = k_1 e_v, \quad e_b = k_3 \frac{d\theta}{dt}, \quad (6)$$

где  $e_v$  – напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя,  $e_b$  – напряжение противо-ЭДС,  $k_1$  – коэффициент преобразователя питания,  $k_3$  – постоянная двигателя,  $L_a$  – индуктивность обмотки якоря,  $R_a$  – его сопротивление.

В зависимости от выбора, полная нелинейная математическая модель системы GBV Ball and Beam будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^*}{\partial \theta} - B^I(\alpha, \theta) \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = Q_\theta^*; \\ L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_3 \dot{\theta} = k_1 e_v; \\ \dot{\alpha} = B^I(\alpha, \theta) \dot{\theta}; \end{cases} \quad (7)$$

если зависимой координатой выбран угол  $\alpha$  (вариант I) или

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{II*}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^{II*}}{\partial r} = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{II*}}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^{II*}}{\partial \alpha} = B^{II}(\alpha, \theta) \left( \frac{\partial L^{II*}}{\partial \theta} + Q_\theta^* \right); \\ L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_3 B^{II}(\alpha, \theta) \dot{\alpha} = k_1 e_v; \\ \dot{\theta} = B^{II}(\alpha, \theta) \dot{\alpha}; \end{cases} \quad (8)$$

если избыточной координатой считается угол  $\theta$  (вариант II). Верхний индекс (\*), как и ранее, обозначает, что в соответствующем выражении исключена зависимая скорость. Выражения для  $B^I(\alpha, \theta)$  и  $B^{II}(\alpha, \theta)$  получаются из продифференцированных по времени уравнений (5):

$$B^I(\alpha, \theta) = \frac{d}{L} \frac{(L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta)}{(d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha)}, \quad B^{II}(\alpha, \theta) = 1 / B^I(\alpha, \theta).$$

### Устойчивость и стабилизация положений равновесия системы Ball and Beam

Из систем (7) и (8) находятся соответствующие значения параметров в нулевом и ненулевом положениях равновесия. После этого в каждом случае записываются уравнения возмущённого движения. Отметим, что в зависимости от выбора зависимой координаты изменяется не только структура уравнений движения, но и некоторые компоненты фазовых векторов. В случае зависимой координаты  $\alpha$  обозначим:

$$\begin{cases} r = r_0 + x_1; \dot{r} = x_2; \\ \theta = \theta_i + x_3^I; \dot{\theta} = x_4^I; & x^I = (x_1, x_2, x_3^I, x_4^I, x_5, x_6^I)' \\ i_a = i_a^0 + x_5; \alpha = x_6^I; \end{cases}$$

В случае зависимой координаты  $\theta$ :

$$\begin{cases} r = r_0 + x_1; \dot{r} = x_2; \\ \dot{\alpha} = x_3^{II}; \dot{\alpha} = x_4^{II}; & x^{II} = (x_1, x_2, x_3^{II}, x_4^{II}, x_5, x_6^{II})'. \\ i_a = i_a^0 + x_5; \theta = \theta_i + x_6^{II}; \end{cases}$$

Приведём системы уравнений возмущённого движения к нормальному виду.

$$\dot{x}^v = H_i^v x^v + S u_i^v + X^{v(2)}, \quad (9)$$

где верхний индекс  $v$  соответствует выбранному варианту зависимой координаты (I или II), а нижний – положению равновесия ( $i = 0, 1$ ),  $S = (0, 0, 0, 0, s, 0)'$ ,  $u_i^v$  – управляющее воздействие, являющееся дополнительным напряжением на якоре двигателя,  $X^{v(2)}$  – нелинейные члены по координатам фазового вектора, начиная со второго порядка.

Далее, согласно теории критических случаев, применим линейную замену [14, 15]

$$x_6^v = B^v \cdot x_3^v + z^v \quad (10)$$

*Замечание 4.* В [7-10] в общем виде показано, что полученные после замены (10) уравнения возмущённого движения в общем случае содержат линейные по возмущениям координат члены, зависящие от нелинейных членов уравнений геометрических связей  $\frac{\partial B(\alpha, \theta)}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial B(\alpha, \theta)}{\partial \theta}$ . Поэтому в общем случае для получения линейного приближения уравнений возмущённого движения нельзя ограничиваться только линейными членами разложения уравнений (2). В случае системы GBV 1005 Ball and Beam в нулевом положении равновесия

$$\left( \frac{\partial B^v(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} \right)_0 = \left( \frac{\partial B^v(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right)_0 = 0,$$

но в ненулевом

$$\left( \frac{\partial B^v(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} \right)_1 \neq 0, \quad \left( \frac{\partial B^v(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right)_0 = 0.$$

Замена (10) позволяет выделить критические переменные, соответствующие обязательно присутствующим нулевым корням характеристического уравнения системы (9), причём их число не меньше числа геометрических связей [9]. Согласно теореме [9], при отрицательности действительных частей всех остальных корней, положение равновесия будет асимптотически устойчиво по всем переменным. За управляемую подсистему [14] выберем подсистему вида

$$\dot{w}^v = M_i^v w^v + N u_i^v, \quad (11)$$

не включающую уравнение связи и не содержащую критическую переменную. Здесь

$$w^v = (x_1, x_2, x_3^v, x_4^v, x_5) ', \quad N = (0, 0, 0, 0, s) '.$$

Для всех рассматриваемых подсистем вида (11) выполняется критерий управляемости [15], а значит, существует управление  $u_i^v = K_i^v w^v$ , стабилизирующее соответствующее положение равновесия. Коэффициенты управления определяются однозначно решением методом Н.Н. Красовского [15] соответствующей линейно-квадратичной задачи стабилизации.

Переходные процессы по координате  $x_1$  для разных положений равновесия приведены на рис. 4 и рис. 5.

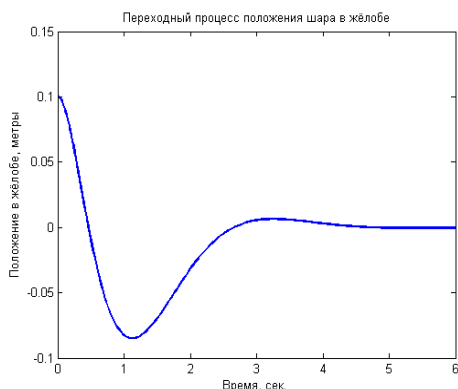


Рис. 4. Нулевое положение равновесия

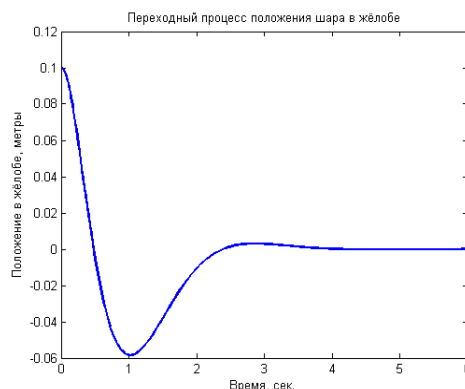


Рис. 5. Ненулевое положение равновесия

### Управление системой при неполной информации о состоянии

Пусть информация о состоянии системы поступает в виде сигнала

$$\sigma = Cw^v, \dim \sigma < n. \quad (12)$$

В случае системы Ball and Beam будем измерять только положение шара в жёлобе. Тогда  $C = (1, 0, 0, 0, 0)$ . Будем искать управление в виде  $u_i^v = K_i^v \hat{w}^v$ , где  $\hat{w}^v$  - вектор оценки фазового состояния по сигналу (12). Причём, должно выполняться условие  $\|\hat{w} - w\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Тогда системы асимптотической оценки фазового вектора систем (11) будут иметь вид [16]

$$\dot{\hat{w}}^v = M_i^v \hat{w}^v + L_i^v (C\hat{w}^v - \sigma) + Nu_i^v, \quad (13)$$

где  $\sigma = Cw^v$  - реально измеренный выход.

Наблюдаемость системы – свойство системы, показывающее, можно ли восстановить информацию о состоянии системы по выходу системы. В случае системы Ball and Beam условие наблюдаемости выполнено. Для однозначного определения коэффициентов матриц  $L_i^v$  соответствующих систем оценивания опять воспользуемся методом Н.Н. Красовского [15]. Решим дуальные задачи стабилизации для систем

$$\dot{\mu}^v = (M_i^v)' \mu^v + C' \kappa, \kappa = (L_i^v)' \mu^v, \quad (14)$$

$$\mu^v = \hat{w}^v - w^v.$$

Полностью система Ball and Beam в целом будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} \dot{w}^v = M_i^v w^v + Nu_i^v \\ \sigma = Cw^v, \\ \dot{\hat{w}}^v = M_i^v \hat{w}^v + L_i^v (C\hat{w}^v - \sigma) + Nu_i^v, \\ u_i^v = K_i^v \hat{w}^v. \end{cases} \quad (15)$$

### Заключение

В работе исследуется учебно-лабораторный стенд GBV 1005 Ball and Beam. Целью работы было нахождение законов управления, стабилизирующих все положения равновесия системы, в том числе и в предположении о неполной информации о состоянии системы (когда измеряется только положение шара в жёлобе).

Для решения этой задачи были построены две принципиально разные строгие нелинейные математические модели, описывающие динамику системы. Для описания динамики механической части системы использовались уравнения в форме М.Ф. Шульгина. Были обнаружены все возможные положения равновесия. В качестве управления системой использовалось дополнительное напряжение на якоре двигателя.

Були проведены оценки управляемости и наблюдаемости системы. Коэффициенты стабилизирующих управлений и систем оценивания были найдены по методу Н.Н. Красовского. По теореме [9] найденные управления обеспечивают асимптотическую устойчивость положений равновесия системы по всем координатам. Переходные процессы по координате  $x_1$  положения шара в жёлобе приведены на рис. 4 и 5.

Данная методика может быть применена к решению задач устойчивости и стабилизации других мехатронных систем с геометрическими связями.

### **Список литературы**

1. Yu W. Nonlinear PD regulation for Ball&Beam system // Int. Journal of Electrical Engineering Education. 2009. V. 46. №1. P. 59-73.
2. Yu W, Ortiz F. Stability analysis of PD regulation for ball and beam system // Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications Toronto, Canada, August 28-31, 2005.
3. Min-Sung Koo, Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim Adaptive nonlinear control of a Ball&Beam system using centrifugal force term // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2012. Vol. 8, no. 9. P. 5999-6009.
4. Keshmiri M., Jahromi A.F., Mohebbi A., Amoozgar M.H., Wen-Fang Xie. Modeling and control of Ball&Beam system using model based and non-model based control approaches // International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems. 2012. Vol. 5, no. 1. P. 14-35.
5. Rahmat M.F., Wahid H., Wahab N.A. Application of intelligent controller in a ball and beam control system// International journal on smart sensing and intelligent systems vol. 3, no. 1 March 2010. P. 45-60.
6. Aguilar-Ibanes C., Suarez-Castanon M.S., de Jesu's Rubio J. Stabilization of the Ball on the Beam System by Means of the Inverse Lyapunov Approach // Mathematical Problems in Engineering. 2012 Vol.2012 Article ID 810597, DOI: 10.1155/2012/810597
7. Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносков К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 28 под ред. проф. Ю.Г. Мартыненко. М.: Изд-во МГУ, 2012. С. 169-184.
8. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 29 под ред. проф. В.А. Самсонова. М.: Изд-во МГУ, 2015. С. 54-65.
9. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2013. № 3.
10. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Моделирование динамики стенда GBV 1005 BALL&Beam как управляемой механической системы с избыточной координатой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2014. № 1.
11. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
12. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Научные труды САГУ. – Ташкент. 1958 г.
13. С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
14. Ляпунов А.М. Избранные труды. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948.
15. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
16. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: УРСС, 2010.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЙ ПУТЕМ ПОСТРОЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**О.Э. Кривоносова, Д.Ю. Жиленко**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
НИИ механики.

119192 Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: olga@imec.msu.ru

На примере течения в сферическом слое, формирующегося при колебаниях скорости вращения одной из границ, демонстрируется способ определения структуры течения путем построения волновых поверхностей. Волновые поверхности в данном методе это поверхности постоянных мгновенных фаз, которые вычисляются в каждой точке течения по временному ряду скорости с использованием преобразования Гильберта.

Ключевые слова: волновые поверхности, преобразование Гильберта, сферический слой, инерционные волны

1. Интерес к течениям в сферических слоях связан в первую очередь с возможностью изучать течения во вращающейся системе со сферической геометрией, и то и другое присутствует в течениях в атмосферах и океанах планет. В последнее время повышается интерес к системам с неравномерным вращением, одним из способов моделирования которого является периодическая модуляция скорости вращения одной из границ. Основное внимание уделяется инерционным волнам, формирующимся в сферических слоях при больших величинах средней скорости вращения границ. Вместе с тем, формирование волновых структур, в том числе и отличных от инерционных волн, происходит при любых средних скоростях вращения и любых, отличных от нуля, амплитудах модуляции. Цель настоящей работы – разработка и применение метода, позволяющего рассматривать эволюцию волновых структур, от бегущих до инерционных волн, при увеличении средней скорости вращения и/или амплитуды модуляции. Метод основан на расчете мгновенных фаз колеблющейся границы  $\Psi_s(t)$  и азимутальной компоненты скорости в каждой точке слоя  $\Psi(t, r, \theta)$ . Мгновенное значение фазы  $\Psi(t)$  произвольного вещественного сигнала  $x(t)$  определяется как  $\Psi(t) = \text{arctg}(y(t)/x(t))$ , где  $y(t)$  ортогональное дополнение к  $x(t)$ , и вычисляется как преобразование Гильберта исходного сигнала  $x(t)$ . В нашем случае  $x(t)$  это временной ряд азимутальной компоненты скорости.

2. Изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом зазоре описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности, с условиями прилипания и непротекания на границах. Рассматриваются нестационарные осесимметричные течения. Для расчета течения использовался вычислительный алгоритм с консервативной конечно-разностной схемой дискретизации по пространству и полуявной схемой 3-ого порядка точности для интегрирования по времени [1]. Скорость вращения одной из границ изменялась по закону  $\Omega_k(t) = \Omega_0 + a_k \sin(2\pi f_k t)$ . Здесь  $a_k$  и  $f_k$  - амплитуда и частота модуляции. В качестве безразмерных параметров, учитывающих амплитуду и частоту модуляции, выбраны относительная толщина динамического пограничного слоя  $\delta/r_1 = 1/r_1 \sqrt{2\nu/2\pi f_1}$  и максимальный угол отклонения колеблющейся границы относительно среднего движения  $\gamma = a_k/2\pi f_k$  [2].

В качестве тестовых были исследованы течения, формирующиеся при колебаниях одной из границ относительно состояния покоя. В этом случае при небольших амплитудах модуляции поверхности равных фаз в меридиональной плоскости (Рис.1б) представляют собой концентрические окружности с периодически повторяющимися значениями, что соответствует затухающей бегущей сферической волне. Установлено, что длина такой сферической волны совпадает с аналогичной величиной, полученной аналитически

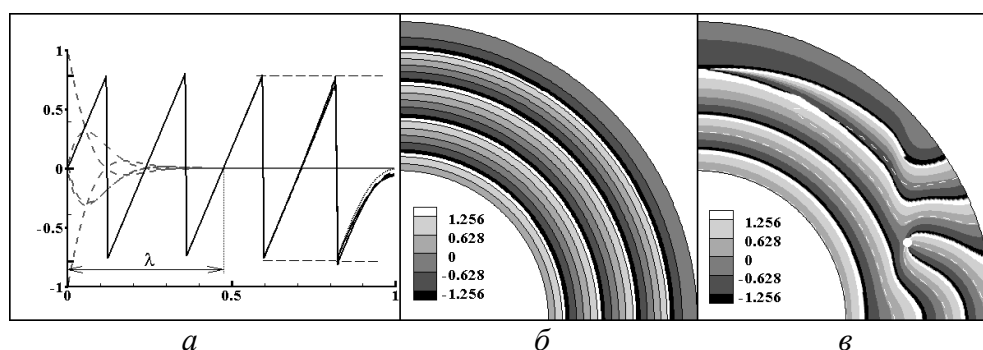


Рис. 1. Волны, вызванные колебаниями внутренней сферы относительно состояния покоя. *a* – зависимость  $\Delta\Psi$  (сплошные линии) и нормированной азимутальной компоненты скорости (пунктирные линии) от безразмерного радиуса в разные моменты времени; волновые поверхности: *б* – затухающей бегущей волны, *в* – “стоячей волны”.

Шлихтингом для одномерной волны, вызванной колебаниями плоской стенки. Причем  $\Delta\Psi(t, r, \theta) = \Psi_s(t) - \Psi(t, r, \theta)$  не зависит от времени (Рис.1*а*). На внутренней границе  $\Delta\Psi=0$  и линейно возрастает вдоль радиуса. Скачки  $\Delta\Psi$  на величину  $\pi$  происходят два раза за период модуляции в тех точках, в которых азимутальная скорость в моменты наибольшего отклонения сферы равна нулю (Рис.1*а*). С увеличением амплитуды модуляции течение усложняется (Рис.1*в*), появляются узлы (белая точка на Рис.1*в*), характерные для стоячих волн, и скачки фазы вдоль неподвижной границы (Рис.1*в*). Установившийся режим течения можно определить как режим вынужденных колебаний на частоте вынуждающей силы.

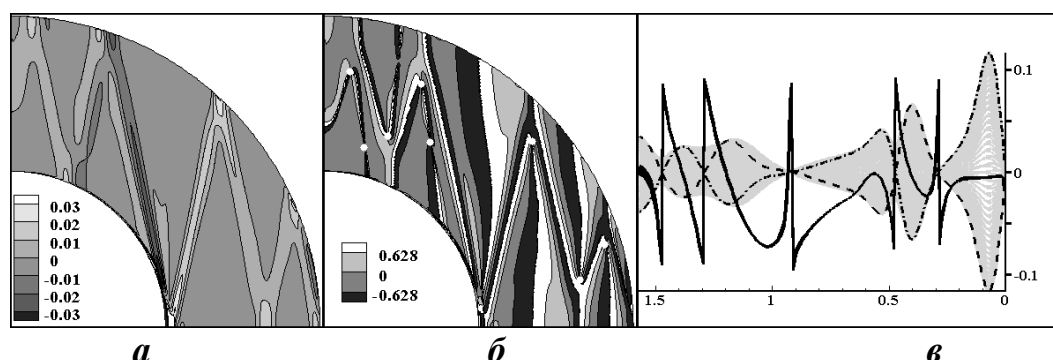


Рис.2. Инерционные волны при  $Re = 10^5$ . *a* и *б* – контуры азимутальной скорости и  $\Delta\Psi$  в меридиональной плоскости течения (*a* – при нулевом отклонении сферы в момент разгона), *в* – зависимость от меридионального угла по направлению от экватора к полюсу вблизи внутренней границы в разные моменты времени нормированной волновой составляющей азимутальной скорости (пунктирные линии – в моменты наибольшего отклонения сферы, серым цветом показана область изменения за период) и разности мгновенных фаз  $\Delta\Psi$  (черные линии при наибольших и нулевых отклонениях сферы).

При большой средней скорости вращения границ  $Re > 10^4$  модуляция скорости вращения одной из них приводит к появлению инерционных волн (рис. 2), концентрирующихся вокруг конических поверхностей, которые наклонены к оси вращения под углом, зависящим только от отношения частоты модуляции к средней скорости вращения сферического слоя. Такие волны характеризуются пересечением волновых поверхностей, наличием узлов (белые точки на рис. 2*б*), являющихся результатом взаимодействия бегущих и отраженных волн, и немонотонным изменением разности фаз вдоль сферических границ. Рассмотрим, каким образом меняется волновая структура при средней скорости вращения сферических границ  $10^4 > Re > 200$  в случае равных относительных амплитуд и частот модуляции (рис. 3). При малых  $Re$  (Рис. 3*а*) вблизи внутренней сферы зависимость величины разности фаз от меридионального угла монотонна, в то время как вблизи внешней сферы наблюдаются скачки (черно-белые

переходы на рисунке рис. 3а). С увеличением  $Re$  появляются узлы, скачки разности фаз приближаются к поверхности внутренней сферы (рис. 3б), в волновой структуре появляется характерный для инерционных волн угол наклона к оси вращения (рис. 3в).

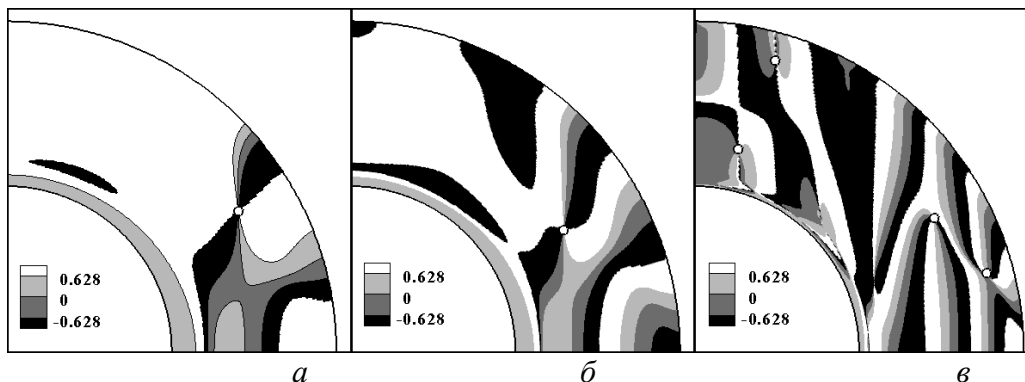


Рис. 3 Поверхности  $\Delta\Psi$ :  $a - Re_1 = 202.5$ ,  $б - Re_1 = 405$ ,  $в - Re_1 = 4050$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 14-08-00204 и 16-05-00004.

### Список литературы

1. Nikitin N. Finite difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys., 2006. Т. 217, №2, С. 759-782.
2. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Определение волновой структуры замкнутых течений с неравномерным вращением границ методом мгновенной разности фаз // Докл. РАН. 2015. Т. 464, №4, С. 417-420.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРОВОЙ КОЛОННЫ**

**Аскар К. Кудайбергенов**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: as5kar@mail.ru

В данной работе разрабатывается нелинейная математическая модель пространственных поперечных колебаний буровой колонны, моделируемой в виде упругого стержня. Стержень подвергается действию продольной сжимающей нагрузки и крутящего момента. Для получения математической модели используются основные соотношения нелинейной теории упругости В.В.Новожилова и применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Находится численное решение модели и проводится визуализация результатов.

Ключевые слова: буровая колонна, нелинейная математическая модель, поперечные колебания, стержень, принцип Остроградского-Гамильтона.

### **Введение**

Буровые колонны, применяемые для проходки нефтяных и газовых скважин, состоят из буровых труб, соединенных между собой буровыми замками. Общая длина объединенных буровых труб может составлять от нескольких десятков до нескольких сотен метров при неглубинном бурении. При бурении глубоких скважин длина буровой колонны может достигать нескольких километров. Если предполагать, что буровая колонна представляет собой единую конструкцию, то ее длина оказывается значительно большей, чем ее поперечные размеры. Поэтому в данной работе, как и в большинстве работ, посвященных проблемам колебаний при бурении скважин, буровая колонна моделируется как удлиненный изгибающийся стержень, подверженный действию внешних нагрузок.

В [1] было показано, что в случае плоского изгиба нелинейная математическая модель дает меньшие амплитудные колебания стержня, чем линейная модель. При увеличении длины буровой колонны или частоты вращения линейные поперечные колебания неограниченно возрастали, тогда как при использовании нелинейной модели наблюдался устойчивый колебательный процесс.

Исследованию взаимодействия нелинейных плоских изгибных, продольных и крутильных волн в стержнях были посвящены работы [2, 3]. В [2] также рассматривалось отдельно уравнение нелинейных изгибных колебаний закрученного стержня, решение которого искалось в классе стационарных волн.

Целью настоящей работы является разработка нелинейной математической модели пространственных поперечных колебаний буровой колонны, возникающих при неглубинном бурении.

### **Разработка нелинейной математической модели**

При построении математической модели движения буровой колонны неглубинного бурения будем основываться на нелинейной теории упругости В.В.Новожилова [4]. Согласно данной теории компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  для общего трехмерного случая деформирования выражаются через проекции перемещений  $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$  нелинейным образом.

Буровая колонна представляется как изотропный упругий вращающийся стержень симметричного поперечного сечения длиной  $l$ .

Вводятся следующие зависимости:



$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \\
 e_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad e_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \\
 \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$  определяют относительные удлинения параллельно осям  $x, y, z$ , соответственно;  $e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$  - сдвиги;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - углы поворота относительно соответствующих осей.

Принимается вторая система упрощений по В.В. Новожилову, в соответствии с которой удлинения, сдвиги и углы поворота принимаются бесконечно малыми, а перемещения не ограничиваются.

В отличие от [1, 5], в работе рассматривается случай, когда поперечные колебания стержня происходят в двух плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ . Тогда компоненты перемещений стержня задаются в виде:

$$\begin{cases}
 U(x, y, z, t) = u(z, t), \\
 V(x, y, z, t) = v(z, t), \\
 W(x, y, z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} x - \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} y,
 \end{cases} \tag{2}$$

где  $u(z, t), v(z, t)$  определяют перемещения центра изгиба поперечного сечения стержня вдоль осей  $x, y$  вследствие изгиба.

Выражая компоненты деформаций через относительные удлинения, сдвиги и углы поворота с учетом (2), находим выражение для упругого потенциала  $\Phi$  через перемещения

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu} (u_{zz}^2 x^2 + 2u_{zz}v_{zz}xy + v_{zz}^2 y^2 - u_z^2 v_z^2) - \frac{G}{2(1-2\nu)} (u_z^4 + v_z^4 - 2(u_{zz}x + v_{zz}y) \times \\
 &\times (u_z^2 + v_z^2) + 3u_z^2 v_z^2) + 2Gu_z^2 v_z^2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль сдвига,  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Через найденный потенциал  $\Phi$  определяется потенциальная энергия стержня:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu} \int_0^l (u_{zz}^2 I_y + 2u_{zz}v_{zz}I_{xy} + v_{zz}^2 I_x - u_z^2 v_z^2 F) dz + \frac{GF}{2(1-2\nu)} \int_0^l (u_z^4 + v_z^4 + \\
 &+ 3u_z^2 v_z^2) dz + 2GF \int_0^l u_z^2 v_z^2 dz.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $I_x, I_y$  - осевые моменты инерции,  $I_{xy}$  - центробежный момент инерции.

Выражение для кинетической энергии стержня, учитывающей вращение бурильной колонны, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l [u_t^2 F + v_t^2 F + u_{zt}^2 I_y + 2u_{zt}v_{zt}I_{xy} + v_{zt}^2 I_x + \omega^2 (I_y + I_x) + \omega^2 F (u^2 + v^2) + \\
 &+ 2u_t \omega v - 2v_t \omega u F] dz,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\rho$  - плотность материала, из которого изготовлена бурильная колонна,  $F$  - площадь поперечного сечения стержня,  $\omega$  - угловая скорость вращения стержня.

Чтобы получить уравнения колебаний бурильной колонны в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ , применяем вариационный принцип Остроградского-Гамильтона, согласно которому

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U_0 + \Pi) dt = 0, \quad (6)$$

где  $\Pi$  - потенциал внешних сил, учитывающий действие продольной нагрузки  $N(z, t)$  и крутящего момента  $M(z, t)$ .

Принимаем, что координатные оси  $x$  и  $y$  являются осями симметрии буровой колонны. Тогда относительно этих осей центробежный момент инерции равен нулю,  $I_{xy} = 0$ . Это означает, что в выражениях для энергий (4)-(5) мы можем пренебречь слагаемыми, содержащими влияние центробежного момента. Кроме того, т.к. бурильная колонна рассматривается как вращающийся стержень симметричного поперечного сечения, то  $I_x = I_y = I$ .

Тогда, применяя вариационный принцип Остроградского-Гамильтона и проводя необходимые преобразования, получаем следующую нелинейную математическую модель поперечных колебаний бурильной колонны с учетом продольного сжатия и крутящего момента:

$$\begin{aligned} & \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M(z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{EF(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{EF}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 - \rho F \omega^2 u + 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ & \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{EF(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{EF}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 - \rho F \omega^2 v - 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимается шарнирное закрепление стержня по концам, которое соответствует следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(z, t) = v(z, t) = 0 \quad (z = 0, z = l) \\ EI \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = EI \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (z = 0, z = l). \end{aligned} \quad (8)$$

Опуская слагаемые, несущие в себе геометрическую нелинейность в математической модели (7), мы приходим к ее линейной модели, полученной и изученной в [6].

### **Численные результаты**

Ввиду того, что прямое интегрирование уравнений движения (7) крайне затруднительно, методом Бубнова-Галеркина задача о поперечных колебаниях бурильной колонны сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой далее находится численно с применением метода с переключением жесткости [5].

Чтобы удовлетворить всем условиям метода Бубнова-Галеркина, компоненты вектора перемещений  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  выражаются в виде:

$$\begin{aligned} u(z, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \\ v(z, t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассматриваются случаи одномодового приближения решения ( $n=1$ ) и двухмодового приближения ( $n=2$ ).

Полагаем, что действие от продольной нагрузки и крутящего момента равномерно распределяется по всей длине штанги, т.е.  $N(z, t) = N$ ,  $M(z, t) = M$ .

Получены графики поперечных колебаний стальной бурильной колонны с внешним диаметром  $D=0.2\text{ м}$ , внутренним диаметром  $d=0.12\text{ м}$  и следующими значениями остальных параметров:  $F=2.01 \times 10^{-2}\text{ м}^2$ ,  $I=6.84 \times 10^{-5}\text{ м}^4$ ,  $N=2.2 \times 10^3\text{ Н}$ .

Рис. 1,2 показывают результаты, полученные при рассмотрении одномодового приближения решения по методу Бубнова-Галеркина, который дает затухающий колебательный процесс. Однако характер поперечных колебаний стержня сильно меняется при учете второй моды колебаний. Если в начальный промежуток времени колебания являются затухающими, то при дальнейшем непрерывном процессе бурения они бесконечно возрастают с большой интенсивностью (Рис.3) и наблюдается расхождение поперечных колебаний в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ , что обуславливается действием крутящего момента (Рис.4).

Таким образом, в отличие от [7], была подтверждена необходимость учета второй моды в разложении метода Бубнова-Галеркина для получения достоверной картины возникающих поперечных колебаний бурильной колонны.

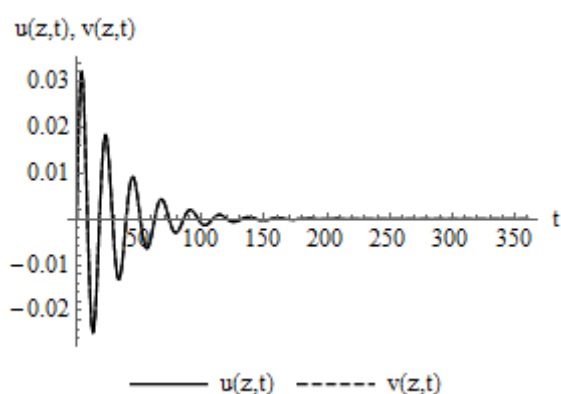


Рис. 1. Поперечные колебания бурильной колонны при  $\omega = 0.033\text{ рад/с}$ ,  $M = 5 \times 10^3\text{ Нм}$ ,  $t = 360\text{ с}$  (одномодовое приближение)

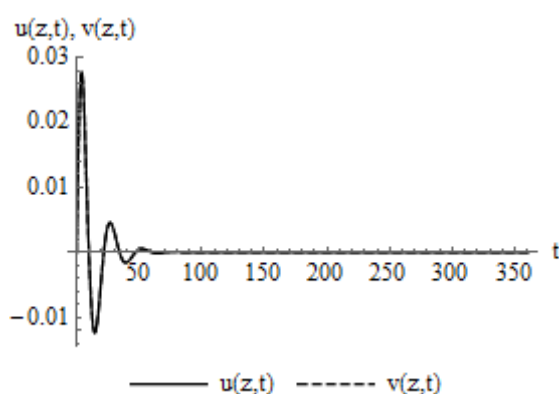


Рис. 2. Поперечные колебания бурильной колонны при  $\omega = 0.083\text{ рад/с}$ ,  $M = 5 \times 10^3\text{ Нм}$ ,  $t = 360\text{ с}$  (одномодовое приближение)

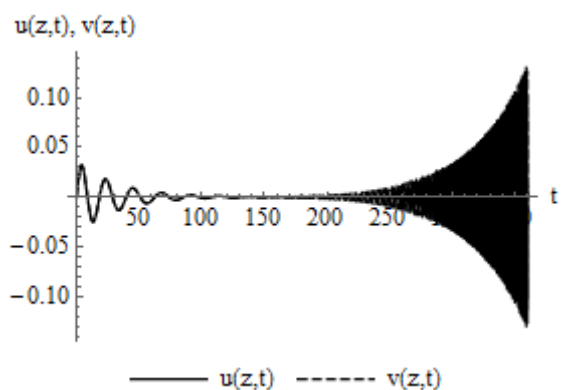


Рис. 3. Поперечные колебания бурильной колонны при  $\omega = 0.033\text{ рад/с}$ ,  $M = 5 \times 10^3\text{ Нм}$ ,  $t = 360\text{ с}$  (двухмодовое приближение)

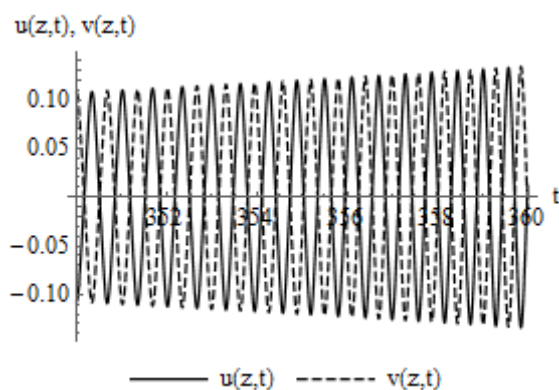


Рис. 4. Поперечные колебания бурильной колонны при  $\omega = 0.033\text{ рад/с}$ ,  $M = 5 \times 10^3\text{ Нм}$  за промежуток времени  $t = 350 - 360\text{ с}$  (двухмодовое приближение)

### Заключение

Основываясь на нелинейной теории упругости В.В. Новожилова и использовании вариационного метода Остроградского-Гамильтона, была разработана новая нелинейная математическая модель поперечных колебаний бурильной колонны в двух плоскостях под действи-

ем продольной силы и крутящего момента. Учет в модели геометрической нелинейности позволит получать более точные результаты и исследовать колебательные процессы буровых колонн на новом качественном и количественном уровне. Проведенные численные расчеты показали важность учета большего числа мод при изучении динамики буровых колонн как упругих стержней методом Бубнова-Галеркина.

Данная работа была выполнена в рамках проекта ГФ4 №311 МОН РК.

### **Список литературы**

1. Khajiyeva L.A., Kudaibergenov A.K. Modeling of nonlinear dynamics of drill strings in a supersonic air flow // Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling (KAM 2015). Advances in Intelligent Systems Research. 2015. Vol.80. P. 163-167.
2. В.И. Ерофеев. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестник науч.-техн. развития. 2012. №5 (57). С. 3-18.
3. В.И. Ерофеев, А.С. Зинченко. Распространение нелинейных изгибных и продольно-изгибных волн в упругом стержне // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2012. №5 (2). С. 81-83.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - М.- Л.: ОГИЗ, 1948.
5. Кудайбергенов А.К., Кудайбергенов Аск.К. Сравнительный анализ численных методов при моделировании нелинейной динамики буровых штанг // Известия НАН РК, серия физ.-мат. 2015. №3 (301). С. 37-42.
6. Gulyayev V.I., Borshch O.I., Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petroleum Science and Engineering. 2011. Vol. 78. P. 759–764.
7. Kudaibergenov Askar K., Kudaibergenov Askat K. Modelling of coupled nonlinear axial and lateral vibrations of drill strings // Int. J. Math. Phys. 2015. Vol.6. No.2. P. 27-35.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН

**Асгат К. Кудайбергенов**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: [ask7hat@mail.ru](mailto:ask7hat@mail.ru)

В работе исследуется устойчивость нелинейных колебаний элемента бурильной колонны, моделируемой в виде круговой цилиндрической оболочки, под влиянием переменной во времени осевой сжимающей нагрузки и давления сверхзвукового потока газа. Дискретизация нелинейной модели оболочки, осложненной геометрической нелинейностью самой системы и нелинейным воздействием потока газа, проводится методом Бубнова-Галеркина. Для определения границ зон динамической неустойчивости задается малая вариация и применяется метод гармонического баланса.

Ключевые слова: бурильная колонна, нелинейная модель, цилиндрическая оболочка, устойчивость, поток газа.

### Введение

На успешный процесс бурения нефтяных и газовых скважин влияет множество факторов. Это и качественная система инженерно-технического обслуживания бурильных работ, и влияние факторов окружающей среды, таких как сверхзвуковой поток газа, движение промысловочной жидкости, трение о стенки скважины; и возникающие непосредственно в ходе бурения опасные колебания бурильной колонны, являющиеся высоко нелинейными по своей природе [1].

В связи с активным освоением залежей нефти и газа важно обеспечить безопасную и надежную работу бурильных установок, что зависит во многом от проведения исследований по устойчивости колебаний бурильных колонн.

В данной работе изучается круговая цилиндрическая оболочка, форма которой наиболее точно отражает упругую модель элемента бурильной колонны небольшой длины. При выпучивании в оболочках возникают не только напряжения изгиба, но и дополнительные напряжения в срединной поверхности [2]. Это свойство качественно отличает поведение оболочек при потере устойчивости от поведения стержней и пластин.

### Нелинейная математическая модель

В основе математической модели цилиндрической оболочки лежат гипотезы Кирхгофа-Лява [3]. Их использование позволяет перейти от трехмерной задачи деформирования оболочки к двумерной задаче. Изучение поведения элемента оболочки тем самым сводится к изучению деформаций ее срединной поверхности. Координаты  $x$  и  $y$ , откладываемые вдоль образующей и по направлению окружности оболочки, определяют геометрическое положение точек срединной поверхности.

В качестве исходных уравнений при исследовании устойчивости бурильной колонны, рассматриваются нелинейные уравнения типа Кармана:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $D$  - цилиндрическая жесткость,  $h$  - толщина стенок оболочки,  $w$  - поперечный прогиб оболочки,  $R$  - радиус оболочки,  $\Phi$  - функция напряжений в срединной поверхности,  $\rho$  - плотность материала оболочки;  $E$  - модуль Юнга,  $q$  - интенсивность распределенных нагрузок:

$$q = -h \left( P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \Delta p, \quad (3)$$

где  $P$  - продольная сжимающая нагрузка,  $S = \frac{M}{2\pi R^2 h}$  - касательная нагрузка от скручивающего момента  $M$ ,  $\Delta p$  - приращение давления сверхзвукового потока газа.

Система осложняется геометрической нелинейностью от операторов  $L(w, \Phi)$  и  $L(w, w)$ , имеющих вид

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad (5)$$

а также нелинейной зависимостью между давлением и скоростью потока газа [4]:

$$\Delta p = -A \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\kappa + 1)h}{\kappa p_\infty} A^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{(\kappa + 1)h^2}{12\kappa^2 p_\infty^2} A^3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3, \quad (6)$$

где  $P_\infty$  - давление невозмущенного газа,  $\bar{M}$  - число Маха,  $A = \frac{\bar{M}\kappa P_\infty}{h}$  - приведенное число

Маха,  $\kappa$  - показатель политропы.

Граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению оболочки по концам, задаются следующим образом:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, x = l). \quad (7)$$

Решение бигармонического уравнения для функции напряжений  $\Phi$  (2) находится путем перехода к функциям комплексного переменного. При этом приближенное выражение для поперечного прогиба  $w$  задается как в работе [5], где авторами проводился анализ устойчивости бурильной колонны как оболочки на основе модели, не учитывающей нелинейность от операторов (4)-(5):

$$w(x, y, t) = f(t) \left( \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \right) \sin \frac{y}{R}, \quad (8)$$

которое полностью удовлетворяет граничным условиям (7).

Предполагается также, что продольная сжимающая нагрузка  $P$  переменна во времени и изменяется по закону:

$$P = P_0 + P_1 \cos \tilde{\Omega} t, \quad (9)$$

где  $P_0$  и  $P_1$  отвечают за вклад постоянной и переменной во времени составляющих,  $\tilde{\Omega}$  - частота внешнего воздействия.

Применяя метод Бубнова-Галеркина, задача сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению типа Матье при требовании ортогональности базисной функции в выражении (8):

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + (1 + \beta \cos \Omega \tau) f(\tau) + \alpha f(\tau)^3 = 0, \quad (10)$$

где  $\tau = t \cdot \omega_0$  - безразмерное время,  $\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0}$ ,  $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\omega_0^2}$ ,  $\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ ,  $\beta_2 = -\frac{5P_1\pi^3 R}{2l}$ .

$$\beta_1 = -\frac{5P_0\pi^3 R}{2l} + \frac{El\pi^5 R^3 \left( \frac{17}{2} l^4 + 20l^2 \pi^2 R^2 + 16\pi^4 R^4 \right)}{\left( l^4 + 5l^2 \pi^2 R^2 + 4\pi^4 R^4 \right)^2} + \frac{D\pi \left( l^4 + 5l^2 \pi^2 R^2 + \frac{17}{2} \pi^4 R^4 \right)}{hl^3 R^3},$$

$\omega_0^2$ ,  $\tilde{\alpha}$  включают влияние осевой нагрузки, газового потока и геометрических параметров оболочки.

### Области неустойчивости основного резонанса

Одним из методов исследования устойчивости динамических систем, широко используемым в литературе (см. [6, 7]), является рассмотрение малого отклонения  $\delta f$  от равновесного состояния системы, что идентично устойчивости по Ляпунову:

$$f(\tau) = f_0(\tau) + \delta f, \quad (11)$$

которое представимо в виде

$$\delta f = e^{\eta\tau} \chi(\tau), \quad (12)$$

где  $\eta$  - характеристический показатель, от которого зависит характер поведения величины  $\delta f$  во времени;  $\chi(\tau)$  - периодическая функция времени с периодом, равным  $\frac{\pi}{\Omega}$  или  $\frac{2\pi}{\Omega}$ .

Для функции  $\chi(\tau)$  справедливо разложение в ряд Фурье с неопределенными коэффициентами:

$$\chi(\tau) = \sum_n a_n \cos(n\Omega\tau - \psi_n), \quad (13)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \infty \quad \text{или} \quad n = 0, 2, 4, \dots, \infty.$$

Тем самым, если характеристический показатель  $\eta$  имеет отрицательную действительную часть, то решение (12) затухает. В случае, когда действительная часть характеристического показателя положительна, соответствующее решение  $\delta f$  неограниченно растет с экспоненциальной скоростью. Когда же действительная часть  $\eta$  равна нулю, находится решение на границе областей устойчивости и неустойчивости, которое носит периодический характер.

Рассматривая случай резонанса по основной частоте

$$f_0 = r_1 \cos(\Omega\tau - \varphi_1) \quad (14)$$

и подставляя (11) в (10), приходим к следующему разрешающему уравнению в вариациях типа Хилла:

$$\frac{d^2 \delta f}{d\tau^2} + (\theta_0 + \theta_{1c} \cos \Omega\tau + \theta_{2s} \sin 2\Omega\tau + \theta_{2c} \cos 2\Omega\tau) \delta f = 0, \quad (15)$$

$$\text{где } \theta_0 = 1 + \frac{3}{2}\alpha r_1^2, \quad \theta_{1c} = \beta, \quad \theta_{2s} = \frac{3}{2}\alpha r_1^2 \sin 2\varphi_1, \quad \theta_{2c} = \frac{3}{2}\alpha r_1^2 \cos 2\varphi_1.$$

Ограничимся решениями для областей неустойчивости низкого порядка, так как они играют особенно важную роль во многих приложениях [6].

Первая область неустойчивости находится при  $\delta f = e^{\eta\tau} a_1 \cos(\Omega\tau - \psi_1)$ . Подстановка последнего в (15) и последующее применение метода гармонического баланса позволяет построить характеристический определитель в первом приближении вида

$$\Delta(\eta) = \begin{vmatrix} \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_{2c} & 2\eta\Omega + \frac{1}{2}\theta_{2s} \\ -2\eta\Omega + \frac{1}{2}\theta_{2s} & \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 - \frac{1}{2}\theta_{2c} \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

который при равенстве нулю характеристического показателя  $\eta$  определяет уравнение, описывающее границы первой области неустойчивости:

$$1 + A_1\Omega^2 + \Omega^4 + B_1(1 - \Omega^2)r_1^2 + C_1r_1^4 = 0, \quad (17)$$

$$\text{где } A_1 = -2, \quad B_1 = 3\alpha, \quad C_1 = \frac{27}{16}\alpha^2.$$

Так как в модели присутствует нелинейность от потока газа третьего порядка, то можно ожидать появления резонанса по третьей частоте. Поэтому целесообразно определить границы третьей области неустойчивости, для которой выражение для вариации  $\delta f$  задается как

$$\delta f = e^{\eta \tau} (a_1 \cos(\Omega \tau - \psi_1) + a_3 \cos(3\Omega \tau - \psi_3)). \quad (18)$$

Тогда построение соответствующего определителя четвертого порядка при  $\eta = 0$  дает следующее полиномиальное уравнение восьмой степени зависимости амплитуды колебаний от частоты, определяющее границы третьей области неустойчивости:

$$1 + A_1 \Omega^2 + A_2 \Omega^4 + A_3 \Omega^6 + A_4 \Omega^8 + (B_0 + B_1 \Omega^2 + B_2 \Omega^4 + B_3 \Omega^6) r_1^2 + (C_0 + C_1 \Omega^2 + C_2 \Omega^4) r_1^4 + (D_0 + D_1 \Omega^2) r_1^6 + E_1 r_1^8 = 0, \quad (19)$$

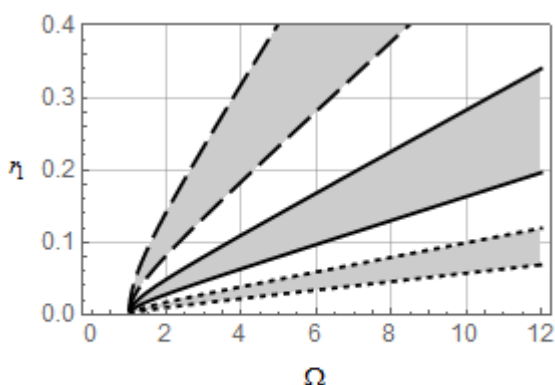
где  $A_1 = -20$ ,  $A_2 = 118$ ,  $A_3 = -180$ ,  $A_4 = 81$ ,  $B_0 = 6\alpha$ ,  $B_1 = -90\alpha$ ,  $B_2 = 354\alpha$ ,  $B_3 = -270\alpha$ ,  $C_0 = \frac{189}{16}\alpha^2$ ,  $C_1 = -\frac{909}{8}\alpha^2$ ,  $C_2 = \frac{3357}{16}\alpha^2$ ,  $D_0 = \frac{135}{16}\alpha^3$ ,  $D_1 = -\frac{567}{16}\alpha^3$ ,  $E_1 = \frac{405}{256}\alpha^4$ .

### Результаты численного анализа устойчивости

Анализ влияния различных значений длины и радиуса оболочки с учетом геометрической нелинейности системы и газового потока на устойчивость нелинейных колебаний элемента буровой колонны проводится на основе уравнений (17), (19).

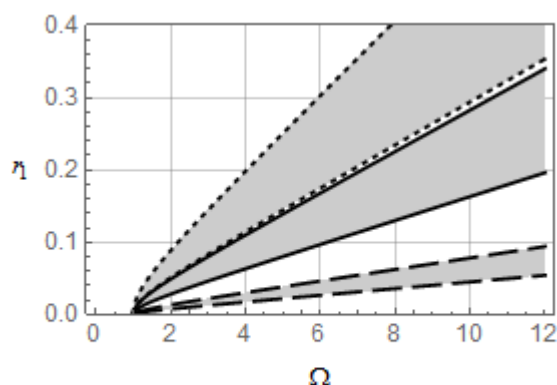
Значения параметров системы принимаются следующими:  $h = 0.01 \text{ м}$ ,  $M = 10^4 \text{ Нм}$ ,  $p_\infty = 1.013 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$ ,  $\kappa = 1.4$ ,  $\bar{M} = 2.5$ ,  $P_0 = 2.1 \times 10^6 \text{ Н}$ ,  $P_t = 0.1 \times 10^6 \text{ Н}$ , материал – сталь.

На рис. 1, 3 показано, что смещение характеристических кривых в сторону больших частот с изменением длины оболочки при постоянном радиусе  $R = 0.15 \text{ м}$  свойственно как первой, так и третьей областям неустойчивости. Однако в случае третьей области неустойчивости наблюдается расширение неустойчивых зон при увеличении длины оболочки. Варьирование значений радиуса оболочки при  $l = 2.5 \text{ м}$  дает, между тем, обратные результаты (рис. 2, 4). Здесь характеристические кривые начинают отклоняться в сторону более высоких частот по мере уменьшения радиуса оболочки.



—  $l=1\text{м}$  —  $l=2.5\text{м}$  - - -  $l=5\text{м}$

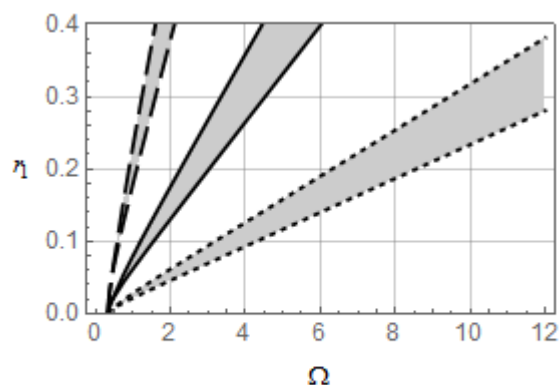
Рис. 1. Первая область неустойчивости при различных значениях длины оболочки



—  $R=0.08\text{м}$  —  $R=0.15\text{м}$  - - -  $R=0.19\text{м}$

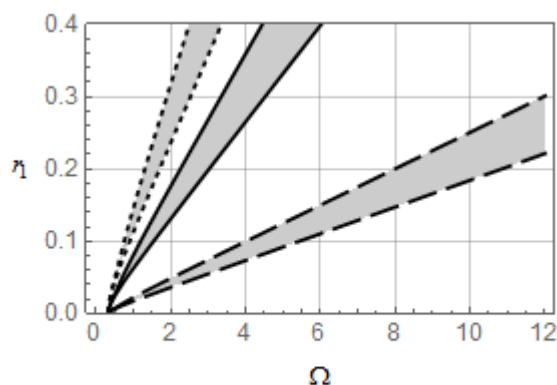
Рис. 2. Первая область неустойчивости при различных значениях радиуса оболочки





— —  $l=1m$  — — —  $l=2.5m$  ······  $l=5m$

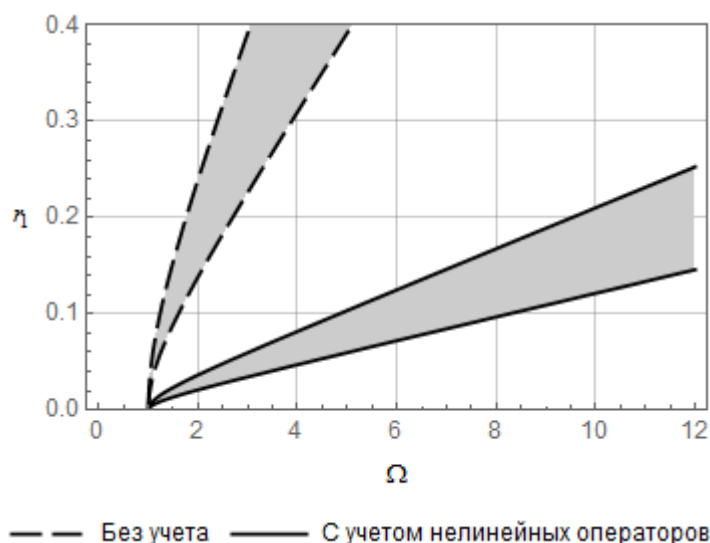
Рис. 3. Третья область неустойчивости при различных значениях длины оболочки



— —  $R=0.08m$  — — —  $R=0.15m$  ······  $R=0.19m$

Рис. 4. Третья область неустойчивости при различных значениях радиуса оболочки

Сравнение с результатами работы [5] показывает важность учета в модели нелинейности от операторов  $L(w, \Phi)$  и  $L(w, w)$ , что подтверждается на рис. 5. Учет геометрической нелинейности от данных операторов показывает, что переход к неустойчивому состоянию может наблюдаться при меньших амплитудах колебаний. Полученные результаты исследования свидетельствуют о том, что нелинейность модели вносит существенные поправки в результаты анализа устойчивости колебаний буровых колонн в сравнении с линейными моделями.



— — Без учета — — — С учетом нелинейных операторов

Рис. 5. Первая область неустойчивости при значениях параметров:  $l = 3m, R = 0.15m$ , материал – сталь

### Заключение

Устойчивость нелинейных колебаний элемента буровой колонны в виде круговой цилиндрической оболочки была исследована для случая основного резонанса. Были определены границы первой и, ввиду присутствия геометрической нелинейности, третьей областей неустойчивости. При увеличении радиуса наблюдалась обратная картина изменению длины оболочки с уводом ветвей характеристических кривых в зону малых частот. Была показана важность учета нелинейных операторов в модели, для которых характерны смещение областей неустойчивости в сторону более высоких частот и наступление основного резонанса при меньших амплитудах колебаний.

Работа была выполнена в рамках проекта ГФ4 №311 МОН РК.

### **Список литературы**

1. Al-Hiddabi S.A., Samanta B., Seibi A. Non-linear control of torsional and bending vibrations of oilwell drillstrings // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 265. P. 401-415.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
4. Lelya Khajiyeva, Askat Kudaibergenov. Analysis of nonlinear vibrations of a cylindrical shell in a supersonic gas flow // J. Applied Mechanics and Materials. 2015. Vols. 799-800. P. 660-664.
5. Kudaibergenov A., Kudaibergenov A., Khajiyeva L. Stability analysis of drill rods as shells in the gas stream // J. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 665. P. 593-596.
6. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.
7. Szemplinska - Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronomous non-linear systems with one degree of freedom // Int. Journal of Non-Linear Mechanics. 1968. Vol. 3. P. 17-30.

## **ДИНАМИКА МАШИНЫ С ЛИНЕЙНО-ЗАВИСИМОЙ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПОДВЕСКОЙ**

**И.Г. Куклина**

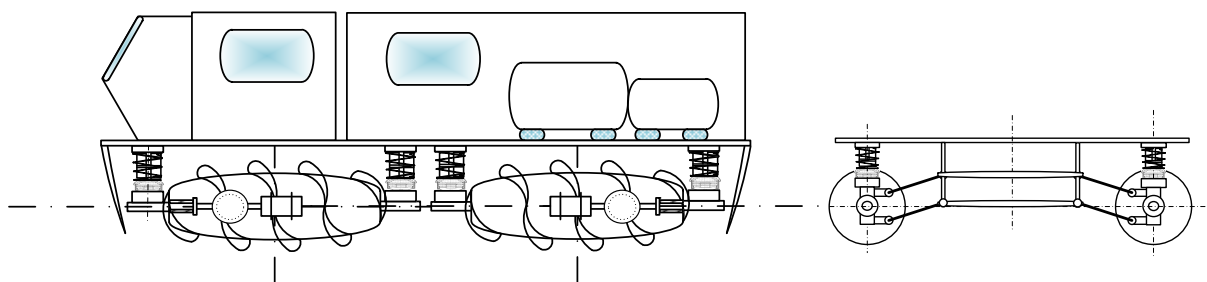
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
факультет инженерно-экологических систем и сооружений.  
603950 Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: [srec@nngasu.ru](mailto:srec@nngasu.ru)

Колебания и вибрации машин, оснащенных традиционными типами движителей, как правило, рассматриваются при применении классических методик, полученных еще Р.В. Ротенбергом [1]. Повышение комфортности работы операторов и пассажиров специальных машин, оснащенных длинными винтовыми роторами, а также снижение уровня колебаний кузова машины и ее агрегатов – задача, поставленная в данном исследовании. В статье предложена теория работы упруго-вязкой подвески, имеющей линейную зависимость срабатывания задней и передней подвесок, роторно-винтовой машины.

*Ключевые слова:* роторно-винтовая машина, шнекоход, колебания, вибрация, упруго-вязкая подвеска.

Роторно-винтовые машины (или шнекоходы; снегоболотоходы) чаще всего проектируются и изготавливаются с полужесткой или жесткой системой соединения движителя и кузова машины. Автором статьи на протяжении последних двадцати лет проводятся исследования по созданию и теоретическому описанию машин, оснащенных длинными винтовыми роторами, изучению колебаний этих машин, путей снижения виброн нагруженности кузова и элементов транспортных средств с роторами. За время изысканий предложены новые конструкции роторно-винтовых машин, оснащенных упруго-вязкой подвеской оригинальной конструкции, написаны статьи [2, 3], в которых изложена теория динамического нагружения кузова машины, обусловленного возникающим дисбалансом роторов, возникающим от контакта с опорной поверхностью и работой подшипниковых узлов.

Предложенные новые конструкции роторно-винтовых машин с уникальными конструкциями подвесок запатентованы [4, 5] и выполнены в модельных вариантах. Благодаря проводимым испытаниям на масштабных моделях проводилась доработка математических описаний колебательных процессов. С целью повышения пятна контакта движителей и опорной поверхности предложена конструкция машины с четырьмя движителями-роторами [4] (рис. 1), которая представляет собой доработанный вариант более раннего решения [5].



**Рис. 1. Вездеход, оснащенный четырьмя движителями-роторами  
и имеющий упруго-вязкую подвеску**

Уникальность расчетного процесса частотных характеристик колебаний машины отражается в линейной зависимости срабатывания передней и задней подвесок. Подобный эффект характерен только для машин, движителями которых являются винтовые роторы. При преодолении роторно-винтовой машиной препятствия (а шнекоход предназначен для перемеще-

ния людей и грузов по заснеженному бездорожью или заболоченной местности) перемещение передней части шнека вверх однозначно приводит к опусканию задней части. Линейная зависимость срабатывания подвески отображена на рис. 2.

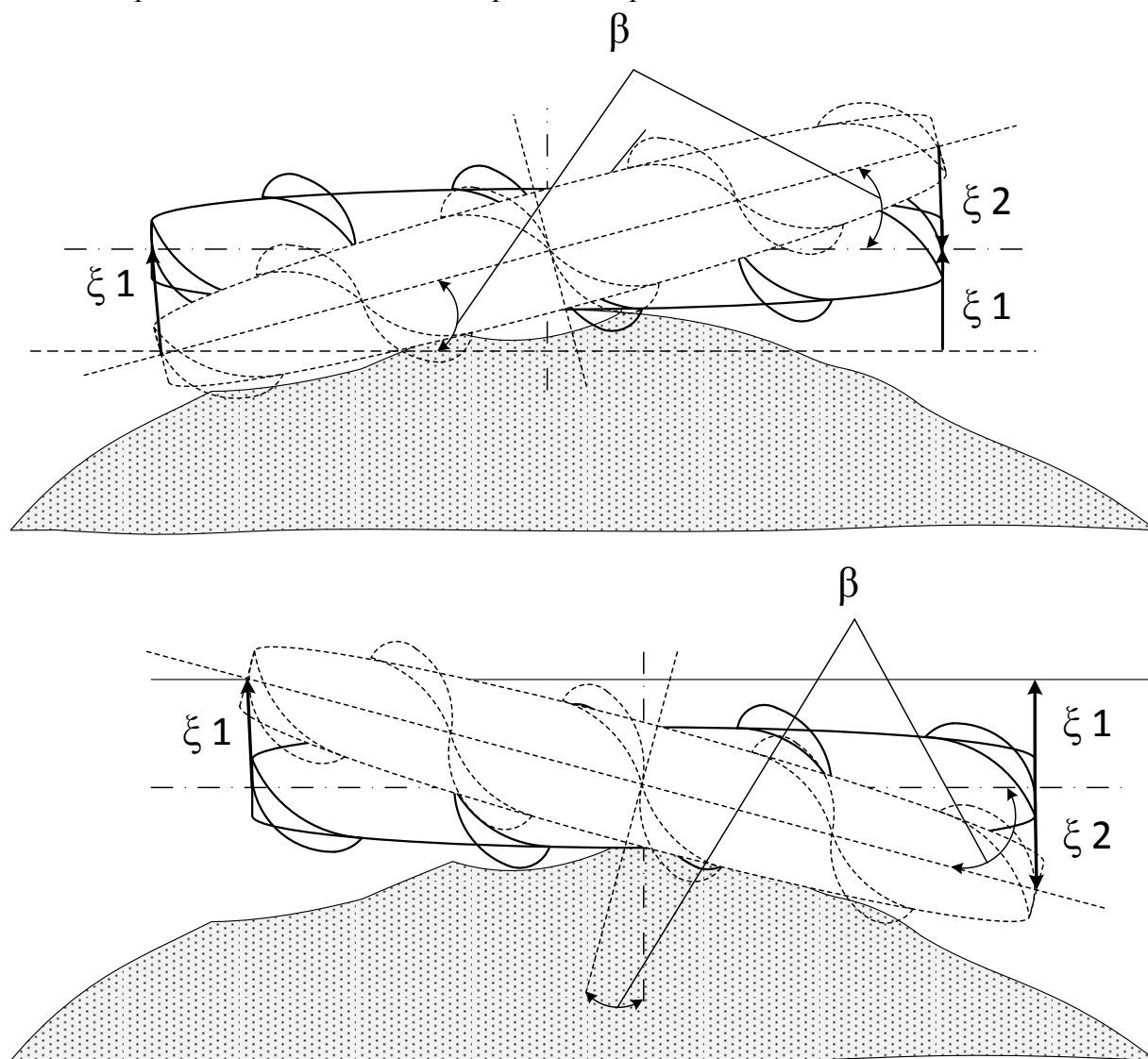


Рис. 2. Переваливание винтового ротора через препятствие

Роторно-винтовая машина представляет собой трехмассовую колебательную систему. Силы воздействия от движителей на кузова передаются через амортизаторы и упругие элементы подвески. Динамика трехмассовой эквивалентной системы отображена на рис. 2.

Задается система координат и точка отсчета, характеризующие положение подрессоренных масс относительно неподдресоренных при колебаниях. Углы поворота подрессоренного кузова машины и перемещение центра тяжести отображаются параметрами:  $Z_0, \varphi, X_0, \alpha, Y_0, \beta$  – рис. 3.

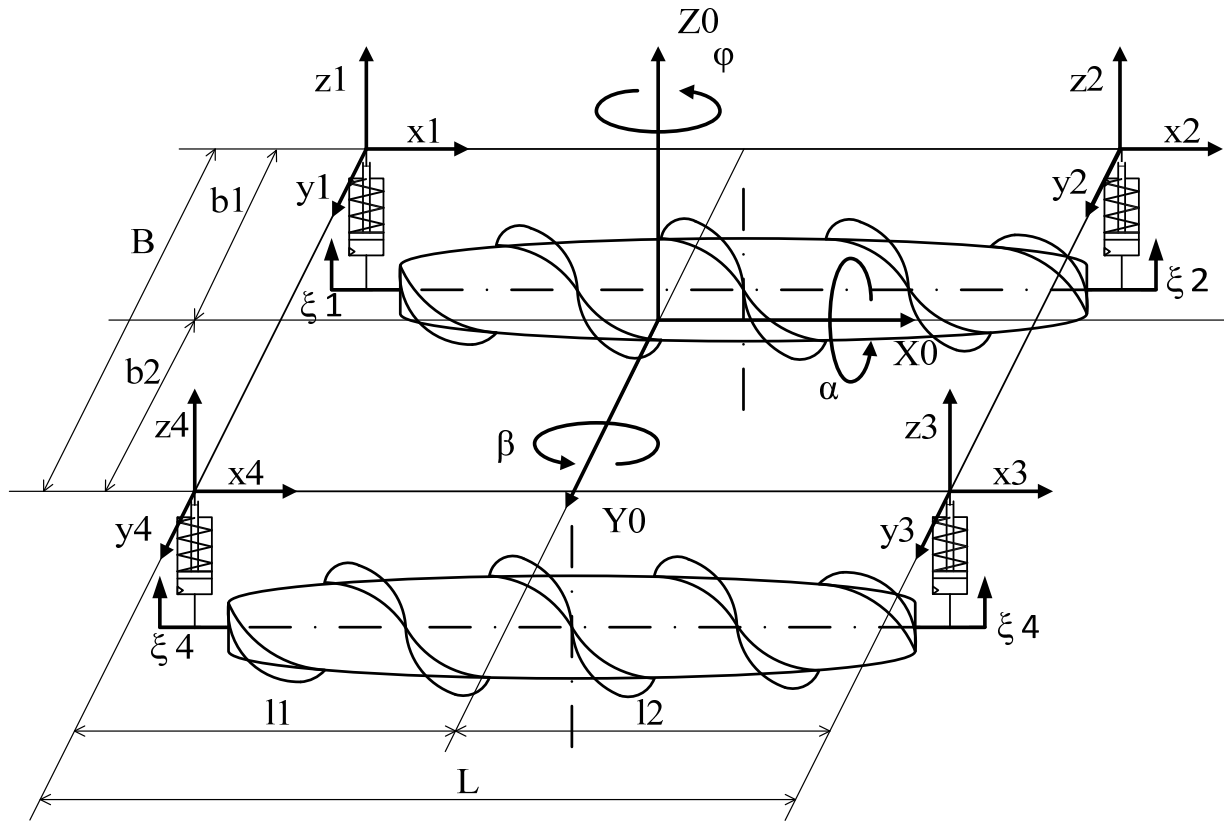


Рис. 3. Колебания роторно-винтовой машины в системе координат.

Задаются координаты срабатывания носовых или задних подвесок:

- $z_1, z_2, z_3, z_4$  - вертикальные перемещения;
- $x_1, x_2, x_3, x_4$  - горизонтальные продольные перемещения;
- $y_1, y_2, y_3, y_4$  - горизонтальные поперечные перемещения.

Определяется равнодействующая системы –  $\bar{Z}_0$ :

$$Z_0 = \frac{\sum_i l_i z_i}{\sum_i l_i} \quad (1)$$

Тогда зависимость геометрических характеристик машины между собой можно представить системой:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_0 &= \frac{1}{2L} [(\bar{z}_2 l_2 - \bar{z}_1 l_1) + (\bar{z}_3 l_2 - \bar{z}_4 l_1)] \\ \varphi &= \frac{1}{B} [(\bar{x}_4 - \bar{x}_1) + (\bar{x}_3 - \bar{x}_2)] + \frac{1}{L} [(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)] \\ \bar{X}_0 &= \frac{1}{B} [(\bar{x}_4 b_2 - \bar{x}_1 b_1) + (\bar{x}_3 b_2 - \bar{x}_2 b_1)] \\ \alpha &= \frac{1}{B} [(\bar{z}_1 - \bar{z}_4) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)] \\ \bar{Y}_0 &= \frac{1}{L} [(\bar{y}_1 l_1 - \bar{y}_2 l_2) + (\bar{y}_4 l_1 - \bar{y}_3 l_2)] \\ \beta &= \frac{1}{L} [(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_4)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Колебательные характеристики роторов машины представляются векторами  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ . При преодолении машиной препятствия сила срабатывания подвески передается корпусом ротора на заднюю подвеску, а, значит, от величин  $\xi_2, \xi_3$  зависят и перемещения  $\xi_1, \xi_4$  рис. 2:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \sin \beta \cdot L - \xi_2 \\ \xi_4 &= \sin \beta \cdot L - \xi_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Следует отметить, что система 3, когда координаты движителя зависимы друг от друга:  $\xi_1$  от  $\xi_2$  и  $\xi_4$  от  $\xi_3$  справедлива только для машин с движителями – винтовыми роторами.

Динамические процессы в подвеске машины отображают при помощи сил  $Z_n, X_n, Y_n$ , действующих на массы машины (рис. 3). Сила  $Z_n$  объединяет силы:  $Z_p$  - от воздействия упругого элемента и  $Z_a$  - от воздействия амортизатора. Система уравнений сил  $Z_n, X_n, Y_n$  представлена:

$$\left. \begin{aligned} Z_{n1} &= 2C_{p1}(z_1 - \xi_1) + 2k_1(\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1); & Z_{n2} &= 2C_{p2}(z_2 - \xi_2) + 2k_2(\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2); \\ Z_{n3} &= 2C_{p3}(z_3 - \xi_3) + 2k_3(\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3); & Z_{n4} &= 2C_{p4}(z_4 - \xi_4) + 2k_4(\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4); \\ X_{n1} &= Z_{n1} \operatorname{tg} \beta; & X_{n2} &= Z_{n2} \operatorname{tg} \beta; & Y_{n1} &= Z_{n1} \operatorname{tg} \alpha; & Y_{n2} &= Z_{n2} \operatorname{tg} \alpha; \\ X_{n3} &= Z_{n3} \operatorname{tg} \beta; & X_{n4} &= Z_{n4} \operatorname{tg} \beta; & Y_{n3} &= Z_{n3} \operatorname{tg} \alpha; & Y_{n4} &= Z_{n4} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения колебаний выводятся с использованием уравнений динамики или уравнений Лагранжа. Уравнения Гельмгольца не применяются в виду того, что их применение подходит больше для установившихся колебательных процессов, что в рассматриваемой задаче не реально. В решении поставленной задачи исследуется взаимосвязь геометрических и силовых параметров, и применение уравнений динамики наиболее актуальны. Для подрессоренных и неподрессоренных масс  $M$  и  $m_{1,2}$  выводятся системы уравнений равновесия 5 для неподрессоренных масс и уравнения равновесия для подрессоренных масс 6.

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{\xi}_1 - Z_{n1} + m \ddot{\xi}_2 - Z_{n2} &= H_z(t); \\ m \ddot{\xi}_4 - Z_{n4} + m \ddot{\xi}_3 - Z_{n3} &= H_z(t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{z}_0 + Z_{n1} + Z_{n2} + Z_{n3} + Z_{n4} &= H_z(t); \\ M \ddot{x}_0 + X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + X_{n4} &= H_x(t); \\ M \ddot{y}_0 + Y_{n1} + Y_{n2} + Y_{n3} + Y_{n4} &= H_y(t); \\ M \rho_z^2 \ddot{\phi} + X_{n4} b_2 + X_{n3} b_2 - X_{n1} b_1 - X_{n2} d_1 + \\ + Y_{n4} l_1 + Y_{n1} l_1 - Y_{n2} l_2 + Y_{n3} l_2 &= M_\phi(t); \\ M \rho_x^2 \ddot{\alpha} + Z_{n1} b_1 + Z_{n2} b_1 - Z_{n3} b_2 - Z_{n4} b_2 &= M_\alpha(t); \\ M \rho_y^2 \ddot{\beta} + Z_{n3} l_2 + Z_{n2} l_2 - Z_{n4} l_1 - Z_{n1} l_1 &= M_\beta(t). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Сложность расчета динамических процессов в подвеске роторно-винтовой машины именно в том, что машина является вездеходной и даже амфибийной. Часто машина с движителями-роторами находит применение среди ледяных торосов, так как при образовании провала ледяной опоры машина не просто может плыть, но и, цепляясь винтовыми шнеками, может самостоятельно выбраться из полыньи.

Опорной поверхностью машины является бездорожье (причем всегда – так как по асфальту роторно-винтовая машина передвигаться просто не может), и, следовательно, не стоит ожидать, что под каждым из роторов будет одинаковый профиль опорной поверхности.

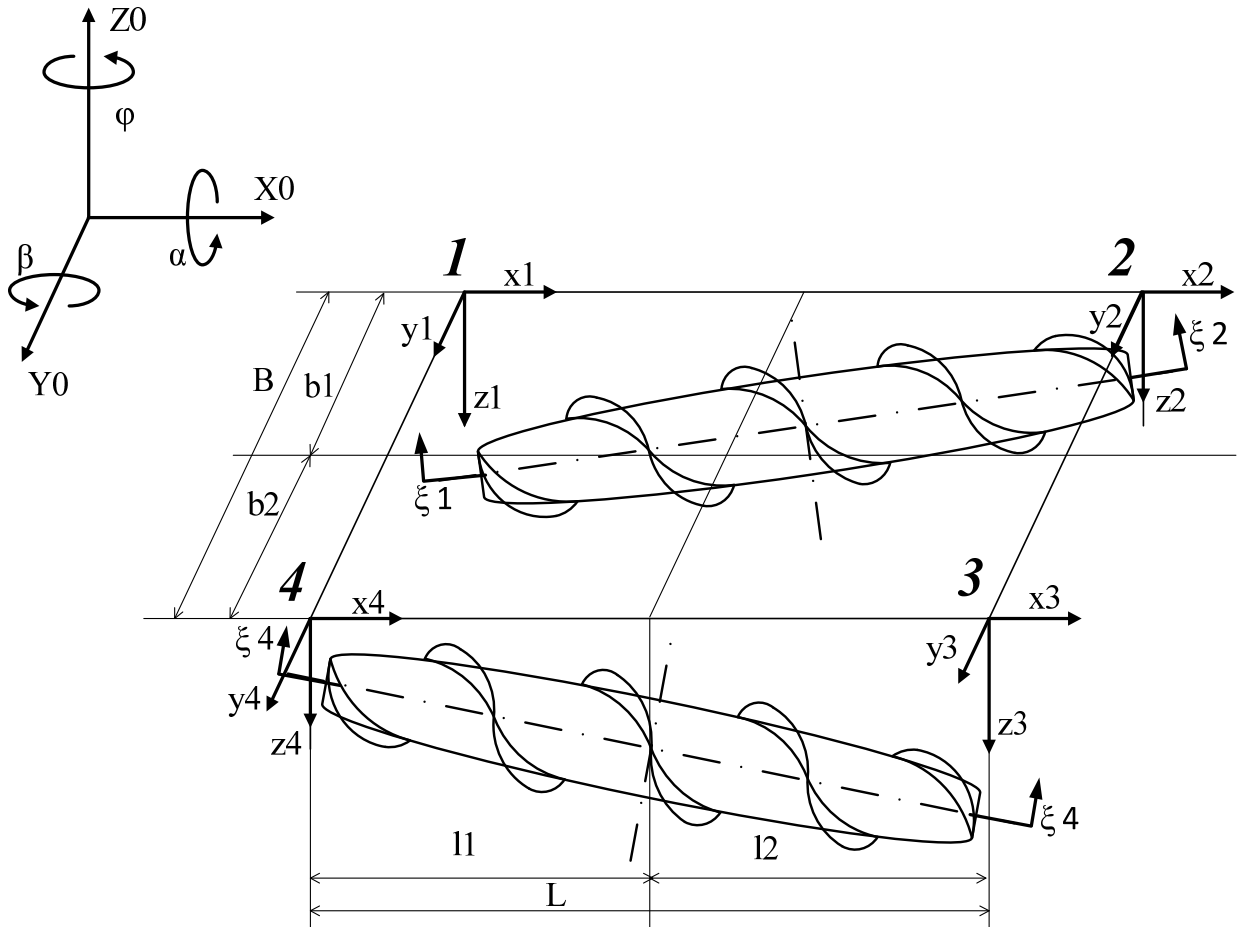


Рис. 4. Схема сил при развале роторов в случае неоднородности опорной поверхности

Уравнения движения для систем координат (рис. 2, рис. 3, рис. 4) выводятся при использовании формул систем 6 и выражения для  $Z_n$  записанные через координаты  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . После подстановки этих выражений в дифференциальные уравнения равновесия систем уравнений 5 и 6, получаются системы дифференциальных уравнений 7 и 8.

Полученные системы уравнений 7 и 8 представляют собой наиболее полный и конкретный расчет перемещений (линейных и угловых) точек неподдрессоренной и поддрессоренной частей роторно-винтовой машины. Уравнения этих систем отображают случай, когда гашение динамических нагрузок происходит по всем направлениям.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 - 2C_{p1}[z_1 - \xi_1] - 2k_1[\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + m\ddot{\xi}_2 - 2C_{p2}[z_2 - \xi_2] - 2k_2[\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] &= H_z(t); \\ m\ddot{\xi}_4 - 2C_{p4}[z_4 - \xi_4] - 2k_4[\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] + m\ddot{\xi}_3 - 2C_{p3}[z_3 - \xi_3] - 2k_3[\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] &= H_z(t). \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & M \ddot{z}_0 + 2k_1 [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + 2C_{p1} [z_1 - \xi_1] + 2k_2 [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] + 2C_{p2} [z_2 - \xi_2] + \\
 & + 2k_3 [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] + 2C_{p3} [z_3 - \xi_3] + 2k_4 [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] + 2C_{p4} [z_4 - \xi_4] = H_z(t); \\
 & M \ddot{x}_0 + 2k_1 \operatorname{tg} \beta [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + 2C_{p1} \operatorname{tg} \beta [z_1 - \xi_1] + 2k_2 \operatorname{tg} \beta [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] + \\
 & + 2C_{p2} \operatorname{tg} \beta [z_2 - \xi_2] + 2k_3 \operatorname{tg} \beta [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] + 2C_{p3} \operatorname{tg} \beta [z_3 - \xi_3] + \\
 & + 2k_4 \operatorname{tg} \beta [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] + 2C_{p4} \operatorname{tg} \beta [z_4 - \xi_4] = H_x(t); \\
 & M \ddot{y}_0 + 2k_1 \operatorname{tg} \alpha [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + 2C_{p1} \operatorname{tg} \alpha [z_1 - \xi_1] + 2k_2 \operatorname{tg} \alpha [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] + \\
 & + 2C_{p2} \operatorname{tg} \alpha [z_2 - \xi_2] + 2k_3 \operatorname{tg} \alpha [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] + 2C_{p3} \operatorname{tg} \alpha [z_3 - \xi_3] + \\
 & + 2k_4 \operatorname{tg} \alpha [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] + 2C_{p4} \operatorname{tg} \alpha [z_4 - \xi_4] = H_y(t); \\
 & M \rho_z^2 \ddot{\varphi} + \left( \begin{aligned} & 2C_{p4} b_2 [z_4 - \xi_4] + 2k_4 b_2 [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] + 2C_{p3} b_2 [z_3 - \xi_3] + \\ & 2k_3 b_2 [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] - 2C_{p1} b_1 [z_1 - \xi_1] - 2k_1 b_1 [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] - \\ & - 2C_{p2} b_1 [z_2 - \xi_2] - 2k_1 b_1 [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] \end{aligned} \right) \operatorname{tg} \beta + \\
 & + \left( \begin{aligned} & 2C_{p1} l_1 [z_1 - \xi_1] + 2k_1 l_1 [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + 2C_{p4} l_1 [z_4 - \xi_4] + \\ & 2k_4 l_1 [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] - 2C_{p2} l_2 [z_2 - \xi_2] - 2k_2 l_2 [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] - \\ & - 2C_{p3} l_2 [z_3 - \xi_3] - 2k_3 l_2 [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] \end{aligned} \right) \operatorname{tg} \alpha = M_\varphi(t); \\
 & M \rho_x^2 \ddot{\alpha} + 2C_{p1} b_1 [z_1 - \xi_1] + 2k_1 b_1 [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] + 2C_{p2} b_1 [z_2 - \xi_2] + \\
 & + 2k_2 b_1 [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] - 2C_{p3} b_2 [z_3 - \xi_3] - 2k_3 b_2 [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] - 2C_{p4} b_2 [z_4 - \xi_4] - \\
 & - 2k_4 b_2 [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] = M_\alpha(t); \\
 & M \rho_x^2 \ddot{\beta} + 2C_{p3} l_2 [z_3 - \xi_3] + 2k_3 l_2 [\dot{z}_3 - \dot{\xi}_3] + 2C_{p2} l_2 [z_2 - \xi_2] + \\
 & + 2k_2 l_2 [\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2] - 2C_{p4} l_1 [z_4 - \xi_4] - 2k_4 l_1 [\dot{z}_4 - \dot{\xi}_4] - 2C_{p1} l_1 [z_1 - \xi_1] - \\
 & - 2k_1 l_1 [\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1] = M_\beta(t);
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Система уравнений 8 демонстрирует расчет усилий, описывая динамику сработавших механизмов упруго-вязких подвесок. Силы горизонтальные  $X$  и  $Y$  через уравнения тригонометрии приведены к вертикальным силам  $Z$ .

Однако необходимо отметить, что системы уравнений представляют собой наиболее полный случай описания динамических процессов, происходящих в упруго-вязкой подвеске машины, содержащей роторно-винтовой элемент. Колебания являются пространственными, перемещения кузова машины на подвеске не ограничены во всех направлениях, что в реальности практически невозможно. Предложенная запатентованная конструкция роторно-винтовой машины явственно демонстрирует ограничение перемещений кузова машины относительно роторов в горизонтальном положении, т.е. происходит колебание машины вдоль оси  $Z_0$  и повороты при изменении углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Соответственно обобщённые системы дифференциальных уравнений принимают вид. Для неподрессоренных масс:

$$\left. \begin{aligned}
 & m(2\ddot{\xi}_1 + \sin \beta \cdot L) + 2k(2\dot{\xi}_1 - (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) + \sin \beta \cdot L) + 2C_p(2\xi_1 - (z_1 + z_2) + \sin \beta \cdot L) = H_z(t); \\
 & m(2\ddot{\xi}_4 + \sin \beta \cdot L) + 2k(2\dot{\xi}_4 - (\dot{z}_4 + \dot{z}_3) + \sin \beta \cdot L) + 2C_p(2\xi_4 - (z_4 + z_3) + \sin \beta \cdot L) = H_z(t).
 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

И для поддрессоренных масс:



$$\left. \begin{aligned}
 & M \ddot{Z}_0 + 2k(\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 + \dot{z}_4) - 4k(\dot{\xi}_1 + \sin \beta \cdot L + \dot{\xi}_4) + \\
 & + 2C_p(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) - 4C_p(\xi_1 + \sin \beta \cdot L + \xi_4) = H_z(t); \\
 & M\rho_z^2 \ddot{\alpha} + 2C_p b(z_1 + z_2 - z_4 - z_3) - 4C_p b(\xi_1 + \sin \beta \cdot L - \xi_4) + \\
 & + 2kb(\dot{z}_1 + \dot{z}_2 - \dot{z}_4 - \dot{z}_3) - 4kb(\dot{\xi}_1 + \sin \beta \cdot L - \dot{\xi}_4) = M_\alpha(t); \\
 & M\rho_z^2 \ddot{\beta} + 2C_p l(z_1 + z_4 - z_2 - z_3) - 4C_p l \sin \beta \cdot L + \\
 & + 2kl(\dot{z}_1 + \dot{z}_4 - \dot{z}_2 - \dot{z}_3) - 4kl \sin \beta \cdot L = M_\beta(t).
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Целью получения и вывода формул динамики машины является анализ построенного множества амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик для выбора оптимальных значений жесткостей пружин и коэффициентов сопротивления амортизаторов. Теоретические и практические манипуляции параметрами упруго-вязкой подвески позволяют выполнять машину, обладающую заданными критериями вибронгруженности.

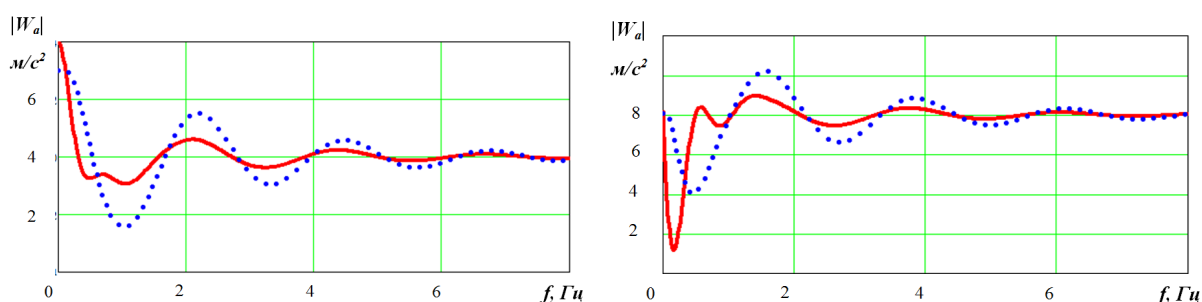


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики, полученные для разных значений коэффициентов сопротивления амортизаторов и жесткостей пружин роторно-винтовой машины

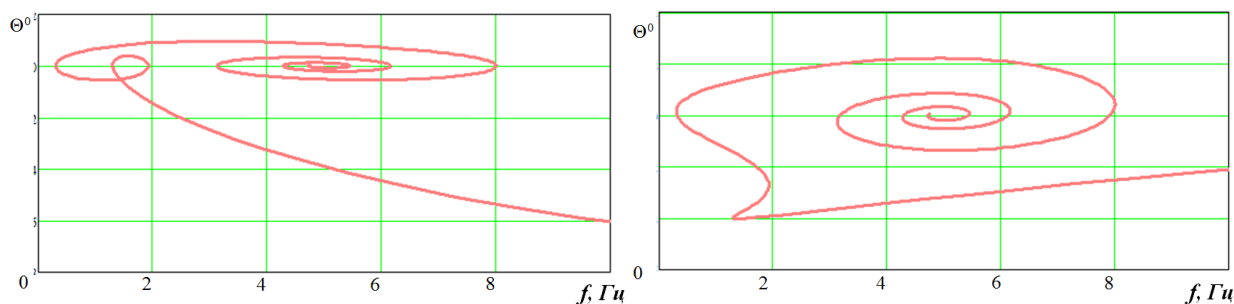


Рис. 7. Фазо-частотные характеристики, полученные для разных значений коэффициентов сопротивления амортизаторов и жесткостей пружин роторно-винтовой машины

Результаты полученных амплитудно-частотных характеристик (на рис. 6), полученные путем графического моделирования выведенных систем уравнений (7, 8) при помощи универсальной программы математических расчетов сопоставлялись с данными испытаний. Испытания проводились на построенной в рамках исследования масштабной модели (рис. 8). Точки крепления датчиков виброускорений определялись методикой проведения испытаний и были установлены в местах крепления упруго-вязких подвесок машины.

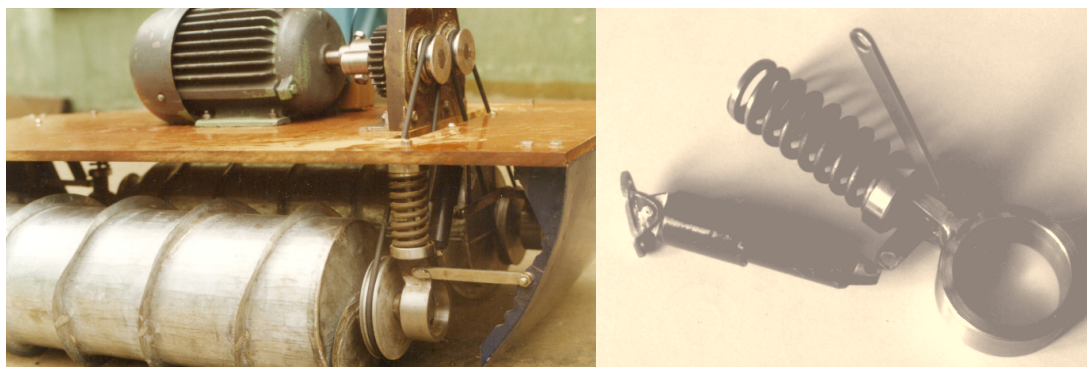


Рис. 8. Фотографии масштабной модели роторно-винтовой машины и упруго-вязкой подвески

Полученная методика позволяет существенно сократить временные затраты на теоретические расчеты параметров упруго-вязкой подвески, имеющей геометрическую линейную зависимость.

#### **Список литературы**

1. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля и его колебания. М.: Машгиз, 1960. 225 с.
2. Куляшов А.П., Куклина И.Г. Оценка колебаний роторно-винтовой машины с учетом параметров ее подвески и линейного контакта движителей с грунтом // Строительные и дорожные машины. 2011. №7. С. 45-52.
3. Куклина И.Г. Элементы Кельвина-Фойгта при исследовании динамики специальных машин // Научное обозрение. 2013. № 4. С. 59-67.
4. Свидетельство на полезную модель №15185 Российская Федерация, МКИ В63 D57/00, В60 F3/00. Транспортное средство высокой проходимости / Куляшов А.П., Куклина И.Г., заявитель Нижегородский государственный технический университет.
5. Патент на полезную модель №134896 РФ. МКИ В62 D57/036, В60 F3. Транспортное средство высокой проходимости / Куклина И.Г., заявитель Нижегородский государственный технический университет.

## **ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЁЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ**

**А.С. Кулешов, Г.А. Черняков**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
механико-математический факультет  
119991 Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ,  
e-mail: [kuleshov@mech.math.msu.su](mailto:kuleshov@mech.math.msu.su)

Рассматривается классическая задача механики неголономных систем – задача о движении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью алгоритма Ковачича [1] указываются новые случаи, когда удаётся выразить решение данной задачи с помощью квадратур.

*Ключевые слова:* тело вращения; неголономные связи; алгоритм Ковачича; лиувиллевы решения.

### **Введение**

Задача о качении без скольжения тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости является одной из классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С.А. Чаплыгин в работе [2] показал, что решение данной задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. Однако не всегда удаётся отыскать решение данного дифференциального уравнения. В случае, когда движущееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, решение соответствующего уравнения выражается через элементарные функции [2]. При движении по горизонтальной плоскости круглого диска или обруча решение указанного уравнения выражается через гипергеометрические ряды [2]. В работе Х.М. Муштари [3] было продолжено исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на форму поверхности тела и распределение масс в нём, были найдены два новых частных случая, когда движение тела можно исследовать полностью. В первом случае движущееся твёрдое тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через её фокус, а во втором случае движущееся твёрдое тело представляет собой параболоид вращения.

В 1986 году американский математик Дж. Ковачич предложил алгоритм, позволяющий получить общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в случае, если это решение выражается через так называемые лиувиллевы функции [1]. Напомним, что лиувиллевыми функциями называются такие функции, которые могут быть получены при помощи конечного числа следующих действий над рациональными функциями: выполнение алгебраических операций, вычисление неопределённого интеграла и нахождение экспоненты от неопределённого интеграла. В случае, когда линейное дифференциальное уравнение не имеет лиувиллевых решений, алгоритм Ковачича также позволяет установить этот факт.

В данной работе обсуждается применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Получены выводы о существовании лиувиллевых решений задачи в случае движения по горизонтальной плоскости динамически симметричного тора, параболоида вращения, а также веретенообразного тела, рассматривавшегося в работе Х.М. Муштари [3].

### **Постановка задачи**

Пусть твёрдое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси  $G\zeta$ , проходящей через центр тяжести  $G$  тела, катится без проскальзывания по неподвижной

горизонтальной плоскости  $Oxy$ . Обозначим через  $M$  точку касания тела и плоскости. Предполагаем, что моменты инерции относительно главных центральных осей инерции  $G\xi$  и  $G\eta$ , перпендикулярных  $G\zeta$ , равны между собой. Движение происходит в однородном поле тяжести.

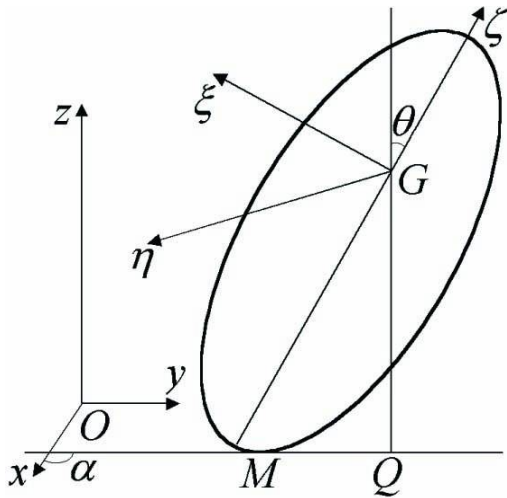


Рис. 1.

Обозначим через  $\theta$  угол между осью симметрии тела и вертикалью. Расстояние  $GQ$  от центра тяжести до плоскости  $Oxy$  будет функцией только угла  $\theta$  (см. [2, 3]):

$$GQ = f(\theta). \quad (1)$$

Теперь конкретизируем расположение осей системы координат  $G\xi\eta\zeta$ . Пусть ось  $G\xi$  всё время лежит в плоскости вертикального меридиана  $M\zeta$ , а ось  $G\eta$  перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Очевидно, что система координат  $G\xi\eta\zeta$  движется и в пространстве и в теле. Пусть  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты точки касания  $M$  тела и плоскости в системе координат  $G\xi\eta\zeta$ . Тогда имеем (см. [2, 3]):

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta, \quad (2)$$

где штрихом обозначена производная функции  $f(\theta)$  по  $\theta$ . Таким образом, функция  $f(\theta)$  полностью характеризует форму поверхности движущегося тела.

Пусть  $m$  – масса тела,  $A_1$  – его момент инерции относительно осей  $G\xi$  и  $G\eta$ , а  $A_3$  – момент инерции относительно оси симметрии. Обозначим через  $r$  проекцию вектора угловой скорости  $\omega$  тела на ось симметрии. В работах [2, 3] было показано, что решение данной задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \left[ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{3m(A_1\xi\xi' + A_3\zeta\zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin\theta} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{(A_1\xi' - A_3\zeta)\sin\theta}{(\xi + \zeta')} \right) - A_3 \sin\theta \right] r = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta = A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2$ . Общее решение линейного дифференциального уравнения (3) выражается через элементарные функции в случае, когда движущееся твёрдое тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар [2, 3]. В случае, когда движущееся тело представляет собой круглый диск или обруч, общее решение данного уравнения выражается с помощью гипергеометрических функций [2, 4].

Мы будем рассматривать движение по горизонтальной плоскости различных тел, для каждого из которых будем выписывать соответствующее уравнение вида (3) и, используя алгоритм Ковачича, выяснять, допускает ли полученное линейное уравнение второго порядка решение, выражающееся через лиувиллевы функции.

### Особенности применения алгоритма Ковачича к дифференциальным уравнениям

В этом параграфе обсуждаются особенности применения алгоритма Ковачича к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Данный алгоритм позволяет получить в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, выраженное через лиувиллевы функции [1], или показать, что уравнение не имеет такого реше-

ния. Последовательное выполнение всех шагов алгоритма сопряжено с громоздкими, хотя и не сложными, вычислениями. Поэтому не будем углубляться в детали алгоритма: они подробно изложены в оригинальной работе Дж. Ковачича [1] (см. также [5]). Сообщим здесь лишь первоначальные сведения.

Предполагается, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому может быть применён алгоритм Ковачича, имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0, \quad (4)$$

где  $a(x), b(x)$  – рациональные функции независимой переменной  $x$ . При помощи замены

$$z = \exp\left(\frac{1}{2} \int a(x) dx\right) y \quad (5)$$

уравнение (4) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = R(x)z, \quad R(x) = \frac{1}{2} \frac{d(a(x))}{dx} + \frac{1}{4} a^2(x) - b(x). \quad (6)$$

В дальнейшем рациональная функция  $R(x)$  раскладывается в сумму простых дробей и производится анализ её конечных полюсов, а также полюса в бесконечности. На основании полученных данных делается вывод о существовании у уравнения (6) лиувиллевых решений.

Для каждого из тел, катящихся по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости, мы будем получать соответствующее уравнение (3) и приводить его к виду (6). После этого мы будем лишь кратко сообщать, какие результаты относительно существования у дифференциального уравнения лиувиллевых решений были получены при помощи алгоритма Ковачича.

### Качение тора

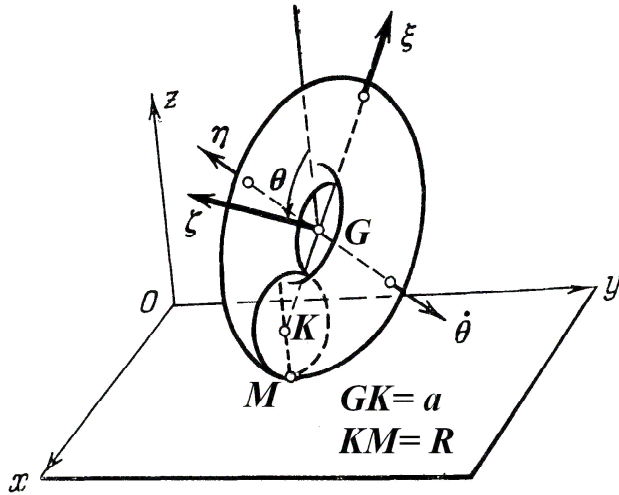


Рис. 2

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Пусть  $R$  – радиус меридиана тора на экваторе, и  $a + R$  – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора. Тогда высота центра масс тора над опорной плоскостью выражается формулой:

$$f(\theta) = R + a \sin \theta.$$

По формулам (2) имеем:

$$\xi = -a - R \sin \theta, \quad \zeta = -R \cos \theta.$$

Линейное дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{a \cos \theta}{(R \sin \theta + a) \sin \theta} + \frac{3mR((A_1 - A_3)R \sin \theta + A_1 a) \cos \theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m(R \sin \theta + a)(R(A_1 - A_3)(1 - 2 \sin^2 \theta) - A_3 a \sin \theta)}{\Delta \sin \theta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2 \sin^2 \theta + 2A_1 m R a \sin \theta + A_1 A_3 + A_1 m a^2 + A_3 m R^2.$$

Сделаем в уравнении (7) замену независимой переменной по формуле  $\sin \theta = x$  и введём обозначения:

$$B = \frac{a}{R}, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

Поскольку  $a > R$ , то  $B > 1$ . В результате уравнение (7) переписывается в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (8)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2((A_1 - A_3)x + A_1B)}{\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{mR^2(x+B)((A_1 - A_3)(2x^2 - 1) + A_3Bx)}{x(x^2 - 1)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2x^2 + 2A_1BmR^2x + A_1A_3 + A_1B^2mR^2 + A_3mR^2.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (8) к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = T(x)z, \quad (9)$$

$$T(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2} +$$

$$+ \frac{\beta_5}{x+B} + \frac{\alpha_5}{(x+B)^2} + \frac{\beta_6}{x} + \frac{\alpha_6}{x^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 + 2)B^2 + (5x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)B + x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 5}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 - 2)B^2 + (5x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9)B - x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 - 5}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)},$$

$$\beta_3 = \frac{8x_1B^3 + 4(x_1^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_1^3 - 4x_1^2x_2 + x_1 + 6x_2)B + (3x_1^2 - 2x_1x_2 - 1)x_1^2}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)},$$

$$\beta_4 = \frac{8x_2B^3 + 4(x_2^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_2^3 - 4x_1x_2^2 + 6x_1 + x_2)B + (3x_2^2 - 2x_1x_2 - 1)x_2^2}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)},$$

$$\beta_5 = \frac{10B^4 + 7(x_1 + x_2)B^3 + 4(x_1x_2 - 2)B^2 - 5(x_1 + x_2)B - 2x_1x_2}{4B(B - 1)(B + 1)(x_1 + B)(x_2 + B)},$$

$$\beta_6 = -\frac{4B^2 + 3(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2}{4x_1x_2B}.$$

Разложение функции  $T(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$T(x)|_{x=\infty} = \frac{12B^2 + 4(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8}{16x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (9) даёт следующий результат (подробности см. в [5]):

**Теорема 1.** Для почти всех физически допустимых значений параметров задачи уравнение (9) не имеет лиувилевых решений.

### Качение параболоида

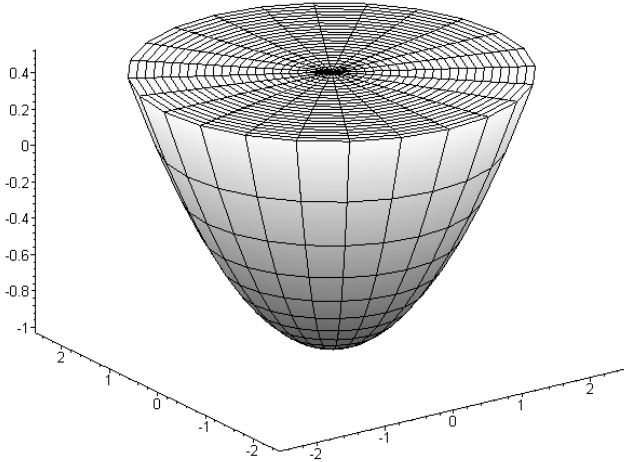


Рис. 3

Уравнение (3) в случае качения по плоскости динамически симметричного параболоида вращения принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (10)$$

$$b_1 = \frac{\cos^2 \theta - 4}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{6m\lambda^2 (A_3 - 2(A_3 - A_1)\cos^2 \theta)\sin \theta}{K_2(\theta)\cos \theta}, \quad b_2 = \frac{2m\lambda^2 (A_3 - 2A_1)(1 + \cos^2 \theta)}{K_2(\theta)},$$

$$K_2(\theta) = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)m\lambda^2)\cos^4 \theta - 4(A_3 - A_1)m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3 m\lambda^2.$$

Видно, что при  $A_3 = 2A_1$  уравнение (10) имеет простое частное решение  $r = r_0 = \text{const}$ . Это обстоятельство было впервые отмечено в работе Х.М. Муштари [3].

В уравнении (10) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\cos^2 \theta = x$ . Введём также следующие обозначения:

$$B = m\lambda^2, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (10) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (11)$$

$$d_1(x) = \frac{5-3x}{2x(1-x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta}, \quad d_2(x) = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x+1)}{2x\Delta(1-x)},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3 B.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (11) к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \Pi(x)z, \quad (12)$$

$$\Pi(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{16}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16},$$



$$\beta_1 = \frac{4x_1 + 4x_2 - 3x_1x_2 - 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \quad \beta_2 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_1x_2}{8x_1x_2},$$

$$\beta_3 = -\frac{4x_1 + x_2 - 7x_1x_2 - 2x_1^2 + 4x_1^2x_2}{8x_1(x_1 - x_2)(x_1 - 1)}, \quad \beta_4 = \frac{x_1 + 4x_2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2^2}{8x_2(x_1 - x_2)(x_2 - 1)}.$$

Разложение функции  $\Pi(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$\Pi(x)|_{x=\infty} = -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (12) приводит к следующему результату (подробности см. в [5]):

**Теорема 2.** При любых физически допустимых значениях параметров задачи все решения уравнения (12) являются лиувиллевыми.

Впервые тот факт, что решение задачи о качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости приводится к квадратурам, был отмечен в работе А.С. Кулешова [6]. В явном виде общее решение исходного уравнения (10) записывается следующим образом:

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi)\sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1A_3(A_3 + 4m\lambda^2)(2A_1 - A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1A_3 + 4A_1m\lambda^2)\cos^4 \theta - 2A_3m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2.$$

Здесь  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные, а функция  $\Phi(\theta)$  выражается через эллиптические интегралы.

### Качение веретенообразного тела

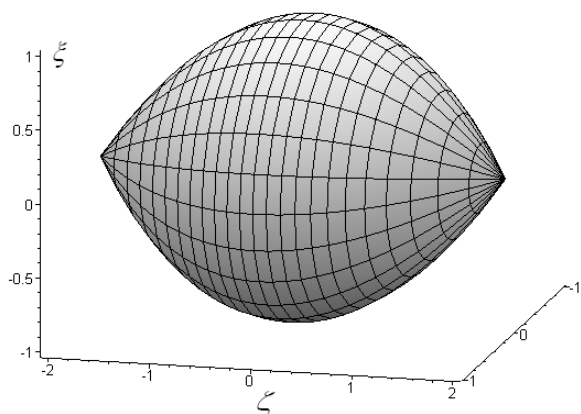


Рис. 4

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тела, поверхность которого образована вращением дуги параболы вокруг оси, параллельной директрисе и проходящей через фокус параболы. Такое тело напоминает по форме веретено, за что оно и получило своё название (Рис. 4). Задача о движении веретенообразного тела рассматривалась Х.М. Муштари [3], который дал полное решение соответствующей задачи при дополнительном ограничении на моменты инерции тела:

$$3A_3 = 2A_1 \quad (13)$$

Для рассматриваемого тела высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Пользуясь формулами (2), находим координаты  $\xi$  и  $\zeta$  точки касания тела с опорной плоскостью:



$$\xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}$$

В результате уравнение (3) в случае качения по плоскости веретенообразного тела принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in \left( \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right), \quad (14)$$

$$b_1 = \frac{(4 \sin^4 \theta - 24 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta}{(1 - 2 \sin^2 \theta)(3 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta} - \frac{6m\lambda^2 (A_1 - 2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta) \cos \theta}{K(\theta) \sin \theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1)m\lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta)^2}{(3 - 2 \sin^2 \theta)K(\theta)},$$

$$K(\theta) = (A_1 A_3 + 4(A_1 - A_3)m\lambda^2) \sin^4 \theta - 4(A_1 - A_3)m\lambda^2 \sin^2 \theta + A_1 m\lambda^2.$$

Если  $3A_3 = 2A_1$ , то уравнение (14) допускает решение (см. [3])  $r = r_0 = \text{const}$ . В уравнении (14) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\sin^2 \theta = x$ . Введём также следующие обозначения:

$$B = m\lambda^2, \quad y(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (14) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + d_1(x) \frac{dy}{dx} + d_2(x) y = 0, \quad (15)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x\Delta(1-x)(3-2x)},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B.$$

Обозначим через  $x_1, x_2$  корни многочлена второй степени  $\Delta$ . Замена вида (5) приводит уравнение (15) к уравнению

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = S(x)z, \quad (16)$$

$$S(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_1} + \frac{\alpha_4}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_5}{x-x_2} + \frac{\alpha_5}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4},$$

$$\beta_0 = \frac{3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2}{48x_1x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1x_2 - 9(x_1 + x_2) + 12}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$\beta_2 = \frac{3(x_1 + x_2 - 1)}{(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)}, \quad \beta_3 = \frac{15(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 27}{3(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)},$$

$$\beta_4 = -\frac{(8x_1^3 - 36x_1^2 + 51x_1 - 25)(4x_2 - 3)x_1 + 15(x_1 - 1)x_1 + 3(x_2 - x_1)}{16x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)(2x_1 - 3)(x_1 - x_2)},$$

$$\beta_5 = \frac{(8x_2^3 - 36x_2^2 + 51x_2 - 25)(4x_1 - 3)x_2 + 15(x_2 - 1)x_2 + 3(x_1 - x_2)}{16x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1)(2x_2 - 3)(x_1 - x_2)}.$$

Разложение функции  $S(x)$  в ряд Лорана в окрестности  $x = \infty$  имеет вид:

$$S(x)|_{x=\infty} = -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (16) даёт следующий результат (подробности см. в [5]):

**Теорема 3.** *Дифференциальное уравнение (16) не имеет лиувиллевых решений при почти всех значениях параметров задачи, не связанных условием Х.М. Муштари (13).*

Таким образом, доказано существование или отсутствие лиувиллевых решений в задачах о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора, параболоида вращения, а также веретенообразного тела, движение которого впервые изучалось в работе [3]. Доказанные утверждения дополняют известные ранее результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 14-01-00380 и 16-01-00338).

### Список литературы

1. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V.2. P.3-43.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжёлого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10-16.
3. Муштари Х.М. О катании тяжёлого твёрдого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
4. Appell P. Sur l'integration des equations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau // Rendiconto del circolo matematico di Palermo. 1900. V. XIV. P. 1-6.
5. Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости методом Ковачича. Диссертация на соискания учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2016. <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0112diss.pdf>
6. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. Т. 400. № 1. С. 46-48.

## НЕКОТОРЫЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО

**А.Н. Куликов**

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,  
математический факультет.

150003 Ярославль, ул. Советская, 14, e-mail: anat\_kulikov@mail.ru

Рассмотрены четыре краевые задачи для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского, имеющие приложения в теории гидродинамической устойчивости, теории пограничных явлений. Использование методов теории локальных бифуркаций позволило найти пространственно неоднородные устойчивые решения, а также получить асимптотические формулы для таких решений. В двух из четырех задач отмечено существование локального аттрактора, заполненного неустойчивыми решениями.

**Ключевые слова:** уравнение Курамото-Сивашинского, краевые задачи, устойчивость, бифуркации, аттракторы, состояния равновесия.

**Введение.** В математической и физической литературе рассматриваются различные версии уравнения с частными производными, которое принято называть уравнением Курамото-Сивашинского [1-3] или обобщенным уравнением Курамото-Сивашинского (см., например, [4-9]). Если обратиться к работам [1-3], то можно заметить, что в их рамках было предложено уравнение вида

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + au + c_1u_x^2 + c_4(u_x^3)_x = 0, \quad (1)$$

где  $c_1, c_4, b \in R, u = u(t, x), a \geq 0$ . При этом в работе [1] дополнительно  $a = c_4 = 0$  и оно было получено для изучения химических колебаний. В работе [2] уравнение (1) было получено при анализе одной из гидродинамических задач после упрощения системы Навье-Стокса. При рассмотрении классической версии уравнений Навье-Стокса -  $a = 0$ , а  $a > 0$  при модификации этой системы, предложенной А.Н. Колмогоровым.

Обобщенный (модифицированный) вариант уравнения (1) обычно имеет следующий вид

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + au + d_1u_x + d_2u_{xxx} + c_1u_x^2 + c_2(u_x^2)_x + c_3u_x^3 + c_4(u_x^3)_x = 0, \quad (2)$$

где  $b, a, d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4 \in R, a \geq 0$ . Более полный вариант уравнения Курамото-Сивашинского, если оставить ему привычное название, впервые появился при рассмотрении иных приложений (см., например, [4]). В работе [4] это уравнение было получено в качестве математической модели процесса формирования пространственного неоднородного рельефа под воздействием потока ионов, а впоследствии и процесса формирования неоднородного рельефа в результате воздействия лазерного излучения. В некоторых работах рассматривалось в качестве уравнения Курамото-Сивашинского уже следующее уравнение

$$v_t + v_{xxxx} + bv_{xx} + av + d_1v_x + d_2v_{xxx} + c_1(v^2)_x + c_2(v^2)_{xx} + c_3(v^3)_x + c_4(v^3)_{xx} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть получено из предыдущего уравнения (2) его дифференцированием и заменой  $u_x = v$ . Во многих прикладных задачах такой прием оправдан с физической точки зрения, так как именно частная производная по  $x$  неизвестной функции  $u(t, x)$  несет основную смысловую нагрузку.

Математически корректный анализ уравнений (1), (2), (3) предполагает, что эти уравнения следует изучать с краевыми условиями, выбор которых зависит от области приложений данного уравнения. Справедливости ради следует отметить, что имеется достаточно большое число работ, которые посвящены отысканию “точных” решений той или иной версии уравнения Курамото-Сивашинского и поэтому в них это уравнение часто изучается без краевых условий.

Чаще других рассматривались периодические краевые условия, которые после соответствующих перенормировок независимой переменной можно записать в виде

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x) \quad (4)$$

или “обобщенные” периодические краевые условия

$$u_x(t, x + 2\pi) = u_x(t, x). \quad (5)$$

Рассматривались также краевые условия шарнирного опирания

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \quad (6)$$

а также краевые условия следующего вида

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 1) = 0. \quad (7)$$

Данный вариант вполне естественен, если в качестве приложений соответствующей краевой задачи (например, (2), (7)) рассматривается процесс формирования рельефа под воздействием потока ионов. Тогда краевые условия (7) отражают то обстоятельство, что края обрабатываемого образца не подвержены дополнительным механическим усилиям. Последний физико-технологический процесс имеет достаточно широкое применение в нанoeлектронике.

**1. Периодические краевые условия и условия шарнирного опирания.** Ниже ограничимся рассмотрением краевых задач (2), (4) или (2), (6) частных случаях  $a = d_1 = d_2 = 0$ . Если добавить равенства  $c_2 = c_3 = 0$ , то получим уже первоначальный вариант уравнения Курamoto-Сивашинского.

В первой части этого раздела рассмотрим краевую задачу

$$u_t = -A(b)u - c_1 u_x^2 - c_2 (u_x^2)_x - c_3 u_x^3 - c_4 (u_x^3)_x, \quad (8)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (9)$$

где линейный дифференциальный оператор (ЛДО)  $A(b)$  определен равенством

$$A(b)y = -y^{(IV)} - by'', \quad y = y(x).$$

Функция  $y(x)$  удовлетворяет периодическим краевым условиям (9). Стандартно проверяется, что ЛДО  $A(b)$  имеет следующий набор собственных значений

$$\lambda_0(b) = 0, \quad \lambda_n(b) = \lambda_{-n}(b) = -n^4 + bn^2,$$

где  $n \in N$  - множеству натуральных чисел. Указанные собственные значения отвечают собственным функциям

$$e_0(x) = 1, \quad e_n(x) = \exp(inx), \quad e_{-n}(x) = \exp(-inx).$$

Отметим сразу, что краевая задача (8), (9) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

а также данная краевая задача инвариантна относительно преобразования  $u \rightarrow u + \alpha$ . Все эти состояния равновесия устойчивы (но не могут быть асимптотически устойчивыми ни при каком выборе коэффициентов уравнения), если  $b < 1$ , а при  $b > 1$  они неустойчивы.

При  $b = 1$  реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояний равновесия  $u(t, x) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , так как при  $b = 1$  спектру устойчивости принадлежит трехкратное собственное число  $\lambda = 0$ , которому отвечают собственные функции

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = \exp(ix), \quad e_{-1}(x) = \exp(-ix).$$

Положим  $b = 1 + \gamma\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - малый неотрицательный параметр ( $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $|\varepsilon_0| \ll 1$ ), а  $\gamma = \pm 1$ . Справедливо утверждение (см., например, работу [6]).

**Теорема 1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  :

(i) динамику решений краевой задачи (8), (9) при так выбранном  $b$  и достаточно малых начальных данных ( $u(0, x) = f(x)$ ) определяет система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (нормальная форма -НФ)

$$\rho' = \gamma\rho + l_1\rho^3, \quad \rho = \rho(s), \quad (10)$$

$$\varphi' = l_2\rho^2, \quad \psi' = l_0\rho^2, \quad (11)$$

где  $\varphi = \varphi(s), \psi = \psi(s), s = \varepsilon t$  - “медленное” время. Это утверждение справедливо, если  $l_1 \neq 0$ .

(ii) пусть  $\gamma b_1 < 0$  и, следовательно, уравнение (10) имеет ненулевое состояние равновесия  $S_0 : \rho = \rho_0 = \sqrt{-\gamma/l_1}$ , которое асимптотически устойчиво как решение (10), если  $l_1 < 0$  и неустойчиво при  $l_1 > 0$ . Тогда состоянию равновесия  $S_0$  соответствует двумерное инвариантное многообразие заполненное решениями вида

$$u(t, x) = [\varepsilon l_0 + o(\varepsilon)]t + v(x, \varepsilon) + \beta_0, v(x, \varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon}\rho_0 \cos(x + \beta_1), \beta_0, \beta_1 \in R.$$

Это многообразие локально устойчиво (неустойчиво), если устойчиво (неустойчиво)  $S_0$ .

Коэффициенты системы (10), (11) определяются в процессе реализации алгоритма построения нормальной формы

$$l_1 = \frac{c_2^2 - 2c_1^2}{6} + 3c_4, \quad l_2 = -\frac{c_1c_2}{2} - 3c_3, \quad l_0 = 2c_1.$$

Подчеркнем, что для классического варианта уравнения  $l_1 = -\frac{c_1^2}{3} < 0$ .

Алгоритм построения НФ (10), (11) достаточно подробно изложен в работах [4-7] и представляет собой некоторую модификацию достаточно известного в нелинейной механике алгоритма (метода) Крылова-Боголюбова.

Близкую по некоторым построениям задачу получаем, если уравнение (8) рассмотреть вместе с условиями шарнирного опирания (6). Краевая задача (8), (6) имеет нулевое состояние равновесия  $u = 0$ , которое устойчиво при  $b < 1$  и теряет устойчивость, если  $b > 1$ . При  $b = 1$  реализуется критический случай нулевого собственного значения, а при  $b = 1 + \gamma\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  из нулевого состояния равновесия при всех рассматриваемых  $\varepsilon$  и любом  $\gamma \in R$  бифурцирует ненулевое неоднородное состояние равновесия

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_0 \sin x + w(x, \varepsilon), \quad (12)$$

где  $w(x, \varepsilon) = o(\varepsilon)$ . Как и в случае периодической краевой задачи, вопрос о бифуркации может быть сведен к анализу нормальной формы. В последнем случае ее “главная” часть имеет следующий вид

$$y' = \gamma y - l y^2, \quad y = y(s), \quad s = \varepsilon t, \quad l = -\frac{4c_1}{3\pi}.$$

В формуле (12)  $y_0 = \gamma/l$  и соответствующее решение асимптотически устойчиво при  $\gamma > 0$ . Из анализа этих двух краевых задач для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского вытекает, что условия устойчивости однородных состояний равновесия у них совпадают, но анализ нелинейной краевой задачи дает относительно различные результаты.

Добавим, что краевую задачу (8), (9) можно рассмотреть и в случае, если  $a > 0$ . В этом случае следует рассмотреть ЛДО

$$A(b, a)u = u_{xxxx} + bu_{xx} + au, \quad a > 0.$$

В таком случае краевая задача (8), (9) имеет лишь одно однородное состояние равновесия  $u = 0$ . Критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения в данной ситуации выделяется следующими условиями: существует такое  $m \in N$ , что при значениях коэффициентов

$$b = b_m = m^2 + (m + \delta)^2, \quad a = a_m = m^2(m + \delta)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

где  $\delta \in (-1, 1)$ , а линейный дифференциальный оператор  $A(b_m, a_m)$  имеет нулевое собственное число кратности 2, отвечающее собственным функциям  $\exp(\pm imx)$ .

При  $b = b_m + \beta_1 \varepsilon, a = a_m + \alpha_1 \varepsilon$ , где  $\beta_1, \alpha_1 \in R$ , из нулевого состояния равновесия в случае общего положения бифурцируют  $t$  - периодические бегущие волны (или семейство состояний равновесия) в том числе и устойчивые в смысле определения А.М. Ляпунова. При выборе достаточно большого  $m \in N$  эти решения будут высокомодовыми относительно пространственной переменной  $x$ .

Как и при  $a = 0$ , бифуркационная задача может быть сведена к анализу вспомогательной системы дифференциальных уравнений – НФ. В данном случае эта система из двух дифференциальных уравнений, которые в комплексной форме записи приобретают следующий вид

$$z' = \gamma_m z + (l_m + i g_m) z |z|^2, \quad z = z(s). \quad (13)$$

Уместно отметить, что в некоторых вариантах доказательства теоремы Андронова-Хопфа, а также при ее использовании в различных приложениях, возникает подобное уравнение, т.е. данная задача по духу близка к задаче о бифуркации цикла в случае близком к критическому пары чисто мнимых собственных значений. Добавим, что подобное уравнение (13) в теории гидродинамической устойчивости называют иногда уравнением Ландау.

Добавим, что при

$$b = b_{m,m+1} = m^2 + (m+1)^2, \quad a = a_{m,m+1} = m^2(m+1)^2$$

в задаче об устойчивости нулевого решения возникает критический случай более высокой коразмерности. При этих значениях коэффициентов спектр оператора  $A(b_{m,m+1}, a_{m,m+1})$  содержит нулевое собственное значение кратности четыре, которому отвечают собственные функции

$$\exp(imx), \exp(-imx), \exp(i(m+1)x), \exp(-i(m+1)x).$$

Тогда при  $b = b_{m,m+1} + v_2 \varepsilon, a = a_{m,m+1} + v_1 \varepsilon, v_1, v_2 \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \ll 1$  анализ динамики решений краевой задачи (8), (9) сводится к анализу вспомогательной четырехмерной системы дифференциальных уравнений – НФ, которая в комплексной форме записи имеет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= \varepsilon z_1 [\tau_m' + l_{11} |z_1|^2 + l_{12} |z_2|^2], \\ z_2' &= \varepsilon z_2 [\tau_{m+1}' + l_{21} |z_1|^2 + l_{22} |z_2|^2], \end{aligned}$$

где  $\tau_m', \tau_{m+1}' \in R, l_{jk} \in C$  (множеству комплексных чисел),  $z_1 = z_1(s), z_2 = z_2(s), s = \varepsilon t$  - медленное время. В итоге такое сведение позволяет заключить о более сложной динамике и структуре решений краевой задачи (8), (9). В частности, бифурцирующие решения из однородных состояний равновесия имеют две моды:  $m$  и  $m+1$ . В приложениях к задаче о формировании неоднородного нанорельефа под воздействием ионной бомбардировки последнее замечание означает, что формируемый рельеф имеет уже относительно сложную структуру.

**2. Обобщенные периодические условия.** Рассмотрим обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского (2) вместе с краевыми условиями (5). В рамках этого раздела ограничимся случаем уравнения, когда  $d_1 = d \neq 0, d_2 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ , т.е. очень близкого к варианту, предложенного в работах [1,2]. При этом, как уже, отмечалось, краевая задача (2), (5) может быть сведена к задаче определения функции  $u_x = v$ . Это приводит к краевой задаче для уравнения вида (3), но уже со стандартными периодическими условиями

$$v_t = -A(b, d)v + c_1(v^2)_x, \quad (14)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x). \quad (15)$$

Элементарно проверяется, что здесь имеется сохраняющий свое значение интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t, x) dx = \alpha \in R.$$

Поэтому можно представить

$$v(t, x) = \alpha + w(t, x),$$

где  $w(t, x)$  - новая неизвестная функция с нулевым средним

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t, x) dx = 0.$$

Для  $w(t, x)$  получаем вспомогательную краевую задачу

$$w_t = -A(b, d, \alpha)w + c_1(w^2)_x, \quad (16)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t, x) dx = 0, \quad (17)$$

где  $A(b, d, \alpha) = -w_{xxxx} + bw_{xx} + d(\alpha)w_x$ ,  $a(\alpha) = d + 2c_1\alpha$ ,  $\alpha \in R$ .

Пусть  $b = 1 + \gamma\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 \ll 1$ . Тогда при любом  $\alpha$  краевая задача (16), (17) имеет периодические решения по переменной  $t$

$$w(t, x) = 2\varepsilon^{1/2} \rho_0 \cos(\sigma(\alpha)t + x + \beta) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где  $\beta$  - произвольная действительная постоянная,  $\sigma(\alpha) = d + 2c_1\alpha$ ,  $\rho_0 = \sqrt{\frac{3\gamma}{c_1^2}}$ ,  $\gamma > 0$ . Данное

решение устойчиво как решение вспомогательной краевой задачи (16), (17).

В то же время краевая задача (14), (15) имеет уже двухпараметрическое семейство решений

$$v(t, x, \alpha, \varepsilon) = \alpha + 2\varepsilon^{1/2} \rho_0 \cos(\sigma(\alpha)t + x + \beta) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

которые формируют двумерный локальный аттрактор заполненный решениями  $v(t, x, \alpha, \varepsilon)$ .

Все эти решения периодичны по  $t$ , имеют различные периоды и, в тоже время, неустойчивы в смысле определения Ляпунова. Более детальное изложение этого фрагмента содержится в работах [7,8].

Итак, при любом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $b = 1 + \gamma\varepsilon$ ,  $\gamma > 0$  краевая задача (14), (15) имеет локальный аттрактор, заполненный периодическими решениями, каждое из которых неустойчиво в смысле определения Ляпунова. При проверке определения Ляпунова следует использовать метрику естественную для решений данной краевой задачи, т.е. метрику фазового пространства решений изучаемой краевой задачи.

В работе [8] была рассмотрена краевая задача (2), (7). Такой выбор краевых условий более естественен для приложений, связанных с математическим моделированием процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. Для этой задачи также можно указать диапазон параметров, при котором у нее существует локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми решениями. В частности, это приводит к выводу о сравнительно плохой прогнозируемости результатов опытов по формированию неоднородного рельефа под воздействием потока ионов. Эксперименты подтверждают такой вывод.

### Список литературы

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin.: Springer, 1984.
2. Sivashinsky G.I. Weak turbulence in periodic flow // Phisica D. 1985. V. 17. №2. P. 243-255.
3. Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. Derivation of basic equation // Acta Astronautica. 1977. V. 4. P. 1177-1206.
4. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography by ion bombardment// J. Vac. Techno. A. 1988. V. 6. № 4. P. 2390-2395.
5. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1. № 2. С. 151-158.

6. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Бифуркация пространственно неоднородных решений в двух задачах для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Вестник МИФИ. 2014. Т.3. № 4. С. 408-415.
7. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. № 5. С. 930-945.
8. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 208. № 2. P. 211-221.
9. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcation in Kuramoto-Sivashinsky equation // Pliska Studia Mathematica. 2015. V. 25. P. 101-110.



## ЦИКЛЫ И ТОРЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Д.А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,  
математический факультет.

150003 Ярославль, ул. Советская, 14, e-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru

Рассматривается задача о синхронизации колебаний двух слабосвязанных осцилляторов. На базе применения метода нормальных форм найдены все возможные типы циклов: синхронный, противофазный, а также аналитически отмечено возможность нового типа синхронизации в виде асимметричных циклов. Рассмотрен вопрос об устойчивости всех трех типов, а также указана возможность реализации локальных бифуркаций инвариантных двумерных торов.

**Ключевые слова:** синхронизация, осцилляторы, устойчивость, нормальные формы, синхронный, противофазный, асимметричные циклы.

**Введение.** Задача о взаимодействии двух слабосвязанных полностью идентичных осцилляторов (автоколебательных систем) достаточно популярна для приложений в механике, а также радиофизике (см., например, [1-3], а также цитированные в них работы). В качестве математической модели такой колебательной системы рассмотрим следующую систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f(x_1, \dot{x}_1) + 2\varepsilon\gamma(x_1 - x_2) + 2\varepsilon\beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 + f(x_2, \dot{x}_2) + 2\varepsilon\gamma(x_2 - x_1) + 2\varepsilon\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\omega, \alpha, \gamma, \beta \in R$ . Без нарушения общности можно считать, что  $\omega = 1$ . Будем также считать, что

- 1)  $f(u, v)$  - достаточно гладкая функция переменных  $u, v$ , если  $u^2 + v^2 < \delta^2$ , где  $\delta \in R_+$  ( $\delta \in R, \delta > 0$ );
- 2)  $f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=v=0} = \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{u=v=0} = 0$ .

Наконец,  $\varepsilon$  - малый неотрицательный параметр.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} - 2\varepsilon\alpha\dot{y} + y + f(y, \dot{y}) = 0. \quad (2)$$

Пусть уравнение (2) имеет цикл  $y(t, \varepsilon)$ . Тогда система дифференциальных уравнений (1) имеет цикл

$$x_1(t, \varepsilon) = x_2(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon),$$

который принято называть синхронным циклом. Пусть решение  $y(t, \varepsilon)$  устойчиво как решение вспомогательного уравнения (2). Уместно сразу отметить, что вопрос об устойчивости синхронного цикла для системы (1) не имеет однозначного ответа и не обязательно наследует устойчивость цикла уравнения (2). Кроме того, как будет отмечено ниже, система дифференциальных уравнений (1) может иметь не только синхронное периодическое решение, но и иные периодические решения.

Например, противофазное периодическое решение. Это решение, для которого

$$x_2(t) = -x_1(t).$$

Более того, возможны и иные периодические решения, для которых

$$|x_1(t)| \neq |x_2(t)|.$$

Решения, выделяемые последним условием, назовем асимметричными.

Далее ограничимся рассмотрением тех решений  $x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon)$  системы (1), которые принадлежат достаточно малому шару фазового пространства решений с центром в нуле. В таком случае вопрос о существовании и устойчивости периодических решений, а может быть и иных инвариантных множеств (аттракторов), можно свести к анализу специальной системы уравнений первого порядка – нормальной форме.

Отметим, что в рамках этой работы, отчасти для упрощения изложения, ограничимся случаем, когда  $\beta = 0, \gamma \neq 0$ , то есть связь между осцилляторами инерционная (пассивная). Такой вариант постановки задачи был рассмотрен частично в работах автора [4-5]. Напомним, что при  $\beta > 0, \gamma = 0$  имеет место вариант диссипативной связи, а при  $\beta < 0, \gamma = 0$  реализуется вариант активной связи. Если  $\gamma \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ , то присутствуют два типа связи: инерционная и диссипативная или инерционная и активная.

**1. Нормальная форма.** Для ее построения можно использовать модифицированный вариант алгоритма Крылова-Боголюбова.

Решения системы (1) будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} u_1(t, s) + \varepsilon v_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} w_1(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} u_2(t, s) + \varepsilon v_2(t, s) + \varepsilon^{3/2} w_2(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $s = \varepsilon t$  - медленное время. При этом положим

$$\begin{aligned} u_1(t, s) &= z_1(s) \exp(it) + \bar{z}_1(s) \exp(-it), \\ u_2(t, s) &= z_2(s) \exp(it) + \bar{z}_2(s) \exp(-it). \end{aligned}$$

Подстановка сумм (3) в систему (1) с последующим приравнованием слагаемых при одинаковых степенях  $\varepsilon : \varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$  приводит к линейным неоднородным уравнениям для определения функций  $v_1, v_2, w_1, w_2$ . Подчеркнем, что функции  $u_1(t, s_0), u_2(t, s_0)$  удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + y = 0$$

при любом фиксированном  $s_0$ . Функции  $v_j(t, s), w_j(t, s)$  по переменной  $t$  имеют период  $2\pi$  ( $j = 1, 2$ ).

Так для  $v_1, v_2$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + v_1 &= \Phi_2(u_1, \dot{u}_1), \\ \ddot{v}_2 + v_2 &= \Phi_2(u_2, \dot{u}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Для  $w_1, w_2$  получаем аналогичную систему

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + w_1 &= \Phi_3(u_1, \dot{u}_1, v_1, \dot{v}_1, z_1, \bar{z}_1, z_1', \bar{z}_1') - 2\gamma(u_1 - u_2), \\ \ddot{w}_2 + w_2 &= \Phi_3(u_2, \dot{u}_2, v_2, \dot{v}_2, z_2, \bar{z}_2, z_2', \bar{z}_2') - 2\gamma(u_2 - u_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где штрихом обозначена частная производная по  $s$ , а точкой по  $t$ . Система дифференциальных уравнений (4) разрешима в классе  $2\pi$  периодических функций относительно переменной  $t$ .

Условия разрешимости системы дифференциальных уравнений (5) в классе  $2\pi$  периодических функций относительно переменной  $t$  (при этом  $s$  рассматриваем как параметр) приводят к системе дифференциальных уравнений для комплекснозначных функций  $z_1(s), z_2(s)$

$$\begin{aligned} z_1' &= \alpha z_1 - (d + ic)z_1 |z_1|^2 - i\gamma(z_2 - z_1), \\ z_2' &= \alpha z_2 - (d + ic)z_2 |z_2|^2 - i\gamma(z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) – это “главная” часть нормальной формы. При  $d \neq 0$  ее анализ позволяет изучить вопрос о существовании и устойчивости периодических решений у первоначальной системы дифференциальных уравнений (1). При  $d = 0$  требуются дополнительные построения

ния. Наконец, будем считать, что  $c \neq 0$ . Частный случай  $c = 0$  требует особого, отдельного изучения.

**2. Анализ нормальной формы.** Положим

$$\begin{aligned} z_j(s) &= \rho_j(s) \exp(i\varphi_j(s)), \quad j = 1, 2, \\ \psi(s) &= \varphi_2(s) - \varphi_1(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Замены (7) сводят вопрос о существовании и устойчивости периодических решений у системы (6) к аналогичным вопросам для состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений в  $R^3$  для переменных  $\rho_1, \rho_2, \psi$

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \gamma\rho_2 \sin \psi + \alpha\rho_1 - d\rho_1^3, \\ \rho_2' &= -\gamma\rho_1 \sin \psi + \alpha\rho_2 - d\rho_2^3, \\ \psi' &= (\rho_1^2 - \rho_2^2)(c - \gamma \frac{\cos \psi}{\rho_1 \rho_2}). \end{aligned} \quad (8)$$

В свою очередь, вопрос о существовании состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (8) приводит к анализу системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma\rho_2 \sin \psi + \alpha\rho_1 - d\rho_1^3 &= 0, \\ -\gamma\rho_1 \sin \psi + \alpha\rho_2 - d\rho_2^3 &= 0, \\ (\rho_1^2 - \rho_2^2)(c - \gamma \frac{\cos \psi}{\rho_1 \rho_2}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

У последней системы дифференциальных уравнений (8) есть два типа состояний равновесия.

Первый тип предусматривает выполнение равенства

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0.$$

Второй тип характеризуется условием

$$\rho_1 \neq \rho_2.$$

Пусть сначала  $\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0$ . При этом возможны два подслучая:

$$\text{а) } \rho_1 = \rho_2 = \rho > 0, \psi = 0.$$

Такому состоянию равновесия системы дифференциальных уравнений (8) соответствует синхронное периодическое решение (цикл) системы (1);

$$\text{б) } \rho_1 = \rho_2 = \rho > 0, \psi = \pi.$$

Такому состоянию равновесия системы дифференциальных уравнений (8) соответствует противофазный цикл системы (1).

Нетрудно отметить, что решения вида а), б) существуют, если  $\alpha d > 0$ , а соответствующее решение  $\rho = \sqrt{\alpha/d}$ .

Перейдем к анализу вопроса о существовании состояний равновесия второго типа ( $\rho_1 \neq \rho_2$ ). Это приводит к необходимости анализа системы ( $\rho_1^2 - \rho_2^2 \neq 0$ ), полученной из системы (9) после преобразования третьего уравнения

$$\begin{aligned} \alpha\rho_1 - d\rho_1^3 &= -\gamma\rho_2 \sin \psi, \\ \alpha\rho_2 - d\rho_2^3 &= \gamma\rho_1 \sin \psi, \\ c\rho_1\rho_2 &= \gamma \cos \psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned} \alpha - d\rho_1^2 &= -c\rho_2^2 \operatorname{tg} \psi, \\ \alpha - d\rho_2^2 &= c\rho_1^2 \operatorname{tg} \psi, \end{aligned} \quad (11)$$

если в системе (10)  $c \neq 0, \gamma \neq 0$ .

Положим  $a = \frac{\alpha}{d}, b = \frac{c}{d}, b \operatorname{tg} \psi = q$ . Тогда из равенств (11) и вида замен вытекает, что

$$\rho_1^2 = a \frac{1+q}{1+q^2}, \rho_2^2 = a \frac{1-q}{1+q^2} \quad (q \in (-1,1)), \operatorname{tg} \psi = \frac{q}{b} \quad (\psi = \operatorname{arctg} \frac{q}{b} + \pi m, m \in Z). \quad (12)$$

Используя третье равенство системы (11) с учетом (12), получаем для  $q$  биквадратное уравнение

$$P(q) = (1 + \mu^2)q^4 + (2\mu^2 + b^2 - 1)q^2 + (\mu^2 - b^2) = 0, \quad (13)$$

где  $\mu^2 = \frac{\gamma^2}{d^2}$ . Отметим, что  $P(1) = 4\mu^2 > 0, P(0) = \mu^2 - b^2$ . Поэтому при  $\mu^2 - b^2 < 0$  уравнение (13) имеет корень на  $(0,1)$  и 2 на  $(-1,1)$ . При выполнении неравенства  $\mu^2 - b^2 > 0$  уравнение (13) на  $(-1,1)$  имеет либо 4 корня, либо таких корней нет. При одновременном выполнении неравенств

$$\mu^2 - b^2 > 0, \quad 2\mu^2 + b^2 - 1 < 0, \quad D = (b^2 + 1)^2 + 8\mu^2(b^2 - 1) > 0$$

имеем четыре корня на  $(-1,1)$  и их три, если  $D = 0$ . Следует отметить, что диапазон значений параметров  $b$  и  $\mu$ , при которых реализуются условия существования трех или четырех корней, достаточно узко. Основным следует признать вариант, когда таких корней два или они отсутствуют. Отметим, что при  $\mu^2 - b^2 = 0$  уравнение (13) имеет корень  $q = 0$ , но ему соответствует состояние равновесия

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho^2 = \frac{\alpha}{d},$$

т.е. синхронный или противофазный циклы. Впрочем, при  $\mu^2 - b^2 = 0$  могут быть и другие решения, если

$$2\mu^2 + b^2 - 1 < 0 \quad (3b^2 - 1 < 0).$$

Им уже соответствуют асимметричные циклы.

**3. Устойчивость циклов.** Этот вопрос может быть сведен к вопросу об устойчивости состояний равновесия вспомогательной системы дифференциальных уравнений (8). В свою очередь, для исследования вопроса об условиях устойчивости состояний равновесия можно применить теорему об устойчивости по линейному приближению.

Стандартные вычисления показывают, что состояние равновесия

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = 0.$$

асимптотически устойчиво, если

$$\alpha > 0, \gamma(c - \frac{\gamma}{\rho^2}) < 0$$

и оно неустойчиво, если знак одного из двух выписанных неравенств заменен на противоположный.

Аналогичные утверждения можно сформулировать и для второго состояния равновесия

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = \pi.$$

Оно асимптотически устойчиво, если

$$\alpha > 0, \gamma(c + \frac{\gamma}{\rho^2}) > 0$$

и оно неустойчиво, если знак одного из двух выписанных неравенств заменен на противоположный.

Для остальных состояний равновесия (асимметричных решений) условия устойчивости имеют следующий вид

$$Q = 4[1 + (b^2 - 5)q^2 + q^4] > 0, R = 8q^2[(3b^2 - 1) + (3 - b^2)q^2] > 0, PQ - R > 0,$$

где  $q$  - соответствующий корень биквадратного уравнения (13). Отметим, что  $P = 4(1 - q^2) > 0$  при всех допустимых значениях  $q$ .

Итак, показано, что система дифференциальных уравнений (1) может иметь циклы трех типов, в том числе и устойчивые, а значит и физически реализуемые. Первый тип описывает синхронные колебания, второй – противофазные, а третий тип описывает такие колебания, когда амплитуда колебаний первого и второго осциллятора отличаются. Более того разность фаз таких колебаний отлична как от нуля так и от  $\pi$ .

Добавим, что в работах [2-5] показано, что при потере устойчивости асимметричных циклов (состояний равновесия третьего типа) могут появиться (бифурцировать) двумерные инвариантные торы и в том числе с квазипериодической обмоткой.

Подчеркнем также, что в наиболее популярных вариантах следует рассматривать случай, когда  $\alpha > 0$  ( $\alpha = 1$ ), а величина  $d > 0$  ( $d = 1$ ) из нормальной формы (6). Так, например, будет, если рассмотреть два связанных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга. В такой ситуации оказалось, что противофазный цикл существует и устойчив, если  $\gamma > 0$ . С другой стороны при таком выборе параметров задачи синхронный цикл может быть неустойчивым. Напомним, что в большинстве известных опытах Гюйгенса [6] наблюдались именно противофазные колебания.

Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений (1) можно выписать асимптотические формулы для решений, соответствующих состояниям равновесия системы (8), т.е. решения системы уравнений (9).

Так, состоянию равновесия  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = 0$  соответствует синхронный цикл. Для него справедлива асимптотическая формула

$$x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\alpha}{d}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$x_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\alpha}{d}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где  $\varphi_0 \in R$ , а  $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon) = 1 + o(\varepsilon^{1/2})$ . Этот цикл наследует устойчивость состояния равновесия  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = 0$ .

Состоянию равновесия  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = \pi$  соответствует, как уже отмечалось, противофазный цикл. Для такого решения справедлива асимптотическая формула

$$x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\alpha}{d}} \cos(\omega_2 t + \varphi_0) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$x_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\alpha}{d}} \cos(\omega_2 t + \varphi_0 + \pi) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где  $\varphi_0 \in R$ , а  $\omega_2 = \omega_2(\varepsilon) = 1 + o(\varepsilon^{1/2})$ . Этот цикл наследует устойчивость состояния равновесия  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \psi = \pi$ .

Наконец, решения системы уравнений (9)

$$\rho_1^2 = a \frac{1+q}{1+q^2}, \rho_2^2 = a \frac{1-q}{1+q^2}, \operatorname{tg} \psi = \frac{q}{b}$$

порождают цикл

$$x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{a \frac{1+q}{1+q^2}} \cos(\omega_3 t + \varphi_0) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$x_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{a \frac{1-q}{1+q^2}} \cos(\omega_3 t + \varphi_0 + \psi) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где  $\varphi_0 \in R, \psi = \operatorname{arctg} \frac{q}{b} + \pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $q$  - корень биквадратного уравнения (13), а значения целого параметра  $m$  может быть выбрано из тех соображений, что знак  $\cos \psi$  совпадает со знаком дроби  $\frac{c}{\gamma}$ . Наконец,  $\omega_3 = \omega_3(\varepsilon) = 1 + o(\varepsilon^{1/2})$ . Напомним, что устойчивость последнего цикла наследует устойчивость соответствующего состояния равновесия.

Отметим, что частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  в ситуации общего положения различные, но

$$|\omega_1 - \omega_2| = o(\varepsilon^{1/2}), |\omega_1 - \omega_3| = o(\varepsilon^{1/2}),$$

т.е. отличаются незначительно.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК 5932.2015.1).

### Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. М.: Техносфера, 2003.
2. Куликов Д.А. Аттракторы уравнения Гинзбурга-Ландау и его конечномерного аналога. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-мат. наук. Ярославль, 2006.
3. Куликов Д.А. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабо-связанных осцилляторах // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 4. С. 543-559.
4. Куликов Д.А. Циклы билокальной модели волнового уравнения. Полный анализ // Современные проблемы математики и информатики. 2001. В. 4. С. 93-96.
5. Куликов Д.А. Исследование динамики билокальной модели нелинейных волновых уравнений // Современные проблемы математики и информатики. 2002. В. 5. С. 46-52.
6. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. М.: Изд-во АН СССР, 1991.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА

Д.А. Лебедев

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова

119192 Москва, Мичуринский проспект, д. 1, e-mail: [lebedevda@gmail.com](mailto:lebedevda@gmail.com)

В данной работе рассматривается механическая система, которая состоит из диска, катящегося по горизонтальной плоскости без проскальзывания, и гироскопа, вращающегося относительно оси диска, при этом центр масс системы не совпадает с центром диска. Уравнения движения данной системы выписаны в форме уравнений Эйлера-Лагранжа в квазикоординатах. Определено многообразие стационарных движений. Исследована устойчивость стационарных движений. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости этих движений.

*Ключевые слова:* диск, гироскоп, неголономные системы, квазикоординаты, устойчивость, функция Ляпунова

Рассмотрим механическую систему, состоящую из диска, катящегося по горизонтальной плоскости без проскальзывания и ротора – динамически симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска. Ранее рассматривался [1] диск с центром масс на гироскопической оси и не принадлежащий плоскости диска, а также рассматривался диск, несущий гироскоп, когда центр масс системы совпадает с центром диска. Данная работа является обобщением указанных выше работ.

Движение системы можно описать при помощи шести обобщенных координат. Обозначим через  $x, y$  – горизонтальные координаты центра диска, через  $\psi$  – угол между линией пересечения плоскости диска с горизонтальной плоскостью и положительным направлением оси абсцисс, через  $\theta$  – угол между плоскостью диска и горизонтальной плоскостью, через  $\varphi$  – угол поворота диска относительно его оси и  $\alpha$  – угол поворота ротора относительно диска,  $a$  – радиус диска,  $h$  – расстояние между центрами масс диска и ротора,  $m_1$  и  $m_2$  – массы диска и ротора соответственно,  $A_1, C_1$  – моменты инерции диска ( $A_1$  – относительно диаметра),  $A_2, C_2$  – соответствующие моменты инерции ротора, вычисленные в центре диска. При отсутствии проскальзывания имеется две неголономные связи

$$\dot{x} = a(\dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\psi) - (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \cos(\psi))$$

$$\dot{y} = -a(\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\psi) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \sin(\psi))$$

Уравнения для данной системы выписаны в форме уравнений Эйлера-Лагранжа [3] в квазикоординатах [1].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w_s} + \sum_{r=1}^n \sum_{t=l+1}^n \gamma_{ts}^r \frac{\partial T}{\partial w_r} w_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = P_s$$

В этом выражении  $T$  – кинетическая энергия системы,  $w_s$  – квазискорости,  $\pi_s$  – дифференциалы квазикоординат,  $P_s$  – обобщенные силы, отнесенные к квазикоординатам,  $\gamma_{ts}^r$  – трехиндексные символы Больцмана, которые вычисляются по формуле

$$\gamma_{tm}^s = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k} \right) b_{rt} b_{km},$$

где  $a_{sk}$  – элементы матрицы перехода от обобщенных скоростей к квазискоростям, а  $b_{ij}$  – элементы матрицы, обратной к матрице  $\hat{a}$

Для рассматриваемой системы квазискорости были введены при помощи матрицы  $\hat{a}$  :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} = \hat{a} \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \sin(\theta) \sin(\psi) & a \cos(\psi) & a \cos(\theta) \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & a \cos(\psi) \sin(\theta) & a \sin(\psi) & a \cos(\theta) \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix},$$

В которой первые две строки, соответствуют неголономным связям; они введены так, что квазискорости им соответствующие обнуляются в силу этих неголономных связей. При таком выборе квазискоростей уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} M \omega_3' a^2 + M(g \cos(\theta) + a \omega_4 \omega_5) a - A \operatorname{ctg}(\theta) \omega_5^2 + C_1 \omega_4 \omega_5 - \\ hm_2(g \sin(\theta) + a \omega_5(\omega_5 - \operatorname{ctg}(\theta) \omega_4)) + C_2 \omega_5(\omega_4 + \omega_6) + A \omega_3' = 0 \\ -M \omega_3 \omega_5 a^2 - hm_2(\operatorname{ctg}(\theta) \omega_3 \omega_5 + \omega_5') a + (Ma^2 + C_1) \omega_4' = 0 \\ -C_1 \omega_3 \omega_4 - C_2 \omega_3(\omega_4 + \omega_6) + ahm_2(\omega_3 \omega_5 - \omega_4') + A(\operatorname{ctg}(\theta) \omega_3 \omega_5 + \omega_5') = 0 \\ C_2(\omega_4' + \omega_6') = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В системе имеется три циклических и одна позиционная координаты. Уравнения движения (1) допускают частные решения, при которых позиционные координаты и циклические квазискорости остаются постоянными. Указанные решения определяют стационарные движения системы. В частности, равенства

$$\operatorname{ctg}(\theta_0) = \frac{hm_2}{aM}, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = \omega_0, \quad \omega_5 = 0, \quad \omega_6 = \Omega \quad (2)$$

определяют стационарное движение - прямолинейное качение наклоненного диска.

Получим условия устойчивости стационарного движения (2), построив функцию Ляпунова при помощи линейной комбинации интегралов имеющихся в системе. Но явный вид всех интегралов неизвестен, поэтому были найдены разложения в ряд частных решений уравнений движения, при помощи которых были найдены приближенные выражения для интегралов уравнений движения, которые для возмущенного движения можно выписать в форме:

$$\begin{aligned} V_1 = -\frac{\beta C_1 \delta}{B} - \frac{\beta C_1 \omega_0}{B} + w_5 \left( \frac{\beta C_1 G}{B} + \beta H + 1 \right) - \frac{\beta C_2 \xi}{B} \\ V_2 = w_5 \left( -\frac{\beta C_1}{B} + \frac{\beta C_1^2}{BF} - \frac{2\beta C_1 GH}{B} - \frac{C_1 G}{B} - \beta H^2 - H \right) + \delta \left( \frac{\beta C_1 H}{B} + \frac{C_1}{B} \right) + \\ + \frac{\beta C_1 H \omega_0}{B} + \frac{\beta C_2 H \xi}{B} \\ V_3 = \left( \frac{Ma^2}{2} + \frac{A}{2} \right) w_3^2 + \frac{Aw_5^2}{2} + \frac{F\delta^2}{2} + F\delta\omega_0 + w_5(-ah\delta m_2 - ah\omega_0 m_2) - \\ - \frac{1}{2} g \beta^2 \sqrt{a^2 M^2 + h^2 m_2^2} \end{aligned} \quad (3)$$



В выражениях (3) приняты обозначения  
 $\theta = \theta_0 + \beta$ ,  $w_3 = \omega_3$ ,  $\omega_4 = \omega_0 + \delta$ ,  $M = m_1 + m_2$ ,

$$A = A_1 + A_2, \quad F = Ma^2 + C_1, \quad H = m_2 ah, \quad G = A - \frac{H^2}{F}, \quad \xi = \omega_4 + \omega_6, \quad B = A - FG^2$$

Из выражений (3) получим функцию Ляпунова

$$V = V_3 - \frac{BF\omega_0}{C_1}(V_2 + H \cdot V_1) = \frac{Aw_3^2}{2} + \frac{1}{2}a^2Mw_3^2 + \frac{Aw_5^2}{2} + \frac{F\delta^2}{2} + \tag{4}$$

$$+ w_5(F\beta\omega_0 - \beta C_1\omega_0 + ahH\beta m_2\omega_0 - ah\delta m_2) - \frac{1}{2}g\beta^2\sqrt{a^2M^2 + h^2m_2^2}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости прямолинейного качения наклоненного диска получим при помощи критерия Сильвестра положительной определенности функции Ляпунова [4].

Из этих условий следует, что расстояние между центрами масс ротора и диска ограничено величиной, зависящей от массы диска и ротора, от радиуса диска и от моментов инерции диска

$$h < \sqrt{\frac{A(a^2M + C_1)}{a^2m_2^2}}.$$

Также из этих условий следует, что скорость ротора и диска должны быть разнонаправлены и скорость ротора должна быть по модулю больше некоторой величины, зависящей от конструктивных параметров системы и скорости качения диска.

### Список литературы

1. Т. Леви-Чевита, У. Амальди Курс теоретической механики, Т. 2, М.: изд. Иностран. Лит., 1961. 556с.
2. И.М. Миндлин, Об устойчивости диска, несущего гироскоп // Инженерный журнал. 1964. Т. IV. Вып. 1. С. 101-104.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз., 1961.
4. Н.Г. Четаев. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1955.

## ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМА СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ДВИГАТЕЛЕЙ

А.В. Леонтьева, Н.В. Леонтьев

Институт проблем машиностроения РАН  
603024 Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, e-mail: aleonav@mail.ru

В работе рассматривается задача синхронизации в системе двух двигателей, установленных на разных, но связанных между собой упругой связью, платформах. Во втором приближении метода осреднения выявлен режим частотной синхронизации. Рассмотрена система в резонансе. Найдены уравнения стационарных режимов колебаний. Получены зависимости амплитуд колебаний платформ и фазы колебаний от расстройки частот источников колебаний.

*Ключевые слова:* синхронизация, метод осреднения, резонанс, стационарный режим, асинхронный двигатель, деформируемое основание.

Явления синхронизации и самосинхронизации неуравновешенных роторов – важные явления механики. Известно, что два или более кинематически и электрически не связанных между собой ротора, установленные на общем подвижном основании и приводимые в движение независимыми асинхронными двигателями, вращаются синхронно – с одинаковыми или кратными средними угловыми скоростями и с определенными взаимными фазами. При этом согласованность вращения роторов возникает, несмотря на различие между их парциальными угловыми скоростями, т.е. теми скоростями, с которыми они вращаются, будучи установленными на неподвижном основании [1-3].

В природе и технике синхронизация встречается довольно часто и играет как положительную, так и отрицательную роль [4]. Одна из причин многих аварий в энергоёмком оборудовании является синхронизация частот роторов, посредством вибрации основания в процессе работы двигателей. Режимы синхронизации возникают произвольно при подходящих параметрах конструкции, такие режимы устойчивы и разрушить их очень сложно. Поэтому задача о выявлении стационарных режимов синхронизации, их устойчивости и своевременное предотвращение отрицательного эффекта синхронизации в конструкциях со многими источниками вибрации, является одной из важных задач механики и техники [5].

В статьях [6, 7] рассмотрены задачи синхронизации роторов двигателей, установленные на общем вязкоупругом основании. Показано, что имеет место стационарный режим колебаний системы – частотная синхронизация. Показано наличие фазовой синхронизации. Устойчивость стационарных режимов колебаний проанализирована в работе [8].

В данной работе рассмотрим систему двух двигателей, установленных на разных платформах.

Физическая модель задачи представляет собой систему двух платформ связанных между собой упругой связью. Одна из платформ связана с неподвижной стенкой упругой и диссипативной связями. На платформах жестко закреплены двигатели, на каждой платформе по одному двигателю, с одинаковыми статическими и механическими характеристиками (рис. 1).

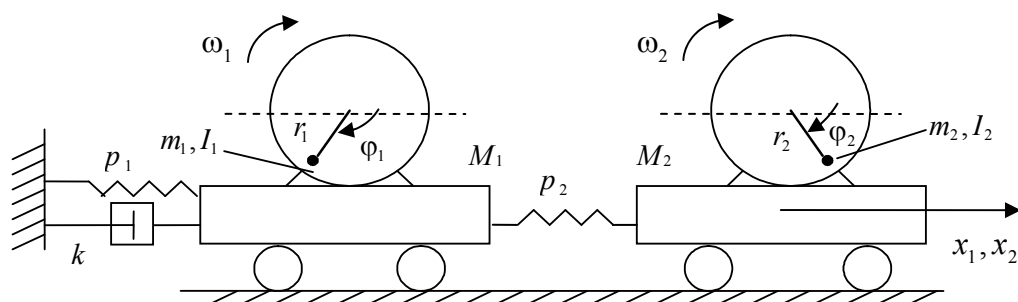


Рис. 1. Физическая модель системы двух двигателей

Здесь  $M_1$  и  $M_2$  – массы платформ абсолютно твердых тел с одной степенью свободы каждое, характеризующиеся линейными горизонтальными смещениями  $x_1$  и  $x_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  – коэффициенты упругости платформ, связанных с неподвижным основанием – фундаментом,  $k$  – коэффициент диссипации платформы,  $m_1$ ,  $m_2$  – массы эксцентриков с эксцентриситетами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно,  $I_1$ ,  $I_2$  – моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – углы поворота роторов и отсчитываются от направления оси  $x$ .

Математическая модель задачи представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 + p_1 x_1 + p_2 (x_1 - x_2) &= m_1 r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \\ M_2 \ddot{x}_2 + p_2 (x_2 - x_1) &= m_2 r_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2), \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 + H_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) &= L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) + m_1 r_1 \ddot{x}_1 \sin \varphi_1, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + H_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) &= L_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) + m_2 r_2 \ddot{x}_2 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (1)$$

которая описывает колебания оснований и вращения роторов двигателей. Система имеет четыре степени свободы, из которых две степени приходится на колебательную часть системы. Считаем, что массы платформ равны,  $M_1 = M_2 = M$ , и упругие характеристики платформ одинаковые,  $p_1 = p_2$ . Движущий момент и момент сил сопротивления имеют линеаризованный вид,  $L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = M_{0i} - k_{0i} \dot{\varphi}_i$ ,  $H_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = k_i \dot{\varphi}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Постоянные параметры  $M_{0i}$ ,  $k_i$  и  $k_{0i}$  определяются из экспериментальных данных.

Считаем, что в системе (1) имеет место малый параметр, равный отношению неуравновешенной массы ротора к массе основания  $\mu = m_i/M \ll 1$ .

Введение малого параметра как отношение массы дебаланса к колеблющейся массе, предложено И.И. Блехманом [9] и В.О. Кононенко [10] для механической системы, состоящей из упругой платформы и взаимодействующим с ней ротором двигателя, колебания в которой возбуждаются силами инерции неуравновешенной вращающейся массы.

Квазилинейную систему (1) будем исследовать наиболее эффективным методом – методом осреднения, который подробно описан и применен к различным задачам динамики в работе В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова [11].

Для удобства анализа вводим безразмерные переменные  $\bar{x}_1 = x_1/r$ ,  $\bar{t} = t\omega_0$ , где  $r$  – средний эксцентриситет,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний одной из платформ, считаем равной единице. Система в безразмерном виде принимает вид (черта опущена):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \varepsilon \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 &= \mu \kappa_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \\ \ddot{x}_2 + x_2 - x_1 &= \mu \kappa_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_1 + a_1 \dot{\varphi}_1 &= b_1 + \frac{\mu c_1}{\kappa_1} \ddot{x}_1 \sin \varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_2 + a_2 \dot{\varphi}_2 &= b_2 + \frac{\mu c_2}{\kappa_2} \ddot{x}_2 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный коэффициент диссипации, который считаем малой величиной порядка  $\mu$ ,  $\varepsilon = \mu d$ ,  $d$  – новый коэффициент диссипации,  $\kappa_i = r_i/r$ ,  $a_i = (k_i + k_{0i})/I_i$ ,  $b_i = M_{0i}/I_i$ ,  $\mu c_i = m_i r_i^2 / I_i$ .

Представим систему (2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка ( $\dot{x}_1 = y_1$ ,  $\dot{x}_2 = y_2$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ ) и разрешим относительно производных. Порождающее решение полученной системы ( $\mu = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\
 x_2(t) &= \frac{\sqrt{5}+1}{2}A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\
 y_1(t) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2}A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\
 y_2(t) &= A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) - A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\
 \varphi_1(t) &= \Omega_1 t + B_1 + v_1 \exp(-a_1 t), \\
 \varphi_2(t) &= \Omega_2 t + B_2 + v_2 \exp(-a_2 t), \\
 \omega_1(t) &= \Omega_1 - a_1 v_1 \exp(-a_1 t), \\
 \omega_2(t) &= \Omega_2 - a_2 v_2 \exp(-a_2 t),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\Omega_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $\Omega_2 = \frac{b_2}{a_2}$  – номинальные частоты вращения первого и второго двигателей соответственно,  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, B_1, B_2$  – произвольные постоянные, которые в дальнейшем считаем новыми переменными, зависящими от времени.

Система в стандартной форме в первом приближении

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_1 &= \mu \left[ F_2 + \sum_{i=1}^2 C_{1i} \kappa_i F_{1i} \right] \cos \varphi_1, \\
 \dot{A}_2 &= \mu \left[ F_2 + \sum_{i=1}^2 C_{2i} \kappa_i F_{1i} \right] \cos \varphi_2, \\
 \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) - \mu \frac{1}{A_1} \left[ F_2 + \sum_{i=1}^2 C_{1i} \kappa_i F_{1i} \right] \sin \varphi_1, \\
 \dot{\varphi}_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) - \mu \frac{1}{A_2} \left[ F_2 + \sum_{i=1}^2 C_{2i} \kappa_i F_{1i} \right] \sin \varphi_2, \\
 \dot{v}_1 &= \mu \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} (v_1 \cos \beta_1 + \exp(a_1 t) \sin \beta_1) F_3, \\
 \dot{v}_2 &= \mu \frac{c_2}{a_2 \kappa_2} (v_2 \cos \beta_2 + \exp(a_2 t) \sin \beta_2) F_4, \\
 \dot{\beta}_1 &= \Omega_1 - \mu \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} (v_1 \exp(-a_1 t) \cos \beta_1 + \sin \beta_1) F_3, \\
 \dot{\beta}_2 &= \Omega_2 - \mu \frac{c_2}{a_2 \kappa_2} (v_2 \exp(-a_2 t) \cos \beta_2 + \sin \beta_2) F_4,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где, для сокращения записи, введены обозначения

$$\begin{aligned}
 F_{1i} &= (\gamma_i^2 + a_i^2 v_i^2 \exp(-2a_i t)) \cos \beta_i + (a_i^2 - \gamma_i^2) v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i, \\
 F_2 &= (C_{22} A_1 \cos \varphi_1 - C_{12} A_2 \cos \varphi_2) d, \\
 F_3 &= \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) A_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) A_2 \sin \varphi_2, \\
 F_4 &= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) A_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) A_2 \sin \varphi_2,
 \end{aligned}$$

$$C_{11} = C_{21} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad C_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \quad C_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \right),$$

$$\gamma_1 = \Omega_1 - a_1 v_1 \exp(-a_1 t), \quad \gamma_2 = \Omega_2 - a_2 v_2 \exp(-a_2 t).$$

В системе (4) новые переменные  $\varphi_1, \varphi_2, \beta_1, \beta_2$  (быстровращающиеся фазы) связаны со старыми переменными  $\alpha_1, \alpha_2, B_1, B_2$  (фазами) соответственно следующими соотношениями:

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1(t), \quad \varphi_2(t) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2(t), \quad \beta_1(t) = \Omega_1 t + B_1(t), \quad \beta_2(t) = \Omega_2 t + B_2(t).$$

Функции временного среднего, вычисленные для системы (4), терпят разрывы на следующих резонансных прямых:

$$\sqrt{5} + 1 \pm 2\Omega_1 = 0, \quad \sqrt{5} - 1 \pm 2\Omega_1 = 0, \quad \sqrt{5} + 1 \pm 2\Omega_2 = 0, \quad \sqrt{5} - 1 \pm 2\Omega_2 = 0.$$

Резонанса между двигателями не обнаружено. Необходимо построить второе приближение.

Система уравнений, содержащая слагаемые первого и второго порядков малости, полученная из системы (3) после разрешения относительно неизвестных функций  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, B_1, B_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \mu [(C_{22}A_1 \cos \varphi_1 - C_{12}A_2 \cos \varphi_2)d + E_{11}] \cos \varphi_1 - \mu^2 E_{21} \cos \varphi_1, \\ \dot{A}_2 &= \mu [(C_{22}A_1 \cos \varphi_1 - C_{12}A_2 \cos \varphi_2)d + E_{12}] \cos \varphi_2 - \mu^2 E_{22} \cos \varphi_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\mu \frac{1}{A_1} \left[ E_{11} - \frac{d}{2\sqrt{5}} E_3 \right] \sin \varphi_1 + \frac{\mu^2}{A_1} E_{21} \sin \varphi_1, \\ \dot{\alpha}_2 &= -\mu \frac{1}{A_2} \left[ E_{12} - \frac{d}{2\sqrt{5}} E_3 \right] \sin \varphi_2 + \frac{\mu^2}{A_2} E_{22} \sin \varphi_2, \\ \dot{v}_1 &= \mu \frac{c_1}{2a_1 \kappa_1} \exp(a_1 t) E_4 \sin \beta_1 + \mu^2 c_1 \left[ \exp(a_1 t) \left( \frac{d}{2a_1 \kappa_1} E_3 - \frac{\gamma_1^2}{a_1} \cos \beta_1 \right) - a_1 v_1 \sin \beta_1 \right] \sin \beta_1, \\ \dot{v}_2 &= -\mu \frac{c_2}{2a_2 \kappa_2} \exp(a_2 t) E_5 \sin \beta_2 - \mu^2 c_2 \left[ \frac{\gamma_2^2}{a_2} \exp(a_2 t) \cos \beta_2 + a_2 v_2 \sin \beta_2 \right] \sin \beta_2, \\ \dot{B}_1 &= -\mu \frac{c_1}{2a_1 \kappa_1} E_4 \sin \beta_1 + \mu^2 c_1 \left[ a_1 v_1 \exp(-a_1 t) \sin \beta_1 - \frac{d}{2a_1 \kappa_1} E_3 + \frac{\gamma_1^2}{a_1} \cos \beta_1 \right] \sin \beta_1, \\ \dot{B}_2 &= \mu \frac{c_2}{2a_2 \kappa_2} E_5 \sin \beta_2 + \mu^2 c_2 \left[ a_2 v_2 \exp(-a_2 t) \sin \beta_2 + \frac{\gamma_2^2}{a_2} \cos \beta_2 \right] \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$E_{1j} = \sum_{i=1}^2 (C_{ji} \gamma_i^2 \kappa_i \cos \beta_i + C_{ji} a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i) \quad (j=1,2),$$

$$E_{2j} = \sum_{i=1}^2 (D_i c_i \sin^2 \beta_i - D_{ji} c_2 \sin^2 \beta_2) A_i \sin \varphi_i \quad (j=1,2),$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^2 (\sqrt{5} + (-1)^i) A_i \cos \varphi_i, \quad E_4 = \sum_{i=1}^2 (3 + (-1)^i \sqrt{5}) A_i \sin \varphi_i, \quad E_5 = \sum_{i=1}^2 (-1)^i (\sqrt{5} + (-1)^i) A_i \sin \varphi_i,$$

$$C_{11} = C_{21} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_{12} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (\sqrt{5} + 1), \quad C_{22} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5}), \quad D_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3 - \sqrt{5}), \quad D_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3 + \sqrt{5}),$$

$$D_{11} = D_{22} = -C_{11}, \quad D_{12} = D_2, \quad D_{21} = D_1.$$

Система (5) не является системой в стандартной форме. Необходимо ввести быстровращающиеся фазы. Здесь  $\beta_i$  и  $\varphi_i$  – обозначения для сокращения записи.

Исследование временного среднего для уравнений второго приближения (в стандартной форме) приводит к следующим 50-ти резонансным соотношениям:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} + 1 \pm 2\Omega_i = 0, \quad \sqrt{5} - 1 \pm 2\Omega_i = 0, \quad 3(\sqrt{5} + 1) \pm 2\Omega_i = 0, \quad 3(\sqrt{5} - 1) \pm 2\Omega_i = 0, \\ 3\sqrt{5} + 1 \pm 2\Omega_i = 0, \quad 3\sqrt{5} - 1 \pm 2\Omega_i = 0, \quad \sqrt{5} + 3 \pm 2\Omega_i = 0, \quad \sqrt{5} - 3 \pm 2\Omega_i = 0, \\ \sqrt{5} + 1 + \Omega_1 \pm \Omega_2 = 0, \quad \sqrt{5} - 1 + \Omega_1 \pm \Omega_2 = 0, \quad \sqrt{5} + 1 - \Omega_1 \pm \Omega_2 = 0, \quad \sqrt{5} - 1 - \Omega_1 \pm \Omega_2 = 0, \\ \Omega_1 \pm \Omega_2 = 0, \quad 2\Omega_i \pm 1 = 0, \quad \sqrt{5} \pm 2\Omega_i = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

При вычислении временного среднего находим, наряду с физически нереализуемыми соотношениями, соотношение, характеризующее эффект синхронизации в системе.

Рассмотрим систему вблизи резонанса  $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$ , номинальные частота вращения двигателей близки между собой, но далеки от частот колебаний платформ. Вводим расстройку по частоте  $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$  и медленную фазу, характеризующую разность быстровращающихся фаз  $\theta(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ . В системе второго приближения переходим к новой переменной  $\theta$ .

Уравнения для медленных переменных, осредненные по быстрым переменным  $\phi_1, \phi_2, \alpha_1$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= n_{11} \frac{\Delta \sin(\theta)}{B_1} + n_{12} B_1, \\ \dot{B}_2 &= n_{21} \frac{\Delta \sin(\theta)}{B_2} + n_{22} B_2, \\ \dot{\theta} &= \Delta + p_0 \sin(\theta) + p_1 B_1^2 + p_2 B_2^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} n_{j1} &= (-1)^j \mu^2 \frac{1}{5} (\sqrt{5} + (-1)^{j+1}) (3 + (-1)^j \sqrt{5} + 2\Omega_1 \Omega_2) \kappa_1 \kappa_2 n_{0j1} n_{0j2}, \\ n_{j2} &= \mu^2 \left( -\frac{1}{5} (5 + (-1)^j 2\sqrt{5}) \frac{c_1}{a_1} n_{0j1} - \frac{1}{10} (5 + (-1)^j \sqrt{5}) \frac{c_2}{a_2} n_{0j2} + \frac{1}{40} \pi (\sqrt{5} + (-1)^j) d^2 \right), \\ p_j &= \mu^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \right)^2 \frac{n_{0j1}}{\Omega_1} (7 + (-1)^j 3\sqrt{5}) - \frac{1}{2} \left( \frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \right)^2 \frac{n_{0j2}}{\Omega_2} (3 + (-1)^j \sqrt{5}) \right) \quad (j = 1, 2), \\ n_{0ji} &= \frac{\Omega_i^2}{(\sqrt{5} + (-1)^j - 2\Omega_i)(\sqrt{5} + (-1)^j + 2\Omega_i)}. \end{aligned}$$

Рассматриваем стационарные режимы движений. Подставляем  $\dot{\theta} = \dot{B}_1 = \dot{B}_2 = 0$  в (6)

$$\begin{aligned} n_{11} \frac{\Delta \sin(\theta)}{B_1} + n_{12} B_1 &= 0, \\ n_{21} \frac{\Delta \sin(\theta)}{B_2} + n_{22} B_2 &= 0, \\ \Delta + p_0 \sin(\theta) + p_1 B_1^2 + p_2 B_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражая из первого и второго уравнений системы (7) квадраты амплитуд и подставляя в третье уравнение, получаем неявную зависимость  $F(\Delta, \theta) = 0$ . Выражая из этого уравнения синус, и подставляя в первые два уравнения, находим неявные зависимости  $F(\Delta, B_1) = 0$  и  $F(\Delta, B_2) = 0$ .

Зависимости амплитуд колебаний платформ от расстройки по частоте

$$\frac{n_{11}\Delta^2}{B_1\left(p_1\frac{n_{11}}{n_{12}}\Delta + p_2\frac{n_{21}}{n_{22}}\Delta - p_0\right)} + n_{12}B_1 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{n_{21}\Delta^2}{B_2\left(p_1\frac{n_{11}}{n_{12}}\Delta + p_2\frac{n_{21}}{n_{22}}\Delta - p_0\right)} + n_{22}B_2 = 0. \quad (9)$$

Зависимость фазы стационарных колебаний от расстройки по частоте

$$\Delta + p_0 \sin(\theta) - \left(p_1\frac{n_{11}}{n_{12}} + p_2\frac{n_{21}}{n_{22}}\right)\Delta \sin(\theta) = 0.$$

Зависимость амплитуды колебаний первой платформы от расстройки частот (8) представлена на рис. 2. Уравнение (9) не имеет решений при небольших значениях расстройки.

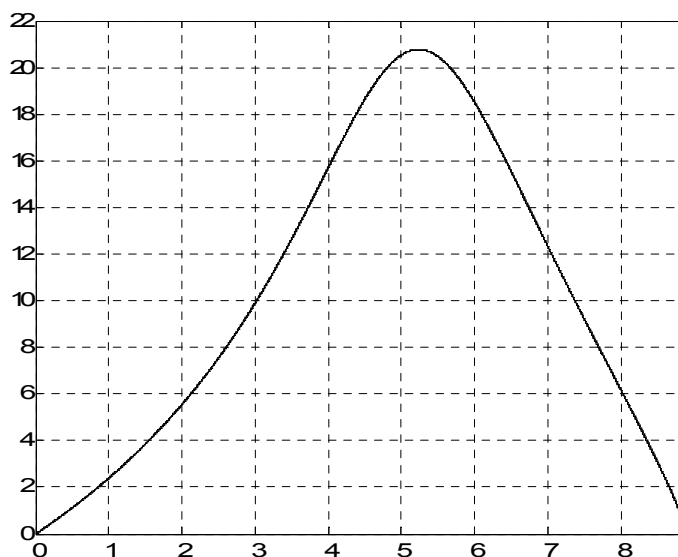


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика  $B_1(\Delta)$

Система (7) не имеет решений в действительной плоскости вблизи начала координат, т.е. вблизи рассматриваемого резонанса.

В рассматриваемой механической системе отсутствует стационарный режим колебаний – режим синхронизации. Что может быть связано с пренебрежением диссипацией у второй платформы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-38-00056 мол\_а).

#### Список литературы

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
3. Блехман И.И., Бутенин Н.В., Ганиев Р.Ф. и др. Вибрации в технике т.2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. Пиковский А.С., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003. 508 с.

5. Леонтьева А.В., Гордеев Б.А., Ковригин Д.А. Гидропоры в синхронизирующихся механических системах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-2. – С. 211-213.
6. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Исследование работы двух асинхронных двигателей, установленных на упругом диссипативном основании // Вестник машиностроения. – 2012. – № 5. – С. 19-23.
7. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Задача о вращении трех асинхронных двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2012. – № 9. – С. 32-40.
8. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Устойчивая синхронизация систем из двух и трех двигателей, установленных на общем основании // Вестник машиностроения. 2016. № 7. С. 45-49.
9. Блехман И.И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. – Инженерный сборник. 1953, т. 16, с. 75-80.
10. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
11. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.



## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РОБОТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ТУШЕНИЯ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ**

**Д.А. Масленников, В.С. Бочков, А.А. Лоцилов, Л.Ю. Катаева, М.Н. Ильичева**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
Лаборатория математического моделирования социально-экономических и экологических систем

ул. Минина, 24, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603155, nntu@nntu.nnov.ru

Задача эффективного тушения лесных пожаров является весьма нетривиальной. Хотя существует множество работ, посвященных различным роботизированным системам, предназначенным для тушения лесных пожаров, вопросы оптимизации методов тушения на основе анализа физики лесных пожаров остается открытым. В настоящей работе выполняется анализ существующих роботизированных систем для тушения лесных пожаров и показан авторский прототип, продемонстрирована его работа

*Ключевые слова:* лесной пожар, тушение лесного пожара, робототехника.

Лесные пожары являются одной из наиболее серьезных угроз, как для человека, так и для природы. Их масштабы обуславливают сложность доставки достаточного количества огне-тушащих средств и необходимость эффективного их использования.

Наиболее распространенным способом тушения лесных пожаров является вода, в которую зачастую добавляют смачиватели. Другим распространенным способом подавления лесных пожаров является встречный огонь [1, 2]. Принцип действия данного метода сводится к выжиганию горючих материалов на пути фронта пожара и созданию минерализованной полосы, которую пожар не может преодолеть. Для разрушения пламени могут быть использованы ударные волны [3] и низкочастотные звуковые колебания [4, 5]. Использование данных подходов весьма специфично.

Прогнозирование лесных пожаров требует использования различных математических моделей. Для оперативных прогнозов, как правило, используются полуэмпирические модели. Основным их достоинством является малый объем вычислений, который можно провести за время, многократно меньшее времени распространения лесного пожара. Тем не менее, такие модели не подходят для исследования физических закономерностей распространения пожара, необходимых для создания более эффективных методов тушения.

Использование робототехники для тушения лесных пожаров связано с опасностью воздействия огня и дыма на человека и ограниченностью естественных человеческих возможностей. Развитие робототехники позволило шире использовать роботов в разных отраслях. В том числе и при тушении пожаров. Задачи, решаемые роботами при пожарах можно разделить на несколько групп.

Мониторинг лесных пожаров является важной составляющей мероприятий по их тушению вне зависимости от того, какими средствами оно осуществляется. Эффективный мониторинг должен осуществляться с высоты, чтобы охватить большую площадь. Для этого, как правило, используются вышки с оборудованием для съемки или беспилотные летательные аппараты [6-8].

Роботы с дистанционным управлением позволяют людям, участвующим в тушении пожара находиться на безопасном расстоянии, осуществляя наблюдение за пожаром и подачу воды с оптимального расстояния до фронта горения. В случае лесного пожара увеличение расстояния важно, так как при резкой смене ветра или возникновении непредвиденных вихревых течений возможно изменение направления фронта пожара с отрезанием путей отхода.

Важным аспектом тушения крупных лесных пожаров является взаимодействие группы роботов. Ключевые аспекты такого взаимодействия описаны в работах [8-9].

Роботы, способные самостоятельно принимать решение о подаче пожаротушающего состава в область горения должны обладать способностью, определять её. Для этого могут быть использованы приемы видеоаналитики [10-11] и инфракрасной съемки [12]. Использование инфракрасной съемки обеспечивает более надежный критерий для определения области горения, но оборудование для такой съемки – весьма дорогостоящее.

Для тушения пожаров в помещениях, в большинстве случаев необходимо обеспечить подачу воды в область пламени прямой наводкой. Это является эффективной тактикой, так как при быстром обнаружении для подавления пожара не требуется существенных энергетических воздействий. В случае же лесного пожара, масштабы существенно выше, в результате чего вопросы эффективного использования воды с учетом физики тушения становится актуальной задачей.

В работах [13, 14] наглядно продемонстрирована важность правильного выбора точки подачи воды. Несмотря на использование, весьма подробных моделей лесного пожара, вопросы динамики струи воды с учетом изменения дисперсности и взаимодействия капель с лесными горючими материалами в реальных условиях являются довольно нетривиальной задачей. В связи с этим предлагается проведение экспериментальных исследований в области тушения масштабированного лесного пожара при помощи прототипа робота.

На рис. 1 показан внешний вид прототипа робота, позволяющего обнаруживать область горения и прицельно подавать туда воду. Кадры по успешному определению и тушению очага возгорания на рис. 2.



Рис. 1. Прототип робота



Рис. 2. Испытание прототипа робота

Для использования данного прототипа при тушении лесных пожаров было необходимо разработать алгоритм, позволяющий осуществлять наведение и подачу воды в зону уязвимости пожара. Для реализации данной задачи был разработан алгоритм, позволяющий из видеопотока выделять области с различными значениями температуры. Алгоритм состоит из нескольких этапов. На первом этапе определяется множество пикселей по цвету соответ-

вующих пламени пожара. Затем, определяется скользящее среднее скорости изменения цвета каждого пикселя, на основании чего принимается решение о том, относится ли он к части пламени.

Таким образом, представленный прототип робота может стать основой для новой мобильной системы тушения лесных пожаров.

### **Список литературы**

1. Указания по тушению лесных пожаров (для невоенизированных формирований гражданской обороны). Министерство обороны СССР, 1977 г.
2. Воробьев Ю. Л. Лесные пожары на территории России: Состояние и проблемы / Ю. Л. Воробьев, В. А. Акимов, Ю. И. Соколов; Под общ. ред. Ю. Л. Воробьева; МЧС России. — М.: ДЭКС-ПРЕСС, 2004. — 312 с. ISBN 5-9517-0008-6
3. Сенчихин Ю. Н., Гузенко В. А. Тушение лесных пожаров направленными взрывами. // Крупные пожары: предупреждение и тушение. Материалы XVI научно-практической конференции. - М., 2001.
4. Wave Extinguisher ECE-492/3 Senior Design Project 2014-2015 Electrical and Computer Engineering Department Volgenau School of Engineering George Mason University Fairfax, VA
5. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
6. A. Restas Forest Fire Management Supported by UAV Based Air Reconnaissance: Experiments and Results at the Szendro Fire Department, Hungary Agoston Restas Szendro Fire Department H – 3752, 2006.
7. L. Merino, F. Caballero, J.R. Martinez-de-Dios, and I. Maza, and A. Ollero. Automatic Forest Fire Monitoring and Measurement using Unmanned Aerial Vehicles. In Proc. of the VI Intl. Congress on Forest Fire Research ICFFR, 2010.
8. A. Vaguria, I. Maza, A. Ollero. Distributed Service-Based Cooperation in Aerial/Ground Robot Teams Applied to Fire Detection and Extinguishing Missions // Advanced Robotics 241-23, 2010.
9. Пат. 6364026 В1. США. Robotic fire protection system US / I. Doshay. Оpubл. 2.04.2002
10. GKB – Verifire [Электронный ресурс] URL:<http://www.gkbsecurity.com/solution.php?uID=33&cID=2> (дата обращения: 24.08.2016).
11. Синезис-видеоаналитика Интеллектуальное видеонаблюдение Kipod [Электронный ресурс] – URL: <http://synesis.ru/products/sistema-intellektualnogo-videonablyudeniya-kipod> (дата обращения: 24.08.2016).
12. Jong-Hwan Kim, Seongsik Jo, and Brian Y. Lattimer Feature Selection for Intelligent Fire-fighting Robot Classification of Fire, Smoke, and Thermal Reflections Using Thermal Infrared Images [Электронный ресурс] – URL: <http://downloads.hindawi.com/journals/js/aip/8410731.pdf>
13. Романова Н.А. и др. О зависимости массового расхода воды для успешного тушения лесного пожара от температуры точки прицела / Н.А.Романова, А.А.Лощилов, И.В.Беляев, Л.Ю.Катаева // Фундаментальные исследования. 2014. № 6.-Ч.7. С. 1380-1383.
14. Об оптимальной стратегии тушения лесного пожара водяной пушкой / Нищенков В.В., Н.А. Романова (Лощилова), Катаева Л.Ю., Масленников Д.А., Лощилов А.А. // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 3.- 8 с. URL: [www.science-education.ru/117-13179](http://www.science-education.ru/117-13179) (дата обращения: 24.08.2016).

## ДИНАМИКА ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ УДАРНЫМИ ПАРАМИ

**В.С. Метрикин, И.В. Никифорова**

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [irina.nikiforova@itmm.unn.ru](mailto:irina.nikiforova@itmm.unn.ru)

Исследуется ряд математических моделей, представляющих собой существенно-нелинейные динамические системы, описывающих динамику вибрационного механизма, работа которого зависит от свойств обрабатываемой среды. В работе с использованием метода точечных отображений поверхности Пуанкаре найдены области существования различных типов периодических и хаотических режимов движений механизмов в зависимости от внешних условий работы механизма. Бифуркационные диаграммы позволили проследить эволюцию рождения и развития этих типов движения и зависимости от параметров механизма.

**Ключевые слова:** математическая модель, устойчивость, метод точечных отображений, бифуркационная диаграмма.

В работах [1]–[3] изучена динамика вибрационных систем с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний, предназначенных для обработки различных сред (уплотнение грунта, формирование структуры бетонных смесей и т.д.). Однако математические модели в перечисленных выше работах и полученные в них результаты исследований можно использовать лишь для случая «жестких» обрабатываемых сред. В этой связи в настоящей работе исследуется динамика таких систем с учетом динамического взаимодействия обрабатываемой среды с механизмом. Проблеме вибрационного уплотнения и вибропогружения посвящено большое количество работ Д.Д. Баркана [4], Ю.И.Неймарка [5], И.И. Блехмана [6], Пермякова В.Б., Дубкова В.В., Серебренникова В.С. [7] и др. [8]–[10].

Работу рассматриваемых в настоящей статье вибрационных механизмов можно описать следующим образом (рис. 1а): вращательное движение вала с постоянной частотой  $\omega$  с помощью кривошипно-шатунного механизма преобразуется в возвратно-поступательное движение корпуса массы  $M$  относительно шабота. При этом ползуны-ударники попеременно наносят удары по соответствующим наковальням и, создаваемое таким образом ударно-вибрационное воздействие передается через шабот обрабатываемой среде. Благодаря выбору величин сдвига по фазе между кривошипами, эксцентриситетов  $r_i$ , высот наковален может быть обеспечено требуемое (может быть оптимальное в некотором смысле) ударное взаимодействие ползунов-ударников о шабот, при котором ползуны-ударники имеют максимальную скорость, обеспечивая устойчивость периодического режима работы. Следует отметить, что наличие нескольких ползунов-ударников способствует более продолжительному воздействию на обрабатываемую среду, а, следовательно, более эффективному процессу пластического деформирования.

1. Рассматривается модель, в которой обрабатываемая среда представлена в виде упруго-закрепленной с коэффициентом упругости  $C$  массы  $M_1$  с учетом трения с эквивалентным коэффициентом демпфирования  $b$  (рис. 1).

Уравнения, описывающие ударно-колебательные движения механизма с учетом подвижности обрабатываемой среды, в безразмерной форме можно записать в виде

$$\begin{cases} x - x_1 > f(\tau) \\ \ddot{x} = -p \\ \ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \lambda^2 x_1 = -p \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x - x_1 = f(\tau) \\ \dot{x}^+ = [(\mu_0 - R)\dot{x}^- + (1 + R)\dot{x}_1^- + (1 + R)\frac{df(\tau)}{d\tau}]/(1 + \mu_0) \\ \dot{x}_1^+ = [\mu_0(1 + R)\dot{x}^- + (1 - R\mu_0)\dot{x}_1^- - \mu_0(1 + R)\frac{df(\tau)}{d\tau}]/(1 + \mu_0) \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tau = \omega t$ ,  $f(\tau) = \max(f_1(\tau), f_2(\tau))$ ,  $f_1(\tau) = \varepsilon - \mu \cos \tau$ ,  $f_2(\tau) = -\mu \gamma \cos(\tau - \varphi)$ ,

$x = (y - s_2 - l)/l$  – координата центра вращения корпуса, отсчитываемая от положения  $x_1 = y_c/l$  массы  $M_1$  при недеформированной пружине,  $\dot{x}^-$ ,  $\dot{x}_1^-$  – доударные,  $\dot{x}^+$ ,  $\dot{x}_1^+$  – послеударные скорости корпуса и среды соответственно,  $R$  – коэффициент восстановления скорости при ударе,

$$\mu = r_1/l, \gamma = r_2/r_1, \varepsilon = (s_1 - s_2)/l, p = g/\omega^2 l, \lambda^2 = C/M_1 \omega^2, 2h = b/M_1 \omega, \mu_0 = M/M_1.$$

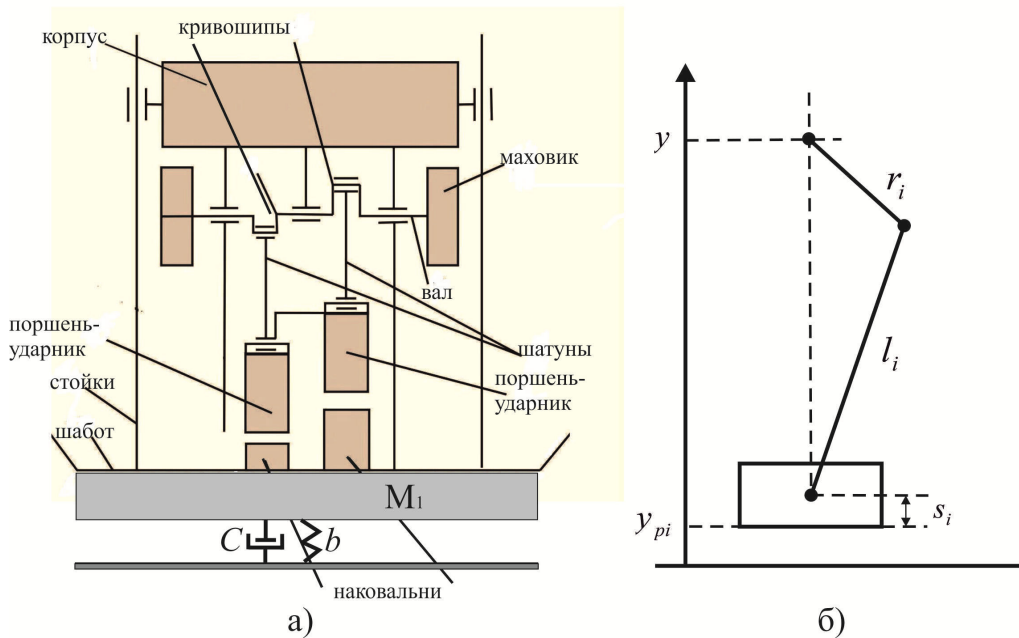


Рис. 1

Фазовое пространство системы (1) – (2) пятимерное в координатах  $x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \tau$  усечено по фазовым координатам. Все фазовые траектории располагаются либо на поверхности  $S(x - x_1 = f(\tau))$ , либо выше её. Вид поверхности  $S$  в трехмерном подпространстве  $x - x_1, \dot{x} - \dot{x}_1, \tau$  показан на рис.2.

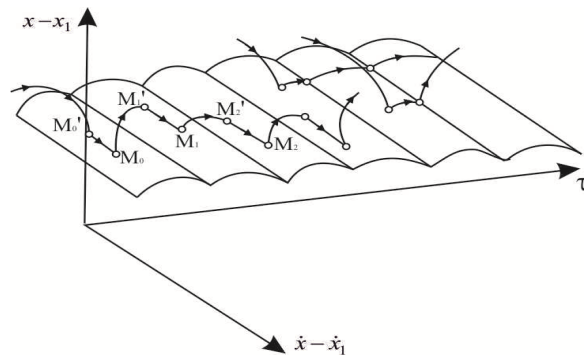


Рис. 2

В случае ударных движений системы при  $R \neq 0$  изображающая точка движется в фазовом пространстве  $\Phi$  следующим образом: перемещаясь в области  $G(x - x_1 > f(\tau))$ , она попадает на поверхность  $S$  в некоторую точку  $M'_0(\tau_0, x^{(0)} - x_1^{(0)} = f(\tau_0), \dot{x}^{(0)} - \dot{x}_1^{(0)})$  и затем мгновенно перемещается по поверхности  $S$  в некоторую точку  $M_0\left(\tau_0, x^{(0)} - x_1^{(0)} = f(\tau_0), \dot{x}^{(0)+} - \dot{x}_1^{(0)+} = -R(\dot{x}^{(0)-} - \dot{x}_1^{(0)-}) + (1+R)\frac{df}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)$  и, покинув  $S$ , движется согласно уравнениям (1) в  $G$  до тех пор, пока вновь не попадет на поверхность  $S$  в некоторую точку  $M'_1(\tau_1, x^{(1)} - x_1^{(1)} = f(\tau_1), \dot{x}^{(1)} - \dot{x}_1^{(1)})$ . Таким образом, изображающая точка каждый раз будет попадать на поверхность  $S$ .

В случае абсолютно неупругого удара ( $R = 0$ ) изображающая точка, попав из области  $G$  на поверхность  $S$  в точку  $M'_0$ , мгновенно перемещается в точку  $M_0\left(\tau_0, x^{(0)} - x_1^{(0)} = f(\tau_0), \dot{x}^{(0)+} - \dot{x}_1^{(0)+} = \frac{df}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}\right)$  и затем, если ускорение  $\frac{d^2f}{d\tau^2}\Big|_{\tau=\tau_0}$  меньше  $-p$ , уходит в область  $G$ , если же  $\frac{d^2f}{d\tau^2}\Big|_{\tau=\tau_0}$  больше  $-p$ , то изображающая точка движется

по поверхности  $S$  до момента  $\tau = \tau_\epsilon$ , пока либо выполняется соотношение  $\frac{d^2f}{d\tau^2}\Big|_{\tau=\tau_\epsilon} > -p$ ,

либо до момента удара следующего поршня. Описанный выше класс траекторий соответствует длительной остановке одного из поршней, либо последовательному «топтанию» поршней. Следует отметить, что указанный на рис. 2 вид поверхности  $S$  сохраняется лишь в случае пересечения  $f_1(\tau)$  и  $f_2(\tau)$ . Такое соотношение на параметры обеспечивает возможность существования поочередного ударного движения поршней. Однако ясно, что ударные движения механизма возможны и при ударах одного из поршней. Тогда поверхность  $S$  будет представлять собой аналитическую цилиндрическую поверхность, уравнение которой  $x - x_1 = f_1(\tau)$ , либо  $x - x_1 = f_2(\tau)$ .

Исследование динамики механизма сведено к изучению свойств точечного преобразования поверхности  $S(x - x_1 = f(\tau))$  в себя. Найдены аналитические соотношения для численно-аналитического отыскания в пространстве параметров границ областей существования и устойчивости периодических режимов движения. При этом также даны соотношения на параметры системы, которые позволяют проводить предварительную настройку механизма на основной рабочий режим (с поочередными ударами поршней о шабот).

Численные расчеты проведены с использованием программного комплекса, разработанного в среде Borland C++ Builder 6.

Обозначим через  $m_i$  - число соударений  $i$ -го поршня со средой. Таким образом, двухударному периодическому режиму (с поочередными ударами каждым поршнем-ударником) соответствует  $m_1 = 1, m_2 = 1$ .

На рис.3 представлена бифуркационная диаграмма, где по оси абсцисс приведены значения частотного параметра  $p$ , а по оси ординат – значения послеударных скоростей корпуса  $\dot{x}^+$  при следующем наборе параметров  $\epsilon = 0.018, R = 0.3, \mu_0 = 5, \mu = 0.1, \gamma = 4, \varphi = 0.6, \lambda = 0.6, h = 0.05$ . На рис. 4 приведены осциллограммы движения при тех же значениях параметров, но на рис.4а  $p = 0,02$ , а на рис.4б  $p = 0,025$  (красным цветом на рис.4а,б обозначена осциллограмма движения первого поршня, зеленым - второго).



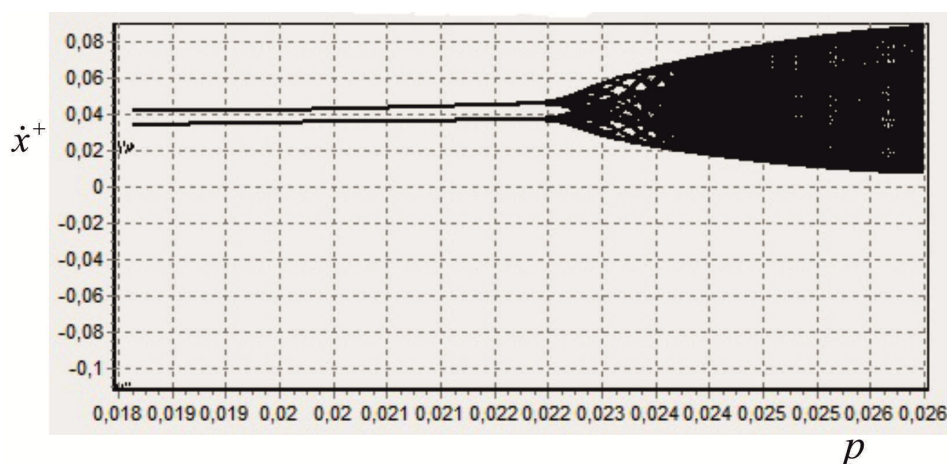


Рис. 3

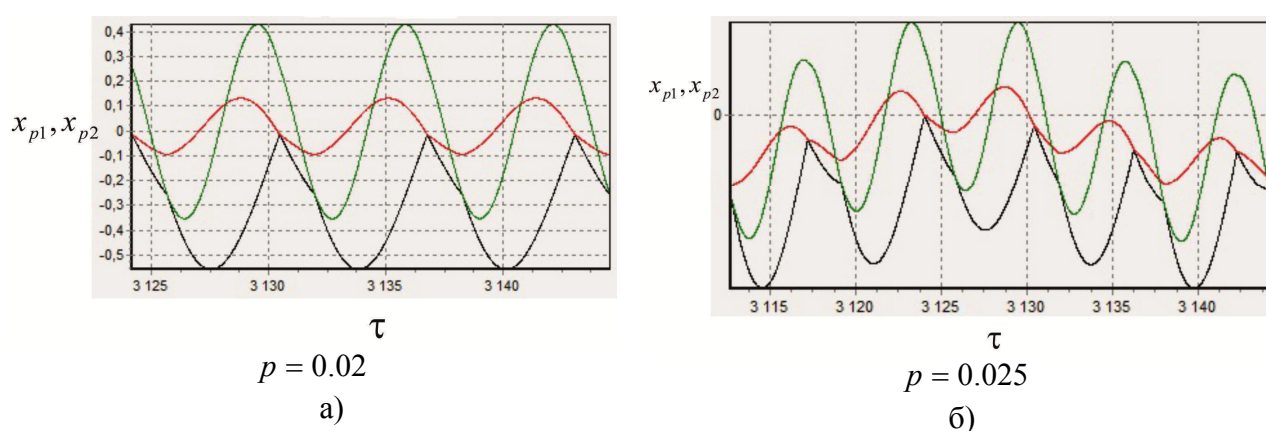


Рис. 4

Из рис.3, а также рис.4а видно, что при  $0.0185 \leq p \leq 0.022$  существует периодическое движение с  $m_1 = 1, m_2 = 1$ ; при  $0.022 \leq p \leq 0.026$  наблюдается хаотический режим движения (на рис.4б приведена осциллограмма движения для  $p = 0.025$ ). При  $p = 0.022$  наблюдается процесс удвоения числа ударов обоими поршнями.

2. С помощью пакета Autodesk Inventor была построена цифровая модель виброударного механизма.

На рис.5 приведена осциллограмма движения механизма при тех же значениях параметров (см.рис.4а). На ней синим цветом отмечен процесс изменения координаты центра масс корпуса (мм), розовым цветом - координата центра масс корпуса (мм), отсчитываемая от положения, соответствующего положению среды в начальный момент времени, красным цветом – координата среды (мм).

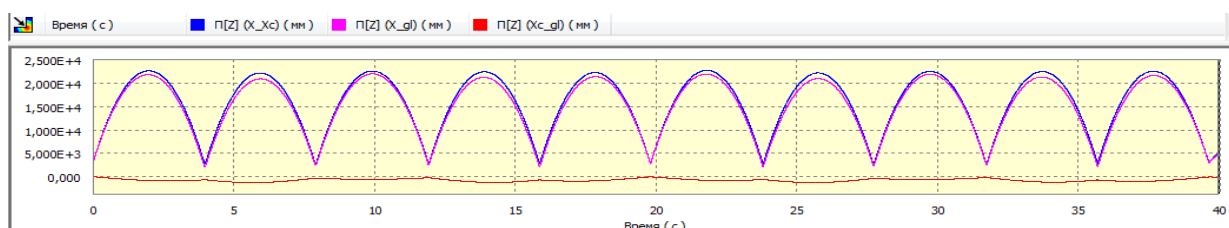


Рис. 5

3. Другая модель процесса уплотнения грунта приведена на рис. 6. Поршень виброударного механизма ударяет об ограничитель и деформирует пружину длины  $h$  и коэффициентом

упругости  $k$ . Силу  $\mu_0 F_0$  можно представить себе как сухое трение пробки о стенки, моделирующее внутреннее сухое трение в грунте,  $Q$  - сила, действующая на пробку.

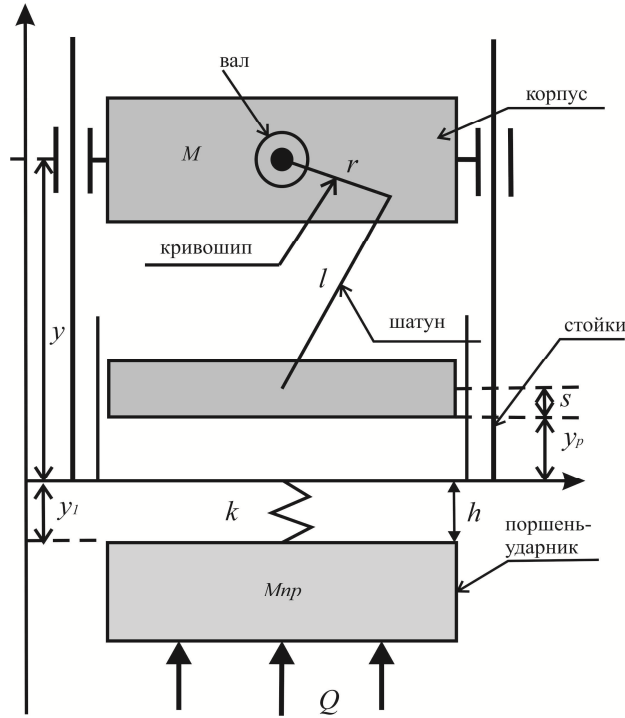


Рис. 6

Уравнения движения механизма с пробкой можно представить в виде

$$\begin{cases} x_p > x_1 + \eta \\ \ddot{x}_p = -p - \mu \cos \tau \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_p = x_1 + \eta \\ \lambda_0^2 (x_1 - x_p + \eta) < \mu_0 \tilde{f} - p + q \\ x_1 = x_{10} \\ \ddot{x}_p + \lambda_0^2 (x_p - x_{10} - \eta) = -p - \mu \cos \tau \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 (x_1 - x_p + \eta) \geq \mu_0 \tilde{f} - p + q \\ \ddot{x}_p + \lambda_0^2 (x_p - x_1 - \eta) = -p - \mu \cos \tau \\ \ddot{x}_1 + \lambda^2 (x_1 - x_p + \eta) = -\mu_0 \tilde{f} \text{sign}(\dot{x}_1) - p + q \end{cases} \quad (5)$$

где  $\tau = \omega t$ ,  $x = \frac{y-s-l}{l}$ ,  $x_p = \frac{y_p}{l}$ ,  $x_1 = \frac{y_{np}}{l}$ ,  $\mu = \frac{r}{l}$ ,  $p = \frac{g}{\omega^2 l}$ ,  $\lambda_0^2 = \frac{k}{M\omega^2}$ ,  $\lambda^2 = \frac{k}{M_{np}\omega^2}$ ,

$$\eta = \frac{h}{l}, \tilde{f} = \frac{F_0}{M_{np}l\omega^2}, q = \frac{Q}{M_{np}l\omega^2}.$$

Фазовое пространство системы пятимерно в координатах  $x_p, \dot{x}_p, x_1, \dot{x}_1, \tau$ . Сечение фазового пространства в координатах  $x_1, x_p$  представлено на рис. 7.



Пусть  $M_0(x_p^{(0)} = x_1^{(0)} + \eta, \dot{x}_p^{(0)}, x_1^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)} = 0), M_1(x_p^{(1)} = x_1^{(0)} + \eta_1, \dot{x}_p^{(1)}, x_1^{(1)} = x_1^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)} = 0),$   
 $M_2(x_p^{(2)} = x_1^{(2)} + \eta_1, \dot{x}_p^{(2)}, x_1^{(2)}, \dot{x}_1^{(2)}), M_3(x_p^{(3)} = x_1^{(2)} + \eta_1, \dot{x}_p^{(3)}, x_1^{(3)} = x_1^{(2)}, \dot{x}_1^{(3)} = 0),$

$M_4(x_p^{(4)}, \dot{x}_p^{(4)}, x_1^{(4)} = x_1^{(2)}, \dot{x}_1^{(4)} = 0),$  где  $\eta_1 = \eta - \frac{\mu_0 \tilde{f}}{\lambda^2} + \frac{p-q}{\lambda^2}$ . Тогда участок  $M_0 M_1$  движения изображающей точки соответствует движению поршня согласно уравнениям (4), при этом координата пробки остается постоянной, ее скорость равно нулю. Участок  $M_1 M_2$  соответствует движению поршня вместе с пробкой согласно уравнениям (5). Участок  $M_2 M_3$  движения изображающей точки соответствует движению поршня вверх согласно уравнениям (4), при этом координата пробки остается постоянной, а скорость пробки равна нулю. Участок  $M_3 M_4$  соответствует движению поршня согласно уравнению (3), координата пробки остается постоянной, ее скорость равна нулю.

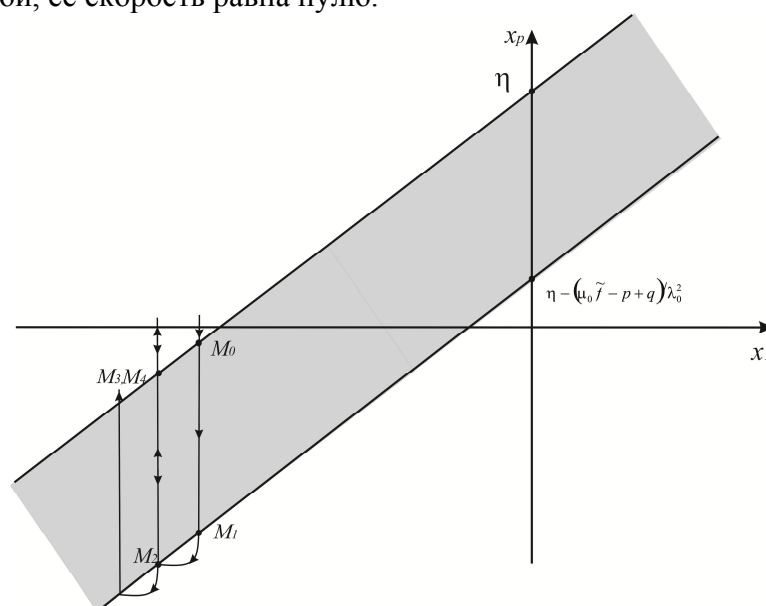


Рис. 7

В среде Borland C++ Builder 6 была реализована программа, позволяющая строить осциллограммы движения поршня и среды. На рис. 8 приведены осциллограммы движения поршня (зеленый цвет) и пробки (красный цвет) при следующем наборе параметров

$$p = 0,1; \lambda_0 = 120; \lambda = 140; \mu = 0,1; \mu_0 = 0,1; \eta = 0,1; f = 10; q = 1$$

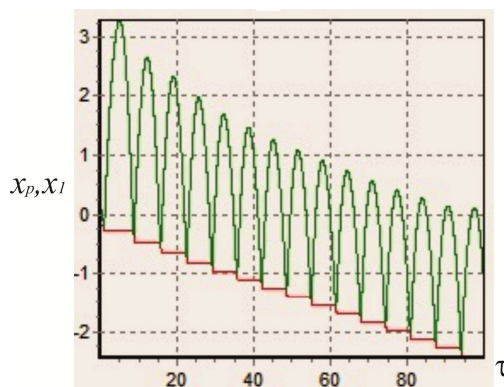


Рис. 8

Кроме того, видно, что когда нет взаимодействия между поршнем и пробкой, ее координата остается постоянной, а при взаимодействии с поршнем пробка начинает совместное движение с ним и опускается на некоторую глубину.

4. Еще одна модель уплотнения грунта представлена на рис. 9.

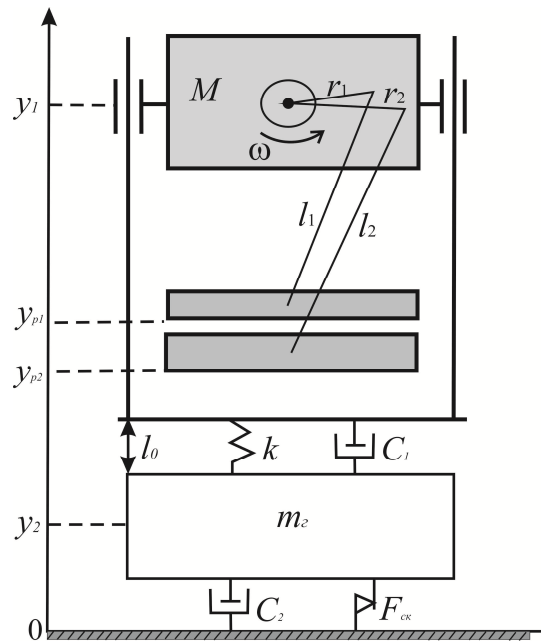


Рис. 9

Уравнения движения в безразмерном виде предлагаемой динамической модели уплотнения среды можно записать следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 > f(\tau) + \eta \\ \ddot{x}_1 = -p \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = 0, \text{ если } |p + \lambda_2 \dot{x}_2| < \tilde{f} \\ \ddot{x}_2 = -p - \lambda_2 \dot{x}_2 + \tilde{f}, \text{ если } \dot{x}_2 \neq 0 \text{ или } \dot{x}_2 = 0, |p + \lambda_2 \dot{x}_2| > \tilde{f}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq f(\tau) + \eta \\ \ddot{x}_1 = -p - h_1(x_1 - f(\tau) - x_2 - \eta) - \lambda_1(\dot{x}_1 - \frac{df}{d\tau} - \dot{x}_2) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = 0, \text{ если } \left| p + \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 + \frac{df}{d\tau}) + h_1(x_2 + \eta - x_1 + f(\tau)) \right| < \tilde{f} \\ \ddot{x}_2 = -p - \lambda_2 \dot{x}_2 - \lambda_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 + \frac{df}{d\tau}) - h_1(x_2 + \eta - x_1 + f(\tau)) + \tilde{f}, \text{ если } \dot{x}_2 \neq 0 \text{ или если } \dot{x}_2 = 0, \\ \left| p + \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 + \frac{df}{d\tau}) + h_1(x_2 + \eta - x_1 + f(\tau)) \right| > \tilde{f} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

где  $\tau = \omega t$ ,  $x_1 = \frac{y_1 - s_2 - l}{l}$ ,  $x_{pi} = \frac{y_{pi}}{l}$ ,  $x_2 = \frac{y_2}{l}$ ,  $l_1 \approx l_2$ ,  $r_i \ll l$ ,  $\lambda_1 = \frac{C_1}{M\omega}$ ,  $\lambda_2 = \frac{C_2}{m_2}$ ,  $h_1 = \frac{k}{M\omega^2}$ ,

$$p = \frac{g}{\omega^2 l}, \eta = \frac{l_0}{l}, \tilde{f} = \frac{F_{ck}}{m_2 l \omega^2}.$$

$$f(\tau) = \max(f_1(\tau), f_2(\tau)), f_1(\tau) = \varepsilon - \mu \cos \tau, f_2(\tau) = -\mu \gamma \cos(\tau - \varphi), F_{ck} = -(\alpha + \beta x_2) \text{sign}(\dot{x}_2).$$

Отличие этой модели от предыдущих состоит в том, что при уплотнении среды сила сопротивления зависит от величины предыдущей осадки грунта.

### Список литературы

1. Метрикин В.С., Никифорова И.В. Динамика кривошипно-шатунного механизма с учетом массы поршней-ударников // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2012. № 6(1). С. 134-142.
2. Metrikin V.S., Nikiforova I.V. On the Dynamics of Systems with Impact Interactions with a Non - Analytic Phase Structure // Automation and Remote Control. V. 74. № 8. 2013. P. 1307-1317.
3. Метрикин В.С., Никифорова И.В. Динамика трехпоршневого виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2014. № 1(1). С.229-238.
4. Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. М.: Госстройиздат, 1959. 316 с.
5. Неймарк Ю.И. Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания // Инженерный сборник, 1953, т.ХVI. С.13-48.
6. Блехман И.И. Исследование процесса вибрационной забивки свай и шпунтов // Инженерный сборник АН СССР, 1954. № XIX. С. 55-64.
7. Пермяков В.Б., Дубков В.В., Серебренников В.С. Аналитическое описание процесса уплотнения асфальтобетонной смеси вибрационным катком // Омский научный вестник. 2008, № 1(64). С.67-71.
8. Румянцев С.А., Астанков К.Ю. Повышение эффективности преодоления лобового сопротивления связных грунтов при вибропогружении свай // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 4(16). С.82-90.
9. Савельев С.В., Михеев В.В. Исследования напряженно-деформируемого состояния упруго-вязкой среды при вибрационном нагружении // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дрожжной академии. 2012. № 25. С.83-87.
10. Салаяев С.И., Кравченко И.Н., Салаяев Н.И., Марковчин С.Г. Методика расчета параметров и определения рациональных режимов работы адаптивной системы «вибротрамбовка-грунт» // Механизация строительства.2012. № 11. С.18-25.

## **КОМПЕНСАЦИЯ ОСТАТОЧНОГО ДИСБАЛАНСА СЛОЖНОГО ГИБКОГО РОТОРА НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ С ПОМОЩЬЮ ШТАТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

**Митенков Ф.М., Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Литвинов В.Н., Фадеева Е.В.**

Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского,  
603950, Нижний Новгород, ГСП -1000, пр. Гагарина, 23, корп. 6,  
e-mail: minick@mech.unn.ru

Разработан способ управления сложным гибким ротором на электромагнитных подшипниках, позволяющий существенно уменьшить амплитуду колебаний ротора на критических частотах за счет формирования управляющих воздействий, компенсирующих остаточный дисбаланс.

*Ключевые слова:* идентификация, компьютерная модель, остаточный дисбаланс, система управления, электромагнитный подшипник.

Важнейшие преимущества электромагнитных подшипников (ЭМП) – отсутствие трения и необходимости смазки, уменьшение механического износа, большая степень независимости от условий внешней среды и обслуживания. Данные преимущества создают предпосылки использования ЭМП в сложных гибких роторах, являющихся составными частями ядерных энергетических установок, а также ветроэнергетических установок большой мощности [1-5].

В сложной уникальной системе, коей является сложный гибкий ротор на ЭМП, после сборки сохраняется остаточный дисбаланс, способный привести к существенному увеличению амплитуды колебаний ротора на критических частотах в режимах его разгона и останова.

Цифровая система управления ЭМП, помимо основной функции – ограничения перемещений ротора, предоставляет возможности оперативного формирования нестандартных законов управления, улучшающих динамику ротора. В состав системы управления входит измерительная система, которая в непрерывном режиме получает информацию о скорости вращения ротора, его угле поворота и перемещениях, токах в магнитах ЭМП. Данная информация в совокупности с компьютерной моделью динамики сложного гибкого ротора на ЭМП позволяет поставить решаемые в работе задачи по идентификации распределения остаточного дисбаланса ротора в его рабочем положении и создания закона управления, уменьшающего эффект воздействия остаточного дисбаланса при прохождении ротором критических частот.

Базовая система управления [6] предполагает в каждом из соответствующих радиальным ЭМП каналов с номером  $n$  создание двух ортогональных управляющих сил в соответствующем радиальном ЭМП в каждом канале. В местах расположения радиальных ЭМП в плоскости, перпендикулярной оси вращения ротора, производится измерение в дискретные моменты времени отклонений его оси  $U_1^{(n)}$ ,  $U_2^{(n)}$ , осуществляется вычисление производных по времени от указанных отклонений, и определение ортогональных управляющих сил  $f_1^{(n)}$  и  $f_2^{(n)}$ , корректирующих положение оси гибкого ротора в соответствии с выражениями:

$$f_1^{(n)} = a_n \cdot U_1^{(n)} + b_n \cdot \frac{dU_1^{(n)}}{dt}, \quad f_2^{(n)} = a_n \cdot U_2^{(n)} + b_n \cdot \frac{dU_2^{(n)}}{dt},$$

где индекс  $n$  – номер канала системы управления, совпадающий с номером радиального ЭМП;  $a_n$  и  $b_n$  – пропорциональный и дифференциальные коэффициенты системы управления.

Предлагаемый способ управления электромагнитным подвесом гибкого ротора базируется на наличии компьютерной модели динамики, отражающей основные свойства рассматриваемой конструкции [7]. С использованием этой модели определяются критические скорости

вращения гибкого ротора  $\Omega_k$  и вычисляются собственные моды  $\phi_k(x)$ , соответствующие критическим скоростям вращения, где  $x$  – координата вдоль оси гибкого ротора,  $k$  – номер критической угловой скорости вращения и соответствующей собственной моды. Собственные моды удовлетворяют условию нормировки:

$$\int_0^L \mu(x) \cdot \phi_k^2(x) \cdot dx = M,$$

где  $\mu(x)$  – масса на единицу длины гибкого ротора,  $L$  – длина гибкого ротора,  $M$  – масса гибкого ротора.

В режиме разгона гибкого ротора с помощью датчиков положения по каждому каналу управления (для каждого радиального ЭМП) измеряется отклонение ротора от центрального положения. При наличии остаточного дисбаланса при подходе к очередной критической частоте вращения гибкого ротора наблюдается увеличение амплитуды отклонений в местах расположения ЭМП (датчиков положений). Если эти амплитуды приближаются к границе допустимого уровня (порядка 0.5 зазора в страховочных подшипниках), прекращается разгон ротора и реализуется его выбег до частот вращения с низким уровнем отклонений. В процессе выбега осуществляется запись угла поворота ротора, частоты вращения, показаний датчиков положения и датчиков тока в магнитах ЭМП. С использованием этой информации и имеющейся математической модели динамики гибкого ротора в соответствии с методикой идентификации дисбаланса гибкого ротора [8] определяется  $e_k$  – вектор приведенного эксцентриситета модального дисбаланса  $Q_k$  гибкого ротора для  $k$ -ой критической угловой скорости вращения

$$Q_k = \int_0^L \mu(x) \cdot e(x) \cdot \phi_k(x) \cdot dx = e_k \cdot M,$$

где вектор  $e(x)$  – эксцентриситет единичной массы, задаваемый в плоскости, перпендикулярной оси ротора в точке  $x$ ,  $e_k$  – вектор приведенного эксцентриситета модального дисбаланса, задаваемый в плоскости, перпендикулярной оси ротора. Векторы эксцентриситета и приведенного эксцентриситета модального дисбаланса задаются в системе координат, связанной с ротором.

Если магниты радиальных ЭМП ( $x_n$  – координата расположения  $n$ -го радиального ЭМП по оси гибкого ротора) будут формировать дополнительные силы  $F^{(n)}$  ( $n$  – номер канала системы управления,  $N$  – общее количество радиальных ЭМП), удовлетворяющие соотношению:

$$\sum_{n=1}^N F^{(n)} \phi_k(x_n) = -e_k \cdot M \cdot \Omega^2, \quad (1)$$

то эти силы будут компенсировать воздействие остаточного модального дисбаланса на динамику гибкого ротора в окрестности  $k$ -ой критической частоты.

Соотношение (1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент сил  $F^{(n)}$ , причем число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому для однозначного определения сил необходимы дополнительные условия, которые сформулируем так:  $F^{(n)}$  должны обеспечивать минимум выражения

$$\min \sum_{n=1}^N (F^{(n)})^2. \quad (2)$$

Решение задачи (1) при условии (2) задается выражениями:

$$F^{(n)} = -A_k^{(n)} \Omega^2 \mathbf{I}_k, \quad A_k^{(n)} = e_k \cdot M \cdot \frac{\phi_k(x_n)}{\phi_k^2(x_1) + \phi_k^2(x_2) + \dots + \phi_k^2(x_N)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где  $e_k$  – модуль вектора  $e_k$ ,  $\mathbf{I}_k$  – единичный безразмерный вектор, совпадающий по направлению с  $e_k$ ,  $A_k^{(n)}$  – идентифицируемые параметры дисбаланса.

Для каждого  $n$ -го канала системы управления, соответствующего своему радиальному ЭМП, проекции вектора дополнительной силы  $\mathbf{F}^{(n)}$  на оси неподвижной системы координат в плоскости, перпендикулярной оси ротора, могут быть представлены в виде:

$$F_1^{(n)} = A_k^{(n)} \Omega^2 \sin(\Phi + \varphi_k^{(n)}), \quad F_2^{(n)} = A_k^{(n)} \Omega^2 \sin(\Phi + \varphi_k^{(n)} + \pi/2), \quad (4)$$

где  $\varphi_k^{(n)}$  – угол, задающий вектор  $\mathbf{e}_k$  в связанной с гибким ротором полярной системе координат в плоскости, перпендикулярной оси гибкого ротора;  $\Omega$  – измеряемая угловая скорость гибкого ротора,  $\Phi$  – измеряемый угол поворота гибкого ротора.

Предлагаемый способ управления работой гибкого ротора проиллюстрируем примером компьютерного моделирования динамики вертикального гибкого ротора при наличии остаточного дисбаланса, выполненного на двух радиальных ЭМП, генераторной части стенда масштабной модели ротора (ММР) [9], длина которого составляет 5.4 м, а масса – 640 кг.

Первые (низшие) частоты собственных колебаний гибкого ротора ММР, или критические частоты, составляют 7.48 Гц, 8.19 Гц, 15.84 Гц, 39.26 Гц, 77.45 Гц.

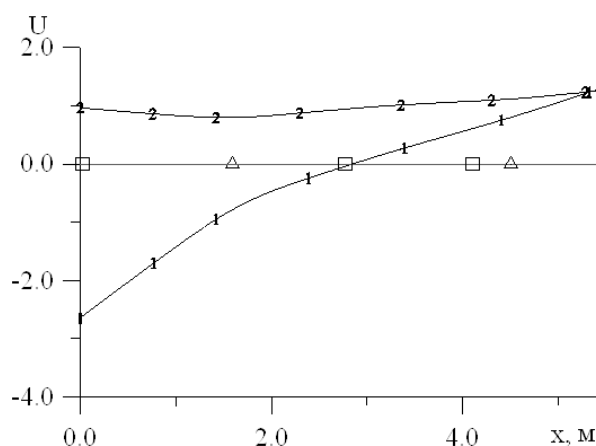


Рис. 1. Первая и вторая формы собственных колебаний гибкого ротора

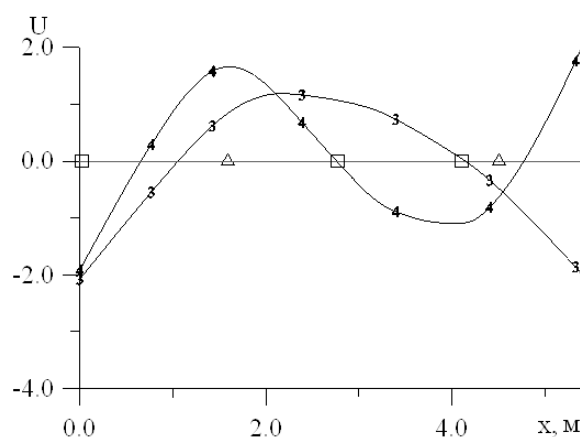


Рис. 2. Третья и четвертая формы собственных колебаний гибкого ротора

Формы собственных колебаний гибкого ротора ММР представлены на рис. 1, 2. Треугольниками на рис. 1, 2 отмечены места расположения радиальных ЭМП, места расположения дисбаланса отмечены квадратами.

Предполагается, что остаточный дисбаланс гибкого ротора сосредоточен в трех сечениях:

- на расстоянии 20 мм от верхнего сечения гибкого ротора дисбаланс составляет 334 г·мм, угол дисбаланса равен  $0^0$ ,
- на расстоянии 2770 мм от верхнего сечения гибкого ротора дисбаланс составляет 3579 г·мм, угол дисбаланса равен  $150^0$ ,
- на расстоянии 4103 мм от верхнего сечения гибкого ротора дисбаланс составляет 2938 г·мм, угол дисбаланса равен  $30^0$ .

Для гибкого ротора ММР рабочей является частота вращения 60 Гц. На рабочей частоте вращения отклонения оси гибкого ротора находятся в пределах 0.05 мм, что на порядок меньше зазора в страховочных подшипниках.

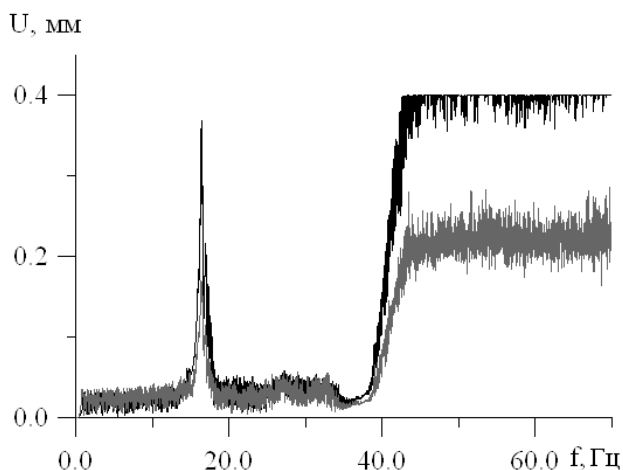


Рис. 3. Зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в двух ЭМП при разгоне ротора до рабочей частоты его вращения в условиях управления его работой в соответствии с базовым способом

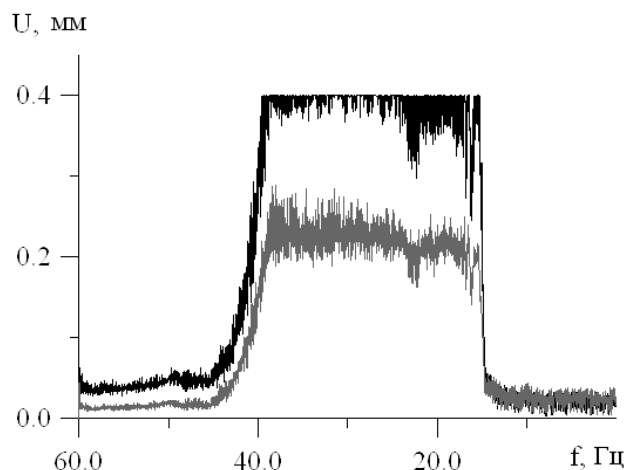


Рис. 4. Зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в двух ЭМП при останове ротора от рабочей частоты его вращения в условиях управления его работой в соответствии с базовым способом

Проблемы возникают при разгоне гибкого ротора до рабочей частоты и при его останове. На рис. 3 показаны зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в сечении верхнего ЭМП (черная кривая) и в сечении нижнего ЭМП (серая кривая) при разгоне гибкого ротора с ускорением 0.5 Гц в секунду. Из представленных на рис. 3 зависимостей следует, что прохождение третьей критической частоты вращения порядка 16 Гц, связанной с первой изгибной формой колебаний гибкого ротора, в сечении верхнего ЭМП, отклонения гибкого ротора практически достигают уровня зазора в страховочных подшипниках, что представляет серьезную опасность для эксплуатации такого ротора. При прохождении критической частоты вращения, связанной со второй изгибной формой колебаний гибкого ротора (частота порядка 40 Гц), в сечении верхнего ЭМП реализуется контакт гибкого ротора со страховочным подшипником, что является недопустимой ситуацией.

На рис. 4 показаны зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в сечении верхнего ЭМП (черная кривая) и в сечении нижнего ЭМП (серая кривая), полученные при компьютерном моделировании останова гибкого ротора с ускорением -0.5 Гц в секунду. Из представленных на рис. 4 зависимостей следует, что прохождение диапазона критических частот вращения, границами которого являются критические частоты, связанные с первой и второй изгибными формами колебаний гибкого ротора (частоты порядка 16 Гц и 40 Гц), сопровождается постоянным контактом этого ротора с верхним страховочным подшипником, что недопустимо.

Зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения, показанные на рис. 3 и 4, получены в условиях управления его работой, совпадающих с условиями управления работой гибкого ротора в соответствии с базовым способом управления и свидетельствуют о недостаточности сформированных сил.

В результате обработки фрагментов выбега ротора в соответствии с [8] определены параметры дисбаланса. Идентифицируемые величины, необходимые для определения дополнительных ортогональных сил и, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Диапазон частот	Верхний ЭМП		Нижний ЭМП	
	$A_k^{(1)}$ , Г·мм	$\varphi_k^{(1)}$ , град	$A_k^{(2)}$ , Г·мм	$\varphi_k^{(2)}$ , град
менее 13.464 Гц	0	0	0	0
13.464 Гц – 20.592 Гц	3398.51	14.761	1942.19	188.611
20.592 Гц – 33.771 Гц	0	0	0	0
33.771 Гц – 51.038 Гц	796.291	45.817	303.589	196.787
более 51.038 Гц	0	0	0	0

В результате компьютерного моделирования процесса разгона гибкого ротора при формировании дополнительных сил  $F_1^{(n)}$  и  $F_2^{(n)}$ , в соответствии с формулами (4) и параметрами в таблице 1, установлено, что прохождение диапазона критических частот вращения, связанных с первой и второй изгибными формами колебаний гибкого ротора (частоты порядка 16 Гц и 40 Гц), стало безопасным (см. рис. 5 и 6).

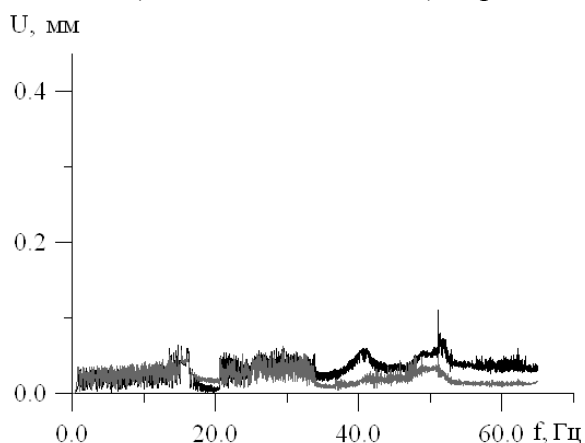


Рис. 5 Зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в двух ЭМП при разгоне ротора от рабочей частоты его вращения в условиях управления его работой в соответствии с предлагаемым способом

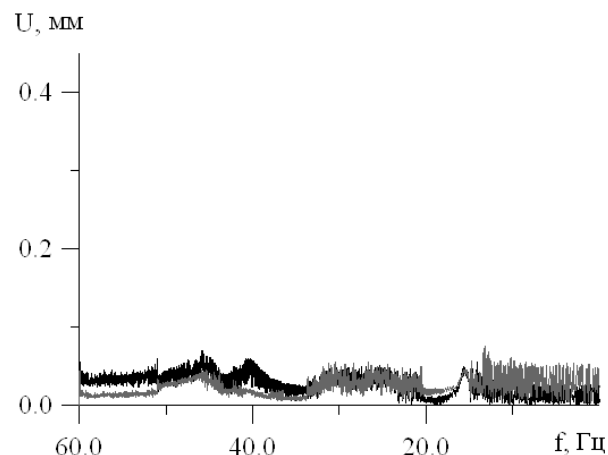


Рис. 6 Зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в двух ЭМП при останове ротора от рабочей частоты его вращения в условиях управления его работой в соответствии с предлагаемым способом

На рис. 5 показаны зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в сечении верхнего ЭМП (черная кривая) и в сечении нижнего ЭМП (серая кривая), полученные при компьютерном моделировании разгона гибкого ротора с ускорением 0.5 Гц в секунду.

Из представленных на рис. 5 зависимостей следует, что отклонения оси гибкого ротора не превышают 0.12 мм, то есть прохождение всего частотного диапазона при разгоне этого ротора стало безопасным.

На рис. 6 показаны зависимости амплитуды отклонений оси гибкого ротора от частоты его вращения в сечении верхнего ЭМП (черная кривая) и в сечении нижнего ЭМП (серая кривая), полученные при компьютерном моделировании останова гибкого ротора с ускорением -0.5 Гц в секунду.

Из представленных на рис. 6 зависимостей следует, что отклонения оси гибкого ротора не превышают 0.08 мм, то есть прохождение частотного диапазона при останове гибкого ротора стало безопасным.



Сравнение графиков зависимостей амплитуды отклонений оси гибкого ротора при разгоне (рис. 3 и 5) и при останове (рис. 4 и 6) показывает высокую эффективность использования предлагаемого способа управления работой гибкого ротора при компенсации влияния остаточного дисбаланса на динамику гибкого ротора на ЭМП.

Выполнено при частичном финансировании РФФИ (гранты № 16-08-00503 а, № 15-48-02391 р\_поволжье\_a, № 16-08-01114 а), программой государственной поддержки ведущих школ РФ (грант НШ-593.2014.8), РНФ (грант № 16-19-10279) в части разработки программного обеспечения и проведения компьютерных экспериментов.

### **Список литературы**

1. Митенков Ф.М., Кодочигов Н.Г., Васяев А.В., Головки В.Ф., Пономарев-Степной Н.Н., Кухаркин Н.Е., Столяревский А.Я. Высокотемпературный газоохлаждаемый реактор – энергоисточник для промышленного производства водорода// Атомная энергия. Т.97. Вып. 6. 2004. С. 432–446.
2. Mitenkov F.M., Chistov A.S., Ovchinnikov V.F., Nikolaev M.Ya., Kiryushina E. V., Litvinov V. N., Fadeeva E. V., Savikhin O. G. Electromagnetic Suspension in Vertical Axial Wind-Driven Generators// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015г. Vol.44. No3. P.195–199.
3. Wang N. X., Zhang J. G., Ding G. P. Influence of Magnetic Bearing Stiffness on Rotor in Wind Turbine Generator// Applied Mechanics and Materials, Vol 150, P. 57-62, Jan. 2012.
4. Митенков Ф.М., Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Кирюшина Е.В., Литвинов В.Н., Фадеева Е.В., Чистов А.С. Влияние скорости ветра на динамику вертикально-осевого ротора ветроэнергетической установки на электромагнитном подвесе// Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегородский университет. 2016г. Вып. 78. С.5-12.
5. Митенков Ф.М., Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Кирюшина Е.В., Чистов А.С., Литвинов В.Н., Фадеева Е.В. Моделирование динамики вертикально-осевой ветроэнергетической установки на электромагнитном подвесе// Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегородский университет. 2012г. Вып. 74. С.184–189.
6. Знышев В.В., Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Кирюшина Е.В., Литвинчук С.Ю. Алгоритм формирования заданной силы электромагнитных подшипников в системе управления электромагнитного подвеса ротора// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 5(1). С. 138–141.
7. Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Кирюшина Е.В., Кирюшин А.А., Литвинов В.Н., Фадеева Е.В., Чистов А.С., Митенков Ф.М., Кодочигов Н.Г. Модель динамики гибкого неоднородного ротора на электромагнитных подшипниках// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. Вып. 4(1). Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2012. С.171–176.
8. Митенков Ф.М., Знышев В.В., Кирюшина Е.В., Николаев М.Я., Овчинников В.Ф., Фадеев А.В. Алгоритм определения дисбаланса ротора на электромагнитных опорах// Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2007, № 4, с. 9-14.
9. Drumov I.V., Kodochigov N.G., Belov S.E., Znamensky D.S., Baxi C.B., Telengator A., Razvi J. Studies of the «Electromagnetic Suspension System for the GT-MHR Turbo Machine Rotor Model»// Proceedings of HTR. Prague, Czech Republic, October 18–20, 2010, № 41, p.1-7.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АКУСТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РОТОРА ГИДРОАГРЕГАТА.**

**В.В. Мишакин<sup>1</sup>, К.В. Курашкин<sup>1</sup>, А.Л. Руденко<sup>2</sup>, А.В. Гончар<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>ООО «Волга-СГЭМ» «Камспецэнерго», г. Набережные Челны, Россия

*Ключевые слова:* остаточные напряжения, сварные соединения, акустоупругость, ультразвуковой контроль, ротор генератора.

В докладе представлены результаты ультразвуковых исследований напряжений в сварных соединениях элементов ротора гидроагрегата нижекамской гэс. На территории нижекамской гэс непосредственно на элементах ротора были проведены ультразвуковые измерения и с помощью уравнений акустоупругости определены напряжения, возникающие после сварки, после расклиновки ротора и после наработки гидроагрегата.

Получено, что в некоторых зонах исследуемого материала остаточные напряжения, возникающие в подкрепляющей пластине и в спице ротора после сварки, превышают предел текучести, что приводит к их интенсивной релаксации. Для определения напряженно-деформированного состояния кроме уравнений акустоупругости предлагается использовать критерий пластичности губера-мизеса, а также измерение с помощью акустических характеристик величины пластической деформации полученной в результате релаксации напряжений.

В докладе представлены также результаты определения акустическим методом напряженного состояния клиньев обода ротора, после холодной и горячей расклиновки и наработки в течение трех месяцев.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРА В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

**И.В. Моренко**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук.  
420111 Российская Федерация, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31,  
e-mail: morenko@imm.knc.ru

Рассматриваются вынужденные вращательные колебания кругового цилиндра вокруг своей оси в ламинарном потоке вязкой жидкости. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается нестационарными уравнениями Навье-Стокса. Численное моделирование осуществляется с помощью открытой интегрируемой платформы OpenFoam. Анализируется влияние амплитуды угловой скорости и частоты вынужденных колебаний на структуру следа, коэффициенты сопротивления и подъемной силы цилиндра.

*Ключевые слова:* вращательные колебания цилиндра, численное моделирование, течение вязкой жидкости.

При проектировании и эксплуатации элементов теплотехнических устройств, в которых цилиндрические тела погружены в однородный поток вязкой жидкости, возникает необходимость снижения гидродинамического сопротивления. В последние годы происходит развитие пассивных способов управления потоком, не требующих энергетических затрат, и активных [1]. Одним из активных способов управления потоком является реализация поперечных, продольных, вращательных и смешанных колебаний цилиндра.

Впервые процесс обтекания цилиндра, совершающего поворотные колебательные движения вокруг своей оси, визуализирован Taneda в 1978 году в работе [2]. Показано, что высокочастотные колебания приводят к подавлению дорожки Кармана за телом.

Работ по численному моделированию названных процессов не много, обусловлено это рядом обстоятельств. Во-первых, цилиндр является плохообтекаемым телом с нефиксированными точками отрыва потока. Во-вторых, требуется значительное сгущение сеток вблизи поверхности для корректного описания сложных процессов в пограничном слое, протекающих при высокочастотных осцилляциях. Следовательно, для численного моделирования необходимы значительные вычислительные ресурсы.

Численное исследование эффекта снижения лобового сопротивления при низкочастотных колебаниях профиля и стабилизации следа за профилем, совершающим высокочастотные колебания, выполнено с помощью метода LS-STAG в [3]

В работе [4] с помощью бессеточного численного метода воспроизведен наблюдавшийся в экспериментах Taneda [2] эффект стабилизации следа за круговым цилиндром в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости при высокой частоте вращательных колебаний цилиндра. Эффект стабилизации следа за быстро осциллирующим цилиндром авторы объясняют действием механизмов диффузии и аннигиляции вихрей в тонких концентрических слоях знакопеременной пристеночной завихренности.

Теория оптимального управления используется в работе [5], с целью минимизации среднего коэффициента сопротивления для круглого цилиндра при  $Re=200$ . Показано, что коэффициент сопротивления уменьшается на 30% при частоте колебаний 3.73.

Основная цель настоящей работы – численное исследование поперечного обтекания цилиндра бесконечной длины, совершающего вынужденные вращательные колебания, потоком вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме, а также изучение возможности использования вращательных осцилляций цилиндра для управления отрывом пограничного слоя.

Бесконечный поток жидкости моделируем расчетной областью в форме прямой призмы длиной 0.50 м, высотой 0.40 м, шириной 0.0128 м. Свяжем декартову прямоугольную сис-

тему координат  $x_1x_2x_3$  с бесконечным цилиндром диаметром  $D=0.01$  м. Для этого поместим начало координат в центр сечения цилиндра вертикальной плоскостью, перпендикулярной его оси. В этой плоскости направление оси  $Ox_1$  совпадает с направлением движения жидкости на входе, координатная ось  $Ox_2$  направлена вертикально вверх. Ось  $Ox_3$  лежит на оси обтекаемого цилиндра. Размеры расчетной области и положение цилиндра в ней определены таким образом, чтобы влияние внешних границ на решение задачи было бы минимальным.

Для описания нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости записываются уравнения Навье-Стокса без учета действия массовых сил:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

Здесь  $u_i, u_j$  – компоненты вектора скорости  $\vec{u}$ ,  $x_i, x_j$  – координаты ( $i, j = 1, 2, 3$ );  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Для уравнений (1)-(2) записываются следующие граничные и начальные условия. Во входном сечении, перпендикулярном оси  $Ox_1$ , задается скорость  $u_1 = u_\infty = \text{const}$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ; давление  $p = p_0$ .

На выходе из расчетной области воспользуемся граничными условиями, означающими выравнивание гидродинамических характеристик потока:  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$ .

$$\text{На верхней и нижней границах: } \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0.$$

$$\text{На боковых границах: } \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, u_3 = 0, \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0.$$

Считается, что на движущейся поверхности обтекаемого цилиндра скорость жидкости и точек поверхности совпадают, реализуются условия прилипания несущей среды: нормальная компонента скорости жидкости  $u_n = 0$ , касательная составляющая  $u_\tau = 0.5D\omega$ . Где  $\omega = \omega_{\max} \cdot \sin(2\pi f^* t)$  – угловая скорость вращения цилиндра,  $\omega_{\max}$  – амплитуда колебаний угловой скорости вращения цилиндра,  $f^*$  – частота. При этом амплитуда колебаний цилиндра в данном случае будет  $A/2\pi f^*$ . Кроме того, записывается условие для давления  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

В начальный момент времени  $t = 0$  жидкость мгновенно приходит в движение,  $u_1 = u_\infty$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ,  $p = p_0$ .

Дополнительно вводятся безразмерные параметры:  $\alpha = DA/2u_\infty$  – амплитуда угловой скорости и  $f = f^*/f_0$  – частота вынужденных колебаний, где  $f_0$  – частота отрыва вихрей от поверхности неподвижного цилиндра при соответствующем числе Рейнольдса в случае обтекания его вязкой несжимаемой жидкостью.

Решение задачи (1)-(2) с названными граничными и начальными условиями осуществляется методом конечных объемов с помощью открытой интегрируемой платформы для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM с лицензией GNU GPL. Используется утилита isoFoam, основанная на алгоритме PISO. Для решения системы линейных уравнений для давления используется алгебраический многосеточный метод, для

скорости – метод бисопряженных градиентов. Выбирается шаг по времени, удовлетворяющий условию Куранта.

В ходе численных расчетов задаются следующие параметры жидкости: плотность  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с; скорость жидкости на входе в расчетную область считается постоянной  $u_\infty = 0.02$  м/с, соответственно, число Рейнольдса равно  $Re = u_\infty D / \nu = 200$ . Варьируются амплитуда  $\alpha$  и частота вынужденных колебаний цилиндра  $f$ . Коэффициент сопротивления  $C_D$  и коэффициент подъемной силы цилиндра  $C_L$  рассчитываются по формулам:

$$C_D = \frac{F_{x1}}{0.5\rho u_\infty^2 D l}, \quad C_L = \frac{F_{x2}}{0.5\rho u_\infty^2 D l},$$

где  $F_{x1}, F_{x2}$  – проекции на оси  $Ox_1, Ox_2$  действующей на цилиндр силы,  $l$  – длина цилиндра.

С целью верификации программного комплекса проводится расчет обтекания неподвижного и осциллирующего цилиндра при  $Re = 35$  (рис. 1). Истечение дыма демонстрируют фотографии выполненного в работе [2] эксперимента (рис. 1 *a, b*). Результаты численного расчета визуализированы инструментом StreamTracer в открытом графическом пакете ParaView (рис. 1 *c, d*). За неподвижным цилиндром формируется пара вихревых областей (рис. 1 *a, c*). В случае вращательных колебаний цилиндра, при отклонении лобовой точки поверхности на  $\pm 45^\circ$ , амплитуде угловой скорости  $\alpha = 7.4$ , наблюдается безотрывное обтекание (рис. 1 *b, d*). Таким образом, установлено качественное согласие численных и экспериментальных данных.

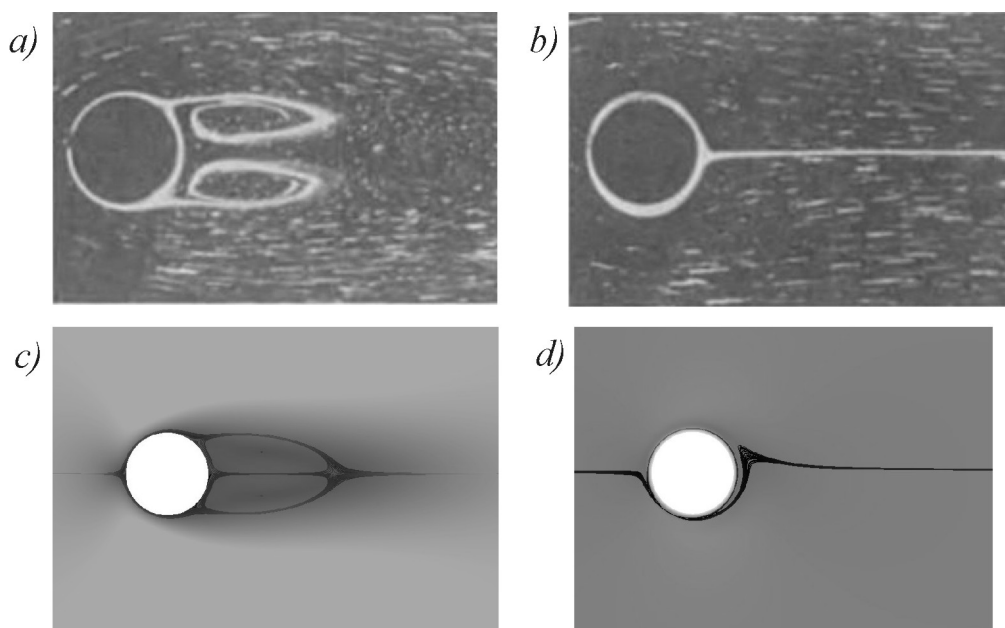


Рис. 1. Картина течения при  $Re = 35$ : *a, b* – эксперимент [2]; *c, d* – расчет

Характерная картина обтекания неподвижного цилиндра при  $Re = 200$  показывается на рис. 2. В лобовой критической точке набегающий поток вязкой жидкости полностью тормозится. На поверхности цилиндра образуется пограничный слой, толщина которого увеличивается по мере удаления от критической точки. По нормали к поверхности в пограничном слое скорость жидкости увеличивается от нуля до скорости набегающего потока. Действие сил трения приводит к утолщению пограничного слоя и последующему его отрыву от стенки. За телом формируется регулярная вихревая дорожка Кармана с частотой отрыва вихрей  $f_0$ . Средний коэффициент сопротивления неподвижного цилиндра составляет  $\bar{C}_{D0} = 1.37$ .

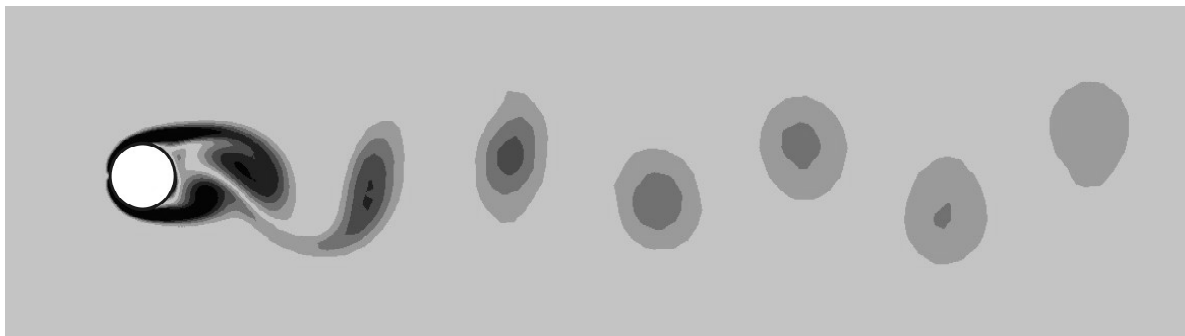


Рис. 2. Мгновенное поле завихренности при обтекании вязкой жидкостью неподвижного цилиндра

Однако, если цилиндр совершает периодические вращательные движения, то структура потока в следе меняется (рис. 3). В ходе численных экспериментов найдены такие режимы поворотных колебаний, при которых происходит так называемый захват частоты, когда частота отрыва вихревых структур совпадает с частотой осцилляций. Этот процесс сопровождается затуханием коэффициентов гидродинамического сопротивления и подъемной силы. Кроме того, существуют параметры колебаний  $\alpha$ ,  $f$ , при которых наблюдается, напротив, рост амплитуды подъемной силы цилиндра по сравнению с данными для неподвижного тела.



Рис. 3. Мгновенное поле завихренности в случае обтекания вязкой жидкостью осциллирующего цилиндра при  $\alpha = 4$ ,  $f = 4$

Влияние амплитуды угловой скорости на относительный средний по времени коэффициент сопротивления цилиндра  $c_x = \overline{C_D}/\overline{C_{D0}}$  и относительную амплитуду коэффициента подъемной силы  $c_y = \Delta C_L/\Delta C_{L0}$  демонстрируется на рис. 4. Имеет место немонотонная зависимость  $c_x$ ,  $c_y$  от  $\alpha$ . Сначала с ростом  $\alpha$  коэффициент сопротивления и амплитуда коэффициента подъемной силы уменьшаются. Отметим, что снижение  $c_y$  происходит более значительно, чем  $c_x$ . После достижения минимального значения происходит их рост.

В результате проведения серии численных расчетов установлено, что благодаря гармоническим поворотным колебаниям цилиндрического тела можно управлять отрывом потока, уменьшить его гидродинамическое сопротивление на 32% при амплитуде угловой скорости  $\alpha = 4$  и частоте вынужденных колебаний  $f = 4$  по сравнению со случаем обтекания неподвижного цилиндра.

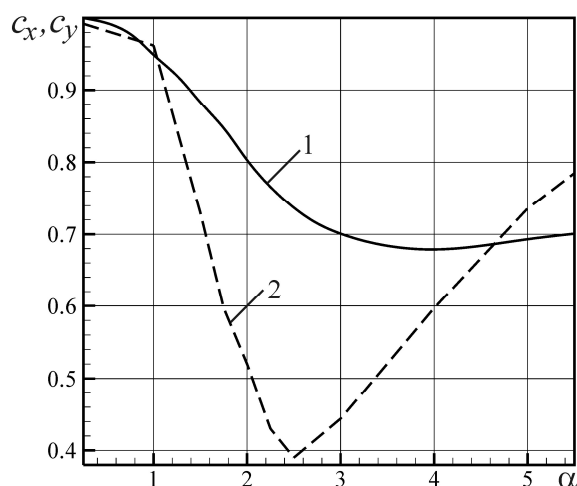


Рис. 4. Относительный средний по времени коэффициент сопротивления цилиндра (1) и относительная амплитуда коэффициента подъемной силы (2) при частоте  $f = 4$  в зависимости от амплитуды  $\alpha$

С помощью методов математического моделирования проведено исследование поперечного обтекания вязкой жидкостью цилиндра бесконечной длины, совершающего вынужденные вращательные колебания вокруг своей оси. Получены данные о влиянии осцилляций на структуру течения, коэффициенты сопротивления и подъемной силы цилиндра при числе Рейнольдса  $Re = 200$ . Установлено, что путем реализации вращательных осцилляций можно снизить гидродинамическое сопротивление цилиндрического тела на 32%. Результаты численного эксперимента будут полезны при выборе рациональных режимов эксплуатации теплотехнического оборудования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы ОЭММПУ РАН «Фундаментальные проблемы физической и химической механики для экспериментов на МКС».

### Список литературы

1. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева. М.: МГУ, 2003. 360 с.
2. Taneda S. Visual Observations of the Flow past a Circular Cylinder Performing a Rotary Oscillation // Journal of the Physical Society of Japan. 1978. Vol. 45. P. 1038–1043.
3. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Моделирование обтекания кругового профиля, совершающего вращательные колебания, методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2014. № 3. С. 93–107.
4. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я., Дынников Я.А., Малахова Т.В. О стабилизации следа за круговым цилиндром, совершающим высокочастотные вращательные колебания // Доклады академии наук. 2010. Т. 432. № 1. С. 45–49.
5. Bergmann M., Cordier L. Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and POD reduced-order models // Journal of Computational Physics. 2008. Vol. 227. P. 7813–7840.

## О ТРАНЗИТОРНЫХ МАЯТНИКОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

Морозов А.Д., Морозов К.Е.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

morozov@mm.unn.ru

Рассматриваются двумерные неавтономные уравнения маятникового типа. Предполагается, что эти уравнения являются транзиторными, т.е. неавтономными лишь на конечном промежутке времени. В качестве примеров рассматривается транзиторный сдвиг в уравнении Джозефсона и в уравнении колебаний тела, подвешенного на тросах. Для консервативного случая устанавливается мера транспорта от колебаний к вращениям. Для неконсервативного случая рассматривается вопрос о влиянии транзиторного сдвига на установление того или иного режима.

### Введение

Здесь мы рассматриваем неавтономное уравнение на цилиндре  $\mathbb{C}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \bmod 2\pi$

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha f(t) + (\beta + \cos nx)\dot{x}], \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\alpha, \beta$  – параметры,  $f(t): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  – функция перехода, удовлетворяющая условию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (2)$$

В качестве функции перехода мы выбираем кубический сплайн. В соответствии с формулой (2) при  $t < 0$  уравнение (1) явно не зависит от времени и задается формулой

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(\beta + \cos nx)\dot{x}. \quad (3)$$

Векторное поле, описываемое (3), будем называть прошлым векторным полем. При  $t > \tau$  (1) также не зависит от времени и задается уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos nx)\dot{x}]. \quad (4)$$

Векторное поле, описываемое (4), будем называть будущим векторным полем.

Системы, которые подобно (1), являются неавтономными только на конечном промежутке времени называются транзиторными [1-4].

Уравнение (4) описывает динамику в джозефсоновском контакте (при  $n = 1$ ) [5,6], а также колебания груза прямоугольной формы, подвешенного на тросах (при  $n > 1$ ) [7]. Кроме того, уравнениями маятникового типа описываются многие другие физические задачи (например, задачи фазовой синхронизации частоты [8]).

При  $t < 0$  (т.е. для отрицательных полутраекторий) движение определяется прошлым векторным полем. Динамика на промежутке неавтономности  $[0; \tau]$  может быть осуществлена с помощью отображения перехода  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , отображающего точки фазового пространства из их положения при  $t = 0$  в их положение при  $t = \tau$  по решениям системы (1). Дальнейшее поведение (при  $t > \tau$ ) определяется будущим векторным полем. Таким образом, описание транзиторной динамической сводится к изучению автономных (прошлого и будущего) векторных полей, а также изучению свойств отображения перехода.

Для уравнения (1) мы исследуем автономные векторные поля, которые задаются формулами (3) и (4), численно построим отображение перехода, найдем образы инвариантных множеств прошлого векторного поля под действием отображения перехода, исследуем вопрос о влиянии транзиторного сдвига на поведение решений.



Случаи  $n = 1$  и  $n > 1$  рассмотрим отдельно. При  $n > 1$  ограничимся рассмотрением  $n = 2$ .

### Исследование автономных векторных полей

Автономные векторные поля задаются неконсервативными уравнениями, близкими к нелинейным интегрируемым. Исследование таких уравнений приводит к изучению порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина  $B(h)$ , простые нули которой определяют грубые предельные циклы в исходной системе.

На рис. 1 приведено разбиение плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  на области с различной топологией при  $n = 1$  (а) и  $n = 2$  (б).

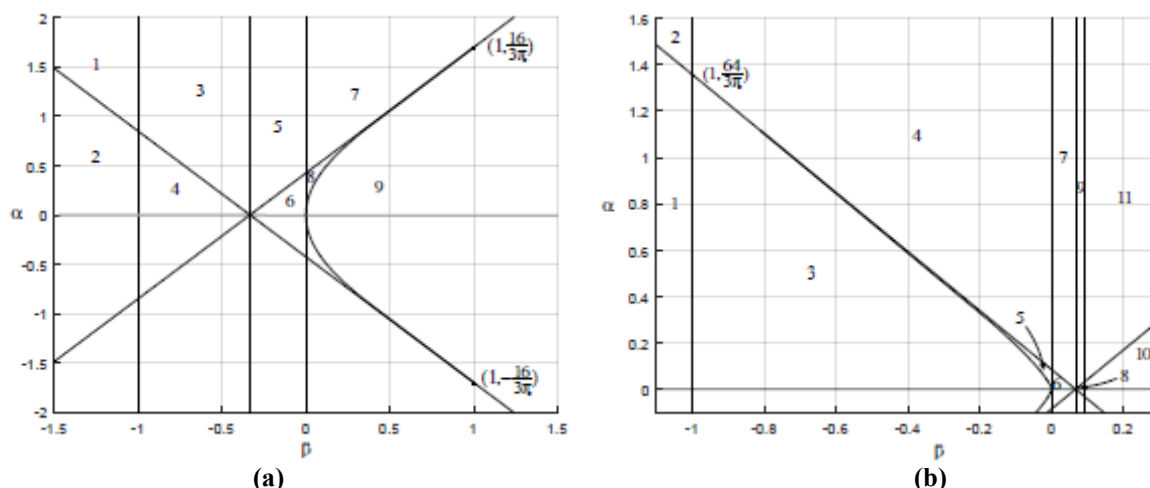


Рис. 1: Разбиение плоскости параметров при  $n = 1$  (а) и  $n = 2$  (б)

Разбиение плоскости параметров симметрично относительно оси  $\beta$ . Это связано с тем, что замена  $\alpha \rightarrow -\alpha$  в уравнении (4) эквивалентна замене  $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$ . На рис. 1(б) изображена верхняя полуплоскость. Простому векторному полю отвечает  $\alpha = 0$ .

На рисунке 2 приведены качественные фазовые портреты в каждой из областей пространства параметров при  $n = 1$  (а) и  $n = 2$  (б).

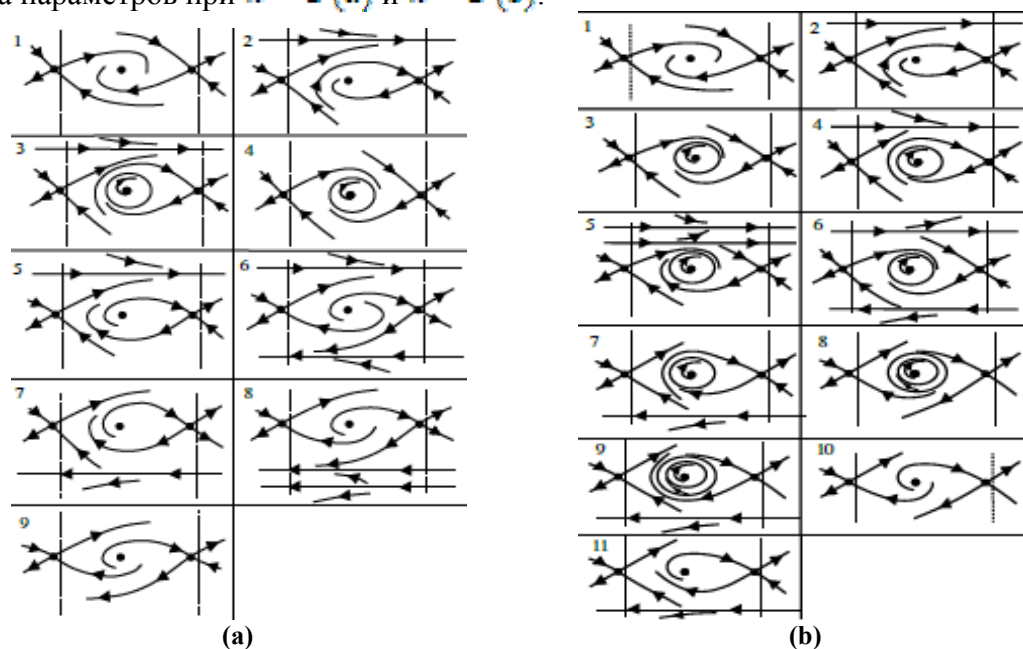


Рис. 2: Фазовые портреты при  $n = 1$  (а) и  $n = 2$  (б)

### Влияние сдвига на поведение решений

Траектории могут менять качественное поведение под действием транзитивного потока. Это означает, что траектории, находившиеся при  $t \ll 0$  в области притяжения аттрактора какого-либо типа (предельного цикла или состояния равновесия), под действием отображения перехода могут попадать в область притяжения аттрактора другого типа. В этом случае будем говорить о смене режима. Смена аттрактора определяется, вообще говоря, прошлым и будущим векторными полями (т.к. прошлое поле определяет к какому аттрактору стремилась траектория при  $t \ll 0$ , а будущее – к какому она стремится при  $t \gg \tau$ ). Рассмотрим более подробно случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ .

#### Случай $n=1$

*Утверждение.* При  $n = 1$  границы областей, при переходе в которые (под действием отображения перехода) для траекторий происходит смена режима, определяются только инвариантными множествами будущего векторного поля и не зависят от образов множеств прошлого векторного поля.

Это связано с тем что, либо при  $t \ll 0$  существует единственный глобально устойчивый аттрактор (рис. 3(a)), либо смена режима не происходит (рис. 3(b)), либо прошлое векторное поле не имеет устойчивых многообразий.

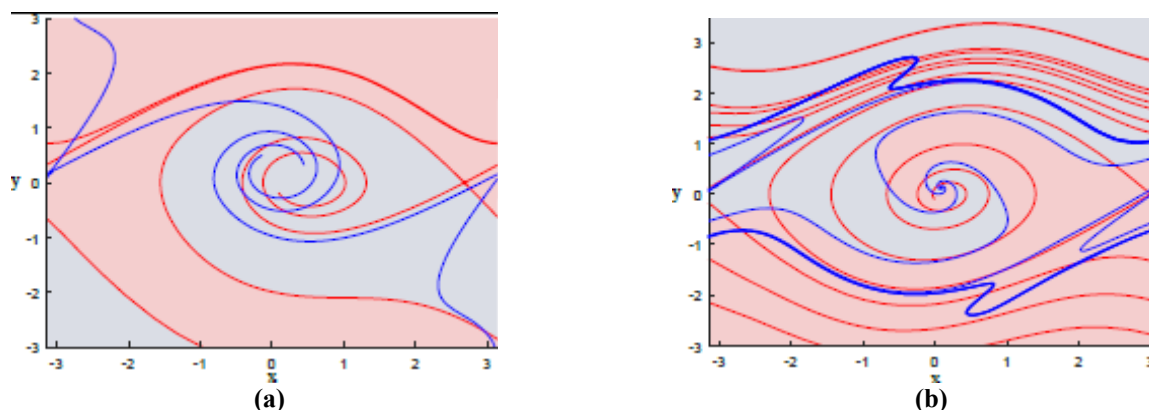


Рис. 3: Образы инвариантных множеств прошлого векторного поля при  $n = 1$

На рис. 3 розовым цветом закрашены области, соответствующие смене аттрактора, голубым – сохранению. В случае, представленном на рис. 3(b) области, определяющие смену аттрактора, зависят от образа сепаратрис прошлого векторного поля, но смены режима не происходит – для траекторий устанавливается вращательный режим.

#### Случай $n=2$

При  $n = 2$  утверждение, сформулированное при  $n = 1$ , не выполняется (см. рис.4). На рисунке 4 для областей, закрашенных голубым цветом, не происходит смены аттрактора. Для траекторий, попадающих в розовые области, происходит дестабилизация колебаний (предельный цикл в колебательной области  $\rightarrow$  бесконечность), а для траекторий, попадающих в зеленые области, происходит стабилизация колебаний (бесконечность  $\rightarrow$  предельный цикл в колебательной области). Границы областей определяются сепаратрисами будущего векторного поля и неустойчивыми предельными циклами прошлого векторного поля.

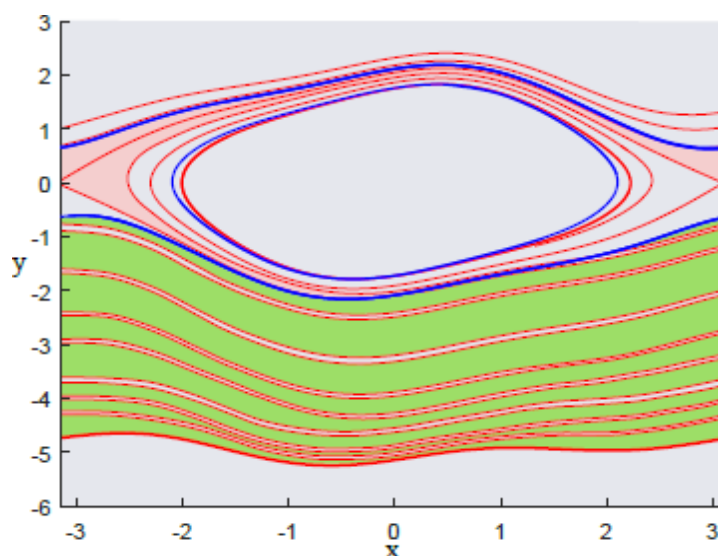


Рис. 4: Образы инвариантных множеств прошлого векторного поля при  $n = 2$

### Заключение

Изучение транзиторных динамических систем представляет интерес как с точки зрения теории неавтономных систем, так и с точки зрения приложений. Поскольку это исследование находится в начальной стадии, то важно рассмотрение дополнительных примеров. Некоторые из таких примеров, приводящие к уравнениям маятникового типа, рассмотрены в настоящей работе.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки (проектная часть госзадания, №1410), а также гранта РФФИ, №14-01-00344.

### Список литературы

1. Mosovsky V.A., Meiss J.D. // SIAM J. Applied Dynamical Systems, 2011, vol. 10, no. 1. P. 35-65.
2. Морозов А.Д., Морозов К.Е., Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере // Нелинейная динамика, 2015, том 11, № 3. С. 447-457.
3. Морозов А.Д., Морозов К.Е., Флаттер в транзиторных режимах // Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 года. С. 2632-2634.
4. Морозов К.Е. О свойствах транзиторных систем // Труды XVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов, Москва, 2-4 декабря 2015 года. С. 457-460.
5. Belykh, V. N.; Pedersen, Niels Falsig; Sorensen, O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case // Physical Review B Condensed Matter. 1977. DOI:10.1103/PhysRevB.16.4853.
6. Jan A. Sanders and Richard Cushman "Limit cycles in the Josephson equation" // SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 17, No. 3, May 1986.
7. Leech C.M. Limit cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations // Int. J. Mech. Sci.-1979.-V.21, No.9. P. 517-525.
8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982, 289 с.

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ, С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКА**

**Е.А. Мотова\*, Н.Е. Никитина**

Институт проблем машиностроения РАН, 603024 Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, Россия

[\\*motik-1@mail.ru](mailto:*motik-1@mail.ru)

Приведены результаты экспериментальных исследований влияния пластической деформации и циклического нагружения на структурное состояние и прочностные свойства стальных и дюралюминиевых образцов. В качестве информативного параметра ультразвукового контроля использована величина акустической анизотропии материала, то есть относительная разница скоростей (задержек) взаимно перпендикулярно поляризованных сдвиговых волн, распространяющихся перпендикулярно линии нагружения. Показана возможность использования эхо-метода неразрушающего контроля, с применением сдвиговых волн, для исследования упруго-пластических свойств и поврежденности конструкционного материала в процессе его усталостного разрушения.

### **1. Введение**

Усталость металла является основным видом разрушения при переменном (в том числе гармоническом) нагружении [1]. Если причиной разрушения материала от усталости являются макронапряжения, то происходит, преимущественно в поверхностных слоях металла, зарождение усталостных микротрещин за счет процессов микротекучести. Зачастую металлы и сплавы не разрушаются идеально хрупко, то есть без предшествующей пластической деформации [2]. Процесс разрушения происходит при напряжениях, значительно меньших, чем предел прочности, часто даже ниже предела упругости. В областях, имеющих нарушения структуры, развиваются микротрещины, которые становятся концентраторами напряжений, вызывают появление новых микротрещин и затем – главной трещины, разрушающей материал.

Усталость металла охватывает две области циклического нагружения и деформирования, которые в значительной степени отличаются друг от друга. В отличие от области многоциклового усталости (с количеством циклов до  $10^7 - 10^8$ ) [3], в области малоциклового усталости, при больших амплитудах нагружения и с числом циклов до  $5 \times 10^4 - 10^5$  [3], в материале возникают существенные пластические деформации.

Важнейшими информативными характеристиками акустических методов контроля и диагностики конструкционных материалов являются затухание и скорость распространения ультразвука [4,5]. Наиболее распространенный способ неразрушающего контроля изделий различного назначения - эхо-импульсный метод.

Большой информативностью при исследовании конструкционных материалов обладают сдвиговые упругие волны. Скорость сдвиговых волн гораздо более чувствительна к несплошностям, расслоениям, микротрещинам, поперечным к направлению ее поляризации, чем к расположенным в том же направлении. При возникновении напряжений, пластической деформации вдоль некоторого направления скорости сдвиговых волн, поляризованных вдоль и поперек него, будут меняться по-разному. Параметром, характеризующим это различие, является величина акустической анизотропии материала  $a$ , которую мы определяли экспериментально по результатам прецизионного измерения времени распространения импульсов сдвиговых волн:

$$a = \frac{V_1 - V_2}{V_{cp}} = \frac{t_2 - t_1}{t_{cp}}, \quad (1)$$

где  $V_1, V_2$  - скорости сдвиговых волн;  $t_1, t_2$  - задержки в материале импульсов сдвиговых волн, бегущих вдоль нормали к его поверхности и поляризованных вдоль и поперек направления нагружения.

Как было отмечено ранее (см., например, [6]), пластическая деформация вдоль направления нагружения увеличивает параметр акустической анизотропии материала. Нами обнаружены довольно существенные параметры акустической анизотропии в жаропрочной стали компрессорных лопаток после длительной эксплуатации (по-видимому, связанные с процессами ползучести материала под действием инерционных нагрузок). После восстановительной термической обработки величина акустической анизотропии материала значительно снижается [7].

Целью работы является экспериментальное исследование поведения параметра акустической анизотропии при действии циклического нагружения на конструкционные материалы сталь 38ХНЗМА и алюминиевый сплав Д16.

## 2. Аппаратура для проведения ультразвуковых измерений

Экспериментальные исследования образцов конструкционных материалов, подвергнутых различным силовым воздействиям, выполнены ультразвуковым эхо-методом с использованием лабораторного акустического стенда (рис. 1).

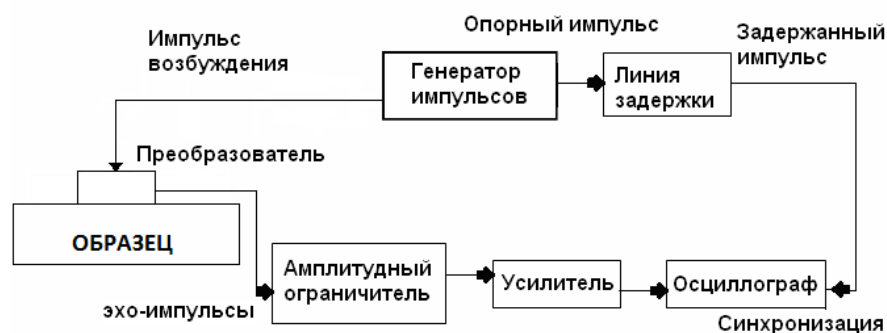


Рис. 1. Блок-схема измерительного стенда

В его состав входят: измеритель временных интервалов И2-26, блок формирования и усиления импульсов (БФУ), приемно-передающие (совмещенные) пьезоэлектрические преобразователи (ПЭП) оригинальной конструкции для возбуждения и приема импульсов продольных и сдвиговых волн. Нами использованы ПЭП сдвиговых колебаний частотой 4 МГц. Функции генератора опорного импульса и калиброванной линии задержки выполняет источник временных сдвигов (ИВС) прибора И2-26. Блок индикатора прибора И2-26 служит в качестве осциллографа. Устройство БФУ формирует мощный импульс возбуждения пьезодатчика из слабого сигнала ИВС, усиливает слабые эхо-импульсы и выполняет роль ограничителя амплитуды мощного «ударного» импульса на экране осциллографа. Электропитание устройства – от стандартного блока питания.

Электрические сигналы, соответствующие ультразвуковым импульсам, поступают на вход осциллографа. Опорный импульс с генератора также подается на линию задержки, и затем на вход синхронизации осциллографа, для того, чтобы развертка запускалась всякий раз, когда появляется задержанный опорный импульс. Изменяя скорость развертки индикатора и показания линии задержки, можно как наблюдать всю картину отраженных импульсов, так и «рассматривать» отдельные эхо-импульсы, задержавшиеся в материале точно на то же время, что и опорный импульс в линии задержки. По показаниям ее шкалы можно с высокой точностью измерять как временные интервалы между синфазными точками эхо-импульсов, так и фазовые и частотные искажения внутри импульса, прошедшего тот или иной путь в материале.

Поскольку изменения скоростей упругих волн в широком спектре различных структурных состояний и технологических обработок конструкционных материалов обычно не превышают нескольких процентов [8], для их применения в качестве информативных параметров неразрушающего контроля требуется адекватная точность измерения временных интер-

валов. Требуемую точность обеспечивает применение прецизионной ультразвуковой аппаратуры, квалифицированное проведение акустических измерений и правильная интерпретация их результатов.

### 3. Ультразвуковые исследования стальных образцов

Акустическим исследованиям подвергались образцы № 1 и № 2 из конструкционной легированной стали 38ХНЗМА. Параметры акустической анизотропии вычислены нами на основании прецизионных измерений временных интервалов между синфазными точками ультразвуковых импульсов, отраженных 1, 2, 3 и 4 раза от поверхностей образца. ПЭП устанавливали в пяти точках рабочей части образца по 3 раза.

Образец № 1 был подвергнут статическому нагружению до возникновения пластической деформации  $\varepsilon = 0,2\%$  и  $\varepsilon = 1,2\%$ . После каждой ступени нагружения, включая образец до испытаний, проведены акустические измерения времени распространения импульсов сдвиговых волн, поляризованных вдоль и поперек линии нагружения и распространяющихся по нормали к поверхности образца.

На экране осциллографа хорошо видно четыре импульса. Время задержки четвертого импульса относительно первого составило около 51 мкс. Погрешность измерения задержки импульсов упругих волн в материале 0,01 мкс, при базе измерения 50 мкс. Значит, погрешность определения величины акустической анизотропии материала по формуле (1) составила 0,04%. На рис. 2 представлены результаты акустических измерений на каждой ступени нагружения.

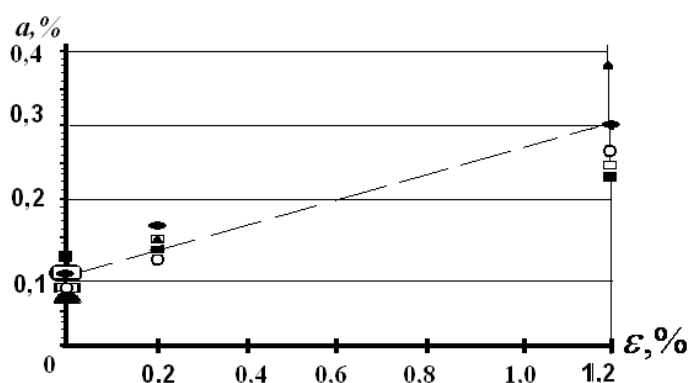


Рис. 2. Зависимость параметра акустической анизотропии от величины пластической деформации образца

Действительно, величина параметра акустической анизотропии растет при увеличении пластической деформации образца, что подтверждает экспериментальные результаты, приведенные, например, в книге [7].

Исследовано влияние циклического режима нагружения на материал образца № 2 при симметричным цикле с амплитудой деформации  $\varepsilon_a = 0,5\%$  и числом циклов  $N = 0, 1000, 2000, 3000$ . После 3017 циклов нагружения образец разрушился. На рис. 3 приведена зависимость параметра акустической анизотропии материала от числа циклов нагружения.



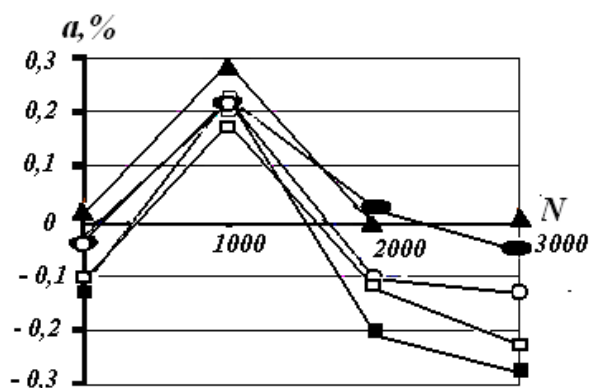


Рис. 3. Зависимость параметра акустической анизотропии материала от числа циклов нагружения стального образца.

Рисунок 3 показывает, что на начальном этапе испытаний при увеличении числа циклов нагружения параметр акустической анизотропии материала увеличивается, по-видимому, в соответствии с увеличением пластической деформации. В районе 1000 циклов он начинает резко уменьшаться, затем это уменьшение замедляется. Немонотонность зависимости информативного акустического параметра от степени усталости конструкционного материала мы объясняем наличием двух конкурирующих физических механизмов, влияющих на величину акустической анизотропии, а именно:

- а) увеличение степени пластической деформации – рост величины анизотропии;
- б) зарождение микротрещин (микродефектов), расположенных перпендикулярно линии нагружения и уменьшающих скорость волн, поляризованных вдоль линии нагружения - параметр анизотропии уменьшается.
- в) образование макротрещин, ведущих к разрушению. Одна или несколько макротрещин гораздо меньше повлияет на скорость волны, чем множество микротрещин. Поэтому уменьшение параметра анизотропии замедляется.

Наши экспериментальные исследования показали, что первый из указанных факторов наиболее важен на начальном этапе малоциклового нагружения, второй - на следующем, а третий - на конечном его этапе.

#### 4. Ультразвуковые исследования дюралюминиевых образцов

Изучено влияние гармонического нагружения на акустические характеристики образцов из сплава Д16. Дюралюминиевые образцы № 1 и № 2 подвергали гармоническому нагружению частотой 30 Гц и амплитудой  $\sigma_a = 3$  МПа ступенями по 30 000 периодов. Через каждые 30 000 циклов нагрузки образцы вынимались из испытательной машины, затем проводились акустические измерения в нескольких точках каждого образца, вплоть до его разрушения. Образец № 1 выдержал 190 000 циклов нагружения, а образец № 2 разрушился после 210 000 циклов. Результаты испытаний представлены на рис. 4 (количество циклов указано в тысячах).

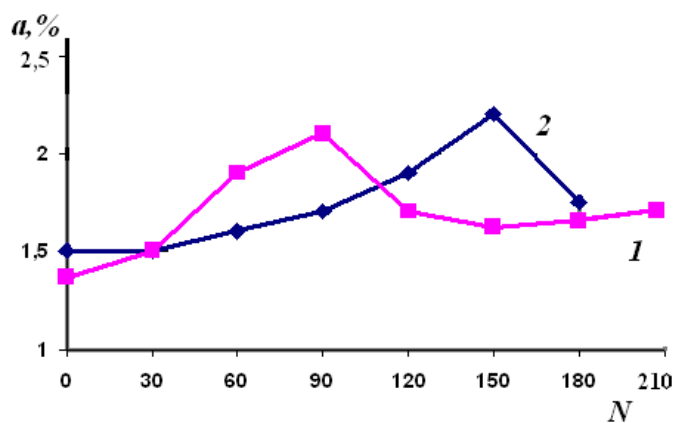


Рис. 4. Связь между количеством циклов нагружения дюралюминиевых образцов и их акустической анизотропией.

В области многоциклового усталости, при малой амплитуде нагрузки, деформация во время каждого цикла в значительной степени упруга [3, 4], и пластические деформации не накапливаются. В нашем случае мы доходим до границы между малоциклового и многоциклового усталостью. Однако рост параметра акустической анизотропии и здесь наблюдается, значит, пластическая деформация образцов при гармоническом нагружении с частотой в десятки герц все же происходит.

Проведенные эксперименты показали наличие связи между степенью усталости материала образца, характеризующейся увеличением пластической деформации и накоплением микротрещин, приводящих к развитию макротрещины, и его акустическими свойствами. Закономерности изменения параметра акустической анизотропии, выявленные при малоциклового усталости стальных образцов, сохраняются и для дюралюминиевых образцов, подвергнутых гармоническому нагружению. Есть возможность выявлять неразрушающим акустическим методом как момент начала интенсивного трещинообразования (по началу уменьшения параметра акустической анизотропии), так и момент начала интенсивного разрушения (возникновения макротрещин) (по прекращению уменьшения измеряемого параметра).

#### Список литературы

1. Л.М. Качанов, *Основы механики разрушения*. М.: Наука, 1980.
2. В.Т. Трощенко, *Деформирование и разрушение металлов при многоциклового нагружении*. Киев: Наукова думка, 1981.
3. В.Ф. Терентьев, А.Н. Петухов, *Усталость высокопрочных металлических материалов* // ИМЕТ РАН-ЦИАМ, М., 2013.
4. Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик, *Ультразвуковые методы в физике твердого тела*. М.: Мир, 1972.
5. А.А. Ботаки, В.Л. Ульянов, А.В. Шарко, *Ультразвуковой контроль прочностных свойств конструкционных материалов*. М.: Машиностроение, 1983.
6. Н.Е. Никитина, *Акустоупругость. Опыт практического применения*. Н. Новгород: Талам, 2005.
7. Е.А. Мотова, Н.Е. Никитина, Ю.П. Тарасенко // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2013. № 4.
8. В.В. Муравьев, Л.Б. Зуев, К.Л. Комаров, *Скорость звука и структура сталей и сплавов*. Новосибирск: Наука, 1996.



## НЕУДЕРЖИВАЮЩИЕ СВЯЗИ В СЛУЧАЕ САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА НА НАКЛОННОЙ ВОГНУТО-ВЫПУКЛОЙ НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Р.П. Мошкин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
e-mail: [rmoshkin@yandex.ru](mailto:rmoshkin@yandex.ru)

Рассмотрено классическое определение принципа Гаусса и его трактовку в работах К.Ф. Гаусса, Г. Шеффлера, И.И. Рахманинова, М.В. Остроградского, Е.А. Болотова и Н.Г. Четаева, а также рассмотрим пример Гиббса.

Принцип наименьшего принуждения, высказанный К.Ф. Гауссом в 1829 г. [12], является наиболее общим вариационным принципом механики, приложимым как к голономным, так и к неголономным (линейным и нелинейным) системам.

*Ключевые слова:* аналитическое выражение принципа Гаусса, неудерживающие связи, пример Гиббса, негладкая поверхность, сани Чаплыгина

### 1. Аналитическое выражение принципа Гаусса.

#### Различные трактовки принципа Гаусса и этапы его развития

Аналитическое выражение принципа обычно связывают с именем Г. Шеффлера. В 1958 г. Г. Шеффлер дал аналитическую запись принципу наименьшего принуждения Гаусса. Величина Принуждения вычисляется в координатной форме. Работа Шеффлера [13] представляет довольно обстоятельное исследование принципа Гаусса, в котором получено известное аналитическое выражение для принуждения в декартовых прямоугольных координатах. Ход рассуждения Шеффлера сводится к следующему. Пусть точка  $a$  в момент  $t$  имеет координаты  $x, y, z$ ; она обладает скоростью, проекции которой равны соответственно производным  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  от координат по времени, и ускорением, проекции которого равны вторым производным  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  от координат по времени; проекции действующей на точку силы -  $X, Y, Z$ . Тогда перемещение точки  $a$  в направлении координатных осей за промежуток времени  $dt$  с точностью до членов второго порядка малости будут соответственно

$$\dot{x}dt + \frac{1}{2}\ddot{x}dt^2, \quad \dot{y}dt + \frac{1}{2}\ddot{y}dt^2, \quad \dot{z}dt + \frac{1}{2}\ddot{z}dt^2.$$

Если бы точка  $a$  в момент  $t$  стала свободной, то перемещения ее в направлении координатных осей за тот же промежуток представились бы выражениями

$$\dot{x}dt + \frac{1}{2}\frac{X}{m}dt^2, \quad \dot{y}dt + \frac{1}{2}\frac{Y}{m}dt^2, \quad \dot{z}dt + \frac{1}{2}\frac{Z}{m}dt^2.$$

Поэтому вектор  $\overline{cb}$  отклонения точки от свободного движения имеет проекции

$$\frac{1}{2}\left(\frac{X}{m} - \ddot{x}\right)dt^2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{m} - \ddot{y}\right)dt^2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{m} - \ddot{z}\right)dt^2.$$

Следовательно, принуждение  $Z_\omega$ , равное по Гауссу сумме

$$\sum m\overline{bc}^2,$$

аналитически представляется выражением

$$\frac{dt^4}{4} \sum m \left[ \left( \frac{X}{m} - \ddot{x} \right)^2 + \left( \frac{Y}{m} - \ddot{y} \right)^2 + \left( \frac{Z}{m} - \ddot{z} \right)^2 \right].$$

Отбрасывая множитель  $\frac{dt^4}{4}$ , не влияющий на экстремум принуждения, Шеффлер под принуждением системы понимает величину

$$Z_{\omega} = \sum m \left[ \left( \ddot{x} - \frac{X}{m} \right)^2 + \left( \ddot{y} - \frac{Y}{m} \right)^2 + \left( \ddot{z} - \frac{Z}{m} \right)^2 \right].$$

Другими словами, если на точку массой  $m_i$ , принадлежащую связанной системе, действуют активные силы с проекциями  $X_i, Y_i, Z_i$ , и начальная скорость в каждой точке имеет проекции  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ , то по истечении элемента времени  $dt$  точка в свободном движении придет в положение с координатами (выпишем только одну из них):

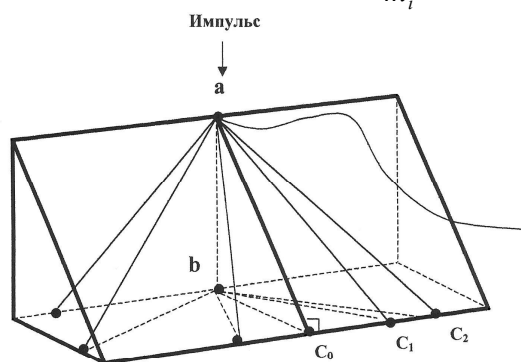
$$x_i + \dot{x}_i dt + \frac{1}{2} \frac{X_i}{m_i} dt^2,$$

здесь удерживаются только члены до второго порядка малости. Координата точки по истечении того же времени в истинном связанном движении системы записывается в виде:

$$x_i + \dot{x}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{x}_i dt^2,$$

где  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$  - проекции ускорения точки (выписана лишь одна координата). Вычитанием этих двух выражений Шеффлер получает проекцию “отклонения” точки в истинном движении от свободного движения в течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$ . Далее он умножает квадраты этих отклонений на соответствующие массы точек, суммирует по точкам и координатам и получает выражение “принуждения”:

$$Z_{\omega} = \sum \frac{1}{m_i} \left[ (X_i - m_i \ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)^2 \right].$$



$\sum_i m b c_i^2 = \min$ ,  $m$  - масса точки  
 $c_i$  - возможные траектории;  
 $b$  - если бы не было связи.

Рис. 1. Принцип Гаусса

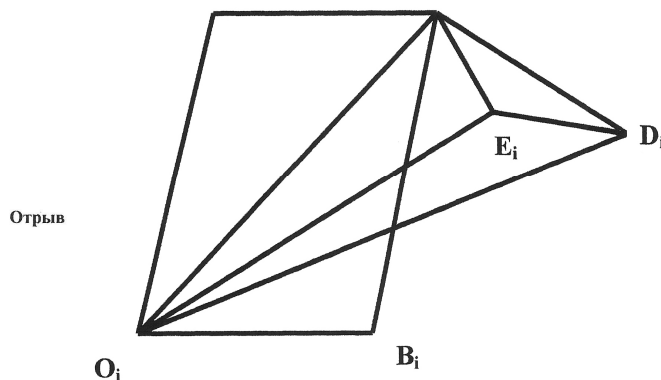


Рис. 2. Принцип Гаусса у Рахманинова

После этого принцип Гаусса выражается как условие локальной минимальности принуждения по отношению ко всем кинематически возможным движениям (из тех положений с теми же начальными скоростями). Варьированию подвергаются только проекции ускорений точек. Формально окончательная запись принципа Гаусса-Шеффлера выражает не только условие минимальности принуждения:

$$\delta Z_{\omega} = \sum \frac{1}{m_i} \left[ (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \ddot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta \ddot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta \ddot{z}_i \right] = 0.$$

Впервые принцип Гаусса обобщил на системы с нестационарными связями И.И. Рахманинов [9]. Пусть  $O_i$  - положение точки  $m_i$  системы в момент времени  $t$ ,  $A_i$  - положение, которое заняла бы точка  $m$  в момент  $t + dt$  под влиянием скорости  $v$ , достигнутой к моменту  $t$ ,  $B_i$  - положение, которое заняла бы точка  $m_i$  в момент  $t + dt$ , если бы на нее действовала

только активная сила  $\overline{F}_i$ . По действию силы  $\overline{F}_i$  и скорости  $\overline{v}_i$  свободная точка  $m_i$  в момент времени  $t + dt$  была бы в положении  $C_i$ . Так как точка  $m_i$  не свободна, то в действительном движении в момент  $t + dt$  она будет в положении  $F_i$  (см. рис. 2).

Пусть  $D_i E_i$  виртуальное перемещение, которое Рахманинов определяет в духе Остроградского как такое, которое в соединении с действительным дает перемещение, допускаемое связями. Последнее Рахманинов называет возможным. Неравенству

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{E_i C_i}^2 < \sum_{i=1}^n m_i \overline{D_i C_i}^2, \quad (1)$$

выражающему принцип Гаусса: в любой момент движения отклонение действительного движения от свободного меньше, чем для кинематически возможного движения, Рахманинов дает энергетическое истолкование, представляя принуждение системы по Гауссу

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{E_i C_i}^2$$

в виде

$$\frac{dt^2}{2} \sum_{i=1}^n P_i p_i,$$

где  $P_i$  - величина потерянной силы, а  $p_i$  - величина перемещения, которое совершила бы потерянная сила, если бы точка  $m_i$  системы была свободной,  $p_i = E_i C_i$ . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n P_i p_i$$

есть работа, которую произвели бы потерянные силы, если бы все материальные точки были свободны. Неравенство (1), таким образом, выражает предложение: "При движении системы материальных точек работа, которую потерянные силы могли бы произвести, если бы материальные точки были совершенно свободны, имеет наименьшую величину; приращение этой работы от всего перемещения, которое, соединяясь с перемещением действительным, давало бы перемещение возможное, будет положительным"[9, с. 11].

Далее, в работе Рахманинова следует вывод уравнений движения из начала наименьшей потерянной работы. Наконец, устанавливается связь между принципом наименьшей потерянной работы и принципом виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера для систем с нестационарными связями.

Н.Е. Жуковский высоко оценивал труд своего воспитанника Е.А. Болотова. Самой значительной работой Е.А. Болотова по аналитической механике является его исследование наиболее общего вариационного принципа – принципа наименьшего принуждения Гаусса. Е.А. Болотову принадлежит обобщение принципа наименьшего принуждения, которое легло в основу дальнейших исследований этого принципа учеными Казанской школы механики (Н.Г. Четаев). Жуковский расценивал работу Болотова «О принципе Гаусса» как докторскую диссертацию. Нелинейные неголономные системы работа Болотова не затрагивала.

Е.А. Болотов дал обобщение принципа Гаусса, соответствующее новому взгляду на освобождение материальных систем. Если Гаусс рассматривал полное освобождение системы от всех связей, то Болотов – частичное, состоящее в освобождении системы от всех неудерживающих и части удерживающих связей.

Мысль сравнивать отклонения действительного и возможного движения системы материальных точек не со свободным движением, а с движением при освобождении системы от части связей, получила у Болотова аналитическое выражение. Причем он не ограничился только голономными системами, но рассматривал и линейные неголономные системы. Обобщенный принцип Гаусса в формулировке Болотова состоит в том, что "отклонение действительного движения системы от действительного же ее движения, получающегося при

отбрасывании всех неудерживающих связей и произвольного числа удерживающих, меньше, чем отклонение любого из возможных движений” [6, с.99]. В обобщенном принципе Болотов заменяет принуждение суммой

$$\frac{dt^4}{4} \sum_{i=1}^n m_i [(j_{lx} - j_{kx})^2 + (j_{ly} - j_{ky})^2 + (j_{lz} - j_{kz})^2] = \frac{dt^4}{4} S_{lk}, \quad (2)$$

которая принимается за меру отклонения  $k$ -ого движения от  $l$ -ого, где  $j_{kx}, j_{ky}, j_{kz}$  и, соответственно,  $j_{lx}, j_{ly}, j_{lz}$  - проекции ускорения точки  $m_i$  системы на оси координат в  $k$ -ом и  $l$ -ом движениях в момент  $t$ , координаты же и скорости точек системы в этих двух движениях в момент  $t$  одинаковы.

Если под  $l$ -тым движением понимать движение системы, освобожденной от связей под действием внешних сил, а под  $k$ -тым – одно из возможных для системы движений, то выражение (2) совпадает с выражением для принуждения принципа Гаусса в его обычной форме.

Основой доказательства обобщенного принципа наименьшего принуждения у Болотова служат принцип виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера (принцип Даламбера-Лагранжа) и следующие два положения:

- 1) виртуальные перемещения системы при данных связях находятся среди виртуальных перемещений системы, освобожденной от всех неудерживающих и произвольного числа удерживающих связей;
- 2) существует виртуальное перемещение, пропорциональное разностям ускорений в возможном и действительном движениях.

Эти два положения, сформулированные Болотовым, легли в основу последующих обобщений принципа Гаусса.

Обобщенный принцип Гаусса Болотов использовал для решения сложного вопроса об условиях ослабления неудерживающих связей. Болотов также доказал справедливость обобщенного принципа Гаусса в теории удара, происходящего или от действия внешних ударных импульсов, или от внезапного наложения новых связей, а также в общем – случае совместного действия этих двух факторов, - во всех случаях ограничиваясь голономными и линейными неголономными системами. Нелинейные неголономные системы работа Болотова не затрагивала.

Следующий этап в обобщении принципа Гаусса связан с работами Н.Г. Четаева, относящимися к нелинейным неголономным системам [4]. Для нелинейных неголономных систем, как показал Аппель и Делассю, принцип виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера и принцип Гаусса несовместимы. При этом наиболее общим является принцип Гаусса, справедливый для нелинейных неголономных систем. Суть вопроса, как заметил Н.Г. Четаев, состоит в самом определении понятия виртуальных перемещений, которое совпадает с определением виртуальных перемещений для голономных и неголономных систем и при которых принципы Даламбера-Лагранжа и Гаусса оказываются совместимыми.

Четаев также развил новую точку зрения на освобождение материальных систем. Гаусс рассматривал полное освобождение материальной системы, Болотов – освобождение системы от части связей, Четаев же рассматривал так называемое параметрическое освобождение материальной системы, т.е. всякое преобразование, подчиняющееся определенному математическому алгоритму, а именно такое, что если в действительном движении проекции скоростей точек системы задаются формулами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= a_i(t, q_S, \dot{q}_S), \\ \dot{y}_i &= b_i(t, q_S, \dot{q}_S), \\ \dot{z}_i &= c_i(t, q_S, \dot{q}_S), \end{aligned}$$

то в освобожденном движении – формулами

$$\dot{x}_i = a_i(t, q_S, \dot{q}_S) + \alpha(t, q_S, \eta_r, \dot{\eta}_r),$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= b_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \beta(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r), \\ \dot{z}_i &= c_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \gamma(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r),\end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  - произвольные функции указанных переменных, причем число новых переменных равно числу новых свобод, приобретенных системой.

Н.Г. Четаев доказал, что при данном им аксиоматическом определении виртуальных перемещений и освобождения и для нелинейных неголономных систем отклонение действительного движения системы от действительного движения освобожденной системы меньше отклонения любого из возможных движений от того же освобожденного движения.

При параметрическом освобождении по Четаеву геометрический смысл обобщенных координат  $q_s$  при освобождении может меняться.

Трактовка Четаева относится к системам с голономными и линейными неголономными (идеальными) связями.

Для действительного и варьированного по Гауссу за время  $dt$  движения системы он строит элементарный цикл, состоящий из прямого движения в поле действующих сил  $X_i, Y_i, Z_i$  и обратного движения в поле сил, достаточных для создания действительного движения, если бы система была свободной, т.е. в поле сил с проекциями

$$m_i \ddot{x}_i, \quad m_i \ddot{y}_i, \quad m_i \ddot{z}_i$$

и доказывает, используя принцип Гаусса в обычной форме, что работа на элементарном цикле действительного движения максимальна.

Исследование принципа Гаусса в работах Четаева относится к системам с идеальными связями.

## **2. Неудерживающие связи в случае саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности. Пример Гиббса**

Пусть твердое тело в форме пластинки опирается на наклонную плоскость острым полукруговым лезвием, жестко соединенным с пластинкой. Предполагается, что точка опоры лезвия может свободно двигаться по плоскости вдоль касательной к лезвию, но не может передвигаться в перпендикулярном направлении; проекция центра тяжести плоскости пусть совпадает с точкой опоры  $S$  лезвия. Найдем уравнения движения построенной механической системы, используя обобщенную функцию Лагранжа, линейные дифференциальные формы, структурные коэффициенты, замкнутую систему инфинитезимальных линейных операторов и обобщенную непотенциальную силу.

Рассмотрен основной пример – сани Чаплыгина на наклонной плоскости [15]. Используются обобщенные уравнения Пуанкаре и Четаева для неголономных систем в случаях  $c_{rs}^m = const, Q_s^* = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} &= c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*, \\ r, s &= 1, \dots, l, \quad m = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

где  $L^*$  - обобщенная функция Лагранжа,  $\eta_s$  - линейные дифференциальные формы,  $c_{rs}^m$  - структурные коэффициенты,  $X_s$  - замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов,  $Q_s^*$  - обобщенная непотенциальная сила. Находится общее решение [1]:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \varphi, & \eta_2 &= \omega = const, & \varphi &= \varphi_0 + \omega t, & C &= const, \\ x &= x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi),\end{aligned}$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega}(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2}(\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega}t.$$

Как пример использования новой формы уравнений Пуанкаре рассмотрим теперь качение саней Чаплыгина по наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности. Допускается сложное движение саней Чаплыгина с неудерживающими связями. Чтобы разобраться в сложном движении плоского твердого тела с возможными неудерживающими связями, обратимся к примеру Гиббса.

Пусть дана поверхность, которая проходит через начало координат перпендикулярно к оси абсцисс и обращена вогнутой стороной в положительную сторону оси абсцисс. Движущаяся материальная точка массы  $m$  в момент времени  $t_0$  проходит начало координат со скоростью  $v$ . Условие, которому удовлетворяет материальная точка в момент  $t_0$ , состоит в том, что она может покинуть поверхность в положительном направлении оси абсцисс. Возможные перемещения, допускаемые этой связью, таковы, что  $\delta x \geq 0$ , а  $\delta y$  и  $\delta z$  произвольны (см. рис. 3).

Из сочетания принципа виртуальных перемещений с принципом Даламбера

$$(X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z \leq 0 \tag{3}$$

следует

$$m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z, \quad \ddot{x} \geq \frac{X}{m} \tag{4}$$

Учитывая ограничение, которое накладывает на проекцию ускорения связь

$$\ddot{x} \geq \frac{v^2}{R},$$

где  $R$  - радиус кривизны сечения поверхности плоскостью, проходящей через скорость  $v$  и ось абсцисс, Больцман заключает, что соотношение (4), полученное из (3), определяет ускорение, если

$$\frac{X}{m} \geq \frac{v^2}{R},$$

и не дает ответа на вопрос, отделяется ли точка от поверхности для

$$X < \frac{mv^2}{R}.$$

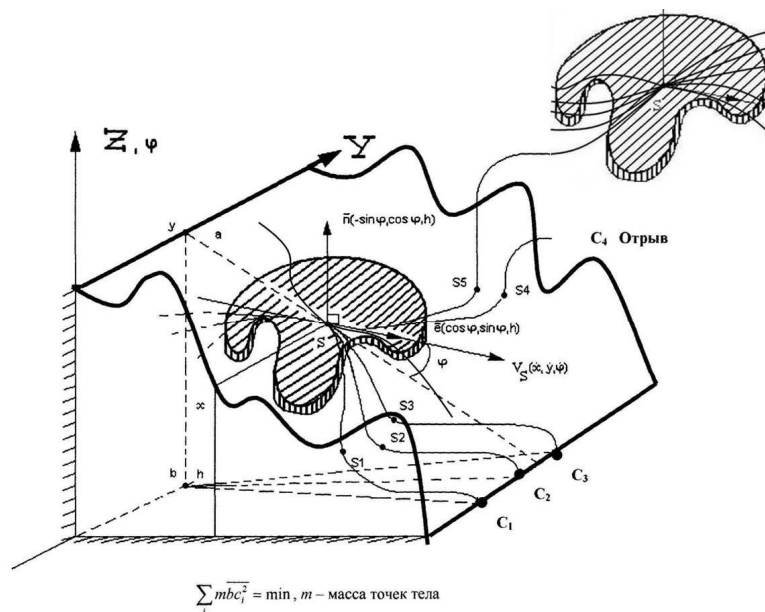


Рис. 3. Неудерживающие связи в случае саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности

Приходится рассматривать движение, которое было бы в последующий момент времени. Если бы точка сошла с поверхности, то в свободном движении ее ускорение  $\ddot{x}$  в направлении оси абсцисс было бы равно  $\frac{X}{m}$ , т.е. меньше  $\frac{v^2}{R}$ , так что точка должна бы опять оказаться на

поверхности. Следовательно, для значений  $X < \frac{mv^2}{R}$  точка не может сойти с поверхности.

С помощью принципа наименьшего принуждения этот факт усматривается непосредственно. Так как вариации  $\delta y$  и  $\delta z$  произвольны, то соотношение

$$(X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z \leq 0$$

приводится к виду

$$(m\ddot{x} - X)\delta x \geq 0. \quad (5)$$

Для  $\delta x$  имеем следующие условия: если  $\ddot{x} = \frac{v^2}{R}$ , то  $\delta x \geq 0$ , а если  $\ddot{x} > \frac{v^2}{R}$ , то  $\delta x$  произвольно. Тогда принцип наименьшего принуждения, приведенный к соотношению (5), дает следующее:

1. Пусть  $X < 0$  или  $0 < X < \frac{mv^2}{R}$ . Тогда в соотношении (5) первый множитель положителен

$$m\ddot{x} - X > 0,$$

так как

$$\ddot{x} \geq \frac{v^2}{R}.$$

Случай  $\ddot{x} = \frac{v^2}{R}$  исключается, так как при этом условии  $\delta x$ , а следовательно, и

левая часть соотношения (5) могут быть отрицательными. Значит,  $\ddot{x} = \frac{v^2}{R}$ , т.е.

материальная точка остается на поверхности.

2.  $\frac{X}{m} > \frac{v^2}{R}$ . Если  $\ddot{x} = \frac{v^2}{R}$ , то  $m\ddot{x} - X < 0$ . Так как в этом случае  $\delta x$  может иметь только

положительные значения, то соотношение (4) не выполняется. Если  $\ddot{x} > \frac{v^2}{R}$ , то  $\delta x$  может иметь положительные и отрицательные значения, и соотношение (5) только тогда имеет место, если

$$m\ddot{x} = X, \quad \ddot{x} = \frac{X}{m}.$$

Следовательно, точка отрывается от поверхности и движется как свободная.

3.  $\frac{X}{m} = \frac{v^2}{R}$ . Для  $\ddot{x} > \frac{v^2}{R}$  соотношение (5) не выполняется: вариация  $\delta x$  может быть

отрицательной, а  $m\ddot{x} - X > 0$ . Следовательно,  $\ddot{x} = \frac{v^2}{R}$ . Тогда выполняется

соотношение

$$m\ddot{x} = X,$$

т.е. точка движется как свободная, причем траектория ее соприкасается с поверхностью в начале координат. Итак, если проекция  $X$  всех действующих

на точку сил возрастает непрерывно от значений, меньших  $\frac{m\nu^2}{R}$  к большим, то точка, движущаяся по поверхности, сходит с нее при значениях  $X \geq \frac{m\nu^2}{R}$  с ускорением  $\frac{X}{m}$ .

На основании рассмотренного примера Гиббс, а затем Больцман заключают, что для систем с неудерживающими связями принцип Гаусса шире принципа виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера [10]. Это утверждение Гиббса, названное Больцманом теоремой Гиббса, нельзя считать справедливым.

Принцип виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера в той форме, которую придал Остроградский (Гиббс и Больцман, очевидно, не знали работ Остроградского), в такой же мере позволяет решить вопрос о движении при неудерживающих связях, как и принцип Гаусса, а в данном примере даже гораздо компактнее.

Принцип виртуальных перемещений в соединении с принципом Даламбера в форме Остроградского записывается в виде

$$\sum_{i=1}^n [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] + \sum_{v=1}^n \lambda_v \delta L_v = 0,$$

где  $\lambda_v$  -множители связей, а

$$\delta L_v = \sum_{i=1}^n (a_{vi} \delta x_i + b_{vi} \delta y_i + c_{vi} \delta z_i) \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m)$$

есть условия, налагаемые в общем случае неудерживающими связями на виртуальные перемещения точек системы. Остроградский показал, что множители связей  $\lambda_v$  в случае неудерживающих связей неотрицательны, и дал изящный способ для их определения.

Если все множители связей во все время движения неотрицательны, то связи не ослаблены, если же в некоторый момент времени  $t_0$  множитель связи  $\lambda_v$  обращается в нуль, а затем становится отрицательным, то начиная с момента  $t_0$  система сходит с соответствующей связи.

Применим алгоритм Остроградского к примеру Гиббса. Движение частицы массы  $m$  подчинено неудерживающей связи

$$f(x, y, z) \geq 0.$$

Выражение для множителя связи  $\lambda$  возьмем в форме Г.К. Сулова [11, с. 191-194].

$$\lambda = -\frac{\text{grad} f \cdot \overline{D_2 f}}{|\text{grad} f|^2},$$

где  $D_2 f$  -совокупность членов с частными производными второго порядка в выражении для  $\frac{d^2 f}{dt^2}$ :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \text{grad} f \cdot \varpi + D_2 f; \quad \varpi[\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}].$$

Если в данный момент  $t_0$  точка находится на поверхности, то

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

и, следовательно,

$$D_2 f = -\text{grad} f \cdot \varpi.$$

Тогда  $\lambda$  представится в виде



$$\lambda = -\frac{\text{grad}f \cdot \bar{F} - m\text{grad}f \cdot \bar{v}}{|\text{grad}f|^2}.$$

Если ось  $x$  направить по нормали к поверхности, то

$$\lambda = -\frac{X - \frac{mv^2}{R}}{|\text{grad}f|}.$$

Теперь легко определить, при каких значениях  $X$  точка отделяется от поверхности и движется как свободная. Пусть проекция силы на нормаль  $X$  непрерывно возрастает от значений, меньших  $\frac{mv^2}{R}$ , к значениям, большим  $\frac{mv^2}{R}$ .

В данный момент  $t_0$  точка находится на поверхности и имеет скорость  $\bar{v}$ . Если,

$$X < \frac{mv^2}{R},$$

то  $\lambda > 0$ , и точка остается на поверхности. Если  $X = \frac{mv^2}{R}$ , то  $\lambda = 0$ , но в следующий момент

$$X > \frac{mv^2}{R} \text{ и } \lambda < 0.$$

Следовательно, при значении

$$X = \frac{mv^2}{R}$$

точка сходит с поверхности и движется как свободная.

### 3. ПРИНЦИП ГАУССА У БУХГОЛЬЦА

Принцип Гаусса – локально-вариационный принцип, а не интегрально вариационный, так как суммирование идет поточечное. В принципе Гаусса у Бухгольца

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - \text{изоэнергетический,}$$

где  $\Delta y = dy + \delta y$  - полная изохронная вариация (см. рис. 4)

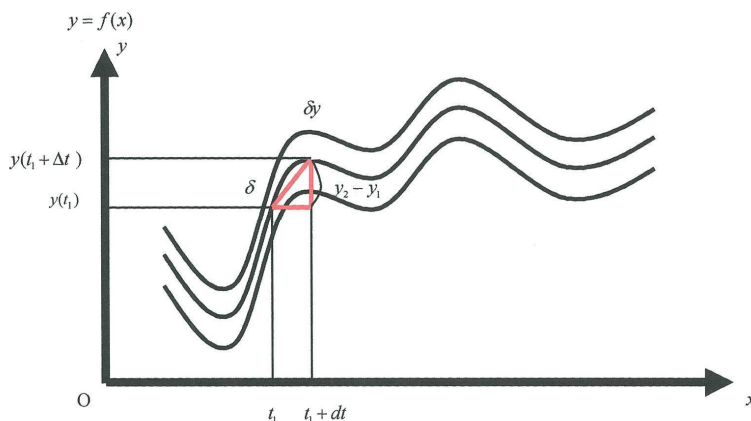


Рис. 4. Принцип Гаусса у Бухгольца

#### 4. ПРИМЕР М.В. ОСТРОГРАДСКОГО

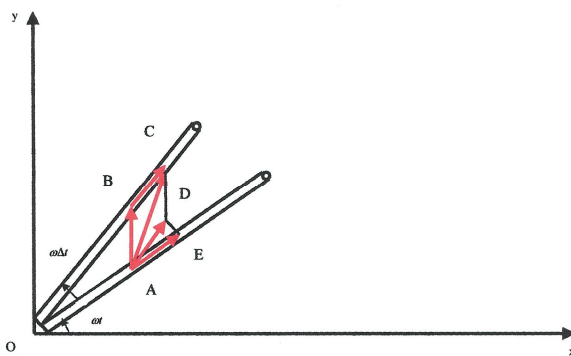


Рис. 5. Пример М.В. Остроградского

#### Список литературы

1. Румянцев В.В. Об общих уравнениях динамики // *Нелинейная механика* / Под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцева, А.В. Карапетяна. - М.: Физматлит, 2001. - 432 с. - ISBN 5-9221-009-2.
2. Мархашов Л.М. Об общих уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре-Четаева // *ПММ.* – 1985. – Т.49, вып.1. – С. 43-55.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд-во АН СССР, 1962.
4. Четаев Н.Г. О принципе Гаусса // *Изв. Каз. физ.-мат. общества. Сер. 3.* -1932. -Т. 6. - С. 68-71.
5. Четаев Н.Г. Одно видоизменение принципа Гаусса // *ПММ.* - 1941. - Т. 5, вып. 1. - С. 11-12.- (Резюме на англ. яз.).
6. Болотов Е.А. О принципе Гаусса // *Изв. физ.-мат. общества при Каз. ун-те.* - 1916. - Т. 21, № 3. - С. 99-152.
7. Кочин Н.Е. Об освобождении механических систем // *ПММ.* - 1946. - Т. 10, вып. 5, 6. С. 549-552.
8. Остроградский М.В. О мгновенных перемещениях системы, подчиненной переменным условиям: Полн. собр. трудов. - Киев: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 2. – С. 32-59.
9. Рахманинов И.И. Начало наименьшей потерянной работы, как общее начало механики // *Изв. Киевского ун-та.* - 1878. - № 4, отд. 3. – С. 1-20.
10. Розе Н.В. Лекции по аналитической механике. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1938.
11. Суслов Г.К. Теоретическая механика. - М.: Гостехиздат, 1944.
12. Гаусс К.Ф. Об одном новом общем принципе механики // *Вариационные принципы механики.* - М.: Физматгиз, 1959. - С. 170-172.- Пер. ст.: Gauss C.F. Uber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik // *J. f. d. reine angew. Math.* -1829. В. 4.
13. Scheffler H. Uber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik oder das Prinzip des kleinsten Zwanges, sowie uber ein anderes neues Grundgesetz der Mechanik. Mit einer Excursion uber verschiedene, die mechanischen Prinzipien betreffenden Gegenstande // *Zeitschr. I. Math. u. Phys.* - 1858. - Bd. 3. – S. 197-223; S. 261-274.
14. Мошкин Р.П. Об уравнениях Пуанкаре // *Материалы Седьмого международного симпозиума по классической и небесной механике, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.В. Румянцева, 17-20 октября 2011 г, ВЦ РАН, Москва. Тезисы докладов.*
15. Мошкин Р.П. Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина // *Материалы Седьмого международного симпозиума по классической и небесной механике, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.В. Румянцева, 17-20 октября 2011 г, ВЦ РАН, Москва. Международное научное издание «ПНАИС», Вып. 2(44). Т. 21. 2015. С. 76-97.*

16. Мошкин Р.П. Принцип Гаусса и задача о движении саней Чаплыгина на наклонной негладкой поверхности // Материалы Седьмого международного симпозиума по классической и небесной механике, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.В. Румянцев, 17-20 октября 2011 г, ВЦ РАН, Москва. Международное научное издание «ПНАИС», Вып. 1(45). Т. 22, 2016. С. 40-63.

## АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПИЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

Д.М.Мухаммадиев, Х.А.Ахмедов, Т.Д.Мухаммадиев

Ташкентский государственный технический университет

Механико-машиностроительный факультет

100095 Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, 2, e-mail: [davlat\\_mm@rambler.ru](mailto:davlat_mm@rambler.ru)

В статье для определения амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний пильного цилиндра с использованием кинематическую схему, динамическую модель и уравнения Лагранжа II рода составлена уравнения движения машинного агрегата пильного цилиндра джина. В результате исследований уравнения движения машинного агрегата установлено коэффициент динамичности системы, период и амплитуда вынужденных колебаний, а также сдвиг фазы колебания.

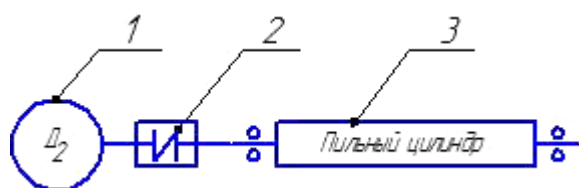
*Ключевые слова:* Характеристики крутильных колебаний, динамическая модель, уравнения движения, машинный агрегат, пильный цилиндр, динамичность системы, период и амплитуда вынужденных колебаний, сдвиг фазы колебаний

Собственные частоты крутильных колебаний в джинах можно определять как расчетным путем, так и экспериментально на специально оборудованных стендах. Однако если частота колебательного вращающего момента становится равной собственной частоте крутильных колебаний системы двигатель - пильный цилиндр, наступает явление резонанса, сопровождающееся сильным шумом и вибрациями, а в ряде случаев и механическими повреждениями. В этих случаях критическое число оборотов определяется собственной частотой крутильных колебаний вращающейся системы. [1-3].

Важным параметром динамической системы привода джина скоростей является собственная частота крутильных колебаний пильного цилиндра. Значения частот собственных колебаний нужны для определения резонансных зон, для оценки характера затухания колебаний и для определения амплитуд вынужденных крутильных колебаний привода.

В работе [4] исследована неравномерность вращения 156-ти пильного цилиндра джина при различных характеристиках асинхронных двигателей.

Для определения амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний пильного цилиндра используем кинематическую схему (рис.1), динамическую модель (рис. 2) и уравнения Лагранжа II рода составим уравнения движения машинного агрегата пильного цилиндра джина [4].



1– двигатель; 2– муфта; 3– пильный цилиндр.

Рис. 1. Кинематическая схема пильного цилиндра

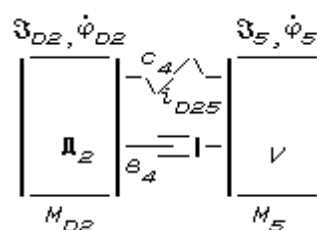


Рис. 2. Динамическая модель пильного цилиндра

Динамическая модель пильного цилиндра джина состоит  $D_2$ – электродвигателя и  $V$ – пильного цилиндра (рис. 2). Здесь  $J_{D2}$ ,  $J_5$ – моменты инерции электродвигателя и пильного цилиндра,  $кг \cdot м^2$ ;  $M_{D2}$ ,  $M_5$ – моменты нагрузок, действующих на вращающихся валах электродвигателя и пильного цилиндра,  $Н \cdot м$ ;  $c_4$ – жесткость муфты,  $Н \cdot м/рад$ ;  $v_4$ – коэффициент диссипации муфты,  $Н \cdot м \cdot с/рад$ ;  $\dot{\varphi}_{D2}$ ,  $\dot{\varphi}_5$ – угловые скорости электродвигателя и пильного цилиндра,  $с^{-1}$ ;  $i_{D25}$ – передаточные отношения системы.

Подставив определенные члены Лагранжевых уравнений, получим системы дифференциальных уравнений движения для машинного агрегата пильного цилиндра джина в следующем общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_{D2} \cdot \ddot{\varphi}_{D2} &= M_{D2} - c_4 \cdot (\varphi_{D2} - i_{D25} \cdot \varphi_5) - \mathfrak{e}_4 \cdot (\dot{\varphi}_{D2} - i_{D25} \cdot \dot{\varphi}_5); \\ \mathfrak{I}_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 &= c_4 \cdot i_{D25} \cdot (\varphi_{D2} - i_{D25} \cdot \varphi_5) + \mathfrak{e}_4 \cdot i_{D25} \cdot (\dot{\varphi}_{D2} - i_{D25} \cdot \dot{\varphi}_5) - M_5; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Учитывая, что  $i_{D25}=1$ ,  $M_{D2}=0$ ,  $M_5=0$  и обозначим  $\Delta\varphi = \varphi_{D2} - i_{D25} \cdot \varphi_5 = \varphi_{D2} - \varphi_5$  (1) запишем:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_{D2} \cdot \Delta\ddot{\varphi} + c_4 \cdot \Delta\varphi + \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi} &= -\mathfrak{I}_{D2} \cdot \ddot{\varphi}_5; \\ \mathfrak{I}_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 &= c_4 \cdot \Delta\varphi + \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_5 &= (-\mathfrak{I}_{D2} \cdot \Delta\ddot{\varphi} - c_4 \cdot \Delta\varphi - \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi}) / \mathfrak{I}_{D2}; \\ \ddot{\varphi}_5 &= (c_4 \cdot \Delta\varphi + \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi}) / \mathfrak{I}_5; \end{aligned} \right\}$$

Тогда  $\frac{\mathfrak{I}_{D2} \cdot \Delta\ddot{\varphi} + c_4 \cdot \Delta\varphi + \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi}}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{c_4 \cdot \Delta\varphi + \mathfrak{e}_4 \cdot \Delta\dot{\varphi}}{\mathfrak{I}_5} = 0$  или

$$\Delta\ddot{\varphi} + \left( \frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{I}_5} \right) \Delta\dot{\varphi} + \left( \frac{c_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{c_4}{\mathfrak{I}_5} \right) \Delta\varphi = 0 \quad (2)$$

Обозначив  $2n = \frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{\mathfrak{e}_4}{\mathfrak{I}_5}$ ,  $k^2 = \frac{c_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{c_4}{\mathfrak{I}_5}$

имеем  $\Delta\ddot{\varphi} + 2n\Delta\dot{\varphi} + k^2\Delta\varphi = 0$  при  $\Delta\varphi = e^{\lambda t}$   $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$

тогда  $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_1 \cdot i$  где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$

Учитывая  $\mathfrak{I}_{D2}=4.2$  кг·м<sup>2</sup>;  $\mathfrak{I}_5=1.244$  кг·м<sup>2</sup>;  $c_4=23065.2$  Н·м/рад;  $\mathfrak{e}_4=128.5346$  Н·м·с/рад имеем  $n=5.786344$ ,  $k=155.0254$ ,  $k_1=154.9174$ ,  $\lambda_1=-160.704$  и  $\lambda_2=149.131$ .

Решение (2) имеет вид:

$$\Delta\varphi = e^{-nt} [C_1 \cdot \cos(k_1 t) + C_2 \cdot \sin(k_1 t)] , \quad (3)$$

$$\Delta\dot{\varphi} = -ne^{-nt} [C_1 \cdot \cos(k_1 t) + C_2 \cdot \sin(k_1 t)] + e^{-nt} [C_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t)] , \quad (4)$$

$$C_1 = \Delta\varphi_0 , \quad C_2 = \frac{\Delta\dot{\varphi} + n \cdot \Delta\varphi}{k_1} = \frac{\Delta\dot{\varphi} + n \cdot \Delta\varphi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

При  $t=0$ ,  $\Delta\varphi=0$ ,  $C_1=0$ ,  $C_2=a=\omega/k=76.96902/154.9174=0.496493$ ,  $b=n/k=0.037325$ .

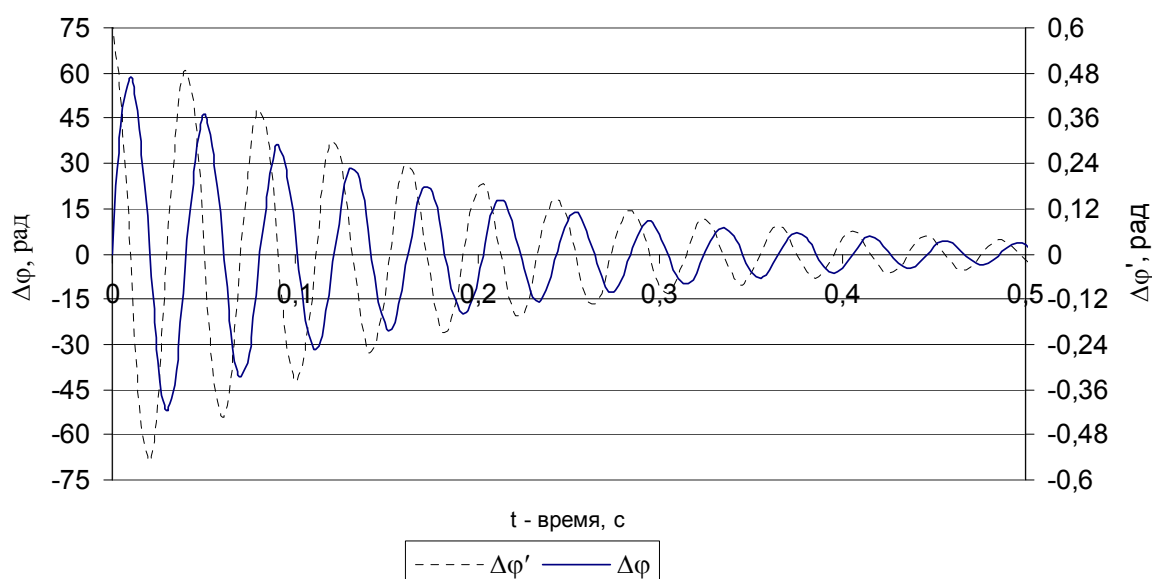


Рис. 3. График изменения угла  $\Delta\varphi$  во времени  $t$

Учитывая, что на систему действует возмущающий момент  $M_5 = M_{50} + M_{5cp} \cdot \sin \omega t$  уравнения (2) запишем:

$$\mathfrak{I}_5 \cdot \Delta \ddot{\varphi} + \mathfrak{I}_5 \cdot \left( \frac{\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{I}_5} \right) \Delta \dot{\varphi} + \mathfrak{I}_5 \cdot \left( \frac{c_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{c_4}{\mathfrak{I}_5} \right) \Delta \varphi = M_{50} + M_{5cp} \cdot \sin \omega t \quad (5)$$

Обозначив  $\alpha_9 = \mathfrak{I}_5 \cdot \left( \frac{\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{I}_5} \right)$  - коэффициент эквивалентного вязкого сопротивления, определяемый из условия равенства энергии, рассеиваемой за цикл и

$$c = \mathfrak{I}_5 \cdot \left( \frac{c_4}{\mathfrak{I}_{D2}} + \frac{c_4}{\mathfrak{I}_5} \right) = \mathfrak{I}_5 \cdot k^2 \text{ имеем:}$$

$$\mathfrak{I}_5 \cdot \Delta \ddot{\varphi} + \alpha_9 \cdot \Delta \dot{\varphi} + c \cdot \Delta \varphi = M_{50} + M_{5cp} \cdot \sin \omega t \quad (6)$$

Считая, что установившееся движение гармоническое, т.е.

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_1 \cdot \sin(\omega t + \gamma) \quad (7)$$

Статическая отклонения системы:

$$A_0 = \Delta \varphi_0 = M_{50}/c = M_{50}/(\mathfrak{I}_5 \cdot k^2) = 78.78/(23065.2 \cdot 155.0254^2) = 0.0026435 \text{ рад.}$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$\text{– с учетом сопротивления } A = \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 / \sqrt{(1 - a^2)^2 + (2n\omega/k^2)^2} = 0.00349289 \text{ рад;}$$

$$\text{– без сопротивления } A = (M_{50}/c)/(k^2 - \omega^2) = 1.4551375 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

Отношение амплитуды  $A$  к  $A_0$  или коэффициент динамичности с учетом сопротивлений (рис.4)

$$\frac{A}{A_0} = \eta = 1 / \sqrt{(1 - a^2)^2 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2} = 1.325547.$$

Коэффициент динамичности при  $b=0$  в отсутствие сопротивления

$$\eta = \frac{1}{1 - a^2} = \frac{1}{1 - \omega^2/k^2} = 1.327149.$$

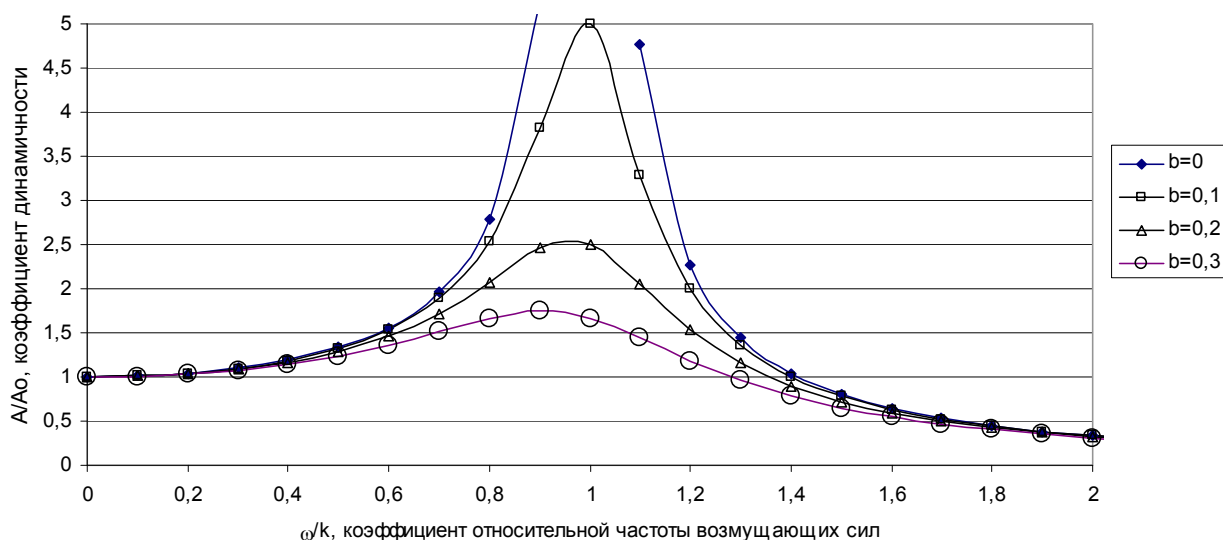


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика крутильных колебаний пильного цилиндра джина

Угол сдвига фаз определим

$$\operatorname{tg} \gamma = 2n\omega / (k^2 - \omega^2) \text{ или } \gamma = \operatorname{arctg}(2n\omega / (k^2 - \omega^2)) = 0.049149 \text{ рад} = 2.816028625^\circ$$

тогда (7) имеет вид:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_1 \cdot \sin(\omega t + \gamma) = 0.0026435 + 0.00349289 \cdot \sin(76.96902 \cdot t + 0.049149)$$

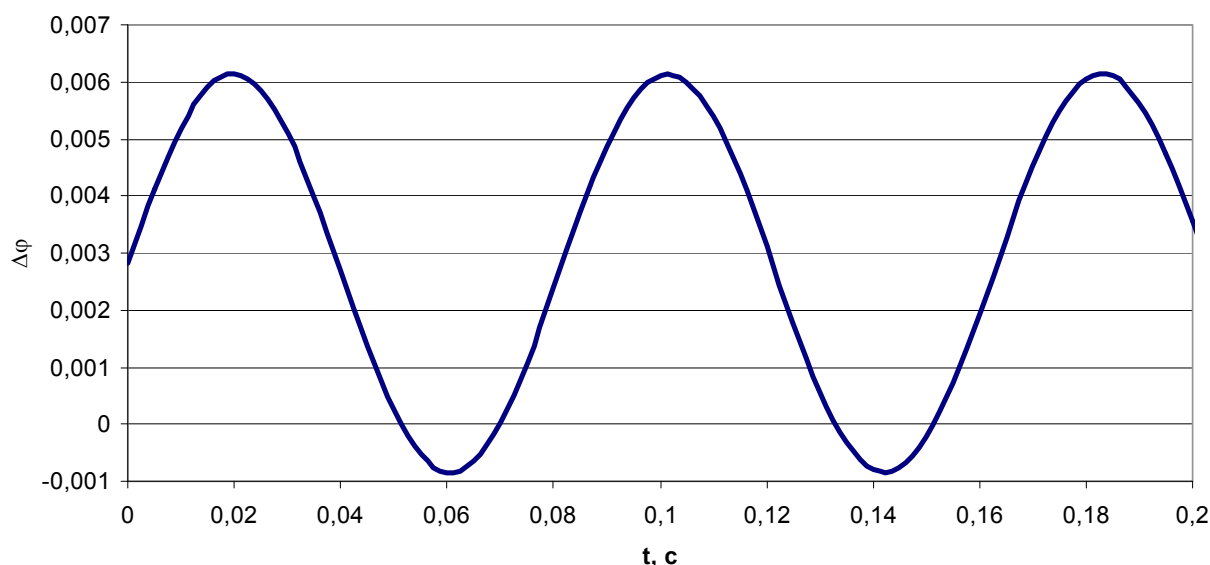


Рис. 5. График изменения угла  $\Delta\varphi$  во времени  $t$  при вынужденных колебаниях системы

Логарифмический декремент затуханий определяем по формуле

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2 \cdot 3.1415965 \cdot 5.786344}{\sqrt{155.0254^2 - 5.786344^2}} = 0.23468429.$$

Проведено изучение частоты крутильных колебаний 156-ти пильного цилиндра джина в зависимости от момента инерции электродвигателя и пильного цилиндра, а также от упруго-диссипативных параметров муфты.

Парциальные частоты и частоты главных колебаний расположены на оси  $0(\omega/k=1)$  в соответствии с теоремой Рэлея: наименьшая частота колебаний системы меньше наименьшей парциальной частоты, а наибольшая – больше наибольшей парциальной частоты.

На рис. 5 представлен общий ход установления колебательного режима системы с сопротивлением при действии на нее гармонической возмущающей силы.

На основе полученных результатов исследований с использованием уравнения движения машинного агрегата пильного цилиндра установлено следующее:

1. Коэффициент динамичности системы при отсутствии сопротивлений составляет  $\eta=1.327$ , а с сопротивлением  $\eta=1.325$ .

2. Амплитуда вынужденных колебаний составляет  $A=0.00349 \text{ рад}$ , который не зависит от начальных условий и времени. При этом период колебаний составляет  $\tau=0.08 \text{ с}$ .

3. При вынужденных колебаниях системы с сопротивлением  $M_5=M_{50}+M_{5cp} \cdot \sin \omega t$  сдвиг фазы колебания составляет  $\gamma=0.049149 \text{ рад}$ .

В целом установлены основные амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний пильного цилиндра джина.

### Список литературы

1. Мирошниченко Г.И. Основы проектирования машин первичной обработки хлопка. - М.: Машиностроение, 1972. – 486 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебания. - М.: Наука, 1968. – 560 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
4. Мухаммадиев Д.М. Исследование неравномерности вращения пильного цилиндра джина 5ДП-156 при различных характеристиках асинхронного электродвигателя. Журнал «Вестник КрасГАУ». - Россия, Красноярск. 2008. - №1. – С.236-241.

## ОЗВУЧИВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

**В.М. Овсянников**

Московская Государственная Академия Водного Транспорта  
117105 г. Москва, Новоданиловская набережная 2, корп. 1.  
e-mail: [OvsyannikovVM@yandex.ru](mailto:OvsyannikovVM@yandex.ru)

Волновое уравнение является линейной комбинацией уравнений газовой динамики. Поэтому его решение можно выразить через поле компонент скорости обтекания тела и указать интенсивность волн давления, генерируемых каждым участком поля течения. В докладе обсуждаются источники погрешностей, которые встречаются на таком пути вычисления интенсивности генерируемого звука.

**Ключевые слова:** неоднородное волновое уравнение, якобианы второго порядка, интенсивность звука, метод акустической аналогии Лайтхилла.

Вопросами волнообразования в системе уравнений газовой динамики успешно занимаются Б.Н.Четверушкин, Т.Г.Елизарова, Ю.В.Шеретов и их ученики с точки зрения подавления возникающих волн и расширения таким образом интервала параметров потока для которого получается устойчивое численное решение. Этим вопросам посвящены монографии [1], [2], [3].

Всем известны свойства уравнений Навье-Стокса, сглаживающие все возможные колебания за счет действия вязкости. Но почти никто не обращал внимания на причины и возможность возникновения периодических колебаний в невязком потоке, подчиняющемся уравнениям Эйлера. Л.Д.Ландау писал в 1944 году, что работ по турбулентности много, описывающих характер проявления пульсаций, но нет или почти нет работ, объясняющих механизм их возникновения. В 2005 г. А.В.Смоляков из ЦНИИ им. Крылова писал, что в уравнениях газовой динамики нет членов, ответственных за возникновение звука. Фолкнер Л.Л. за рубежом придерживался того же мнения. Это ошибка. Есть они, и это конвективные члены уравнений движения.

В 1952-1954 гг Лайтхилл, произведя линеаризацию уравнений газовой динамики, и взяв от них производные по времени или по пространству, продемонстрировал формальный путь вывода волнового уравнения. Чтобы получить неоднородное волновое уравнение, генерирующее звук или турбулентные пульсации, он добавил в уравнения неразрывности и движения турбулентные добавки, не конкретизируя их вид. Этот метод получил название метода акустической аналогии. Является привлекательной идея повторить вывод Лайтхилла волнового уравнения из полной системы уравнений газовой динамики, не производя ее упрощения линеаризацией, но дополнительных турбулентных добавок в нее не вносить [4], [5], [6], [7], [8], переложив функции добавочных членов на нелинейные члены, отброшенные Лайтхиллом.

Целью работы является исследование генерации периодических гармонических колебаний классической системой уравнений газовой динамики. Было обращено внимание на то, что волновое уравнение является линейной комбинацией уравнения неразрывности и уравнения движения или их производных. Поэтому их решения могут быть близкими или одинаковыми. Причиной различия решений в первую очередь может быть крупный шаг счета, достаточный для нахождения поля компонент скорости, но не способный точно отразить фазы колебаний решения волнового уравнения. К счастью для прочностного или акустического расчета важна не фаза колебания, а его амплитуда. Поэтому решение волнового уравнения даже приближенное, имеющее плохую точность, может быть полезно использовано. Ведь требования к решению задач акустики менее жесткие по точности, чем требования к задаче обтекания и лобового сопротивления или подъемной силы. Решение волнового уравнения



низкой точности может прояснить нам причины разбалтывания результатов при использовании численных методов.

Классическая система уравнений газовой динамики при ее решении будет генерировать волны плотности и давления в тех областях течения, где неоднородная правая часть волнового уравнения будет по модулю максимальна. Благодаря работам Л.Эйлера и К.Трусделла стало понятным, что это области с большой суммой якобианов второго порядка поля скорости.

Мы хотим получить неоднородное волновое уравнение из классической системы уравнений газовой динамики. Для простоты демонстрации вывода будем рассматривать плоское двухмерное течение.

Уравнение неразрывности для газа имеет вид

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u) / \partial x + \partial(\rho v) / \partial y = 0$$

Уравнение движения вдоль оси  $x$

$$\rho (\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y) = - \partial p / \partial x$$

Уравнение движения вдоль оси  $y$

$$\rho (\partial v / \partial t + u \partial v / \partial x + v \partial v / \partial y) = - \partial p / \partial y$$

Мы будем использовать метод Лайтхилла акустической аналогии, не производя линеаризации уравнений и не добавляя в них турбулентных добавочных членов.

Мы должны взять производную по времени от уравнения неразрывности

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 + (\partial \rho / \partial t)(\partial u / \partial x) + \rho \partial^2 u / \partial x \partial t + u \partial^2 \rho / \partial x \partial t + (\partial \rho / \partial t)(\partial v / \partial y) + \rho \partial^2 v / \partial x \partial t + v \partial^2 \rho / \partial y \partial t = 0 \quad (1)$$

Мы должны взять производную по координате  $x$  от уравнения движения вдоль оси  $x$

$$\begin{aligned} & (\partial \rho / \partial x)(\partial u / \partial t) + \rho \partial^2 u / \partial x \partial t + (\partial \rho / \partial x)u(\partial u / \partial x) + \rho(\partial u / \partial x)^2 + \\ & + (\partial \rho / \partial x)v(\partial u / \partial y) + \rho(\partial u / \partial y)(\partial v / \partial x) = - \partial^2 p / \partial x^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Мы должны взять производную по координате  $y$  от уравнения движения вдоль оси  $y$ .

$$\begin{aligned} & (\partial \rho / \partial y)(\partial v / \partial t) + \rho \partial^2 v / \partial x \partial t + \rho(\partial u / \partial y)(\partial v / \partial x) + (\partial \rho / \partial y)u(\partial v / \partial x) + \\ & + \rho(\partial v / \partial y)^2 + (\partial \rho / \partial y)v(\partial v / \partial y) = - \partial^2 p / \partial y^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим сумму уравнений (2) и (3) и вычтем из нее уравнение (1). Получим неоднородное волновое уравнение

$$\begin{aligned} & \partial^2 \rho / \partial t^2 - \partial^2 p / \partial x^2 - \partial^2 p / \partial y^2 = -2\rho \partial(u, v) / \partial(x, y) + (\partial \rho / \partial x)(\partial u / \partial t) + \\ & + (\partial \rho / \partial x)u(\partial u / \partial x) + (\partial \rho / \partial x)v(\partial u / \partial y) - (\partial \rho / \partial t)(\partial u / \partial x) - u \partial^2 \rho / \partial x \partial t + \\ & - (\partial \rho / \partial t)(\partial v / \partial y) - v \partial^2 \rho / \partial y \partial t + (\partial \rho / \partial y)(\partial v / \partial t) + (\partial \rho / \partial y)u(\partial v / \partial x) + (\partial \rho / \partial y)v(\partial v / \partial y), \end{aligned}$$

правая, источниковая часть которого будет генерировать волны давления. Левая часть будет только распространять уже имеющиеся волны по области течения.

Для случая слабого изменения плотности  $\rho$  вдоль координат  $x, y$  мы получим в правой части волнового уравнения очень простой источниковый член

$$\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2 - \partial^2 \rho / \partial t^2 = 2\rho \partial(u, v) / \partial(x, y)$$

Правая часть этого уравнения содержит якобиан

$$\partial(u, v) / \partial(x, y) = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix}$$

Область течения с большим абсолютным значением якобиана генерирует интенсивные волны давления. Интенсивность волн может быть вычислена использованием простейших решений волнового уравнения. Имея поле компонент скорости, полученное численным методом для стационарного невязкого или вязкого ламинарного обтекания несложно вычислить поле якобиана и дать для каких-то течений поле интенсивности генерации звука.

Теория функций комплексного переменного дает возможность вычислить поле якобиана для потенциального обтекания кругового цилиндра и найти места генерации волн давления и звука. В качестве примера будем вычислять генерацию звука от бесконечно длинного цилиндра в ламинарном стационарном потенциальном потоке воздуха с комплексным потенциалом.

$$w = z + 1/z$$

Потенциал скорости дает такое поле компонент скорости.

$$u=1+(y^2-x^2)/[(x^2+y^2)^2]$$
$$v=-2xy/[(x^2+y^2)^2]$$

Якобиан имеет такой вид

$$\partial(u,v)/\partial(x,y)=\begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = -4 \cos(6\alpha)/(x^2+y^2)^3$$

Интенсивность  $I$  генерации волн давления изменяется от полярного угла  $\alpha$  по закону

$$I = I_0 [1+\cos(12\alpha)]/2$$

Анализ приведенных выше построений показывает, что якобианы правой неоднородной части волнового уравнения возникают в результате взятия производной по пространственной координате от конвективных членов уравнений движения.

Физический смысл якобиана можно связать с учетом парности деформаций контрольной фигуры во взаимно-перпендикулярных направлениях.

Порывообразование в ветре, раскачка ветром и обрушение мостов, бора в Новороссийске, гул лавы перед землетрясением, вой метели, опрокидывание на шоссе автомобилей порывом ветра, некоторые модели генерации звука, возникновение регмаглиптов - регулярной системы лунок на метеоритах – все эти явления возможно контролируются рассмотренным нами механизмом волнообразования, вытекающим из закона сохранения. Для выявления области применения метода необходимо проведение расчетов этих задач и сравнение с экспериментом.

### Список литературы

1. Б.Н.Четверушкин. Кинетические схемы и квазигидродинамическая система уравнений. М.: МАКС пресс, 2004. - 332 с.
2. Т.Г.Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007. - 350 с.
3. Ю.В.Шеретов. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь : Издательство ТГУ, 2016. - 222 с.
4. Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности. Доклад на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015. Сборник докладов. С.2823-2824.
5. Овсянников В.М. Локальное несохранение плотности при периодических колебательных движениях. Вестник МГПУ. Серия: Естественные науки, 2015, № 1(17), с.25-29.
6. Овсянников В.М. Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник +, 2016, 457 с.
7. Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник +, 2014, 250 с.
8. Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. В сб.: Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. № 26, 2013, с. 3-204.

## ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ЧЛЕНАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**В.М. Овсянников**

Московская Государственная Академия Водного Транспорта  
117105 г. Москва, Новоданиловская набережная 2, корп. 1.  
e-mail: [OvsyannikovVM@yandex.ru](mailto:OvsyannikovVM@yandex.ru)

Выведенное Эйлером уравнение неразрывности с учетом членов второго порядка малости по времени с использованием метода акустической аналогии Лайтхилла приводит к неоднородному волновому уравнению, генерирующему волны звука или давления. В случае слабого изменения плотности по координате правая неоднородная часть волнового уравнения содержит якобианы поля скорости.

**Ключевые слова:** уравнение неразрывности, формула Гаусса-Остроградского, неоднородное волновое уравнение, якобианы второго порядка, интенсивность звука, метод акустической аналогии Лайтхилла

В современной математике считаются две формы формулы Гаусса-Остроградского с направляющими косинусами и полная форма эквивалентными. Однако в механике – гидро- и газодинамике различие между ними проявляется. В одном случае уравнение неразрывности не дает вклада в генерацию звуковых волн, а во втором – генерируются звуковые волны свиста, гула или периодические пульсации плотности и давления. Дело в том, что точное описание движения возможно только для тел конечного размера и за конечный интервал времени. Точечное представление тела исключает из описания его вращение, его деформации. На это обратил внимание Коши – создатель теории пределов и представления интеграла, как предела интегральной суммы. Он понимал, что при предельном переходе утрачивается полнота физического описания объекта.

Ниже речь пойдет о различии формул Гаусса-Остроградского в форме с направляющими косинусами (формула (5) параграфа 651 третьего тома учебника Г.М.Фихтенгольца [1])

$$\iiint (\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z) dx dy dz = \iint (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS$$

и без направляющих косинусов (формула (4) параграфа 651 третьего тома учебника Г.М.Фихтенгольца [1])

$$\iiint (\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z) dx dy dz = \iint P dy dz + Q dx dz + R dx dy,$$

если в этих формулах интегралы заменены на суммы конечных величин подинтегральных выражений.

В предельном случае  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  обе формулы совпадают.

Но при конечных размерах элементарных объемов в интегралах левой и правой частях отличие будет состоять в том, что в формуле с направляющими косинусами пренебрегается нормальной к границе компонентой скорости. Это приводит к неправильному учету количества жидкости, поступающей внутрь контрольной фигуры за интервал времени  $\Delta t$  в угловых точках контрольной фигуры. Добавочный член мал, если его точно вычислить, что было сделано в работе [3], и имеет порядок малости  $\Delta t$ . На баланс массы это не влияет. Но на скорость изменения баланса, отслеживаемую волновым уравнением, влияет. Волновое уравнение имеет второй, более высокий порядок по времени, чем уравнение неразрывности и выводится в методе акустической аналогии Лайтхилла взятием производной по времени от уравнения неразрывности, записанного для сжимаемого газа.

Добавочные члены уравнения неразрывности к дивергенции вектора скорости были вычислены Эйлером геометрическими построениями и доложены в Берлинской королевской

академии наук 31 августа 1752г. Они совпали с вычисленными в работах [2], [3] с использованием полной формулы Гаусса-Остроградского.

При учете в уравнении неразрывности для сжимаемого газа членов второго порядка малости по времени течения волновое уравнение получается, содержащим в правой неоднородной части якобианы поля скорости. В приближении слабого изменения плотности  $\rho$  по координате оно имеет вид

$$\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2 - \partial^2 \rho / \partial t^2 = \rho \partial(u, v) / \partial(x, y)$$

и генерирует в потоке периодические волны плотности и давления или звука.

Мы привели иллюстрацию классического принципа: «стягивание объема в точку лишает его некоторых физических свойств».

### **Список литературы**

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3, М.:Физматгиз,1960. – 656 с.
2. Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности. Доклад на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015. Сборник докладов. С.2823-2824.
3. Овсянников В.М. Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник +, 2016, 457 с.

## О КОЛЕБАНИЯХ ОСИ ОПЕРЕННОГО ТЕЛА ПРИ СПУСКЕ В АТМОСФЕРЕ

Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов

Научно-исследовательский институт механики МГУ

119192 г. Москва, Мичуринский пр-т, д. 1, e-mail: privalova@imec.msu.ru

Определяются общие свойства и тенденции движения оперенного тела при спуске в воздушной среде при изменении установочного угла лопасти и смещении центра масс вдоль оси его динамической симметрии.

Ключевые слова: оперенное тело, режим авторотации, установочный угол лопасти, смещение центра масс, колебания оси

Рассмотрим свободное падение осесимметричного оперенного тела. Оперение тела

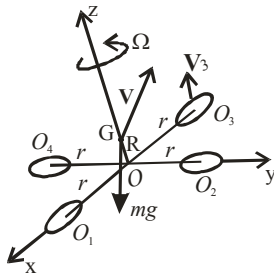


Рис. 1

состоит из четырех одинаковых лопастей симметрично расположенных на теле рис. 1. Лопастей на теле разместим таким образом, чтобы центры  $O_i$  лопастей оказались в плоскости, ортогональной оси симметрии тела, на расстоянии  $r$  от этой оси и образовывали вершины квадрата. Введем систему координат  $Oxyz$  (рис.1.) жестко связанную с телом, ось  $z$  которой совместим с осью динамической симметрии тела, а оси  $x$  и  $y$  направим так, чтобы центры лопастей лежали на этих осях. Положение лопасти относительно плоскости, проходящей через центры лопастей, определяется установочным углом лопасти  $\beta$  - углом между этой плоскостью и нормалью  $n_i$  к плоскости лопасти (рис. 2).

Рис. 2 shows a detailed view of a blade. The blade is a flat surface with a normal vector  $n_i$ . The velocity vector  $V_i$  is shown at an angle  $\alpha$  to the blade's surface. The angle  $\beta$  is the angle between the blade's surface and the  $z$ -axis. The center of pressure  $O_i$  is marked on the blade. The resultant aerodynamic force  $R_i$  is shown as the sum of the drag force  $D_i$  and the lift force  $L_i$ .

Рис. 2

### Структура аэродинамического воздействия

Предположим, что аэродинамическое воздействие сосредоточено на лопастях и обеспечивает его авторотацию относительно оси динамической симметрии, а распределенная система аэродинамических сил, действующих на лопасть, эквивалентна равнодействующей  $R_i$ , приложенной в ее центре  $O_i$  (центре давления). Используем квазистатическую модель воздействия среды на тело [1]. В определенных условиях она позволяет дать удовлетворительное описание даже нестационарных движений тела [2].

Равнодействующую силу представим в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих:  $D_i$  – силы лобового сопротивления и  $L_i$  – боковой (подъемной) силы

$$D_i = -\frac{1}{2} \rho c_d(\alpha_i) s_i V_i V_i$$

$$L_i = \frac{1}{2} \rho c_l(\alpha_i) s_i (V_i \times n_i) \times V_i / \cos \alpha_i$$

где  $V_i$  – вектор скорости точки  $O_i$ ,  $\rho$  – плотность среды,  $s_i = S/4$  – характерная площадь  $i$ -ой лопасти,  $S$  – общая площадь лопастей,  $c_d(\alpha)$ ,  $c_l(\alpha)$  – безразмерные аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы, являющиеся функциями текущего значения угла атаки  $\alpha$ . Угол  $\alpha_i$  атаки  $i$ -ой лопасти вводим как угол между вектором скорости точки  $O_i$  и плоскостью, жестко связанной с лопастью. Нормаль  $n_i$  в точке  $O_i$  к этой плоскости и вектор  $V_i$  образуют плоскость угла атаки  $\alpha_i$  (рис.2). Для определения связи угла атаки  $\alpha_i$  с параметрами движения тела, нужно проектировать скорость  $V_i$  на направление  $n_i$  нормали, что дает соотношение

$$-V_i \sin \alpha_i = (V_i \cdot n_i).$$

Полагая размер лопасти заметно меньше характерного размера тела, пренебрежем моментом сил воздействия среды относительно точки  $O_i$ .

Равнодействующая дает момент относительно центра масс авторотирующего тела

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{D}_i + \mathbf{L}_i)$$

где  $\mathbf{r}_i$  – радиус- вектор центра давления  $i$  –ой лопасти относительно центра масс тела.

Конструкция оперения и точечное квазистатическое воздействие среды позволило сформировать полную структуру сил, действующих на тело. Модель содержит массовые, геометрические параметры и аэродинамические характеристики.

### Математическая модель движения

Для количества движения  $\mathbf{L}$  и кинетического момента  $\mathbf{G}$  имеем соотношения

$$\mathbf{L} = \mathbf{j}mV_x + \mathbf{k}mV_y + \mathbf{l}mV_z, \quad \mathbf{G} = \mathbf{j}A\Omega_x + \mathbf{k}A\Omega_y + \mathbf{l}C\Omega_z$$

где  $m$  – масса;  $A, C$  – экваториальный и полярный моменты инерции;  $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$  – орты осей  $x, y, z$ ;  $V_x, V_y, V_z$  – проекции вектора  $\mathbf{V}$  скорости центра масс;  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  – соответствующие проекции угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  тела.

Вращательное движение тела относительно подвижного центра  $O$  масс описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_i + \mathbf{P} \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}$  – сила тяжести.

Для замыкания уравнений дополним их кинематическими соотношениями

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \dot{\gamma} \sin \varphi \\ \dot{\gamma} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\gamma} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\varphi} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

Углы Крылова  $\theta$  и  $\varphi$  определяют направление вектора скорости  $\mathbf{V}$  в связанной с телом системе координат.

В силу симметрии рассматриваемой задачи в ней, очевидно, существует тривиальное стационарное решение (режим авторотации), отвечающее движению тела вдоль своей оси симметрии, ориентированной вертикально, с постоянной скоростью  $V_0$ . При этом угловая скорость авторотации тела вокруг оси симметрии постоянна. Углы  $\alpha_i$  атаки на лопастях одинаковы между собой и обозначим их  $\alpha$ . Величина угла  $\alpha$  удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$k(\alpha) + tg(\alpha + \beta) = 0, \quad (4)$$

где  $k(\alpha) = c_l(\alpha)/c_d(\alpha)$  аэродинамическое качество.

### Малые колебания оси динамической симметрии относительно ее положения в режиме авторотации

Систему уравнений, описывающую малые колебания оси симметрии тела относительно ее положения в режиме авторотации и малые изменения направления вектора скорости центра масс, выпишем в комплексных переменных  $\Delta v = \Delta V_x + i\Delta V_y$ ,  $\Delta \omega = \Delta \Omega_x + i\Delta \Omega_y$ ,  $\Delta \lambda = \Delta \theta + i\Delta \varphi$  в соответствии с уравнениями (1 - 3)

$$m \left( \frac{d\Delta v}{dt} + i\Omega_{z0}\Delta v - iV_{z0}\Delta \omega \right) = -img\Delta \lambda + \sum_{j=1}^4 \Delta R_j$$

$$A \frac{d\Delta \omega}{dt} - i(C - A)\Omega_{z0}\Delta \omega = \sum_{j=1}^4 \Delta M_j$$

$$\frac{d\Delta\lambda}{dt} + i\Omega_{z_0}\Delta\lambda = \Delta\omega$$

Отсюда следует, что малые колебания оси динамической симметрии при свободном падении авторотирующего тяжелого тела описываются линейным дифференциальным уравнением с комплексной переменной третьего порядка с постоянными комплексными коэффициентами

$$\ddot{z} + \dot{z}(D + iG) + z(P + iN) + (L + iF)z = 0 \quad (5)$$

Характеристическое уравнение, отвечающее дифференциальному уравнению (5) имеет вид

$$\mu^3 + \mu^2(D + iG) + \mu(P + iN) + L + iF = 0$$

Коэффициенты этого уравнения при заданных конкретных характеристиках тела и для каждой конкретной формы лопасти (для каждого набора функций  $c_d(\alpha)$ ,  $c_l(\alpha)$ ) являются функциями установочного угла  $\beta$ , согласно (4).

Таким образом, значения установочного угла  $\beta$  определяют характер устойчивости режима авторотации [3].

#### Режимы спуска тяжелого оперенного тела

Рассмотрим, как ведет себя тело в случае больших начальных отклонений от значений переменных, отвечающих тривиальному режиму авторотации. Для этого будем решать нелинейную задачу (1-3).

Посмотрим, как влияет величина установочного  $\beta$  угла лопасти на характер спуска оперенного тела.

#### Семейство устойчивых тривиальных режимов авторотации

Зададим значение угла  $\beta_0$ , при котором тривиальный режим устойчив, и посмотрим, как будет двигаться тело из различных начальных условий. На рис. 3 в фазовом полупространстве переменных  $\Omega_x\Omega_y\Omega_z$  построены кривые, отвечающие двум разным наборам начальных условий. Движение изображающей точки по этим кривым происходит так, что при  $t \rightarrow \infty$  она стремится в точку с координатами  $(0, 0, \Omega_0)$ , где значение  $\Omega_0$  определяется заданным углом  $\beta_0$ .

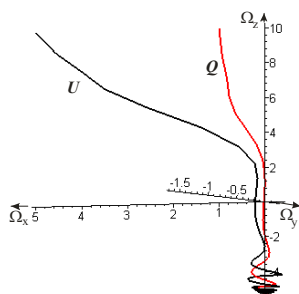


Рис. 3

Соответствующие траектории центра масс тела в неподвижном пространстве  $\xi\eta\zeta$  представлены на рис. 4. На рисунке видно, что тело совершает в пространстве затухающее винтовое движение с выходом на вертикальный спуск, на котором тело движется с постоянной скоростью  $V_z = V_0$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_z = \Omega_0$  относительно оси динамической симметрии (режим авторотации), а ось симметрии ориентирована вертикально. Углы атаки каждой лопасти в этом режиме равны между собой. Вертикальный спуск происходит в разных частях неподвижного пространства, так как переходные процессы отвечают разным начальным условиям.

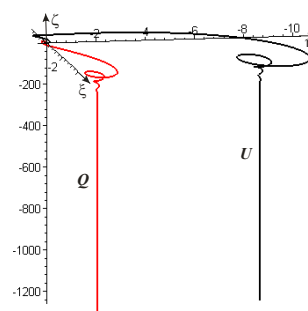


Рис. 4

### Семейства нетривиальных установившихся режимов

В том случае, когда центр масс тела не смещен (находится в точке  $O$  рис. 1), при тех значениях угла  $\beta$ , при которых тривиальный режим неустойчив, существуют два типа притягивающих нетривиальных установившихся режима. На одном из них возникает режим перманентного вращения вокруг оси, находящейся в плоскости, перпендикулярной оси динамической симметрии ( $Ox$ ), а на другом режим прецессии, ось которого также находится в плоскости  $Ox$ . Радиусы прецессии для различных значений угла  $\beta$  могут быть разными, что проиллюстрируем на рис. 5 в

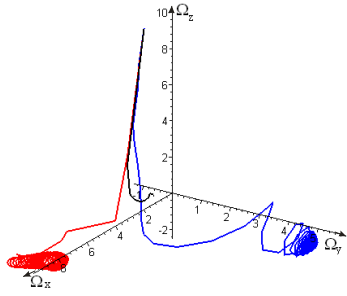


Рис. 5

фазовом полупространстве переменных  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  для трех значений  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Характер фазовых кривых, соответствующих одному и тому же углу  $\beta$  от начальных условий не меняется. Траектории спуска, отвечающие заданным значениям угла  $\beta$ , изображены на рис. 6. Спуск происходит по винтовым линиям, ось которых вертикальна. Из рисунка видно, что радиусы этих линий различны.

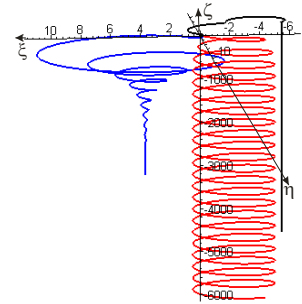


Рис. 6

В этой задаче для некоторого диапазона изменения значений угла  $\beta$  существует семейство притягивающих режимов «косоуго» перманентного вращения. Фазовые траектории для одного из таких значений угла  $\beta$ , при разных начальных условиях по угловым скоростям, в полупространстве угловых скоростей  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  изображены на рис. 7. Несмотря на большой разброс начальных условий качественные характеристики фазовых траекторий одинаковы. Изображающая точка, двигаясь по этим кривым, при  $t \rightarrow \infty$  приходит в точку на плоскости  $\Omega_x, \Omega_y$ .

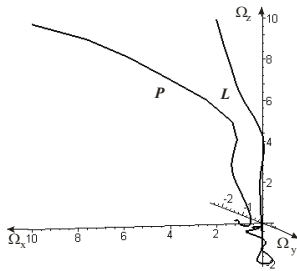


Рис. 7

Траектории  $L$  и  $P$ , отвечающие двум наборам начальных условий, изображены на рис. 8. Видно, что на установившемся режиме тело спускается вертикально. При этом ось  $Oz$  динамической симметрии тела расположена горизонтально, вращение происходит вокруг оси, находящейся в плоскости  $Ox$ . Углы атаки при этом движении принимают значения  $\alpha_1 = -\alpha_3, \alpha_2 = -\alpha_4$ .

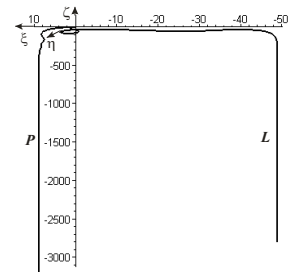


Рис. 8

### Влияние смещения центр масс на характер спуска

Посмотрим, как влияет смещение центра масс на поведение тела при спуске.

На рис. 9 можно наблюдать, как в фазовом полупространстве угловых скоростей для заданного угла  $\beta$  при одинаковых начальных условиях меняется характер фазовой траектории. Зададим значение угла  $\beta$ , из интервала, отвечающего семейству притягивающих нетривиальных режимов прецессии вокруг оси, расположенной в плоскости  $Ox$ . При смещении центра масс  $OG$  по оси динамической симметрии тела возникает режим прецессии ( $OG = 0.3r$ ), осью которого является ось динамической симметрии тела  $Oz$ . При некотором его смещении на величину  $OG = 0.5r$  тело, выходит на тривиальный режим авротации с угловой скоростью, соответствующей данному углу  $\beta$ .

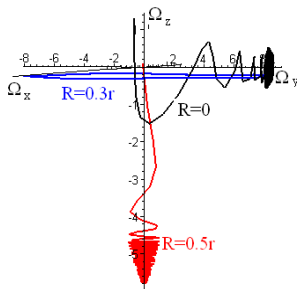


Рис. 9



На рис. 10 можно наблюдать траектории спуска тела, отвечающие фазовым траекториям (рис. 9). Видно, как меняется характер спуска и, чем больше смещение центра масс, тем ближе к оси  $Oz$  проходят траектории в неподвижном пространстве.

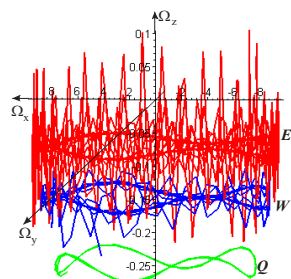


Рис. 11

Для наглядности происходящих процессов приведем рис. 11, на котором изображены фазовые траектории в пространстве угловых скоростей для нескольких близких значений смещения центра масс тела. Кривая  $E$  отвечает смещению  $OG = 0.1r$ , кривая  $W$  –  $OG = 0.2r$ , кривая  $Q$  –  $OG = 0.3r$ . На рисунке видны двухчастотные колебания. Низкочастотные колебания обусловлены наличием четырех лопастей на теле, и их амплитуда с изменением смещения  $OG$  практически остается неизменной, тогда как частота высокочастотных колебаний уменьшается по мере увеличения смещения

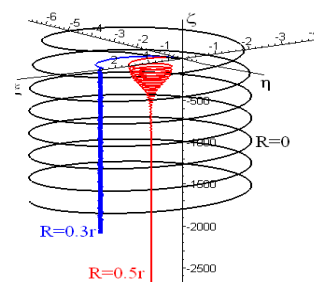


Рис. 10

центра масс, то есть приближению границ области устойчивости к границе области

Для значений угла  $\beta$  из интервала, отвечающего семейству притягивающих нетривиальных режимов, отвечающих семейству притягивающих нетривиальных режимов перманентного вращения вокруг оси, расположенной в плоскости  $Oxy$ , при смещении центра масс по оси динамической симметрии тела, также возникает режим прецессии, осью которого является ось динамической симметрии тела.

Отметим, что смещением центра масс тела в правильном направлении, можно расширить интервал значений угла  $\beta$ , на котором режим авторотации устойчив, а также при некоторых значениях величины смещения обеспечить устойчивость этого режима для любого значения угла  $\beta$  из интервала его изменения.

Таким образом, даже такая простая модель движения объекта позволяет оценить разнообразные формы его поведения при спуске и исследовать эволюцию этих форм в зависимости от его геометрических, аэродинамических и инерционно-массовых параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-08-01130, № 15-01-06970).

### Список литературы

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
2. Самсонов В.А., Зенкин А.Н., Привалов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело / Изв. РАН. МТТ. № 4. 1993. С. 73-78.
3. Okunev Yu M., Privalova O.G., Samsonov V.A. The geometry of stability domains of systems with different dimensions // "Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International Conference on", IEEE, 4p., DOI: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106763.

## ПРЕЦЕССИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ В МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ-ЖУКОВСКОГО

Ольшанский В.Ю.

Институт проблем точной механики и управления РАН  
410028 Саратов, ул. Рабочая 24, e-mail: [olshanskiy\\_vlad@mail.ru](mailto:olshanskiy_vlad@mail.ru)

Приведены условия существования линейного инвариантного соотношения уравнений Пуанкаре-Жуковского в общем случае. Указана новая скалярная форма уравнений и выполнено их редукция при движении с линейным инвариантным соотношением к уравнению Рикатти. Выделены случаи прецессионного движения.

*Ключевые слова:* уравнения Пуанкаре-Жуковского, линейные инвариантные соотношения, уравнение Рикатти.

Рассматриваются уравнения Пуанкаре – Жуковского

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}), \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times (\mathbf{B}'^T\mathbf{K} + \mathbf{C}'\mathbf{S}) \quad (1)$$

При описании движении твердого тела вокруг неподвижной точки  $\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}$  – суммарный кинетический момент тела и жидкости,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость твердого тела,  $\boldsymbol{\Omega}$  – завихренность идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей эллипсоидальную полость,  $\mathbf{I}$  – оператор инерции системы, компоненты оператора  $\mathbf{J}$  выражаются через полуоси полости, вектор  $\mathbf{S}$  пропорционален завихренности [1–3]. Операторы  $\mathbf{A}', \mathbf{C}'$  – симметрические.

Система (1) имеет три первых интеграла

$$K^2 = K_0^2, \quad S^2 = S_0^2, \quad 2H = (\mathbf{A}'\mathbf{K}, \mathbf{K}) + 2(\mathbf{K}, \mathbf{B}'\mathbf{S}) + (\mathbf{C}'\mathbf{S}, \mathbf{S})$$

При существовании четвертого интеграла система будет интегрируемой, описание известных случаев см. напр. [4].

Важный частный случай интегрируемости появляется при существовании линейного инвариантного соотношения (ЛИС)

$$F = (\mathbf{m}, \mathbf{K}) + (\mathbf{n}, \mathbf{S}) \quad (2)$$

т.е. линейной функции, производная которой в силу системы (1) удовлетворяет тождеству  $\dot{F} = fF$  и, если в начальный момент  $F = 0$ , то равенство  $F = 0$  сохранится и при дальнейшем движении.

Для случая [4], когда  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^T$  условия существования ЛИС совпадают с условиями Чаплыгина для уравнений Кирхгофа. Существуют и другие [5 - 7] частные случаи ЛИС как с симметричной, так и с несимметричной матрицей  $\mathbf{B}'$ . Были описаны [8] все случаи существования ЛИС (2) при  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^T$  и выделены прецессионные движения. Для произвольных матриц коэффициентов уравнений Кирхгофа получены [9] условия существования ЛИС и указано включение известных ЛИС (в том числе, при  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^T$ ) в общий случай [9].

Ниже приведены условия существования ЛИС (2) уравнений (1), указано приведение уравнений Пуанкаре-Жуковского при движении с ЛИС к уравнению Рикатти. Выделены условия, при которых векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{S}$  совершают прецессии. Указано четырехпараметрическое семейство решений уравнений Пуанкаре-Жуковского, каждое из которых экспоненциально быстро приближается со временем к соответствующему периодическому решению.

Используем обозначения  $a'_i, \mathbf{e}'_{ai}, c'_i, \mathbf{e}'_{ci}$  – собственные значения и векторы операторов  $\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{C}'$ ,  $\Delta a'_1 = a'_2 - a'_3$  (1 2 3),  $\mathbf{m}^0, \mathbf{n}^0$  – нормали круговых сечений эллипсоидов  $\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{C}'$ ,

$$\mathbf{m}^0 = m_1 \mathbf{e}'_{a1} + m_3 \mathbf{e}'_{a3}, \quad \mathbf{q} = q \mathbf{e}'_{a2}, \quad q = m_1 m_3 \Delta a'_2, \quad m_1^2 = -\frac{\Delta a'_3}{\Delta a'_2}, \quad m_3^2 = -\frac{\Delta a'_1}{\Delta a'_2}$$

$$\mathbf{n}^0 = n_1 \mathbf{e}'_{c1} + n_3 \mathbf{e}'_{c3}, \quad \mathbf{r} = r \mathbf{e}'_{c2}, \quad r = n_1 n_3 \Delta c'_2, \quad n_1^2 = -\frac{\Delta c'_3}{\Delta c'_2}, \quad n_3^2 = -\frac{\Delta c'_1}{\Delta c'_2}$$

В случае  $|\mathbf{m}| \neq |\mathbf{n}|$ ,  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  ЛИС (2) существует тогда и только тогда, когда оператор  $\mathbf{B}'$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{B}' = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}|} (\mathbf{m}^0 \times \mathbf{q})(\mathbf{n}^0)^T + \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{n}|} \mathbf{m}^0 (\mathbf{n}^0 \times \mathbf{r})^T + \alpha \mathbf{m}^0 \mathbf{n}^0{}^T \quad (3)$$

Обозначим  $F_1 = (\mathbf{m}^0, \mathbf{K})$ ,  $F_2 = (\mathbf{n}^0, \mathbf{S})$ . Если оператор  $\mathbf{B}'$  имеет вид (3), то из уравнений (1) следует  $|\mathbf{m}| \dot{F}_1 = (\mathbf{q}, \mathbf{K})F$ ,  $|\mathbf{n}| \dot{F}_2 = (\mathbf{r}, \mathbf{S})F$ , где линейная функция  $F$  задана равенством (2). Так как  $|\mathbf{K}| = K_0$ ,  $|\mathbf{S}| = S_0$ , то векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{S}$  совершают прецессии вокруг нормалей  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  соответственно.

Оператор  $\mathbf{B}'$ , заданный равенством (3), является вырожденным и основным является случай  $|\mathbf{m}||\mathbf{n}|$ . ЛИС существует в этом случае тогда и только тогда, когда оператор  $\mathbf{B}'$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_q + \mathbf{B}_r + \kappa_1 \mathbf{B}_1 + \kappa_2 \mathbf{B}_2 + \kappa_3 \mathbf{B}_3 \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_q = (\mathbf{m} \times \mathbf{q})\mathbf{n}^T, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{m}(\mathbf{n} \times \mathbf{r})^T$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{e}'_{a2} \times \mathbf{m})\mathbf{e}'_{c2}{}^T - \mathbf{e}'_{a2}(\mathbf{e}'_{c2} \times \mathbf{n})^T, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{m}\mathbf{n}^T, \quad \mathbf{B}_3 = (\mathbf{m} \times \mathbf{e}'_{a2})(\mathbf{e}'_{c2} \times \mathbf{n})^T - \mathbf{e}'_{a2}\mathbf{e}'_{c2}{}^T$$

Скалярная форма условий (4), получающаяся после исключения параметров  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ , содержит шесть связей между величинами  $\tilde{b}_{ij} = (\mathbf{e}'_{ai}, \mathbf{B}' \mathbf{e}'_{cj})$ .

Запись оператора  $\mathbf{B}'$  в виде (4) позволяет получить следующую скалярную форму уравнений Пуанкаре-Жуковского

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= qK_2(K_1 + S_1) - \kappa_1(K_2S_2 + K_3S_3) + \kappa_3(K_3S_2 - K_2S_3) \\ \dot{K}_2 &= q(K_3^2 - K_1^2) + K_3(rS_3 + \kappa_2S_1) - K_1(qS_1 - \kappa_1S_2 - \kappa_3S_3 - v_aK_3) \\ \dot{K}_3 &= -K_2(v_aK_1 + qK_3) + K_1(\kappa_1S_3 - \kappa_3S_2) - K_2(rS_3 + \kappa_2S_1) \\ \dot{S}_1 &= rS_2(K_1 + S_1) + \kappa_1(K_2S_2 + K_3S_3) - \kappa_3(K_3S_2 - K_2S_3) \\ \dot{S}_2 &= r(S_3^2 - S_1^2) + S_3(qK_3 + \kappa_2K_1) - S_1(rK_1 + \kappa_1K_2 - \kappa_3K_3 - v_cS_3) \\ \dot{S}_3 &= -S_2(v_cS_1 + rS_3) - S_1(\kappa_1K_3 + \kappa_3K_2) - S_2(qK_3 + \kappa_2K_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $K_i$  – компоненты  $\mathbf{K}$  в ортобазисе, заданном средней осью эллипсоида  $A$  и нормалью его кругового сечения,  $S_i$  – компоненты  $\mathbf{S}$  в аналогичном базисе для эллипсоида  $C$ .

Из системы (5) следует равенство

$$(K_1 + S_1)^* = (qK_2 + rS_2)(K_1 + S_1)$$

которое и указывает на существование ЛИС (2)

$$F = K_1 + S_1 = 0 \quad (6)$$

При движении с ЛИС (6) система (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= -\dot{S}_1 = -\kappa_1(K_2S_2 + K_3S_3) + \kappa_3(K_3S_2 - K_2S_3) \\ \dot{K}_2 &= (v_a - \kappa_2)K_1K_3 + K_1(\kappa_1S_2 + \kappa_3S_3) + K_3(qK_3 + rS_3) \\ \dot{K}_3 &= (\kappa_2 - v_a)K_1K_2 + K_1(\kappa_1S_3 - \kappa_3S_2) - K_2(qK_3 + rS_3) \\ \dot{S}_2 &= (v_c - \kappa_2)S_1S_3 - S_1(\kappa_1K_2 - \kappa_3K_3) + S_3(qK_3 + rS_3) \\ \dot{S}_3 &= (\kappa_2 - v_c)S_1S_2 - S_1(\kappa_1K_3 + \kappa_3K_2) - S_2(qK_3 + rS_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Для функции  $v(t)$ , заданной равенством  $K_1 = -S_1 = v(t)$ , получаем эллиптическую квадратуру.

Интегрирование системы (7) приводится к решению обобщенного уравнения Рикатти.

$$\frac{d\zeta}{d\gamma} = f_0(\gamma) + f_1(\gamma)\zeta + f_2(\gamma)\zeta^2, \quad \zeta = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (8)$$

$$f_{0,2} = \frac{1}{4\sqrt{\kappa_4^2 - \kappa^2}} \left( \kappa_5 \mp \frac{\pi_1 \cos \frac{\gamma}{2} + \pi_2 \sin \frac{\gamma}{2}}{v} \right), \quad f_1 = -\frac{\pi_3 \cos \frac{\gamma}{2} + \pi_4 \sin \frac{\gamma}{2}}{2v\sqrt{\kappa_4^2 - \kappa^2}}, \quad v = \sqrt{\frac{K_0^2 + S_0^2 - z_0 - \alpha \sin \gamma}{2}}$$

Фазовые переменные выражаются через решение  $x(\gamma)$  уравнения Рикатти

$$K_2 = v_k \cos \xi, \quad K_3 = v_k \sin \xi, \quad S_2 = v_s \cos \eta, \quad S_3 = v_s \sin \eta \quad (9)$$

$$v_k = \sqrt{K_0^2 - v^2}, \quad v_s = \sqrt{S_0^2 - v^2}, \quad K_1 = -S_1 = v(t)$$

$$2v^2 = K_0^2 + S_0^2 - z_0 \sin \gamma, \quad \xi = x + w_1 + C, \quad \eta = x - w_2 - C$$

Функции  $w_1, w_2$  заданы равенствами

$$\sin w_1 = \frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{2}v_k} \left( \cos \theta_k \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right), \quad \cos w_1 = \frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{2}v_k} \sin \theta_k \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin w_2 = \frac{\sqrt{a_s}}{\sqrt{2}v_s} \left( \cos \theta_s \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right), \quad \cos w_2 = \frac{\sqrt{a_s}}{\sqrt{2}v_s} \sin \theta_s \cos \frac{\gamma}{2}$$

Получены условия движения с ЛИС, когда  $v = \text{const}$ , при этом векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{S}$  совершают прецессии вокруг нормалей  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  соответственно. При определенных условиях период будет большой величиной, а движение по конусам - очень неравномерным. Указаны положения, в окрестности которых векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{S}$  проводят почти все время каждого периода и затем быстро ометают оставшиеся поверхности конусов.

Для уравнения Рикатти (8) найдено частное решение, задающее трехпараметрическое семейство периодических решений уравнений Пуанкаре-Жуковского. По данному частному решению построено общее решение уравнения Рикатти, задающее четырехпараметрическое семейство решений уравнений Пуанкаре-Жуковского, каждое из которых экспоненциально быстро приближается со временем к соответствующему периодическому решению.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00220).

#### Список литературы

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т.2. М.: Гостехиздат, 1948.
2. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bull. Astr. 1910, V.27.
3. Мусеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
5. Ольшанский В.Ю. Об одном новом линейном инвариантном соотношении уравнений Пуанкаре-Жуковского // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.6.
6. Борисов А.В., Мамаев И.С. Соколов В.В. Новый интегрируемый случай на  $so(4)$  // Доклады РАН. 2001. Т.381. №5.
7. Sokolov V.V., Wolf T. Integrable quadratic classical Hamiltonians on  $so(4)$  and  $so(3, 1)$  // J. Physics A: Mathematical and General. 2006. V.39. №8.
8. Ольшанский В.Ю. Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре – Жуковского // ПММ. 2014. Т.78. Вып.1.
9. Ольшанский В.Ю. Линейные инвариантные соотношения уравнений Кирхгофа // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 4.

## **ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА КОЛЕБАНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПЬЕЗОГИРОСКОПА**

**В.Ю. Ольшанский, Ю.О. Расстегаев**

Институт проблем точной механики и управления РАН.  
410028 Саратов, ул. Рабочая, 24, e-mail: [urrast@yandex.ru](mailto:urrast@yandex.ru)

Рассмотрено влияние температурного поля на выходной сигнал чувствительного элемента пьезогироскопа. Проводится анализ качества сигнала пьезогироскопа при различных температурных режимах. Даются оценки распределения качества сигнала для всего спектра температур. Приводятся конструктивные изменения, минимизирующие негативные факторы, влияющие на функционирование пьезогироскопа. Даются оценки эффективности этих изменений.

*Ключевые слова:* пьезогироскоп, тепловые воздействия, метод теплового баланса.

### **Введение**

Рассматривается пьезогироскоп, использующий как прямой, так и обратный пьезоэффекты [1,2] в условиях нестационарного температурного поля. При резком изменении температурного режима изменяются физические свойства материалов, из которых изготовлены элементы конструкции датчика, что оказывает негативное влияние на стабильность и величину выходного сигнала, алгоритмы его обработки и точность всего прибора [1]. Существенным является моделирование поведения пьезогироскопа при возможном в реальных условиях случайном характере изменения внешней температуры и резких скачках температуры.

Проводится анализ качества сигнала пьезогироскопа при различных температурных режимах. Особо рассматривается функционирование датчика при резких перепадах температуры с заранее не известной периодичностью по времени. Даются оценки распределения качества сигнала для всего спектра температур.

Приводятся конструктивные изменения, устраняющие или резко снижающие негативные факторы, влияющие на функционирование датчика инерциальной информации. Даются оценки эффективности этих изменений. Даются рекомендации по модификации алгоритма обработки сигнала, что позитивно влияет на его качество.

### **Математическая модель**

Рассматриваемый датчик инерциальной информации включает в себя чувствительный элемент, который состоит из двух взаимно перпендикулярных пьезопластин 3 и 4 (Рис.1) и присоединённой к ним массы 7. Каждая пластина с одной стороны закреплена, а другая сторона находится в контакте с грузом 7 массы  $M$ , причем от груза на пластинки передаются только нормальные составляющие усилий. На пластину 3 подаётся переменное напряжение, возбуждающее в ней, за счет обратного пьезоэффекта, упругие волны и как следствие колебания присоединенной массы. При вращении платформы с пьезогироскопом на присоединенную массу действует кориолисова сила и присоединенная масса воздействует на платину 4. За счет прямого пьезоэффекта в этой пластине генерируется электрический ток, пропорциональный измеряемой угловой скорости.

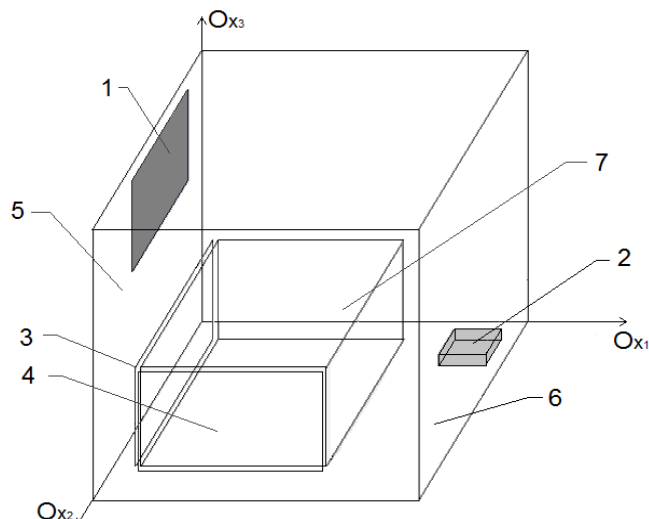


Рис. 1. Схема пьезогироскопа: 1 - поверхность теплового контакта, 2 – внутренний источник тепла, 3,4 – пьезопластины, 5 и 6 - стенки корпуса, 7 – присоединенная масса

В этом исследовании был проведен анализ температурного режима наиболее приемлемого для функционирования прибора. Рассмотрен случай изменения внешней температуры в случайные, не известные программе расчета сигнала моменты времени в заданном интервале. Стоит отметить, что наибольший вклад в зависимость выходного сигнала от температуры вносит модуль Юнга [3].

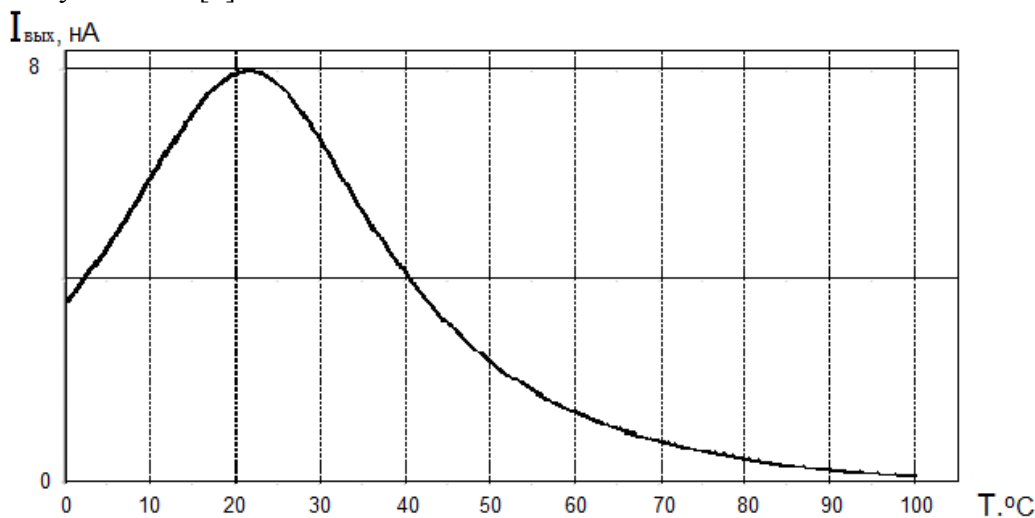


Рис. 2 Изменение выходного сигнала, учитывающее зависимость модуля Юнга от температуры

С учетом указанной зависимости величины выходного сигнала, были найдены полосы температур с отличным, хорошим, слабым и плохим сигналом, соответственно 100-90%, 90-50%, 50-10%, 10-0% от максимальной величины сигнала. Заметим, что максимальное значение сигнала дает подача на пьезопластину колебаний с частотой равной резонансной. В данном случае расчеты велись при резонансной частоте для 20<sup>0</sup>С.



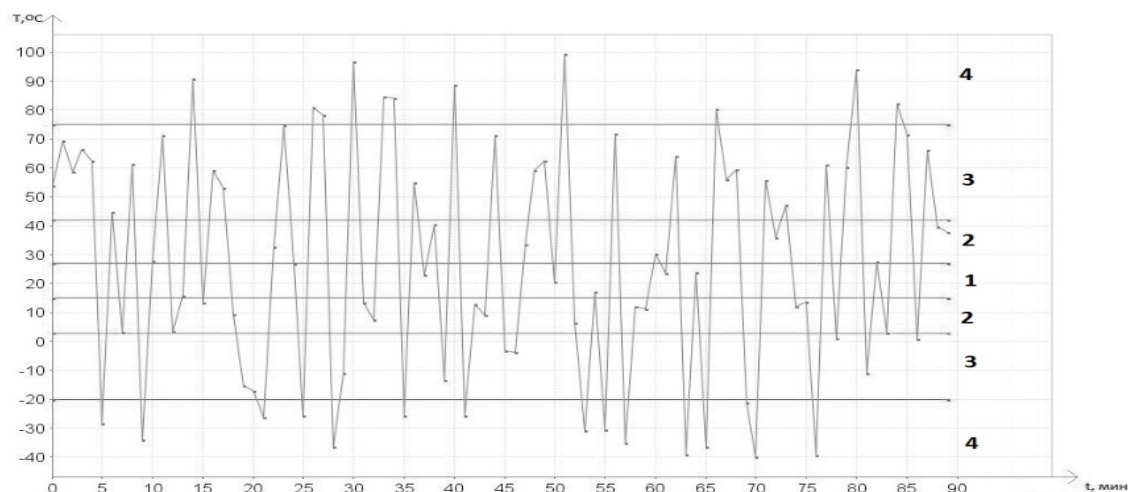


Рис. 3. График качества сигнала для серии случайных изменений температуры. 1-зона отличного сигнала, 2-хорошего, 3 – слабого, 4 – зона плохого сигнала

Для группы генераций серии случайных изменений температуры в заданном диапазоне был проведен статистический анализ. Было сгенерировано 100 серий по 90 значений случайных температур с шагом по времени 1 минута в температурном диапазоне  $-40^{\circ}\text{C}$  -  $120^{\circ}\text{C}$ . Для каждого значения была вычислена процентная доля значения сигнала от максимального. На основе полученных данных были выявлены следующие закономерности.

При значениях температуры от  $15^{\circ}\text{C}$  до  $27^{\circ}\text{C}$  наблюдается сигнал отличного качества. В среднем в эту зону попадает 8%-10% времени работы пьезогироскопа. В зону хорошего сигнала, которая наблюдается в диапазоне температур  $3^{\circ}\text{C}$  -  $42^{\circ}\text{C}$  попадает от 16% до 20% времени функционирования датчика. В зоне слабого сигнала  $-20^{\circ}\text{C}$  -  $75^{\circ}\text{C}$  прибор функционирует в среднем до 51% времени работы. Зона плохого сигнала, где температуры превышают  $75^{\circ}\text{C}$  достигает 15% времени.

Таким образом можно сделать вывод, что при резких изменениях внешней температуры большую часть времени выходной сигнал слабый или практически отсутствует. Для повышения стабильности работы пьезогироскопа, его энергоэффективности и точности необходимо решать задачи снижения негативного влияния температурного поля на функционирование пьезогироскопа.

Одной из таких задач является моделирование поведения прибора при перемещении в среду с температурой значительно отличающейся от первоначальной. Внешние условия описывают перемещение из среды с температурой  $0^{\circ}\text{C}$  в среду с температурой  $+60^{\circ}\text{C}$ .

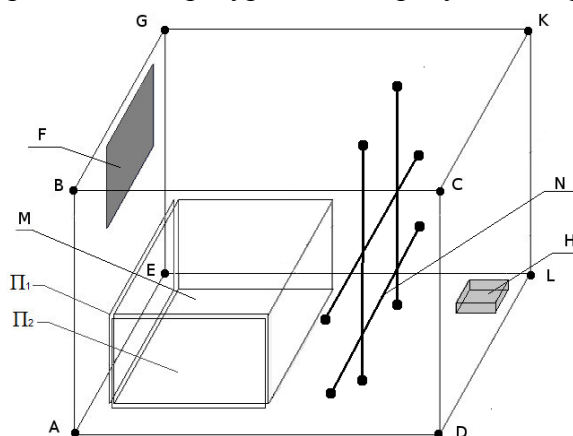


Рис. 4. Схема пьезогироскопа после установления шунтов

Перепады температур внутри прибора достигают значения в  $30^{\circ}\text{C}$ . Это значительный перепад, который составляет до 50% от температуры окружающей среды. После проведения

сравнительного анализа были выявлены следующие особенности установления стационарного режима в различных элементах конструкции прибора. Наибольшие разницы температур приходятся на дно корпуса и стенку LKGE. В этих элементах разница температуры в разных точках составляет  $18^{\circ}\text{C}$  и  $23^{\circ}\text{C}$  соответственно.

Для предотвращения столь значительной разницы в температурах различных частей прибора предлагается применить метод шунтов [4], обеспечивающий более равномерное распределение тепла в теле прибора. Шунтами были соединены противоположенные элементы конструкции стенки ABGE и DCKL, стенки ABCD и LKGE и верх и низ (система медных шунтов N на Рис.4).

Установка в корпусе пьезогироскопа медных шунтов, с высокой теплопроводностью позволило снизить максимальную температуру элементов корпуса на  $6-10^{\circ}\text{C}$ . Шунты N (Рис.4) располагаются в правой части корпуса прибора между присоединенной массой и внутренним источником тепла и соединяют противоположенные стенки корпуса пьезогироскопа. Снижение температуры пьезопластин достигло  $5^{\circ}\text{C}$ , что является существенным значением для микромеханических пьезогироскопов. Температура присоединенной массы уменьшилась на  $6-7^{\circ}\text{C}$ .

Не менее важной является задача моделирования поведения прибора при возможном в реальных условиях случайном характере изменения внешней температуры. Моделируется ситуация работы прибора в составе навигационного комплекса с тепловыделяющими элементами, которые могут включаться и выключаться по сложной временной программе, не зависящей от работы самого прибора.

Рассмотрен случай, когда внешняя температура находится в заданном интервале и скачки температуры происходят в заданные моменты времени и случай, когда случайным образом изменяются как моменты времени скачков температуры, так и величины скачков.

Прослеживается связь между сгенерированным случайным образом в численном эксперименте законом изменения внешней температуры и «похожими» (с некоторым запаздыванием по времени) законами изменения температуры в узлах прибора. Видна явная зависимость закона изменения температуры присоединенной массы от закона изменения внешней температуры.

Данный эффект негативно сказывается на величине выходного сигнала. Для улучшения устойчивости сигнала необходимо уменьшить влияние перепадов внешней температуры на чувствительные элементы пьезогироскопа: пьезопластины и присоединенную массу.

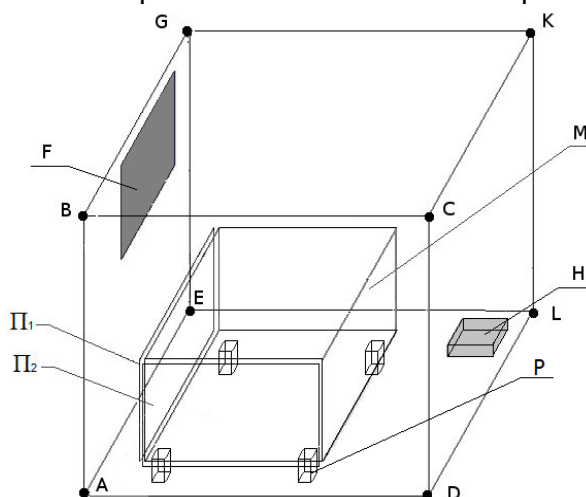


Рис.5 Схема пьезогироскопа: П<sub>1</sub>, П<sub>2</sub> – пьезопластины, M - присоединенная масса, H - внутренний источник тепла, P - теплоизолирующие элементы, F - участок теплообмена с окружающей средой.

В связи с этим была рассмотрена возможность конструктивных изменений схемы пьезогироскопа.



зогироскопа: добавление четырех элементов  $P$  (Рис.5), увеличивающих теплоизоляцию пьезопластин. При данном изменении конструкции увеличиваются интервалы случайных перепадов, при которых они начинают существенно влиять на температуру ядра пьезогироскопа и как следствие - на выходной сигнал прибора.

Для случая, когда скачки температуры происходят в заданные моменты времени, отмечена связь между законом изменения внешней температуры и законами изменения температуры в узлах прибора. Показано, что дополнительная теплоизоляция чувствительного элемента существенно уменьшает воздействие на него резких перепадов внешней температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00220).

#### **Список литературы**

1. Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В. Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление, 2010, № 2.
2. Афонин С.М. Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002, № 6, с.101-107.
3. Perrirer A. Roger de Mandrot Elasticité et symétrie du Quartz aux températures élevées // Impr. Réunies S.A., 1924.
4. В.Э.Джашитов, В.М.Панкратов Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий // СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2005.- 404 с.

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ДИФфуЗИОННЫХ ВОЛН В НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА ПОТОКОМ ЧАСТИЦ**

**Е.С. Парфенова, А.Г. Князева**

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
институт физики высоких технологий.

634050 Томск, пр. Ленина, 30, e-mail: [Linasergg@mail.ru](mailto:Linasergg@mail.ru)

В работе представлена математическая модель начальной стадии процесса внедрения ионов в поверхность металла. В модели учитывается конечность времен релаксации потоков тепла и массы и взаимодействие волн разной физической природы. Численно исследованы взаимовлияние полей концентрации внедряемой примеси, напряжений и деформаций, возникающих вследствие удара частиц о поверхность подложки, а также температуры подложки при варьировании параметров модели.

*Ключевые слова:* нелинейные волны, концентрация примеси, механическое возмущение, деформация, диффузия, ионная имплантация.

### **Введение**

В настоящее время значительное внимание уделяется исследованиям в области обработки материалов потоками частиц. Такой тип поверхностной обработки имеет ряд преимуществ, например, имеется возможность получать такие соединения в поверхностном слое, которые трудно получить иными методами обработки, обеспечивается точный контроль количества внедряемой примеси, проведение обработки как при низких так и при достаточно высоких температурах и т.д. [1]. Большое количество работ посвящено экспериментальным исследованиям материалов подвергнутых импульсному воздействию [2-5]. К сожалению, с помощью эксперимента не всегда можно найти ответы на интересующие вопросы. Процесс диффузии примеси нельзя остановить, чтобы исследовать состояние поверхностного слоя в интересующий момент времени. Кроме того, поскольку поверхностная обработка потоками частиц сопровождается множеством физических и химических процессов, то нереально изучить роль каждого явления в отдельности [6]. В отличие от экспериментальных работ, математическое моделирование позволяет детально исследовать процессы внедрения частиц в материалы. Наибольшее распространение для этой цели получил метод Монте-Карло, с помощью которого можно изучать детально «идеальные» системы.

Как отмечено в [1], большой недостаток ионной имплантации – это образование высокой концентрации дефектов. Конечно, имеются способы уменьшить количество дефектов после поверхностной обработки (отжиг и т.д.), но гораздо эффективнее подобрать такие параметры обработки, чтобы минимизировать их формирование. Ударяясь об обрабатываемую поверхность, частицы, приводят к генерации волн механических напряжений. В [7-8] исследуется распределение напряжений (деформаций) в материалах подвергнутых обработке потоками частиц. В [9] показано, что процесс диффузии примеси и механические напряжения – взаимозависимы. Установлено, что их взаимодействие приводит к искажению профиля волны напряжений и к концентрационному распределению, не соответствующему чисто диффузионному процессу. Но в этих работах не учитывается изменение температуры в ходе обработки.

В настоящей работе изучаются нелинейные волны разной физической природы, распространяющиеся совместно в неизотермических условиях.

### **Математическая постановка**

Если учесть, что генерируемые напряжения упругие, скорости, ускорения и деформации малы, то для описания процесса внедрения примеси в поверхностный слой металла в случае

одноосного нагружения необходимы уравнение баланса массы, уравнение теплопроводности и уравнение движения [10]:

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} \quad (1)$$

$$\rho C_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_T T \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} = -\frac{\partial J_q}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\rho$  - плотность обрабатываемого материала;  $C$  - концентрация имплантируемого материала;  $J$  - поток массы;  $J_q$  - поток тепла;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{kk}$  - компоненты тензора напряжений в направления облучения ( $Ox$ ) и первый инвариант тензора напряжений;  $\mathbf{u}$  - вектор перемещения;  $T$  - температура;  $\alpha_T$  - коэффициент теплового расширения;  $C_\sigma$  - удельная теплоемкость.

Потоки тепла и массы (с учетом конечности времен релаксации, которые в общем случае различны) можно получить на основе теории неравновесных процессов [11-13]:

$$\mathbf{J} = -\rho D_0 \frac{\partial C}{\partial x} + BC \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x} - t_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad \mathbf{J}_q = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} - t_q \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $B = \frac{D_0 m}{RT\rho} \Delta\alpha$  - коэффициенты переноса под действием напряжений;  $D_0$  - коэффициент самодиффузии;  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $m$  - молярная масса;  $t_r$  - время релаксации потока массы;  $t_q$  - время релаксации потока тепла;  $\lambda_T$  - теплопроводность;  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$  разность коэффициентов концентрационного расширения внедряемого элемента  $\alpha$  и основного  $\alpha_0$ .

Граничные и начальные условия:

$$x = 0: \mathbf{J} = m_0 \varphi(t), \quad \mathbf{J}_q = \left( \frac{v^2}{2} m \right) \varphi(t). \quad (5)$$

$$x \rightarrow \infty: C = 0, \quad \sigma = 0. \quad (6)$$

$$t = 0: C = 0, \quad \sigma = 0, \quad T = T_0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Используя соотношения Дюамеля-Неймана и связь между малыми деформациями и перемещениями, в приближении одноосного нагружения приходим к системе трех уравнений: для концентрации внедряемой примеси  $C$ , напряжений в направлении нагружения  $\sigma$  и температуры  $T$ .

Для численной реализации модели удобнее перейти к безразмерным переменным. Система уравнений в безразмерных переменных может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F(\Theta) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] - M\omega\gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C \frac{F(\Theta)}{\Theta + \sigma} \cdot \frac{\partial S}{\partial \xi} \right), \quad (9)$$

$$\tau_q \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \omega(\sigma + \Theta) \frac{\partial S}{\partial \tau} - \tau_q \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left( [\sigma + \Theta] \frac{\partial S}{\partial \tau} \right), \quad (10)$$

$$\xi = 0: \mathbf{J} = \mu\varphi(\tau), \quad \mathbf{J}_q = \varphi(\tau), \quad S = S_0\varphi(\tau), \quad (11)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial J}{\partial \xi} = 0, S = 0, \text{ то } e = \Theta + \gamma(C - C_0), \quad (12)$$

$$\tau = 0: C = C_0, \Theta = 0, S = 0, \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0. \quad (13)$$

Здесь используются следующие безразмерные переменные:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \xi = \frac{x}{x_*}, S = \frac{\sigma}{\sigma_*}, \Theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*},$$

где  $t_* = \frac{D_0 \rho}{E}$ ,  $x_* = \sqrt{t_* D_0}$ ,  $\sigma_* = E \alpha_T (T_* - T_0)$ ,  $T_* = T_0 + \frac{q_0 D_0}{\lambda_T} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ ,  $\varepsilon_* = \alpha_T (T_* - T_0)$  - выбран-

ные масштабы [10]. Функция  $F(\theta)$  в уравнении (9) имеет вид:  $F(\Theta) = \exp\left(-\frac{1}{\beta(\sigma + \Theta)}\right)$ . Па-

раметры модели:  $\mu, \beta, \gamma, \sigma, Le, \tau_q, \tau_r, \omega, \varepsilon$  составлены из физических величин разной природы. Задача решена численно по неявной разностной схеме.

### Численное исследование взаимодействия волн

Численный алгоритм задачи тестировался для разных частных случаев: устойчивость и сходимость разностных схем исследовались для частных задач, полученных из вышеописанной системы уравнений и имеющих точные аналитические решения. После сравнения аналитических и численных решений (явная, неявная схемы) для связанной задачи выбрана неявная разностная схема. Более подробное описание преимуществ и недостатков разностных схем для решения задач, описываемых системой гиперболических уравнений, можно найти в работе [9].

1. Например, если  $\omega = \tau_r = \tau_q = 0$ , то получаем уравнения диффузии и уравнение теплопроводности из уравнений (9)-(10) (рис.1).

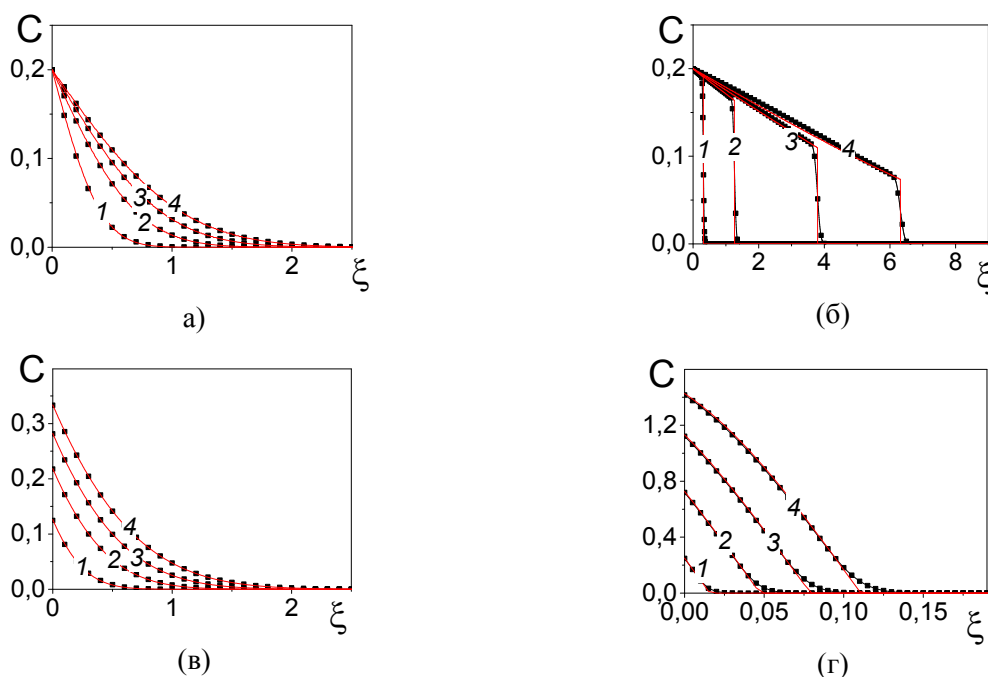


Рис. 1. Примеры решения частных задач: (а), (в) уравнение диффузии; (б),(г) телеграфное уравнение.

(а),(б) граничные условия первого рода; (в),(г) граничные условия второго рода;

Аналитическое решение – красная линия; численное решение- черная линия с квадратами.

Моменты времени  $\tau$ : (1) 0.05; (2) 0.15; (3) 0.25; (4) 0.35.

На рис. 1 представлено решение уравнения диффузии и телеграфного уравнения для концентрации примеси. Видно, что решения хорошо совпадают, есть незначительное расхождение в области переднего фронта (телеграфное уравнение), но это следствие использования неявной схемы.

2. Если принять  $\gamma = 0$ ,  $T = 0$ , то получим классическое волновое уравнение. На рис. 2 представлено решение волнового уравнения для разных форм импульса.

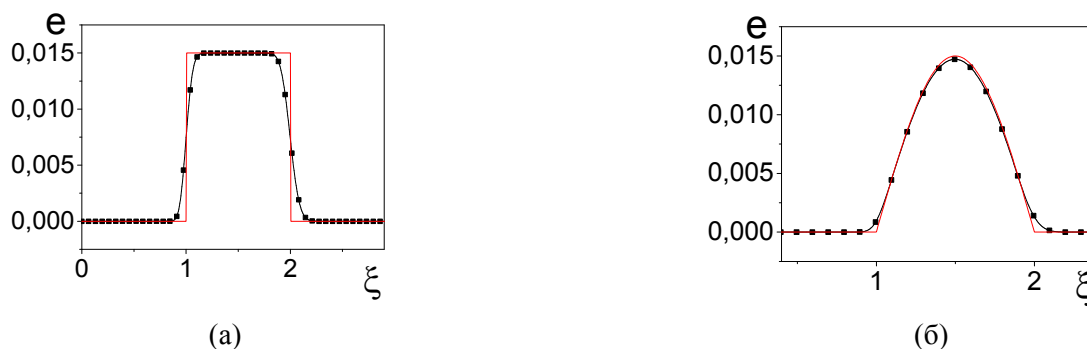


Рис. 2. Примеры решения частной задачи: волновое уравнение (а) прямоугольный импульс; (б) синусоидальный импульс. Аналитическое решение – красная линия; численное решение – черная линия с квадратиками. Момент времени  $\tau : 2.0$ .

3. Теперь рассмотрим задачу термоупругости, т.е. процесс внедрения примеси не оказывает влияния на распространения температуры и деформаций (напряжений):  $\tau_1 = 0.0$ ,  $\gamma = 0.0$ ,  $\varphi(\tau) = 1.0$ . На поверхности материала задан постоянный тепловой поток. В результате в поверхностном слое формируется волна напряжений (рис. 3).

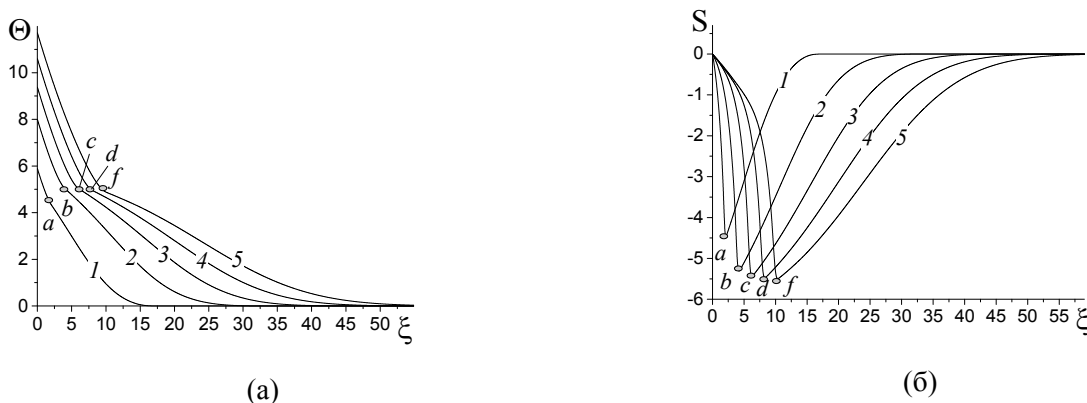


Рис. 3. Примеры решения задачи термоупругости: (а) распределение температуры, (б) распределение напряжений. Моменты времени  $\tau : (1) 2.0, (2) 4.0, (3) 6.0, (4) 8.0, (5) 10.0$ .

Если при малых временах скорости распространения тепловой и механической волн практически равны, и, следовательно, глубины проникновения этих волн одинаковы, то к более позднему моменту времени  $\tau = 6.0$ , волна (напряжений) деформаций опережает тепловую волну. Максимальному значению напряжений соответствует незначительный излом на профиле температуры. Этот факт при данном наборе параметров хорошо заметен с момента  $\tau = 6.0$  (точки  $a, b, c, d, f$ ). Этот результат согласуется с известными представлениями [14].

4. Для изотермической задачи упругой диффузии пример представлен на рис. 4. Здесь принято:  $\mu = 0.1$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ ,  $\gamma = -0.05$ ,  $\tau_0 = 0.01$ . Импульс – синусоидальный.

На этих рисунках также можно видеть, что с течением времени волна деформаций (и, следовательно, напряжений) опережает волну концентрационную. Результаты идентичны результатам, представленным в работе [9].

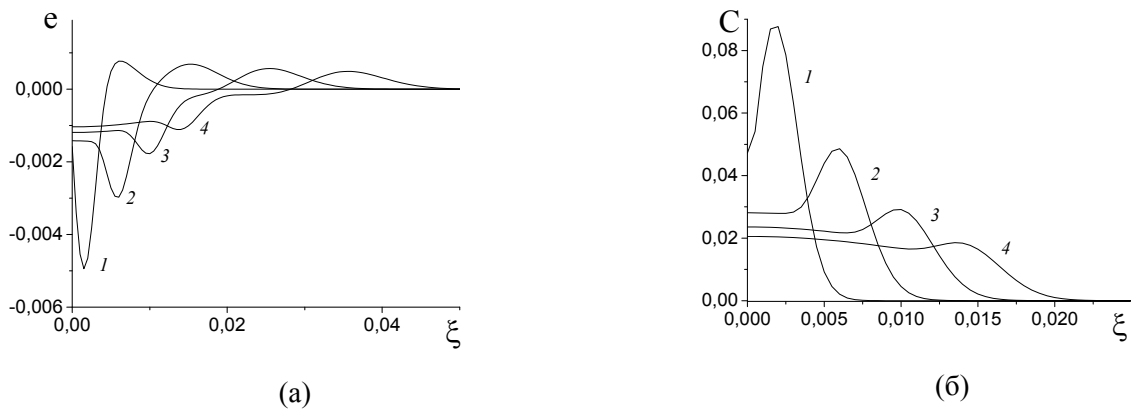


Рис. 4. Примеры решения изотермической задачи. Моменты времени  $\tau$  : (1) - 0.01, (2) - 0.02, (3) - 0.02, (4) - 0.04.

5. При решении полностью связанной задачи результат существенно зависит от набора значений параметров модели. Для каждого набора параметров имеется свое решение, которое отражает разные аспекты взаимодействия волн.

Если принять:  $\tau_r = 0.01$ ,  $\gamma = -0.05$ ,  $\mu = 0.001$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $\tau_0 = 0.01$ ,  $Le = 6.0$ ,  $\sigma = 2.0$ ,  $\tau_q = 0.6$ ,  $M = 0.1$ . Импульс – синусоидальный. Расчет представлен на рис. 5 и 6.

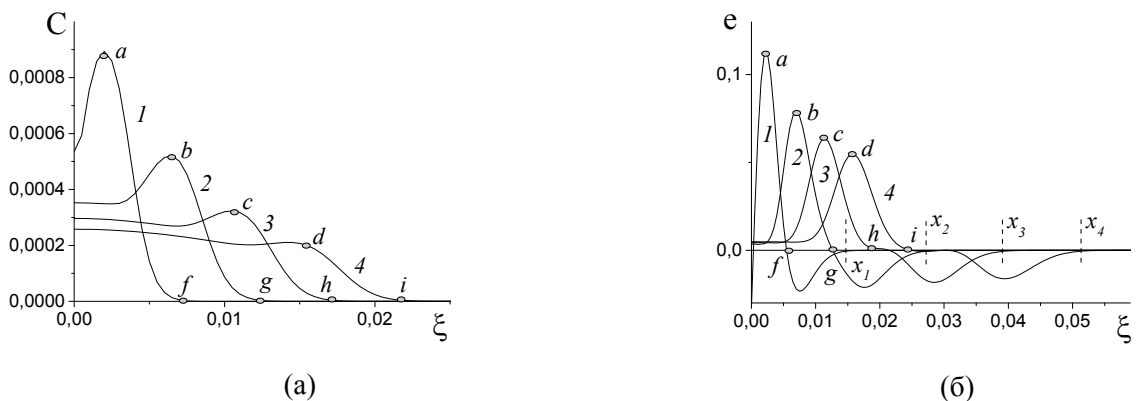


Рис. 5. Примеры решения связанной задачи: (а) распределение концентрации примеси, (б) распределение деформаций. Моменты времени  $\tau$  : (1) 0.01, (2) 0.02, (3) 0.03, (4) 0.04.

Как и в предыдущем случае на графиках отмечена координата переднего фронта волн напряжений, концентраций и температуры. Это точки  $x_k$  и точки  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$ . На профиле волны напряжений отчетливо видны особенности, связанные со взаимодействием разных процессов. Переднему фронту концентраций  $C$  при малых временах на профиле температуры соответствует небольшой излом, а вот волна напряжений изменяет форму. После того, как температура поверхности уменьшается значительно и волна температура-напряжение отрывается от концентрационной волны, дальнейшее распространение волн  $S$  и  $\Theta$  происходит независимо от концентрации примеси.

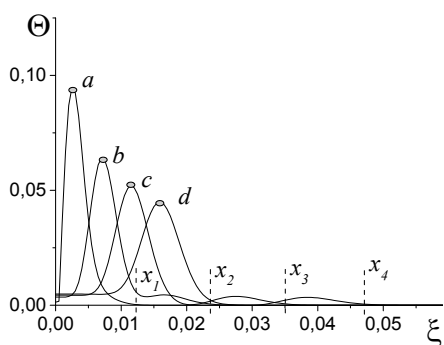


Рис. 6. Распределение температуры. Моменты времени  $\tau$ : (1) 0.01, (2) 0.02, (3) 0.03, (4) 0.04.

Влияние неизотермичности процесса сказывается различным образом. С одной стороны, увеличение температуры приводит к увеличению коэффициента диффузии, т.е. к увеличению роли первого слагаемого в диффузионном уравнении. С другой стороны, влияние напряжений на диффузию более заметно при низких температурах, когда волна напряжений уже удаляется от поверхности.

### Заключение

Таким образом, в работе представлена неизотермическая модель начальной стадии процесса внедрения примеси в поверхность металла. При условии, что обработка проходит при постоянной температуре, результаты идентичны тем, которые представлены в предыдущих работах. Наблюдается искажение профиля механической волны, распределение концентрации примеси не соответствует чисто диффузионному процессу, профиль температуры тоже изменяется качественно. Неизотермичность [процесса](#) приводит к тому, что по мере отрыва тепловой волны от концентрационной, распределение концентрации перестает изменяться. В результате имеется область влияния волн разной природы на разном расстоянии от обрабатываемой поверхности.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФФ, грант № 16-01-00603

### Список литературы

1. Комаров Ф.Ф., Новиков А.П., Буренков А.Ф. Ионная имплантация. Минск: Універсітэцкае, 1994.
2. Букрина Н.В., Князева А.Г., Сергеев М.П. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. Т.3. Вып.1. С.65-74.
3. Мейснер С.Н., Мейснер Л.Л., Лотков А.И., Твердохлебова А.В. // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 2015. Т.45. Вып.4. С.258-261.
4. Blinkov I.V., Volkhonskii O.A., Anikin V.N., Konukhov Y.V. // Protection of metals and physical chemistry of surfaces. 2012. Т.48, Вып.6, С.649-655.
5. Комаров А.Ф. // Журнал технической физики. 2001. Т.46. Вып.11. С.1465-1469.
6. Рахимова Г.Р., Раджабов Т.Д. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2004. Т.5. С.68-72.
7. [Pranevičius L.](#), [Markelis A.](#) // [Thin Solid Films](#). 1979. Т.60. Вып.1. С. 109-111.
8. [Williams J.S.](#) // [Physics Letters A](#). 1977. Т.60. Вып.4. С. 330-332.
9. Ильина Е.С., Демидов В.Н., Князева А.Г. // Вестник ПНИПУ. Механика. 2012. Вып.3 С.25-49.
10. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. // Key Engineering Materials. 2015. Т.685. С.413-416.
11. A.G. Knyazeva, PNRPU Mechanics Bulletin. 13 (2005) 45-60.
12. H.H. Sherief, F. Hamza and H. Saleh, Int. J. Engg. Sci., 42 (2004), pp. 591-608.
13. A.G. Knyazeva, V.N. Demidov, PNRPU Mechanics Bulletin, 3 (2011), pp.84-99.
14. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984.

## **СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ ОДНОКОВШОВЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЭКСКАВАТОРОВ**

**П.А. Побегайло**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им.  
А.А. Благонравова Российской академии наук,  
Лаборатория "Вибромеханики".  
101990, г. Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4,  
e-mail: [petrp214@yandex.ru](mailto:petrp214@yandex.ru)

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [ivanov@unn.ru](mailto:ivanov@unn.ru)

В настоящей статье приведены основные итоги выполненного анализа современного состояния исследований динамических процессов в одноковшовых гидравлических экскаваторах. Отталкиваясь от этого, далее, может планироваться научная и конструкторская работа. Общее состояние исследований динамических процессов в одноковшовых гидравлических экскаваторах (в нашей стране) на основании выполненного анализа должно быть признано неудовлетворительным.

*Ключевые слова:* одноковшовый экскаватор; динамика экскаватора; перспективы исследований экскаваторов

Исследования динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов проводятся начиная с конца 60-х, начала 70-х годов прошлого века. Определенный вклад в эти исследования внесли советские и российские ученые и инженеры. В качестве примера, мы можем указать на работы Беренгарда Ю.Г., Бровина В.А., Васильевой В.В., Волобоева В.Г., Гайцгори М.М., Дуданова И.В., Загвоздина Ю.Г., Зарецкого Л.Б., Исакова В.С., Карасева Г.Н., Кириллова Г.В., Козлова М.В., Комиссарова А.П., Кондратьевой Л.Ю., Королева А.В., Коротких П.В., Малиновского Е.Ю., Мотрохова И.А., Павлова В.П., Перлова А.С., Ребеко Л.В., Рустановича А.В., Смоляницкого Э.А., Тарана В.Х., Тарасова В.Н., Хороша И.А., Щербакова В.С., Шестакова В.С., Шлыкова В.Н. и др.

Конечно же, за рубежом так же велись и ведутся соответствующие исследования. Из известного нам многообразия иностранных авторов укажем на труды: Данчева Д., Круля К., Митрева Р., Панова В., Яношевича Д., Araya H., Brach I., Danko G.L., Dudczak A., Frimpong S., Hall A., Hiller N.S., Kecskemethy A., Koivo A., Li Y., Lipsett M.G., Park B. и многих др.

Существенную роль при исследовании динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов играли и играют исследования динамики горных, строительных, подъемно-транспортных машин, роботов, а также исследования более общей направленности (число ученых и инженеров тут очень велико и поэтому мы не будем приводить их фамилии).

Таким образом, исследованиям динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов (ОГЭ) уже более пятидесяти лет. Большое число специалистов занимались и занимаются этой многогранной проблемой. Не уменьшающееся число публикаций указывает на то, что данная область еще далеко не исчерпана. Однако большое число работ, их широкая география и разбросанность по различным журналам и сборникам конференций затрудняет продолжение исследований в этом направлении. Необходимо выполнить анализ уже сделанного в рассматриваемой области человеческого знания. Настала пора подвести некоторые итоги.

С целью начала работы в сформулированном только что направлении нами и подготовлен настоящий текст, имеющий, конечно же, краткий и субъективный характер.

Ради экономии места ниже приведем лишь некоторые основные результаты выполненного нами анализа. Итак:

- динамические усилия, возникающие в ОГЭ, являются результатом совместного воздействия динамики внешней нагрузки, динамики элементов конструкции и динамики мате-



риалов. Последняя обычно не учитывается [1 и др.] (по видимому, это в будущем измениться);

- основу рабочего оборудования (РО) ОГЭ составляют механизмы с подвижными гидроцилиндрами (ГЦ), входящими в группу механизмов с заданным относительным движением подвижных звеньев [2, 3 и др.]. Определение нагрузок в упругих звеньях таких механизмов в общем виде представляет большие трудности. Во-первых, при движении поршня исполнительного ГЦ изменяются приведенные к поршню масса и жесткость системы, во-вторых, изменение приведенной массы и жесткости каждой последующей из двух последовательно связанных систем изменяет параметры предыдущей [4, 5 и др.];

- большое число работ по исследованию динамики строительных ОГЭ базируется на известных подходах механики. Однако нельзя в полной мере, без существенной адаптации переносить предложенные подходы на карьерные машины, т.к. они имеют свои специфические черты в рабочем процессе. То же самое можно сказать и об использовании работ, посвященных роботам-манипуляторам (в отношении и строительных, и карьерных ОГЭ);

- авторы некоторых работ (такие подходы могут быть названы «не стандартными») используют самые свежие и модные идеи механики и математики. Однако при исследовании динамики ОГЭ требуются дополнительные математические модели, описывающие ряд процессов в системе «человек – машина – среда». И эти модели часто оказываются совсем не такими продвинутыми и точными, как того бы хотелось бы конструкторам и проектировщикам. Это конечно несколько обесценивает полученные красивые результаты с применением всех современных средств и методов (например, методы нелинейной динамики, применяемые некоторыми австралийскими специалистами в практическом смысле ничего не дают и дать не могут, т.к. полученные ими результаты не соответствуют действительности из-за не верно сформированных расчетных схем и носят искусственный характер; есть такие работы и в нашей стране). При этом, многие из таких работ не доходят до потребителя, а если и доходят, то не могут быть адекватно восприняты;

- известные нам «стандартные» модели, позволяющие изучать динамику ОГЭ, можно разбить на несколько групп (не будем сейчас уточнять это разбиение, оно не так важно для настоящего краткого обзора). Отсутствуют работы, сравнивающие эти подходы и не ясно, какой из подходов наиболее рационален. Многие из них так же опираются на не достаточно точно обоснованные расчётные схемы и не совсем точно учитывают реальную специфику ОГЭ, его рабочих процессов;

- забыты многие советские, оригинальные работы в области динамики машин и механизмов, которые могли бы быть использованы в наше время для изучения динамики ОГЭ [6 – 13 и многие др.];

- практически все известные нам подходы не позволяют оценить влияние динамики в ОГЭ на усталостную долговечность несущих металлоконструкций и т.п. (известные работы Круля К. [14, 15 и др.] нуждаются как минимум в продолжении);

- часто рассматриваются отдельные режимы работы ОГЭ. Необходимо же исследование динамики ОГЭ при одновременном выполнении им нескольких рабочих движений (как стандартных; так и не стандартных);

- недостаточно внимания уделяется вопросам уравнивания рабочего оборудования ОГЭ. Одна единственная диссертация [16] за пятьдесят лет – этого явно не достаточно для решения указанной проблемы. В методическом плане опираться тут нужно на работы [6, 17 и т.п.];

- вопросы безопасности оператора ОГЭ, в части изучения действия на него динамических нагрузок и их снижения, в России поставлены не достаточно полно и требуют своей интенсификации;

- на базе работ [10, 11 и др.] может быть полезным введение в рассмотрение понятия «изолированное гидрообъемное устройство (ИГУ)», что поможет уточнить понятие связи для ОГЭ (ограничения в ИГУ, как части ОГЭ, накладываемые на твёрдые тела жидкостью,

можно рассматривать как действие особого рода механической связи (расширенные параметрические связи)) [по видимому, тут важным является разумный учёт трудов Шульгина М.Ф.];

- вопросы исследования динамики электрогидравлического привода имеют свою специфику и требуют отдельного рассмотрения. Поэтому сейчас укажем лишь на то, что требуется скорейшее восстановление и новое внедрение идей ВНИИСДМ [18 - 20 и др.] (с уточнением ряда формул и положений);

- в дальнейшей перспективе принципиальным видится вопрос о том, что лучше – представление экскаватора как многомассовой системы (кстати, до сих пор до конца не решен вопрос о том, сколько же масс достаточно для моделирования ОГЭ при проектировании) с учётом свойств грунта под экскаватором (это в свою очередь отдельная и принципиальная проблема) или моделирование гидравлического привода с учетом первичного двигателя;

- несмотря на более чем пятидесятилетнюю историю ОГЭ так и не нашел своего решения вопрос об их динамической устойчивости (нам известны всего несколько работ, которые этот вопрос по сути только наметили к рассмотрению; не более того [21 и др.]);

- нуждаются в обосновании применяемые "по умолчанию" многими исследователями элементы расчетных схем. Так достаточно распространено использование т.н. "тел фохта" при моделировании движителей экскаваторов. Однако пока еще никем не доказано, что эта идеализация является допустимой;

- в советское время не удалось построить статистическую динамику ОГЭ. К этому вопросу необходимо вернуться. Очевидно также, что необходимо вернуться и к разработке расчётных документов, при участии как конструкторов, так и ученых – механиков;

- в части создания новых систем управления ОГЭ представляется перспективным в их основу положить т.н. синергетические методы управления, например разработанный А.А. Колесниковым метод АКАР [22 и др.]. Так же, при этом необходимо учитывать работы В.И. Матюхина [23 - 25 и др.] и его учителя Е.С. Пятницкого [26 и др.]).

Общее состояние исследований динамических процессов в одноковшовых гидравлических экскаваторах (в нашей стране) на основании выполненного анализа должно быть признано неудовлетворительным. Предстоит большая работа, если мы хотим выйти на ведущие позиции в мире, в деле создания универсальных роботов, которые могли бы заменить человека в любых условиях окружающей среды и в любой тяжелой и рутинной работе, предтечей которых, по нашему мнению, и является ОГЭ.

### Список литературы

1. Машины для земляных работ: учебник для студентов вузов по специальности «Подъемно-транспортные, строительные и дорожные машины и оборудование» / Д.П. Волков, В.Я. Крикун, К.С. Гаевская и др.; Под общ. ред. Д.П. Волкова. М.: Машиностроение, 1992. 448 с.
2. Кожевников С.Н., Цехнович Л.И. Механизмы с заданным относительным движением подвижных звеньев // Труды семинара по ТММ. Т. 14., вып. 56. М.: Изд-во АН СССР. 1955. с. 59 – 89.
3. Озол О.Г. Исследование некоторых основных вопросов конструирования и расчёта механизмов: Дисс. ... докт. техн. наук. Рига, 1965. 350 с.
4. Перлов А.С., Смоляницкий Э.А. К динамическому анализу рабочего оборудования гидравлического экскаватора // Исследование приводов строительных и дорожных машин: Науч. тр. XLV / ВНИИСДМ. М., 1969. с. 20 – 27.
5. Перлов А.С., Смоляницкий Э.А. Динамика системы «рабочее оборудование – гидропривод» одноковшового гидравлического экскаватора // Исследование одноковшовых экскаваторов: Науч. тр. № 54 / ВНИИСДМ. М., 1972. с. 37 – 46.
6. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. М.: Наука, 1967. 280 с.

7. Пономарев В.А. Методы динамического исследования механизмов с двумя степенями свободы: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 1972. 131 с.
8. Мудров П.Г. Исследование пространственных шарнирных механизмов с особой структурой и их внедрение в машиностроение: Дисс. ... докт. техн. наук. М., 1979. 220 с.
9. Горский Б.Е. Динамическое совершенствование механических систем. К.: Техніка, 1987. 200 с.
10. Цымбалюк А.А. Основы динамики и разработка механизмов приводов с изолированными гидрообъемными устройствами: Дисс. ... докт. техн. наук. Киев, 1981. 271 с.
11. Цымбалюк А.А. Аналитическая динамика механизмов с гидроустройствами. Киев: Выща школа, 1990. 175 с.
12. Ясюлёнис А.И. Исследования механики машин матрично-гармоническим методом: Дисс. ... докт. техн. наук. М., 1970. 328 с.
13. Казыханов Х.Р. Основы автоматизации математического моделирования и исследования динамики механизмов и машин: Дисс. ... докт. техн. наук. М., 1985. 406 с.
14. Круль К. Влияние динамической нагруженности на усталостную долговечность рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 1986. 260 с.
15. Круль К. Оценка работоспособности металлоконструкций строительных машин с дефектами: Дисс. ... докт. техн. наук. М., 1999. 289 с.
16. Коваленко М.В. Уравновешивание рабочего оборудования гидравлического экскаватора: Дисс. ... канд. техн. наук. Омск, 2004. 179 с.
17. Петриашвили Б.Д. Методы уравновешивания механизмов с переменными инерционными параметрами: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 1972. 148 с.
18. Беренгард Ю.Г. Разработка методов автоматизированного расчёта гидросистем строительных и дорожных машин: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 1979. 134 с.
19. Расчет и проектирование строительных и дорожных машин на ЭВМ / Под ред. Е.Ю. Малиновского. М.: Машиностроение, 1980. 216 с.
20. Автоматизированное проектирование машиностроительного гидропривода / Под ред. С.А. Ермакова. М.: Машиностроение, 1988. 313 с.
21. Карасев Г.Н., Павлов В.П. Дорожно-строительные машины. Системное проектирование, моделирование, оптимизация. Красноярск: СФУ, 2011. 241 с.
22. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2012. 241 с.
23. Матюхин В.И. Управление механическими системами. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 320 с.
24. Матюхин В.И. Управление движением манипулятора. Препринт. - М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2010. - 96 с.
25. Матюхин В.И. Стабилизация движений манипулятора вдоль заданной поверхности // Автоматика и телемеханика. - 2011. № 4. - с. 71 – 85.
26. Пятницкий Е.С. Избранные труды: в 3 т. Том 3. Теоретическая биомеханика. Концепция управления движением в условиях неопределенности. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 448 с.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [ponomarenko@vmk.unn.ru](mailto:ponomarenko@vmk.unn.ru)

Представлены результаты исследования динамических состояний и бифуркаций в нелинейной системе с частотно-фазовым управлением при использовании многочастотного дискриминатора и одинаковых фильтров низких частот третьего порядка в цепях управления. Выяснено, что в такой системе возможно существование, наряду с синхронным режимом, множества несинхронных периодических и хаотических режимов различной сложности. Результаты представлены в виде одно- и двух параметрических бифуркационных диаграмм и проекций фазовых портретов аттракторов несинхронных режимов.

*Ключевые слова:* система с частотно-фазовым управлением, многочастотный дискриминатор, синхронный, квазисинхронный и асинхронные режимы, устойчивость, аттракторы, фазовые портреты, бифуркации, динамический хаос.

1. Автогенераторные системы с автоматическим фазовым управлением широко применяются в современных инфокоммуникационных технологиях для решения задач стабилизации частоты генерируемых колебаний, фазовой синхронизации и слежения, передачи и обработки информации. Традиционное назначение таких систем состоит в обеспечении синхронного режима, в котором частоты внешних и управляемых колебаний совпадают. В последнее время большое внимание уделяется изучению возникающих в системах с фазовым управлением эффектов автомодуляции частоты управляемых колебаний и использованию этих эффектов для генерации хаотически модулированных сигналов различной сложности. Возможности таких систем в этом плане представляют непосредственный практический интерес в связи с широко обсуждаемой в литературе проблемой реализации коммуникационных систем на основе динамического хаоса [1]. По этой причине детальное исследование разнообразных вариантов структур систем с фазовым управлением является актуальной задачей. В данной работе приводятся результаты исследования динамических режимов и бифуркаций в двух-кольцевой системе с частотно-фазовым управлением, иначе называемой системой частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [2].

Структурная схема системы ЧФАП приведена на рис.1. Объектом управления является перестраиваемый по частоте генератор (управляемый генератор (УГ)), а регулируемой величиной – текущая частота его колебаний. Фазовый дискриминатор (ФД), фильтр низких частот (Ф1) и управляющий элемент (УЭ) образуют петлю фазового управления, которая формирует сигнал рассогласования, зависящий от

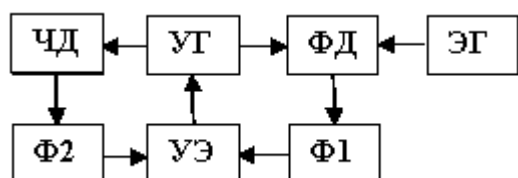


Рис. 1. Структурная схема системы с частотно-фазовым управлением

мирует сигнал рассогласования, зависящий от разности фаз колебаний управляемого и эталонного генераторов. Частотный дискриминатор, фильтр низких частот (Ф2) и управляющий элемент образуют петлю частотного управления, формирующую сигнал рассогласования, зависящий от отклонения частоты колебаний управляемого генератора от номинальной частоты частотного дискриминатора, которая выбирается равной

частоте колебаний эталонного генератора. В результате суммарного корректирующего воздействия на управляемый генератор со стороны фазовой и частотной цепей управления в системе ЧФАП осуществляется подстройка частоты колебаний управляемого генератора к частоте колебаний эталонного генератора.

2. Общее уравнение, описывающее работу системы ЧФАП и записанное в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) для разности фаз  $\varphi$  внешнего (эталонного) и управляемого колебаний, имеет вид [2]

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p) + \Omega_2 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$  – коэффициенты передачи фильтров  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ;  $F(\varphi)$  и  $\Phi(p\varphi)$  – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу;  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – максимальные расстройки, которые могут быть скомпенсированы фазовой и частотной цепями управления соответственно;  $\delta\omega$  – начальная расстройка частот внешнего и управляемого колебаний.

В данной работе рассматриваются особенности динамического поведения системы ЧФАП, которые появляются при использовании в частотной цепи управления многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой  $\Phi(p\varphi) = \sin(\beta_1 p\varphi)$  [3], где  $\beta_1$  – параметр этой характеристики, и одинаковых фильтров третьего порядка в фазовой и частотной цепях управления ( $K_1(p) = K_2(p) = 1/(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)$ ,  $a_1, a_2$  и  $a_3$  – постоянные времени). Характеристику  $F(\varphi)$  будем аппроксимировать функцией  $F(\varphi) = \sin\varphi$ . В этом случае обе подсистемы фазового и частотного управления автономно демонстрируют как регулярные, так и хаотические режимы.

При сделанных предположениях математическая модель рассматриваемой системы представляется динамической системой

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu_1 \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin\varphi - u - \varepsilon y - \mu z - b \sin(\beta u) \quad (2)$$

с четырехмерным цилиндрическим фазовым пространством  $U = \{\varphi(\text{mod}2\pi), u, y, z\}$ . В системе (2)  $\tau = \Omega_1 t$ ,  $\gamma = \delta\omega/\Omega_1$ ,  $\varepsilon = a_1 \Omega_1$ ,  $\mu = a_2 \Omega_1^2$ ,  $\mu_1 = a_3 \Omega_1^3$ ,  $b = \Omega_2/\Omega_1$ ,  $\beta = \beta_1 \Omega_1$ . Движения, развивающиеся в фазовом пространстве  $U$ , зависят от шести параметров модели (3). В данной работе ограничимся рассмотрением динамических состояний и бифуркаций, которые реализуются при изменении параметров  $\mu_1$  и  $b$ , характеризующих степень влияния фильтров третьего порядка в цепях управления и кольца частотного управления соответственно, полагая фиксированными значения параметров  $\beta, \gamma, \mu$  и  $\varepsilon$ .

В системе ЧФАП наблюдаются следующие стационарные режимы: режим синхронизации, в котором разность частот внешнего и управляемого сигналов равна нулю при постоянной величине разности фаз  $\varphi$ , зависящей от величины начальной расстройки  $\gamma$ ; периодические и хаотические несинхронные (модуляционные) режимы. Несинхронные режимы подразделяются на квазисинхронные, в которых разность фаз  $\varphi$  изменяется в ограниченном диапазоне значений, и асинхронные, при которых наблюдается либо возрастание (убывание) разности фаз  $\varphi$ , либо чередование стадий неограниченного изменения  $\varphi$  и ее колебательного поведения в ограниченном диапазоне значений  $\varphi$ . В несинхронных режимах имеет место периодическая или хаотическая модуляция частоты колебаний управляемого генератора.

В фазовом пространстве  $U$  режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия системы (2). Несинхронным режимам соответствуют предельные циклы, притягивающие торы и хаотические аттракторы колебательного (без вращения разности фаз  $\varphi$ ), вращательного (с неограниченным нарастанием или убыванием  $\varphi$ ) и колебательно-вращательного типа.

3. Выясним условия существования режима синхронизации в рассматриваемой системе ЧФАП. Система (2) при значениях  $0 < \gamma < 1$  имеет два состояния равновесия:  $A_1(\arcsin\gamma, 0, 0, 0)$  и  $A_2(\pi - \arcsin\gamma, 0, 0, 0)$ . Исследуя корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + (\mu/\mu_1)\lambda^3 + (\varepsilon/\mu_1)\lambda^2 + ((1 + \beta b)/\mu_1)\lambda + (\sqrt{1 - \gamma^2}/\mu_1), \quad (3)$$

выясняем с помощью критерия Рауса-Гурвица, что состояние равновесия  $A_1$  устойчивое при значениях параметров

$$\mu_1 < \mu_1^*(b, \beta, \mu, \varepsilon, \gamma), \quad \mu_1^* = \mu\varepsilon / (1 + \beta b) - \mu^2 \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 + \beta b)^2, \quad (4)$$

состояние равновесия  $A_2$  неустойчивое седлового типа. Неравенство (4) выделяет в пространстве параметров системы (2) область  $S_0: \{\mu_1 < \mu_1^*(b, \beta, \mu, \varepsilon, \gamma)\}$  – область удержания режима синхронизации в системе ЧФАП, определяемого устойчивым состоянием равновесия  $A_1$ . На плоскости параметров  $(b, \mu_1)$  при фиксированных значениях  $\beta, \mu, \varepsilon, \gamma$  кривая  $\mu_1 = \mu_1^*$  расположена в области значений  $b > b_0$ ,  $b_0 = \mu\sqrt{1 - \gamma^2} / \beta\varepsilon - 1/\beta$ ;  $\mu_1^* = 0$  при  $b = b_0$ . Кривая  $\mu_1 = \mu_1^*$  имеет максимум при  $b = b_m = 2\mu\sqrt{1 - \gamma^2} / \beta\varepsilon - 1/\beta$ , максимальное значение  $\mu_{1m}^* = \varepsilon^2 / 4\sqrt{1 - \gamma^2}$ .

4. Как показали результаты численного исследования системы (2), в фазовом пространстве  $U$  может существовать большое число вращательных предельных циклов [4]. По этой причине полная картина расположения бифуркационных кривых на плоскости управляющих параметров  $(b, \mu_1)$  представляется достаточно сложной. На рис.2 приведены некоторые из таких кривых, соответствующих бифуркациям состояния равновесия  $A_1$ , колебательного предельного цикла и четырех вращательных предельных циклов, локализованных в области  $u > 0$  фазового пространства  $U$ ; эти кривые построены при значениях параметров  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ . Охарактеризуем кривые, представленные на рис.2.

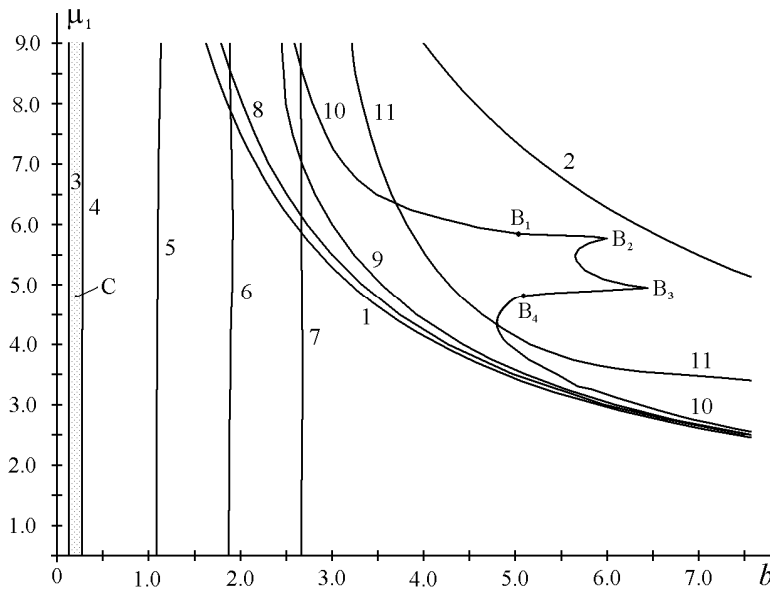


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма динамических режимов

Линия 1 – это граница  $\mu_1 = \mu_1^*$  области устойчивости состояния равновесия  $A_1$ , определяемой (4). При рассматриваемых значениях  $\beta, \gamma, \mu$  и  $\varepsilon$  величина  $b_0 < 0$ ; следовательно, состояние равновесия  $A_1$  устойчивое при значениях параметров  $b$  и  $\mu_1$ , локализованных в области ниже линии 1. При переходе с возрастанием параметров  $b$  или  $\mu_1$  через границу 1 в системе (2) наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа [5], в результате которой в фазовом пространстве  $U$  появляется устойчивый предельный цикл колебательного

типа  $S_0$ , охватывающий ставшее неустойчивым состояние равновесия  $A_1$ . Предельному циклу  $S_0$  отвечает периодический квазисинхронный режим системы ЧФАП. В этом режиме в системе наблюдаются колебания управляемого генератора с периодической угловой модуляцией, средняя частота которых стабилизирована частотой внешнего сигнала. Этот режим существует при значениях параметров  $b$  и  $\mu_1$  в области между линиями 1 и 2.

Кривая 2 отвечает бифуркации рождения в фазовом пространстве устойчивого двумерного колебательного тора  $T_0$  из предельного цикла  $S_0$ . Тор  $T_0$  рождается при пересечении кривой 2 с возрастанием параметров  $b$  или  $\mu_1$ . Кривая 3 отвечает образованию в фазовом пространстве  $U$  петли  $\Pi_\Phi$  сепаратрисы седла  $A_2$  (при значениях  $\mu_1 < 0.233$ , когда  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 > 0$ ) или седло-фокуса  $A_2$  (при значениях  $\mu_1 > 0.233$ , когда  $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$ ,  $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 > 0$ ), где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  – корни характеристического уравнения (3) для состояния равновесия  $A_2$ .

При пересечении кривой 3 с уменьшением параметра  $b$  из петли  $\Pi_\varphi$  рождается вращательный однооборотный ( $2\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) предельный цикл  $L_0^+$ , этот цикл устойчивый, так как седловая величина  $\sigma_1 = \lambda_4 + \text{Re}\lambda_n < 0$ ,  $n=1,2,3$ . Таким образом, в области значений параметров между линией 3 и линией  $b=0$  в системе ЧФАП одновременно существуют режим синхронизации и асинхронный режим вращательного предельного цикла  $L_0^+$ . В асинхронном режиме разность фаз колебаний управляемого генератора и внешнего сигнала неограниченно нарастает. В области С (между линиями 3 и 4) в системе существует только режим синхронизации.

Кривые 4-7 соответствуют седло-узловым бифуркациям вращательных однооборотных предельных циклов, расположенных в области  $u > 0$  фазового пространства  $U$ . При пересечении линий 4,5,6 и 7 с возрастанием параметра  $b$  в фазовом пространстве появляются устойчивые предельные циклы  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  и  $L_4^+$  соответственно. На рис. 3а приведены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов этих предельных циклов. Режим цикла  $L_1^+$  существует в областях значений  $b$  и  $\mu_1$  между кривыми 4 и 8; режим цикла  $L_2^+$  – в областях значений  $b$  и  $\mu_1$  между кривыми 5 и 9. Область существования режима цикла  $L_3^+$  заключена между кривыми 6 и 10, область значений  $b$  и  $\mu_1$ , при которых существует режим цикла  $L_4^+$ , локализована между кривыми 7 и 11.

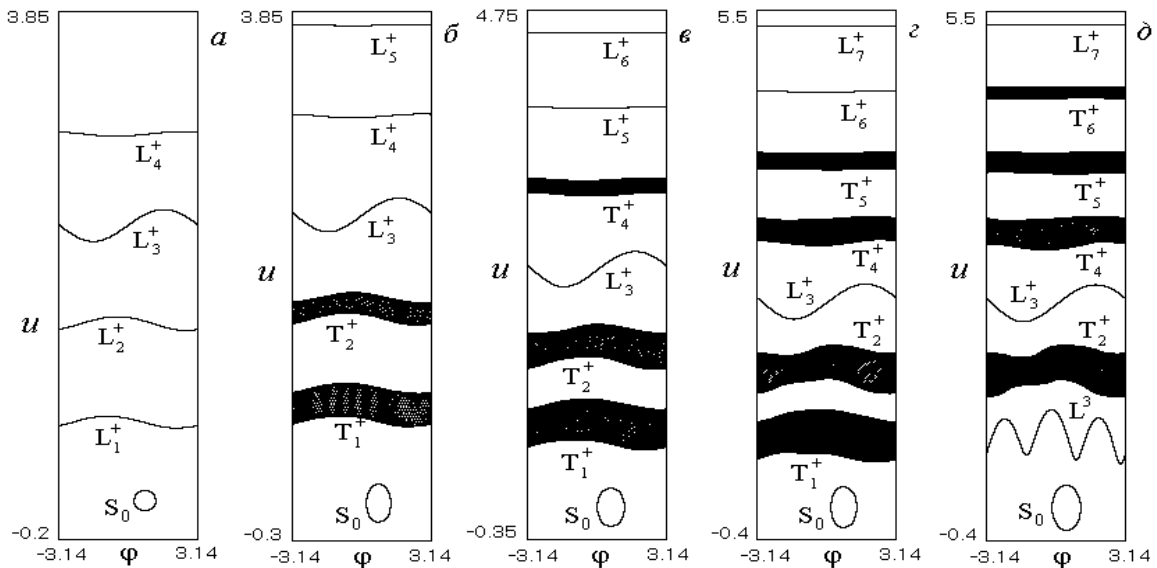


Рис. 3. Проекция фазовых портретов аттракторов несинхронных режимов при значениях параметров  $\gamma=0.3$ ,  $\beta=8$ ,  $\varepsilon=25$ ,  $\mu=4.8$ ,  $\mu_1=5.0$ ,  $b=2.9$  (а), 3.45 (б), 4.25 (в), 5.05 (г), 5.45 (д)

Кривые 8,9 и 11 на рис.2 отвечают потере устойчивости предельных циклов  $L_1^+, L_2^+$  и  $L_4^+$  через бифуркации рождения в фазовом пространстве  $U$  устойчивых двумерных торов вращательного типа  $T_1^+, T_2^+$ , и  $T_4^+$  соответственно. Эти торы рождаются при пересечении кривых 8,9 и 11 с увеличением параметра  $b$ . Части кривой 10 выше точки  $B_1$  и ниже точки  $B_4$  отвечают бифуркации рождения устойчивого двумерного вращательного тора  $T_3^+$ , тор  $T_3^+$  рождается при пересечении указанных частей кривой 10 с возрастанием параметра  $b$ . На рис.3б,в даны  $(\varphi, u)$ -проекция фазовых портретов квазипериодических асинхронных режимов торов  $T_1^+, T_2^+$ , и  $T_4^+$ .

Части  $B_1B_2$  и  $B_3B_4$  кривой 10 соответствуют седло-узловой бифуркации предельного цикла  $L_3^+$ , эта бифуркация приводит к прекращению асинхронного режима цикла  $L_3^+$ . При пересечении части  $B_2B_3$  кривой 10 с возрастанием  $b$  наблюдается потеря устойчивости режима предельного цикла  $L_3^+$  в результате бифуркации удвоения периода.

Следует отметить, что, наряду с бифуркационными кривыми вращательных предельных циклов, приведенными на рис.2, на плоскости  $(b, \mu_1)$  установлено существование аналогичных бифуркационных кривых, отвечающих вращательным предельным циклам  $L_1^-, L_2^-, L_3^-$  и  $L_4^-$  системы (2), локализованным в области  $u < 0$  фазового пространства  $U$ . Численное исследование системы (2) показало, что при возрастании параметра  $b$  циклы  $L_1^-, L_2^-, L_3^-$  и  $L_4^-$  теряют устойчивость с рождением в фазовом пространстве двумерных вращательных торов  $T_1^-, T_2^-, T_3^-$  и  $T_4^-$  соответственно; предельный цикл  $L_3^-$  может терять устойчивость также и в результате бифуркации удвоения периода [6].

Кроме выявленных аттракторов и бифуркаций, выяснено, что для значений параметров  $b$  и  $\mu_1$ , расположенных на плоскости  $(b, \mu_1)$  в областях справа от линии 7 (см. рис.2), в системе (2) реализуются седло-узловые бифуркации вращательных предельных циклов. В результате этих бифуркаций в фазовом пространстве появляются устойчивые и неустойчивые вращательные предельные циклы, локализованные выше предельного цикла  $L_4^+$  (циклы  $L_5^+, L_6^+$  и  $L_7^+$  на рис.3б,в,г) и ниже предельного цикла  $L_4^-$ . При рассматриваемых значениях параметров  $\gamma, \beta, \varepsilon, \mu$  эти предельные циклы, так же как и циклы  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  и  $L_4^+$  и  $L_1^-, L_2^-, L_3^-$  и  $L_4^-$ , при возрастании параметра  $b$  испытывают бифуркации рождения двумерных вращательных торов (торы  $T_5^+$  и  $T_6^+$  на рис.3г,д) и бифуркации удвоения периода. Предельный цикл  $L^3$  на рис.3г – это резонансный цикл, возникающий на торе  $T_1^+$ .

Примечательно, что при значениях  $b$  и  $\mu_1$  в области между кривыми 1 и 4 (см. рис.2) область  $S_0$  устойчивости состояния равновесия  $A_1$  и области с вращательными предельными циклами пересекаются. Это означает, что в этих областях режим синхронизации и множество периодических асинхронных режимов существуют в системе ЧФАП одновременно, т.е. система (5) является мультистабильной. Какой из режимов реализуется в системе при этих значениях параметров – это зависит от начальных значений  $\varphi, u, y, z$ .

**5.** Рассмотрим особенности эволюции асинхронных режимов предельных циклов  $L^3, L_3^+, L_7^+$  и торов  $T_2^+, T_4^+, T_5^+, T_6^+$  при возрастании параметра  $b$ . Эту эволюцию характеризует бифуркационная диаграмма  $(b, u)$ , приведенная на рис.4, она соответствует  $\mu_1=5$ , параметр  $b$  изменяется от 5.45 до 8.5.

Картина эволюции режима предельного цикла  $L^3$  характеризуется следующими явлениями: седло-узловой бифуркацией цикла  $L^3$  и возникновением притягивающего тора  $T_1^3$ ; вырождением тора  $T_1^3$  в резонансный тор, на котором снова возникает предельный цикл  $L^3$ ; мягким рождением вращательного тора  $T_2^3$  из цикла  $L^3$  с последующим разрушением этого тора через потерю гладкости [7] и образованием вращательного хаотического аттрактора  $V_2^3$ ; прекращением хаотических колебаний и жестким переходом к режиму вращательного предельного цикла  $L_1^3$  (рис.13а), который поддерживается в системе до значения  $b=8.48$ . Когда параметр  $b$  проходит через значение 8.48, предельный цикл  $L_1^3$  исчезает в результате седло-узловой бифуркации, наблюдается жесткий переход к асинхронному хаотическому режиму.

Рассмотрим развитие режимов предельных циклов  $L_3^+$  и  $L_7^+$  и торов  $T_2^+, T_4^+, T_5^+$  и  $T_6^+$ . В соответствии с  $(b, u)$ -диаграммой (рис.4) вначале наблюдаются бифуркации удвоения периода предельного цикла  $L_3^+$  и рождения вращательного тора  $T_7^+$  из предельного цикла  $L_7^+$ . Далее происходит разрушение торов  $T_4^+$  и  $T_2^+$  в результате потери гладкости с образованием вращательных хаотических аттракторов  $V_4^+$  и  $V_2^+$ . Затем наблюдаются следующие явления: образование вращательного хаотического аттрактора  $V_3^+$  через бифуркации удвоения периода предельного цикла  $L_3^+$ ; бифуркация удвоения тора  $T_5^+$ , когда соответствующая инвариантная замкнутая кривая в сечении Пуанкаре становится двухпетлевой; мягкий переход к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_5^+$  в результате потери гладкости двухпетлевой инвариантной замкнутой кривой.



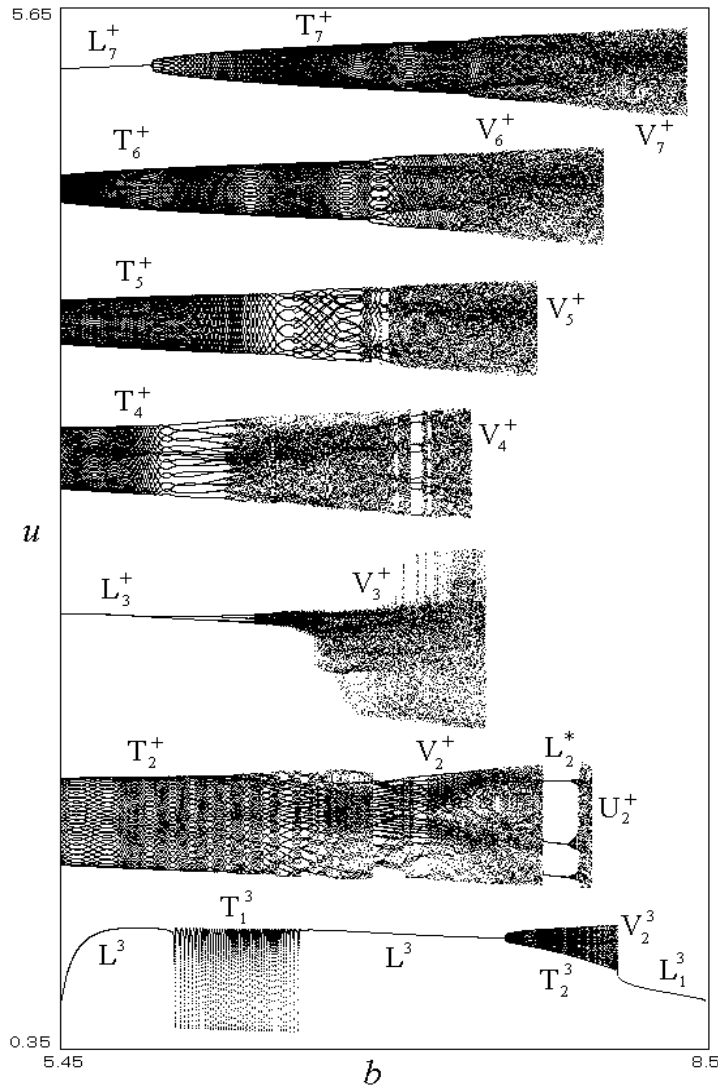


Рис. 4. Эволюция асинхронных режимов, развивающихся на базе предельных циклов  $L^3, L_3^+, L_7^+$  и торов  $T_2^+, T_4^+, T_5^+$  и  $T_6^+$ , при возрастании параметра  $b$  ( $\gamma=0.3, \beta=8, \varepsilon=25, \mu=4.8, \mu_1=5.0$ )

наблюдаются жесткие переходы от режимов хаотических аттракторов  $U_2^+$  и  $V_6^+$  к режиму тора  $T_2^3$  (рис. 5d,e) и от режима хаотического аттрактора  $V_7^+$  (рис. 5ж) к режиму предельного цикла  $L_1^3$  (рис. 5з).

Из приведенных результатов следует, что эволюция асинхронных режимов предельных циклов  $L_1^+, L_2^+, L_3^+, L_4^+, L_5^+, L_6^+$  и  $L_7^+$  (см. рис.3) при изменении параметра  $b$  в интервале (5.45; 8.5) в результате выясненных бифуркаций в итоге завершается переходом к асинхронному режиму предельного цикла  $L_1^3$ . В процессе этой эволюции система демонстрирует разнообразные периодические, квазипериодические и хаотические автомодуляционные режимы.

6. При значениях параметра  $b$  между кривыми 1 и 2 (см. рис.2) одновременно с выявленными асинхронными режимами в системе существует квазисинхронный режим колебательного предельного цикла  $S_0$  (рис.3), а при значениях  $b$  справа от кривой 2 – квазисинхронные режимы, развивающиеся на базе этого цикла. Рассмотрим динамику режима предельного цикла  $S_0$  при постепенном удалении от кривой 2 с возрастанием параметра  $b$ .

При дальнейшем возрастании  $b$  последовательно наблюдаются две бифуркации удвоения тора  $T_6^+$  и разрушение четырехпетлевой инвариантной замкнутой в сечении Пуанкаре с переходом к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_6^+$ . Далее последовательно реализуются бифуркация удвоения тора  $T_7^+$  (в сечении Пуанкаре образуется двухпетлевая замкнутая инвариантная кривая) и жесткие переходы от режимов хаотических аттракторов  $V_4^+, V_3^+$  и  $V_5^+$  к режиму хаотического аттрактора  $V_2^+$ . Затем наблюдается вторая бифуркация удвоения тора  $T_7^+$  с образованием четырехпетлевой инвариантной замкнутой кривой в сечении Пуанкаре и переход к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_7^+$  через разрушение этой инвариантной кривой. На рис.5a-в и 5e,ж приведены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов хаотических аттракторов  $V_2^+, V_3^+, V_4^+, V_5^+, V_6^+$  и  $V_7^+$ .

После этих явлений при увеличении параметра  $b$  вначале имеет место преобразование режима хаотического аттрактора  $V_2^+$  в режим хаотического аттрактора  $U_2^+$  (рис.5d) через режим трехоборотного (6 $\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $L_2^*$  (рис.5e). Затем последовательно на-

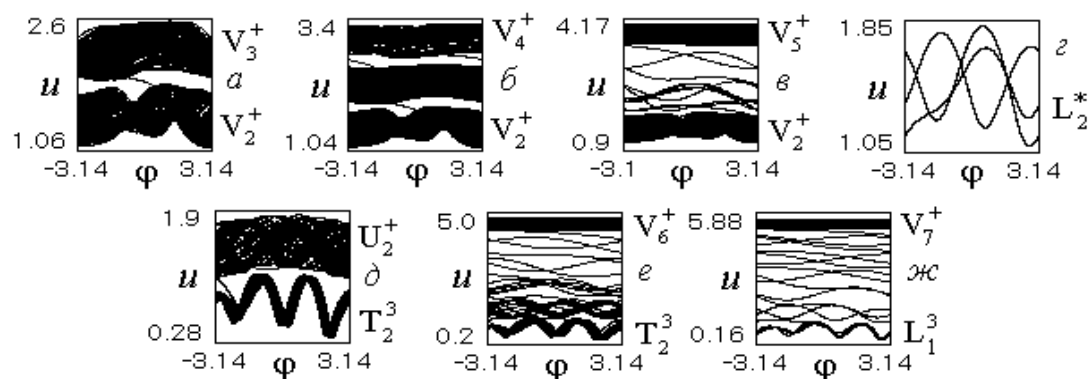


Рис. 5. Аттракторы асинхронных режимов и переходы между режимами, наблюдаемые при изменении параметра  $b$ :  $b=7.38$  (а);  $7.39$  (б);  $7.64$  (в);  $7.73$  (г);  $7.95$  (д);  $7.99$  (е);  $8.37$  (ж);  $8.37$  (м) ( $\gamma=0.3, \beta=8, \varepsilon=25, \mu=4.8, \mu_1=5$ )

На рис.6 приведены  $(\varphi, u)$ - и  $(u, y)$ -проекции фазовых портретов и фрагменты реализаций колебаний  $u(\tau)$ , соответствующих некоторым аттракторам, которые развиваются в фазовом пространстве при возрастании  $b$ . При пересечении на плоскости  $(b, \mu_1)$  кривой 4 в фазовом пространстве появляется двумерный тор  $T_0$  колебательного типа из цикла  $S_0$  (рис.6а). В соответствии с диаграммой  $(b, u)$  (см. рис.4) вместе с тором  $T_0$  в области  $u > 0$  фазового пространства существуют вращательные аттракторы асинхронных режимов: предельный цикл  $L^3$ , хаотические аттракторы  $V_2^+, V_3^+, V_4^+, V_5^+$ , тор  $T_7^+$  и тор  $T_6^2$ , который образовался в результате бифуркации удвоения тора  $T_6^+$ .

При удалении от кривой 4 происходит разрушение тора  $T_0$  в результате потери гладкости с образованием в его окрестности колебательного хаотического аттрактора  $P_0$  (рис.6б). Расчет максимального ляпуновского характеристического показателя  $\rho_m$  аттрактора  $P_0$  показывает, что при значении  $b$ , соответствующем рис.6б, величина  $\rho_m=0.26$ . К режиму аттрактора  $P_0$  система жестко переходит от периодического асинхронного режима, когда значение параметра  $b$  переходит через  $b=10.03$ .

При дальнейшем увеличении  $b$  в структуре аттрактора  $P_0$  появляются витки фазовых траекторий, соответствующих вращательным движениям. При этом вначале эти витки наблюдаются редко, т.е. система более длительное время проводит на аттракторе  $P_0$ . С возрастанием  $b$  число витков вращательных движений увеличивается, что приводит к возрастанию частоты и длительности стадии вращательных движений в колебаниях на аттракторе  $P_0$ . Результатом этого процесса является формирование в фазовом пространстве хаотического аттрактора  $W^2$  колебательно-вращательного типа (рис.6в). Режим колебаний на аттракторе  $W^2$  представляет собой чередование движений на хаотическом аттракторе  $P_0$  и вращательных движений. На рис.6в четко выделяются характерные для такого типа хаотических аттракторов две области сосредоточения движений с нерегулярными переходами между этими областями.

Возрастание параметра  $b$  приводит к образованию в фазовом пространстве системы (2) хаотических вращательных аттракторов с переключениями между тремя и большим числом областей сосредоточения колебательных движений. На рис.6г-ж приведены примеры хаотических аттракторов такого типа  $W^3, W^4, W^6$  и  $W^9$  с переходами между тремя, четырьмя, шестью и девятью областями колебательных движений. Максимальные ляпуновские характеристические показатели аттракторов  $W^2, W^3, W^4, W^6$  и  $W^9$  при значениях параметра  $b$ , указанных в подписи под рис.6в-ж, имеют значения  $0.23, 0.24, 0.5, 0.78$  и  $1.12$  соответственно.

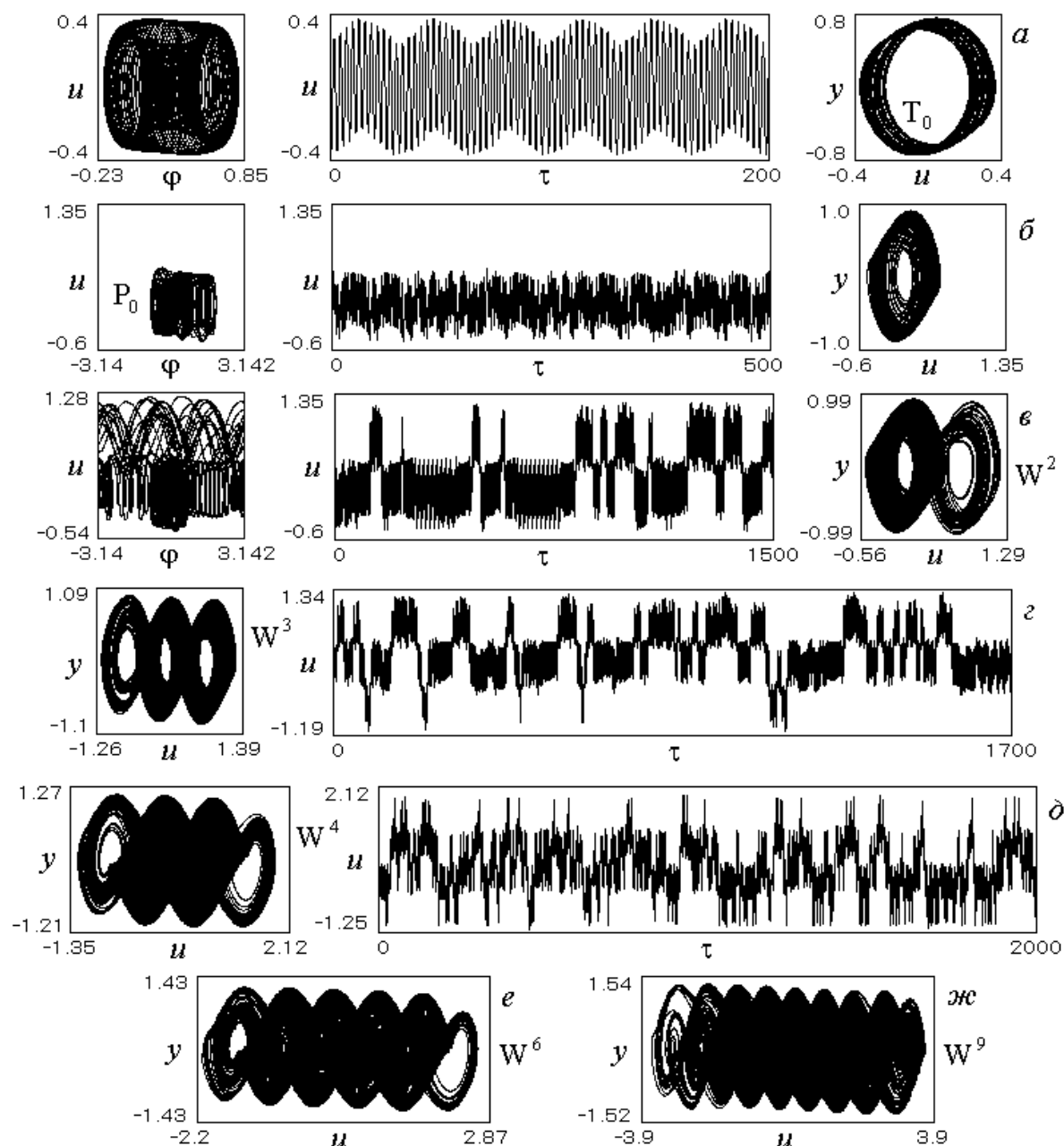


Рис. 6. Квазипериодический и хаотический квазисинхронные режимы и сложные хаотические асинхронные режимы с переключениями при значениях параметров  $\gamma=0.3, \beta=8, \varepsilon=25, \mu=4.8, \mu_1=5, b=7.7$  (а); 10.25 (б); 10.45 (в); 11.03 (г); 15.5 (д); 17.2 (е); 21.3 (ж)

Примечательно, что по виду реализации  $u(\tau)$  и  $(u, y)$ -проекции фазового портрета аттракторы  $W^2, W^3, W^4, W^6$  и  $W^9$  похожи на хаотические многоспиральные аттракторы, наблюдаемые в моделях систем с частотным управлением и систем автофазирования [8,9], а также в других многоустойчивых динамических системах [10,11]. Возникновение подобных колебательных режимов с переключениями движений в рассматриваемой системе ЧФАП оказывается возможным благодаря выясненному в работе существованию множества периодических, квазипериодических и хаотических асинхронных режимов и возможности их взаимодействия. В свою очередь, существование множества асинхронных режимов связано с существованием множества состояний равновесия в отдельной системе с частотным управлением.

Выявленное многообразие динамических режимов в системе ЧФАП с многочастотным дискриминатором и возможность эффективного воздействия на их свойства и области суще-

ствования путем легко реализуемого изменения параметров цепей управления создают предпосылки для расширения области применения системы, в частности для использования сложных режимов при решении актуальных задач формирования шумоподобных колебаний с управляемыми характеристиками, синхронизации хаотических колебаний, передачи информации и др. [1,12].

### Список литературы

1. Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В. Генерация сверхширокополосного хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 7. С. 840-849.
2. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Научные доклады высшей школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2. № 9. С. 162-175.
3. Капранов М.В., Романов Е.В. Линейные модели системы ЧАП с дискриминатором на линии задержки // Радиотехника. 1988. № 11. С. 34-38.
4. Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифуркации в системе частотно-фазовой автоподстройки с многочастотным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 2. С. 186-200.
5. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
6. Пономаренко В.П. Нелинейная динамика мультистабильной системы с частотно-фазовым управлением: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. 72 с.
7. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.М., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
8. Пономаренко В.П., Заулин И.А. Синхронные и автоколебательные режимы в многустойчивых системах с фазовым управлением. // Радиотехника и электроника. 1993г. Т.38. N.4. С.732-741.
9. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т.67. №3. С.1-8.
10. Suykens J.A.K., Vanderwalle J. Generation of  $n$ -double scrolls ( $n=1,2,3,4, \dots$ ) // IEEE Transaction on circuits and systems-1: Fundamental theory and applications. 1993. Vol. 40. No 11. P. 861-867.
11. Lu J., Chen G. Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and application // International journal of bifurcation and chaos. 2006. Vol. 16/ No 4. P. 227-242.
12. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса / Под общ. ред. Дмитриева А.С. М.: Техносфера, 2012. 424 с.

## СТАРШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ЗАДАЧИ О БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ КАК ДВА СЛАБО СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКА.

**В.А. Прошкин**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
механико-математический факультет.  
119234 Москва, Ленинские Горы, 1, e-mail: proshkin@mail.ru

Движение стандартной периодической системы Гамильтона, близкой к интегрируемой, в окрестности двойного резонанса приближенно описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы вполне общего вида. В задаче о быстром вращении тела на орбите такая система оказывается быстро-медленной. Ее адиабатическое приближение описывает колебания кинетического момента вращения тела в окрестности плоскости орбиты. Рассмотрен пример одного класса резонансов.

Ключевые слова: вращение на орбите, возмущенная система Гамильтона, резонансы, быстро-медленная система, адиабатическое приближение.

Вращение твердого тела вокруг центра масс на заданной орбите - одно из классических приближений задачи о движении спутника планеты. Когда гравитационное поле планеты считается центральным, возникает задача о вращении тела на эллиптической кеплеровской орбите. Гамильтониан этой задачи имеет вид [1]

$$H = T + \omega_0^2 V, \quad (1)$$

где  $T$  - кинетическая энергия вращения,  $V$  - потенциальная энергия,  $\omega_0$  - среднее движение центра масс, частота орбитального движения.

Будем считать, что за единицы измерения приняты масса тела, его характерный размер  $\rho$  и нижняя граница модуля угловой скорости вращения тела. Предположим, что

$$\omega_0 = \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

$$\frac{\rho}{r_\pi} \leq \varepsilon^2,$$

что функция  $V$  представлена в виде ряда по сферическим функциям [2]  $V = V_2 + V_3 + \dots$ , где  $|V_2| \leq M$ ,  $|V_3 + \dots| \leq M\varepsilon^2$ , и что  $T \geq T_0$ , причем  $M$  и  $T_0$  - не зависящие от  $\varepsilon$  положительные константы, а  $r_\pi$  - расстояние от центра гравитации до перицентра орбиты. Предположение (2) означает, что угловая скорость вращения тела велика по сравнению с орбитальной частотой. Вместо (1) теперь имеем

$$H = T + \varepsilon^2 V_2 + O(\varepsilon^4).$$

Невозмущенная задача (при  $\varepsilon = 0$ ) - это задача о вращении тела вокруг неподвижного центра масс по инерции. Ее фазовое пространство состоит из областей, расслоенных на двумерные инвариантные торы. В каждой из них существуют переменные действие-угол. Мы воспользуемся их вариантом  $(I, w)$  из [3]. В этих координатах

$$T = T(\bar{I}), \quad \bar{I} = (I_1, I_2); \quad V_k = V_k(I, w, l_0), \quad k = 2, 3, \dots,$$

где  $l_0 = \varepsilon t$  - средняя аномалия центра масс на орбите,  $V_k$  -  $2\pi$  - периодические функции  $(w, l_0)$ .

Известно [4], что существует каноническое преобразование вида

$$\bar{I} \rightarrow \bar{I} + O(\varepsilon^2), \quad I_3 \rightarrow I_3 + O(\varepsilon), \quad w \rightarrow w + O(\varepsilon),$$

не имеющее малых знаменателей, аналитическое в области, где введены переменные  $(I, w)$ , которое переносит зависимость  $V_2$  от  $w_1, w_2, l_0$  в члены порядка  $\varepsilon^3$ :

$$H = T + \varepsilon^2 \bar{V}_2(I, w_3) + \varepsilon^3 H_3(I, w, l_0) + O(\varepsilon^4). \quad (3)$$

Координаты  $(I, w)$  всегда можно выбрать так, чтобы функция  $\bar{V}_2$  зависела только от  $I$ . Для этого достаточно [5] в качестве  $I_3$  взять проекцию вектора  $\bar{L}$  кинетического момента вращения на нормаль к плоскости орбиты, сонаправленную с вектором  $\bar{G}_0$  орбитального кинетического момента, а в качестве  $w_3$  - угол от направления из фокуса в перигецентр орбиты до «восходящего» узла плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной вектору  $\bar{L}$  (рис. 1).

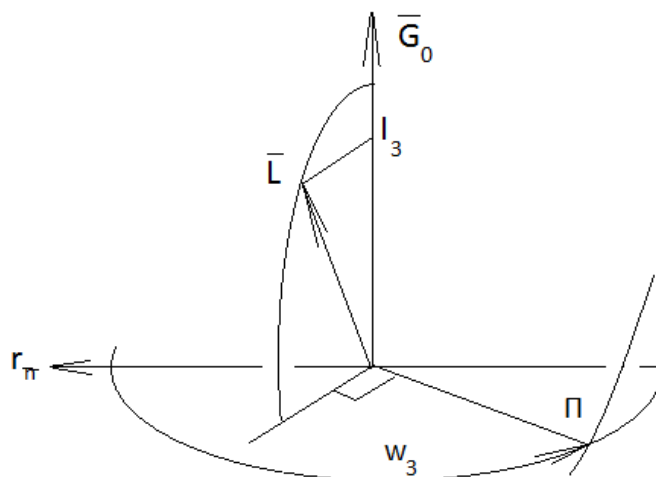


Рисунок 1.

Наконец, превратим систему (3) в автономную, введя вспомогательную пару сопряженных координат  $(L_0, l_0)$ . Получим возмущенную систему Гамильтона с четырьмя степенями свободы и  $2\pi$  - периодическим по  $(w, l_0)$  гамильтонианом

$$H = H_0(I, L_0, \varepsilon) + \varepsilon^3 H_3(I, w, l_0) + O(\varepsilon^4).$$

Его первое слагаемое -  $H_0 = T(\bar{I}) + \varepsilon L_0 + \varepsilon^2 \bar{V}_2(I_3)$  - гамильтониан промежуточной интегрируемой системы, частоты которой имеют различные порядки малости:

$$\omega_0 = \varepsilon, \quad \Omega_1 = \omega_1 + \varepsilon^2 n_1, \quad \Omega_2 = \omega_2 + \varepsilon^2 n_2, \quad \Omega_3 = \varepsilon^2 n_3. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_i = \frac{\partial T}{\partial I_i}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $n_k = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial I_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Исключим из рассмотрения некоторую не

зависящую от  $\varepsilon$  окрестность перманентных вращений вокруг средней оси инерции и движений асимптотически к ним стремящихся в невозмущенной задаче. Тогда в используемых координатах частоты  $\omega_i$  отделены от нуля не зависящей от  $\varepsilon$  константой:

$$|\omega_i| \geq \varpi > 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) и явный вид разложения функции  $H_3$  в тригонометрический ряд Фурье [5] позволяют перечислить все возможные при достаточно малом  $\varepsilon$  резонансы между частотами (4), проявляющиеся в старшем приближении. Эти целочисленные комбинации удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon k_0 + k(\Omega_2 - n\Omega_1) + \varepsilon^2 k_3 n_3 &= 0, \\ k \geq 0, |k| \leq 2, |k_3| \leq 2, n \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Причем, если  $k_0 = 0$ , то и  $k = 0$ .

Окрестности однократных резонансов (6) рассматривались в работах [6], [5]. Нетрудно понять, что при достаточно малом  $\varepsilon$  все независимые двойные резонансы из (6) имеют вид

$$\varepsilon k_0 + k(\Omega_2 - n\Omega_1) = 0, \quad (7)$$

$$n_3 = 0. \quad (8)$$

Движениям промежуточной задачи, для которых выполняются эти соотношения, можно придать механический смысл. Во-первых, равенство (8), кроме одного исключительного случая, который здесь не рассматривается, означает  $I_3 = 0$ . Следовательно, в промежуточной задаче при резонансе (8) вектор кинетического момента неподвижно лежит в плоскости орбиты в произвольном положении – равновесие с любым углом  $w_3 = w_3^0$ . Для осознания равенства (7) воспользуемся геометрической интерпретацией Пуансо движения невозмущенной системы как качения центрального эллипсоида инерции по неподвижной плоскости  $\Pi$  (рис.1). Точки касания располагаются на эллипсоиде на замкнутых кривых – полюдиях. При резонансе  $\omega_2 - n\omega_1 = 0$  между частотами невозмущенной системы каждая фиксированная точка  $P$  такой полюдии, попадая на плоскость  $\Pi$ , оказывается в одной и той же точке  $P'$  этой плоскости – движение периодическое. Если  $\omega_2 - n\omega_1 \sim \varepsilon$ , то при каждом следующем касании точка  $P'$  смещается по некоторой своей окружности на угол

$$\alpha_p = t_1(\omega_2 - n\omega_1) \sim \varepsilon,$$

где  $t_1 = 2\pi / \omega_1$  - время полного прокатывания полюдии [7]. Следовательно,  $\omega_2 - n\omega_1$  - это частота обращения точки  $P'$  по ее окружности. С точностью до  $\varepsilon^2$  именно она вступает в резонанс (7) с частотой орбитального движения (см.(4)).

Стандартные преобразования в окрестности резонансов имеют здесь некоторые особенности, связанные с тем, что частоты промежуточной задачи – функции малого параметра, поэтому кратко их опишем. Линейное преобразование  $(l_0, w, L_0, I) \rightarrow (l'_0, \psi, L'_0, J)$ , вводящее в набор угловых переменных резонансные комбинации исходных углов, можно взять в виде

$$l'_0 = l_0, \quad \psi_1 = w_1, \quad \psi_2 = k_0 l_0 + k(w_2 - nw_1), \quad \psi_3 = w_3;$$

$$L'_0 = L_0 - \frac{k_0}{k} I_2, \quad J_1 = I_1 + nI_2, \quad J_2 = \frac{1}{k} I_2, \quad J_3 = I_3.$$

На многообразии (7, 8) в координатах  $(L_0, I)$  возьмем точку  $(\frac{k_0}{k} I_2^0, I_1^0, I_2^0, 0)$ , которой в новых координатах  $(L'_0, J)$  будет соответствовать точка  $(0, J_1^0, J_2^0, 0)$ . В возмущенной задаче перейдем в окрестность соответствующего тора с изменением масштабов, добавив к этому изменение координаты  $\psi_3$  для сохранения симплектической структуры:  $(l'_0, \psi, L'_0, J) \rightarrow (\lambda_0, x, \Lambda_0, y)$ ,

$$l'_0 = \lambda_0, \quad \psi_{1,2} = x_{1,2}, \quad \psi_3 = \varepsilon x_3; \quad L'_0 = \varepsilon^{3/2} \Lambda_0, \quad J_{1,2} = J_{1,2}^0 + \varepsilon^{3/2} y_{1,2}, \quad J_3 = \sqrt{\varepsilon} y_3.$$

Получим гамильтониан в виде

$$H = \omega_1 y_1 + \varepsilon \Lambda_0 + \varepsilon^{3/2} \left[ \frac{1}{2} b y_1^2 + \frac{1}{2} a (y_2 - c y_1)^2 + \frac{1}{2} d y_3^2 + H_3(I^0, x_1, x_2, \varepsilon x_3, \lambda_0) \right] + O(\varepsilon^2),$$

где  $a, b, c, d$  - константы, зависящие от  $I^0$ .

Осреднение по угловым переменным  $x_1, \lambda_0$  здесь удобно проводить в два шага: сначала по быстрой -  $x_1$ , затем по сравнительно быстрой -  $\lambda_0$ . Итоговое преобразование имеет вид (обозначения для координат не меняются)

$$(\lambda_0, x) \rightarrow (\lambda_0, x),$$

$$\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad y_1 \rightarrow y_1 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad y_2 \rightarrow y_2 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad y_3 \rightarrow y_3 + O(\varepsilon^{3/2})$$

и приводит к гамильтониану

$$H = \omega_1 y_1 + \varepsilon \Lambda_0 + \varepsilon^{3/2} \left[ \frac{1}{2} b y_1^2 + \frac{1}{2} a (y_2 - c y_1)^2 + \frac{1}{2} d y_3^2 + \bar{H}_3(I^0, x_2, \varepsilon x_3) \right] + O(\varepsilon^2).$$

Отбросив  $O(\varepsilon^2)$ , получим систему старшего приближения, в которой в координатах  $(\lambda_0, x_1, \Lambda_0, y_1)$  - движение по инвариантным торах  $(\Lambda_0 = \Lambda_0^0, y_1 = y_1^0)$ , а в координатах  $(x_2, x_3, y_2, y_3)$  движение определяется уравнениями с гамильтонианом

$$R = \varepsilon^{3/2} \left[ \frac{1}{2} a (y_2 - c y_1^0)^2 + \frac{1}{2} d y_3^2 + \bar{H}_3(I^0, x_2, \varepsilon x_3) \right].$$

Заменив здесь независимую переменную  $t \rightarrow \tau = \varepsilon^{3/2} t$ , выполнив сдвиг и избавившись от плавной зависимости от  $x_3$ :

$$\xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = \varepsilon x_3, \quad \eta_2 = y_2 - c y_1^0, \quad \eta_3 = y_3,$$

получим систему с симплектической структурой  $d\eta_2 \wedge d\xi_2 + \frac{1}{\varepsilon} d\eta_3 \wedge d\xi_3$ , гамильтонианом

$$\chi = \frac{1}{2} a \eta_2^2 + \frac{1}{2} d \eta_3^2 + V_0(\xi_2, \xi_3), \tag{9}$$

и соответствующими уравнениями

$$\xi_2' = a \eta_2, \quad \eta_2' = -\frac{\partial V_0}{\partial \xi_2}; \tag{10}$$

$$\xi_3' = \varepsilon d \eta_3, \quad \eta_3' = -\varepsilon \frac{\partial V_0}{\partial \xi_3}, \tag{11}$$

где  $V_0(\xi_2, \xi_3) = \bar{H}_3(I^0, x_2, \xi_3)$  и штрихом обозначена производная по  $\tau$ .

Это типичная быстро-медленная система [8]. Ее можно интерпретировать как систему двух связанных маятников – быстрого (10) и медленного (11). Эта связь слабая в том смысле, что движения в системах (10) и (11) приближенно разделяются. Если на фазовой плоскости системы (10) при любом фиксированном значении  $\xi_3$  есть области, заполненные замкнутыми фазовыми кривыми, то и в полной системе на асимптотически большом интервале времени  $\tau$  движение на плоскости  $(\xi_2, \eta_2)$  можно приближенно представить как движение по «оскулирующим» замкнутым кривым, медленно меняющим форму и положение, но приближенно сохраняющим ограничиваемую ими площадь – адиабатический инвариант. Наоборот, влияние быстрого маятника на движение медленного можно приближенно заменить на влияние в среднем, осреднив правые части (11) вдоль замкнутых кривых системы (10) и получив так называемое адиабатическое приближение.

Для примера рассмотрим один конкретный класс резонансов (7, 8). Если  $k = \pm 1$  и  $n$  нечетное, то независимо от  $k_0$  функция  $V_0$  представляется в виде [5]

$$V_0 = -P(\xi_3) \cos 2(\xi_2 - \alpha(\xi_3)).$$

Пусть  $k_0 = 1$ , т.е. за время одного оборота центра масс по орбите точка  $P'$  делает один оборот по своей окружности на плоскости  $\Pi$ . В качестве тела возьмем пластинку с главными центральными моментами инерции  $\frac{1}{2}B, B, \frac{3}{2}B$ . Для такой пластинки в резонансных движениях с  $n = 1, 3, 5, \dots$  угловая скорость движется вблизи плоскости пластинки, а при  $n = -3, -5, \dots$  - вблизи перпендикуляра к ее плоскости (резонанс с  $n = -1$  невозможен). Оказывается, что почти на всех орбитах  $P(\xi_3) > 0$  при любых значениях  $\xi_3$ . Исключение составляет только эллипс с эксцентриситетом  $e = e_0 \approx 0.366$ . Значит, если  $e \neq e_0$ , то в системе с гамильтонианом

$\chi_0 = \frac{1}{2} a \eta_2^2 + V_0(\xi_2, \xi_3)$  при любом фиксированном значении  $\xi_3$  в окрестности устойчивого



равновесия  $\xi_2 = \alpha(\xi_3)$  можно ввести переменные действие-угол  $(z, \varphi)$ , в которых  $\chi_0 = h_0(z, \xi_3)$ . Соответствующее преобразование всех координат  $(\xi, \eta)$  приводит (9) к виду

$$\chi = \frac{1}{2} d\eta_3^2 + h_0(z, \xi_3) + O(\varepsilon).$$

В качестве адиабатического приближения получается зависящий от параметра  $z = const$  маятник с гамильтонианом

$$\chi^0 = \frac{1}{2} d\eta_3^2 + h_0(z, \xi_3), \quad (12)$$

независимой переменной  $s = \varepsilon\tau = \varepsilon^{5/2}t$ , стандартной симплектической структурой  $d\eta_3 \wedge d\xi_3$ .

Заметим, что в результате всех преобразований оказалось, что  $\xi_3 = w_3$  и  $I_3 = \sqrt{\varepsilon}\eta_3 + O(\varepsilon^2)$ , т.е. система (12) приближенно описывает движение вектора  $\vec{L}$  кинетического момента вращения пластинки в окрестности плоскости орбиты.

Приведем некоторые результаты исследования этой системы. Как отмечалось выше, в промежуточной задаче любое положение вектора  $\vec{L}$  в плоскости орбиты было равновесным. В возмущенной системе наличие резонанса (7) привело к тому, что равновесных положений этого вектора – критических точек  $\pi$ -периодической по  $\xi_3$  функции  $h_0(z, \xi_3)$  – осталось на отрезке  $[0, \pi]$  не более девяти. Они расположены симметрично относительно точки  $\pi/2$ , поэтому в таблице 1 приведена информация только о пяти из них:  $0, \xi_{31}^-, \xi_{31}, \xi_{31}^+, \pi/2$ , в областях на плоскости  $(e, z)$ , изображенных на рисунках 2 и 3. Символ «плюс» означает, что равновесие устойчиво, символ «минус» – неустойчиво, «ноль» – равновесие отсутствует; информация соответствует случаю  $n = 1$ . На рисунке 3 в другом масштабе изображен очень узкий интервал  $(e_3, e_5)$ . Числа  $e_k$  получаются из соответствующих уравнений:  $e_0 \approx 0.366$ ,  $e_1 \approx 0.225$ ,  $e_2 \approx 0.509$ ,  $e_3 \approx 0.68753$ ,  $e_4 \approx 0.68762$ ,  $e_5 \approx 0.68771$ .

	0	$\xi_{31}^-$	$\xi_{31}$	$\xi_{31}^+$	$\pi/2$
1	+	0	0	0	-
2	-	0	0	0	+
3	+	0	-	0	+
4	-	0	+	0	-
5	-	0	+	-	+
6	+	-	+	0	-
7	+	-	+	-	+

Таблица 1.

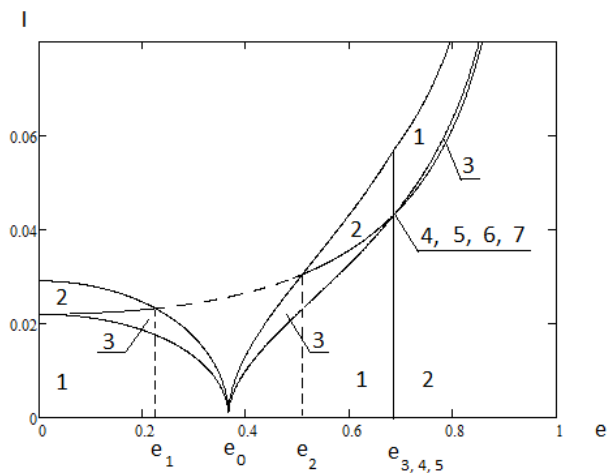


Рисунок 2.

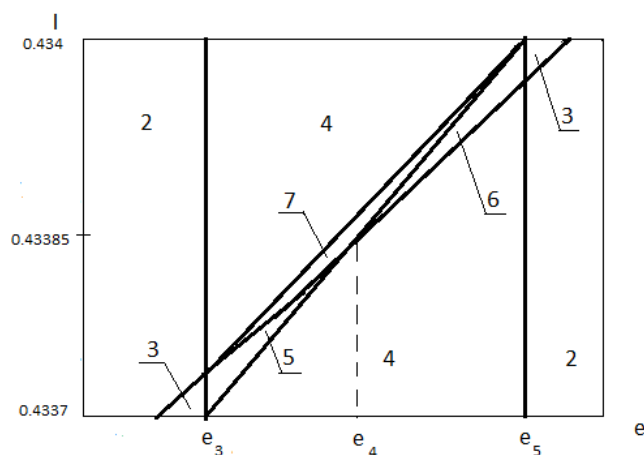


Рисунок 3.

При  $n = \pm 3, \pm 5, \dots$  на рисунках качественно ничего не меняется. В таблице для положительных  $n$  плюсы и минусы меняются местами, для отрицательных – остаются на месте. Интересно, что равновесия, в которых кинетический момент коллинеарен фокальной оси орбиты или ей перпендикулярен ( $\xi_3 = \frac{\pi}{2}$  или  $\xi_3 = 0$  соответственно), существуют во всех областях. Области, где существуют другие равновесия, при  $e \geq e_3$  очень узкие. Из областей, имеющих существенные размеры, такое равновесие  $\xi_{31} \in (0, \frac{\pi}{2})$  есть только в области 3, при  $n = 3, 5, \dots$  только оно в этой области устойчиво.

### Список литературы

1. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Наука, 1975.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
3. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера–Пуансо// Прикладная математика и механика. 1970. Т.34. Вып.5. С.962-964.
4. Прошкин В.А. Приведение задачи о быстром вращении несимметричного тела на возмущенной орбите ИСЗ// Космические исследования. 1996. Т.34. №6. С. 633-636.
5. Прошкин В.А., Филиппова О.А. Трехчастотные резонансы в задаче о быстром вращении несимметричного тела на эллиптической орбите// Космические исследования. 2013. Т.51. №3. С.214-223.
6. Филиппова О.А. О существовании зоны «негравитационного» движения спутника на медленно эволюционирующей орбите// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2004. №3. С.65-67.
7. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Издательство Моск. ун-та. 1980.
8. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Springer. 2006.

## О ВЛИЯНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛАХ

С.Г. Пшеничнов

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В.Ломоносова  
119899 Москва, Мичуринский пр., д.1, e-mail: [serp56@yandex.ru](mailto:serp56@yandex.ru)

Рассматриваются нестационарные динамические задачи для неоднородных упругих и линейно-вязкоупругих тел, параметры материала которых непрерывно зависят от координат. Применяется подход, состоящий в замене исходного неоднородного тела соответствующим кусочно-однородным с большим количеством однородных составляющих. Приведены результаты исследований одномерных переходных волновых процессов в непрерывно неоднородном вязкоупругом теле и двумерных волновых процессов в неоднородном упругом теле.

*Ключевые слова:* упругие и вязкоупругие волны, неоднородное упругое и вязкоупругое тело.

Изучение процессов распространения нестационарных волн в телах, физико-механические параметры материала которых являются непрерывными функциями координат, проводилось в ряде работ (например, [1 – 6]) в рамках линейной упругости при частных видах неоднородностей. В то же время, для тел с гладкими границами вполне естественно применить методику, состоящую в замене исходного непрерывно неоднородного тела соответствующим кусочно-однородным с большим количеством однородных составляющих так, чтобы имела место аппроксимация функций, характеризующих непрерывно изменяющиеся свойства материала заданного тела. В работах [7 – 9] указано на возможность использовать такой способ в нестационарных динамических задачах теории упругости, при этом были проведены соответствующие исследования как одномерных [9], [10], так и двумерных [11] волновых процессов. В данной работе указанная методика применена для исследования переходных волновых процессов не только в упругих, но и в линейно-вязкоупругих телах, параметры материала которых непрерывно зависят от координат, с использованием известных решений динамических задач теории упругости и линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел.

**Общая постановка задачи.** Пусть линейно-вязкоупругое неоднородное тело занимает область  $\Omega$  с гладкой границей  $\Sigma$ . Математическая постановка нестационарной динамической задачи для такого тела включает в себя уравнения

$$\text{Div } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

определяющие соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = 2\hat{\mu} \text{def } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \hat{\lambda} \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (2)$$

обобщенные граничные условия

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad t > 0 \quad (3)$$

и начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  – тензор напряжений;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{b}^{(1)}$ ,  $\mathbf{b}^{(2)}$  – векторы перемещений, граничных воздействий, объемных сил, начальных перемещений и скоростей;  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль;  $\text{def}$  – оператор, с помощью которого тензор малых деформаций  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  выражается через  $\mathbf{u}$  (т.е.  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \text{def } \mathbf{u}$ );  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  – тензоры второго ранга, определяющие тип граничных условий;  $\tilde{\mathbf{I}}$  – единичный тензор;  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  – операторы вида

$$\hat{\lambda} = K_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_v) - \frac{2}{3}G_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_s), \quad \hat{\mu} = G_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_s), \quad \hat{T}_m \xi(t) = \int_0^t T_m(\mathbf{x}, t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad m = v, s$$

Здесь  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $G_0(\mathbf{x})$ ,  $K_0(\mathbf{x})$ ,  $T_v(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_s(\mathbf{x}, t)$  – плотность, мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия, а также ядра объемной и сдвиговой релаксации. Все они – гладкие функции  $\mathbf{x}$ . Область распространения возмущений будем считать ограниченной.

Заменим рассматриваемое непрерывно неоднородное тело на соответствующее кусочно-однородное с большим количеством однородных составляющих, на границах контакта между которыми выполнены условия непрерывности вектора перемещений и вектора напряжений. При этом константы, задающие плотности, а также мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия однородных составляющих, аппроксимируют  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $G_0(\mathbf{x})$ ,  $K_0(\mathbf{x})$ , а функции времени, соответствующие ядрам релаксации этих составляющих, аппроксимируют  $T_v(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_s(\mathbf{x}, t)$ . Заметим, что если свойства материала исходного тела описываются кусочно-гладкими функциями координат, то при их аппроксимации это можно учесть, расположив соответствующим образом границы раздела однородных составляющих. Рассматриваемый способ исследования задачи (1) – (4) позволяет использовать известные решения нестационарных динамических задач теории линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел, однако его правомерность даже при гладкости границы  $\Sigma$  и непрерывности внешних нагрузок не вполне очевидна. Строгое математическое обоснование такого подхода даже для одномерных волновых процессов весьма сложно, поэтому здесь ограничимся его проверкой лишь путем соответствующих вычислений для конкретных примеров.

**Линейно-вязкоупругий цилиндр.** Рассмотрим нестационарную динамическую задачу для бесконечно длинного линейно-вязкоупругого полого кругового цилиндра  $R_0 < R < R_{\max}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$  ( $R, \theta$  – полярные координаты в плоскости поперечного сечения). Будем считать, что мгновенные модуль сдвига  $G_0$  и коэффициент Пуассона  $\nu_0$ , а также плотность  $\rho$  непрерывно зависят только от  $R$ , а наследственные ядра являются функциями только  $R$  и  $t$ :  $T_v(R, t)$ ,  $T_s(R, t)$ . В момент  $t = 0$  на внутреннюю поверхность  $R = R_0$  изначально покоившегося недеформированного цилиндра действует равномерно распределенная радиальная нагрузка  $Q(t)$ , при этом граница  $R = R_{\max}$  свободна (рис. 1, слева).

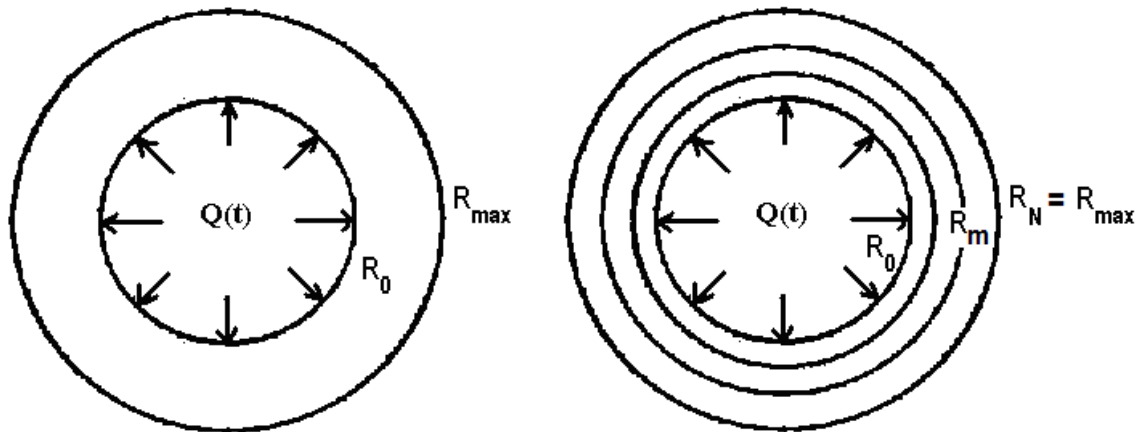


Рис. 1

Введем безразмерные величины:  $r = R/R_{\max}$ ,  $r_0 = R_0/R_{\max}$ ,  $\tau = t/t_0$ ,

$$\sigma_r(r, \tau) = P_R(R, t)/2G_0(r), \quad \sigma_\theta(r, \tau) = P_\theta(R, t)/2G_0(r), \quad u(r, \tau) = U(R, t)/R_{\max},$$

$$q_0 f(\tau) = Q(t)/2G_0(r_0) \quad \gamma_s(r, \tau) = t_0 T_s(R, t), \quad \gamma_v(r, \tau) = t_0 T_v(R, t),$$

где  $U(R,t)$  – перемещение,  $P_R(R,t)$ ,  $P_\theta(R,t)$  – радиальное и кольцевое напряжения,  $t_0 = R_{\max}/c(1)$ ,  $c(r) = \sqrt{2w(r)G_0(r)/\rho(r)}$  – скорость продольных упругих волн,  $q_0$  – безразмерная константа,  $w(r) = [1 - \nu_0(r)]/[1 - 2\nu_0(r)]$ . Будем предполагать, что  $\gamma_s, \gamma_v$  удовлетворяют условию ограниченной ползучести.

Математическую формулировку задачи для отыскания величин  $\sigma_r(r, \tau)$ ,  $\sigma_\theta(r, \tau)$ ,  $u(r, \tau)$  здесь опустим, заметив, что в качестве исходных данных она содержит безразмерные функции  $\nu_0(r)$ ,  $\rho(r)/\rho(r_0)$ ,  $G_0(r)/G_0(r_0)$ ,  $\gamma_s(r, \tau)$ ,  $\gamma_v(r, \tau)$ ,  $q_0 f(\tau)$  и константу  $r_0$ . Заменяем эту задачу аналогичной для цилиндра с теми же радиусами  $R_0$  и  $R_{\max}$ , но состоящего из большого количества ( $N \gg 1$ ) однородных коаксиальных слоев (рис. 1 справа), на границах контакта между которыми  $R = R_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ) векторы перемещений и напряжений непрерывны. Обозначим  $G_0^{(n)}$ ,  $\nu_0^{(n)}$ ,  $\rho_n$ ,  $c_n$ ,  $T_s^{(n)}(t)$ ,  $T_v^{(n)}(t)$  – мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, а также плотность, скорость продольных упругих волн и наследственные ядра в  $n$ -м слое, ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ),  $R_N = R_{\max}$ . За характерное время здесь возьмем  $t_* = R_N/c_N$  и введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \tau = t/t_*, \quad \gamma_s^{(n)}(\tau) = t_* T_s^{(n)}(t), \quad \gamma_v^{(n)}(\tau) = t_* T_v^{(n)}(t), \quad r = R/R_N, \quad r_0 = R_0/R_N, \quad r_N = 1, \\ r_m = R_m/R_N \quad (m = 1, 2, \dots, N-1), \quad q_0 f(\tau) = Q(t)/2G_0^{(1)} \quad (q_0 - \text{безразмерная константа}), \\ a_n = c_N/c_n, \quad w_n = (1 - \nu_0^{(n)})/(1 - 2\nu_0^{(n)}), \quad u^{(n)}(r, \tau) = U^{(n)}(R, t)/R_N, \end{aligned}$$

$$\sigma_r^{(n)}(r, \tau) = P_R^{(n)}(R, t)/2G_0^{(n)}, \quad \sigma_\theta^{(n)}(r, \tau) = P_\theta^{(n)}(R, t)/2G_0^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

где  $U^{(n)}$  – перемещение,  $P_R^{(n)}$ ,  $P_\theta^{(n)}$  – соответствующие напряжения в  $n$ -м слое.

Функции  $G_0(r)$ ,  $\nu_0(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\gamma_v(r, \tau)$ ,  $\gamma_s(r, \tau)$ , соответствующие материалу исходного цилиндра, аппроксимируем с помощью соотношений:

$$G_n = G(r_n), \quad \rho_n = \rho(r_n), \quad \nu_n = \nu(r_n), \quad \gamma_s^{(n)}(\tau) = \gamma_s(r_n, \tau), \quad \gamma_v^{(n)}(\tau) = \gamma_v(r_n, \tau) \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Из соотношения  $c_n = c(r_n)$  следует равенство характерных времен:  $t_* = t_0$ . Толщины слоев можно выбирать с учетом вида функций  $G_0(r)$ ,  $\nu_0(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\gamma_v(r, \tau)$ ,  $\gamma_s(r, \tau)$ , но в данной работе эти толщины брались одинаковыми.

Постановку задачи для многослойного цилиндра составляют уравнения динамики

$$(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r} + \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r} \right] - a_n^2 \frac{\partial^2 u^{(n)}(r, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

граничные условия

$$\sigma_r^{(1)}(r_0, \tau) = -q_0 f(\tau), \quad \sigma_r^{(N)}(1, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad (6)$$

условия на контакте слоев ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ):

$$u^{(m)}(r_m, \tau) = u^{(m+1)}(r_m, \tau), \quad G_0^{(m)} \sigma_r^{(m)}(r_m, \tau) = G_0^{(m+1)} \sigma_r^{(m+1)}(r_m, \tau) \quad (7)$$

и начальные условия

$$u^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \tau}(r, 0) = 0, \quad (8)$$

при этом

$$\sigma_r^{(n)}(r, \tau) = w_n(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r} + (w_n - 1)(1 - \hat{d}_2^{(n)}) \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r}, \quad (9)$$

$$\sigma_\theta^{(n)}(r, \tau) = w_n(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r} + (w_n - 1)(1 - \hat{d}_2^{(n)}) \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r},$$

где операторы  $\hat{d}_1^{(n)}$ ,  $\hat{d}_2^{(n)}$  и соответствующие им функции  $d_1^{(n)}$ ,  $d_2^{(n)}$  имеют вид

$$\hat{d}_j^{(n)} \xi(\tau) = \int_0^\tau d_j^{(n)}(\tau - \chi) \xi(\chi) d\chi, \quad j = 1, 2,$$

$$d_1^{(n)}(\tau) = \frac{1}{3(1 - \nu_0^{(n)})} [(1 + \nu_0^{(n)}) \gamma_v^{(n)}(\tau) + 2(1 - 2\nu_0^{(n)}) \gamma_s^{(n)}(\tau)],$$

$$d_2^{(n)}(\tau) = \frac{1}{3\nu_0^{(n)}} [(1 + \nu_0^{(n)}) \gamma_v^{(n)}(\tau) - (1 - 2\nu_0^{(n)}) \gamma_s^{(n)}(\tau)], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Представленные ниже результаты получены путем численной реализации аналитического решения задачи (5)–(9), построенного с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени с последующим обращением трансформант. При наследственных ядрах в виде конечной суммы экспонент решение в оригиналах представляется рядами [12]; при ядрах более общего вида оно записывается в интегральной форме [13].

**Результаты расчетов для цилиндра.** Правомерность изложенной методики проверялась на данной задаче при разных видах непрерывной зависимости свойств материала от радиуса и различных непрерывных функциях внешней нагрузки  $f(\tau)$  с условием  $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = 0$ . Здесь представ-

лены результаты для случая воздействия одиночного треугольного импульса

$$f(\tau) = \begin{cases} 2\tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0.5 \\ 2 - 2\tau & \text{при } 0.5 < \tau < 1 \\ 0 & \text{при } \tau < 0 \text{ или } \tau \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

на цилиндр со следующими исходными данными:

$$r_0 = 0.5; \nu_0 \equiv 0.3; \rho(r)/\rho(r_0) \equiv 1; G_0(r)/G_0(r_0) = e^{3(r_0-r)}; \gamma_s(\tau) = re^{-1.5\tau}; \gamma_v(\tau) \equiv 0, \quad (11)$$

т.е. когда от радиуса зависят только мгновенный модуль сдвига и ядро  $\gamma_s$ . Заметим, что при  $t = 0.5t_0$  внешняя нагрузка  $Q(t)$  достигает своего максимума  $2G_0(r_0)q_0$ .

Графики на рис. 2 иллюстрируют изменение со временем концентрации радиального напряжения  $k_r(r, \tau) = G_0(r)\sigma_r/[G_0(r_0)q_0] = P_R/[2G_0(r_0)q_0]$  в точке  $r = 0.7$  при различном количестве аппроксимирующих слоев ( $N = 10, 20, 40$ ) в задаче (5) – (9). Для каждого  $N$  соответствующие толщины слоев брались одинаковыми. С дальнейшим ростом  $N$  графики практически не меняются; то же наблюдается и для концентрации кольцевого напряжения  $k_\theta(r, \tau) = G_0(r)\sigma_\theta/[G_0(r_0)q_0] = P_\theta/[2G_0(r_0)q_0]$ , и для перемещения  $u(r, \tau)$ . Отрицательные напряжения являются сжимающими.

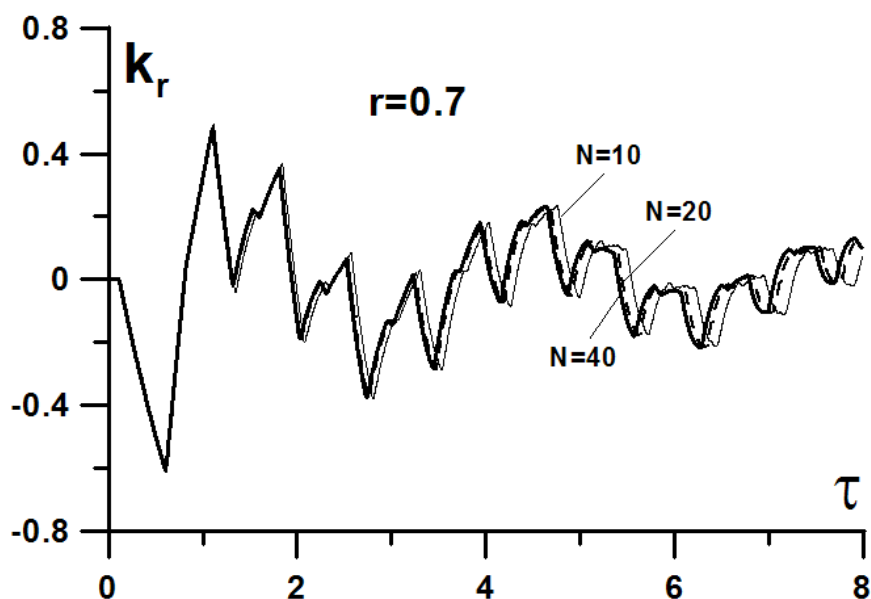


Рис. 2

Сходимость результатов с увеличением числа слоев наблюдалась и при других геометрических и физико-механических параметрах задачи.

Представим результаты, соответствующие волновым процессам в цилиндре с исходными данными (11) и в однородном цилиндре со следующими исходными данными:

$$r_0 = 0.5, \nu_0 \equiv 0.3, \rho(r)/\rho(r_0) \equiv 1, G_0(r)/G_0(r_0) \equiv 1, \gamma_s(\tau) = 0.5e^{-1.5\tau}, \gamma_v(\tau) \equiv 0 \quad (12)$$

Для случая, когда функция нагрузки имеет вид (10), зависимость концентраций радиальных и кольцевых напряжений  $k_r$  и  $k_\theta$  от  $\tau$  при фиксированных значениях  $r$  представлена на рис. 3 – 5. Жирные линии 1 относятся к неоднородному цилиндру, тонкие линии 2 – к однородному.

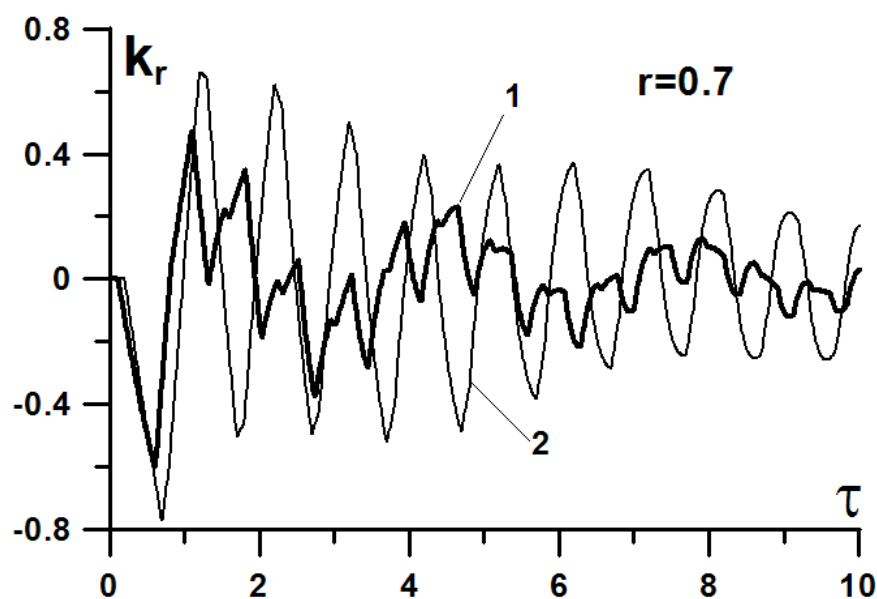


Рис. 3

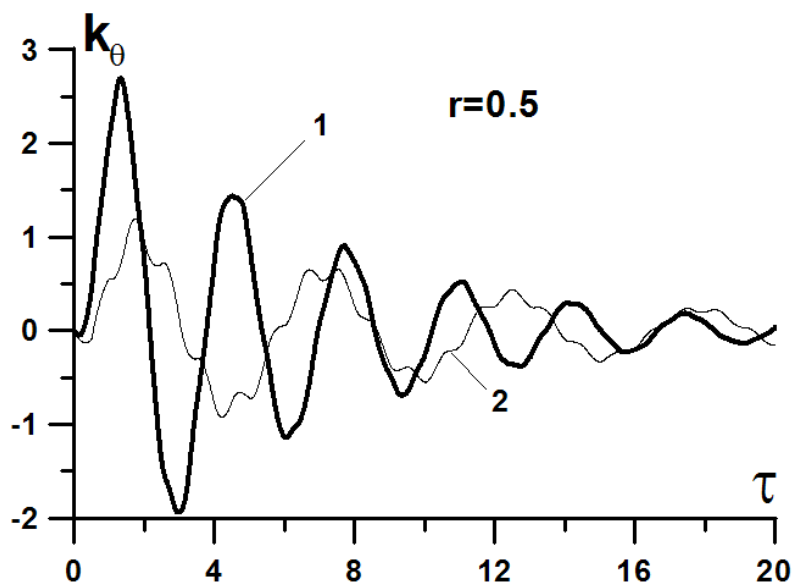


Рис. 4

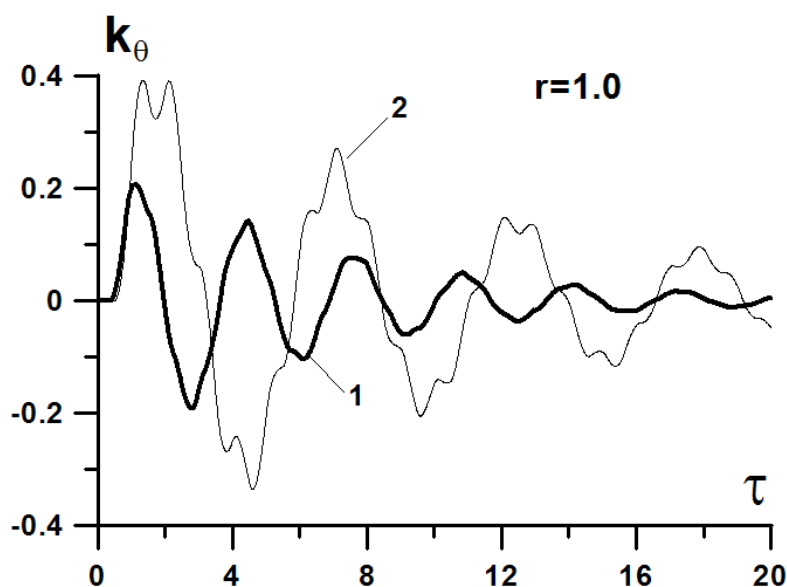


Рис. 5

По сравнению с однородным материалом рассмотренная неоднородность (11) повышает максимальную концентрацию кольцевых напряжений на границе полости  $r = 0.5$  и снижает ее на свободной внешней границе  $r = 1$ . Заметим, что при сопоставлении процессов в однородном и неоднородном цилиндрах следует помнить, что характерные времена  $t_0 = R_{\max}/c(1)$  у них разные, и для данного примера  $t_0^{(однор)} \approx 0.48t_0^{(неоднор)}$ .

**Упругая арка.** Рассмотрим динамику цилиндрической арки, представляющей собой половинку бесконечно длинного упругого изотропного полого цилиндра:  $R_0 \leq R \leq R_{\max}$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , (как и прежде  $R, \theta$  – полярные координаты в плоскости поперечного сечения), когда модуль сдвига  $G$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и плотность  $\rho$  являются непрерывными функциями только  $R$ . Конструкция изначально не деформирована и покоится, а в момент  $t=0$  к ее внешней поверхности приложена нормальная нагрузка вида  $f_R(\theta, t) = P(t)\Theta(\theta)$ , постоянная вдоль образующей; граница  $R = R_0$  свободна (рис 6 слева). Будем считать, что на поверхностях  $\theta = \pm\pi/2$  выполняются условия свободного проскальзывания и равенство нулю нормального перемещения. Считая деформации малыми, исследу-



ем эту задачу, заменив ее аналогичной для арки с теми же радиусами  $R_0$  и  $R_{\max}$ , но состоящей из большого количества ( $N \gg 1$ ) однородных коаксиальных слоев (рис. 6 справа), на границах контакта между которыми  $R = R_m$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ) векторы перемещений и напряжений непрерывны. Толщины слоев возьмем одинаковыми.

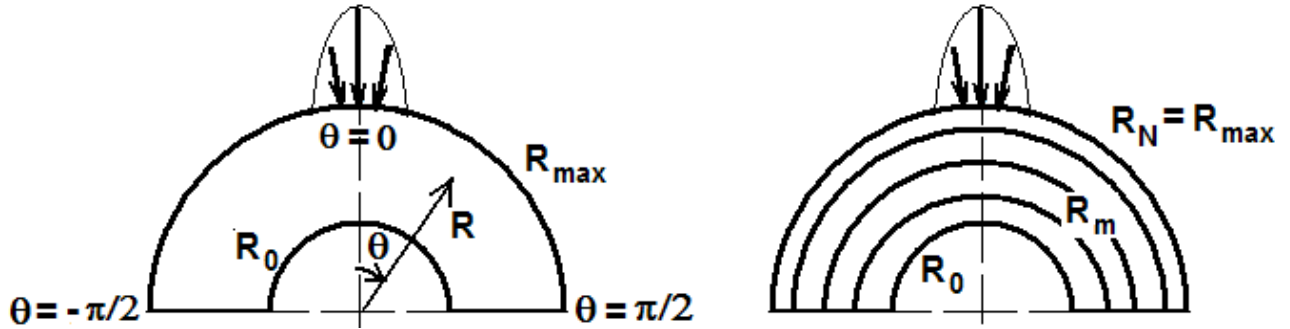


Рис. 6

Обозначим  $G_n$ ,  $\nu_n$ ,  $\rho_n$ ,  $c_{1n}$ ,  $c_{2n}$  – модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность и скорости продольных и поперечных упругих волн в  $n$ -м слое ( $n = 1, 2, \dots, N$ ),  $R_N = R_{\max}$ . Как и ранее, введем безразмерные величины:  $r = R/R_N$ ,  $r_m = R_m/R_N$  ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ),  $\tau = t/t_0$ ,  $u_i^{(n)}(r, \theta, \tau) = U_i^{(n)}(R, \theta, t)/R_N$ ,  $\sigma_{ij}^{(n)}(r, \theta, \tau) = P_{ij}^{(n)}(R, \theta, t)/(2G_n)$ ,  $i, j = r, \theta$ ,

где  $U_i^{(n)}$ ,  $P_{ij}^{(n)}$  ( $i, j = r, \theta$ ) – размерные перемещения и напряжения;  $t_0 = R_N/c_{1N}$ ;

$p_0 f(\tau) = P(t)/(2G_N)$ , константа  $p_0$ , а также функция  $\Theta(\theta)$  безразмерные.

Характеристики материала исходного тела  $G(r)$ ,  $\nu(r)$ ,  $\rho(r)$  аппроксимируем, как и в предыдущей задаче, равенствами:  $G_n = G(r_n)$ ,  $\nu_n = \nu(r_n)$ ,  $\rho_n = \rho(r_n)$ , причем  $r_N = 1$ .

Выразив перемещения через потенциалы

$$u_r^{(n)}(r, \theta, \tau) = \frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2^{(n)}}{\partial \theta}, \quad u_\theta^{(n)}(r, \theta, \tau) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2^{(n)}}{\partial r}, \quad (13)$$

запишем для слоистого цилиндра уравнения динамики

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \varphi_k^{(n)} - \alpha_{kn}^2 \frac{\partial^2 \varphi_k^{(n)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \alpha_{kn} = c_{1N}/c_{kn}, \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

граничные условия

$$\sigma_{rr}^{(N)}(1, \theta, \tau) = -p_0 f(\tau) \Theta(\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(N)}(1, \theta, \tau) = 0, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r_0, \theta, \tau) = \sigma_{r\theta}^{(1)}(r_0, \theta, \tau) = 0, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (15)$$

$$u_\theta^{(n)}(r, \pm \pi/2, \tau) = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(n)}(r, \pm \pi/2, \tau) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

условия непрерывности на контакте слоев  $r = r_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $j = r, \theta$ )

$$u_j^{(m)}(r_m, \theta, \tau) = u_j^{(m+1)}(r_m, \theta, \tau); \quad G_m \sigma_{rj}^{(m)}(r_m, \theta, \tau) = G_{m+1} \sigma_{rj}^{(m+1)}(r_m, \theta, \tau) \quad (16)$$

и однородные начальные условия

$$\varphi_k^{(n)}(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \tau}(r, \theta, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (17)$$

при этом

$$\sigma_{rr}^{(n)} = w_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{(w_n - 1)}{r} (u_r^{(n)} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta}), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{w_n}{r} (u_r^{(n)} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta}) + (w_n - 1) \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(n)}}{r} \right), \quad w_n = (1 - \nu_n) / (1 - 2\nu_n) \quad (18)$$

**Результаты расчетов для арки.** Задача (13) – (18) из-за граничных условий при  $\theta = \pm\pi/2$  фактически является задачей для соответствующего «целого» цилиндра ( $-\pi < \theta \leq \pi$ ), на который действует нагрузка указанного вида, симметричная относительно оси  $\theta = \pm\pi/2$  в его поперечном сечении. Аналитическое решение такой задачи известно [14], и с его помощью в данной работе изучен характер  $u_i^{(n)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(n)}$  как функций  $\tau$  при фиксированных  $r$  и  $\theta$  в зависимости от числа слоев  $N$  при разных исходных данных с непрерывными  $\Theta(\theta)$  и  $f(\tau)$ . Установлено, что с ростом  $N$ , начиная с  $N \approx 30 \div 50$ , эти функции практически не меняются.

На рис. 7 – 10 представлены результаты, относящиеся к непрерывно неоднородной арке (сплошные кривые 1) и к однородной арке (пунктирные кривые 2). Там изображены графики зависимости от  $\tau$  концентрации кольцевых напряжений:

$$k_\theta = G(r)\sigma_{\theta\theta} / (G(1)p_0) = P_{\theta\theta} / (2G(1)p_0) \quad \text{при } r = 1, \quad r = r_0 \text{ и } \theta = 0, \quad \theta = \pi/2.$$

Нагрузка имеет вид «сглаженной ступеньки» по времени и определяется функциями:  $\Theta(\theta) = (1 + \cos 16\theta) / 2$  при  $\theta \in [-\pi/16; \pi/16]$  и  $\Theta(\theta) \equiv 0$  вне этого отрезка (схема на рис. 1);

$$f(\tau) = 1 - e^{-100\tau} \quad (\tau \geq 0),$$

причем  $2G(1)p_0$  – это предел максимума внешней нагрузки ( $\theta = 0$ ) при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Кривые 1 соответствуют следующим исходным данным ( $\nu$ ,  $\rho$  – константы):

$$r_0 = 0.5, \quad \nu(r) \equiv 0.3, \quad \rho(r) / \rho(1) \equiv 1, \quad G(r) / G(1) = e^{3(r-1)}, \quad \text{при этом взято } N = 50.$$

Для вычисления  $k_\theta(r, \theta, \tau)$  этих данных достаточно, а значения  $\rho(1)$  и  $G(1)$  не важны. Кривые 2 соответствуют результатам при той же нагрузке с исходными данными:  $r_0 = 0.5$ ,  $\nu \equiv 0.3$ ,  $\rho(r) / \rho(1) \equiv 1$ ,  $G(r) / G(1) \equiv 1$ . Отрицательные напряжения сжимающие.

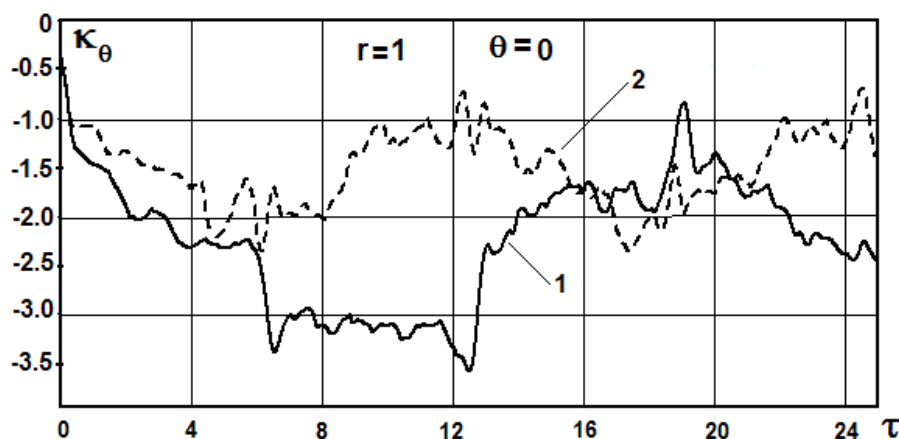


Рис. 7

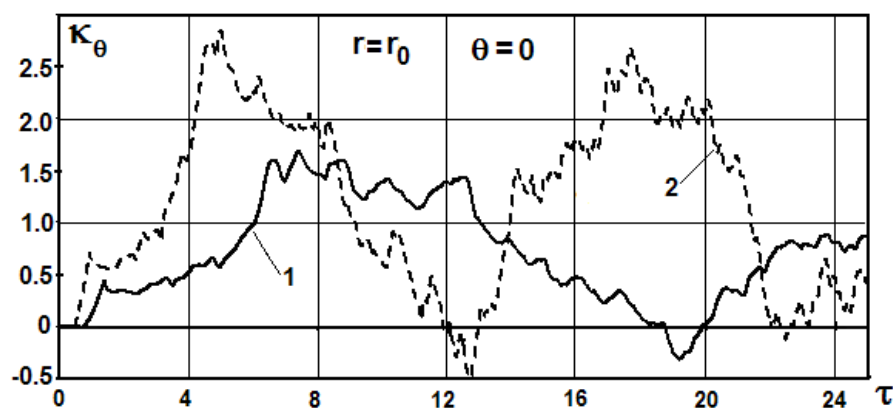


Рис. 8

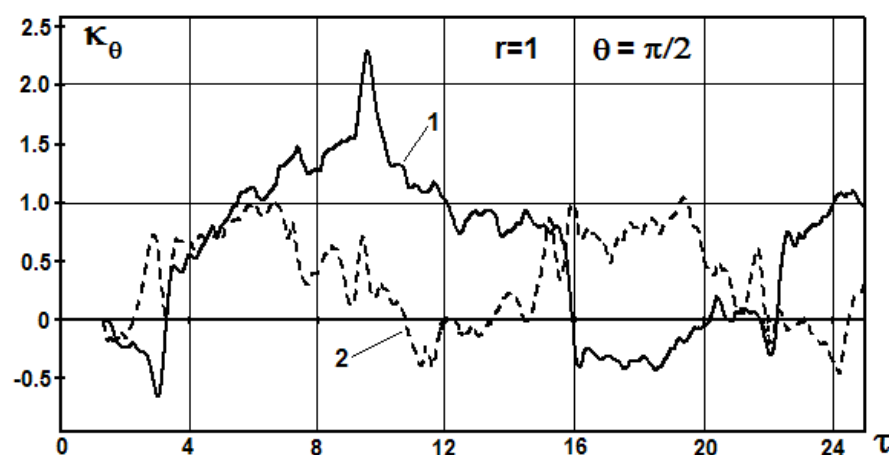


Рис. 9

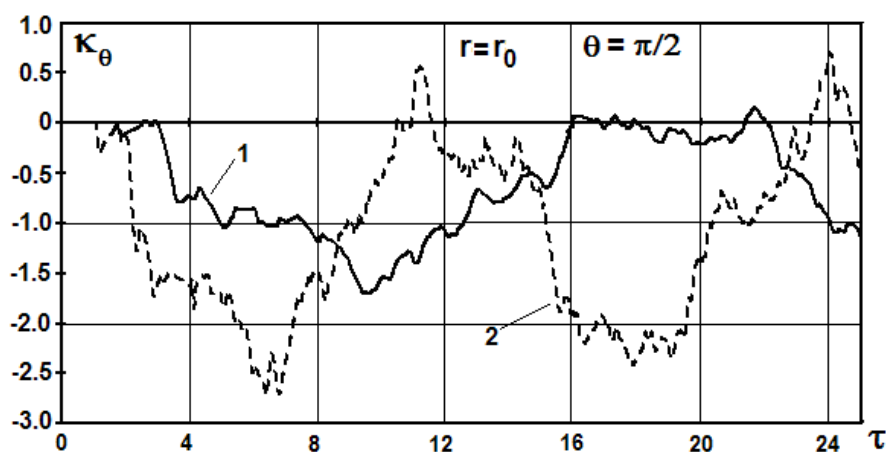


Рис. 10

Видно, что неоднородность указанного типа приводит к увеличению максимума модуля  $k_\theta$  на внешней границе и к уменьшению его на свободной внутренней границе.

В заключение подчеркнем, что представленные здесь результаты иллюстрируют возможность использования в задачах о распространении нестационарных волн в непрерывно неоднородных упругих и линейно-вязкоупругих телах решений соответствующих динамических задач для кусочно-однородных тел с условием, что количество однородных составляющих при этом достаточно велико.

Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (15-08-00787-а, 16-08-00260-а)

## **Список литературы**

1. Sasadhar D. Dynamic vibrations and stresses in a circular annulus of non-isotropic elastic material // Pure and Appl. Geophys. 1972. Т. 14. № 5. С. 9 – 15.
2. Сеницкий Ю.Э. Расчет неоднородных анизотропных цилиндра и сферы при действии произвольной радиально-симметричной динамической нагрузки // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 5. С. 9 – 15.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка. 1978. 303 с.
4. Беркович В.Н. Некоторые математические вопросы смешанных задач динамики неоднородной клиновидной среды // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2005. № 4. С. 15 – 18.
5. Медведский А.Л. Задача о дифракции нестационарных упругих волн на неоднородной трансверсально изотропной сфере // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 3. С. 473 – 489.
6. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Analytical thermo-elastodynamic solutions for a non-homogeneous transversely isotropic hollow sphere // Archive of Applied Mechanics. 2002. Vol. 72. P. 545 – 553.
7. Филиппов И.Г., Бахрамов Б.М. Волны в упругих однородных и неоднородных средах. Ташкент: Фан. 1978. 215 с.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Неустановившиеся радиальные колебания упругого кусочно-однородного пространства со сферической симметрией // Изв АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 96 – 101.
9. Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г. Осесимметричная задача динамики длинного упругого неоднородного цилиндра // Строит. механика и расчет сооружений. 1989. № 4. С. 35 – 37.
10. Пшеничнов С.Г. Об исследовании волновых процессов в непрерывно неоднородных упругих телах // Вестник Тульского Гос. Ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. Тула: ТулГУ. 2010. Т.16. Вып. 2. С. 116 – 126.
11. Пшеничнов С.Г. Влияние непрерывной неоднородности материала на волновые процессы в упругих цилиндрических телах // В кн.: Упругость и неупругость. М.: Изд. МГУ. 2011. С. 442 – 445.
12. Пшеничнов С.Г. Аналитическое решение одномерных задач динамики кусочно-однородных вязкоупругих тел // Известия АН СССР. МТТ. 1991. №1. С. 95-103
13. Пшеничнов С.Г. Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел // Известия РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 79 – 89.
14. Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г. Распространение упругих волн в слоистом цилиндре // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 2. С. 1074 – 1078.

УДК 539.3:534.1

## ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА ПРИ НЕКОНСЕРВАТИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

Радин В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н., Новикова О.В.

Национальный исследовательский университет Московский энергетический институт)

В работе рассмотрено критическое поведение, т.е. поведения системы после потери устойчивости некоторого положения равновесия на ставшей классической системе Циглера, представляющей собой двухзвенный маятник. Проиллюстрирован характер движения в различных точках области флаттера. область флаттера (область динамической неустойчивости) рассматриваемой неконсервативной системы разбивается на ряд подобластей, соответствующих устойчивым предельным циклам, неустойчивым предельным циклам и хаотическим движениям, называемым иногда детерминированным хаосом.

*Ключевые слова:* критическое поведение, потеря устойчивости, флаттер, предельные циклы, хаотическое движение.

### 1. Уравнения движения

Кроме определения критических значений параметров нагружения при исследовании устойчивости нелинейных неконсервативных систем определенный интерес представляет изучение критического поведения, т.е. поведения системы после потери устойчивости некоторого положения равновесия [2, 3, 5]. Рассмотрим этот вопрос на ставшей классической системе Циглера, представляющей собой двухзвенный маятник (рис. 1). Именно на этой схеме был обнаружен так называемый парадокс Циглера [1] - снижение критического значения следящей силы при введении в систему трения, неравномерно распределенного между степенями свободы.

Рассмотрим устойчивость двухзвенного маятника, находящегося под действием потенциальной («мертвой») силы  $Q$  и следящей силы  $P$ , которая при любых отклонениях маятника направлена вдоль оси второго звена (рис. 1). За обобщенные координаты примем углы отклонения звеньев маятника от вертикального положения  $\varphi_1, \varphi_2$ . Значения  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  соответствуют положению равновесия, при котором упругие элементы жесткостью  $c_1$  и  $c_2$  в соединениях звеньев между собой и с основанием не нагружены.

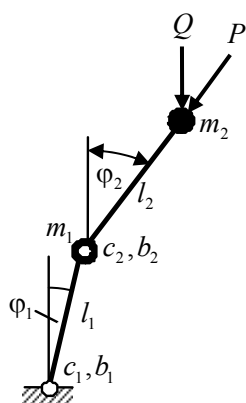


Рис. 1

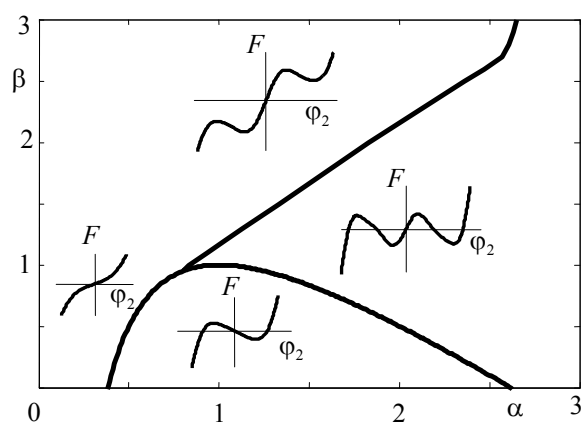


Рис. 2

Составим выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии и виртуальной работы внешней нагрузки. Рассеяние энергии учтем введением диссипативной функции

Релея с коэффициентами  $b_1$  и  $b_2$ . Используя уравнения Лагранжа второго рода получим уравнения движения системы, которые являются по существу уравнениями динамического метода исследования устойчивости тривиального положения равновесия. Матричную форму этих уравнений относительно вектора угловых перемещений  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$  можно записать в виде

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} - \alpha\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi}) + \beta\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (1)$$

где обозначено

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь принято  $m_1 = m_2 \equiv m$ ,  $c_1 = c_2 \equiv c$ ,  $l_1 = l_2 \equiv l$  и введены следующие безразмерные параметры

$$\varepsilon_1 = \frac{b_1 \omega_0}{c}, \quad \varepsilon_2 = \frac{b_2 \omega_0}{c}, \quad \alpha = \frac{Ql}{c}, \quad \beta = \frac{Pl}{c}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{c}{ml^2}.$$

## 2. Анализ положений равновесия

Возможные положения равновесия системы при различных сочетаниях параметров нагрузки  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из системы уравнений, которую можно получить, если положить в уравнениях (1)  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$

$$\begin{aligned} 2\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha \sin \varphi_1 + \beta \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ -\varphi_1 + \varphi_2 - \alpha \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) можно разрешить относительно одной обобщенной координаты  $\varphi_2$

$$F(\varphi_2) = \varphi_2 - 2\alpha \sin \varphi_2 - \alpha \sin(\varphi_2 - \alpha \sin \varphi_2) + \beta \sin(\alpha \sin \varphi_2) = 0. \quad (4)$$

В зависимости от величин параметров внешней нагрузки  $\alpha$  и  $\beta$  система имеет одно (тривиальное) положение равновесия, три, пять. Это можно установить по графикам функции  $F(\varphi_2)$ , построенным на рис. 2, точнее, по числу корней этой функции. Плоскость  $(\alpha, \beta)$  по числу положений равновесия разбивается на ряд областей. Область с единственным тривиальным положением равновесия примыкает к оси  $\beta$ . Граница области, соответствующая трем положениям равновесия, может быть получена из геометрических соображений – из условия равенства нулю производной от функции  $F(\varphi_2)$

$$\frac{dF}{d\varphi_2} = 1 - 2\alpha \cos \varphi_2 - \alpha \cos(\varphi_2 - \alpha \sin \varphi_2)(1 - \alpha \cos \varphi_2) + \alpha \beta \cos(\alpha \sin \varphi_2) \cos \varphi_2$$

при  $\varphi_2 = 0$ , т.е.

$$\left. \frac{dF}{d\varphi_2} \right|_{\varphi_2=0} = 1 - (3 - \beta)\alpha + \alpha^2 = 0.$$

В дальнейшем увидим, что левая часть этого уравнения совпадает со свободным членом характеристического уравнения в вариациях.

Граница, соответствующая смене области с одним тривиальным положением равновесия на область с пятью положениями равновесия, строилась из условия, что при некотором

отличном от нуля значении  $\varphi_2$  одновременно обращаются в нуль сама функция  $F(\varphi_2)$  и ее первая производная. Аналогично были построены границы, разделяющие области с другими числами положений равновесия. Разветвление (бифуркации) форм равновесия для двух значений  $\beta$  при изменении параметра  $\alpha$  от 0 до 3 проиллюстрировано на рис. 3 ( $\beta = 0,5$ ) и рис. 4 ( $\beta = 1,5$ ), где показаны значения обобщенных координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , являющиеся корнями системы уравнений (3). В первом случае (рис. 3) в окрестности точек бифуркации имеются смежные с тривиальной положения равновесия. Во втором случае (рис. 4) смежные положения равновесия отсутствуют. Это обстоятельство является определяющим для типа потери устойчивости при достижении параметрами нагружения критических значений.

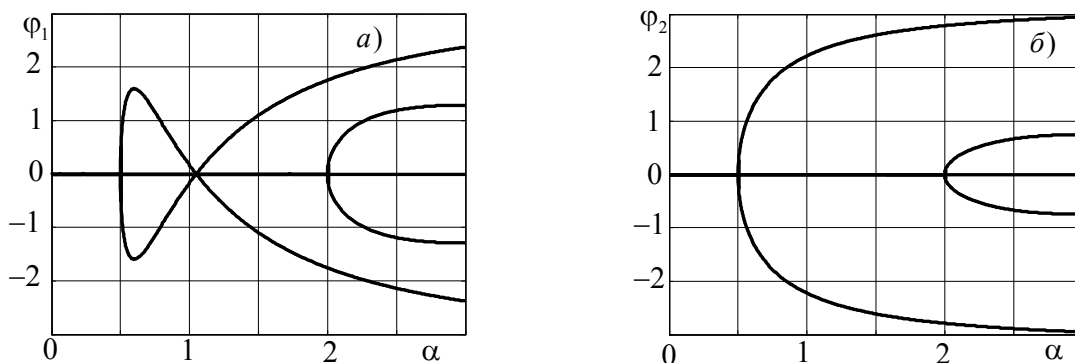


Рис. 3

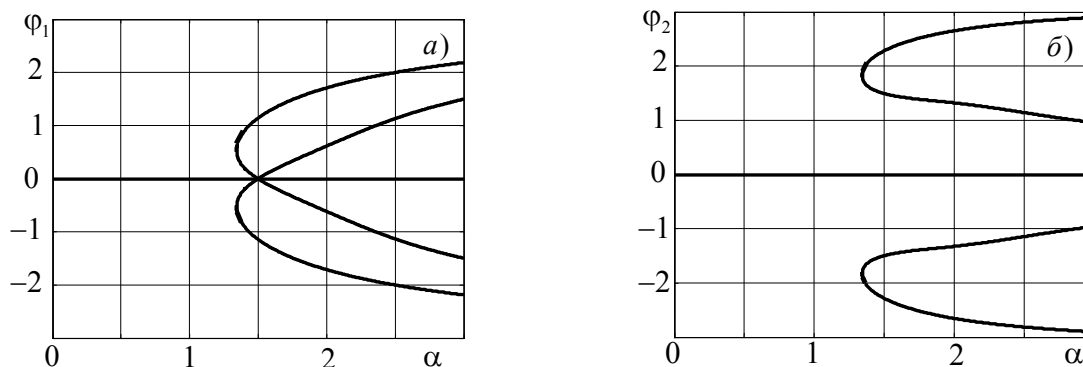


Рис. 4

### 3. Исследование устойчивости положений равновесия

Согласно динамическому методу [2] для исследования устойчивости тривиального решения уравнения (1) составим уравнения в вариациях относительно малых отклонений  $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t)]^T$

$$\mathbf{A}\ddot{\xi} + \mathbf{B}\dot{\xi} + (\mathbf{C} - \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{E}_2)\xi = 0, \quad (5)$$

где обозначено

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & \eta \end{bmatrix}, \quad \eta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для (5) имеет вид

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты характеристического уравнения (6) даются выражениями

$$\begin{aligned} p_1 &= \varepsilon_1(1 + 5\eta), & p_2 &= \varepsilon_1^2\eta + 6 - 3\alpha - 2\beta, \\ p_3 &= \varepsilon_1[(1 + \eta)(1 - \alpha) - \eta\alpha], & p_4 &= \alpha^2 - (3 - \beta)\alpha + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Для устойчивости тривиального решения уравнений (5) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (6) имели отрицательные действительные части. Согласно модифицированному критерию Рауса–Гурвица этому условию удовлетворяют условия

$$p_1 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0, \quad H = p_3(p_1p_2 - p_3) - p_1^2p_4 > 0. \quad (8)$$

Область устойчивости на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , примыкающая к началу координат, ограничивается кривыми, образующими границу области. Часть этой границы (граница области дивергенции) соответствует нарушению третьего из неравенств (8), т.е.  $p_4 = 0$ . Ее положение не зависит от величины демпфирования в системе. Пересечение этой границы приводит к квазистатической потере устойчивости. Граница области флаттера определяется условием  $H = 0$ . Положение этой границы существенно зависит от отношения коэффициентов демпфирования.

Для исследования нетривиальных положений равновесия  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$  при некотором сочетании  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых эти положения равновесия существуют, составим уравнения в вариациях, подставляя в уравнения (1) выражения  $\varphi(t) = \varphi^* + \xi(t)$ . Здесь  $\xi(t)$  – малые отклонения от положений равновесия, устойчивость которых исследуется. Коэффициенты  $p_j$  соответствующего характеристического уравнения (6) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \varepsilon_1 \frac{1 + 2\eta \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) + 3\eta}{2 - \cos^2(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}, \\ p_2 &= \frac{4 - \eta\varepsilon_1^2 - \alpha(\cos\varphi_1^* + 2\cos\varphi_2^*) - \beta\cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*)[1 + \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*)] + 2\cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}{2 - \cos^2(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}, \\ p_3 &= \varepsilon_1 \frac{1 - \alpha\cos\varphi_2^* + \eta[1 - \alpha(\cos\varphi_1^* + \cos\varphi_2^*)]}{2 - \cos^2(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}, \\ p_4 &= \frac{(1 - \alpha\cos\varphi_2^*)[2 - \alpha\cos\varphi_1^* - \beta\cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*)] + \beta\cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) - 1}{2 - \cos^2(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}. \end{aligned}$$

Применение критерия Рауса–Гурвица (8) с использованием записанных выше выражений для  $p_j$  дает возможность построить границы области вторичного флаттера [3]. Эти области расположены внутри области дивергенции и существуют лишь при неодинаковых значениях коэффициентов демпфирования  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .



#### 4. Исследование устойчивости предельных циклов

При переходе через границу области устойчивости тривиального положения равновесия в нелинейной неконсервативной системе кроме «жесткой» потери устойчивости по типу дивергенции могут устанавливаться различные виды динамического поведения (бифуркации Андронова–Хопфа, соответствующие «мягкой» потере устойчивости). Это могут быть периодические движения (предельные циклы), квазипериодические движения (т.е. движения, представляющие собой сумму периодических движений с несоизмеримыми периодами) и хаотические движения. Если в первых случаях, называемых классическими аттракторами, в фазовом пространстве существуют обычные геометрические объекты: точка, замкнутая кривая или подпространство размерностью на единицу меньше, чем размерность фазового пространства, то в последнем случае, т.е. в случае хаотических движений, имеет место так называемый странный аттрактор. Странный аттрактор связан с фрактальным множеством, т.е. множеством дробной размерности.

Для исследования устойчивости предельных циклов  $\varphi^*(t)$  в области флаттера составим уравнения в вариациях относительно малых отклонений  $\xi(t)$ , подставляя в уравнения (1) выражения  $\varphi^*(t) + \xi(t)$ . После линеаризации получим уравнения возмущенного движения с периодическими коэффициентами

$$\mathbf{A}(\varphi^*)\ddot{\xi} + \mathbf{B}(\varphi^*, \dot{\varphi}^*)\dot{\xi} + \mathbf{C}(\varphi^*, \dot{\varphi}^*, \ddot{\varphi}^*)\xi = 0. \quad (9)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  определяются выражениями

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) \\ \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 - 2\dot{\varphi}_2^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*) \\ -\varepsilon_2 + 2\dot{\varphi}_1^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*) & \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [c_{jk}],$$

$$c_{11} = 2 - \alpha \cos \varphi_1^* - \beta \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) + \dot{\varphi}_2^{*2} \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) + \ddot{\varphi}_2^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*),$$

$$c_{12} = -1 + \beta \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) - \dot{\varphi}_2^{*2} \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) - \ddot{\varphi}_2^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*),$$

$$c_{21} = -1 - \dot{\varphi}_1^{*2} \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) + \varphi_1^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*),$$

$$c_{22} = 1 - \alpha \cos \varphi_2^* + \dot{\varphi}_1^{*2} \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) - \ddot{\varphi}_1^* \sin(\varphi_2^* - \varphi_1^*).$$

Таким образом, задача исследования устойчивости предельных циклов в области флаттера сводится к исследованию устойчивости тривиального решения уравнений (9) с периодическими коэффициентами. Коэффициенты уравнений (9) находятся в результате численного интегрирования уравнений невозмущенного движения (1) на достаточно продолжительном отрезке времени до наступления установившегося режима. Далее вычисляется период колебаний и матрица монодромии. Согласно теории Флоке–Ляпунова–Четаева если все собственные значения (мультипликаторы) матрицы монодромии по модулю меньше единицы, то тривиальное решение уравнений (9) и, следовательно, периодические решения уравнений (1) будут устойчивыми. Неустойчивым предельный цикл будет в том случае, когда модуль хотя бы одного мультипликатора превысит единицу.

Результаты вычислений для случая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$  представлены на рис. 5. Область устойчивости заштрихована горизонтальными линиями. Ее граница состоит из границы дивер-

генции  $AB$  и границы флаттера  $BC$ . Вторичный флаттер для заданных параметров демпфирования не реализуется. Область флаттера разбивается на неодносвязные подобласти устойчивых предельных циклов (вертикальная штриховка) с границей весьма сложной конфигурации и неустойчивых движений системы, которые с ростом параметров  $\alpha$  и  $\beta$  переходят в хаотические движения.

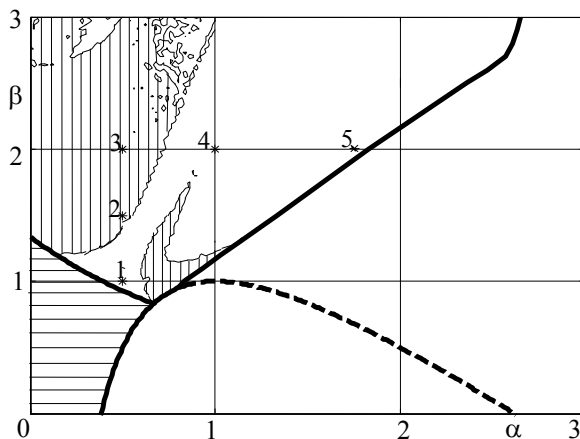


Рис. 5

Иллюстрация характера движения в различных точках области флаттера приводится на рис. 6, где построены для установившегося режима фазовые портреты по первой обобщенной координате  $\phi_1$ . Значения параметров нагрузки  $\alpha, \beta$  при этом соответствуют точкам  $1 \div 4$ , отмеченным на рис. 5. На рис. 6,а и рис. 6,г (точки 1 и 4) представлены неустойчивые предельные циклы, а на рис. 6,б и рис. 6,в (точки 2, 3) изображены предельные циклы, соответствующие устойчивым режимам движения маятника.

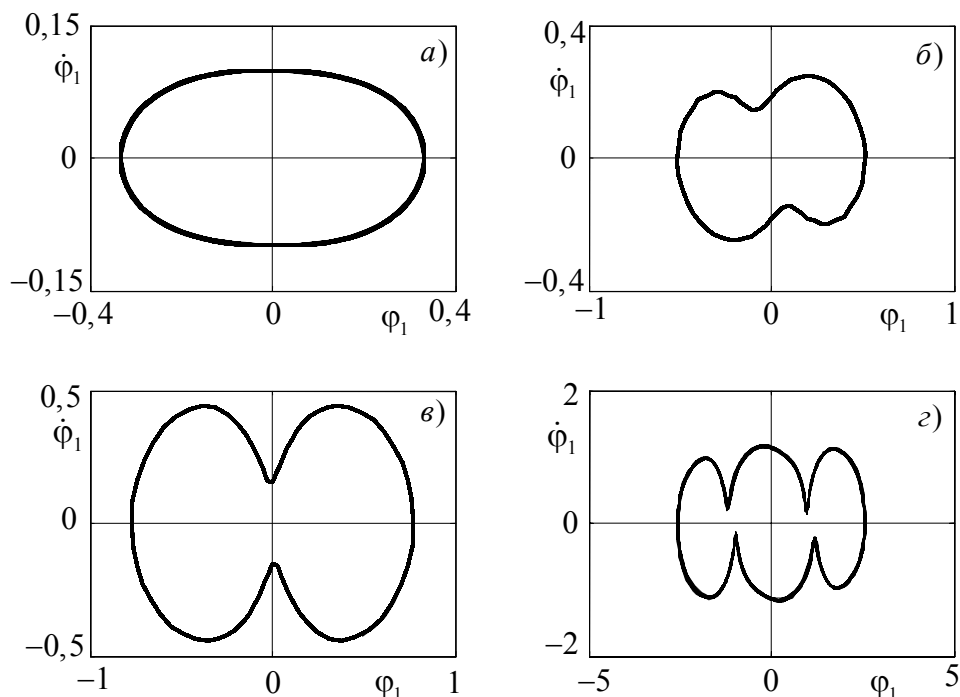


Рис. 6

В далекой критической области (точка 5 на рис. 5) движение системы носит хаотический характер. Это проиллюстрировано на рис. 7, где построены фазовый портрет на плос-

кости  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1$  (рис. 7,а) и сечение Пуанкаре (рис. 7,б) для обобщенной координаты  $\varphi_2$ , значения которой и ее производной фиксировались в моменты времени, когда координата  $\varphi_1$  пересекала нулевой уровень в положительном направлении. Сечение Пуанкаре для данного режима нагружения системы представляет собой фрактальный набор точек.

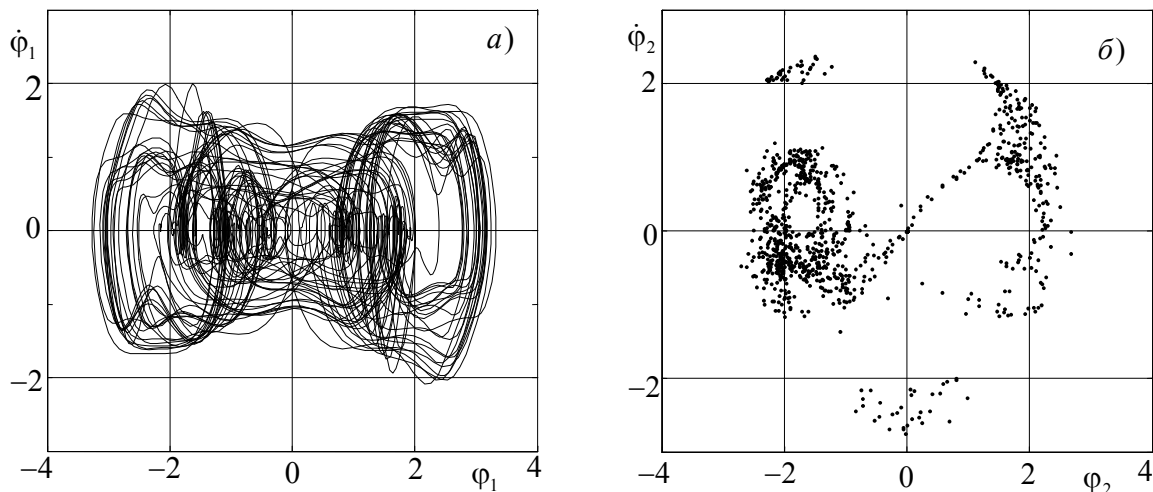


Рис. 7

Таким образом, область флаттера (область динамической неустойчивости) рассматриваемой неконсервативной системы разбивается на ряд подобластей, соответствующих устойчивым предельным циклам, неустойчивым предельным циклам и хаотическим движениям, называемым иногда детерминированным хаосом [4].

### Список литературы

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир. 1971. 192 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 339 с.
3. Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A. Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic non-linear system in divergence domain // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 191. No 3. P. 431 – 451.
4. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир. 1990. 312 с.
5. Щугорев А.В. Влияние дополнительных связей на устойчивость упругой панели в сверхзвуковом потоке газа. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механика. Избранные материалы. (Нижн. Новг. 24-30 августа 2011). Нижний новгород. Издательство Нижегородского госуниверситета 2011. С.217-218.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ УПРУГОЙ СРЕДЫ

С.Н. Ромашин, В.С. Шоркин

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева.  
302026 Орловская область, г. Орел, ул. Комсомольская д. 95.  
e-mail: [sromashin@yandex.ru](mailto:sromashin@yandex.ru), [vshorkin@yandex.ru](mailto:vshorkin@yandex.ru).

Предложен метод определения параметров функций, описывающих потенциалы парного и тройного взаимодействия частиц сплошной, изотропной линейно упругой среды. Метод основан на использовании аналитических выражений, связывающих параметры потенциалов парного и тройного взаимодействия с модулями Юнга и сдвига сплошной, однородной, изотропной линейно упругой среды, и результатов статистической механики твердых тел о групповых разложениях для расчета вероятностей тройных и т. д. взаимодействий через вероятности только парных взаимодействий.

**Ключевые слова:** сплошная упругая среда, нелокальное взаимодействие, статистическая механика, многочастичное потенциальное взаимодействие.

### Введение

Сплошная упругая среда является математической моделью реальных материалов с их дискретной атомно-молекулярной структурой. Для этой структуры характерно нелокальное потенциальное взаимодействие слагающих их частиц. В работах [1 - 3] это свойство аксиоматически перенесено на взаимодействие частиц сплошной упругой среды. Этот подход не нов [4 - 9]. Новым (по сравнению с существующими результатами) является то, что, во-первых, учитываются не только парные, но и тройные потенциальные взаимодействия между бесконечно малыми частицами. Во-вторых, параметры потенциалов этих взаимодействий выражаются не через физические свойства реальных атомов, попавших внутрь взаимодействующих частиц, а через характеристики упругого состояния сплошного материала, которые можно измерить в макро экспериментах.

### Основные положения

Рассматривается сплошное упругое тело  $B$ . В отсчетной конфигурации оно занимает область  $V \equiv V_B$ , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью  $A$  с внешней единичной нормалью  $\vec{n}$ . Под влиянием внешних воздействий тело  $B$  испытывает малые деформации, так что изменениями объема области  $V$  и плотности  $\rho$  в процессе деформирования можно пренебречь. Температура  $T$  так же не меняется. Материал тела однороден по своему составу и свойствам, изотропен.

Тело  $B$  считается выделенным из среды  $\Omega$ , заполняющей бесконечно протяженную область  $V_\Omega$ . Отсчетными являются то его состояние и конфигурация, которыми  $B$  обладало внутри  $\Omega$ . Допущение делается для исключения из рассмотрения неоднородности и анизотропии свойств материала, существующих вблизи свободных границ.

Сплошная среда, образующая тело  $B$ , обладающая определенными термодинамическими свойствами, является математической моделью реального материала, определенной следующим образом.

Рассматривается тело  ${}^R\Omega$  на столько больших размеров, что влиянием его границ на свойства материала тела  ${}^R B$ , выделенного мысленно внутри  ${}^R\Omega$ , можно пренебречь. Возможны два подхода к построению модели  $\Omega$ , а значит и сплошного тела  $B$ .

Первый, общепринятый, опирается на понятие представительной области - окрестности точки, в которой определяются количественные характеристики сплошной среды  $\Omega$  на основании количественных характеристик атомов или молекул реального материала  ${}^R\Omega$ . Представим первый подход следующим образом.

Пусть тело  ${}^R\Omega$ , как и сплошная среда  $\Omega$ , моделирующая его термодинамические свойства, находятся в термодинамически равновесном состоянии. Они занимают одну и ту же область  $V({}^R\Omega) = V(\Omega) = V_\Omega$ . Одна и та же в том смысле, что за счет жестких движений – параллельного переноса и поворота, области  $V({}^R\Omega)$  и  $V(\Omega)$  можно совместить до полного совпадения их границ  $A({}^R\Omega)$  и  $A(\Omega)$ . Две произвольные области  $V$  и  $W$ , обладающие таким свойством, считаются равными:  $V = W$ .

В разных местах области  $V_\Omega$  выделяются равные между собой  $V({}^R B) = V(B) = V_B = V_{B(1)} = V_{B(2)} = \dots = V_{B(n)} = V_{B(N)}$  области с границами  $A({}^R B) = A(B) = A_B = A_{B(1)} = A_{B(2)} = \dots = A_{B(n)} = A_{B(N)}$ . Здесь  $N$  - достаточно большое число. В каждой из областей  $V_{B(n)}$  выбирается произвольно одна и та же (по отношению к границе  $A_{B(n)}$ ) точка  $M_{(n)}$ . Эта точка является центром представительной области  $U(M) = U(M_{(n)}) \subset V_\Omega$ . Размеры этой области велики по сравнению с межатомными расстояниями материала  ${}^R\Omega$ . Поэтому в ней помещается такое число атомов  $N_{at}$ , для которого среднее квадратическое отклонение импульсов  $(\vec{p}_{at})_k$  и энергий  $(E_{at})_k$  ( $k = 1, \dots, N_{at}$  - номер атома) атомов, попавших в  $U(M)$ , от их средних по  $U(M)$  величин меньше наперед заданной точности  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_E$  соответственно. Из-за неоднородности распределения свойств реального материала по области  $V_\Omega$  окажется, что, не смотря на отмеченное условие выбора размеров  $U(M)$ , средние значения импульсов  $\langle (\vec{p}_{at})_k \rangle = \vec{p}$  и энергий  $\langle (E_{at})_k \rangle = E$  для разных областей  $V_{B(n)}$  окажутся разными.

Но разница между значениями средних по разным областям импульсов и энергий будет тем меньше, чем больше число  $N$ . Поэтому, если в области  $V_\Omega$  выделена какая-либо область  $V_{B(n)}$ , а в области  $V_{B(n)}$  - произвольная бесконечно малая область  $dV_{B(n)}$ , то можно говорить об определенной вероятности попадания в  $dV_{B(n)}$  частицы  $dV_{B(n)}$  с заданными значениями объемной плотности импульса  $\vec{p}$  и энергии  $E$ .

Вместо набора областей  $\{V_{B(n)}\}_{n=1}^{n=N}$  в одной области  $V_\Omega$  можно рассмотреть набор тел  $\{{}^R\Omega_{(n)}\}_{n=1}^{n=N}$  и соответственно областей  $\{V_{\Omega(n)}\}_{n=1}^{n=N}$ . При этом в каждой из областей  $V_{\Omega(n)}$  выбирать только одну область  $V_{B(n)}$ .

Сплошной средой  $\Omega$  называется такая среда, для которой в любой ее точке в качестве значений объемной плотности импульса  $\vec{p}$  и энергии  $E$  ее частиц принимаются средние по всем областям  $V_{B(n)}$  значения при  $N \rightarrow \infty$ .

Второй, предлагаемый в данной работе, подход к определению понятия «сплошная среда» состоит в следующем.

Имеется последовательность  $\{{}^R\Omega_{(n)}\}_{n=1}^{n=N}$  тел и соответствующая ей последовательность  $\{V_{\Omega(n)}\}_{n=1}^{n=N}$  их мест – всюду плотных точечных трехмерных множеств. В каждом из множеств  $V_{\Omega(n)}$  выделено одинаковое для всех множеств последовательности (по отношению к их границам) множество  $V_{B(n)}$ . Оно является местом мысленно выделенного таким образом из  ${}^R\Omega_{(n)}$  тела  ${}^R B_{(n)}$ . В области  $V_{B(n)}$  для произвольной точки  $M_{(n)}$ , одинаковой

для всех  $V_{B(n)}$ , выделяются одинаковая для всех  $n = 1, \dots, N$  бесконечно малая окрестность  $dV_{B(n)}$ . Эта окрестность не является «представительной». Она является бесконечно малой.

У сплошной среды  $\Omega$  в окрестности  $dV_{B(n)}$  набор  $(\vec{p}, E)$  является средним по всем значениям импульса и энергии атомов, попавших в  $dV_{B(n)}$  при условии, что  $N \rightarrow \infty$ .

Второй подход к определению понятия "сплошная среда" позволяет применять его к тонким приповерхностным слоям материала с толщиной порядка нескольких межатомных расстояний. Изложенный подход не исключает теорему об эргодичности [10], так как область  $dV_{B(n)}$  может выбираться не только в телах  ${}^R\Omega_{(n)}$  при различных значениях номера  $n$ , но и в одном и том же теле  ${}^R\Omega_{(n)}$  при фиксированном  $n$  в разных его соответственных местах, например, в разных местах поверхностного слоя.

При отсутствии внешних воздействий положение произвольной частицы  $dB_2$  тела  $B$  в составе сплошной среды  $\Omega$  по отношению к другой произвольной частице  $dB_1 \equiv dB$  определяется радиус-вектором  $\vec{l}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  с длиной  $l_{12} = |\vec{l}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ .

При наличии этих воздействий частицы  $dB$  того же тела, но выделенного из среды  $\Omega$ , приобретают положения, характеризуемые радиус-векторами  $\vec{R}$  и векторами перемещений  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{R}(\vec{r}, t) - \vec{r}$ . При этом положение частицы  $dB_2$  относительно частицы  $dB_1 \equiv dB$  определяется радиус-вектором  $\vec{L}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{l}_{12} + (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = \vec{l}_{12} + \Delta\vec{u}_{12}$  с длиной  $L_{12} = |\vec{L}_{12}| = |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|$ . Если тело  $B$  деформируется, то  $L_{12} \neq l_{12}$ .

Предполагается, что полная потенциальная энергия тела  $B$  равна сумме потенциальных энергий  $dU^{(2)}$  и  $dU^{(3)}$  взаимодействий всех пар и троек его элементарных частиц  $dB_1 \equiv dB$ ,  $dB_2$  и  $dB_3$ . Допускается, что потенциалы  $dU^{(2)}$  и  $dU^{(3)}$  пропорциональны произведениям объемов входящих в кластер частиц

$$dU^{(2)} = \Phi^{(2)}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) dV_1 dV_2, \quad dU^{(3)} = \Phi^{(3)}(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3) dV_1 dV_2 dV_3 \quad (1)$$

Функции  $\Phi_{(kp)}^{(2)}(\vec{R}_{(k)}, \vec{R}_{(p)})$ ,  $\Phi_{(kpq)}^{(3)}(\vec{R}_{(k)}, \vec{R}_{(p)}, \vec{R}_{(q)})$ , характеризующие плотность распределения потенциалов (далее потенциалы) для однородного изотропного материала зависят только от расстояний между взаимодействующими частицами. Их предлагается представлять в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)} &= \Phi^{(k)}(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_k) = \Phi^{(k)}(\vec{L}_{ij}) = \Phi_0^{(k)} \varphi^{(k)}(\beta L_{ij}), \\ k &= 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, k; \quad i \neq j; \quad L_{ij} = L_{ji} = |\vec{L}_{ij}|; \\ \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial L_{ij}} &\leq 0, \quad \lim_{L_{ij} \rightarrow \infty} \Phi^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\varphi^{(k)}(\beta L_{ij}) = \varphi^{(k)}(\eta_{ij})$  - безразмерная функция безразмерных аргументов  $\eta_{ij} = \beta L_{ij}$ , одинаковая (допускается) для всех материалов при каждом значении  $k$ , асимптотически стремящаяся к нулю с ростом расстояний между взаимодействующими частицами;  $\Phi_0^{(k)}$  и  $\beta$  - подгоночные параметры, индивидуализирующие потенциал для конкретного материала, должны определяться на основании экспериментальных данных. Теория упругости, основанная на представлениях о нелокальных многочастичных потенциальных взаимодействиях, представлена в работе [3].

Частицы  $dB_1 \equiv dB$ ,  $dB_2$ ,  $dB_3$  с импульсами  $d\vec{p} \equiv d\vec{p}_1$  и энергиями  $dE$  внутри образованных ими отдельных пар и троек внутри сплошной среды  $\Omega$  или тела  $B$  в любой момент времени взаимодействуют точно также, имеют такие же значения как и в случае, когда двигаясь в вакууме в полном отсутствии частиц, они в какой-то момент времени будут иметь те же импульсы и энергии и займут те положения, которые они занимают внутри среды  $\Omega$  или тела  $B$ . В этом смысле учет только парных и тройных взаимодействий уподобляет сплошную среду газовой [11, 12], в которой взаимодействия более, чем трех частиц, невозможно.

Область  $V \equiv V_B$  подвергается разбиению на непересекающиеся элементарные части  $\Delta V_n$ , ( $n = 1, \dots, N$ ), так что  $V = \bigcup_{n=1}^{n=N} \Delta V_n$ . При стремлении диаметров частей  $\Delta V_n$  к нулю и  $N \rightarrow \infty$ :  $\Delta V_n \rightarrow dV$ ,  $V = \int dV$ .

В каждую область  $\Delta V_n$  попадает определенное число атомов с суммарной массой  $m_n$ , импульсом  $\vec{p}_n$  и энергией  $E_n$ . Величины  $m_n$ ,  $\vec{p}_n$  и  $E_n$  равномерно «размазываются» по объему  $\Delta V_n$ . Так дискретному множеству атомов, попавших в  $\Delta V_n$ , соответствует сплошная частица  $\Delta B_n$ . Центр инерции частицы  $\Delta B_n$  - точка с радиус-вектором  $\vec{q}_n$ .

В каждой частице  $\Delta B_n$  величины  $m_n$ ,  $\vec{p}_n$  и  $E_n$  определены в ее центре инерции. Поэтому ее можно считать материальной точкой. Тело  $B$  при этом – система  $N$  материальных точек. В работе [13] показано, что система  $N$  материальных точек должна быть обязательно дискретной с конечными равновесными расстояниями между ее элементами, так как в противном случае она оказывается неустойчивой из-за того, что в конечной области  $V$ , занимаемой телом  $B$  оказывается сконцентрированной бесконечная положительная потенциальная энергия отталкивания. Доказательство базируется на допущении о конечности величин  $\vec{p}_n$  и  $E_n$ . Предложенный вариант представления тела  $B$  дискретной структурой  $\{\Delta B_n\}$  при  $N \rightarrow \infty$  предполагает неограниченное стремление частиц  $\Delta B_n$  друг к другу. Но это не противоречит утверждению [13], так как при сближении частиц соответственно уменьшаются их массы, импульсы и энергии при условии сохранения постоянства их сумм.

Все термодинамические свойства системы  $N$  материальных точек можно определить, зная ее статистическую сумму. Эта система в наших рассуждениях представляет собой газ Ван-дер-Ваальса с двойными и тройными взаимодействиями его частиц.

Для равновесной однокомпонентной системы  $N$  - частичная сумма выражается следующим образом:

$$Z_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \exp\left(-\frac{H}{kT}\right) d^3 \vec{q} d^3 \vec{p} \quad (3)$$

Здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $h$  - постоянная Планка,  $T$  абсолютная температура,  $H$  - гамильтониан системы, интегрирование ведется по всем возможным значениям  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$ .

Гамильтониан  $H$  имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) \quad (4)$$

Гамильтониан разделяется на две части – кинетическую  $K^{(N)} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$  и конфигурационную  $U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$ . В этом случае интегрируя кинетическую часть можно получить представление

$$Z_N = Z_P^{(N)} Z_Q^{(N)}, \quad (5)$$

в котором

$$Z_P^{(N)} = \frac{1}{h^{3N}} \int \exp\left(-\frac{K^{(N)}}{kT}\right) d^3 \vec{p} \quad (6)$$

- кинетический интеграл,

$$Z_Q^{(N)} = \frac{1}{N!} \int \exp\left[-\frac{U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)}{kT}\right] d^3 \vec{q} \quad (7)$$

- конфигурационный интеграл.

Полная конфигурационная энергия  $U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  (потенциальная энергия взаимодействия всех частиц системы) зависит от полной конфигурации  $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$ . Задача упрощается путем введенного предположения о том, что конфигурационная сумма равна сумме всех парных и тройных взаимодействий частиц.

Вероятность того, что реализуется определенная конфигурация  $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  положений частиц  $\Delta B_n$  определяется выражением [10]

$$dP(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) = \frac{1}{N!} \frac{e^{-U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)/kT}}{Z_Q^{(N)}} d\Gamma_Q^{(N)}. \quad (8)$$

Здесь  $d\Gamma_Q^{(N)}$  - элемент объема в конфигурационном пространстве  $\Gamma_Q^{(N)}$  координат векторов  $\{\vec{q}_n\}$  - центров инерции системы частиц  $\{\Delta B_n\}$ , размерность которого  $3N$ .

Дифференциальная функция распределения вероятностей конфигурации  $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  имеет вид

$$F(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) = \frac{1}{N!} \frac{e^{-U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)/kT}}{Z_Q^{(N)}} \quad (9)$$

Функции распределения пар и троек частиц, выбранных из полного набора  $\{\Delta B_n\}_{n=1}^{n=N}$  частиц, получаются на основании условия о том, что все остальные частицы набора могут занимать любые положения, путем интегрирования функции  $F(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  по всем возможным положениям этих остальных частиц.

Потенциальная энергия реального межмолекулярного взаимодействия имеет единую природу и обусловлена перераспределением электронной плотности во взаимодействующих частицах [13, 14]. В зависимости от типов связей, обусловленных различным характером этого перераспределения, общее выражение для полной энергии  $U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  может быть представлено в виде суммы  $n$  - частичных неаддитивных потенциалов  $U^{(n)}(\vec{q}_i, \dots, \vec{q}_n)$ .

$$U^{(N)}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) = \sum_{i>j\geq 1}^N U^{(2)}(\vec{q}_i, \vec{q}_j) + \sum_{i>j>k\geq 1}^N U^{(3)}(\vec{q}_i, \vec{q}_j, \vec{q}_k) + \dots \quad (10)$$

Если допустить, что из всех возможных неаддитивных многочастичных взаимодействий в сплошной среде действуют только те, которые можно описать на основании теории ван-дер-ваальсовых сил и их флуктуаций [11, 15], то неаддитивные  $n$  - частичные потенциалы можно выразить через взаимодействия частиц в рамках  $n$  - частичных топологически раз-



личных диаграмм [16]. Для частиц рассматриваемой сплошной среды эти рассуждения также справедливы.

Повторяя классические рассуждения, для парных взаимодействий вводятся функции Майера

$$f_{ij} \equiv f^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \exp\left(-\frac{U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{kT}\right) - 1. \quad (11)$$

С ее помощью конфигурационный интеграл приобретает вид [17]

$$Z_Q^{(N)} = V^N + \frac{N(N-1)}{2!} V^{N-1} \widehat{D}^{(2)} + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} V^{N-2} \widehat{D}_{(2)}^{(3)} + \dots \quad (12)$$

Здесь  $\widehat{D}^{(2)} = \int f_{12} d2$  - групповой интеграл, учитывающий взаимодействия внутри пар без учета влияния третьих частиц;  $\widehat{D}_{(2)}^{(3)} = \int f_{12} f_{23} d2 d3$  - групповой интеграл, учитывающий один из видов тройного взаимодействия, выраженного через парные взаимодействия.

Если встать на позицию о том, что каждому – парному, тройному и т.д. взаимодействию должна соответствовать своя функция Майера, то необходимо записать следующее.

$$Z_Q^{(N)} = V^N + \frac{N(N-1)}{2!} V^{N-1} \int f_{12} d2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} V^{N-2} \int f_{123} d2 d3 + \dots \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) получаем, что  $f_{ijk} = f_{ij} f_{jk} f_{ki}$ , где

$$f_{ijk} \equiv f^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) = \exp\left(-\frac{U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT}\right) - 1. \quad (14)$$

Очевидно, что подстановка сюда выражений функций Майера через потенциалы парных и тройных взаимодействий накладывает ограничение на вид и величину потенциала тройных взаимодействий:

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT}\right) - 1 = \\ & = \left[ \exp\left(-\frac{U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{kT}\right) - 1 \right] \left[ \exp\left(-\frac{U^{(2)}(\vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Если наряду с тройными взаимодействиями, выражаемыми через парные, окажется необходимым учитывать те, которые не выражаются через парные, то потенциал  $U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)$  надо представить в виде суммы

$$U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) = U_{(2)}^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) + U_{(3)}^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (16)$$

Первое слагаемое выражается через парные взаимодействия, в то время как второе – нет.

С учетом (16) конфигурационный интеграл примет вид:

$$Z_Q^{(N)} = \frac{1}{N!} \int \exp \left[ - \frac{\sum_{i>j \geq 1}^N U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i>j>k \geq 1}^N U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) + U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT} \right] d^3\vec{r} d^3\vec{p} \quad (17)$$

Далее выражение под знаком интеграла представляется в виде произведения экспонент, каждую из которых выражаем через соответствующие функции Майера.

$$\prod_{i>j} (1 + f_{ij}) \prod_{i>j>k} (1 + f_{(2)ijk}) \prod_{i>j>k} (1 + f_{(3)ijk}) \quad (18)$$

Раскрывая произведения, сохраняя только линейные члены, можно получить выражение конфигурационной суммы, дополненное слагаемым, учитывающим тройные взаимодействия, которые не выражаются через парные.

Допустим теперь, что потенциалы тройных взаимодействий, которые не выражаются через парные, равны нулю. Рассмотрим случай, когда величины  $\frac{U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT}$ ,  $\frac{U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{kT}$  являются малыми. Тогда

$$\frac{U^{(3)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT} = \frac{U^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{kT} \cdot \frac{U^{(2)}(\vec{r}_j, \vec{r}_k)}{kT}. \quad (19)$$

Таким образом, оказывается, что потенциал тройного взаимодействия частиц сплошной среды в случае, когда оно соответствует флуктуационному [11, 15], при условии слабости взаимодействий, может быть выражен через произведение потенциалов парных взаимодействий.

### **Практическое приложение**

Для частиц сплошной среды потенциал  $k$ -частичного взаимодействия  $U^{(k)}$  пропорционален произведению объемов взаимодействующих частиц.

$$U^{(k)} = \Phi^{(k)} \Delta V_{(m)1} \dots \Delta V_{(m)j} \dots \Delta V_{(m)k}, \quad (20)$$

где индекс  $(m)$  - номер разбиения области  $\Delta V_n$ , а диаметр элементарных областей:  $diam(\Delta V_{(m)j}) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Когда диаметр  $diam(\Delta V_{(m)}^{(k)}) \rightarrow 0$ , среднее значение  $\Phi^{(k)}$  стремится к точному, определенному в точке, к которой стягивается область  $\Delta V_{(m)}^{(k)} = \Delta V_{(m)1} \dots \Delta V_{(m)j} \dots \Delta V_{(m)k}$ . Поэтому равенство (20) является точным, если величина  $\Phi^{(k)}$  является средней по  $3k$ -мерной области  $\Delta V_{(m)}^{(k)} = \Delta V_{(m)1} \dots \Delta V_{(m)j} \dots \Delta V_{(m)k}$ .

Допускается, что истинная плотность  $\Phi^{(k)}$  распределения потенциала  $U^{(k)}$  равна той, которая получается при его равномерном распределении по частице  $(\Delta V_{(m)}^{(k)})_{\beta}$  кубической формы со стороной  $(1/\beta)$ . Данные работы [18] свидетельствуют о том  $(1/\beta)$  меньше межатомного расстояния. Так что определенная таким приближенным образом объемная плотность потенциала близка к точной  $\Phi^{(k)} \Big|_{\eta_{ij}=0} = \Phi_0^{(k)}$ , наблюдаемой при  $\eta_{ij} = 0$ . С учетом сказанного можно получить приближенное равенство

$$\Phi_0^{(3)} = \frac{\Phi_0^{(3)2}}{(kT)\beta^3}, \quad (21)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура.

В работе [19] представлены выражения, позволяющие вычислить значения  $(\Phi_0^{(2)}/\beta^3)$  и  $(\Phi_0^{(3)}/\beta^6)$  через известные значения параметров Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ .

$$\left( \frac{\Phi_{0(k)}^{(2)}}{\beta^3} \right) = \frac{4\mu + 45\lambda}{294\pi} = \frac{E}{294\pi} \frac{2 + 41\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (22)$$

$$\left( \frac{\Phi_{0(k)}^{(3)}}{\beta^6} \right) = \frac{27(\lambda - \mu)}{1764\pi^2} = \frac{27E}{1764\pi^2} \frac{4\nu - 1}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (23)$$

На основании (22) и (23), например, для меди получено:

$$\left( \Phi_0^{(2)}/\beta^3 \right) = 5,5 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^3, \quad \left( \Phi_0^{(3)}/\beta^6 \right) = 0,1 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^3, \quad (24)$$

С учетом нелинейности дисперсионного закона найдено:  $\beta = 2.37 \cdot 10^{10} \text{ 1/м}$

Чтобы проверить связь (21) преобразуем ее к виду

$$\left( \Phi_0^{(3)}/\beta^6 \right) = \frac{\left( \Phi_0^{(2)}/\beta^3 \right)^2}{(kT)\beta^3} \quad (25)$$

Подставив в правую часть значения  $(\Phi_0^{(2)}/\beta^3) = 5,5 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^3$ ,  $\beta = 2.37 \cdot 10^{10} \text{ 1/м}$ ,  $T = 300^0 \text{ К}$  можно получить, что  $(\Phi_0^{(3)}/\beta^6) = 0,1 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^3$ .

Этот результат свидетельствует о справедливости проведенных в данной работе рассуждений. Кроме того, применение этих рассуждений для проведения практических расчетов дает возможность использовать для этой цели только результаты классических экспериментов с изотропными линейно упругими материалами на растяжение – сдвиг. При этом из рассмотрения исключаются опыты на количественное описание нелинейности дисперсионного закона для акустических волн.

## Список литературы

1. Шоркин В. С. Модель сплошной упругой среды, основанная на представлении о далекодействующем потенциальном взаимодействии ее частиц / Под ред. И. А. Кийко, Р. А. Васина, Г. Л. Бровко // Упругость и неупругость. М.: Ленанд, 2006. С. 271 – 282.
2. Шоркин В. С., Фроленкова, Л. Ю., Азаров А. С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел // Материаловедение. 2011. № 2. С. 2 – 7.
3. Шоркин В. С. Нелинейные дисперсионные свойства высокочастотных волн в градиентной теории упругости // Механика твердого тела. 2011. № 6. С. 104 – 121.
4. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65. – Вып. 2. – С. 279 – 289.
5. Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Y. P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // Journal of Colloid and Interface Science. – 1975. – V. 67. – P. 378 – 326.
6. Johnson K. L. Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and plane surface // Proceeding of the Royal Society London. – 1997. – Series A. – V. 453. – P. 163 – 179.
7. Johnson K. L., Greenwood J. A. An adhesion map for the contact of elastic spheres // Journal of Colloid and Interface Science. – 1997. – V. 192. – P. 326 – 333.
8. Maugis D. Contact, adhesion and rupture of elastic solids. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000. – 425 p.
9. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // Journal of Colloid and Interface Science. – 1991. – V. 150. – P. 243–269.
10. Кубо Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1967. – 452 с.
11. Бараш Ю. С. Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. – 344 с.
12. Лифшиц Е. М. Теория межмолекулярных сил притяжения между твердыми телами // Журнал экспериментальной и технической физики. - 1955. - Т. 29. - С. 94 – 110.
13. Ruelle D. Statistical mechanics: Rigorous results. New York, Amsterdam: Benjamin, 1969. – 219 p.
14. Литинский Г.Б. Межмолекулярные взаимодействия: «физические» или «химические»? // Вісник Харківського національного університету. Хімія. – 2010. - № 895. – Вип. 18(4). – с. 26 – 30.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука. – 1989. - Т. 3. – 768 с.
16. Майер Дж., Гепперт – Майер М. Статистическая механика. М.: Мир, 1980. - 544 с.
17. Крокстон К. Физика жидкого состояния. М.: Мир, 1978. - 400 с.
18. Romashin S. N., Presnetsova V. Yu., Frolenkova L. Yu., Shorkin V. S. A model of adhesive interaction of elastic bodies // [Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International Conference on](#) ISBN 978-1-4799-6824-4. P. 1 – 3.
19. Romashin S.N., Presnetsova V.Yu., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. Method for Calculating the Characteristics of Elastic State Media with Internal Degrees of Freedom // Generalized Continua as Models for Materials with Multi-Scale-Effects or under Multi-Field-Actions. Editors: Holm Altenbach, Samuel Forest. – 2016. – p. 363 – 376.

## **МОДЕЛИ УПРУГИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ ЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ**

**В.А. Савельев**

ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ».

125438, Москва, ул. Автомоторная, 2, e-mail: [cardan-nami@yandex.ru](mailto:cardan-nami@yandex.ru)

Рассматриваются принципиальные вопросы моделирования упругих и демпфирующих свойств листовых рессор. Описана разработанная автором модель упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры с учетом эффекта предварительного смещения листов, подвергнутых сжатию при колебаниях автомобиля. Эта модель учитывает увеличение жесткости и уменьшение демпфирующей силы при уменьшении деформации, а также уменьшение относительных перемещений концевых участков коротких пар листов по сравнению с длинными парами в процессе работы рессоры. Для оценки полноты отражения реальных свойств листовой рессоры разработана ее механическая модель.

*Ключевые слова:* подвеска, автомобиль, листовая рессора, моделирование, силы трения, предварительное смещение, упругие свойства, демпфирующие свойства, механическая модель.

Вопросы моделирования трения, диссипативных процессов возникают при решении многих практических и теоретических задач. При этом неизменно стремление исследователей к повышению точности отражения реальных процессов. Модель трения является одной из основных проблем, с решением которой можно связать существенное повышение надежности выводов из результатов расчетов колебаний, производимых с целью обоснования выбора параметров конструкции транспортного средства, в том числе, например, компоновочных решений при его проектировании [1]. Поэтому проблема адекватности принимаемой модели трения реальным процессам требует тщательного анализа. От полноты и качества решения этой проблемы зависит уровень доверия к получаемым при расчетах результатам.

Демпфирование колебаний автомобиля с подвеской, в качестве упругого элемента которой используются листовые рессоры, осуществляется как за счет межлистового трения, так и с помощью специальных устройств - амортизаторов. Взаимосвязь основных параметров – динамической энергоемкости, жесткости и демпфирующих свойств, принимаемых во внимание при проектировании подвески автомобиля рассматривается в работе [2].

Большую историю имеют вопросы учета при расчетах колебаний автомобилей упругих и демпфирующих свойств листовых рессор с помощью соответствующих моделей и рассматриваются во многих работах. Эти модели отличаются разной степенью отражения физических закономерностей, характерных при работе реальных листовых рессор, которые представляют из себя сложные механические объекты. Сложность этих объектов обусловлена их конструкцией с особыми взаимосвязанными кинематическими и динамическими свойствами, которые должны быть отражены при моделировании. Однако часто используются модели, предназначенные для отражения демпфирующих свойств тел, первоначально обоснованных для применения в других случаях. При этом многие из них связаны с использованием элементов типа “сухое трение”, упругое звено, включенных параллельно или последовательно, а также в виде различных комбинаций групп таких звеньев. Однако обычно эти модели не отражают действительную работу листов в составе рессоры. Недостаточная обоснованность применения некоторых моделей упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры отмечается в работах [3-6].

Из физических соображений, основанных на экспериментальных данных, модель упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры должна отражать комплекс наиболее важных факторов, проявляющихся при колебаниях автомобиля на его подвеске в эксплуатационных условиях [5-6]:

1. Увеличение жесткости листовой рессоры при уменьшении амплитуды деформации.
2. Увеличение демпфирующей силы по мере возрастания усилия сжатия листов рессоры.

3. Синхронность перемещений всех листов друг относительно друга при нагружении или разгрузке рессоры.

4. Уменьшение перемещений последних (коротких) пар по сравнению с перемещениями первых (длинных) пар листов, т. е. соблюдение условия  $l_1 > l_2 > \dots > l_n$ , где  $l_1, l_2, \dots, l_n$  – относительные перемещения первого и второго, второго и третьего ...  $k-1$  и  $k$  листов в зонах контакта концов второго, третьего ...  $k$  листов с поверхностями первого, второго ...  $k-1$  листов.

Перечисленный комплекс факторов в значительной степени связан с явлением предварительного смещения листов рессоры в процессе ее деформирования приложенной нагрузкой. Предварительное смещение – фундаментальное свойство, проявляющееся при сдвиге подвергнутых сжатию контактирующих поверхностей системы “тело-контртело”, известное еще по публикациям 20-х годов XX века А.В. Верховского и Дж. Ренкина (J. Rankin), учитывается при рассмотрении многих механических систем, например, при расчетах соединений с натягом, при расчетах и исследованиях элементов механизмов, участвующих при передаче сил трением. Демпфер сухого трения [7], расположенный посередине ротора турбомашин, даже если он “закрыт” в случае малых возбуждающих нагрузок, имеет в зоне фрикционного контакта его поверхностей взаимные перемещения.

Несмотря на сравнительно малое значение зоны предварительного смещения при трении под нагрузкой контактирующих тел пренебрежение им не позволяет достаточно строго описать процесс колебаний автомобиля с подвеской на листовых рессорах, особенно при малых относительных перемещениях его подрессоренной и неподрессоренной масс. Однако в работах по моделированию демпфирующих свойств листовых рессор и использованию соответствующих моделей при расчетах и исследованиях колебательных процессов автомобилей с подвесками на листовых рессорах явление предварительного смещения фактически игнорируется и часто даже утверждается, что такая подвеска может быть заблокирована силами межлистового трения, а колебательная модель автомобиля при этом изменяется, например, превращается из двухмассовой в одномассовую и наоборот [8]. Вопрос о неправомерности использования терминологии типа “блокирование подвески силами сухого трения” рассмотрен в [6]. При этом роль и возможность использования модели типа “сухое трение” при расчетах и исследованиях колебаний автомобиля не подвергается сомнению.

О предварительном смещении листов рессоры явно свидетельствуют результаты специально поставленных экспериментов, которые показали, что листы друг относительно друга начинают смещаться одновременно. При этих экспериментах подрессоренная масса автомобиля выводилась из положения статического равновесия, производилось освобождение ее от удерживающих связей и она начинала совершать свободные колебания как одномассовая система, а листы рессоры – смещаться друг относительно друга. Эти смещения с помощью электрических сигналов от тензоаппаратуры регистрировались на фотобумагу. При этом использовались специальные упругие балочки с наклеенными на них тензодатчиками. Один конец балочки закреплялся неподвижно на длинном листе, а стерженек, установленный на другом ее конце, касался торца соседнего более короткого листа. Относительное перемещение листов вызывало изгиб балочки и появление сигнала от тензодатчиков. Одновременно записывались относительные смещения нескольких пар листов рессоры. В результате натурных испытаний автомобилей с подвесками на листовых рессорах и испытаний этих рессор в стендовых условиях выяснилось, что все листы при работе рессоры начинают и кончают смещаться один относительно другого одновременно. На рис. 1 представлен вид записи относительных перемещений концов листов передней рессоры грузового автомобиля при свободных колебаниях подрессоренной массы. Кривые 1, 2, 3, 4 представляют относительные перемещения 10-11, 7-8, 5-6, 2-3 листов рессоры этого автомобиля.

Эти же эксперименты с записью свободных колебаний подрессоренной массы автомобиля на подвеске, содержащей листовые рессоры в качестве упругого и демпфирующего

элементов, показали, что при уменьшении начальных отклонений демпфирующая сила рессоры, обусловленная межлистовым трением, снижается, а жесткость рессоры – возрастает.

Зависимость увеличения демпфирующей силы листовой рессоры при увеличении отклонений подрессоренной массы от положения статического равновесия отражена в модели [4]. Демпфирующая сила в этой модели определяется как сила типа “сухое трение” в виде [9] с использованием представления колебаний на фазовой плоскости  $x, \dot{x}$ , осредненная за один период колебаний.

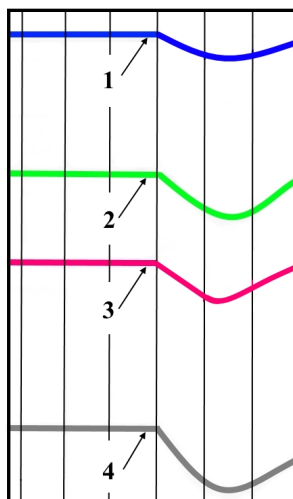


Рис. 1. Относительные перемещения 10-11, 7-8, 5-6, 2-3 листов передней рессоры (кривые 1, 2, 3, 4) при свободных колебаниях подрессоренной массы грузового автомобиля

Расчеты свободных затухающих колебаний подрессоренной массы автомобиля на листовой рессоре, демпфирующая сила которой принята в виде [4], а жесткость рессоры и значение подрессоренной массы по данным измерений реального объекта, с помощью электронной аналоговой машины показали удовлетворительное качественное сходство с данными эксперимента.

Эффект предварительного смещения контактирующих поверхностей листов рессоры при ее нагружении в процессе колебаний автомобиля и вышеуказанные требования могут быть отражены с помощью модели [6], представленной на рис. 2.

На этом рисунке  $C_0$  - жесткость рессоры без учета фрикционного взаимодействия листов друг с другом. Фрикционное взаимодействие первого и второго листов моделируется элементами Гука  $C_1$  и Сен-Венана  $F_1$  и т.д. до пары  $k-1$  и  $k$  листов с соответствующими элементами  $C_n$  и  $F_n$  (тангенциальная жесткость и сила трения, возникающая в контакте поверхностей листов рессоры при их относительном перемещении). При этом элемент  $C_{n-1}$  соединен с элементом  $C_n$  в точке, делящей последний на участки упругих элементов с жесткостью  $C'_n$  и  $C''_n$ .

Так как концы длинных листов находятся под действием меньших сжимающих сил, чем последующих коротких, то  $F_1 < F_2 < \dots < F_n$ . Учитывая это соотношение сил межлистового трения, определяющее начало проскальзывания соответствующих пар листов рессоры, процесс изменения ее упругодемпфирующих сил может быть представлен следующим образом.

При малой деформации рессоры ее жесткость определяется жесткостью пружины  $C_0$  и параллельно включенной цепочкой последовательно между собой связанных элементов  $C_1, C'_2 \dots C'_{n-1}, C''_n$  при отсутствии проскальзывания в парах трения, моделируемых элементами

$F_1 \dots F_n$ . При достижении силы упругости этой цепочки равной силе трения, моделируемой элементом  $F_1$ , в этой паре начинается проскальзывание и пружина с жесткостью  $C_1$  перестает деформироваться, т.е. давать дополнительный вклад в увеличение силы упругости рессоры при дальнейшей деформации, а деформированию подвергается цепочка элементов  $C_2, C_3 \dots C_{n-1}, C_n$ , в которой еще нет проскальзывания листов. При достижении силой упругости этой цепочки упругих элементов максимального значения силы трения  $F_2$  начинается проскальзывание второго и третьего листов рессоры и т.д. Начало проскальзывания пары  $k-1$  и  $k$  листов соответствует достижению равенства силы упругости элемента  $C_n$  силе, моделируемой элементом  $F_n$ . Отсюда следует, что предлагаемая модель позволяет учесть такие свойства листовой рессоры как увеличение ее жесткости при малых амплитудах деформаций, увеличение демпфирующей силы при увеличении деформации в процессе хода сжатия вследствие проскальзывания все большего числа пар листов, т.е. с увеличением суммарного значения силы трения в колебательной системе. Кроме того, эта модель вследствие учета явления предварительного смещения контактирующих поверхностей, обеспечивает синхронность перемещений всех листов друг относительно друга при нагружении или разгрузке рессоры, а также уменьшение перемещений последних (коротких) пар по сравнению с перемещениями первых (длинных) пар листов, т.е. соблюдение условия  $l_1 > l_2 > \dots > l_n$ , где  $l_1, l_2 \dots l_n$  - относительные перемещения первого и второго, второго и третьего...  $k-1$  и  $k$  листов в зонах контакта концов второго, третьего...  $k$  листов с поверхностями первого, второго...  $k-1$  листов.

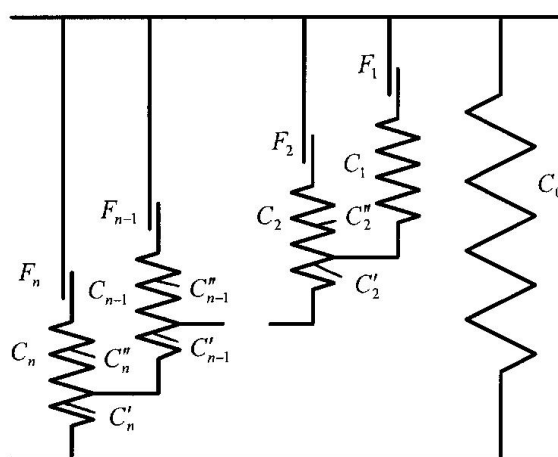


Рис. 2. Модель упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры

Для оценки полноты отражения реальных свойств листовой рессоры разработан и изготовлен механический аналог трехлистовой рессоры, содержащий соответствующее количество пружин и элементов сухого трения. Механический аналог позволял переходить в исследованиях от предлагаемой модели к модели [3], используя одни и те же элементы, которые должны отражать свойства контактирующих поверхностей листов при их относительном перемещении в процессе работы рессоры.

На рис.3 показана схема разработанного устройства механической модели упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры.

Устройство работает следующим образом. При ходе сжатия, т.е. при сжатии пружины 17, крышка 8 идет навстречу опорной плите 1. Под действием сил трения, возникающих между пластинчатыми пружинами 9, 12 и кулачками 16, 11 начинают сжиматься пружины 6, 2 и 4. При этом суммарная жесткость пружин 6 и 2, соединенных последовательно, превышает суммарную жесткость пружин 4 и 2, также соединенных последовательно. Изгибная жест-





а при использовании модели [3] -  $C = C_0 + C_1 + C_2$ .

Эти выражения отличаются друг от друга вторыми их слагаемыми, причем  $\frac{C_1 C_2'}{C_1 + C_2'} < C_1$ . Это отличие показывает необходимость учета всех вышеуказанных требований к модели упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры.

При проскальзывании первого листа относительно конца второго листа жесткость системы в обоих случаях одинакова и равна  $C = C_0 + C_2$ . В момент начала проскальзывания второго листа относительно третьего  $C = C_0$ .

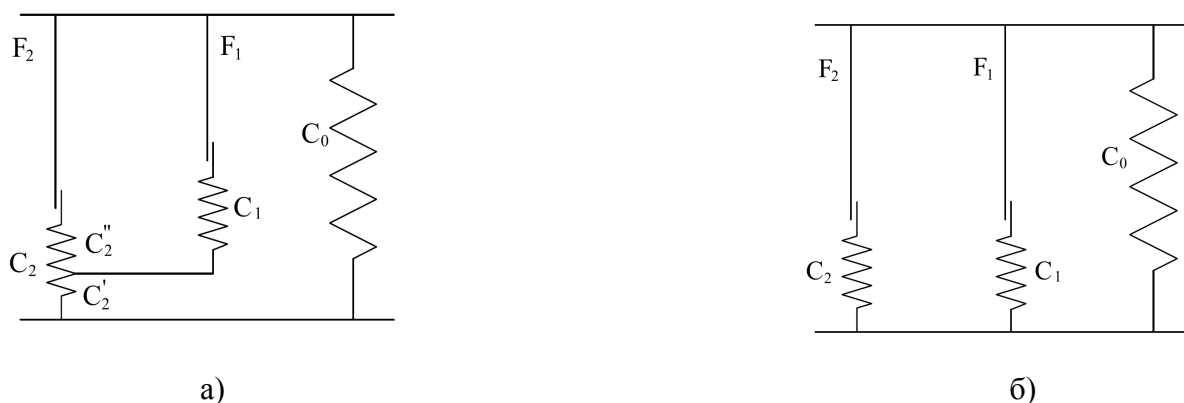


Рис. 4. Модели упругих и демпфирующих свойств трехлистовой рессоры:  
а) предлагаемая; б) в соответствии с [3]

### Список литературы

1. Михайлов В.Г., Мишута Д.В. Оценка эффективности систем подрессоривания грузового автомобиля // Автомобильная промышленность. 2015. №5. С. 16-20.
2. Савельев В.А. Взаимосвязь динамической энергоемкости, жесткости и демпфирующих свойств подвески автомобиля // Материалы 77-й международной научно-технической конференции ААИ “Автомобиле- и тракторостроение в России: Приоритеты развития и подготовка кадров”. Книга 4 “Математическое моделирование и оптимизация конструкции автотранспортных средств”. С. 116-119.
3. Кольцов В.И., Пирковский Ю.В., Ковицкий В.И. Модель листовой рессоры. – Автомобильная промышленность, 1970, № 10. С. 14-16.
4. Савельев В.А. Моделирование демпфирующей силы листовой рессоры // Автомобильная промышленность. 1979. № 12. С. 13-15.
5. Савельев В.А. Моделирование упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры // Машиноведение. 1986. №3. С. 56-61.
6. Савельев В.А. О “блокировании” подвески автомобиля силами сухого трения в листовой рессоре // Автомобильная промышленность. 2015. №3. С. 21-23.
7. Пономарев Ю.К. Особенности гистерезиса пар сухого трения при круговых движениях вибратора // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. №4(3). Т.13. С. 1192-1195.
8. Путятин В.В., Атоян А.М. К оценке блокирующего эффекта сил сухого трения в подвеске автомобиля // Автомобильная промышленность. 1975. № 4. С. 26-28.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

## **ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ ЧАСТИЦЫ В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА-СОЛНЦЕ**

**Т.В. Сальникова<sup>1,2</sup>, С.Я. Степанов<sup>3</sup>, А.И. Шувалова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
механико-математический факультет

119991 Москва, Ленинские горы, д. 1, ГСП-1, e-mail: [tatiana.salnikova@gmail.com](mailto:tatiana.salnikova@gmail.com)

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов, кафедра Механики космического полета.  
117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6

<sup>3</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального исследовательского  
центра «Информатика и управление» Российской академии наук.  
119333 Москва, ул. Вавилова, д.40

Рассматривается плоская бициркулярная ограниченная задача четырех тел на примере системы Земля-Луна-Солнце-Частица, где Солнце оказывает фотогравитационное действие. В рамках подвижной системы координат, связанной с Землей и Луной, ведется поиск периодических решений и анализируется их устойчивость. Описанная математическая модель объясняет непостоянство наблюдения облаков Кордылевского – гипотетических скоплений космической пыли в окрестности треугольных точек либрации системы Земля-Луна.

*Ключевые слова:* периодическое решение, устойчивость, задача четырех тел, фотогравитационная задача.

Как известно, в круговой ограниченной задаче трех тел существуют пять положений относительного равновесия, два из которых – треугольные точки либрации Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$  – при определенном соотношении притягивающих масс [1] будут устойчивы по Ляпунову. Лагранжевы точки либрации представляют и практический интерес в астрономии. Астероиды, находящиеся в окрестности треугольной точки либрации, называются троянскими. Один астероид такого типа найден в системе Солнце-Земля в 2010 году, а для системы Солнце-Юпитер описано более шести тысяч троянских астероидов.

Для системы Земля-Луна треугольные точки либрации обладают устойчивостью. Открытие троянских спутников Земли принадлежит польскому астроному Казимежу Кордылевскому. Вместо астероидов он целенаправленно искал скопления космической пыли. В 1956 году Кордылевский впервые зафиксировал светящиеся облакоподобные области в окрестности точки  $L_5$ , а в 1961 году представил фотографические доказательства [2]. Затем было получено множество подтверждающих наблюдений [3] и опровергающих [4] наблюдений. Исследователи сошлись на том, что скопления имеют нестабильный характер.

В то же время исследовалась задача о движении спутника в окрестности треугольной точки либрации системы Земля-Луна [1], где было показано отсутствие равновесия в треугольных точках либрации при учете гравитационного действия Солнца. Для каждой треугольной точки либрации были найдены периодические траектории в ее окрестности с периодом в синодический месяц: пара почти совпадающих устойчивых орбит и одна неустойчивая [1, 5-7]. Существование устойчивых периодических орбит может частично объяснить феномен кажущегося исчезновения и появления облака частиц на линиях визирования треугольных точек либрации [8]. Еще одно исследование связано с определением параметров трубки, в рамках которой частицы могут двигаться в окрестности периодических траекторий [9].

Световое давление Солнца для задачи Земля-Луна-Солнце-Частица является существенным возмущающим фактором. Существовало предположение, что для скопления частиц облака Кордылевского световое давление уравнивает гравитационное действие Солнца. Это предположение было опровергнуто [10]. Но в фотогравитационной задаче существуют периодические решения, которые при малом солнечном давлении близки к периодическим решениям невозмущенной задачи четырех тел [11].

### Постановка задачи

Мы исследуем плоскую бициркулярную задачу четырех тел на примере движения Частицы (P) в гравитационном поле Земли (E), Луны (M) и Солнца (S), при учете возмущения, связанного со световым давлением Солнца. Земля и Луна движутся вокруг их общего центра масс O с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Если принять за единицы массы и длины сумму масс Земли и Луны и расстояние между ними  $|EM|$ , а за единицу времени – величину, нормализующую гравитационную постоянную  $\gamma$ , то массы Земли и Луны равны соответственно  $(1-\mu)$  и  $\mu$ , где  $\mu = 0.01215$ . Из уравнения кругового движения  $\omega_1^2 |EM|^3 = \gamma$  следует, что  $\omega_1 = 1$ . Движение частицы рассматриваем во вращающейся системе координат Oxy с центром в точке O, ось Ox направлена от Земли к Луне. Бариецентр O движется по круговой орбите с центром S и радиусом  $R = 389.18$ , с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1/13.36$ . Масса Солнца  $m_s$  выражается из условия движения по круговой орбите:  $\omega^2 R^3 = \gamma m_s \Rightarrow m_s = \omega^2 R^3$ .

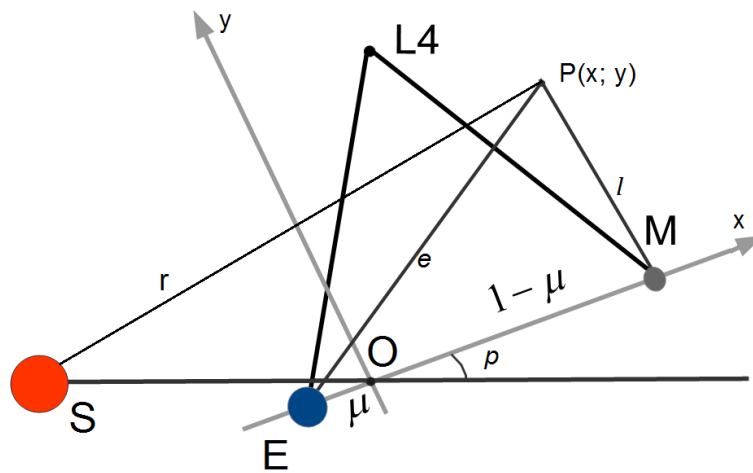


Рис.1. Бициркулярная задача четырех тел: Oxy – подвижная система координат, O совершает круговое движение вокруг S, E и M движутся вокруг своего бариецентра O.

Период обращения системы равен одному синодическому месяцу. За начало движения взят момент полнолуния, когда Солнце, Земля и Луна расположены на одной прямой. Влияние светового давления учитывается с помощью коэффициента  $(1-\varepsilon)$  перед гравитационным потенциалом Солнца, где  $\varepsilon$  равно отношению силы светового давления, действующей на Частицу к силе гравитационного притяжения Солнца. Лагранжиан Частицы, деленный на её массу, в подвижной системе координат будет иметь вид:

$$L = \frac{1}{2} R^2 \omega^2 + R \omega (x \cos p - y \sin p) + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{(1-\mu)}{e} + \frac{\mu}{l} + \frac{(1-\varepsilon)R^3 \omega^2}{r},$$

где  $e = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ ,  $l = \sqrt{(1-x-\mu)^2 + y^2}$ ,  $r = ((R \cos p + x)^2 + (-R \sin p + y)^2)^{0.5}$ ,  $p = (1-\omega)t$  - угол между  $\overline{SO}$  и  $\overline{EM}$ . Уравнения движения Частицы в случае разложения лагранжиана по степеням R и отбрасывании членов порядка  $1/R$  и меньше имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2v + (1 - (1-\varepsilon)\omega^2)x + 3(1-\varepsilon)\omega^2 \cos p (x \cos p - y \sin p) - \\ \quad -(1-\mu)(x+\mu)e^{-3} + \mu(1-\mu-x)l^{-3} + R\varepsilon\omega^2 \cos p, \\ \dot{v} = -2u + (1 - (1-\varepsilon)\omega^2)y - 3(1-\varepsilon)\omega^2 \sin p (x \cos p - y \sin p) - \\ \quad -(1-\mu)ye^{-3} + \mu yl^{-3} - R\varepsilon\omega^2 \sin p. \end{cases} \quad (1)$$

Период полученной системы равен  $T = 2\pi / (1 - \omega)$ .

### Случай $\varepsilon = 0$ - отсутствие светового давления

Случай  $\varepsilon = 0$  был исследован ранее [1,5,6]. На Рис.2 изображены три одномесячных известных периодических траектории для окрестности треугольной точки либрации  $L_4$ . Симметричная относительно оси  $Ox$  картина имеет место для окрестности точки либрации  $L_5$ .

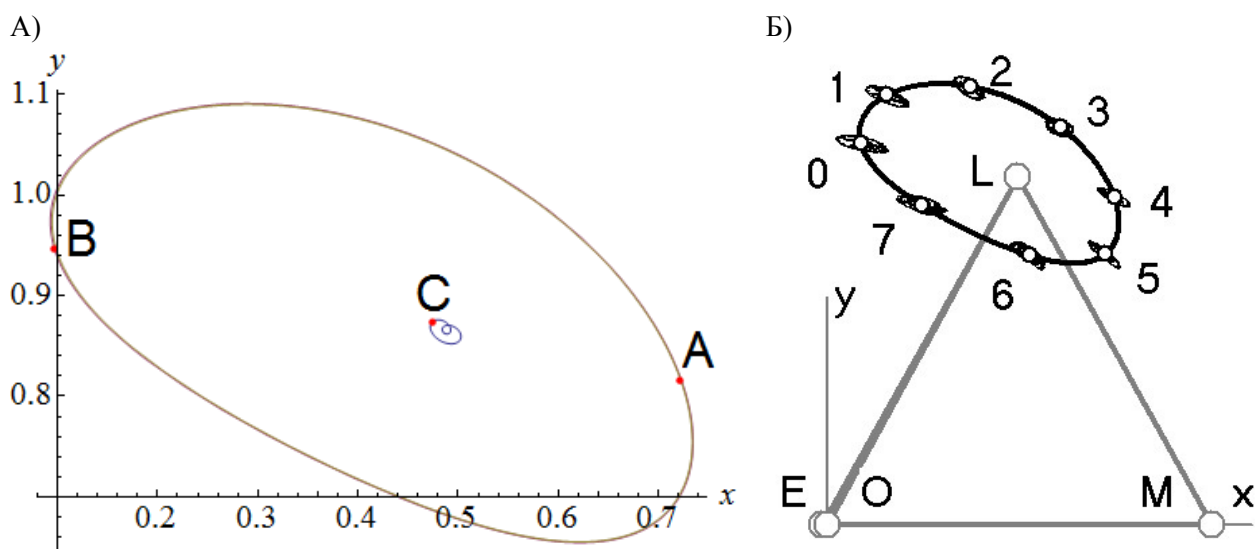


Рис. 2. А) Периодические траектории плоской круговой задачи трех тел Земля-Луна-Частица с учетом гравитационного действия Солнца: траектории с началом в точках А и В устойчивы в линейном приближении и почти совпадают (совпадают при интегрировании усеченных уравнений (1), получаются сдвигом времени  $t \rightarrow t + T / 2$ ), траектория с началом в точке С расположена вблизи треугольной точки либрации и обладает неустойчивостью. Б) Результаты численного эксперимента, показывающие устойчивость траектории с началом в точке В в нелинейном приближении: множество точек, окружающих точки  $0, \dots, 7$  соответствуют множеству позиций возмущенных начальных условий В в моменты времени  $t_j = jT / 8$ , где  $j = 0, \dots, 7$ .

### Периодические решения и их устойчивость

Пусть  $\xi = (x, y, u, v)^T$ , тогда уравнения движения (1) можно записать в векторно-матричной форме:  $\dot{\xi}(\xi^0, t) = F(\xi(\xi^0, t), t)$ , где  $\xi^0 = \xi(\xi^0, 0)$  - начальное условие. Периодические решения определяются численно методом Ньютона. Рассмотрим систему сопряженных уравнений:  $\dot{A}(t) = \frac{\partial F}{\partial \xi} A(t)$ ,  $A(t) = \frac{\partial \xi(\xi^0, t)}{\partial \xi^0}$ ,  $A(0) = I$ , где  $I$  – единичная матрица. Коррекция начальных условий  $\delta \xi^0$  периодического решения с периодом  $T$  получается из уравнения:  $(A(T) - I)\delta \xi^0 = \xi^0 - \xi(\xi^0, T)$ . Начальные условия для итераций – начальные условия устойчивых периодических траекторий в отсутствии светового давления, то есть при  $\varepsilon = 0$ . Методом продолжения по параметру строятся решения для  $\varepsilon > 0$ .

Устойчивость полученной численно траектории определяется из условия для мультипликаторов матрицы монодромии  $A(T)$ . Для орбитальной устойчивости в линейном приближении необходимо, чтобы абсолютные значения мультипликаторов матрицы  $A(T)$  не превосходили 1. Характеристическое уравнение системы имеет вид:  $\det(A(T) - \lambda I) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ , где  $a_4 = 1$ . В силу того, что система гамильто-

нова: если  $\lambda = q$  - мультипликатор матрицы монодромии, то  $\bar{q}$ ,  $\frac{1}{q}$ ,  $\frac{1}{\bar{q}}$  также являются корнями характеристического уравнения, тогда  $a_4 = q \cdot \bar{q} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\bar{q}} = 1$  и условие устойчивости периодического движения сводится к необходимости равенства единице абсолютных значений  $\lambda$ . Если использовать дробно-линейное преобразование  $\lambda = \frac{z+1}{z-1}$ , переводящее единичную окружность в мнимую ось, то для выполнения условия устойчивости корни измененного уравнения должны быть чисто мнимыми:  $b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 = 0$ , где  $b_0 = 2 + a_1 + a_2 + a_3$ ,  $b_1 = 2(a_1 - a_3)$ ,  $b_2 = 12 - 2a_2$ ,  $b_3 = 2(a_3 - a_1)$ ,  $b_4 = 2 - a_1 + a_2 - a_3$ . Условия, при которых корни будут чисто мнимые:  $b_1 = b_3 = 0$ ,  $\frac{b_4}{b_0} > 0$ ,  $\frac{b_2}{b_0} > 0$ ,  $b_2^2 - 4b_0 b_4 > 0$ . Ниже приведены численно полученные графики зависимости  $\det(A(T) - I)(\varepsilon)$  и  $z^2(\varepsilon)$ .

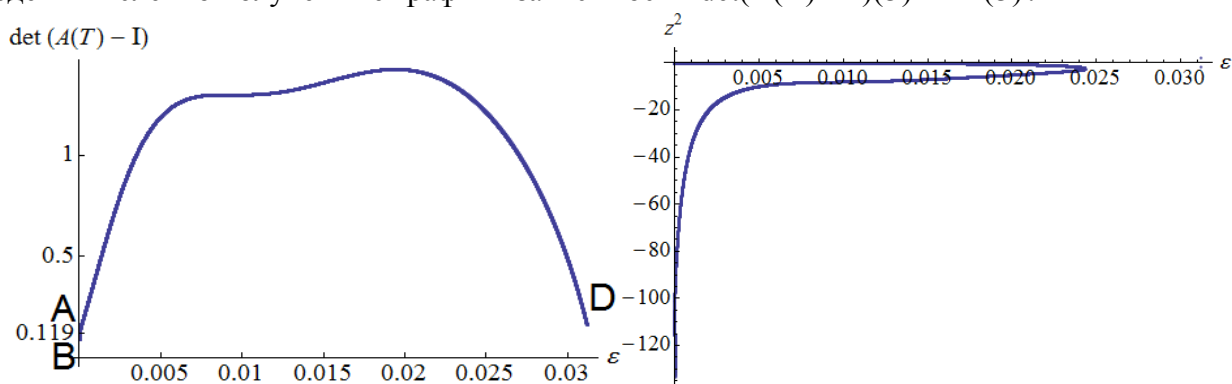


Рис. 3. Данные вычислений периодических траекторий.

При начальном условии для итерации из точки А (0.722049, 0.816107, 0.073051, -0.205125) при  $\varepsilon = 0$  методом продолжения по параметру начальное условие периодической траектории переходит в точку D (0.504580, 0.457012, -0.819844, -0.647328) при  $\varepsilon = 0.031207$ , причем траектории становятся неустойчивыми при  $\varepsilon = 0.024346$  и больше. Из В (0.098704, 0.946749, -0.050355, 0.169969) при  $\varepsilon = 0$  траектория переходит в точку G (0.275834, 0.919029, -0.029094, 0.110412) при  $\varepsilon = 0.0000583$ , весь участок ВG обладает устойчивостью (Рис.4-6). Для окрестности точки либрации  $L_5$  ожидается симметричная относительно оси  $Ox$  картина, получающаяся преобразованием  $y \rightarrow (-y)$ .

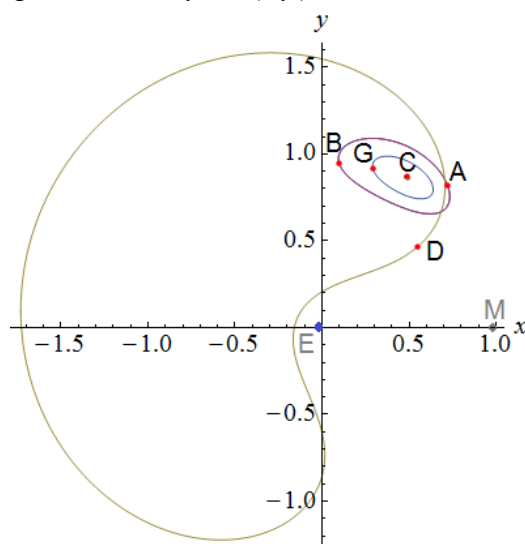


Рис. 4. Периодические орбиты для различных значений  $\varepsilon$ .

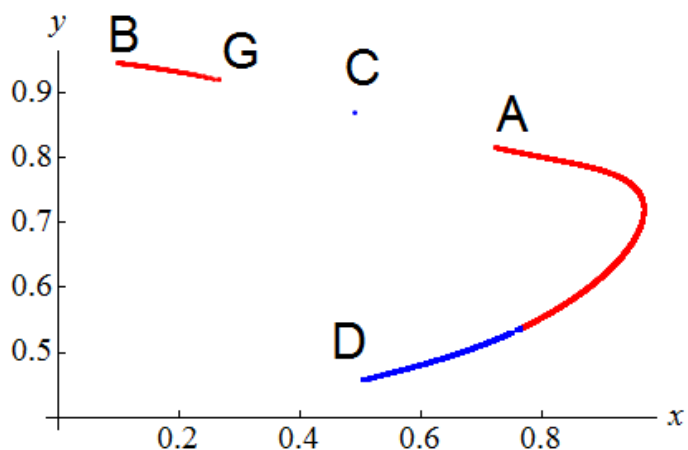


Рис. 5. Начальные условия  $(x, y)$  периодических траекторий для различных значений  $\varepsilon$ . Красные и синие линии отвечают устойчивой и неустойчивой траекториям соответственно.

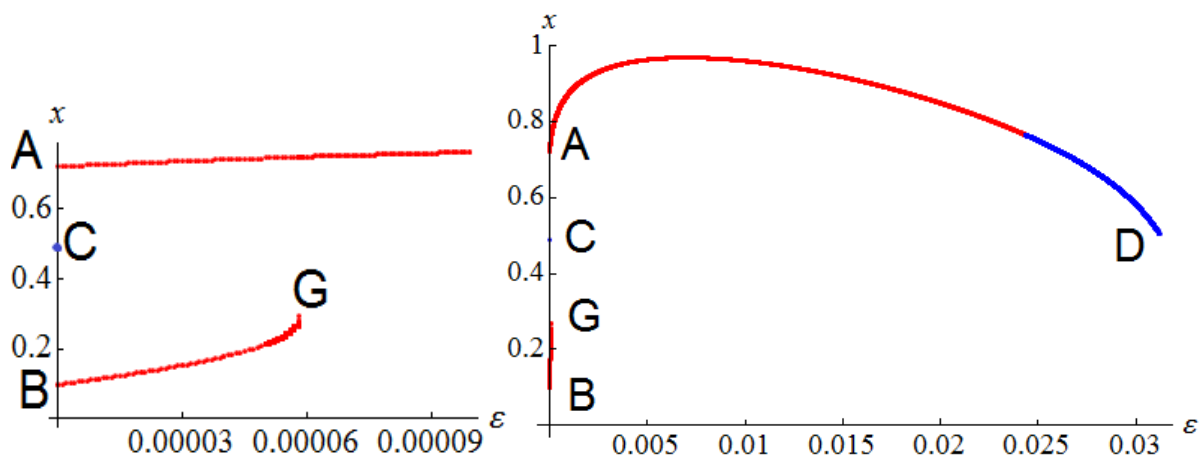


Рис. 6. Зависимость начального условия  $x$  периодической траектории от  $\varepsilon$ . Красные и синие линии отвечают устойчивой и неустойчивой траекториям соответственно.

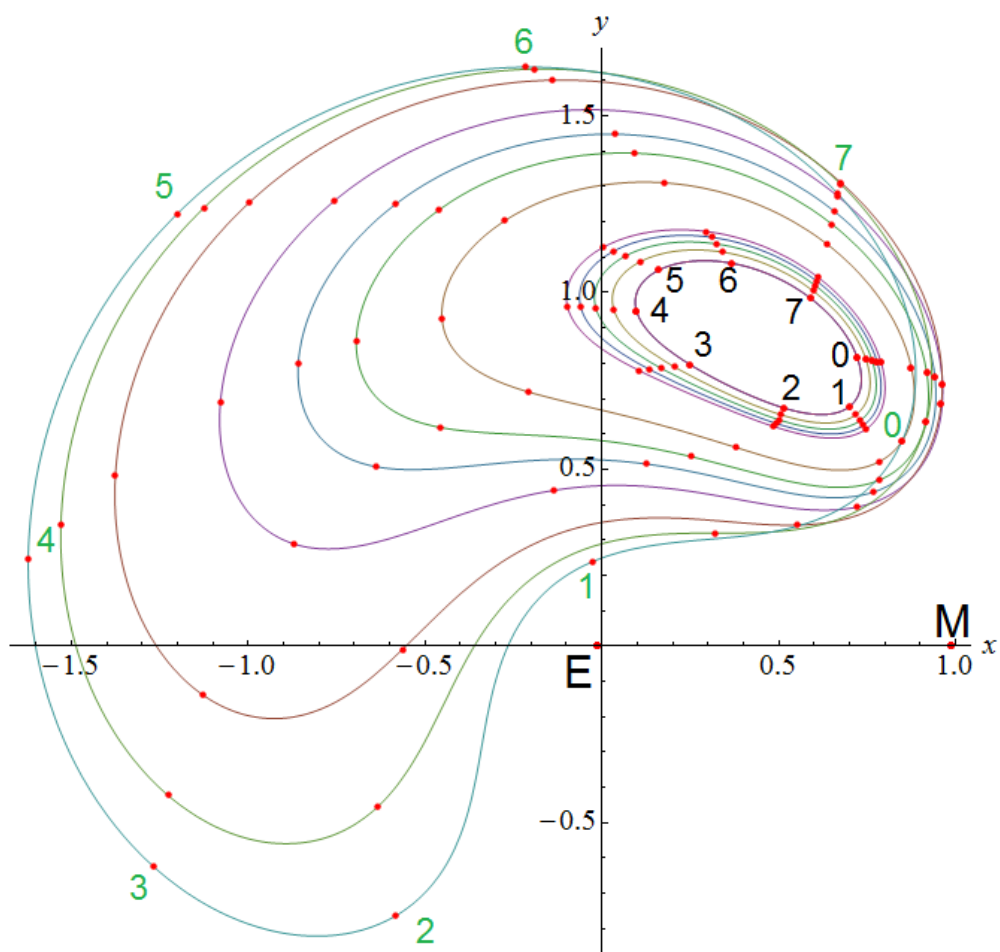


Рис. 7. Семейство устойчивых периодических орбит: в центре траектория с началом движения в точке А при  $\varepsilon = 0$ , охватывающие периодические траектории получены при  $\varepsilon = 0.00005, 0.0001, 0.00015, 0.0002, 0.001, 0.002, 0.003, 0.005, 0.01, 0.015, 0.02$ . Выделенные точки траекторий соответствуют позициям Частицы в моменты времени  $t_j = jT / 8$ , где  $j = 0, \dots, 7$  отмечены черными и зелеными цифрами.

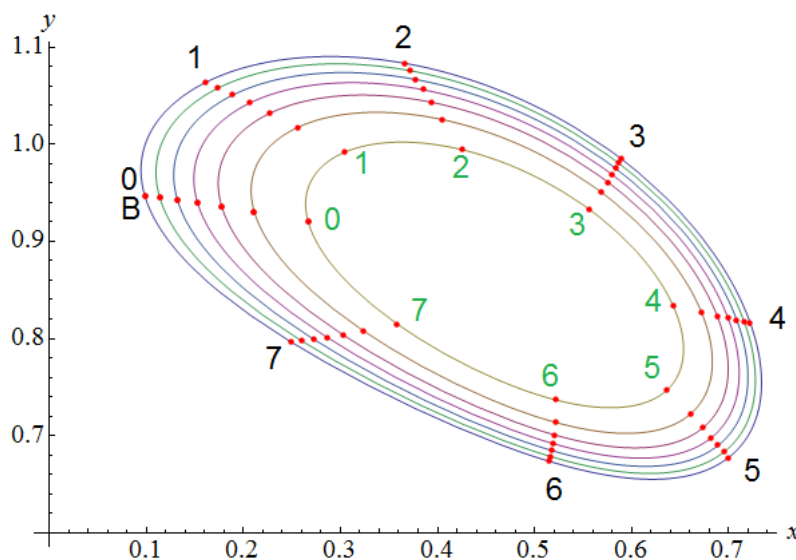


Рис. 8. Семейство устойчивых периодических орбит: в центре траектория с началом движения в точке В при  $\varepsilon = 0$ , лежащие внутри периодические траектории получены при  $\varepsilon = 0.00001, 0.00002, 0.00003, 0.00004, 0.00005, 0.000058$ . Выделенные точки траекторий соответствуют позициям Частицы в моменты времени  $t_j = jT / 8$ , где  $j = 0, \dots, 7$  отмечены черными и зелеными цифрами.



### **Заключение**

Численно получены периодические орбиты в окрестности треугольных точек либрации системы Земля-Луна при учете светового давления и гравитационного действия Солнца. Определены условия устойчивости в линейном приближении. Построены бифуркационные диаграммы зависимости начальных условий периодических движений от параметра  $\varepsilon$ , характеризующего световое давление.

Полученные результаты применимы для изучения пылевых скоплений в окрестности треугольных точек либрации, в частности облаков Кордылевского. Световое давление существенно изменяет полученные ранее периодические траектории. Разброс частиц по разным периодическим траекториям, отвечающим разным параметрам светового возмущения (Рис.7 и 8), влияет на их совокупную видимость. Поэтому условием наилучшего наблюдения такой группы будет момент близости точек траекторий или момент, когда точки траекторий расположены на одной линии визирования с Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №15-01-03747 и №16-01-00625.

### **Список литературы**

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.:Наука, 1978, 312с.
2. Kordylewski K. Photographische Untersuchungen des Librationspunktes im System Erde-Mond // 1961, Acta Astronomica, Vol. 11, P.165.
3. Simpson J. Dust Cloud Moons of the Earth // Physics Today. 1967.vol. 20(2).P.39-46.
4. Valdes Fr. A Search for Objects near the Earth-Moon Lagrangian Points // Icarus. 1983. 53 P.453-457.
5. Schechter H.B. Three-dimensional nonlinear stability analysis of the Sun-perturbed Earth-Moon equilateral points // AIAA J. 1968. Vol. 6. no. 6. P. 1223-1228.
6. Kolenkiewicz R., Carpenter L. Stable periodic orbits about the Sun perturbed Earth-Moon triangular points // AIAA Journal. 1968. Vol. 6, no. 7. P. 1301-1304.
7. Simo C., Libre J., Martinez R., Gomez G. Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. II: Fundamentals: The Case of Triangular Libration Points. World Scientific Publishing Company. 2001. P. 159.
8. Сальникова Т.В., Степанов С.Я. Математическая модель образования космических пылевых облаков Кордылевского // Доклады академии наук. 2015. Т463. №2. с.164-167.
9. Сальникова Т.В., Степанов С.Я., Шувалова А.И. Вероятностная модель облаков Кордылевского // Доклады Академии наук. 2016. Т.468. №3.С.276-279.
10. Mignard F. Stability of  $L_4$  and  $L_5$  against radiation pressure // Celestial Mechanics. 1984. Vol. 34, no. 1. P. 275-287.
11. Salnikova T., Stepanov S. On the Kordylewski cosmic dust clouds // Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International Conference on, pp.1-3, 2-6 Feb. 2015.

## **К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ МЕТОДА КВАЗИДИАГОНАЛИЗАЦИИ И МЕТОДОВ, ИСПОЛЗУЮЩИХ ИДЕЮ ДЕКОМПОЗИЦИИ В СОЧЕТАНИИ С КОНДЕНСАЦИЕЙ, В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**

**Ю.Н.Самогин, В.П. Чирков**

Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
кафедра динамики и прочности машин им. В.В. Болотина.  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, дом 14, e-mail: [Samogin1812@yandex.ru](mailto:Samogin1812@yandex.ru)

Предложен метод расчета собственных частот и форм колебаний из заданного частотного диапазона, основанный на специальном сочетании декомпозиции с конденсацией. Проведено сопоставление метода квазидиагонализации с численными методами, использующими идею декомпозиции с конденсацией в задаче об определении низших собственных частот колебаний механической системы. Численные результаты, полученные по методу квазидиагонализации, достаточно хорошо согласуются с точным решением. Для первой низшей собственной частоты все методы (за исключением метода динамической и параметрической конденсации) дают удовлетворительную оценку точности (погрешность не более 2%). С ростом порядкового номера собственной частоты погрешность существенно возрастает (до 100%), а в методе квазидиагонализации не превосходит 1%.

Ключевые слова: квазидиагонализация, декомпозиция, конденсация, собственная частота, погрешность, колебания, частотный диапазон.

### **1. Описание метода квазидиагонализации**

Пусть уравнения свободных колебаний линейной механической системы в матричных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  – матрицы соответственно инерции и жесткости механической системы размерностью  $(N \times N)$ , а  $\mathbf{f}(t)$  – матрица-столбец обобщенных координат.

Разобьем систему (1) на  $m$  подсистем размерностью  $N_1, N_2, \dots, N_m$  [1]. При этом  $N_1 + N_2 + \dots + N_m = N$ . Перепишем уравнение (1), выделяя из матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  блоки, характеризующие движение  $j$ -й подсистемы:

$$\mathbf{M}_{jj} \frac{d^2 \mathbf{f}_j(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{f}_j(t) = - \sum_{k \neq j} \left( \mathbf{M}_{jk} \frac{d^2 \mathbf{f}_k(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{f}_k(t) \right), \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Помимо вектора обобщенных координат  $\mathbf{f}_j(t)$  данной подсистемы уравнение (2) содержит векторы обобщенных координат, относящихся к другим подсистемам. Эти векторы войдут через совокупность линейных членов, которые выписаны в уравнении (2) под знаком суммы.

Приведем  $j$ -ю подсистему к главным нормальным координатам, предварительно решив обобщенную проблему на собственные значения для линейной недиссипативной  $j$ -й подсистемы. Задача состоит в том, чтобы найти матрицу  $\mathbf{V}_j$  такую, что после подстановки

$$\mathbf{f}_j(t) = \mathbf{V}_j \mathbf{w}_j(t), \quad (3)$$

где  $\mathbf{w}_j(t)$  – вектор новых переменных, матрицы  $\mathbf{M}_{jj}$  и  $\mathbf{K}_{jj}$  приводились к виду

$$\mathbf{V}_j^T \mathbf{M}_{jj} \mathbf{V}_j = \mathbf{E}_{N_j}, \quad \mathbf{V}_j^T \mathbf{K}_{jj} \mathbf{V}_j = \mathbf{\Omega}_{N_j}^2.$$

Здесь  $\Omega_{N_j}^2 = \text{diag} [\omega_{j1}^2, \omega_{j2}^2, \dots, \omega_{jN_j}^2]$ ,  $\mathbf{E}_{N_j}$  – единичная матрица размерностью  $(N_j \times N_j)$ . Матрица  $\mathbf{V}_j$  имеет размерность  $(N_j \times N_j)$ , где  $N_j$  – число степеней свободы  $j$ -й подсистемы.

Выделим среди форм колебаний  $\mathbf{V}_j$  те формы  $\mathbf{V}_{\omega_j}$ , частоты которых лежат в некотором интересующем нас диапазоне, например,  $[0, \theta_{\max}]$ , остальные формы  $\mathbf{V}_{\Omega_j}$  исключим.

Возвращаясь к уравнению (2), перепишем его относительно вектора  $\mathbf{w}_j(t)$ , введенного посредством подстановки (3), в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{w}_j(t)}{dt^2} + \omega_j^2 \mathbf{w}_j(t) = & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\omega_j}^T \left[ \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \frac{d^2 \mathbf{w}_k(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \mathbf{w}_k(t) \right] - \\ & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\omega_j}^T \left[ \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \frac{d^2 \mathbf{w}_k(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \mathbf{w}_k(t) \right], \quad (j = 1, 2, \dots, m); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{w}_j(t)}{dt^2} + \Omega_j^2 \mathbf{w}_j(t) = & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \left[ \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \frac{d^2 \mathbf{w}_k(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \mathbf{w}_k(t) \right] - \\ & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \left[ \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \frac{d^2 \mathbf{w}_k(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \mathbf{w}_k(t) \right], \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (4) описывают колебания  $j$ -й подсистемы по формам, собственные частоты которых лежат в диапазоне  $[0, \theta_{\max}]$ , а (5) – по высокочастотным формам, частоты которых находятся за пределами  $\theta_{\max}$ . При этом  $\theta_j$  – верхняя граница частотного диапазона  $j$ -й подсистемы, которая выбирается из условий

$$\omega_{j1} \leq \omega_{j2} \leq \dots \leq \omega_{jn_j} \leq \theta_j, \quad \omega_{jn_{j+1}} > \theta_j, \quad \theta_{\max}^2 / \omega_{jn_{j+1}}^2 \ll 1. \quad (6)$$

Для исследования уравнений свободных колебаний (4), (5) решение ищем в виде

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W} e^{i\theta_{\max} t}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), (5) получаем

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \left[ 1 - \frac{\theta_{\max}^2}{\omega_j^2} \right] \mathbf{W}_j = & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\omega_j}^T \left[ -\mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \theta_{\max}^2 + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \right] \mathbf{W}_k - \\ & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\omega_j}^T \left[ -\mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \theta_{\max}^2 + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \right] \mathbf{W}_k, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Omega_j^2 \left[ 1 - \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \right] \mathbf{W}_j = & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \left[ -\mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \theta_{\max}^2 + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_k k} \right] \mathbf{W}_k - \\ & - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \left[ -\mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \theta_{\max}^2 + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_k k} \right] \mathbf{W}_k, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (9)$$

Оценим слагаемые, входящие в уравнение (9)

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_{jk}} &\ll \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \|\mathbf{M}_{jk}\|_2 / \sqrt{\|\mathbf{M}_{jj}\|_2 \|\mathbf{M}_{kk}\|_2} \ll 1, \\ \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \mathbf{M}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_{jk}} &\ll \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \|\mathbf{M}_{jk}\|_2 / \sqrt{\|\mathbf{M}_{jj}\|_2 \|\mathbf{M}_{kk}\|_2} \ll 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, так как  $\frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2} \ll 1$ , то  $\left[1 - \frac{\theta_{\max}^2}{\Omega_j^2}\right] \approx 1$ . Тогда с учетом (10) уравнение (9)

переписывается в виде

$$\Omega_j^2 \mathbf{W}_j = - \sum_{k \neq j} \mathbf{V}_{\Omega_j}^T \left[ \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\omega_{jk}} + \mathbf{K}_{jk} \mathbf{V}_{\Omega_{jk}} \right] \mathbf{W}_k, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

Существенной частью алгоритма на данном этапе является упорядочение диагональных элементов матриц с тем, чтобы в процессе вычислений выделить все собственные частоты каждой подсистемы, не превышающие  $\theta_j$ .

После объединения уравнений подсистем получим связанную систему уравнений порядка  $N$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{n,n} & \bar{\mathbf{M}}_{n,N-n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{n,n} & \bar{\mathbf{K}}_{n,N-n} \\ \bar{\mathbf{K}}_{N-n,n} & \bar{\mathbf{K}}_{N-n,N-n} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n(t) \\ \mathbf{w}_{N-n}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

где

$$\bar{\mathbf{M}}_{n,n} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{M} \mathbf{V}_n, \bar{\mathbf{M}}_{n,N-n} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{M} \mathbf{V}_{N-n}, \bar{\mathbf{K}}_{n,n} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{K} \mathbf{V}_n, \bar{\mathbf{K}}_{n,N-n} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{K} \mathbf{V}_{N-n}, \bar{\mathbf{K}}_{N-n,n} = \mathbf{V}_{N-n}^T \mathbf{K} \mathbf{V}_n,$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_n \quad \mathbf{V}_{N-n}], \mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1\omega_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{2\omega_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \mathbf{V}_{j\omega_j} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{m\omega_m} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{N-n} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1\Omega_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{2\Omega_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \mathbf{V}_{j\Omega_j} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{m\Omega_m} \end{bmatrix}.$$

Из второго уравнения (12) выразим  $\mathbf{w}_{N-n}(t)$  через  $\mathbf{w}_n(t)$

$$\mathbf{w}_{N-n}(t) = -\bar{\mathbf{K}}_{N-n,N-n}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{N-n,n} \mathbf{w}_n(t). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем редуцированную систему уравнений порядка  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$  для вычисления собственных частот и форм колебаний:

$$\left\{ \bar{\mathbf{K}}_n^* - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_n^* \right\} \mathbf{W}_n = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{K}}_n^* = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_n^* = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ , а матрица  $\mathbf{U}$  в силу (13) равна

$$\mathbf{U} = [\mathbf{V}_n \quad \mathbf{V}_{N-n}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \bar{\mathbf{K}}_{N-n,N-n}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{N-n,n} \end{bmatrix}.$$

В частном случае, когда подсистемы слабо связаны между собой, т.е.

$$\|\mathbf{M}_{jk}\|_2 / \sqrt{\|\mathbf{M}_{jj}\|_2 \|\mathbf{M}_{kk}\|_2} \ll 1, \quad \|\mathbf{K}_{jk}\|_2 / \sqrt{\|\mathbf{K}_{jj}\|_2 \|\mathbf{K}_{kk}\|_2} \ll 1, \quad (j, k = 1, 2, \dots, m),$$

уравнение (14) упрощается

$$\left\{ \bar{\mathbf{K}}_{n,n} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{n,n} \right\} \mathbf{W}_n = \mathbf{0}.$$

Таким образом, предложенный метод квазидиагонализации имеет два существенных преимущества. Во-первых, матрицы либо диагональные, либо блочно-диагональные. Во-вторых, порядок системы сокращен с  $N$  до  $n$ . Кроме того, конденсация по частотному признаку ведет к улучшению устойчивости счета, так как обусловленность матрицы  $\bar{\mathbf{M}}_{n,n}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n,n}$ , определяющей устойчивость, зависит от отношения высшей собственной частоты системы к низшей.

## 2. Решение тестовой задачи

К современным методам исследования механических систем на основе декомпозиции относятся методы статической, динамической и параметрической конденсации, метод квазидиагонализации, методы Крона и покомпонентного синтеза форм. Для сравнения их между собой рассмотрим задачу  $\mathbf{K}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{w}$  о нахождении низших собственных значений, когда матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  и инерции  $\mathbf{M}$  имеют вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3,0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 11,0 & 5,0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,0 & 16,0 & 3,0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,0 & 8,0 & 1,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Результаты решения задачи перечисленными методами, представлены в таблице 1. При этом в методах статической и динамической конденсации система разбивалась на две под-системы:

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right].$$

В методе параметрической конденсации рассмотрены два случая разделения системы на подсистемы

$$\mathbf{K}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right], \quad \mathbf{K}_2 = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right].$$

В методе покомпонентного синтеза форм конструкция разбивалась на две и три подконструкции

$$\mathbf{K}_1 = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right], \quad \mathbf{K}_2 = \left[ \begin{array}{c|ccc|cc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right].$$

В методе Крона конструкция разбивалась на две подконструкции

$$K = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 5,0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right].$$

В методе квазидиагонализации разбиение проводилось на две подсистемы

$$K = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 5,5 & -5,0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 8,0 & -3,0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3,0 & 4,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 \end{array} \right].$$

Аналогично разбивалась матрица инерции **M**.

Численные результаты приведены в таблице 1. Результаты, полученные по методу квазидиагонализации, достаточно хорошо согласуются с решением по методу Крона (точное решение). Для первой низшей собственной частоты все методы (за исключением метода динамической и параметрической конденсации) дают удовлетворительную оценку точности (погрешность не более 2%). С ростом порядкового номера собственной частоты погрешность существенно возрастает (до 100%), а в методе квазидиагонализации не превосходит 1%.

Долгое время основным методом расчета собственных частот и форм колебаний в различных программных комплексах являлся метод итераций в подпространстве [4,5]. В последние годы на смену этому методу пришел блочный метод Ланцоша со сдвигами. Следует отметить, что алгоритм Ланцоша для малоразмерных матриц требует в несколько раз меньше временных затрат, чем алгоритм метода итераций в подпространстве. В случае больших матриц временные затраты обоих методов практически одинаковы [5].

Таблица 1

**Сравнение методов, использующих идею декомпозиции в сочетании с конденсацией**

Наименование метода	Вариант разбиения	$\lambda_1, c^{-2}$	$\lambda_2, c^{-2}$	$\lambda_3, c^{-2}$	Относит. погрешность, %		
					$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
Статическая конденсация	1	0,005772	0,286	1,098	0,505	15,323	119,2
Динамическая конденсация	1	0,145	0,691	1,725	2425	178,62 9	245,0
Параметрическая конденсация	1	0,006301	0,469	0,91	9,716	89,113	82,0
	2	0,006497	0,292	1,106	13,12 9	17,742	121,2
Покомпонентный синтез форм	1	0,005777	0,365	0,552	0,592	47,177	10,4
	2	0,005861	0,314	-----	2,0	26,6	-----
Метод Крона	1	0,005743	0,2476	0,5	0,0	0,0	0,0
Метод квазидиагонализации	1	0,005746	0,250	0,505	0,052	0,806	1,0

Покажем эффективность алгоритма метода квазидиагонализации по сравнению с методами итераций в подпространстве и методом Ланцоша для мало- и больших матриц

риц. На рис. 1 приведены зависимости затрат машинного времени ЭВМ в функции количества вычисляемых низших собственных частот и форм колебаний  $p$  размерности рассматриваемой механической системы  $N$ . Все расчеты выполнены на базе процессора Intel Pentium Dual-Core E 5300 2,6 GHz. Сплошная линия соответствует методу итераций в подпространстве, штриховая – методу Ланцоша, а точечная методу квазидиагонализации.

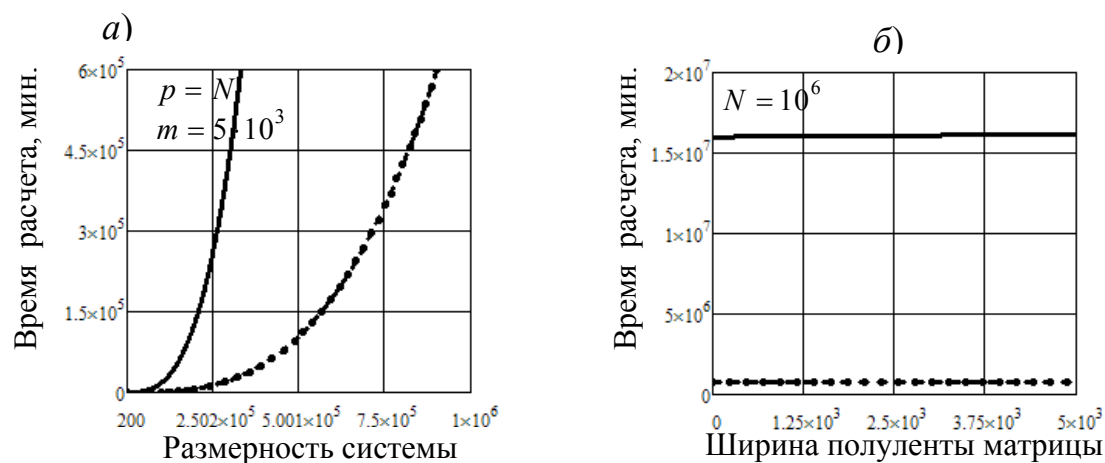


Рис. 1. Полная проблема собственных значений

Из рис.1 видно, что алгоритмы метода квазидиагонализации и метода Ланцоша оказались быстрее, чем алгоритм метода итераций в подпространстве. При этом временные затраты методов Ланцоша и квазидиагонализации практически одинаковы.

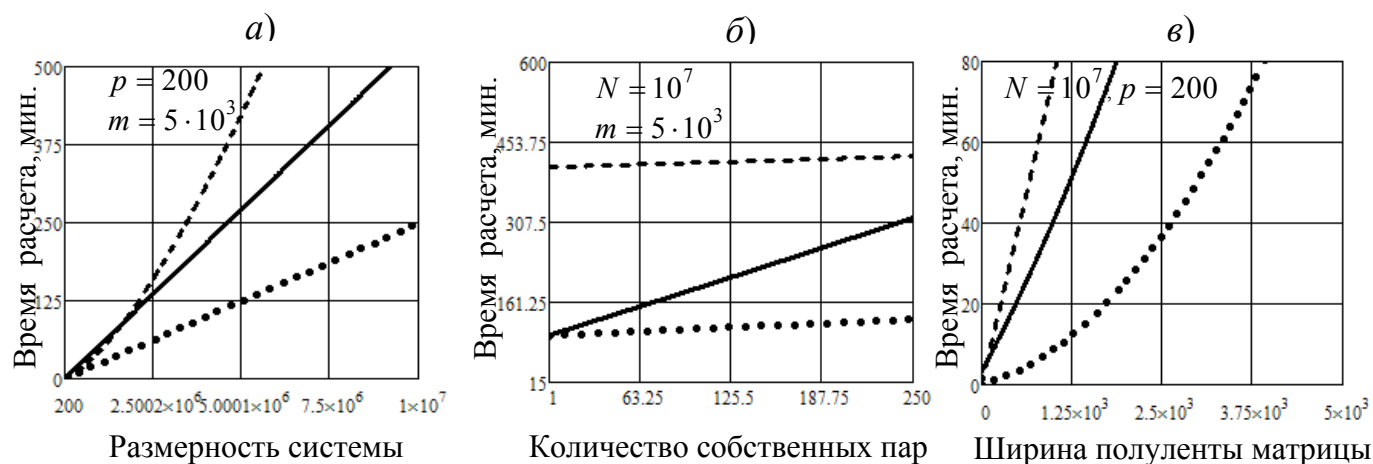


Рис. 2. Частичная проблема собственных значений

Кривые на рис. 2 показывают, что с ростом размерности системы (до  $\approx 2 \cdot 10^6$  неизвестных) алгоритм метода Ланцоша требует меньше временных затрат, чем метод итераций в подпространстве. С дальнейшим ростом размерности системы временные затраты на поиск решения в методе Ланцоша растут быстрее в отличие от метода итераций в подпространстве.

В таблице 3 приведены затраты машинного времени ЭВМ для моделей (таблица 2) с числом степеней свободы до 50 000. Как видно из таблицы 3, эффективность метода квазидиагонализации в скорости решения частичной задачи на собственные значения по сравнению с алгоритмом Ланцоша составляет  $\approx 1,5$  раза, а с методом итераций в подпространстве  $\approx 5$  раз.

Таблица 2

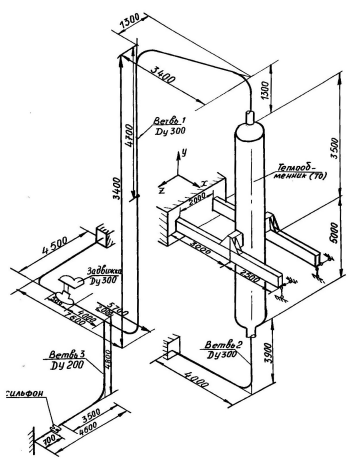
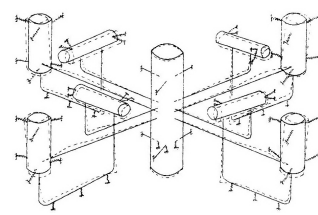
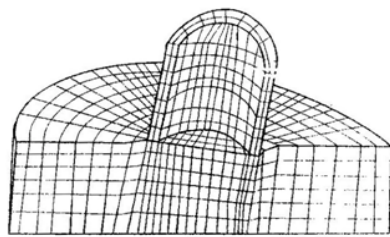
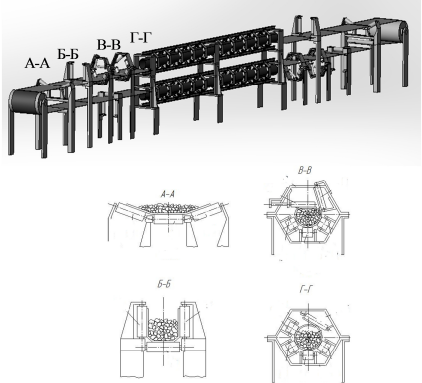
№ п.п.	Механическая система			Конечно-элементная модель
	Число узлов	Число элементов	Число неизвестных	Количество вычисляемых собственных пар
1	Теплообменник и трубопроводная система			
	69	32	354	10
2	Реактор ВВЭР-1000 и его технологическое оборудование			
	220	110	1236	20
3	Слой осадочных пород – фундаментный блок – защитная оболочка			
	14880	5928	44670	200
4	Ленточный трубчатый конвейер			
	6014	3298	36084	150



Таблица 3.

Номер модели	Время расчета, мин			$\frac{t_p}{t_1}$	$\frac{t_p}{t_2}$
	Метод итераций подпространства $t_p$	Метод Ланцоша $t_1$	Метод Квазидиагонализации $t_2$		
1	$7,337 \times 10^{-6}$	$1,758 \times 10^{-6}$	$9,545 \times 10^{-7}$	4,17	7,69
2	$1,376 \times 10^{-4}$	$4,314 \times 10^{-5}$	$2,563 \times 10^{-5}$	3,19	5,37
3	0,456	0,134	0,105	3,4	4,33
4	0,311	0,105	0,084	2,96	3,70

Таким образом, как следует из рис. 1,2 во всех случаях метод квазидиагонализации оказался быстрее, чем алгоритмы методов Ланцоша и итераций в подпространстве. Поэтому метод квазидиагонализации является более эффективным при решении одной и той же задачи на собственные значения для мало- и высокоразмерных матриц по сравнению с методами итераций в подпространстве и Ланцоша.

### Список литературы

1. Самогин Ю.Н. Расчет вынужденных колебаний линейных диссипативных систем на основе метода квазидиагонализации // Справочник. Инженерный журнал, 2015, №12. С. 21-31.
2. Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов. - М.: Физматлит, 2013.-316 с.
3. Мишенков Г.В., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов: - М.: Физматлит, 2015. - 536 с.
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 448с.
5. Жук Ю.Н., Симбиркин В.Н., Филимонов А.В., Якушев В.Л. Применение метода подконструкций для решения больших задач методом конечных элементов // С.-Петербургский научный форум «Наука и Общество». Информационные технологии: Тезисы докладов. С.-Петербург, 2009, с.255-259.

## **СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ МОДЕЛЯМ**

**А.А. Саркисян, С.О. Саркисян**

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна,  
кафедра высшей математики.

3126, Армения, г. Гюмри, Паруйр Севак 4, e-mail: [armenuhis@mail.ru](mailto:armenuhis@mail.ru)

В работе построена математическая модель динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пологих оболочек (пластин) при построении которой считается, что упругие прогибы сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по отношению к характерным размерам в плане. На основе построенной модели микрополярных упругих гибких пологих оболочек (пластин) решены конкретные задачи для них. Обсуждаются специфические стороны микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

**Ключевые слова:** микрополярный материал, гибкая пластинка, полая оболочка, прикладная динамическая модель, нелинейная деформация, классический материал, эффективность.

### **1. Введение.**

Последние десятилетия обобщенные континуумы механики твердого деформируемого тела и, в частности, моментная теория упругости (или континуум Коссера) развивались в известных монографиях, в трудах международной конференции и в отдельных журналах (целиком посвященных к указанной проблеме) [1-5].

Обзор работ, посвященных построению математических линейных моделей микрополярных упругих пластин и оболочек, осуществлен в работах [6, 7].

В работах [8-11] построены математически линейные модели динамики микрополярных упругих тонких пластин и оболочек на основе метода гипотез, которые формулированы на основе изучения асимптотических свойств решения граничных задач соответствующих трехмерных теорий в тонких областях пластин и оболочек.

В данной работе построена математическая модель динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек (фактически осуществлялось развитие теории Кармана и Маргерра [12-15] в случае микрополярных гибких пластин и пологих оболочек), на основе которых рассмотрены некоторые задачи о свободных колебаниях указанных тонких тел.

### **2. Геометрически нелинейная теория трехмерных микрополярных упругих пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.**

Рассмотрим пологую оболочку постоянной толщины  $2h$  как трёхмерное упругое микрополярное изотропное тело.

Геометрию срединной поверхности пологих оболочек, как принято, будем отождествлять с геометрией плоскости, на которую оболочка проектируется (опирается). В этом случае криволинейные координаты, откладываемые вдоль линий главных кривизн, можно считать совпадающими с декартовыми координатами  $x_1, x_2$  на плоскости. Ось  $z$  будет перпендикулярным к этой плоскости.

Основные уравнения трехмерной теории микрополярной упругости пологих оболочек (пластин) с независимыми полями перемещений и вращений при конечных перемещениях имеют вид:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + \frac{\sigma_{13}}{R_1} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sigma_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \sigma_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \sigma_{31} \frac{\partial V_1}{\partial z} + \sigma_{21} \omega_3 + \sigma_{31} \omega_2 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sigma_{22} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) + \sigma_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sigma_{32} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (\sigma_{32} + \sigma_{23}) \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2 \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{31} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sigma_{23} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \omega_3 - \sigma_{33} \omega_2 \right) = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + \frac{\sigma_{23}}{R_2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sigma_{11} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) + \sigma_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sigma_{31} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{31} + \sigma_{13}) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1 \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sigma_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \sigma_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \sigma_{32} \frac{\partial V_2}{\partial z} - \sigma_{12} \omega_3 + \sigma_{32} \omega_1 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{32} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sigma_{13} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \sigma_{33} \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \omega_3 + \sigma_{33} \omega_1 \right) = \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} - \frac{\sigma_{11}}{R_1} - \frac{\sigma_{22}}{R_2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sigma_{11} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) + \sigma_{13} \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sigma_{22} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) + \sigma_{23} \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{13} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) + \sigma_{23} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) + \sigma_{33} \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + \frac{\mu_{13}}{R_1} + \sigma_{23} - \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \mu_{21} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \mu_{31} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu_{22} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \mu_{21} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \mu_{32} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (\mu_{32} + \mu_{23}) \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{31} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \mu_{23} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \mu_{33} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right) + \sigma_{22} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) - \sigma_{33} \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1 \right) + \\ & + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \omega_3 \right) + \sigma_{23} \frac{\partial V_3}{\partial z} - \sigma_{32} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + \frac{\mu_{23}}{R_2} - \sigma_{13} + \sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu_{22} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \mu_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \mu_{32} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu_{11} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \mu_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \mu_{31} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\mu_{31} + \mu_{13}) \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{32} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \mu_{13} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \mu_{33} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) - \sigma_{11} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \omega_2 \right) - \sigma_{33} \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) - \sigma_{13} \frac{\partial V_3}{\partial z} + \sigma_{31} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial z} - \frac{\mu_{11}}{R_1} - \frac{\mu_{22}}{R_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu_{11} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\mu_{12} + \mu_{21}) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \mu_{13} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu_{22} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (\mu_{12} + \mu_{21}) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + \mu_{23} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{13} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + \mu_{23} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \mu_{33} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) + \sigma_{11} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) - \sigma_{22} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) + \\ & + \sigma_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \sigma_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{31} + \sigma_{13}) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1 \right) - \frac{1}{2} (\sigma_{32} + \sigma_{23}) \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2 \right) = \rho \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Физические соотношения

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{33})], \quad \gamma_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \quad (7)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ji}, \quad \gamma_{i3} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i}, \quad \gamma_{3i} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3} \quad (8)$$

$$\chi_{ii} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{jj} + \mu_{33}) \right] \quad (9)$$

$$\chi_{33} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{11} + \mu_{22}) \right] \quad (10)$$

$$\chi_{ij} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{ij} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{ji}, \quad \chi_{i3} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{i3} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{3i}, \quad \chi_{3i} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{3i} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{i3} \quad (11)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{R_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_3^2 + \omega_2^2 - 2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \omega_3 + 2 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \omega_2 \right] \quad (12)$$

$$\gamma_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{V_3}{R_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right)^2 + \omega_3^2 + \omega_1^2 + 2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \omega_3 - 2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \omega_1 \right] \quad (13)$$

$$\gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial z} \right)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_2 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_1 \right] \quad (14)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3 + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \omega_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \omega_2 - \omega_1 \omega_2 \right) \quad (15)$$

$$\gamma_{21} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \omega_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \omega_2 - \omega_1 \omega_2 \right) \quad (16)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2 - \frac{V_1}{R_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \omega_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \omega_1 - \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_3 - \omega_1 \omega_3 \right) \quad (17)$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \omega_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \omega_1 - \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_3 - \omega_1 \omega_3 \right) \quad (18)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1 - \frac{V_2}{R_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \frac{\partial V_3}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial z} \omega_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \omega_2 + \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_3 - \omega_2 \omega_3 \right) \quad (19)$$

$$\gamma_{32} = \frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \omega_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \omega_2 + \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_3 - \omega_2 \omega_3 \right) \quad (20)$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\omega_3}{R_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (21)$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\omega_3}{R_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (22)$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad (24)$$

$$\chi_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad (25)$$

$$\chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\omega_1}{R_1} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \quad (26)$$

$$\chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \quad (27)$$

$$\chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\omega_2}{R_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \quad (28)$$

$$\chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \quad (29)$$

Здесь  $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}$  - компоненты силового и моментного тензоров напряжений;  $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{33}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}, \chi_{ii}, \chi_{ij}, \chi_{33}, \chi_{i3}, \chi_{3i}$  - компоненты тензора деформации и тензора изгиба- кручения;  $V_i, V_3$  - компоненты вектора перемещения,  $\omega_i, \omega_3$  - компоненты вектора независимого поворота;  $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  - физические константы микрополярно-

го материала оболочки,  $\rho$  - плотность материала,  $J$  - мера инерции при вращении,  $R_1, R_2$  - радиусы кривизны срединной поверхности пологих оболочек, а  $i, j = 1, 2; i \neq j$ .

Для граничных условий на лицевых поверхностях пологой оболочки примем граничные условия первой граничной задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений

$$\sigma_{3n} = p_n^\pm, \mu_{3n} = m_n^\pm \text{ при } z = \pm h, n = 1,2,3 \quad (30)$$

где  $p_n^\pm, m_n^\pm$  - компоненты заданных внешних усилий и моментов на лицевых поверхностях полой оболочки.

Граничные условия на боковой поверхности полой оболочки  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления, запишутся либо в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \mu_{mn} n_m = m_n^* \text{ на } \Sigma_1, V_n = V_n^\bullet, \omega_n = \omega_n^\bullet \text{ на } \Sigma_2, m, n = 1,2,3 \quad (31)$$

где  $p_n^*, m_n^*$  - компоненты заданных внешних усилий и моментов на  $\Sigma_1$ ;  $V_n^\bullet, \omega_n^\bullet$  - заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на  $\Sigma_2$ .

При помощи начальных условий, при  $t = 0$ , задаются значения компонентов векторов перемещения, независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$\begin{aligned} V_n|_{t=0} &= f_n(x_1, x_2, z), \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}|_{t=0} = F_n(x_1, x_2, z) \\ \omega_n|_{t=0} &= \varphi_n(x_1, x_2, z), \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial t}|_{t=0} = \Phi_n(x_1, x_2, z), \quad n = 1,2,3 \end{aligned} \quad (32)$$

### **3. Геометрически нелинейная модель микрополярных упругих пологих оболочек (в частности пластин) при больших прогибах.**

С целью приведения геометрически нелинейной трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, в основу предлагаемой теории микрополярных упругих тонких гибких пологих оболочек (пластин) ставим: 1) основные гипотезы прикладной линейной теории тонких пологих оболочек (пластин) (работ [8-11]) и, 2) предположения нелинейной классической теории пологих оболочек Маргерра [13] (в случае пластинки-предположения классической теории гибких пластин Кармана [12]):

**а)** Нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной поверхности полой оболочки (пластинки), остаётся после деформации прямолинейным, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. При этом, тангенциальные компоненты вектора свободного вращения-постоянные функции по толщине пластинки, а нормальная компонента – линейная функция.

Вследствие этого имеем следующий закон изменения перемещений и свободных вращений по толщине полой оболочки (пластинки) [8-11]:

$$\begin{aligned} V_i &= u_i(x_1, x_2, t) + z\psi_i(x_1, x_2, t), \quad V_3 = w(x_1, x_2, t), \\ \omega_i &= \Omega_i(x_1, x_2, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(x_1, x_2, t) + z\iota(x_1, x_2, t), \quad (i = 1,2) \end{aligned} \quad (33)$$

$u_1, u_2$  - перемещения точек срединной поверхности полой оболочки (пластинки) вдоль координатных осей  $x_1, x_2$ ;  $w$  - перемещение точек срединной поверхности в направлении оси  $z$  (т.е. прогиб оболочки или пластинки);  $\psi_1, \psi_2$  - полные углы поворота;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  - свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг линий  $x_1, x_2, z$ ;  $\iota$  - интенсивность свободного поворота вдоль оси  $z$ .

**б)** Примем [12-15], что оболочка получает большие прогибы  $w$ , в то же время будем считать перемещения  $u_1, u_2$  в срединной поверхности оболочки (пластинки) величинами малыми.

Такое же допущение сделаем по отношению к производным  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ , считая их

малыми по сравнению с величинами  $\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}$ . Также считаем, что квадраты производных

$\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}$  имеют тот же порядок малости, что и первая степень производных от перемещений  $u_1, u_2$  по  $x_1$  и  $x_2$ .

Предположим также [12-15], что малы как углы поворота нормалей к срединной поверхности до деформации, так и их свободные повороты, а также, в тензоре деформации учитываются нелинейные слагаемые в градиентах перемещения.

в) В физических соотношениях для  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{22}$  силовое напряжение  $\sigma_{33}$  можем пренебрегать относительно силовых напряжений  $\sigma_{ii}$  [8-11];

г) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений  $\sigma_{3i}$  и моментного напряжения  $\mu_{33}$  сначала примем [8-11]:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(x_1, x_2, t), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(x_1, x_2, t) \quad (34)$$

После определения указанных всех величин, значения (34) для  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  уточняем прибавляя к (34) результаты интегрирования по  $z$  уравнений движения для  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  с условием, чтобы усреднённые по толщине оболочки их величины были равны нулю.

Легко показать, что компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений будут выражаться формулами [8-11]:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \Gamma_{ii} + zK_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + zK_{ij}, \quad \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}, \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i} \\ \chi_{ii} &= \kappa_{ii}, \quad \chi_{33} = l, \quad \chi_{ij} = \kappa_{ij}, \quad \chi_{i3} = \kappa_{i3} + zl_{i3} \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь  $\Gamma_{ii}$  - деформации удлинений в направлениях  $x_1, x_2$ ;  $\Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$  - деформации сдвигов в соответствующих плоскостях;  $K_{ii}$  - изгибы срединной поверхности, обусловленные силовыми напряжениями;  $K_{ij}$  - кручения срединной поверхности обусловленные силовыми напряжениями;  $\kappa_{ii}, \kappa_{33}$  - изгибы срединной поверхности обусловленные моментными напряжениями;  $\kappa_{ij}$  - кручения срединной поверхности обусловленные моментными напряжениями;  $l_{i3}$  - гиперсдвиги срединной поверхности обусловленные моментными напряжениями.

Как обычно, в прикладных теориях тонких пластин и оболочек, вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия  $(T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i})$ , моменты  $(M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33})$  и гипермоменты  $(\Lambda_{i3})$  [8-11]:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz, \quad N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz \quad (i \leftrightarrow 3), \quad M_{ii} = \int_{-h}^h \sigma_{ii} z dz \\ M_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz, \quad L_{mn} = \int_{-h}^h \mu_{mn} dz, \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h z \mu_{i3} dz \end{aligned} \quad (36)$$

Основные уравнения динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пологих оболочек (пластин) со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций, имеют вид:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j} &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} - N_{3i} = \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} &\left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (S_{12} + S_{21}) \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{2} (S_{12} + S_{21}) \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \\
 L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} - (M_{12} - M_{21}) &+ \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned}
 T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \\
 M_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}] \\
 N_{i3} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}] \\
 L_{ii} &= 2h [(\beta + 2\gamma) \kappa_{ii} + \beta (\kappa_{jj} + \iota)], \quad L_{33} = 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta (\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
 L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \quad L_{i3} = 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (-1)^j \Omega_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\
 \Gamma_{i3} &= \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j \iota, \\
 \kappa_{ii} &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{33} = \iota, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad \kappa_{i3} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания:

$$T_{ii} = 0, u_j = 0, M_{ii} = 0, \psi_j = 0, w = 0, L_{ij} = 0, \Omega_i = 0, \Lambda_{i3} = 0 \text{ при } x_i = 0; a \tag{40}$$

К системе основных уравнений микрополярных пологих оболочек (пластин) со свободным вращением (37)-(39) и граничным условиям (40) нужно присоединить также соответствующие начальные условия для  $w, \partial w / \partial t, \psi_i, \partial \psi_i / \partial t, \Omega_i, \partial \Omega_i / \partial t, \iota, \partial \iota / \partial t$  (которые, конечно, в случае свободных колебаний не используются).

#### **4. Свободные колебания микрополярных упругих пластин и пологих оболочек при больших прогибах.**

В случае пластинки в основных уравнениях примем  $k_i = \frac{1}{R_i} = 0$ . Далее будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

Решение граничной задачи (37)-(40) при изучении собственных колебаний представим в виде:



$$\begin{aligned}
 w(x_1, x_2, t) &= w(t) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} \\
 u_1(x_1, x_2, t) &= u_1(t) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b}, \quad u_2(x_1, x_2, t) = u_2(t) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} \\
 \psi_1(x_1, x_2, t) &= \psi_1(t) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b}, \quad \psi_2(x_1, x_2, t) = \psi_2(t) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} \\
 \Omega_1(x_1, x_2, t) &= \Omega_1(t) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b}, \quad \Omega_2(x_1, x_2, t) = \Omega_2(t) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} \\
 \Omega_3(x_1, x_2, t) &= \Omega_3(t) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b}, \quad i(x_1, x_2, t) = i(t) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Решение (41) уже удовлетворяет граничным условиям (40). Поставим эти представления в геометрические соотношения (39). Получившейся выражения для деформаций и изгибов-кручений поставим в физические соотношения, получим выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применим метод Галеркина для систем уравнений движения (37), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} \right) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0, \quad \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} \right) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) \right) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) \right) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( N_{32} - \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \right) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + (N_{23} - N_{32}) \right) \operatorname{Sin} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} - (N_{13} - N_{31}) \right) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Sin} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0 \\
 \int_0^a \int_0^b \left( L_{33} - \left( \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right) - (M_{12} - M_{21}) \right) \operatorname{Cos} \frac{\pi x_1}{a} \operatorname{Cos} \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{42}$$

Выполним интегрирование, далее функции  $w(t), u_1(t), u_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t), i(t)$  представим в виде:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= W \cos(pt), \quad u_1(t) = U_1 \cos(pt), \quad u_2(t) = U_2 \cos(pt) \\
 \psi_1(t) &= \Psi_1 \cos(pt), \quad \psi_2(t) = \Psi_2 \cos(pt), \quad \Omega_1(t) = O_1 \cos(pt) \\
 \Omega_2(t) &= O_2 \cos(pt), \quad \Omega_3(t) = O_3 \cos(pt), \quad i(t) = I \cos(pt)
 \end{aligned} \tag{43}$$

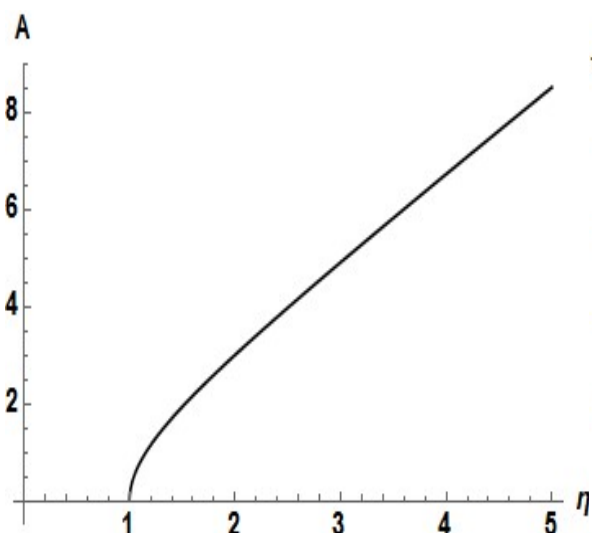


Рис. 1. Зависимость безразмерного прогиба пластинки  $A$  от величины  $\eta$ .

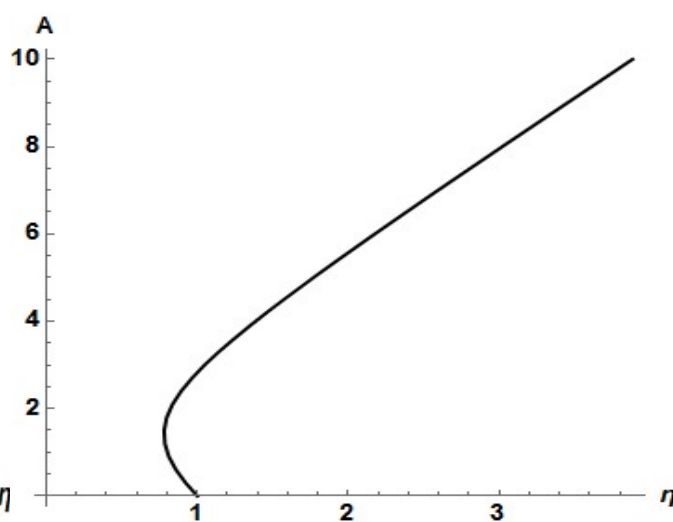


Рис. 2. Зависимость безразмерного прогиба полой оболочки  $A$  от величины  $\eta$ .

Поставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на  $\cos(pt)$  и интегрируем по  $t$  от 0 до  $\frac{\pi}{2p}$ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $W, U_1, U_2, \Psi_1, \Psi_2, O_1, O_2, O_3, I$ . Из этой системы можно получить зависимость  $W - p$ .

Эта задача решена также по соответствующей линейной модели микрополярных упругих тонких пластин. Введем безразмерный прогиб  $A = W/h$ , а также обозначение отношения величины  $p$  к соответствующей частоте линейных колебаний  $p_0$ :  $\eta = p/p_0$ .

Численные расчеты выполнены для квадратной пластинки  $b = a = 0,005$  м и примем для относительной толщины  $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$ . Для физических постоянных примем значения [16]  $\alpha = 0,115 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,033 \cdot 10^9$  Па,  $\lambda = 2,1951 \cdot 10^9$  Па,  $\gamma = 4,1$  Н,  $\varepsilon = 0,13$  Н,  $\beta = -2,34$  Н,  $\rho = 590$  м<sup>3</sup>,  $J = 5,31 \cdot 10^6$  кг/м. На рис. 1. приведена зависимость  $(\eta, A)$ , эта линия называется скелетной кривой, которая отражает основные свойства деформируемой системы [14]. Кривая  $(\eta, A)$  представляет линию жесткого типа, т. е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем  $\eta \rightarrow 1$ . С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко.

Далее решим также задачу свободных колебаний для микрополярных упругих тонких пологих оболочек прямоугольных в плане с шарнирно опертыми краями. Задача решена тем же методом что и предыдущая задача. Далее, численный анализ проведен для того же материала и геометрических размеров. Только здесь примем, что  $k_2 = \frac{1}{R_2} = 0$ ,  $k_1 = \frac{1}{R_1}$  и введем

также безразмерную кривизну  $k^* = \frac{a^2}{R_1 h}$  полой оболочки и в этом случае примем  $k^* = 20$ .

На рис. 2. приведена скелетная кривая  $(\eta, A)$  для полой оболочки. Кривая  $(\eta, A)$  представляет линию мягкого типа, т. е. начальный участок здесь отклоняется к оси ординат.

Отметим, что, и в случае пластинки и в случае оболочки, величина низкой частоты по микрополярной теории всегда мала по сравнению с величиной низкой частоты по геометрически нелинейной классической теории. Кроме того, анализ полученных численных резуль-

татов устанавливает повышенные жесткостные и устойчивые свойства микрополярных пластин и пологих оболочек по сравнению с классическим случаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

### Список литературы

1. Maugin G., Metrikine A. (eds.). *Mechanics of Generalized Continua: One Hundred Yea After the Cosserats*. Springer (New York, Dordrecht, Heidelberg, London). 2010. 337p.
2. Altenbach H., Maugin G., Erofeev V., (eds.). *Mechanics of Generalized Continua from Micro-mechanical Basics to Engineering Applications*. Springer (New York, Dordrecht, Heidelberg, London). 2011. 350 p.
3. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. Нижний Новгород: Нижегородский гос. технич. ун-т им. П. Е. Алексеева. 2010. 303 с.
4. Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. №4/Издательство Института механики сплошных сред УО РАН. Перм.
5. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 327с.
6. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates// *Z Angew. Math. Mech (ZAMM)*. 2009. V. 89. № 4. P. 242-256.
7. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. 2009. "On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography". // *Arch. Mech (Special Issue)* DOI 10.1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
8. Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады АН России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
9. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // *Акустический журнал*. 2011. Т. 57. № 4. С. 461-469.
10. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Модель колебаний микрополярных тонких оболочек.// *Акустический журнал*. 2013. Том 59, №2. С. 170-181.
11. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations.// *Journal of Sound and Vibration*. 2014. Volume 333. Issue 18. P. 4354-4375.
12. Karman Th. *Collected works*. V. 1. London. 1956. 530 p.
13. Marguerre K. Die Durchschlags kraft eines schwachgekrumnten Balkes//*Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft*. 1938. Bd. 37. S. 22-40.
14. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
15. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Физматлит. 1997. 264 с.
16. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua// *Continuum models for materials with micro-structure/ Ed. By H. Muhlhaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1-22.*

## ПРИРОДА НЕЛИНЕЙНОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГРАФЕНОвого РЕЗОНАТОРА

А.Д. Сергеев

Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург, В.О., Большой пр. 61, e-mail: [dievich@rambler.ru](mailto:dievich@rambler.ru)

Предлагается система с двумя степенями свободы для моделирования нелинейной продольно-поперечной динамики графеновой проволоки. В рассматриваемой системе доминирующая часть упругой энергии аккумулируется деформациями, ортогональными направлениям движения инерционного элемента системы. Получена система дифференциальных уравнений движения, из которой с необходимостью следует, что собственно поперечные колебания графеновой проволоки в первом приближении линейны, а экспериментально наблюдаемая нелинейность системы обусловлена принципиальной неигнорируемостью ее продольной динамики.

**Ключевые слова:** графен, продольно-поперечная динамика, механизм нелинейности.

В настоящее время в лабораториях исследуются возможности создания графеновых резонаторов - устройств для генерирования сигналов терагерцевого диапазона [1]. Сигнал требуемого диапазона излучается в результате возбуждения электромагнитным воздействием поперечных колебаний тонкой проволоки из графена --- вещества, строение которого имеет вид, представленный на рис. 1. Модулировать частоту излучаемого сигнала предполагается изменением силы предварительного растяжения графеновой проволоки.

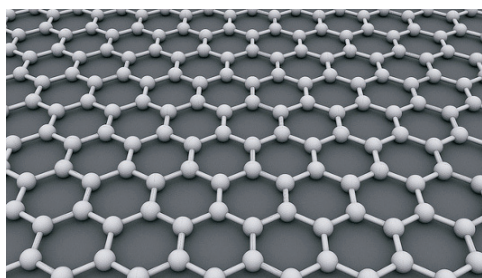


Рис. 1. Внутреннее строение графена

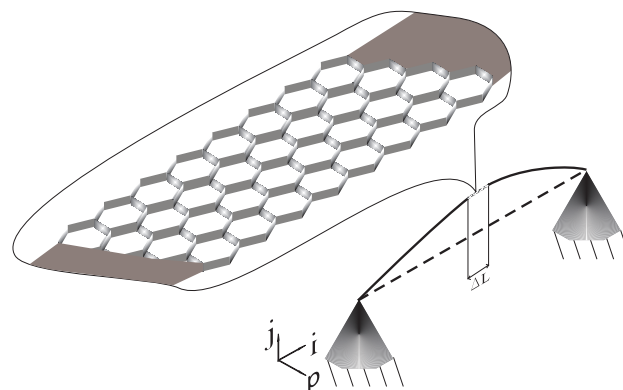


Рис.2. Система для исследования поперечных колебаний графеновой проволоки

Экспериментальные исследования поперечных колебаний графеновой проволоки продемонстрировали ярко выраженный нелинейный характер колебаний, возбуждаемых в резонаторе приложением переменного электромагнитного поля. Однако в ходе обработки экспериментальных кривых выделить доминирующую причину возникновения нелинейности пока не удалось. Нелинейность может проявляться в результате электромеханических взаимодействий между элементами экспериментальной установки. Природа нелинейности может быть скрыта и в сугубо нелинейном механизме поперечных колебаний графеновой проволоки. Более того, оба механизма возникновения нелинейности могут существовать одновременно.

Совершенно очевидно, что без выяснения природы доминирующих факторов, определяющих возникновение нелинейных колебаний в графеновой структуре, добиться реализации целевой функции вновь создаваемого устройства достаточно проблематично. В качестве такой целевой функции рассматривается выбор эффективного механизма управления собст-

венной частотой резонатора. В связи с этим задачей предлагаемого исследования является выявление механизма возникновения нелинейных колебаний графеновой проволоки.

На схеме установки для исследования поперечных колебаний графеновой проволоки (Рис. 2) выделен сегмент проволоки длины  $\Delta L$  и показана его внутренняя структура. Ставится задача выяснить, какие физические процессы вызывают нелинейные эффекты при поперечных колебаниях проволоки, выполненной из вещества, структура которого изображена на рис. 1.

Смоделируем физику процессов, возникающих при поперечных колебаниях в плоскости, ортогональной орту  $\mathbf{p}$  (рис.2), графеновой проволоки-полоски с помощью модели, имеющей только две степени свободы. В качестве рабочей используем гипотезу, предполагающую, что нелинейность возникает в силу аккумуляирования графеновой полоской упругой энергии, сопровождающего изменение ширины полоски при увеличении ее длины (рис.3).

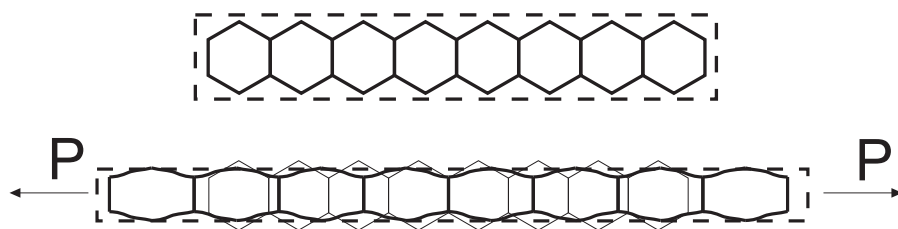


Рис.3 Изменение ширины графеновой полоски при растяжении.

**Физическая модель.** Для проверки гипотезы используется система, изображенная на рис.4.

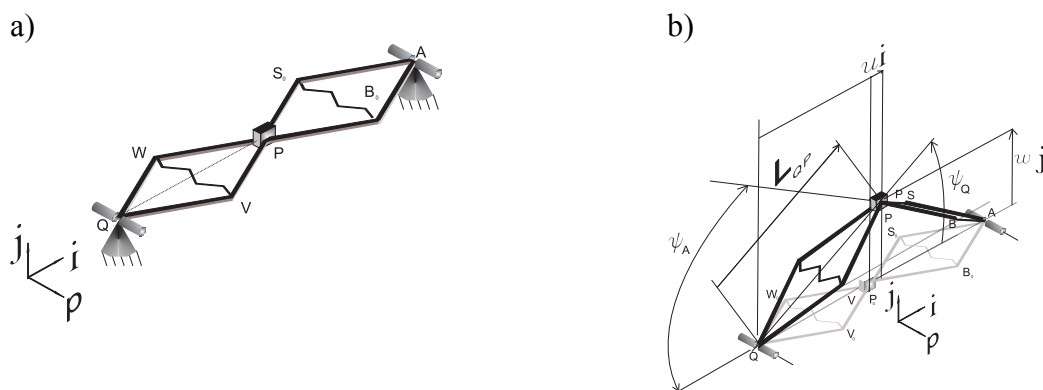


Рис.4 Модель с двумя степенями свободы, учитывающая аккумуляирование упругой энергии поперечных перемещений элементов системы при ее продольном растяжении. Отсчетная конфигурация системы а) и ее текущая конфигурация б). На текущей конфигурации изображены вспомогательные функции, используемые при получении уравнений движения

Система представляет собой два одинаковых безынерционных деформируемых ромба, соединенных вершинами с помощью цилиндрического шарнира  $P$ , ось которого параллельна орту  $\mathbf{p}$ . Вершины ромбов  $A$  и  $Q$  (Рис.4, а)), лежащие напротив вершин  $P$ , закреплены на неподвижных упругих цилиндрических шарнирах, оси которых тоже параллельны орту  $\mathbf{p}$ . В узлах  $V$ ,  $W$ ,  $S$  и  $B$ , соединяющих стороны ромбов, находятся идеальные цилиндрические шарниры, оси которых ортогональны плоскостям ромбов.

Длина стороны безынерционного ромба  $l_0$ ; угол, отвечающий отсутствию деформации упругой диагонали ромба  $2\alpha_0$ ; жесткость диагоналей на растяжение  $c_1$  и  $c_2$ . Сами ромбы имеют возможность вращаться вокруг упругих цилиндрических шарниров  $A$  и  $Q$ , оси кото-

рых направлены вдоль орта  $\mathbf{p}$ . Жесткости на вращение в упругих шарнирах  $Q$  и  $A$  обозначим  $k_Q$  и  $k_A$  соответственно. Размещенный в шарнире  $P$  инерционный элемент массы  $m$  имеет две степени свободы. Он движется в плоскости векторов  $\{i, j\}$ . Движение в направлении орта  $i$  моделирует продольные движения исследуемой системы функцией  $u(t)$ , движение инерционного элемента  $P$  в направлении орта  $j$  моделирует ее поперечные смещения функцией  $w(t)$ . Смещение точки  $P$  вдоль диагонали ромба  $QP$ , направленной по орту  $e$ , описывает вспомогательная функция  $\Delta L$ . Начальный прогиб из-за наличия силы тяжести во внимание не принимается.

Для вывода уравнений движения системы, изображенной на рис.4b), применим уравнения Лагранжа II-го рода. В качестве обобщенных координат используем функции  $u(t)$  и  $w(t)$ . Выбранным обобщенным координатам отвечают следующие уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial K}{\partial u} = Q_u, \quad Q_u = -\frac{\partial U}{\partial u} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{w}} - \frac{\partial K}{\partial w} = Q_w, \quad Q_w = -\frac{\partial U}{\partial w}$$

Здесь  $K$  кинетическая энергия системы,  $U$  - ее потенциальная энергия,  $Q_u$  и  $Q_w$  - обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $u$  и  $w$ .

**Кинетическая энергия системы.** Так как инерционный элемент системы предполагается материальной точкой, кинетическая энергия имеет вид

$$K = \frac{1}{2} m v_P^2 \quad (2)$$

Скорость точки  $P$  будем искать как производную от ее радиус-вектора  $r_{QP}$ , для которого удобно использовать представление

$$r_{QP} = (L_0 + u)i + wj$$

Здесь  $L_0$  - длина диагонали ромба, соединяющей точки  $Q$  и  $P$  в недеформированном состоянии (Рис. 4 а)). Скорость инерционного элемента

$$v_P = \dot{r}_{QP} = \dot{u}i + \dot{w}j, \quad v_P^2 = \dot{u}^2 + \dot{w}^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы как квадратичная форма обобщенных скоростей имеет вид

$$K = \frac{m\dot{u}^2}{2} + \frac{m\dot{w}^2}{2} \quad (3)$$

**Потенциальная энергия системы.** Все действующие в системе силы являются упругими, поэтому они потенциальны. Для определения обобщенных сил требуется найти потенциальную энергию системы как функцию ее обобщенных координат и полученное выражение проинтегрировать по соответствующей обобщенной координате.

Потенциальная энергия системы складывается из энергии шарниров  $Q$  и  $A$  и энергии двух пружин, соединяющих узлы  $W$  и  $V$ , а также  $S$  и  $B$ . Потенциальная энергия шарнира  $Q$  и шарнира  $A$  естественным образом записываются через  $\{\psi_Q, \psi_A\}$  - углы малых поворотов каждого из ромбов вокруг шарниров  $Q$  и  $A$  соответственно (Рис. 4 б)).

$$U_Q = \frac{k_Q \psi_Q^2}{2} + \frac{k_A \psi_A^2}{2} \quad (4)$$

Потенциальная энергия, запасаемая при деформировании линейно упругой диагонали ромба, соединяющей точки  $W$  и  $V$ , требует нахождения разницы между исходной длиной диагонали и ее длиной в текущей конфигурации. Исходная длина пружины  $L_{WV}^0$  определяется величиной угла  $2\alpha_0$ , образованного сторонами ромба, соединяющими точку  $Q$  с точками  $W$  и  $V$  в отсчетной конфигурации (Рис. 4 а))  $L_{WV}^0 = 2l_0 \sin \alpha_0$ . Текущая длина пружины  $L_{WV}$  определяется величиной угла  $2\alpha_Q$ , образованного сторонами ромба, соединяющими точку  $Q$  с точками  $W$  и  $V$  в текущей конфигурации (Рис. 4 б))  $L_{WV} = 2l_0 \sin \alpha_Q$ . Удлинение пружины, соединяющей точки  $W$  и  $V$

$$\Delta L_{WV} = L_{WV} - L_{WV}^0 = 2l_0(\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0)$$

Таким образом, энергия пружины жесткости  $c_1$ , соединяющей узлы  $W$  и  $V$ ,

$$U_{WV} = \frac{1}{2}c_1\Delta L_{WV}^2 = 2c_1l_0^2(\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0)^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия, запасаемая при деформировании упругой диагонали ромба, соединяющей точки  $S$  и  $B$  находится аналогично

$$U_{SB} = \frac{1}{2}c_2\Delta L_{SB}^2 = 2c_2l_0^2(\sin \alpha_A - \sin \alpha_0)^2 \quad (6)$$

Потенциальная энергия рассматриваемой системы при деформировании всех ее упругих элементов имеет вид

$$U = \frac{k_Q \psi_Q^2}{2} + \frac{k_A \psi_A^2}{2} + \frac{1}{2}c_2\Delta L_{SB}^2 + 2c_1l_0^2(\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0)^2 + 2c_2l_0^2(\sin \alpha_A - \sin \alpha_0)^2 \quad (7)$$

Кинетическая энергия системы как квадратичная форма обобщенных скоростей дается представлением (3). При этом в (7) потенциальная энергия получена как функция вспомогательных (естественных для системы) переменных величин  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A\}$

$$U = U(\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A)$$

А для процедуры Лагранжа требуется ее задание в виде функции обобщенных координат

$$U = U(\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A) = U(u, w). \quad (8)$$

**Получение обобщенных сил.** Внутренняя энергия  $U$  в форме (7) является глубокой суперпозицией обобщенных координат  $\{u, w\}$  (8). Связи же между естественными переменными  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \sin \alpha_A\}$  и обобщенными координатами системы  $\{u, w\}$  имеют вид

$$\begin{aligned} w &= 2l_0 \cos \alpha_Q \sin \psi_Q, & w &= 2l_0 \cos \alpha_A \sin \psi_A, \\ u &= 2l_0 \cos \alpha_Q \cos \psi_Q - 2l_0 \cos \alpha_0, & u &= 2l_0 \cos \alpha_0 - 2l_0 \cos \alpha_A \cos \psi_A. \end{aligned} \quad (9)$$

Связи (9) достаточно неудобны для нахождения явных однозначных зависимостей

$$\psi_Q = \psi_Q(u, w), \quad \psi_A = \psi_A(u, w), \quad \alpha_Q = \alpha_Q(u, w), \quad \alpha_A = \alpha_A(u, w). \quad (10)$$

Поэтому строить  $\partial U / \partial u$  и  $\partial U / \partial w$  удобнее по правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{\partial U}{\partial \psi_Q} \frac{\partial \psi_Q}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \psi_A} \frac{\partial \psi_A}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \alpha_Q} \frac{\partial \alpha_Q}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \alpha_A} \frac{\partial \alpha_A}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial w} &= \frac{\partial U}{\partial \psi_Q} \frac{\partial \psi_Q}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial \psi_A} \frac{\partial \psi_A}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial \alpha_Q} \frac{\partial \alpha_Q}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial \alpha_A} \frac{\partial \alpha_A}{\partial w} \end{aligned} \quad (11)$$

Для этого необходимо связать две обобщенные координаты  $\{u, w\}$  с четырьмя вспомогательными функциями  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A\}$  и найти двенадцать производных, входящих в (11). Опуская рутинные вычисления, приводим выражения для обобщенных сил, отвечающих обобщенным координатам  $\{u, w\}$

$$Q_u = k_Q \frac{\psi_Q \sin \psi_Q}{2l_0 \cos \psi_Q} - k_A \frac{\psi_A \sin \psi_A}{2l_0 \cos \psi_A} + 2c_1 l_0 (\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_Q \cos \psi_Q - \\ - 2c_2 l_0 (\sin \alpha_A - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_A \cos \psi_A + F_u, \quad (12)$$

$$Q_w = -k_Q \frac{\psi_Q \cos \psi_Q}{2l_0 \cos \psi_Q} - k_A \frac{\psi_A \cos \psi_A}{2l_0 \cos \psi_A} + 2c_1 l_0 (\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_Q \sin \psi_Q - \\ - 2c_2 l_0 (\sin \alpha_A - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_A \sin \psi_A + F_w \quad (13)$$

В данные выражения включены внешние силы  $F_u$  и  $F_w$ , действующие на инерционный элемент, соответственно, в продольном и поперечном направлениях

**Дифференциальные уравнения в смешанных переменных.** Имея выражение для кинетической энергии (3), выражения для обобщенных сил (12) и (13), по (1) записываем уравнения движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы

$$m\ddot{u} = k_Q \frac{\psi_Q \sin \psi_Q}{2l_0 \cos \psi_Q} - k_A \frac{\psi_A \sin \psi_A}{2l_0 \cos \psi_A} + 2c_1 l_0 (\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_Q \cos \psi_Q - \\ - 2c_2 l_0 (\sin \alpha_A - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_A \cos \psi_A + F_u, \quad (14)$$

$$m\ddot{w} = -k_Q \frac{\psi_Q \cos \psi_Q}{2l_0 \cos \psi_Q} - k_A \frac{\psi_A \cos \psi_A}{2l_0 \cos \psi_A} + 2c_1 l_0 (\sin \alpha_Q - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_Q \sin \psi_Q - \\ - 2c_2 l_0 (\sin \alpha_A - \sin \alpha_0) \operatorname{ctg} \alpha_A \sin \psi_A + F_w$$

Уравнения (14) описывают движения системы (Рис.4 б)) в смешанных переменных при любых амплитудах движения. В роли смешанных переменных выступают обобщенные координаты  $\{u, w\}$  и так называемые естественные для системы вспомогательные функции  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A\}$ .

**Уравнения малых движений.** Приведем (14) к форме, близкой к стандартной. Попытки переписать правые части уравнений (14) через  $u$  и  $w$  вновь наталкиваются на объективные трудности поиска однозначных зависимостей (10). Главное достоинство системы (14) - очевидный физический смысл каждого уравнения. Чтобы его не утратить, используем формальную замену переменных - прием, не искажающий содержательности каждого из уравнений (14) и физической природы исследуемых процессов. Именно для этого и оказываются удобными введенные выше в рассмотрение вспомогательные функции  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A\}$

Используем (9) для преобразования системы (14), рассматривая стандартный сценарий движения с малыми амплитудами изменения вспомогательных функций  $\{\psi_Q, \psi_A, \alpha_Q, \alpha_A\}$

$$\sin \psi_Q \approx \psi_Q(t), \quad \cos \psi_Q \approx 1, \quad \sin \psi_A \approx \psi_A(t), \quad \cos \psi_A \approx 1, \\ \alpha_Q(t) = \alpha_0 + \beta_Q(t), \quad \alpha_0 = \operatorname{const}, \quad \beta_Q(t) \ll 1, \quad \alpha_A(t) = \alpha_0 + \beta_A(t), \quad \beta_A(t) \ll 1. \quad (15)$$

При замене переменных (15) приближенное описание малых продольных движений инерционного элемента системы дается уравнением для  $\beta = \beta_Q = -\beta_A$  и  $\psi = \psi_Q = \psi_A$

$$m \left( -2l_0 \sin \alpha_0 \ddot{\beta} + 4l_0 \sin \alpha_0 \psi \dot{\psi} \dot{\beta} - 2l_0 (\cos \alpha_0 - \beta \sin \alpha_0) (\psi \ddot{\psi} + \dot{\psi}^2) \right) - \\ \left( \frac{(k_Q + k_A) \psi^2}{2l_0 \cos \alpha_0} \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{(c_1 + c_2) l_0 \cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} \right) \beta = \frac{(k_Q - k_A) \psi^2}{2l_0 \cos \alpha_0} + F_u. \quad (16)$$

Малые поперечные движения описывает уравнение



$$m2l_0\ddot{\psi} = -\frac{(k_Q + k_A)}{2l_0 \cos \alpha_0} \{1 - [1 + 2(c_1 - c_2)l_0 \cos \alpha_0] \beta \operatorname{ctg} \alpha_0\} \psi + F_w. \quad (17)$$

Для системы с симметричными свойствами, когда  $c_1 = c_2 = c$  и  $k_Q = k_A = k$  продольно-поперечную динамику описывают уравнения

$$\begin{aligned} m2l_0 \sin \alpha_0 \{ \ddot{\beta} - 2\psi \dot{\psi} \dot{\beta} \} + \left[ \frac{4cl_0 \cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} + \frac{k\psi^2}{l_0 \cos \alpha_0} \operatorname{tg} \alpha_0 - m2l_0 \sin \alpha_0 (\psi \ddot{\psi} + \dot{\psi}^2) \right] \beta = \\ = -(m2l_0 \cos \alpha_0 (\psi \ddot{\psi} + \dot{\psi}^2) + F_u) \\ m2l_0\ddot{\psi} = -\frac{k}{l_0 \cos \alpha_0} \{1 - \beta \operatorname{ctg} \alpha_0\} \psi + F_w. \end{aligned} \quad (18)$$

Структура первого уравнения в (18) совпадает со структурой уравнения одномерного осциллятора. При этом в левой части данного уравнения знак коэффициента при  $\ddot{\beta}$  указывает на возможность существования интервалов движения рассматриваемой структуры с так называемой «отрицательной диссипацией»! То есть, на каких-то этапах продольных осцилляций в данную степень свободы возможна подкачка энергии за счет поперечных колебаний, описываемых функцией  $\psi$ . Такая подкачка с необходимостью вызывает рост продольных деформаций рассматриваемой структуры, изменяя в ней силу продольного натяжения. Малые поперечные же колебания системы в первом приближении остаются линейными.

В доступных автору источниках искать причины экспериментально регистрируемой переменности силы натяжения графеновой проволоки предполагалось в нелинейностях ее поперечного движения [1]. В предлагаемой вниманию работе удалось теоретически выяснить, что поперечные движения оказываются практически линейными. Однако рассматривать только поперечные движения, игнорируя продольную динамику нельзя даже в первом приближении. Установлено, что причины, изменяющие силу натяжения проволоки кроются в нелинейностях ее продольных колебаний. Последние же обусловлены процессами внутреннего деформирования структуры (Рис.1) в направлении, отогональном плоскости ее движения.

## Список литературы

1. D. Svintsov, V.G. Leiman, V. Ryzhii, T. Otsuji and M.S. Shur Graphene nanoelectromechanical resonators for detection of modulated terahertz radiation // PACS numbers: 81.05.ue, 85.30.Tv, 85.30.Mn.

## КОЛЕБАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ

Э.И.Старовойтов, Д.В.Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта,  
факультет промышленного и гражданского строительства.  
Республика Беларусь, 246653 г. Гомель, ул. Кирова, 34, e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

**Исследованы осесимметричные резонансные колебания вязкоупругой круговой трехслойной пластины. Для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в легком заполнителе деформированная нормаль прямолинейна и несжимаема по толщине. Реакция основания описывается моделью Винклера. Получены аналитические решения начально-краевых задач, проведен их численный и сравнительный анализ.**

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, вязкоупругость, колебания, резонанс.

**Введение.** Трехслойные элементы конструкций широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Колебания упругих сплошных круговых трехслойных пластин на упругом основании изучены в [1, 2]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная вязкоупругая круговая трехслойная пластина на деформируемом основании Винклера под действием гармонических резонансных нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Через  $h_k$  обозначена относительная толщина  $k$ -го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной  $h_1, h_2$ , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине заполнитель ( $h_3 = 2c$ ) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа напряжений  $\sigma_{rz}$  в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка  $q(r, t)$  распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем контуре пластины радиуса  $r_1$ , предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

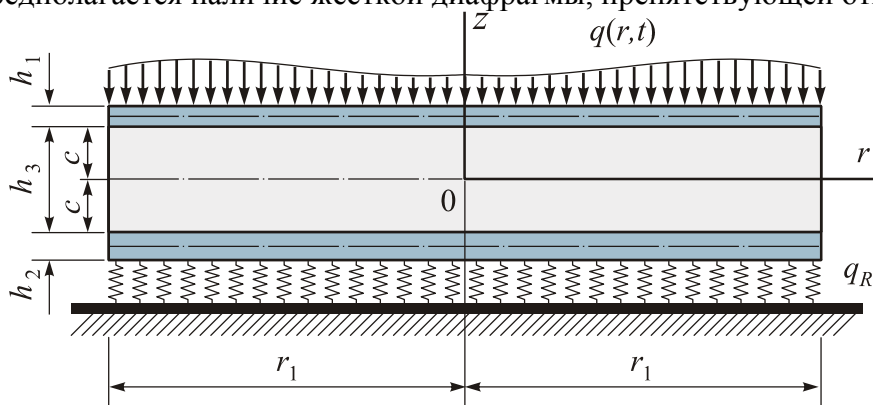


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:  $u_\varphi^{(k)} = 0$  ( $k$  – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты  $\varphi$ , т. е.  $u(r), \psi(r), w(r)$ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой  $q_r = k_0 w$  ( $k_0$  – коэффициент постели основания).

Физические соотношения для материалов слоев выпишем, используя интегральный оператор линейной вязкоупругости:

$$s_{\alpha\beta}^k = 2G_k^* \vartheta_{\alpha\beta}^k, \quad \sigma^k = 3K_k \varepsilon^k, \quad (1)$$

где  $G_k^*$  – оператор линейной вязкоупругости

$$G_k^* f(t) \equiv G_k (1 - R_k^*) f(t) \equiv G_k \left( f(t) - \int_0^t R_k(t-\tau) f(\tau) d\tau \right),$$

$R_k(t)$  – ядро релаксации материала  $k$ -го слоя,  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации,  $s_{\alpha\beta}^k, \vartheta_{\alpha\beta}^k$  – девиаторы напряжений и деформаций  $k$ -го слоя,  $\varepsilon_k$  – объемная деформация.

Система уравнений поперечных колебаний вязкоупругой пластины следует из уравнений для упругой пластины, рассмотренной в [1], если в коэффициентах  $a_m$  ( $m = 1, \dots, 6$ ) модули сдвига  $G_k$  формально заменить операторами линейной вязкоупругости  $G_k^*$  (1):

$$\begin{aligned} L_2(a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w &= -q, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В качестве начальных примем следующие условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r).$$

Если контур пластины зашпелен, то при  $r = r_1$  должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0.$$

При шарнирном опирании контура пластины и наличии на нем жесткой диафрагмы должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = M_{,r} = 0.$$

Решение задачи. Для решения применим *метод усреднений* в динамических задачах линейной вязкоупругости [3]. Система уравнений (2) является интегро-дифференциальной. Для ее упрощения введем гипотезу о подобии ядер релаксации материалов слоев:

$$R_k(t) = l_k R_3(t), \quad l_k = \text{const}, \quad 0 \leq \int_0^t R_3(\tau) d\tau \ll 1, \quad R_3(\tau) \geq 0. \quad (3)$$

Т. е., здесь предполагается, что ядра релаксации материалов слоев выражаются через ядро релаксации заполнителя, которое в дальнейшем принимается пропорциональным некоторому малому положительному параметру. Для многих конструкционных материалов эта гипотеза выполняется.

Распределенная нагрузка  $q(r, t)$  считается малой и записывается в виде разложения в ряд по фундаментальной ортонормированной системе собственных функций  $v_n$ :

$$q(r, t) = \varepsilon_1 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_1$  – некоторый малый параметр,

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right],$$

$J_n(r), I_n(r)$  – функции Бесселя [4].

Операторы линейной вязкоупругости  $a_m^*$  в (2) представляем в виде

$$a_m^* = a_m - a'_m R_3^*, \quad (m = 1, \dots, 6), \quad (5)$$

где для коэффициентов  $a_m$  и  $a'_m$  справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+\right), \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+\right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2\right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a'_1 &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^3 l_k G_{k0}, \quad a'_2 = \frac{4}{3} c(l_1 G_{10} - l_2 G_{20}), \quad a'_3 = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^2 l_k G_{k1}, \quad a'_4 = \frac{4}{3} (G_{32} + c^2(l_1 G_{10} + l_2 G_{20})), \\ a'_5 &= \frac{4}{3} (G_{32} + c(l_1 G_{11} - l_2 G_{21})), \quad a'_6 = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^3 l_k G_{k2}, \quad G_{kn} = \int_{h_k} G_k z^n dz, \quad (n = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Решение системы трех интегро-дифференциальных уравнений (2), с учетом условий (3)–(5) будем искать в виде

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (6)$$

где координатные функции  $\varphi_n(r)$

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[ J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \left( I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r) \right) \right].$$

Подстановка выражений (4)–(6) в третье уравнение системы (2) приводит к уравнению относительно неизвестной функции времени  $T_n(t)$ :

$$\begin{aligned} L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r}) T_n - \kappa_0 v_n T_n - M_0 v_n \ddot{T}_n &= \\ = -\varepsilon_1 M_0 v_n q_n + L_3(b_1 a'_3 \varphi_n + b_2 a'_5 \varphi_n - a'_6 v_{n,r}) R_3^* T_n, \\ R_3^* T_n &\equiv \int_0^t R_3(t - \tau) T_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем уравнение (7) к следующему виду

$$\frac{L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r})}{v_n} - \frac{\kappa_0 T_n + M_0 \ddot{T}_n - \varepsilon_1 M_0 q_n}{T_n} = \frac{L_3(b_1 a'_3 \varphi_n + b_2 a'_5 \varphi_n - a'_6 v_{n,r}) R_3^*}{v_n}. \quad (8)$$

Так как функции  $v_n$  являются собственными, то для них справедливо соотношение, следующее из решения динамической задачи теории упругости:

$$\frac{L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r})}{v_n} = \frac{\kappa_0 T_n + M_0 \ddot{T}_n}{T_n} = -M_0 \left( \omega_n^2 - \frac{\kappa_0}{M_0} \right), \quad (9)$$

где  $\omega_n$  – частоты собственных колебаний, определяемые через собственные числа  $\lambda_n$

$$\omega_n^2 = \frac{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2) M_0} (\lambda_n^4 + \kappa^4).$$

Подставив выражение (9) в (8), получаем

$$\frac{L_3(b_1 a'_3 \varphi_n + b_2 a'_5 \varphi_n - a'_6 v_{n,r})}{v_n} = -\frac{M_0 \omega_n^2 T_n + M_0 \ddot{T}_n - \varepsilon_1 M_0 q_n}{R_3^* T_n} = -M_0 \omega_n'^2. \quad (10)$$

Величины типа частот  $\omega_n'$  определяются через обобщенные собственные числа  $\lambda_n$  для упругой пластины по формуле

$$\omega_n'^2 = \frac{a'_6 - a'_3 b_1 - a'_5 b_2}{M_0} \lambda_n^4.$$

Здесь для решения системы (7) используем предложенный в [3] метод усреднения для динамических задач линейной вязкоупругости. В этом случае предполагается существование в последнем члене уравнения малого параметра  $\varepsilon$ , который в окончательных результатах следует положить равным единице, так как малость интегральных членов обеспечивается условием (3). Поэтому ядро релаксации  $R_3(t)$  заменим величиной  $\varepsilon R_3(t)$ .

Из соотношения (10) для функции времени  $T_n(t)$  получаем уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n'^2 T_n = \varepsilon_1 q_n + \varepsilon \omega_n'^2 k_n \int_0^t R_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau, \quad k_n = \omega_n'^2 / \omega_n^2. \quad (11)$$

Применительно к нашей задаче имеем

$$T_n = \left[ A_n \cos \omega_n (1 + 0,5 R_{cn}) t + B_n \sin \omega_n (1 + 0,5 R_{cn}) t \right] \exp(-0,5 \omega_n R_{sn} t) + \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\omega_n t + \varphi_{01} - \varphi_{02}), \quad (12)$$

где  $R_{cn}, R_{sn}$  – два основных Фурье-образа ядра  $k_n R_3(t)$ , характеризующие скорость возрастания частоты и логарифмический декремент затухания:

$$R_{cn} = k_n \int_0^\infty R_3(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau, \quad R_{sn} = k_n \int_0^\infty R_3(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau, \quad \varphi_{01} = \arctg \frac{R_{sn}}{R_{cn}},$$

$$\varphi_{02} = \arctg \frac{q_{1n}}{q_{2n}}, \quad q_{1n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad q_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \cos(\omega_n t) dt.$$

Константы  $A_n, B_n$  определяются из начальных условий движения:

$$A_n = \int_0^{r_1} w(r, 0) v_n r dr - \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}),$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n (1 + 0,5 R_{cn})} \left[ \frac{\omega_n R_{sn}}{2} A_n + 2 \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \sin(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \int_0^{r_1} \dot{w}(r, 0) v_n r dr \right]. \quad (13)$$

Первое слагаемое (12) представляет свободные затухающие колебания системы, причем декремент пропорционален синус-образу Фурье  $R_{sn}$  ядра  $k_n R_3(t)$ , а возрастание частоты – косинус-образу ядра  $R_{cn}$ . Второе слагаемое описывает гармонические вынужденные колебания с частотой  $\omega_n$  и амплитудой

$$\frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}}. \quad (14)$$

Таким образом, вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, набранной из линейно вязкоупругих слоев, описываются выражениями (6) с функцией времени (12) и системой функций  $v_n, \varphi_n$ .

При малых силах порядка  $\varepsilon$  излагаемый метод усреднения дает отличную от нуля амплитуду (14) только в случае резонанса. Поэтому рассмотрим случай, когда частота нагрузки совпадает с одной из частот  $\omega_k$  собственных колебаний пластины:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (D, E, k - \text{const}).$$

Начальные условия движения принимаем однородными. Характеристики колебаний (12), соответствующие  $k$ -й гармонике, в этом случае следующие:

$$q_k(t) = D_k \cos \omega_k t + E_k \sin \omega_k t, \quad q_{1k} = \frac{E_k}{2\omega_k}, \quad q_{2k} = \frac{D_k}{2\omega_k}, \quad \varphi_{02} = \arctg \frac{D_k}{E_k}, \quad (q_{1n} = q_{2n} = 0, \quad n \neq k),$$

$$D_k = \frac{Dq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k} \left[ J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)} I_1(\lambda_k r_1) \right], \quad E_k = \frac{Eq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k} \left[ J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)} I_1(\lambda_k r_1) \right]. \quad (15)$$

Прогиб, радиальное перемещение и относительный сдвиг в заполнителе следуют из соотношений (6) с учетом (15), (16).

Численные результаты получены для жестко закрепленной пластины (Д16Т–фторопласт–Д16Т) с относительными толщинами слоев  $h_1 = h_2 = c = 0,02$ . Вычисления проводились с использованием пакета MathCAD. Интенсивность резонансной нагрузки  $q_0 = 1$  Па. Ядро релаксации заполнителя принимается в виде, предложенном Ржанициным [5]:

$$R(t) = \frac{Ae^{-pt}}{t^{1-\beta}},$$

где  $A, p, \beta$  – параметры ядра, определяемые экспериментально.

Изменение резонансного прогиба упругой –  $a$  и вязкоупругих –  $\bar{b}$ ,  $\bar{v}$  пластин во времени при отсутствии упругого основания ( $\kappa_0 = 0$ ) показана на рис. 2. Вязкоупругость материалов приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации при  $t > 700$  с.

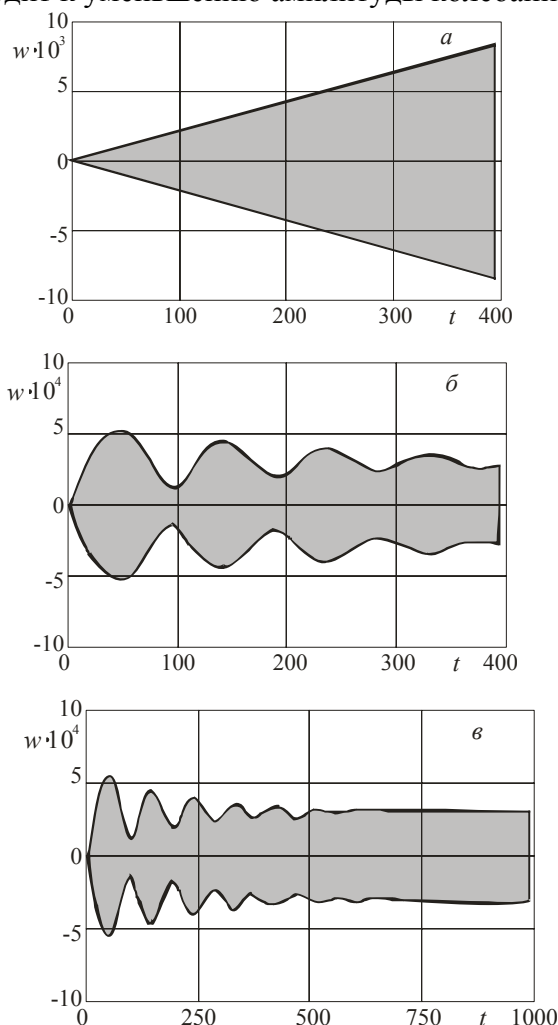


Рис. 2 – Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при  $\kappa_0 = 0$

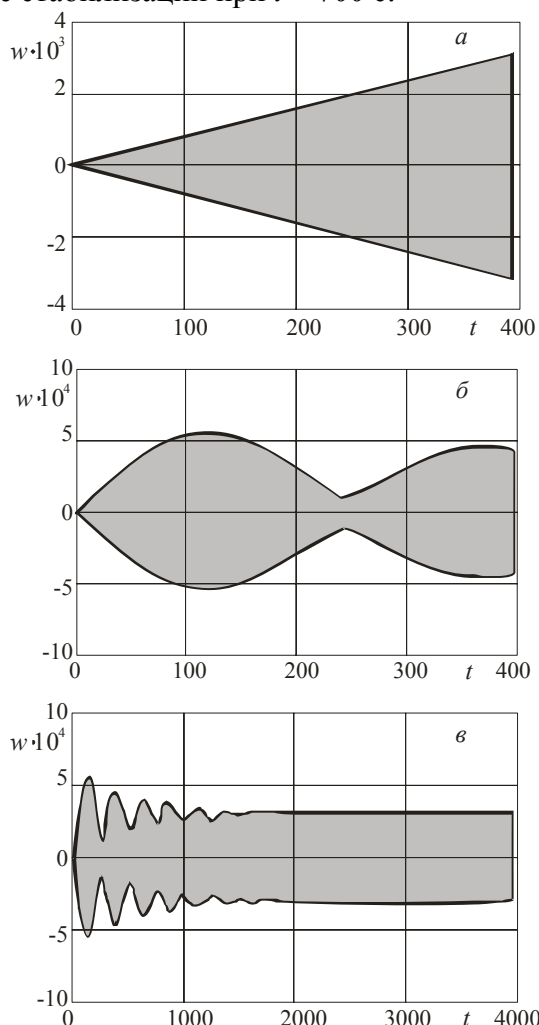


Рис. 3– Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м

Аналогичная картина для резонансных прогибов упругой – а и вязкоупругих – б, в пластинах наблюдается при наличии упругого основания  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м (рис. 3). Вязкоупругость материалов и здесь приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации, но уже за гораздо большее время, т. е. при  $t > 2000$  с. Влияние упругого основания характеризуется уменьшением скорости нарастания амплитуды огибающей в начальный период времени  $t < 50$  с, (см. рис. 2, б; 3, б) и увеличением периода ее нестационарности.

Выводы. Таким образом, решена задача о колебаниях вязкоупругой круговой трехслойной пластины на основании Винклера, проведен численный анализ, показавший, что вязкоупругость материалов пластины приводит к уменьшению и стабилизации амплитуды колебаний.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00091).

### **Список литературы**

1. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
2. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании // Механика композитных материалов. 2015. 51. № 5. С. 793–806.
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. М.: Наука, 1979.
5. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.





$$Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6, \quad (1)$$

где коэффициенты полинома являются функциями от 18 конструктивных параметров системы  $q_i = q_i(\alpha_1 \dots \alpha_{18})$  и  $0 \leq \alpha_i \leq \alpha_{i \max}$ .

Исследование устойчивости в плоскости параметров проводилось с использованием корневого метода. При проведении вычислительного эксперимента использовался разработанный достаточно универсальный комплекс программ. Это программное обеспечение позволяет определять область устойчивости (или неустойчивости) в плоскости двух любых задаваемых пользователем параметров. При этом также задаются пределы изменения указанных параметров от их номинальных значений  $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{18}^0)$ . Расчет показал, например, что при увеличении момента инерции ротора двигателя с приведенной инерционной нагрузкой  $T_5$  область устойчивости в плоскости параметров  $(K_1; K_2)$  увеличивается (рис. 2).

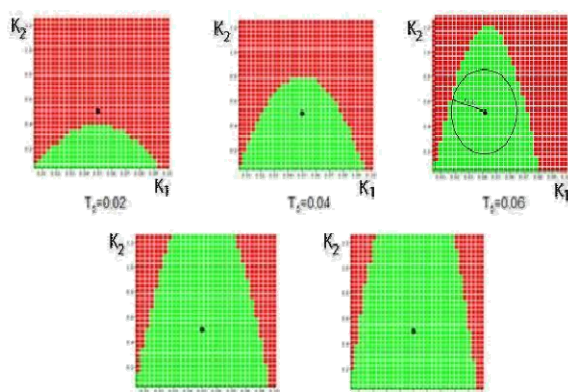


Рис. 2. Границы областей устойчивости для разных значений  $T_5$

С использованием широких возможностей работы системы Maple в режиме символьных преобразований больших объемов информации была сделана успешная попытка построения поверхностей – границ областей устойчивости для трехмерного случая (рис. 3).

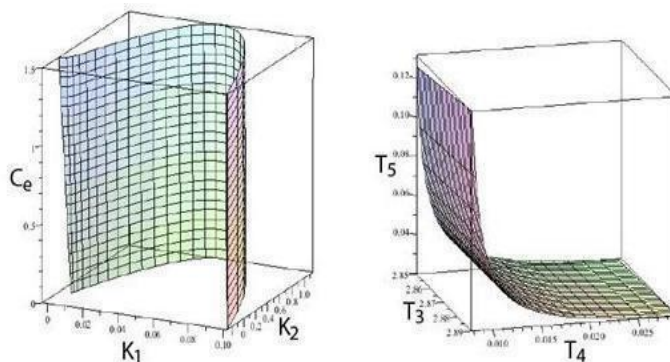


Рис. 3. Границы областей устойчивости в пространстве параметров  $(K_1, K_2, C_e)$  и  $(T_3, T_4, T_5)$

Приведём коэффициенты уравнения (1) к безразмерному виду:

$$0 < \alpha_i < \alpha_{i, \max} / : \alpha_{i, \max}, \quad 0 < \frac{\alpha_i}{\alpha_{i, \max}} < 1, \quad \alpha_i^* = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i, \max}}, \quad 0 < \alpha_i^* < 1.$$

Найдём радиус  $r_{i,j}$  робастной устойчивости [2] в каждой из плоскостей  $(\alpha_i^*, \alpha_j^*)$  18-мерного пространства конструктивных параметров системы электропривода. Меру робастной устой-

чивости определяем следующим образом:  $R = \min( r_{1,2}, r_{1,3} \dots r_{1,18}, r_{2,3}, r_{2,4} \dots r_{17,18} )$ . В пространстве параметров радиус  $R$  можно представить как радиус сферы, с центром в точке  $M_0(\alpha_1^{*0}, \alpha_2^{*0} \dots \alpha_{18}^{*0})$  внутри которой  $R < \sqrt{\sum_{k=1}^{18} (\alpha_k^* - \alpha_k^{*0})^2}$  при всех значениях координат  $M_0(\alpha_1^*, \alpha_2^* \dots \alpha_{18}^*)$  точек пространства гарантируется устойчивость состояния равновесия исследуемой системы.

Предлагаемый в настоящей работе подход исследования устойчивости может быть применен и для аналогичных исследований более сложных многоконтурных систем, а также при анализе нелинейных систем, в которых допускается представление нелинейных элементов в виде эквивалентных передаточных функций.

### **Список литературы**

1. С.Н. Стребуляев Исследование устойчивости системы электропривода. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, №4. Часть 1.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014, с.343-349.
2. Неймарк Ю.И. Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем. Доклады Академии наук. Кибернетика и теория регулирования. Том 325, № 2, 1992, с.247-249.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ С УПРУГИМ И АКУСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
факультет прикладной механики.

125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: [greghome@mail.ru](mailto:greghome@mail.ru)

Решены нестационарные задачи для тонких упругих сферических и цилиндрических оболочек, заполненных упругой или акустической средой, при воздействии на них внешнего давления. Для описания движения оболочек использованы уравнения модели С.П. Тимошенко, а для заполнителя – уравнения теории упругости. Решения строятся на основе принципа суперпозиции и сводятся к разрешающим интегральным соотношениям, ядрами которых являются функциями влияния для оболочек с заполнителем. Для построения функций влияния используется аппарат разложений в ряды Фурье по системам собственных функций задач для оболочки и заполнителя в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Представлены графические результаты расчетов с оценкой сходимости по количеству удерживаемых членов ряда разложения для функций влияния.

**Ключевые слова:** нестационарные задачи, упругие оболочки, упругий и акустический заполнитель, функции влияния, принцип суперпозиции, нестационарное давление

### Постановка задачи

Рассматривается тонкая упругая сферическая или цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  и толщины  $h$ , заполненная сплошной упругой средой. В начальный момент времени  $\tau = 0$  к ней прикладывается внешнее давление  $p$ , распределенное симметрично относительно оси оболочки (рис. 1).

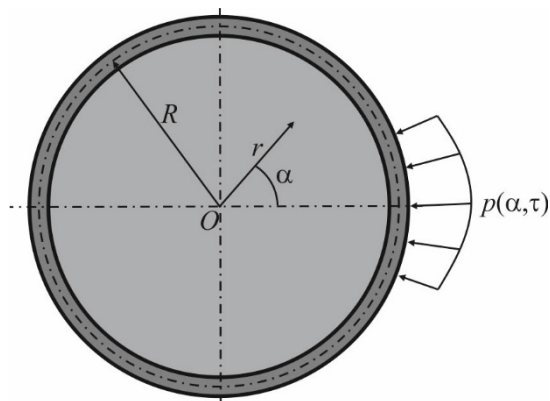


Рис. 1

Цилиндрическая оболочка предполагается бесконечно длинной, что приводит к плоской постановке задачи. В случае сферической оболочки задача предполагается осесимметричной.

Далее используется следующая система безразмерных параметров (штрихом обозначены размерные величины)

$$\begin{aligned}
 u_\beta &= \frac{u'_\beta}{R}, \quad w_\beta = \frac{w'_\beta}{R}, \quad u_{r\beta} = \frac{u'_{r\beta}}{R}, \quad u_{\alpha\beta} = \frac{u'_{\alpha\beta}}{R}, \quad r = \frac{r'}{R}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \quad \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \eta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \eta_1^2 = \frac{c_{21}^2}{c_1^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \\
 c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, \quad \beta_1^2 = \frac{c_{11}^2}{c_1^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_{11}^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_{21}^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad p_\beta = \frac{p'_\beta}{\sigma}, \quad \sigma = 2\sqrt{3}(\lambda + 2\mu)\gamma, \\
 \sigma_{rr\beta} &= \frac{\sigma'_{rr\beta}}{\sigma}, \quad \sigma_{\alpha\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{\alpha\alpha}}{\sigma}, \quad \sigma_{r\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{r\alpha\beta}}{\sigma}, \quad \varphi_\beta = \frac{\varphi'_\beta}{R^2}, \quad \psi_\beta = \frac{\psi'_\beta}{R^2}, \\
 \kappa_1 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\sigma}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda_1}{\sigma}, \quad \kappa_3 = \kappa_1 - \kappa_2, \quad \kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2,
 \end{aligned}$$

Здесь  $u_\beta, w_\beta$  – касательные и нормальные перемещения оболочек; индекс  $\beta=1$  соответствует случаю круговой цилиндрической, а  $\beta=2$  – сферической оболочки;  $u_{r\beta}, u_{\alpha\beta}$  – радиальные и угловые перемещения заполнителя;  $t$  – размерное время,  $c_1, c_{11}$  – размерные скорости волн растяжения-сжатия в оболочке и заполнителе соответственно;  $c_2, c_{21}$  – размерные скорости волн сдвига в оболочке и заполнителе соответственно;  $\rho$  и  $\rho_1$  – размерные плотности материала оболочки и заполнителя;  $p_\beta$  – внешнее давление,  $\lambda, \mu$  и  $\lambda_1, \mu_1$  – упругие постоянные Ламе материала оболочки и заполнителя;  $\sigma_{rr\beta}, \sigma_{r\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\alpha\beta}$  – ненулевые компоненты тензора напряжений в заполнителе,  $\varphi_\beta, \psi_\beta$  – скалярный и ненулевая компонента векторного потенциала перемещений заполнителя.

Движение оболочек описывается уравнениями в форме С.П. Тимошенко, учитывающими сдвиг и инерцию материальных волокон, нормальных к срединной поверхности [1]. В безразмерном виде с учетом двумерности задач они имеют следующий вид (точками обозначено дифференцирование по  $\tau$  (нормальные перемещения направлены в сторону внешней поверхности)):

$$\ddot{\mathbf{w}}_\beta = \mathbf{L}_\beta \mathbf{w}_\beta + \mathbf{q}, \quad \mathbf{w}_\beta = (u_\beta, w_\beta, \chi_\beta)^T, \quad \mathbf{L}_\beta = (L_{ij,\beta})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{q} = (p, 0, 0)^T. \quad (1)$$

Здесь  $\chi_\beta$  – угол поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций. Искомые функции зависят только от угла  $\alpha$  и времени  $\tau$ , где в случае цилиндрической оболочки  $\alpha$  – полярный угол ( $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ), а в случае сферической – это угол сферической системы координат ( $\alpha \in [0, \pi]$ ) (рис. 1). Дифференциальные операторы  $L_{ij,\beta}$  с учетом малости  $\gamma$  ( $\gamma^2 \ll 1$ ) имеют следующий вид [1,2]:

- цилиндрическая оболочка

$$\begin{aligned}
 L_{11,1} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \eta^2 k^2, \quad L_{12,1} = -L_{21,1} = (1 + \eta^2 k^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{13,1} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2, \\
 L_{22,1} &= \eta^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1, \quad L_{23,1} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad k^2 = \frac{5}{6}, \\
 L_{31,1} &= -L_{33,1} = \gamma^2 L_{13,1}, \quad L_{32,1} = -\eta^2 k^2 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \alpha};
 \end{aligned}$$

- сферическая оболочка

$$\begin{aligned}
 L_{11,2} &= l_2 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \eta^2 (2 - k^2), \quad L_{12,2} = [2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
 L_{13,2} &= -\gamma^2 l_2 + \eta^2 k^2, \quad l_2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha,
 \end{aligned}$$

$$L_{21,2} = -\left[2(\eta^2 - 1) + \eta^2 k^2\right] l_1, \quad L_{22,2} = \eta^2 k^2 l_2 - 4(1 - \eta^2), \quad l_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$L_{23,2} = \eta^2 k^2 l_1, \quad L_{31,2} = \gamma^{-2} L_{13,2}, \quad L_{32,2} = -\gamma^{-2} \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{33,2} = -L_{31,2}.$$

Движение заполнителя описывается уравнениями теории упругости в потенциалах упругих перемещений

$$\dot{\phi}_\beta = \beta_1^2 \Delta_\beta \phi_\beta, \quad \dot{\psi}_\beta = \eta_1^2 \Delta_\beta \psi_\beta - \frac{\psi_\beta}{r^2 \sin^2 \alpha} \delta_{2\beta}, \quad \Delta_\beta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\delta_{2\beta}}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \quad (2)$$

где  $\delta_{2\beta}$  – символ Кронекера.

Перемещения и напряжения в заполнителе связаны с упругими потенциалами следующими соотношениями:

$$u_{r\beta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \delta_{2\beta} \psi \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad u_{\alpha\beta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \delta_{2\beta} \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\sigma_{rr\beta} = \kappa_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\kappa_2}{r} \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r + \delta_{2\beta} (u_r + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha\beta} = \frac{\kappa_1}{r} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r \right) + \kappa_2 \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \delta_{2\beta} \left( \frac{u_\alpha}{r} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{u_r}{r} \right) \right],$$

$$\sigma_{r\alpha\beta} = \frac{\kappa_3}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right).$$

Предполагаем, что контакт между оболочкой и заполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания, тогда граничные условия принимают вид:

$$u_r|_{r=1} = w_\beta, \quad \sigma_{r\alpha\beta}|_{r=1} = 0. \quad (4)$$

Задача замыкается однородными начальными условиями:

$$u_\beta|_{\tau=0} = w_\beta|_{\tau=0} = \chi_\beta|_{\tau=0} = \phi_\beta|_{\tau=0} = \psi_\beta|_{\tau=0} = 0,$$

$$\dot{u}_\beta|_{\tau=0} = \dot{w}_\beta|_{\tau=0} = \dot{\chi}_\beta|_{\tau=0} = \dot{\phi}_\beta|_{\tau=0} = \dot{\psi}_\beta|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Полагаем также, что в центре оболочки возмущения ограничены.

### Разрешающее интегральное соотношение

Решения неоднородных начально-краевых или краевых задач зависят от правых частей операторов, порождающих уравнения движения, а также от начальных и граничных условий. Поэтому при заданных операторах желательно иметь некие специальные функции (фундаментальные решения), с помощью которых могут быть найдены решения неоднородных задач с произвольными правыми частями.

В качестве таких функций выступают фундаментальные решения (функции влияния, функции Грина). Функция влияния для оболочки с заполнителем представляет собой нормальные перемещения  $w_\beta = G_{2\beta}$ , являющиеся решениями задачи (1) – (5) при воздействии сосредоточенного мгновенного нормального давления [1-4]:

$$p_{0\beta} = \delta_{1\beta} \delta(\tau) \delta(\alpha) + \delta_{2\beta} \delta(\tau) \delta(\alpha - \vartheta), \quad (6)$$

где  $\delta(\square)$  – дельта-функция Дирака.

Основываясь на принципе суперпозиции [1-4] и используя функции влияния, получаем разрешающее поставленные задачи интегральное соотношение

$$w_\beta(\alpha, \tau) = \delta_{1\beta} \int_0^\tau \int_{-b(t)}^{b(t)} G_{2\beta}(\alpha - \vartheta, \tau - t) p_\beta(\vartheta, t) d\vartheta dt + \delta_{2\beta} 2\pi \int_0^\tau \int_0^{b(t)} G_{2\beta}(\alpha, \vartheta, \tau - t) p_\beta(\vartheta, t) \sin \vartheta d\vartheta dt. \quad (7)$$

### Функция влияния для оболочки с заполнителем

Для построения функции влияния для оболочки с заполнителем требуется определить нормальные перемещения  $w_\beta = G_{2\beta}$  как решение уравнений (1) при заданном внешнем давлении вида (6) с учетом внутреннего давления со стороны заполнителя. Таким образом, в (1) следует положить

$$P_\beta = P_{0\beta} - p_{r\beta}, \quad p_{r\beta} = \sigma_{rr\beta} \Big|_{r=1}, \quad (8)$$

где  $p_{r\beta}$  – реакция заполнителя.

В этом случае для тангенциальных перемещений оболочки и угла поворота нормали к срединной поверхности введем обозначения  $u_\beta = G_{1\beta}$ ,  $\chi_\beta = G_{3\beta}$ .

Для этой задачи применим метод разделения переменных. Представим заданные и искомые функции в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{1\beta} \\ G_{3\beta} \\ \Psi_\beta \\ u_{\alpha\beta} \\ \sigma_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} G_{1\beta n} \\ G_{3\beta n} \\ \Psi_{\beta n} \\ u_{\alpha\beta n} \\ \sigma_{r\alpha\beta n} \end{bmatrix} \left[ \delta_{1\beta} \sin n\alpha - \delta_{2\beta} \sin \alpha C_{n-1}^{3/2}(\cos \alpha) \right], \\ \begin{bmatrix} G_{2\beta} \\ P_{0\beta} \\ \Phi_\beta \\ u_{r\beta} \\ \sigma_{rr\beta} \end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} G_{2\beta n} \\ P_{0\beta n} \\ \Phi_{\beta n} \\ u_{r\beta n} \\ \sigma_{rr\beta n} \end{bmatrix} \left[ \delta_{1\beta} \cos n\alpha + \delta_{2\beta} P_n(\cos \alpha) \right], \quad (9) \\ P_{0\beta n} &= \delta_{1\beta} \left( 1 - \frac{\delta_{0n}}{2} \right) \frac{\delta(\tau)}{\pi} + \delta_{2\beta} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \delta(\tau). \end{aligned}$$

Здесь  $P_n(x)$  и  $C_{n-1}^{3/2}(x) = dP_n(x)/dx$  – полиномы Лежандра и Гегенбауэра.

Заметим, что коэффициенты рядов (9) в случае цилиндрической оболочки ( $\beta = 1$ ) зависят только от времени  $\tau$ , а в случае сферической ( $\beta = 1$ ) – от времени и угловой координаты  $\vartheta$ .

Как следует из соотношений (3), коэффициенты разложений (9) связаны между собой так

$$\begin{aligned} u_{r\beta n} &= \frac{\partial \Phi_{\beta n}}{\partial r} + \delta_{1\beta} \frac{n}{r} \Psi_{\beta n} - \delta_{2\beta} \frac{n(n+1)}{r} \Psi_{\beta n}, \\ u_{\alpha\beta n} &= -\delta_{1\beta} \frac{n}{r} \Phi_{\beta n} - \frac{\partial \Psi_{\beta n}}{\partial r} + \delta_{2\beta} \frac{\Phi_{\beta n} - \Psi_{\beta n}}{r}, \\ \sigma_{rr\beta n} &= \kappa_1 \frac{\partial u_{r\beta n}}{\partial r} + \frac{\kappa_2}{r} \left\{ u_{r\beta n} + \delta_{1\beta} n u_{\alpha\beta n} + \delta_{2\beta} [u_{r\beta n} - n(n+1)u_{\alpha\beta n}] \right\}, \\ \sigma_{r\alpha\beta n} &= \kappa \left( \frac{\partial u_{\alpha\beta n}}{\partial r} - \delta_{1\beta} \frac{n u_{r\beta n} + u_{\alpha\beta n}}{r} + \delta_{2\beta} \frac{u_{r\beta n} - u_{\alpha\beta n}}{r} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (9) в (1) и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по времени, приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений  $G_{1\beta n}^L$ ,  $G_{2\beta n}^L$ ,  $G_{3\beta n}^L$  (верхний индекс «L» у функции означает ее изображение по Лапласу,  $s$  – параметр преобразования), решая которую находим выражение для  $G_{2\beta n}^L$ :

$$G_{2\beta n}^L = G_{21\beta n}^L - G_{22\beta n}^L, \quad (11)$$

$$G_{21\beta n}^L = \left[ \frac{\delta_{1\beta}}{\pi} + \delta_{2\beta} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \right] Q_\beta(s, n), \quad G_{22\beta n}^L = p_{r\beta n}^L Q_\beta(s, n),$$

$$Q_1(s, n) = \frac{\sum_{j=1}^2 P_j(s^2, n^2)}{\sum_{j=1}^3 R_j(s^2, n^2)}, \quad Q_2(s, n) = \frac{\sum_{j=0}^2 S_j(s^2, n_1^2)}{\sum_{j=0}^3 T_j(s^2, n_1^2)}, \quad n_1 = n(n+1),$$

$$P_1(s, n) = \eta^2 k^2 [n(\gamma^2 - 1) - s(\gamma^2 + 1)], \quad P_2(s, n) = \gamma^2 [n(\gamma - 1) - s][n(\gamma + 1) + s],$$

$$R_1(s, n) = \eta^2 k^2 [n(2\eta^2 k^2 + \gamma^2) - s(\gamma^2 + 1)], \quad R_3(s, n) = P_2(s, n)(\eta^2 k^2 n + s),$$

$$R_2(s, n) = -[\gamma^2 + \eta^2 k^2 (\gamma^2 + 1)]s^2 + [\eta^2 k^2 (3\gamma^2 - 1) - (2\eta^4 k^4 + \gamma^2)]sn +$$

$$+ [2\eta^4 k^4 (\gamma^2 - 1) + \gamma^2 (2\eta^2 k^2 + \gamma^2)]n^2,$$

$$S_0(s, n_1) = k_3^2 (k_1^2 + k_2^2), \quad S_1(s, n_1) = s(k_1^2 - k_3^2) + n_1 [(\gamma^2 - 1)k_3^2 + k_1^2 + k_2^2],$$

$$S_2(s, n_1) = -[s + n_1(1 + \gamma)][s + n_1(1 - \gamma)], \quad T_0(s, n_1) = a^2 S_0(s, n_1),$$

$$T_1(s, n_1) = s[k_1^2 (k_3^2 + a^2) + k_3^2 (k_2^2 - a^2)] + n_1 \{k_3^2 k_1^4 + [(k_2^2 - 4 + \eta^2 k^2)k_3^2 + a^2 - 2\eta^2 k^2 + 2k_2^2]k_1^2 +$$

$$+ [(\eta^2 k^2 - 2)k_2^2 + (\gamma^2 - 1)a^2 - 2\eta^2 k^2 + 4]k_3^2 + (a^2 - 4)k_2^2\},$$

$$T_2(s, n_1) = s^2 (k_1^2 - k_3^2 - a^2) + sn_1 [k_1^4 + (\eta^2 k^2 - 3)k_1^2 + (\gamma^2 - 1)k_3^2 - 2(a^2 - \eta^2 k^2) + k_2^2 + 4] +$$

$$+ n_1^2 \{k_1^4 + [\gamma^2 (2 + k_3^2) + 2(\eta^2 k^2 - 2)]k_1^2 + \gamma^2 k_3^2 (\eta^2 k^2 - 2) + \eta^2 k^2 k_2^2 + (\gamma^2 - 1)(a^2 - 4)\},$$

$$T_3(s, n_1) = S_2(s, n_1)(s + \eta^2 k^2 n_1).$$

Подстановка (9) в (2) и применение преобразования Лапласа по времени приводит к следующей задаче для заполнителя относительно коэффициентов рядов (9):

$$\frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} = \frac{s^2}{\beta_1^2} \varphi_n^L, \quad \frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} = \frac{s^2}{\eta_1^2} \psi_n^L, \quad (12)$$

$$\Delta_{\beta n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \delta_{1\beta} \frac{n^2}{r^2} + \delta_{2\beta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n_1}{r^2} \right),$$

$$u_{r\beta n}^L \Big|_{r=1} = G_{2\beta n}^L, \quad \sigma_{r\alpha\beta n}^L \Big|_{r=1} = 0. \quad (13)$$

Ограниченные при  $r \rightarrow 0$  решения уравнений (12) имеют вид [1]:

$$\varphi_{1n}^L = f_{1n}(s) I_n(\xi), \quad \psi_{1n}^L = q_{1n}(s) I_n(\zeta),$$

$$\varphi_{2n}^L = \frac{f_{2n}(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\xi), \quad \psi_{2n}^L = \frac{q_{2n}(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\zeta), \quad \xi = rs/\beta_1, \quad \zeta = rs/\eta_1, \quad (14)$$

где  $f_{\beta n}(s)$ ,  $q_{\beta n}(s)$  – некоторые произвольные функции, а  $I_\nu(z)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда), которая при  $\nu = n + 1/2$  выражается через элементарные функции следующим образом [5]:

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z^{n+1/2}}} [e^z R_{n0}(-z) - e^{-z} R_{n0}(z)], \quad (15)$$

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n), \quad A_{nk} = 0 \quad (k < 0, k > n).$$

Для аналитического определения оригинала функции  $G_{21n}^L$  используем асимптотики модифицированных функций Бесселя [5] и функции  $Q_1(s, n)$  при  $s \rightarrow \infty$ , что согласно предельной теореме для изображений [6] соответствует асимптотическим представлениям вышеупомянутых функций при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$I_n(z) \square \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad I'_n(z) \square \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad I''_n(z) \square \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (16)$$

$$Q(s, n) \square \frac{1}{\eta^2 k^2 n^2 + s^2} \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Из (10) и (14) следуют выражения для  $u_{r\beta n}^L$  и  $\sigma_{r\alpha\beta n}^L$ . Подставляя их в граничные условия (13), учитывая представления (15), (16) и проводя некоторые выкладки, находим функции  $f_{\beta n}(s)$  и  $q_{\beta n}(s)$ . Подставляя их в выражение для  $\sigma_{rr\beta n}$  из (10), в котором полагаем  $r = 1$ , получаем представление для  $p_{r\beta n}^L$ . В итоге изображение  $G_{22\beta n}^L$  принимает вид:

$$G_{221n}^L = -\frac{\kappa_1 s^4 - 4\kappa\beta_1 \eta_1 n^2 s^2 - \kappa_2 \beta_1^2 \eta_1^2 n^4}{s^5 + a^2 n^8} G_{211n}^L, \quad G_{211n}^L = \frac{1}{\pi} \frac{1}{s^2 + \eta^2 k^2 n^2}, \quad (17)$$

$$G_{222n}^L = \frac{2n+1}{2} Q_2^2(s, n) \frac{D_n(s)}{\Delta_n(s)} P_n(\cos \vartheta),$$

$$\Delta_n(s) = 1 + M_{1n}(s) e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s) e^{-(\omega_1 + \omega_2) s} + M_{3n}(s) e^{-(\omega_1 - \omega_2) s},$$

$$D_n(s) = L_{1n}(s) + L_{2n}(s) e^{-2\omega_1 s} - L_{3n}(s) e^{-(\omega_1 + \omega_2) s} - L_{4n}(s) e^{-(\omega_1 - \omega_2) s},$$

$$M_{1n}(s) = \frac{M_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{2n}(s) = -\frac{M_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{3n}(s) = -\frac{M_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)},$$

$$L_{1n}(s) = \frac{L_n(-\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{2n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{3n}(s) = \frac{L_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{4n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)},$$

$$L_n(x, y) = R_{n2}(y) \tilde{R}_{n2}(x) - 2R_{n1}(x) \tilde{R}_{n1}(y), \quad M_n(x, y) = R_{n4}(x) R_{n2}(y) - 2R_{n1}(x) R_{n3}(y),$$

$$R_{n1}(s) = R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s), \quad R_{n2}(s) = R_{n+2,0}(s) - (2n+1)R_{n+1,0}(s) + 2n(n+1)R_{n0}(s),$$

$$\tilde{R}_{n1}(s) = \kappa_3 n(n+1)R_{n+1,0}(s) - \kappa_3 n(n^2 - 1)R_{n0}(s),$$

$$\tilde{R}_{n2}(s) = \kappa_1 R_{n+2,0}(s) - (\kappa_1(2n+1) + 2\kappa_2)R_{n+1,0}(s) + n(n-1)\kappa_4 R_{n0}(s),$$

$$R_{n3}(s) = Q_2(s, n) \tilde{R}_{n1}(s) - R_{n0}(s), \quad R_{n4}(s) = Q_2(s, n) \tilde{R}_{n2}(s) - R_{n1}(s),$$

$$\omega_1 = \frac{\eta_1 + \beta_1}{\beta_1 \eta_1} > \omega_2 = \frac{\beta_1 - \eta_1}{\beta_1 \eta_1} > 0, \quad \xi_0 = s/\beta_1, \quad \zeta_0 = s/\eta_1.$$

Оригиналы коэффициентов  $G_{211n}^L$  определяются элементарно:



$$G_{211n}(\tau) = \frac{1}{\pi\eta kn} \sin \eta kn\tau.$$

При этом сумма соответствующего ряда определяется так [7, 8]:

$$\begin{aligned} G_{211}(\alpha, \tau) &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{\pi\eta k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \eta kn\tau}{n} \cos n\alpha = \\ &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\eta k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha + \eta k\tau)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha - \eta k\tau)}{n} \right) = \\ &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\eta k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(\alpha, \eta k\tau + 2\pi n) - f(\alpha, -\eta k\tau + 2\pi n)], \\ f(\alpha, \tau) &= \frac{\pi - \alpha - \tau}{2} [H(\alpha + \tau) - H(\alpha + \tau + 2\pi n)], \end{aligned}$$

где при определенных значениях  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  и  $\tau \in [0, \infty)$  в сумме остается только одно ненулевое слагаемое.

Оригиналы коэффициентов  $G_{221n}^L$  и  $G_{212n}^L$  при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются аналитически с помощью теоремы разложения для преобразования Лапласа.

Для аналитического вычисления оригиналов коэффициентов  $G_{222n}^L$ , принимая во внимание, что в некоторой правой полуплоскости  $\text{Re } s > \alpha_*$  имеет место неравенство

$$M_{1n}(s)e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s)e^{-(\omega_1 + \omega_2)s} + M_{3n}(s)e^{-(\omega_1 - \omega_2)s} < 1,$$

используем следующее разложение в степенной ряд по экспонентам [9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n(s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|z|=m} (m; z) M_{zn}(s) e^{-n_z s} \\ n_z &= [(2z_1 + z_2 + z_3)\omega_1 + (z_2 - z_3)\omega_2] > 0, \quad z = (z_1, z_2, z_3), \\ M_{zn}(s) &= M_{1n}^{z_1}(s) M_{2n}^{z_2}(s) M_{3n}^{z_3}(s), \quad (m; z) = \frac{m!}{z_1! z_2! z_3!}, \end{aligned}$$

где  $z$  – мультииндекс,  $|z| = z_1 + z_2 + z_3$  – его модуль,  $(m; z)$  – мультиномиальный коэффициент.

Тогда изображение  $G_{222n}^L$  принимает вид:

$$\begin{aligned} G_{222n}^L &= \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|z|=m} (m; z) \sum_{k=1}^4 M_{kzn}(s) e^{-n_{kz} s}, \\ n_{kz} &> 0, \quad M_{kzn}(s) = Q^2(s^2, n_1^2) L_{kn}(s) M_{zn}(s), \\ n_{1z} &= n_z, \quad n_{2z} = n_z + 2\omega_1, \quad n_{3z} = n_z + \omega_1 + \omega_2, \quad n_{4z} = n_z + \omega_1 - \omega_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что функции  $M_{kzn}(s)$  являются правильными рациональными дробями, поэтому оригиналы каждого из слагаемых в (17) определяются точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления [9]. При этом в пространстве оригиналов на конечном промежутке времени вследствие наличия экспоненциальных множителей ряд (17) является конечной суммой.

Вариант акустического заполнителя можно рассматривать как частный случай упругого заполнителя с нулевым параметром Ламе  $\mu_1 = 0$  [1]. В этом случае в приведенных выше формулах следует совершить предельный переход при  $\eta_1 \rightarrow 0$ .

### Примеры расчетов

Рассмотрим воздействие на сферическую оболочку с упругим наполнителем внезапно приложенного в момент времени  $\tau = 0$  внешнего давления вида

$$p = -H(\tau)H\left(\frac{\pi}{8} - |\alpha|\right)\cos(\alpha).$$

Для получения результатов использовано представление (7). При этом входящие в него интегралы вычислялись аналитически. В расчетах удерживалось 11 членов ряда для функции  $G_{22}(\alpha, \vartheta, \tau)$ .

В качестве материала для оболочки принята сталь, а для наполнителя – сталь, алюминий или медь, что соответствует значениям безразмерных параметров, приведенным в таблице 1.

Таблица 1

**Значения безразмерных параметров**

Материал: оболочка-наполнитель	Безразмерные параметры					
	$\gamma$	$\eta$	$\eta_1$	$\beta_1$	$\kappa_1$	$\kappa_2$
Сталь-сталь	0.025	0.71	0.71	1	11.55	5.69
Сталь-алюминий	0,025	0.71	0.69	0.98	3.67	1.93
Сталь-медь	0,025	0.71	0.61	0.87	7.46	3.89

На рис. 2 представлены зависимости нормальных перемещений  $w_2(\alpha, \tau)$  в лобовой точке оболочки от времени. Сплошная кривая соответствует принятию в качестве материала наполнителя стали, пунктирная – алюминия, штриховая пунктирная – меди.

Распределения нормальных перемещений по углу в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом  $\alpha$  в момент времени  $\tau = 0.15$  показаны на рис. 3. Здесь, как и ранее сплошная кривая соответствует принятию в качестве материала наполнителя стали, пунктирная – алюминия, штриховая пунктирная – меди.

На рис. 4 представлено сравнение распределений нормальных перемещений по углу  $\alpha$  в момент времени  $\tau = 0.5$ . Сплошная кривая соответствует оболочке с наполнителем, а штриховая – пустой оболочке. В качестве материала наполнителя здесь использован алюминий.

Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда для функции  $G_{22}(\alpha, \vartheta, \tau)$  показано на рис. 5. Здесь представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Штриховая пунктирная кривая построена при учете 6 первых членов ряда, штриховая – 7 членов, а сплошная – 8 членов. При этом относительные расстояния между функциями перемещений по норме в пространстве  $L_2$  составляют в процентном отношении:

$$\Delta_{6,7} = \frac{\|w_{2,7} - w_{2,6}\|}{\|w_{2,6}\|} 100\% = 1.65\%; \quad \Delta_{7,8} = \frac{\|w_{2,8} - w_{2,7}\|}{\|w_{2,7}\|} 100\% = 0.57\%; \quad \|f\| = \left( \int_0^{0.3} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где  $w_{2,6}(\tau)$ ,  $w_{2,7}(\tau)$  и  $w_{2,8}(\tau)$  – нормальные перемещения в лобовой точке при учете шести, семи и восьми первых членов ряда для функции  $G_{22}(\alpha, \vartheta, \tau)$ .

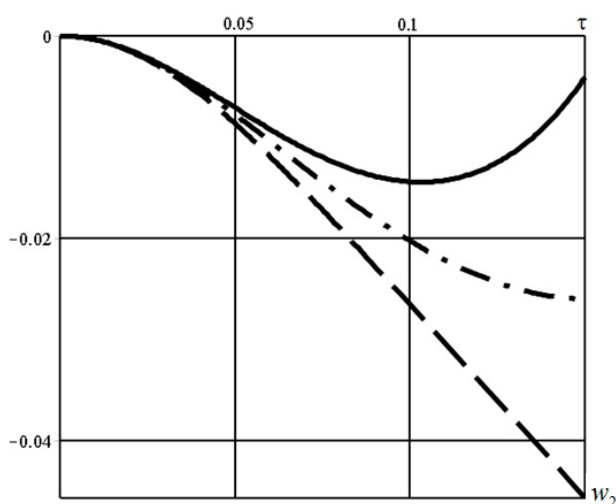


Рис. 2. Зависимости нормальных перемещений в лобовой точке

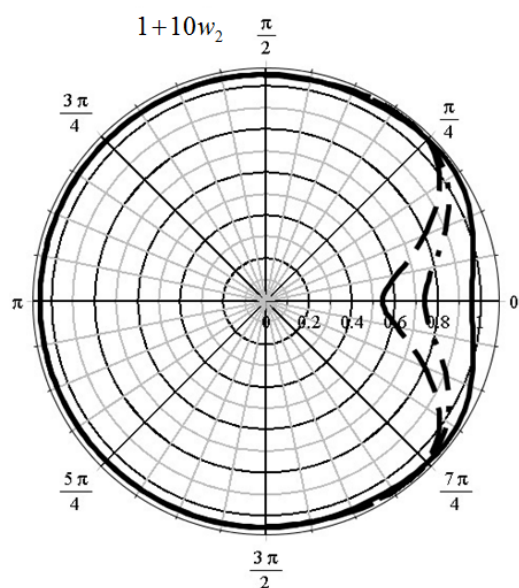


Рис. 3. Распределения нормальных перемещений по углу

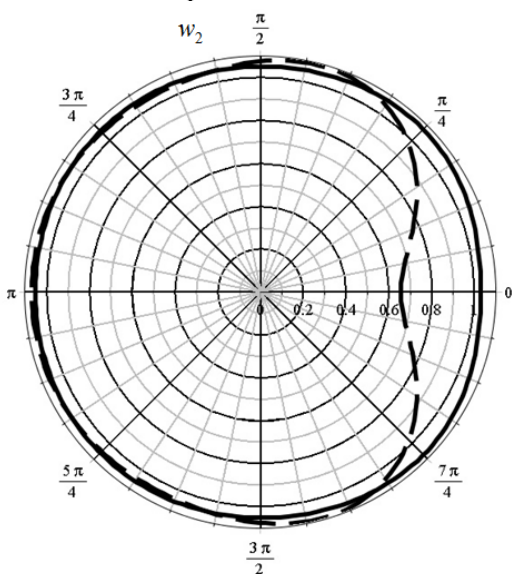


Рис. 4. Сравнение распределений нормальных перемещений пустой оболочки и оболочки с наполнителем

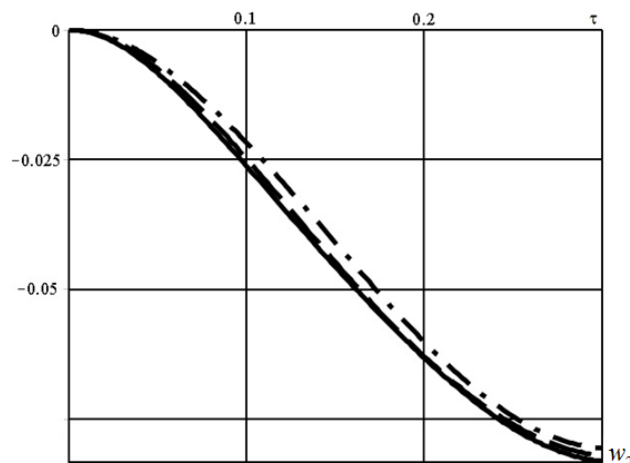


Рис. 5. Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда для функции влияния

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 16-58-00034\_Бел\_а, 16-08-00260\_а).

### Список литературы

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
2. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Vol. 43. No. 2. P. 145-152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
3. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2016. Т. 158. Кн. 1. С. 141-151.

4. D.V. Tarlakovskii and G.V. Fedotenkov Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell // *Mechanics of Solids*. 2015. V. 50. No. 2. P. 208–217.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами М.: Наука. 1979. 832 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. Наука. 1987. 688 с.
7. В. Кеч, П. Теодореску Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Изд.-во «Мир», 1978. – 508 с.
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М. Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1990. 264 с.

## **ВОЛНОВАЯ КОАГУЛЯЦИЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ПАРОКАПЕЛЬНЫХ СМЕСЕЙ В ТЕХНОЛОГИИ ГАЗИФИКАЦИИ СЖИЖЕННОГО ПРИРОДНОГО ГАЗА**

**А.Л. Тукмаков, В.Г.Тонконог, С.Н.Арсланова**

Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева-КАИ, кафедра теплотехники и энергетического машиностроения.  
420111 Казань, ул.К.Маркса, 10, e-mail: tukmakov@imm.rnc.ru

Моделируется течение полидисперсной парокапельной смеси метана в плоском канале, сопровождающееся коагуляцией частиц дисперсных фракций во внешнем волновом поле, которое генерируется в несущей среде- газообразном метане колеблющимися участками стенок канала на первой собственной частоте для поперечного сечения канала, заполненного газообразным метаном. В окрестности излучателя формируется стоячая волна поля скорости в поперечном к потоку направлении и возрастает интенсивность коагуляции частиц различных фракций при их столкновении вследствие взаимного перемещения. Описан процесс изменения дисперсности паро-капельного потока, находящегося под действием волнового поля стоячей волны, фронт которой перемещается поперек потока

*Ключевые слова:* уравнения полидисперсной газозвеси, разделение фаз, дисперсность, явная схема Мак-Кормака, несущая среда, нелинейные колебания, коагуляция частиц в волновом поле.

Изучение акустического воздействия на дисперсные среды [1, 2] позволяет выявлять эффекты, на основе которых возможно совершенствование промышленных технологий. В работе [3] была предложена энерго- и ресурсосберегающая технология газификации и криостатирования сжиженного природного газа (СПГ). Технологическая схема установки приведена на рис.1. СПГ из теплоизолированной емкости 1 подается в теплообменник 2, где жидкость нагревается до температуры  $T_1$ , меньшей температуры кипения и подается в сопло Лавы, где в окрестности минимального сечения происходит ее низкотемпературное вскипание с последующей инверсией структуры потока и формированием в расширяющейся части сопла полидисперсного паро-капельного течения. Эксперименты показывают [4], что выбором температуры на входе в сопло, заданием перепада давления и профиля сопла можно достичь в расширяющейся части температуры, лежащей ниже температуры тройной точки. В результате, в расширяющейся части сопла дисперсная фаза будет состоять из жидких капель и твердых частиц с температурой, меньшей температуры жидкости в емкости-хранилище. Затем паро-капельный поток подается в инерционный сепаратор, где несущая среда- газообразный метан отделяется от дисперсной фазы, которая затем закачивается насосом 8 в хранилище и понижает температуру СПГ, что уменьшает интенсивность потерь и увеличивает возможный срок хранения метана в жидком состоянии. Несущая фаза- парообразный метан направляется в теплообменник 5, где нагревается до температуры  $T_2$ , требующейся для работы энергетической установки 7. Эффективность процесса определяется качеством сепарации несущей и дисперсной фазы. Многочисленные экспериментальные данные показывают, что на выходе сопла присутствуют частицы с размерами от долей микрона до десятков микрон. В то же время, инерционные сепараторы способны отделять дисперсную фазу от несущей среды, если размеры частиц превосходят примерно 5 мкм. В связи с этим происходит снижение эффективности технологического процесса – в емкость закачивается меньшее количество охлажденной дисперсной фракции, которая частично попадает в теплообменник 5, где на ее нагрев до температуры плавления, на процесс плавления, нагрев до температуры испарения, последующее испарение и нагрев до температуры  $T_2$  требуются дополнительные затраты энергии.

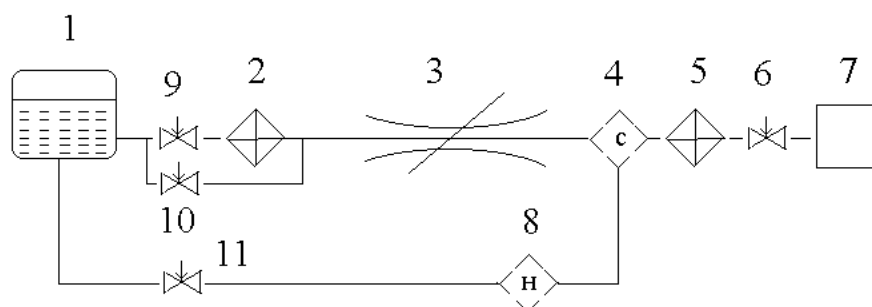


Рис.1. Схема установки для газификации и криостатирования сжиженного природного газа: 1- теплоизолированная емкость со сжиженным природным газом; 2- теплообменник-нагреватель жидкости; 3- сопло Лавала; 4- инерционный сепаратор; 5- теплообменник-нагреватель пара; 6, 9-11- вентили; 7- энергетическая установка; 8- насос.

Следовательно, на участке между выходным сечением сопла и входом инерционного сепаратора ( рис.2 ) необходимо изменить дисперсность паро-капельного потока, уменьшив за счет коагуляции частиц массовое содержание мелкодисперсных фракций. Одним из возможных способов ускорения коагуляции является акустическое воздействие на многофазные среды, которое применяется для изменения дисперсности и пространственного распределения фаз [5- 10]. Так, в работе [9] предложен способ акустического воздействия на поток газозвеси за счет генерации резонансных для поперечного сечения канала колебаний, позволяющая создать дрейф дисперсной фазы по направлению к боковым стенкам канала и разделить несущую и дисперсную фазы. Последний подход позволяет осуществить непрерывное воздействие на дисперсную фазу в процессе ее движения по каналу. При этом выбор интенсивности волнового воздействия ограничивается критическим числом Вебера [7] для того, чтобы коагуляция частиц при соударении преобладала над их дроблением.

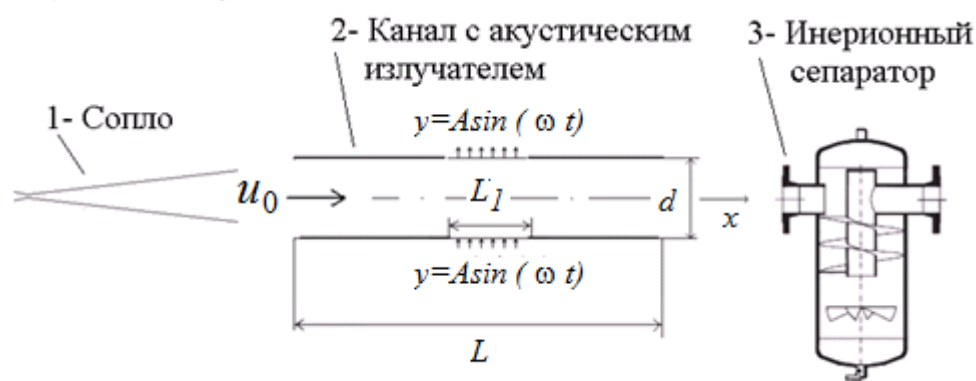


Рис.2. Схема расположения сопла- парогенератора, канала с излучателем и инерционного сепаратора

Следовательно, на участке между выходным сечением сопла и входом инерционного сепаратора ( рис.2 ) необходимо изменить дисперсность паро-капельного потока, уменьшив за счет коагуляции частиц массовое содержание мелкодисперсных фракций. Одним из возможных способов ускорения коагуляции является акустическое воздействие на многофазные среды, которое применяется для изменения дисперсности и пространственного распределения фаз [5- 10]. Так, в работе [9] предложен способ акустического воздействия на поток газозвеси за счет генерации резонансных для поперечного сечения канала колебаний, позволяющая создать дрейф дисперсной фазы по направлению к боковым стенкам канала и разделить несущую и дисперсную фазы. Последний подход позволяет осуществить непрерывное воздействие на дисперсную фазу в процессе ее движения по каналу. При этом выбор интенсивности волнового воздействия ограничивается крити-

ческим числом Вебера [7] для того, чтобы коагуляция частиц при соударении преобладала над их дроблением.

Для описания динамики коагулирующей полидисперсной газовой смеси применяется математическая модель, в которой каждому размеру частиц сопоставлена своя фракция [10]. Несущая фаза описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом обмена импульсом и энергией с дисперсной фазой. Дисперсная фаза включает в себя  $n$  фракций, каждая из которых описывается системой из уравнения неразрывности для средней плотности, уравнений сохранения составляющих импульса и уравнения сохранения внутренней энергии, записанных с учетом обмена импульсом и энергией с несущей средой. Процесс коагуляции частиц описывается при помощи лагранжевой модели, позволяющей учесть обмен массой, импульсом и энергией между фракциями в результате соударения частиц [7].

**Модель движения многоскоростной многотемпературной полидисперсной газовой смеси.** Модель движения многоскоростной многотемпературной газовой смеси включает в себя систему уравнений движения несущей (1) и  $n$  систем уравнений движения дисперсных фаз (2). В декартовых координатах в двумерной постановке системы имеют вид [11-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{xy})}{\partial y} &= -\sum_{i=1,n} F_{xi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} &= -\sum_{i=1,n} F_{yi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \\ &= -\sum_{i=1,n} Q_i - \sum_{i=1,n} (|F_{xi}|(u - u_i) - |F_{yi}|(v - v_i)) + \alpha \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right), \\ e &= I + \rho(u^2 + v^2)/2, \quad \alpha = \sum_{i=1,n} \alpha_i, \\ \tau_{xx} &= \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $e$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  – плотность; составляющие скорости несущей и дисперсной фаз; полная энергия несущей фазы, отнесенная к единице объема; коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей фазы;  $\alpha = \sum_{i=1,n} \alpha_i$  – объемное содержание дисперсной фазы, получае-

мое суммированием объемных содержаний фракций. Величины  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$ ,  $Q_i$  определяются законами межфазного трения и теплообмена.  $I = RT/(\gamma - 1)$  – внутренняя энергия газа;  $R$ ,  $\gamma$  – газовая постоянная и постоянная адиабаты воздуха.

Динамика каждой компоненты дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности дисперсной фазы, уравнениями сохранения компонент импульса и уравнением сохранения внутренней энергии [10, 11]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) &= F_{xi} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) &= F_{yi} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) &= Nu_i \frac{6\alpha_i}{(2r_i)^2} \lambda (T - T_i), \\ \rho_i &= \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{vi} T_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$ ,  $e_i$ ,  $T_i$  – объемное содержание, средняя плотность, внутренняя энергия  $i$ - фракции дисперсной фазы, отнесенная к единице объема и ее температура;  $C_{vi}$ ,  $\rho_{i0}$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме и плотность вещества твердой фазы. Составляющие силы аэродинамического трения  $F_x$  и  $F_y$  определяются следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} F_{xi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{(2r_i)} C_{di} \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + (v-v_i)^2} (u-u_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right), \\ F_{yi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{(2r_i)} C_{di} \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + (v-v_i)^2} (v-v_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \\ C_{di} &= C_{di}^0 \psi(M_{i0}) \varphi(\alpha_i), \quad C_{di}^0 = \frac{24}{Re_{i0}} + \frac{4}{Re_{i0}^{0.5}} + 0.4, \quad \psi(M_{i0}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{i0}^{0.63}}\right), \\ \varphi(\alpha_i) &= (1-\alpha_i)^{-2.5}, \quad Re_{i0} = \rho |\bar{V} - \bar{V}_i| 2r_i / \mu, \quad M_{i0} = |\bar{V} - \bar{V}_i| / c, \end{aligned}$$

$$Nu_i = 2 \exp(-M_{i0}) + 0.459 Re_{i0}^{0.55} Pr^{0.33}, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda, \quad 0 \leq M_{i0} \leq 2, \quad 0 \leq Re_{i0} < 2 \cdot 10^5.$$

Температура несущей среды находится из соотношения:  $T = (\gamma - 1)(e/\rho - 0.5(u^2 + v^2))/R$ . Отнесенная к единице объема внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется как  $e_i = \rho_i C_{vi} T_i$ . В уравнение сохранения энергии несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа  $\lambda$  и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей:  $Q_i = \alpha^T 4 \pi r_i^2 (T - T_i) n = 6 \alpha_i Nu_i \lambda (T - T_i) / (2r_i)^2$ , где  $Nu_i = 2r_i \alpha^T / \lambda$  – число Нуссельта,  $n$  – концентрация,  $r_i$  – радиус частиц.

В качестве уравнения состояния для несущей среды было применено уравнение состояния Бенедикта-Вебба-Рубина [12]:

$$p = RT\rho + \left( B_0 RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) \rho^2 - (bRT - a) \rho^3 + a \alpha \rho^6 + \frac{c \rho^3}{T^2} (1 + \gamma \rho^2) \exp(-\gamma \rho^2),$$

где коэффициенты  $a$ ,  $A_0$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $c$ ,  $C_0$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  определяются в зависимости от плотности, давления и температуры метана в парообразном состоянии.

Система уравнений движения двухфазной многотемпературной многоскоростной полидисперсной смеси записывалась в обобщенных подвижных координатах и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка со схемой нелинейной коррекции [13- 15].

**Модель коагуляции аэрозольных частиц.** В предположении о коагуляции частиц во всех случаях соприкосновения, уравнения для эволюции характеристик дисперсности газо-



взвеси, таких, как масса, концентрация, импульс и температура могут быть записаны следующим образом [7].

Масса  $m_i$   $i$ -ой ( $i=2, \dots, n$ ) частицы возрастает за счет поглощения более мелких  $j$ -ых частиц с массой  $m_j$  ( $j=1, 2, \dots, i-1$ ):

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j, \text{ где } k_{ij} = \frac{\pi}{4} (d_i + d_j)^2 \left[ u_i \cos(\alpha) + v_i \sin(\alpha) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right]$$

гуляции,  $\alpha = \arctg(v_j/u_j)$ ,  $d_i$ - диаметр частиц  $i$ - фракции,  $d_j > d_i$ . Новое значение массы частиц  $i$ -ой фракции в текущем узле конечно- разностной сетки позволяет определить новое значение радиуса частицы  $r_i$ . Уменьшение концентрации  $i$ - ых частиц вследствие поглощения их более крупными  $j$ - ыми ( $j= i+1, i+2, \dots, n$ ) описывается уравнением:

$$\frac{dn_i}{d\tau} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j, (i= 1, 2, \dots, n-1).$$

Новое значение объемного содержания  $i$ -ой фракции, изменившегося вследствие коагуляции, определяется как  $\alpha_i = 4/3 \pi r_i^3 n_i$ . Концентрация  $n_i$  определяется через среднюю плотность и радиус  $i$ -той фракции на каждом шаге вычислений. Слияние мелких капель с более крупными приводит к изменению их скорости:

$$\frac{dw_i}{d\tau} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} (w_j - w_i) m_j n_j.$$

Температура частицы  $i$ - ой фракции после коагуляции с частицами более мелких фракций находилась из соотношения

$$T = \frac{1}{Cm} \left( \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i \right),$$

где  $T, C, m$  – температура, удельная массовая теплоемкость и масса частицы  $i$ - ой фракции после коагуляции,  $T_i, C_i, m_i$  – те же параметры до коагуляции.

На каждом временном шаге основного алгоритма, включающего в себя решение систем уравнений движения несущей и дисперсной фазы (1)- (2) определялись средняя плотность, объемное содержание, скорости и температуры дисперсных фракций. Затем учитывался описанный выше механизм коагуляции. Значения средней плотности, объемного содержания, скоростей и температур дисперсных фракций корректировались и осуществлялся переход к следующему временному шагу.

**Результаты расчетов течения и коагуляции газозвеси в плоском канале при воздействии акустического поля.** Пусть в начальный момент времени парок капельная смесь, состоящая из пяти фракций капель жидкого метана с радиусами частиц  $r_{10}=1\text{мкм}$ ,  $r_{20}=5\text{мкм}$ ,  $r_{30}=10\text{мкм}$ ,  $r_{40}=15\text{мкм}$ ,  $r_{50}=20\text{мкм}$ , движется со скоростью  $u_0$ , равномерно заполняя плоский канал и находясь во взвешенном состоянии (рис.2). Плотность вещества частиц  $\rho_{10}=\rho_{20}=\rho_{30}=\rho_{40}=\rho_{50}=416\text{ кг/м}^3$ . Начальная средняя плотность дисперсных фракций  $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=\rho_5=0.1664\text{ кг/м}^3$ , температура и плотность паров метана  $T=111.6\text{ К}$ ,  $\rho_0=1.75\text{ кг/м}^3$ . Удельная теплоемкость при постоянном объеме вещества дисперсной фазы  $C_v=5\text{ кДж/кгК}$ . Удельные теплоемкости пара метана  $C_p= 2.260\text{ кДж/кгК}$  и  $C_v= 1.742\text{ кДж/кгК}$ . На стенках канала для скорости несущей фазы и дисперсных фракций ставятся условия проскальзывания. Для всех остальных газодинамических функций, в том числе на входной и выходной границах- однородные граничные условия второго рода. При  $t>0$  начинается процесс синфазных колебаний поперечной составляющей скорости участков верхней и нижней стенок канала ( $(L-L_1)/2 < x < (L+L_1)/2$ ,  $y=0$ ), ( $(L-L_1)/2 < x < (L+L_1)/2$ ,  $y=d$ ) по закону  $v(t)=A \cdot \sin(\omega t)$  (рис.2), приводящий к генерации колебаний в несущей и дисперсной фазах. Частота колебаний равна первой собственной частоте относительно поперечного сечения канала  $\omega=\pi c/d$ , где  $c=(\gamma RT)^{1/2}$  – оценка для скорости звука в парах метана при заданной температуре. Приве-

денные ниже результаты были получены для канала длиной  $L=2$  м, высотой  $d=0.06$  м. Конечно-разностная сетка содержала 300 узлов в продольном и 40 узлов в поперечном направлении и обеспечивала практическую сходимость метода.

На рис. 3, а, б. представлены зависимости поперечных и продольных составляющих скорости несущей и дисперсной фазы (5 фракций) от времени в потоке, на который локально воздействует поле стоячей волны с первой собственной частотой поперечных колебаний газового столба и амплитудой колебаний поперечной составляющей скорости на стенках  $A=0.0005$  м. Колебания поперечной составляющей скорости нелинейные с крутым передним и пологим задним фронтом. Амплитуда колебаний поперечной составляющей скорости достигает 50 м/с (рис.3, а). Скоростное скольжение несущей фазы и самой мелкой фракции ( $r_1=1$  мкм) незначительно, кривые скорости очень близки (рис.3, б). По мере увеличения радиуса частиц уменьшается амплитуда колебаний скорости твердой фракции, увеличивается временное запаздывание изменения скорости дисперсной фазы относительно несущей среды. Наибольшее значение числа Вебера для фракции капле метана с радиусом  $r=20$  мкм достигается в пучности стоячей волны поля скорости и составляет  $We_{max}=2\rho r_{50} \max|u-u_5|/\sigma \approx 0.2$ , где  $\rho=1.75$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma=0.016$  Н/м- плотность несущей среды и коэффициент поверхностного натяжения жидкого метана. Таким образом,  $We_{max}$  меньше критического диапазона чисел Вебера  $We_{кр}=10-20$ . Следовательно, можно полагать, что частицы при соударениях сохраняют устойчивость, и преобладающим процессом при соударениях капле является их коагуляция. В течение одного периода колебаний поперечной составляющей скорости происходит два периода колебаний продольной составляющей (рис.3, а, б). В начальный момент времени скорости несущей фазы и дисперсных фракций равны. С течением времени скорость движения твердых фракций в продольном направлении уменьшается. Колебания скорости в осевом направлении отстают по фазе от колебаний поперечной составляющей скорости.

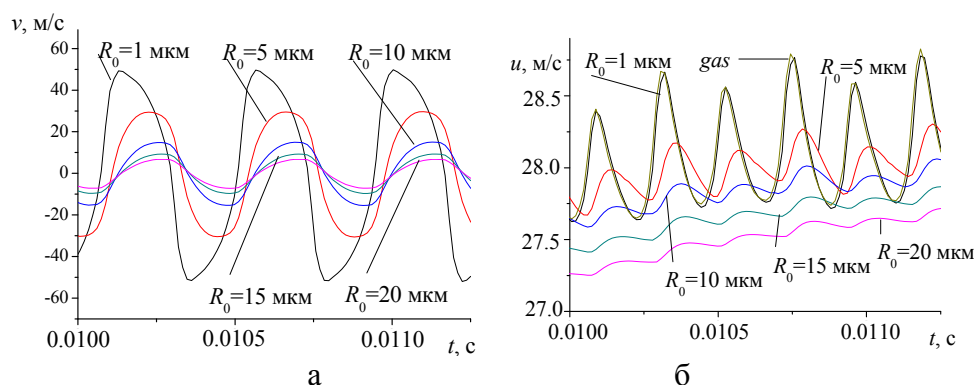


Рис. 3. Зависимость от времени поперечной (а) и осевой (б) составляющей скорости частиц различных фракций в точке  $(x=L/2, y=d/2)$

На рис.4, а,б приведены функции, описывающие изменения дисперсности парокapельной смеси с течением времени вследствие коагуляции. Радиусы частиц всех фракций, кроме самой мелкой, с течением времени растут (рис.4, а), тогда как средняя плотность фракций меняется немонотонно (рис.4, б). Средняя плотность фракции с радиусом частиц 1 мкм с течением времени монотонно убывает и к моменту времени  $t=0.035$  с становится близка к нулю. Средняя плотность более крупных фракций (5, 10, 15 мкм) сначала достигает наибольшего значения, после чего монотонно убывает. В то же время средняя плотность самой крупной фракции с течением времени непрерывно возрастает (рис.4, б).

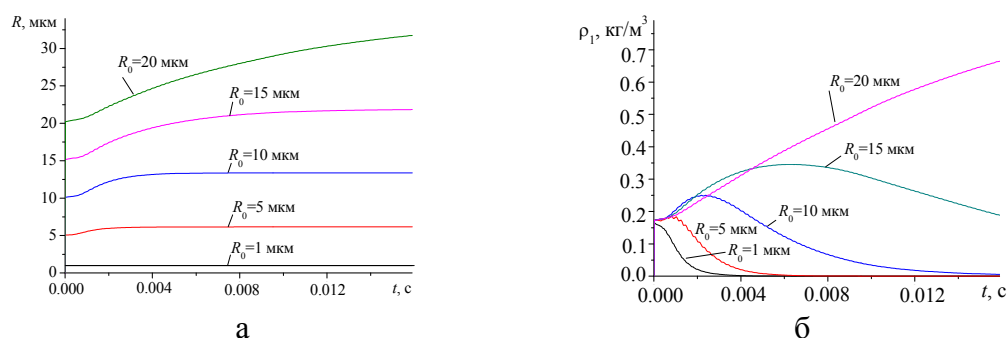


Рис. 4. Зависимость от времени эффективного радиуса частиц различных фракций (а) и средней плотности фракций (б) в точке  $(x=L/2, y=d/2)$ .

На рис.5, а- в приведены функции, характеризующие изменение дисперсности твердых фракций к моменту времени  $t=0.01$  с. Самая большая скорость уменьшения концентрации частиц вследствие коагуляции в акустическом поле у самой мелкой фракции. В окрестности источника акустических колебаний концентрация частиц с радиусом 1 мкм падает примерно на 4 порядка (рис.5, а). В этой же области быстро возрастает эффективный радиус частиц всех фракций за исключением самой мелкой (рис.5, б). Формируется вытянутая вниз по потоку зона, в которой снижается средняя плотность мелкодисперсных фракций и возрастает средняя плотность фракции частиц с  $R_0=20$  мкм (рис.5, в).

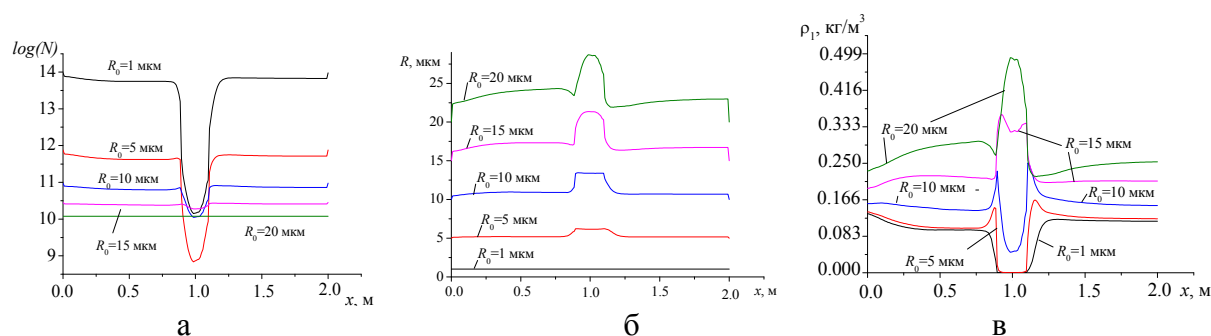


Рис. 5. Распределение функций, характеризующих дисперсность смеси в момент времени  $t=0.01$  с вдоль оси канала: а- концентрации фракций; б- эффективные радиусы фракций; в – средние плотности фракций.

Распределение средней плотности фракций в поперечном сечении канала при  $x=L/2$  показано на рис.6. Наибольшая скорость коагуляции достигается в окрестности пучности стоячей волны поля скорости ( $y=d/2$ ), где к моменту времени  $t=0.008$  с средняя плотность фракций с начальным радиусом частиц 1 мкм и 5 мкм близка к нулю. В этой же области средняя плотность фракции частиц с начальным радиусом 10 мкм наименьшая. В то же время, средняя плотность фракции с начальным радиусом 15 мкм продолжает расти, также как и средняя плотность самой крупной фракции (рис. 6).

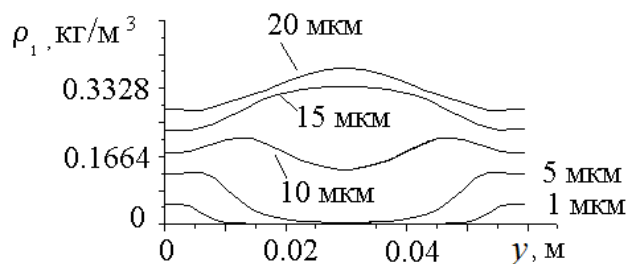


Рис.6. Распределение средней плотности различных фракций дисперсной фазы в поперечном сечении канала ( $x=L/2$ ) в момент времени  $t=0.008$  с.

Таким образом, воздействие на паро-капельный поток полидисперсного состава резонансными волновыми полями позволяет уменьшить концентрацию мелкодисперсных фракций смеси за счет коагуляции частиц, что может быть использовано для повышения качества разделения несущей и дисперсной фазы в сепараторах инерционного типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы”, соглашение №14.577.21.0151 от 28.11.2014.

### **Список литературы**

1. Тимошенко В.И., Чернов Н.Н. Взаимодействие и диффузии частиц в звуковом поле. Ростов-на-Дону: ООО “Ростиздат”, 2003. 304 с.
2. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Численное исследование эволюции ударной волны в газозвеси с учетом неравномерного распределения частиц // Математическое моделирование. 2014. Т.26. №10. С.109-119.
3. В.Г.Тонконог, С.Н. Арсланова Система подачи криогенного топлива в энергетическую установку . Патент РФ на изобретение Ru, № 2347934. Дата выдачи 10.06.2009
4. Ю.А. Ложкин, Д.М. Маркович, М.А. Пахомов, В.И. Терехов Исследование структуры полидисперсной изотермической газок капельной струи на начальном участке. Эксперимент и численное моделирование. Теплофизика и аэромеханика. 2014. №3. С. 309-324.
5. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 263 с.
6. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дисперсных включений. Итоги науки и техники. Серия Комплексные и специальные разделы механики. Т.3. Москва: Производственно-издательский комбинат ВИНТИ. 1988, С.3-80.
7. В.Е. Алемасов, А.Ф.Дрегаллин, А.П.Тишин, В.А.Худяков Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справочник в пяти томах. Т.1. Методы расчета. Москва: Производственно- издательский комбинат ВИНТИ, 1971. 267с.
8. Тукмаков А.Л. Динамика коагулирующей полидисперсной газозвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора// Инженерно-физический журнал. 2015. Т.88. №1. С.11-22.
9. Тонконог В.Г., Тукмаков Д.А. Нелинейные колебания газозвеси и дрейф твердой фазы в акустическом резонаторе проточного типа// Инженерно-физический журнал. 2013. Т.86. №3. С.576-583.
10. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург. Изд-во Недра. 2003. 283 с.
11. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2. – М.: Мир. 1991. – 551 с.
12. Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд Свойства газов и жидкостей. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: «Химия». Ленинградское отделение, 1982. 496 с.
13. Тукмаков А.Л. Численное моделирование дрейфа твердых частиц при резонансных колебаниях газа в открытом канале // Акустический журнал, 2009, Т.55, №2, с.247-255.
14. Тукмаков А.Л. Численное моделирование процесса волновой сепарации твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Акустический журнал, 2009, Т.55, №3, с.342-349.
15. Steger J. L. Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries. AIAA J. 1978. V.16. №7. P.679–686.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВЗВЕСИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Тукмаков Д.А.

Казанский (Поволжский) федеральный университет, институт физики.  
420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail:tukmakovDA@imm.knc.ru

Для описания нестационарных процессов в газовзвеси использована математическая модель динамики неравновесной многофазной среды, основанная на двухскоростном двухтемпературном приближении механики взаимопроникающих континуумов. С помощью численного моделирования исследовано влияние размера частиц их объемного содержания, пространственного распределения дисперсной фазы, а также истинной плотности на процесс распространения ударной волны из чистого газа в газовзвесь.

**Ключевые слова:** газовзвесь, ударные волны, численное моделирование, межфазное взаимодействие.

Динамика ударных волн в неоднородных средах является одной из фундаментальных проблем в механике многофазных сред [1–5], а сложность экспериментального исследования этих процессов приводит к необходимости их математического моделирования [3–5]. Исследования ударной динамики газовзвесей актуальны в связи с вопросами экранирования ударных волн аэрозольными слоями [4], что вызывает необходимость изучения влияния свойств дисперсной фазы на характеристики распространяющихся волн. В том числе представляет интерес оценка влияния распределения дисперсной фазы на характеристики несущей среды [2, 3].

В качестве несущей среды рассматривается вязкий сжимаемый теплопроводный газ, движение которого описывается двумерной системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного обмена импульсом и энергией с дисперсной фазой. В случае двумерной геометрии течения система уравнений движения несущей среды выглядит следующим образом [3, 6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) &= \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} - F_x \\ \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy}) &= \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y} - F_y \quad (1) \\ \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e_1 + p - \tau_{xx}] u_1 - \tau_{xy} v_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e_1 + p - \tau_{yy}] v_1 - \tau_{xy} u_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) &= \\ = \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 p) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} (v_1 p) + Q - |F_x| (u_1 - u_2) - |F_y| (v_1 - v_2), \\ p &= (\gamma - 1) (e_1 - \rho_1 (u_1^2 + v_1^2) / 2), \quad e_1 = \rho_1 I + \rho_1 (u_1^2 + v_1^2) / 2, \\ \tau_{xx} &= \mu \left( 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v_1}{y}. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $e_1$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  – плотность, составляющие скорости несущей и дисперсной среды, полная энергия, коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей среды. Величины  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $Q$  задаются законами межфазного силового взаимодействия и теплообмена.

$I = RT_1 / (\gamma - 1)$  – внутренняя энергия газа. В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа  $\lambda$  и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей [1, 3]:  $Q = 6\alpha_2 Nu \lambda (T_1 - T_2) / (2r)^2$ , где  $Nu = 2r\alpha_2^T / \lambda$  – аппроксимация числа Нуссельта [3], здесь и ниже  $n$ - концентрация частиц,  $\alpha_2^T$  коэффициент теплообмена с поверхности частицы дисперсной фазы. Температура несущей среды находится из уравнения:  $T_1 = (\gamma - 1)(e_1 / \rho_1 - 0.5(u_1^2 + v_1^2)) / R$ .

Движение дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности твердой фракции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения тепловой энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 u_2 v_2) &= F_x - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2^2) &= F_y - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2) \\ \frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(e_2 v_2) &= -Q, \\ \rho_2 &= \alpha_2 \rho_2^0, \quad e_2 = \rho_2 C_p T_2, \end{aligned}$$

где  $T_2$ ,  $e_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\alpha_2$  – температура дисперсной фазы, внутренняя энергия дисперсной фазы, средняя плотность и объемное содержание;  $C_{p2}$ ,  $\rho_2^0$  – теплоемкость и плотность вещества твердой фазы. Составляющие силы межфазного взаимодействия  $F_x$  и  $F_y$  задаются следующим образом [1, 3]:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2) + \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \right. \\ &+ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left. \right) + 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \\ F_y &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2) + \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \right. \\ &+ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \left. \right) + 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right), \\ C_d &= \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0.5}} + 0.4, \quad M_{12} = |\bar{V}_2 - \bar{V}_1| / c, \quad V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad V_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}, \\ Re_{12} &= \rho_1 |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| 2r / \mu, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda, \quad Nu = 2 \exp(-M_{12}) + 0.459 Re_{12}^{0.55} Pr^{0.33}, \\ &0 \leq M_{12} \leq 2, \quad 0 \leq Re_{12} < 2 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется как  $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$ . Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавались условия прилипания для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных газодинамических функций обеих фаз. Системы уравнений (1)- (2) решались численно с помощью явной конечно-разностной схемы [6- 8].

Исследование выполнено за счет гранта Академии наук Республики Татарстан (договор №03-127-ф Г 2016).

### **Список литературы**

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 Москва: Наука, 1987.
2. Куликов В.Н., Лapidус А.И., Тиванов Г.Г., Шамшев К.Н. О структуре ударной волны в газозвеси // МЖГ, 1989. № 2. С. 190 - 191.
3. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003.
4. Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва, 2000, №4, С.87-96.
5. Кратова Ю.В., Фёдоров А.В., Хмель Т.А. Дифракция плоской ударной волны на обратном уступе в газозвеси // Физика горения и взрыва, 2009, №5, С.95-107.
6. Баянов Р.И., Тукмаков А.Л. Численная модель динамики односкоростной парогазокапельной среды // Известия высших учебных заведений, Авиационная техника, 2015. № 1. С. 19-25.
7. Тонконог В.Г., Тукмаков Д.А. Нелинейные колебания газозвеси и дрейф твердой фазы в акустическом резонаторе проточного типа // Инженерно-физический журнал, 2013. Т. 86. № 3. С.576-583.
8. Fletcher C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlang, Berlin et al., 1988.

## **ФОРМИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ КОАГУЛИРУЮЩЕЙ ГАЗОВЗВЕСИ**

**Н.А.Тукмакова**

Казанский национальный исследовательский технический университет,  
им. А.Н.Туполева-КАИ, Институт авиации, наземного транспорта и энергетики.  
420111 Казань, ул. К.Маркса, 10, e-mail: nadejdatukmakova@yandex.ru

В работе было проведено численное моделирование процесса формирования параметрического акустического резонанса в газозвеси вследствие изменения размеров частиц дисперсных фракций. Динамика среды описывается системой уравнений движения многоскоростного многотемпературного континуума, учитывается обмен импульсом и энергией между несущей средой и дисперсными фракциями. Коагуляция частиц различных фракций определена на основе модели Смолуховского. В результате расчетов оценено время изменения дисперсности системы и генерации резонансных колебаний в зависимости от величины константы коагуляции.

*Ключевые слова:* параметрический акустический резонанс, полидисперсная газозвесь, нелинейные колебания, коагуляция частиц, биения.

Существует группа промышленных аппаратов, в которых изменение свойств рабочей среды может привести к возникновению акустического параметрического резонанса. К таким устройствам относятся промышленные глушители шума, глушители шума стендов для испытания двигательных установок, глушители систем вентиляции и кондиционирования, а также трубные подогреватели сжиженного природного газа [1]. Характеристики механических колебаний в таких системах зависят от скорости потока рабочей смеси, ее дисперсности и температуры. Рассмотрим в связи с этим влияние изменения дисперсности коагулирующей паро-капельной смеси на характер колебаний в акустическом резонаторе при неизменных параметрах внешнего возбуждения. Если в рабочей среде имеется мелкодисперсная фракция [2, 3], то в связи с малой разностью между скоростями мелкодисперсной фракции и несущей среды, мелкодисперсные частицы полностью вовлекаются в движение и оказывают значительное диссипативное влияние на колебания системы. В заполняющей трубу-резонатор среде могут возникнуть условия для параметрического резонанса, когда в процессе движения часть мелких капель испаряется, а часть коагулируют с большими по размеру каплями. Для описания изменения дисперсности системы, приводящей к модификации ее резонансных частот, рассмотрим динамику коагулирующей полидисперсной смеси, заполняющей акустический резонатор. Резонатор представляет собой плоский канал, на одном конце которого располагается перемещающийся по гармоническому закону поршень, а другой конец ограничен твердой стенкой. Амплитуда колебаний поршня выбрана таким образом, чтобы число Вебера не превышало критического значения [4] и коагуляция частиц при соударениях преобладала над дроблением. Пусть частота колебаний поршня фиксирована и равна первой собственной частоте продольных колебаний несущей среды (газообразный метан), заполняющей канал. При колебаниях с постоянной частотой и амплитудой внешнего возбуждения, изменение состава дисперсной фазы и, как следствие, изменение спектра резонансных частот акустической системы могут привести к возникновению резонансных колебаний. При проведении расчетов применяется математическая модель динамики коагулирующей полидисперсной газозвеси, в которой каждому размеру частиц сопоставлена своя фракция [5, 6]. Несущая среда описывается системой уравнений Навье-Стокса, в которой учитывается обмен импульсом и энергией с дисперсными фракциями. Каждая фракция описывается системой из уравнения неразрывности для средней плотности, уравнений сохранения составляющих импульса и уравнения сохранения внутренней энергии, записанных с учетом обмена импульсом и энергией с несущей средой.



### Модель динамики газозвеси

Система уравнений описывает движение несущей (1) и дисперсной фазы, включающей в себя  $n$  фракций (2). В декартовой системе координат в двумерном случае системы (1), (2) имеют вид [7–9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) &= - \sum_{i=1, n} F_{xi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) &= - \sum_{i=1, n} F_{yi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \\ = - \sum_{i=1, n} Q_i - \sum_{i=1, n} \left( |F_{xi}|(u - u_i) - |F_{yi}|(v - v_i) \right) + \alpha \left( \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} \right), \\ e &= I + \rho(u^2 + v^2)/2, \quad \alpha = \sum_{i=1, n} \alpha_i, \\ \tau_{xx} &= \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ F_{xi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{(2r_i)} C_{di} \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (u - u_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right), \\ F_{yi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{(2r_i)} C_{di} \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (v - v_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \\ C_{di} &= C_{di}^0 \psi(M_{i0}) \varphi(\alpha_i), \quad C_{di}^0 = \frac{24}{Re_{i0}} + \frac{4}{Re_{i0}^{0.5}} + 0.4, \quad \psi(M_{i0}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{i0}^{0.63}}\right), \\ \varphi(\alpha_i) &= (1 - \alpha_i)^{-2.5}, \quad Re_{i0} = \rho |\bar{V} - \bar{V}_i| 2r_i / \mu, \quad M_{i0} = |\bar{V} - \bar{V}_i| / c. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\rho, u, v, u_i, v_i, E, \lambda, \mu$  – плотность несущей среды, составляющие скорости несущей среды и фракций дисперсной фазы, удельная полная энергия, коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей фазы,  $\alpha = \sum_{i=1, n} \alpha_i$  – объемное содержание дисперсной фазы, получае-

мое суммированием объемных содержаний фракций. Составляющие сил аэродинамического сопротивления и тепловой поток на границе частица - газ  $F_{xi}, F_{yi}, Q_i$  определяются законами межфазного трения и теплообмена [5].  $I = RT/(\gamma - 1)$  – удельная внутренняя энергия газа;  $R, \gamma$  – газовая постоянная и постоянная адиабаты несущей среды. Температура несущей среды

$T=(\gamma-1)(e/\rho-0.5(u^2+v^2))/R$ . В уравнение сохранения полной энергии для несущей фазы входит тепловой поток, возникающий вследствие теплообмена между газом и частицами  $i$ -ой фракции:  $Q_i=6\alpha_i Nu_i \lambda (T-T_i)/(2r_i)^2$ , где  $Nu_i=2r_i\alpha^T/\lambda$  – число Нуссельта,  $r_i$  – радиус частиц  $i$ -ой фракции. Число Нуссельта определялось при помощи известного приближения, использующего относительные числа Маха  $M_{i0}$ , Рейнольдса  $Re_{i0}$  и Прандтля  $Pr$ :

$$Nu_i = 2\exp(-M_{i0}) + 0.459Re_{i0}^{0.55} Pr^{0.33}, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda, \quad 0 \leq M_{i0} \leq 2, \quad 0 \leq Re_{i0} < 2 \cdot 10^5.$$

Дисперсная фаза состоит из ряда фракций, образованных частицами одного размера, динамика которых описывается уравнением сохранения средней плотности фракции, уравнениями сохранения компонент импульса и уравнением сохранения тепловой энергии [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) &= F_{xi} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) &= F_{yi} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) &= Nu_i \frac{6\alpha_i}{(2r_i)^2} \lambda (T - T_i), \\ \rho_i &= \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{pi} T_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_i, \rho_i, e_i, T_i$  – объемное содержание, средняя плотность, тепловая энергия и температура дисперсной фазы;  $C_{pi}, \rho_{i0}$  – теплоемкость и плотность вещества  $i$ -ой дисперсной фракции. Тепловая энергия  $i$ -ой фракции определяется как  $e_i = \rho_i C_{pi} T_i$ .

В качестве термического уравнения состояния для несущей среды было применено уравнение состояния Бенедикта-Вебба-Рубина [10]:

$$p = RT\rho + \left( B_0 RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) \rho^2 - (bRT - a) \rho^3 + a\alpha\rho^6 + \frac{c\rho^3}{T^2} (1 + \gamma\rho^2) \exp(-\gamma\rho^2), \quad (3)$$

где коэффициенты  $a, A_0, b, B_0, c, C_0, \alpha, \gamma$  определяются в зависимости от плотности, давления и температуры метана в парообразном состоянии.

Система уравнений движения двухфазной полидисперсной смеси записывалась в обобщенных подвижных координатах [11, 12] и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка со схемой нелинейной коррекции [7, 8].

Столкновение частиц различных фракций сопровождалось их коагуляцией, что приводило к изменению их массы, концентрации, импульса и температуры, и описывалось это лагранжевой моделью Смолуховского [4].

Масса  $m_i$  частицы  $i$ -ой фракции ( $i=2, \dots, n$ ) возрастает за счет поглощения частиц  $j$ -ых фракций меньшего размера с массой  $m_j$  ( $j=1, 2, \dots, i-1$ ):

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j, \quad \text{где } k_{ij} = K_0 \frac{\pi}{4} (d_i + d_j)^2 \left[ u_i \cos(\alpha) + v_i \sin(\alpha) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right] - \text{константа}$$

коагуляции,  $\alpha = \arctg(v_j/u_j)$ ,  $d_i$  – диаметр частиц  $i$ -ой фракции,  $d_j > d_i$ . Новое значение массы частиц  $i$ -ой фракции в текущем узле конечно-разностной сетки позволяет определить

новое значение радиуса частицы  $r_i$ . Уравнение  $\frac{dn_i}{d\tau} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j$ , ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) описывает

уменьшение концентрации частиц  $i$ -ых фракций вследствие поглощения их более крупными  $j$ -ыми ( $j=i+1, i+2, \dots, n$ ). Выражение  $\alpha_i = 4/3\pi r_i^3 n_i$  определяет изменившееся вследствие

коагуляции значение объемного содержания  $i$ -ой фракции. Концентрация  $n_i$  определяется через среднюю плотность и радиус  $i$ -ой фракции на каждом шаге вычислений. Слияние мелких

капель с более крупными приводит к изменению их скорости: 
$$\frac{dw_i}{d\tau} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} (w_j - w_i) m_j n_j.$$

Температура частицы  $i$ -ой фракции после коагуляции с частицами более мелких фракций на-

ходилась из соотношения  $T = \frac{1}{Cm} \left( \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i \right)$ , где  $T$ ,  $C$ ,  $m$  – температура,

удельная массовая теплоемкость и масса частицы  $i$ -ой фракции после коагуляции,  $T_i$ ,  $C_i$ ,  $m_i$  – те же параметры до коагуляции. Связанные с коагуляцией изменения скорости и температуры дисперсной фазы учитывались на каждом временном шаге основного алгоритма.

### **Постановка численного эксперимента**

В начальный момент времени газозвесь, состоящая из двух фракций частиц с радиусами  $r_{10}=1$  мкм (фракция № 1) и  $r_{20}=100$  мкм (фракция № 2) находится во взвешенном состоянии и равномерно заполняет закрытый плоский канал. Начальное объемное содержание мелкодисперсной фракции  $\alpha_{10}=0,002$ . Крупнодисперсная фракция нужна в решаемой задаче для запуска процесса коагуляции в нелинейном волновом поле. Ее начальное объемное содержание в 20 раз меньше  $\alpha_{20}=0,0001$ , чем объемное содержание мелкой фракции. Акустические колебания создаются перемещающимся вдоль продольной оси с заданной частотой и амплитудой поршнем. Плотность вещества частиц  $\rho_{10}=\rho_{20}=416$  кг/м<sup>3</sup>. Начальная средняя плотность дисперсных фракций  $\rho_1=0,832$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2=0,0416$  кг/м<sup>3</sup>, температура, плотность, удельные теплоемкости газообразного метана:  $T=111,6$  К,  $\rho_0=1,75$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_p=2,260$  кДж/кгК,  $C_v=1,742$  кДж/кгК. Удельная теплоемкость вещества дисперсной фазы  $C_p=5$  кДж/кгК. На стенках канала для скорости несущей фазы и дисперсных фракций ставятся условия прилипания. Для всех остальных газодинамических функций, в том числе на входной и выходной границах задаются однородные граничные условия второго рода. При  $t > 0$  начинается процесс гармонических колебаний поршня  $x(t)=A \sin(\omega t)$ , создающих колебания в резонаторе. Оценка для скорости звука в несущей среде  $c=(\gamma RT)^{1/2}=274$  м/с, где  $\gamma=1,3$  – постоянная адиабаты,  $R=518$  Дж/кгК – газовая постоянная метана. Круговая частота колебаний поршня в приведенных ниже расчетах равна первой собственной частоте продольных колебаний столба газообразного метана  $\omega_{11}=\pi c/L=860,8$  1/с ( $\nu_{11}=137$  Гц).

### **Поведение некоагулирующей газозвеси в плоском канале при акустическом воздействии поля**

В формуле для константы коагуляции  $k_{ij}$  коэффициент  $K_0$  задает отношение числа соударений, заканчивающихся объединением частиц к общему числу соударений. Рассмотрим случай, когда в процессе колебаний смесь не коагулирует, т.е.  $K_0=0$ . На рис. 1 представлены полученные в результате проведения расчетов временные зависимости для средней плотности фракций (а), для радиуса частиц фракции № 2 (б), а также временные зависимости осевой составляющей скорости фракций (в, г). В отсутствие коагуляции средние плотности фракций, концентрация мелкодисперсной фракции, радиус частиц крупной фракции постоянны. Начальный участок колебаний продольных составляющих скорости содержит биения, что связано с переходным процессом при установлении стационарного режима. Зная частоту биений можно определить частоту первого линейного резонанса акустической системы с учетом влияния дисперсной фазы. Поскольку период биений (рис. 1, в, г) составляет  $T=0.031$  с, а частота биения  $\nu \approx 32$  Гц, то частота первого линейного резонанса паро-капельной системы ниже, чем частота первого линейного резонанса несущей среды и составляет

$f_{11} = \nu_{11} - \nu \approx 105$  Гц. На рис. 2, а - в представлены зависимости осевой составляющей скорости несущей среды при возбуждении колебаний в резонаторе на частотах ( $\nu_{11} - \nu = 105$  Гц),  $\nu_{11} = 137$  Гц, ( $\nu_{11} + \nu$ ) = 169 Гц. Амплитуды колебаний скорости несущей среды достигают, соответственно, на этих частотах 20 м/с, 8 м/с и 4 м/с (рис. 2, а - в).

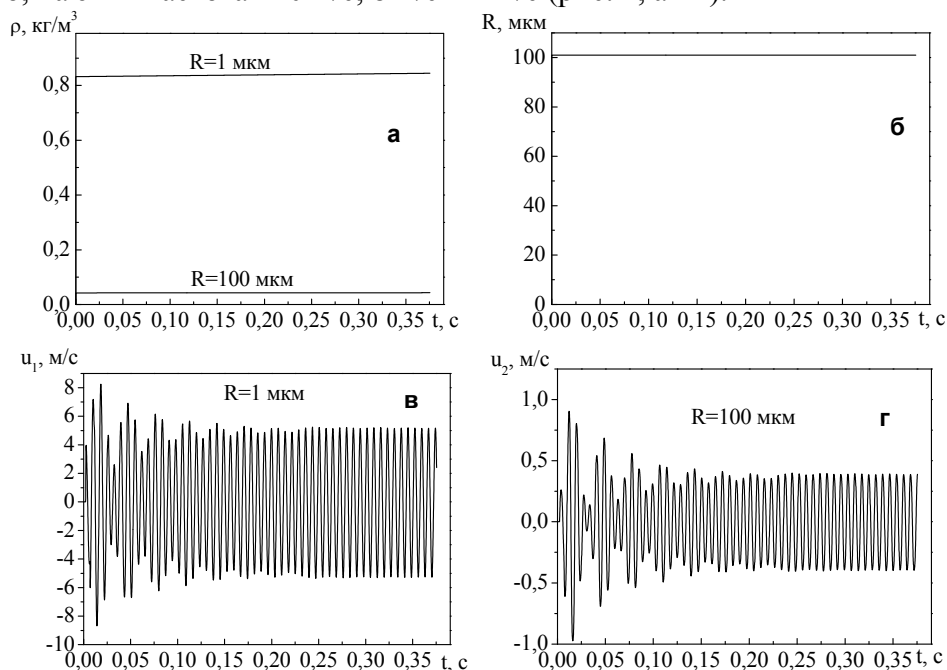


Рис. 1. Динамика двухфракционной газозвеси в отсутствии коагуляции: а - средняя плотность фракций в пучности стоячей волны скорости ( $x=L/2, y=d/2$ ); б - радиус фракции № 2; (в) – осевая составляющая скорости мелкой фракции в пучности стоячей волны скорости ( $x=L/2, y=d/2$ ); (г) – осевая составляющая скорости крупной фракции в пучности стоячей волны скорости ( $x=L/2, y=d/2$ ).

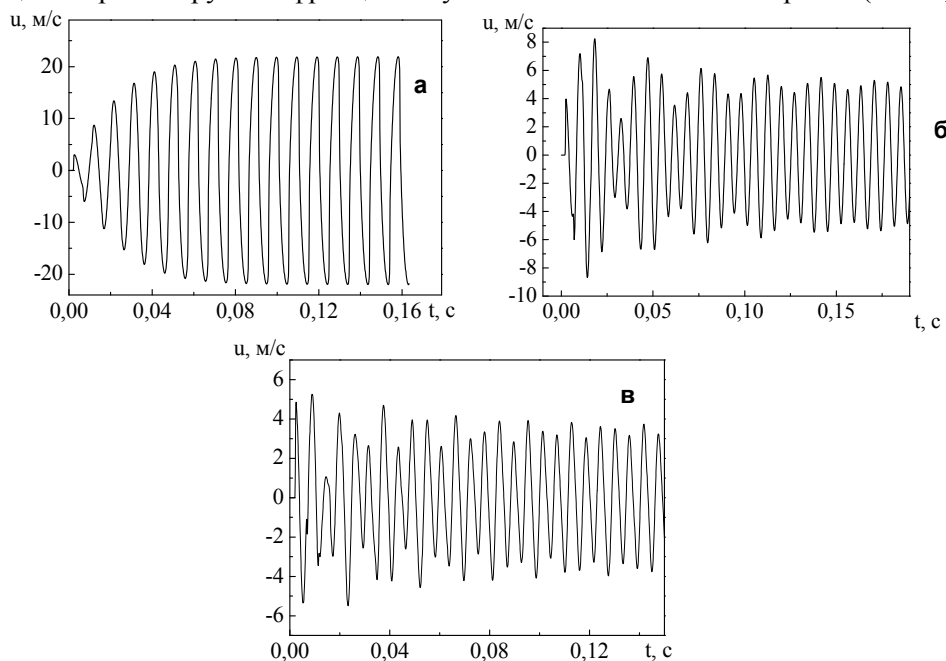


Рис. 2. Колебания продольной составляющей скорости несущей среды двухфракционной газозвеси без коагуляции в пучности стоячей волны скорости ( $x=L/2, y=d/2$ ) при различных частотах колебаний поршня  $f_{11}$ : а -  $f_{11}=105$  Гц; б -  $f_{11}=137$  Гц; в -  $f_{11}=169$  Гц.

### Формирование параметрического резонанса в случае коагулирующей газозвеси

В другом случае в процессе колебаний смеси частицы различных фракций коагулируют

ют при каждом их парном соударении и коэффициент  $K_0 = 1$ . Расчеты показывают, что с течением времени, вследствие коагуляции, снижается средняя плотность мелкой фракции с радиусом частиц  $R=1$  мкм и возрастает средняя плотность частиц крупной фракции с начальным радиусом  $R=100$  мкм. Процесс коагуляции можно считать законченным к моменту времени  $t=0,35$  с, поскольку средняя плотность мелкодисперсной фракции близка к нулю, а средняя плотность крупной фракции равна сумме средних плотностей исходных фракций и с течением времени далее не меняется. При этом радиус частиц крупной фракции, составлявший в начальный момент времени 100 мкм, в окрестности пучности стоячей волны поля скорости ( $x=L/2$ ,  $y=d/2$ ) увеличивается до 275 мкм.

Изменение дисперсности системы приводит к снижению диссипативности и меняет характер колебаний. На начальном этапе колебаний высокая концентрация мелких частиц приводит к сильному смещению резонансной частоты влево от частоты колебаний поршня, которая с течением времени не меняется и совпадает с первой собственной частотой для несущей среды без дисперсной фазы ( $\nu_{11}=137$  Гц). Частота биений на временных зависимостях для осевых составляющих скоростей дисперсных фракций составляет приблизительно  $\nu \approx 32$  Гц. С течением времени, по мере вызванного коагуляцией уменьшения средней плотности мелкой фракции, период биений увеличивается. Это говорит о том, что разность между резонансной частотой системы и частотой колебаний поршня, равной первой собственной частоте для чистого газа уменьшается. В результате, в системе возникают резонансные в осевом направлении колебания с амплитудой изменения скорости в пучности стоячей волны ( $x=L/2$ ,  $y=d/2$ ), достигающей 20 м/с.

Таким образом, в результате эволюции дисперсности системы - роста в процессе коагуляции частиц крупной фракции и практически полного исчезновения в системе мелкодисперсной фазы, резонансная частота системы приближается к первой собственной частоте продольных колебаний несущей среды, с которой осуществляется внешнее возбуждение, что приводит к возникновению резонансных акустических колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по ФЦП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы", соглашение №14.577.21.0151 от 28.11.2014. Идентификатор проекта RFMEFI57714X0151.

### Список литературы

1. Григорьян Ф.Е., Перцовский Е.А. Расчет и проектирование глушителей шума энергоустановок. М.: Энергия. 1980. 120 с.
2. A.L.Tukmakov, V.G.Tonkonog, S.N.Arslanova Effect of the Coagulation Rate on the settling Time of stationary Vibrations of Aerosol in an Acoustic Resonator//Physics of Wave Phenomena, 2015, Vol.23, No3, pp.235-240.
3. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дисперсных включений. Итоги науки и техники. Серия Комплексные и специальные разделы механики. Т.3. Москва: Производственно-издательский комбинат ВИНТИ. 1988, С.3-80.
4. В.Е. Алемасов, А.Ф.Дрегаллин, А.П.Тишин, В.А.Худяков Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справочник в пяти томах. Т.1. Методы расчета. Москва: Производственно- издательский комбинат ВИНТИ, 1971. 267с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1987. 464 с.
6. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург. Изд-во Недра. 2003. 283 с.
7. А.Л.Тукмаков, В.Г.Тонконог, С.Н.Арсланова Волновая коагуляция полидисперсной газовой смеси в технологии газификации и криостатирования сжиженного природного

- газа// Акустический журнал. 2016. Т.62. №1. С.125-131.
8. Зарипов Р.Г., Тукмаков А.Л. Экспериментальное и численное исследование дрейфа твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе// Нелинейный мир. 2009. №7. С.541-549.
  9. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А Численное исследование эволюции ударной волны в газозвеси с учетом неравномерного распределения частиц//Математическое моделирование. 2014. Т.26. № 10. С.109-119.
  10. Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд Свойства газов и жидкостей. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: «Химия». Ленинградское отделение, 1982. 496 с.
  11. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2. – М.: Мир. 1991. – 551 с.
  12. Steger J. L. Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries. AIAA J. 1978. V.16. №7. P.679–686.

## **ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ И АНИЗОТРОПИИ РОТОРА НА ДИНАМИКУ НЕ- КОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

**Ю.М. Урман, Н.И. Лапин**

Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина,  
факультет естественных, математических и компьютерных наук.  
603002 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 1, e-mail: lapinni@mail.ru

В докладе изучается динамика анизотропного неконтактного гироскопа в одноосном магнитном подвесе. Выделяется два момента консервативной природы, возникающие при вращении ротора в магнитном поле: первый, который обусловлен внешним полем и стремится совместить вектор намагниченности ротора с направлением поля, второй представляет собой вращающий момент обусловленный анизотропией, стремящийся совместить вектор намагниченности с направлением оси анизотропии ротора. Находится скорость прецессии вектора кинетического момента относительно оси подвеса.

**Ключевые слова:** анизотропия ротора, неконтактный подвес, силовая функция, неприводимый тензор

Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку и движущегося под действием произвольных моментов сил  $M$ .

Пусть  $X_i (i=1,2,3)$  - опорная система координат,  $Z_i$  - прямоугольная система координат, связанная с твердым телом. Вращение тала относительно неподвижной точки можно рассматривать как наложение двух движений относительно кинетического момента и вместе с кинетическим моментом. Поэтому введем дополнительно к системам координат  $X_i$  и  $Z_i$  еще систему  $Y_i$ , связанную с вектором  $K$  кинетического момента тела. Ось  $Y_3$  направим по вектору  $K$ , оси системы  $Z_i$  направим вдоль главных центральных осей эллипсоида инерции тела с моментами инерции соответственно  $I_1, I_2, I_3$ . Переход от системы координат  $X_i$  к  $Y_i$  осуществляется путем двух последовательных поворотов соответственно на сферические углы  $\rho, \sigma$ , характеризующие положение вектора кинетического момента в системе  $X_i$ , а от  $Y_i$  к  $Z_i$  после трех последовательных поворотов на углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$

Выберем следующие переменные, задающие движение тела относительно неподвижной точки: величину  $|K|$  кинетического момента и углы  $\rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma$ .

Как показано в [1] силовую функцию взаимодействия силового поля с твердым телом можно представить в виде разложения по гармоникам, каждая из которых представляет собой скалярное произведение двух неприводимых тензоров, один из которых связан с телом, а другой с полем

$$V = \sum_l V_l, \quad V_l = (A_l \cdot B_l) = \sum_{l=-m}^m A_{lm} B_{lm}^* \quad (1).$$

Во многих задачах, имеющих прикладное значение, кинетическая энергия вращения тела существенно больше работы возмущающих сил, поэтому для анализа движения тела можно применить аппарат асимптотических методов теории колебаний. С помощью этих методов переменные, описывающие движение, могут быть разделены на быстрые и медленные. Обычно основное значение для анализа возмущенного вращения тела имеет характер изменения медленных переменных, эволюция которых описывается системой дифференциальных уравнений, более простой по сравнению с исходной.

В работе [2] рассмотрены различные виды эволюционных уравнений. В нашем случае осевой симметрии поля будем использовать эволюционные уравнения вида:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{K_0 \sin \rho} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \gamma}, \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{K_0 \sin \rho} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \rho}, \quad K = K_0, \beta = \beta_0, \dot{\alpha} \approx \frac{K_0}{I_1} \quad (2)$$

Эти уравнения описывают эволюцию постоянного по величине вектора кинетического момента при постоянном угле нутации. Выражение  $\langle V \rangle$  - осредненная по свободному движению силовая функция.

Рассмотрим  $l$ -ю гармонику силовой функции. Считая тензор  $A_l$  связанным с полем, а тензор  $B_l$  - с телом, преобразуем  $V_l$  к фазовым переменным задачи. Получаем: [1]

$$V_l = \sum A_{lm} D_{mm'}^l(\sigma, \rho, 0) D_{m''m'''}^l(\alpha, \beta, \gamma) B_{lm''}^* \quad (3)$$

Здесь величина  $D_{mm'}^l$  - матрица конечных вращений [3].

Осевая симметрия поля означает, что если ось  $X_3$  опорной системы координат совпадает с осью поля, то у тензора поля  $A_l$  все компоненты с индексом  $m \neq 0$  равны нулю. Поэтому получаем, что силовая функция, отвечающая взаимодействию осесимметричного поля с твердым телом, не зависит от угла  $\sigma$ . Отсюда сразу следует, что угол  $\rho$  между осью поля и кинетическим моментом остается постоянным. Если же ротор динамически симметричен ( $I_1 = I_2$ ) и его геометрическая ось совпадает с осью динамической симметрии, то тензор  $B_l$ , связанный с телом не будет иметь компонент с индексом  $m'' \neq 0$  и, из формулы (3) следует, что силовая функция не зависит от угла  $\gamma$ . В этом случае сохраняется угол  $\beta$  между вектором кинетического момента и осью тела.

Если же это не так, то тензор, связанный с телом, будет иметь компоненты не равные нулю и при индексе  $m'' \neq 0$ . Поэтому силовая функция будет зависеть от угла  $\gamma$  (собственного вращения). Пример такой ситуации дает вращение ротора, когда ось динамической симметрии, обусловленная распределением внутренних масс и полостей, не совпадает с осью симметрии взаимодействия тела с полем или когда ротор анизотропный.

Рассмотрим анизотропный ротор более подробно.

Для выделения динамических осей, ротор неконтактного гироскопа в одноосном магнитном подвесе, изготавливается из диска (обычно керамического) в центре которого укрепляется шар из ферромагнитного материала, обладающего как нелинейными, так и анизотропными свойствами. Через этот шар осуществляется взаимодействие ротора с полем. Для устранения токов Фуко обычно выбирают ферромагнитный непроводящий материал (феррит), а для устранения потерь на вращательный гистерезис выбирают материал с малым вращательным гистерезисом и стремятся работать в больших полях, близких к полям насыщения феррита.

Учитывая эти замечания, рассмотрим задачу об определении момента сил, действующего на вращающийся ротор, помещенный в однородное магнитное поле. Как показали эксперименты на одноосном магнитном подвесе, идеализация неоднородного поля однородным, с точки зрения определения моментов сил, приводит к хорошему совпадению теории с экспериментом.

Будем предполагать, что магнитные свойства ферритового шара могут быть макроскопически описаны вектором намагниченности  $\mathbf{J}$ , который при изменении внешнего поля сохраняет свою величину и может изменять только направление. Далее будем считать шар анизотропным. В этом случае в нем существуют направления, при намагничивании вдоль которых работа, затраченная на намагничивание, будет наибольшей (наименьшей) по сравнению с другими направлениями. Эти направления принято называть соответственно осями трудного (легкого) намагничивания. Если направление оси анизотропии, то на шар в магнитном поле будет действовать механический момент. Если угловая скорость вращения шара много меньше угловой скорости свободной прецессии вектора  $\mathbf{J}$  вокруг поля, то в каждый момент времени вектор намагниченности параллелен эффективному полю  $\mathbf{H}_{эф}$ , которое является суммой внешнего поля  $\mathbf{H}$  и поля анизотропии. Это поле можно найти из соотношения

$$\mathbf{H}_{эф} = -\frac{d\Phi}{d\mathbf{J}}, \quad (4)$$



где  $\Phi$  - потенциальная энергия образца.

Так как нас интересует только моменты консервативной природы, то будем пренебрегать энергией, которая рассеивается в объеме ферромагнитного шара. В противном случае в  $\mathbf{H}_{эф}$  входят поля, порожденные движением магнитного момента, поля трения.

Потенциальная энергия  $\Phi$  имеет вид [4]

$$\Phi = -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{J}) - \frac{k}{J_0} [\mathbf{J}, \mathbf{n}]^2 \quad (5)$$

где  $k > 0$  - константа анизотропии,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор оси анизотропии, направленный в условно принятое положительное направление,  $J_0$  - модуль вектора  $\mathbf{J}$

После дифференцирования формулы (5), условие равновесия вектора  $\mathbf{J}$  будет иметь вид

$$[\mathbf{H}_{эф}, \mathbf{J}] = [\mathbf{J}, \mathbf{H}] + \frac{2k}{J_0^2} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{J} \times \mathbf{n}] = 0 \quad (6)$$

Первый член в (6) представляет собой момент  $\mathbf{M}$ , который обусловлен внешним полем и стремится совместить вектор  $\mathbf{J}$  с направлением поля. Второй член представляет собой вращающий момент  $\mathbf{M}_A$  обусловленный анизотропией, стремящийся совместить вектор  $\mathbf{J}$  с направлением оси анизотропии. Таким образом, выражение (6) представляет собой уравнение равновесия вектора  $\mathbf{J}$  относительно тела. Механический вращающий момент, действующий на ферромагнитное тело при этом равен моменту  $\mathbf{M}$ .

Таким образом, при фиксированном положении образца относительно внешнего поля  $\mathbf{H}$  величина механического момента, действующего на этот образец, определяется из равенства  $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}$ , а его направление совпадает с  $\mathbf{M}$ . Если ротор вращается в магнитном поле вокруг динамической оси, не совпадающей по направлению ни с магнитным полем, ни с осью анизотропии шара, то угол между вектором  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$  меняется, так как меняется положение оси анизотропии относительно оси поля. В результате этого возникает зависимость момента, действующего на шар, от времени.

Итак, рассмотрим ротор, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\dot{\gamma} = \omega$  вокруг динамической оси  $Z_3$ , лежащей в плоскости  $X_1 X_3$ .

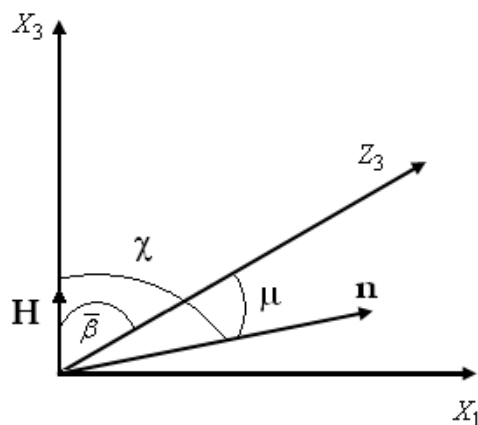


Рис. 1

Вектор поля  $\mathbf{H}$  направлен по оси  $X_3$  и составляет угол  $\bar{\beta}$  с вектором  $\omega$ . Ось анизотропии  $\mathbf{n}$  составляет с осью  $Z_3$  угол  $\mu$ , а с осью поля  $\mathbf{H}$  - угол  $\chi$ . Угол  $\chi$  при вращении шара является периодической функцией времени

$$\cos \chi = \cos \bar{\beta} \cos \mu + \sin \bar{\beta} \sin \mu \cos \gamma, \quad \gamma = \omega t, \quad (7)$$

Время установления равновесного состояния  $\mathbf{J}$  много меньше  $1/\omega$ , поэтому можно считать, что вектор  $\mathbf{J}$  всегда лежит в плоскости векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{n}$ . Обозначим через  $\Theta$  угол между векторами  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$ . Тогда

$$\Phi = -J_0 H \cos \Theta - k \cos^2(\chi - \Theta) \quad (8)$$

и условие равновесия вектора  $\mathbf{J}$  примет вид

$$J_0 H \sin \Theta = k \sin 2(\chi - \Theta) \quad (9).$$

Для того чтобы выразить потенциальную функцию (8) через обобщенные координаты  $\bar{\beta}, \gamma$ , нужно найти зависимость от  $\Theta(\chi)$  из уравнения (9) и подставить в (8).

Воспользуемся формулой Лагранжа, дающей решение уравнения

$$F(z) = a + bf(z), \quad (10)$$

где  $z, a$  и параметр  $b$  могут иметь любые комплексные значения, а  $f(z)$  и  $F(z)$  есть заданные функции, голоморфные внутри некоторого замкнутого контура  $S$ , содержащего внутри себя точку  $a$ . При условии неравенства

$$\left| \frac{b+z}{z} \right| < 1 \quad (11)$$

на контуре  $S$  имеет место следующая формула [5]

$$F(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b^q}{q!} \frac{d^{(q-1)}}{da^q} [F'(a)f^{(q)}(a)] = F(a) + bF'(a)f(a) + \frac{b^2}{2} \frac{d}{da} [F'(a)f^2(a)] + \dots \quad (12)$$

представляющая разложение заданной функции от корня  $z$  уравнения  $F(z) = a + bf(z)$ , абсолютно сходящееся при выполнении неравенства (11).

В нашем случае  $b = \frac{k}{J_0 H}$ ,  $z = 0$ ,  $a = 0$ ,  $F(z) = \sin \Theta$  или  $\cos \Theta$  и  $f(z) = \sin 2(\chi - \Theta)$  используя формулу (12), получаем с точностью до второго порядка по  $b$ :

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= b \sin 2\chi - b^2 \sin 4\chi \\ \cos \Theta &= 1 - \frac{b^2}{2} \sin^2 2\chi \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в формулу потенциальной энергии с точностью до второго по  $b$ , имеем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{J_0 H}{2} b \left[ \cos 2\chi - \frac{b}{2} \cos 4\chi \right], \quad (14)$$

где  $\Phi_0$  - часть энергии, не зависящая от угла, чтобы представить (14) в форме (3) выразим  $\cos 2\chi$  и  $\cos 4\chi$  через полиномы Лежандра, используя формулу

$$\begin{aligned} P_n(\cos \chi) &= \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} c_{nq} \cos(n-2q)\chi, \\ c_{nq} &= \frac{2}{\delta_{n-2q}} \frac{(2q-1)!(2n-2q-1)!}{(2q)!(2n-2q)!} \end{aligned} \quad (15)$$

Из формулы (15) получаем

$$\begin{aligned} P_2(\cos \chi) &= \frac{1}{4}(2 \cos 2\chi - 1) \\ P_4(\cos \chi) &= \frac{1}{64}(35 \cos 4\chi + 20 \cos 2\chi + 9) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos 2\chi &= \frac{4}{3} P_2(\cos \chi) - \frac{1}{3} \\ \cos 4\chi &= \frac{64}{35} P_4(\cos \chi) - \frac{80}{105} P_2(\cos \chi) - \frac{1}{15} \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив формулы (16) в выражение (14), будем иметь

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{2}{3} k \left[ 1 + \frac{2}{7} \frac{k}{J_0 H} \right] P_2(\cos \chi) + \frac{16}{35} \frac{k^2}{J_0 H} P_4(\cos \chi) = \sum_{i=0}^2 a_{2i} P_{2i}(\cos \chi), \quad (17)$$

где  $a_0 = \Phi_0$ ,  $a_2 = -\frac{2}{3} k \left( 1 + \frac{2}{7} \frac{k}{J_0 H} \right) \approx -\frac{2}{3} k$ ,  $a_4 = \frac{16}{35} \frac{k^2}{J_0 H}$ .

Так как  $\cos \chi$  определяются формулой (7) то, используя теорему сложения для полиномов Лежандра, выразим  $\Phi(\cos \chi)$  через обобщенные координаты  $\bar{\beta}, \gamma$  и параметр  $\mu$ . Имеем

$$\Phi = 4\pi \sum_{l=0}^2 \sum_{n=-l}^l \frac{1}{4l+1} a_{2l} Y_{2l,n}^*(\mu, 0) Y_{2l,n}(\bar{\beta}, \gamma). \quad (18)$$

Таким образом, силовая функция при наличии оси анизотропии будет зависеть от угла  $\gamma$  и проекция кинетического момента на ось динамической симметрии уже не будет интегралом движения.

Изучим динамику ротора под воздействием моментов имеющих силовую функцию вида (18). Совершая преобразование к фазовым элементам и, проводя осреднение по быстрым переменным  $\alpha$  и  $\gamma$ , будем иметь

$$\langle \Phi \rangle = -\frac{2}{3} k P_2(\cos \mu) P_2(\cos \beta_0) P_2(\cos \rho) + \frac{16}{35} \frac{k^2}{J_0 H} P_4(\cos \mu) P_4(\cos \beta_0) P_4(\cos \rho), \quad (19)$$

откуда на основании уравнений (2) получим скорость прецессии вектора кинетического момента относительно оси подвеса

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \frac{1}{K_0} k \cos \rho_0 P_2(\cos \beta_0) P_2(\cos \mu) - \\ & - \frac{k^2}{J_0 H} \frac{1}{K_0} \left( 8 \cos^3 \rho_0 - \frac{24}{7} \cos \rho_0 \right) P_4(\cos \beta_0) P_4(\cos \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\beta_0 = \text{const}$  (угол нутации),  $\rho_0 = \text{const}$  (угол между вектором кинетического момента и осью подвеса). При малом  $\rho_0$  и  $\beta_0 = 0$

$$\dot{\sigma} = \frac{k}{K_0} P_2(\cos \mu) - \frac{32}{7} \frac{k^2}{J_0 H} \frac{1}{K_0} P_4(\cos \mu). \quad (21)$$

Из этой формулы следует, что скорость прецессии в больших полях состоит из двух частей, одна из которых зависит от величины поля как  $1/H$ , а вторая – от поля не зависит. При величине поля  $H \rightarrow \infty$  скорость прецессии стремится к величине, определяемой константой анизотропии и углом  $\mu$ . Если выбрать угол  $\mu \approx 54^\circ$ , то  $P_2(\cos \mu) \approx 0$  и  $\dot{\sigma}$  – скорость прецессии в сильных полях обратится в нуль, т.е. кинетический момент в пространстве будет неподвижен (уходы гироскопа отсутствуют). Меняя угол  $\mu$  можно изменить знак прецессии. Учет второго члена приводит к зависимости угла  $\mu_0$  (угол, при котором  $\dot{\sigma} = 0$ ) от величины поля. Действительно, угол  $\mu_0$ , обращающий  $\dot{\sigma}$  в нуль, определяется из равенства

$$P_2(\cos \mu) = \frac{32}{7} \frac{k}{J_0 H} P_4(\cos \mu).$$

В окрестности точки  $\mu_0 \approx 54^\circ$  скорость прецессии обращается в нуль при некотором поле (будем называть его полем компенсации) в полосе  $\mu_0 - \Delta\mu < \mu < \mu_0$  для положительной константы анизотропии  $k > 0$  и в полосе  $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \Delta\mu$  для  $k < 0$ . Ширина полосы и величина скорости прецессии растут с увеличением константы анизотропии (рис. 2).

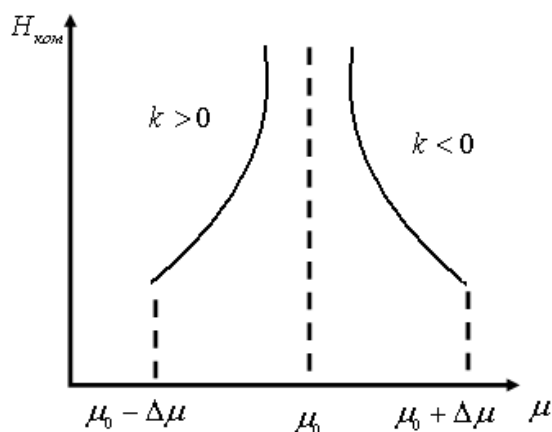


Рис. 2

В заключение можно отметить, что с помощью предложенного метода исследования можно описать моменты, действующие на произвольный по форме и по внутреннему строению ротор. Кроме того, можно поставить задачу синтеза магнитного поля подвеса для обеспечения минимальных моментов для конкретного ротора.

#### Список литературы

1. Урман Ю.М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах динамики твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2007. №6. с 52-68
2. Урман Ю.М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах об эволюционных движениях твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН МТТ, 1997, № 4, с. 10-20
3. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975, 436 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред М. Наука, 1982, с. 620
5. Лаврентьев Н.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного М. Наука, 1958, с. 658

## ОСЦИЛЛЯЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СОВМЕСТНЫХ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ КРИСТАЛЛ–РАСТВОР, ЖИДКОСТЬ–ПАР

**В.Б. Федосеев**

Институт металлоорганической химии им. Г.А. Разуваева РАН,  
603137 Нижний Новгород, Тропинина, 49,  
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23,  
e-mail: [vbfedoseev@yandex.ru](mailto:vbfedoseev@yandex.ru)

Приведены наблюдения долговременных, аperiodических, несинхронных осциллирующих фазовых превращений в ансамбле капель водного раствора. Предложена кинетическая модель, позволяющая воспроизвести осциллирующий режим при фазовых превращениях. Возникновение осцилляций связано с особенностями (бифуркации) поведения химических потенциалов компонентов, возникающими в присутствии кристаллической фазы.

**Ключевые слова:** осцилляции, фазовые превращения, испарение, кристаллизация

В работе [1] описан эффект осциллирующих фазовых превращений в трехкомпонентной трёхфазной системе газ – жидкость и раствор – кристалл  $H_2O-NaCl-KCl$ , заключающийся в возникновении долговременных, аperiodических, несинхронных совместных фазовых превращений кристалл – раствор и раствор – пар. Осцилляции представляют собой долговременные многократные повторения процесса испарения раствора до исчезновения жидкой фазы вокруг кристалла и последующей конденсацией растворителя на кристалле до полного восстановления размера капель. Видеофайл, воспроизводящий эти осцилляции в реальном времени содержится в дополнительных материалах к [1]. На рис. 1 приведена кинограмма, демонстрирующая этот эффект.

Для объяснения эффекта была предложена гипотеза, основанная на предположении о возникновении неустойчивой в макроскопической системе при обычных условиях фазы твердого раствора  $NaCl-KCl$ . Предположение опирается на термодинамические расчеты [2, 3]. Из оценок [4=ФТТ] при малом объёме возможно возникновение необычных и устойчивых в рассматриваемых условиях метастабильных фаз. Их образованию способствует большое пересыщение, при условии рождения единичного центра кристаллизации. Экспериментально возможность достижения необходимого пересыщения показана в [5]. Там же описаны термодинамические затруднения, связанные с энергией образования и размерами критического зародыша новой фазы при уменьшении объёма системы.

Для проверки предположения были выполнены эксперименты с системами, содержащими один растворенный компонент. В них исключена возможность образования метастабильных твердых растворов. То, что образование метастабильных фаз не является необходимым фактором возникновения осцилляций, существенно упрощает интерпретацию и кинетическую модель эффекта осцилляций.

Для экспериментальных исследований использована методика подобная описанной в работе [1]. На стеклянную подложку распылителем наносился раствор, из которого после испарения растворителя образовывался ансамбль кристаллов. Средние размеры кристаллов зависят от концентрации распыляемого раствора. Подложка с ансамблем кристаллов помещается на предметный столик микроскопа и рядом с ней помещается резервуар с чистым растворителем (дистиллированная вода). Осцилляции можно наблюдать на отдельных кристаллах, находящихся в окрестности резервуара. Резервуар с растворителем и подложка разделены (рис. 2). Воздушная прослойка между ними составляла от 2 до 5 мм. При этом резервуар с растворителем можно внести, пополнить, удалить, переместить или заменить на любой стадии опыта.

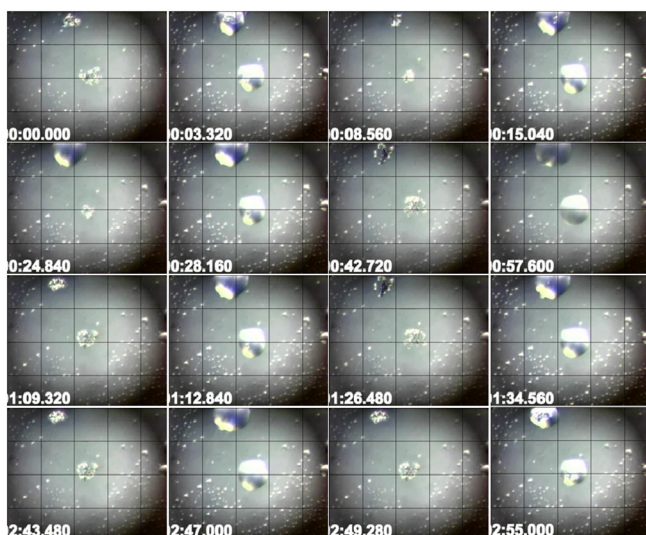


Рис. 1. Осциллирующее поведения капель раствора смеси NaCl и KCl [1]. На кадрах указано время от начала записи изображения (мин: сек). Между линиями сетки 100 мкм

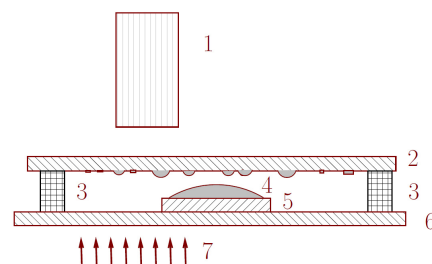


Рис. 2. Схема установки для наблюдения осциллирующих фазовых превращений. 1 – объектив микроскопа, 2 – предметное стекло с нанесенными методом распыления каплями или кристаллами, 3 – боковые опоры, определяющие высоту расположения наблюдаемых объектов, 4 – растворитель, 5 – подвижная прозрачная подложка-резервуар для растворителя, 6 – прозрачное основание, перемещаемое объектоводителем микроскопа, 7 – нижняя подсветка.

Такая схема позволяет повторение опытов с одним ансамблем кристаллов с растворителями разного состава или концентрации. Изменением состава растворителя в резервуаре можно регулировать влажность среды, в которой находится ансамбль кристаллов.

Подсветка на основе светодиодного осветителя и зеркала устраняет тепловой эффект осветителя. Ширма устраняет влияние воздушных потоков в лабораторном помещении. Влияние внешних потоков нельзя считать критичным, так как в окрестности осциллирующих капель можно наблюдать капли разного размера и удаленности, сохраняющие неизменным своё состояние на протяжении всего эксперимента. Наблюдения сохранялись в видеофайлах, либо как серия кадров, сделанных с интервалами 2–5 секунд. Длительность опытов до 20 мин.

При наблюдениях зафиксированы осцилляции как отдельных, так и групп капель. На рис. 3 показана выборка кадров, демонстрирующая поведение раствора NaCl в отдельные моменты времени. В исходном состоянии до появления резервуара с водой на подложке присутствовали только кристаллы. Для рисунка отобраны состояния, при которых капли одновременно почти полностью теряют воду, и некоторые промежуточные состояния. На полной кинограмме видны и несинхронные изменения размеров отдельных капель.

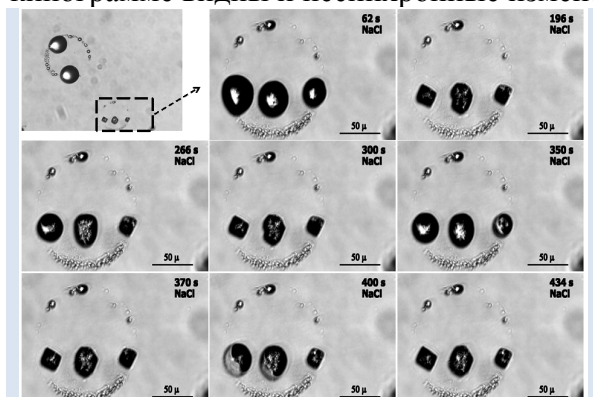


Рис. 3. Состояние группы капель раствора NaCl на 62, 196, 266, 300, 350, 370, 400, 434 секунде от исходного состояния, которое показано на верхнем левом кадре.

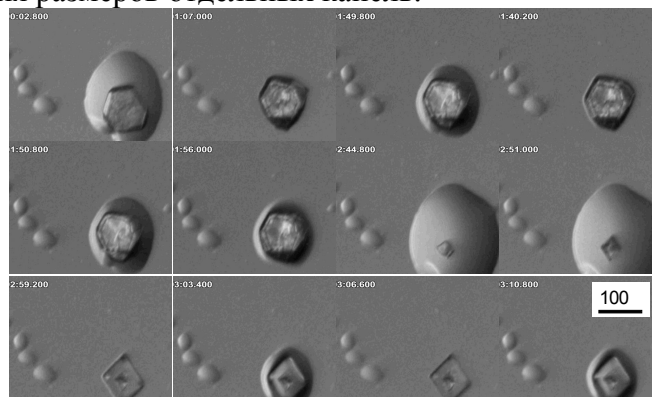


Рис. 4. Изменение огранки кристалла NaCl в процессе осциллирующих фазовых превращений.

По описанной методике удалось наблюдать осцилляции разной интенсивности и длительности удалось с растворами других веществ (KCl, NaNO<sub>3</sub>, (NH<sub>2</sub>)<sub>3</sub>CO). В некоторых случаях затухающие непериодические колебания наблюдались в режиме перехода из состояния кристалла в состояние стабильной капли или сопровождались изменением формы кристалла (рис. 4). Наблюдение осцилляций в однокомпонентных растворах позволяют упростить предложенную в [1] кинетическую модель, основанную на рассмотрении потока растворителя в газовой фазе. Поток вызван разностью химических потенциалов летучего компонента

$$j = -\alpha \nabla \mu \approx \alpha \frac{\mu(T, P) - \mu(T_d, P_d)}{\Delta l}, \quad (1)$$

где  $\mu = \mu^o(T) + RT \ln P$  – химический потенциал,  $T, P$  – температура и давление растворителя во внешней среде,  $T_d, P_d$  – температура и давление растворителя у поверхности капли,  $\Delta l$  – расстояние от резервуара с растворителем до поверхности капли,  $\alpha$  – коэффициент. Поток направлен в сторону понижения химического потенциала.

Давление над каплей  $P_d$  определено равенством химического потенциала растворителя в растворе и паре  $\mu_{0,s} = \mu_{0,s}^o + RT_d \ln(x_0) \cong \mu_{0,gas} = \mu_{0,gas}^o + RT_d \ln P_d$ . Для систем с одним растворенным компонентом давление пара около поверхности капли является функцией  $P_d = P(T_d, r, x, L)$ , где  $r$  – радиус капли,  $x$  – концентрация (мольная доля) растворенного компонента,  $L$  – размер кристалла (длина ребра куба). Условиями сохранения количества нелетучего компонента, связывающие величины  $r, x, L$ , понижают число независимых переменных до трёх  $P_d = P(T_d, r, x)$ . Растворимость NaCl в рассматриваемом интервале слабо зависит от температуры [6], поэтому концентрацию раствора в объеме капли можно считать сопоставимой с концентрацией насыщенного раствора и в присутствии кристалла ( $L \neq 0$ ) она постоянна и равна концентрации насыщенного раствора  $x = x_s = const$ . Это приближение пренебрегает массопереносом в капле.

Условия сохранения для нелетучего компонента

$$x = \frac{n_{1s}}{n_0 + n_{1s}}, \quad n_1 = n_{1s} + n_{1c}. \quad (2)$$

связывают количества молей растворителя  $n_0$  и растворенного компонента  $n_1$  в растворе  $n_{1s}$ , в кристалле  $n_{1c}$  с концентрацией раствора  $x$ . Величины  $n_0, n_1$  и  $n_{1s}$  (или  $x$ ) определяют объемы  $V_d, V_c$  капли и кристалла соответственно, а также геометрические параметры, в частности, радиус кривизны поверхности капли  $R_d$  и размер кристалла  $L$ .

$$V_d = n_0 V_0 + n_1 V_1, \quad V_c = n_{1c} V_1, \quad L = V_c^{\frac{1}{3}}, \quad (3)$$

здесь  $V_0, V_1$  – мольные объемы растворителя и растворенного компонента соответственно, в приближении идеального раствора они не зависят от концентрации.

Кристалл полностью смачивается раствором и окружающая кристалл капля при  $V_d > \frac{\sqrt{3}}{2} \pi L^3$  имеет сферическую форму. Если  $V_d < \frac{\sqrt{3}}{2} \pi L^3$ , капля теряет сферическую форму, так как растущий кристалл не вписывается в сферу. В этом случае форму капли можно приближенно представить в виде куба, грани которого являются основаниями сферических сегментов, заполненных раствором. Пренебрегая перекрывающимися и выступающими краевыми частями этих сегментов, объем покрывающего кристалл раствора можно оценить как

$$V_d - V_c = n_0 V_0 + n_{1s} V_1 \approx 6\pi h^2 \left( R_d - \frac{1}{3} h \right) = \pi h \left( h^2 + \frac{3}{2} L^2 \right),$$

где  $h$  – высота сферического сегмента. При испарении раствора радиус кривизны поверхности опирающегося на грань куба шарового сегмента  $R_d \approx \frac{L^2 + 2h^2}{4h}$  растет. Условия сохране-

ния нелетучего компонента при  $x \cong x_s$  связывают объём капли  $V_d$  с размером кристалла

$$V_d = \frac{4}{3} \pi R_d^3 = n_1 V_1 (\eta + 1) - L^3 \eta \quad \text{при} \quad r = R_d > \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

$$V_d = n_1 V_1 (\eta + 1) - L^3 \eta \approx \pi h \left( h^2 + \frac{3}{2} L^2 \right) + L^3 \quad \text{при} \quad h < L \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$
(4)

где  $\eta = \frac{V_0}{V_1} \frac{1-x}{x}$ . В первом случае радиус капли  $r$  и радиус кривизны  $R_d$  совпадают. Во втором – радиус кривизны превышает радиус сферической капли объёма  $V_d$ .

Кристаллическая фаза представлена единственным кристаллом кубической формы. Для NaCl образование единичного кристалла характерно вплоть до нанолитровых капель.

Давление насыщенного пара растворителя над каплей идеального раствора описывается уравнением Кельвина и законом Рауля

$$P(T_d, R_d, x) = P(T_d) (1-x) \exp\left(\frac{2\sigma}{R_d R T_d} V_0\right).$$
(5)

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Рассмотрим более детально поток растворителя в газовой фазе (1). Разность стандартных химических потенциалов растворителя  $\mu^\circ$  в небольшом интервале температур ограничим первыми членами полиномиального представления [7], при этом  $\mu^\circ(T_d) - \mu^\circ(T) \cong b \Delta T$ , где  $b$  – константа.

Используя (5) и уравнение Клапейрона – Клаузиуса  $\ln \frac{P(T_d)}{P(T)} = \frac{\Delta_b H}{R T_d} \frac{T_d - T}{T}$ , где  $\Delta_b H$  – эн-

тальпия испарения растворителя, можно формально свести потоки массо- и теплопереноса в газовой фазе к функциям градиентов концентрации и температуры [8]. С учетом (5) массоперенос в газовой фазе представим как

$$j = \alpha \left( \alpha_T \nabla T + \frac{\alpha_p}{\Delta l} \right),$$
(6)

где  $\alpha_T = b + \frac{\Delta_b H}{T} + R \ln(P(T))$ ,  $\alpha_p = \frac{2\sigma}{R_d} V_1 + R T_d \ln(1-x)$  и  $\nabla T \approx \frac{T_d - T}{\Delta l}$ . Первое слагаемое оп-

ределено состоянием термостата (резервуара) и свойствами растворителя. Ему соответствует направление потока в сторону понижения температуры. Второе слагаемое определено состоянием капли, оно определяет поток в сторону увеличения радиуса кривизны (для термостата радиус кривизны  $\infty$ ) или роста концентрации растворенного компонента (для термостата с чистым растворителем  $x = 0$ ). При испарении сферической капли величина  $\alpha_p$  растет. Для несферической капли при испарении  $R_d \rightarrow \infty$  и  $\alpha_p \rightarrow R T_d \ln(1-x) < 0$ . Коэффициенты в (1) и (6) для идеальных растворов имеют простую связь с коэффициентами тепло и массопереноса [8].

Тепловые эффекты в капле раствора связаны с энтальпией испарения растворителя  $\Delta_b H^\circ$ , энтальпией растворения кристалла  $\Delta_s H^\circ$  и теплопереносом  $\dot{Q}_\lambda$  через поверхность капли

$$\dot{Q}_d = \frac{\dot{V}_d}{V_0} \Delta_b H^\circ = j A_d \Delta_b H^\circ, \quad \dot{Q}_c = \frac{\dot{V}_c}{V_1} \Delta_s H^\circ, \quad \dot{Q}_\lambda \approx \lambda A_d \nabla T,$$
(7)

где скорость изменения объема капли  $\dot{V}_d = j A_d V_0$  определена массопереносом её границу,  $A_d$  – площадь поверхности капли,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности в газовой фазе. При  $x = const$  скорости изменения объёма кристалла  $\dot{V}_c$  и капли  $\dot{V}_d$  связаны уравнениями (2)–(3).



При конденсации растворителя происходит растворение кристалла, при испарении капли кристалл растёт. При этом тепловые эффекты фазовых превращений имеют разный знак и отчасти компенсируют друг друга. Тепловой эффект  $\dot{Q} = \dot{Q}_d + \dot{Q}_c + \dot{Q}_\lambda$  определяет скорость изменения температуры капли

$$\dot{T}_d = \dot{Q}c_p \quad (8)$$

здесь  $c_p$  – теплоемкость капли с кристаллом. При грубой оценке  $c_p \cong n_0(R_d, x)C_{p,0}(T) + n_1C_{p,1}(T)$ , где  $C_p$  – молярные теплоёмкости чистых компонентов.

Уравнения (2)–(8) связывающие  $J$  и  $\dot{T}_d$  с изменениями объёма кристалла  $\dot{V}_c$  и капли  $\dot{V}_d$ , составляют основу простейшей кинетической модели, способной воспроизвести осциллирующий режим совместных фазовых превращений кристалл–раствор и раствор–пар.

Кинетические модели для двухфазных систем описаны в [9, 10]. При численном моделировании воспроизведено немонотонное экстремальное изменение радиуса капли в процессе установления стационарной концентрации раствора [9]. В [10] наблюдалось немонотонное поведение температуры испаряющейся капли многокомпонентной смеси летучих компонентов. Авторы связывают подобное поведение размера и температуры капли с переходными процессами. Есть экспериментальные наблюдения такого эффекта [11]. Можно предположить, что эти модели [9 – 11] способны воспроизвести и затухающие осцилляции при переходе в стационарный режим.

В трехфазной системе осцилляции при релаксации к более устойчивому состоянию наблюдались нами экспериментально. На рис. 4 показано как в серии осцилляций размера капли меняется огранка кристалла NaCl. При этом осцилляции продолжались и после перехода к более выгодной огранке кристалла.

Конвективные потоки тоже могут быть причиной осциллирующего поведения капель. Согласно [12] нет качественной связи между процессами массопереноса в газовой фазе и внутри капли. Это позволяет использовать более простую модель сферических капель, не рассматривая влияние подложки и конвективных потоков в испаряющихся каплях. Однако, экспериментально осциллирующий рост и движение капель наблюдались в двухфазной системе при экстракции ацетона из водной среды каплями толуола [13]. Авторы этой работы связали подобное поведение с конвекцией Марангони.

Для трехфазной модели уравнения кинетической модели, описывающие процесс испарения капли имеют две особенности.

Первая связана с переходом от сферической к несферической форме капли. Согласно (4)–(5) при испарении капли с кристаллом ( $x \cong x_s$ ) давление около капли  $P_d$  и химический потенциал растворителя  $\mu_0 = \mu_{0,gas}^o + RT_d \ln P_d$  возрастают при уменьшении радиуса капли до достижения объёма  $V_d = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi L^3$ . Затем капля теряет сферическую форму (4) и при дальней-

шем испарении  $P_d$  и  $\mu_0$  уменьшаются. Таким образом, при  $V_d = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi L^3$ , и конденсация, и испарение приводят к понижению  $P_d$  и  $\mu_0$ . Это состояние можно рассматривать как одну из точек бифуркации, в окрестности которой могут возникнуть колебания, меняющие направления потока около капли.

Другая особенность возникает при полном растворении кристалла, когда концентрация  $x$  становится функцией объёма капли (2). При конденсации до растворения кристалла концентрация постоянна ( $x \cong x_s$ ) и рост радиуса капли сопровождается уменьшением  $P_d$  и  $\mu_0$ , а после растворения – уменьшением  $x$  возможен рост величин  $P_d$  и  $\mu_0$ . Это можно рассматривать как вторую точку бифуркации. Однако в ней нарушается симметрия процессов конденсации и испарения. При испарении капли зарождение кристаллической фазы в ней происхо-

дит при достижении некоторого пересыщения ( $x > x_s$ ). Степень пересыщения зависит от размера капли [5] и обычно имеет стохастический характер. При испарении капли раствора до зарождения кристалла концентрация нелетучего компонента  $x$  растёт, соответственно  $P_d$  и  $\mu_0$  уменьшаются, после зарождения кристалла  $P_d$  и  $\mu_0$  возрастают. Положения этой особенности при испарении и конденсации не совпадают. Зависимость от случайной величины (пересыщения) формально позволяет объяснить аperiодический характер наблюдаемых осцилляций. В окрестности этих особенностей скорость испарения капли может меняться не монотонно с изменением направления потока.

Описанная экспериментальная методика позволяет наблюдать эффект осцилляции фазовых превращений и управлять условиями, в которых эти осцилляции возникают.

Для механических систем описанные явления могут быть актуальны, в частности, при работе узлов трения в условиях переменной влажности и температуры в присутствии растворимых соединений в виде аэрозолей или пыли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-13-00137)

### Список литературы

1. Федосеев В. Б., Максимов М. В. Осциллирующие фазовые превращения раствор – кристалл – раствор в системе состава KCl – NaCl – H<sub>2</sub>O // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, №6. С.424.
2. Tanaka T., Hara S. Thermodynamic evaluation of nano-particle binary alloy phase diagrams // Zeitschrift fur Metallkunde. 2001. Т. 92. №11. С.1236.
3. Eichhammer Y., Heyns M., Moelans N. Calculation of phase equilibria for an alloy nanoparticle in contact with a solid nanowire // CALPHAD. 2011. V. 35. №2. P.173.
4. Федосеев В. Б. Расщепление фазовой диаграммы расслаивающегося твердого раствора в микро- и наноразмерных системах // Физика твердого тела. 2015. Т. 57. № 3. С. 585.
5. Федосеев В. Б., Федосеева Е. Н. Состояния пересыщенного раствора в системах ограниченного размера // Письма в ЖЭТФ 2013. Т. 97. №7. С. 473 ()
6. Справочник по растворимости. Т. 1. Бинарные системы. кн. 1. М.-Л.: ВИНТИ. 1962. С. 108.
7. Рид Р., Праусниц Д., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия. 1982. (R. C. Reid, J. M. Prausnitz, T. K. Sherwood, The properties of gases and liquids, 1977, 3rd ed. McGraw-Hill.)
8. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 3-е изд., М.: "НАУКА" 1987.
9. Кучма А. Е., Щёкин А. К., Лезова А. А., Мартюкова Д. С. Об эволюции многокомпонентной капли в процессе неизотермического диффузионного роста или испарения // Коллоидный журнал, 2014. Т.76. № 626 ()
10. Mattila T., Kulmala M., Vesala T. On the condensational growth of a multicomponent droplet // J. Aerosol Sci. 1997. V. 28. №4. P. 553.
11. Саверченко В. И., Фисенко С. П., Ходыко Ю. А. // Коллоидный журнал. 2015. Т. 77. №1. С.79.
12. Тарасевич Ю. Ю., Исакова О. П., Кондухов В. В., Савицкая А. В. Влияние режима испарения на пространственное перераспределение компонентов в испаряющейся капле жидкости на твердой горизонтальной подложке // Журн. технич. физики. 2010. Т. 80. №5. С. 45 .
13. Engberg R. F., Wegener M., Kenig E. Y. A numerical investigation of the impact of Marangoni convection on oscillating rising droplets in liquid/liquid systems // Int. Solvent Extr. Conf. (ISEC 2014). Würzburg, Germany 2014. P. 114,

## СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТНОГО СООРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

И.А. Федотов, Е.Н. Ежов, Е.В. Петраков

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Институт информационных технологий математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, e-mail: [igor.fedotov@itmm.unn.ru](mailto:igor.fedotov@itmm.unn.ru)

В работе рассмотрен вопрос синтеза различных типов динамических гасителей колебаний высотных сооружений на основе решения многокритериальных задач через линейную свертку критериев и построение множества Парето.

**Ключевые слова:** динамическое гашение колебаний,  $H_\infty$  - управление, многокритериальные задачи, линейные матричные неравенства.

### Введение

Прогресс в строительстве высотных зданий, с одной стороны, стимулируется высокой стоимостью квадратного метра в мегаполисах мира, а с другой стороны, успехами в области борьбы с колебаниями и конструкционной устойчивостью. Одновременно с развитием виброизоляции от фундамента развивается область активного динамического гашения колебаний, которая во многом обязана развитию приборостроения, средств измерений и силового привода. Вместе с тем проектирование активных и гибридных динамических гасителей колебаний, по-прежнему сопряжено со значительными трудностями, где не последнее место занимает проблема учета множества требований как на конструкцию гасителя так и на замкнутую систему в целом. В настоящей работе показано, как на основе решения многокритериальных задач можно совместить различные критерии воедино. Так, используются критерий полной энергии систем, который должен быть как можно меньше иначе здание разрушится, а также учитывается сила, развиваемая динамическим гасителем, она в свою очередь влияет на конечную стоимость оборудования и его массогабариты.

В работе используются предположения относительно линейности модели здания, а также гармоническом возмущении, действующем на здание.

### Постановка задачи и метод решения

В качестве модели здания обычно рассматривают цепочку материальных точек, связанных последовательно линейными упругими элементами, описываемую линейными дифференциальными уравнениями

$$\ddot{\xi} + \beta K \dot{\xi} + K \xi = pv(t) + qu, \xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 0, \quad (1)$$

где  $\xi = \text{col}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$  вектор положения материальных точек,  $v(t) = e^{i\omega t}$  внешнее гармоническое воздействие с неизвестной частотой  $\omega$ ,  $u$  управляющее воздействие, симметрическая матрица  $K$  и вектора  $p$  и  $u$  задаются следующим образом

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

параметр  $\beta > 0$  характеризует диссипативные свойства механической системы. В качестве показателя качества гашения колебаний будем использовать следующий функционал, характеризующий полную энергию системы

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\xi^T K \xi + \dot{\xi}^T \dot{\xi}) dt \quad (2)$$

где первое слагаемое есть потенциальная энергия, а второе кинетическая. Запишем также функционал, характеризующий возмущающее воздействие

$$I_v = \int_0^{\infty} v^2 dt < \infty \quad (3)$$

Для учета затрат на управление введём функционал

$$I_2 = \int_0^{\infty} u^2 dt \quad (4)$$

Определим также величины, характеризующие отношение двух показателей, которые желательно одновременно минимизировать

$$J_1 = \sup_v \frac{I_1^{1/2}}{I_v^{1/2}} \quad (5)$$

$$J_2 = \sup_v \frac{I_2^{1/2}}{I_v^{1/2}}$$

Окончательно сформулируем задачу следующим образом

$$J(J_1(u), J_2(u)) \rightarrow \min \quad (6)$$

Для установления связи с задачей  $H_{\infty}$  - управления представим систему (1) в стандартном виде

$$\dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u, \quad (7)$$

где новый вектор  $x$  определяется следующим образом  $x = \begin{pmatrix} \xi^T \\ \dot{\xi}^T \end{pmatrix}$ , а матрицы, входящие в систему

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K & -\beta K \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \quad (8)$$

Введём управляемые выходы, отвечающие функционалам (5)

$$z_1 = \begin{pmatrix} K^{1/2} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = C_1 x = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} x \quad (9)$$

$$z_2 = u = D_2 u = I u$$

Определим целевой функционал как линейную свертку критериев (8)

$$z_{\mu} = \mu z_1 + (1 - \mu) z_2, \mu \in (0, 1) \quad (10)$$

Таким образом, задачу (6) можно записать как  $J(u) = \sup_v \frac{\|z_{\mu}\|}{\|v\|}, \text{ где } \|\cdot\| = \left( \int_0^{\infty} z^T z dt \right)^{1/2}$

что по сути является задачей  $H_{\infty}$  - управления, которая имеет решение для конкретного значения  $\mu$  в виде линейного матричного неравенства (LMI) [2]. Например для случая управления по состоянию LMI будет записываться как

$$\begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_2^T + B_2 Z & B_1 & YC_{\mu}^T \\ B_1^T & -\gamma & D_{\mu}^T \\ C_{\mu} Y & D_{\mu} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \gamma \rightarrow \min \quad (11)$$

где  $C_\mu = \begin{pmatrix} \mu \cdot C_1 \\ (1-\mu) \cdot 0 \end{pmatrix}$ ,  $D_\mu = \begin{pmatrix} \mu \cdot 0 \\ (1-\mu) \cdot D_2 \end{pmatrix}$ . Таким образом, перебирая значения  $\mu$  на отрезке  $\mu \in [0, 1]$  и определяя  $u_\mu$  можно найти пару значений  $J_1(u_\mu)$ ,  $J_2(u_\mu)$  на плоскости критериев  $\{J_1, J_2\}$ , которая в свою очередь будет точкой на нижней границе множества Парето. Построив, таким образом, нижнюю границу множества Парето, можно определить оптимальную точку, т.е. компромиссное решение  $J(J_1(u), J_2(u))$ .

Дополним уравнения (1) уравнением с дополнительной массой динамического гасителя

$$\kappa \ddot{x}_u = u + \kappa v \quad (12)$$

где  $\kappa = \frac{m}{M}$  – ключевой параметр в теории динамического гашения, чем он больше, тем эффективнее результат гашения колебаний,  $i$  порядковый номер этажа приложения силы.

### Пример

В качестве иллюстрации приведем пример синтеза различных стратегий управления для 10-ти этажного здания, с параметром  $\beta$  равном 0.1. В условиях отсутствия управления величина функционала  $J_1 = 1843.5$  и  $J_2 = 0$  соответственно. В качестве места приложения управления выберем 7 этаж, что как показал поиск, является наилучшим этажом для приложения управляющей силы.

#### Пассивный динамический гаситель (TMD)

Пассивный динамический гаситель является наиболее распространённым типом динамического гашения, в силу относительной простоты реализации, настройки и стоимости. В качестве настроечных параметров выступают жесткость  $c_1$  и демпфирование  $k_1$ , с которыми дополнительная масса соединена с основной. Сам закон управления выглядит следующим образом

$$u = -c_1(x_u - x_i) - k_1(\dot{x}_u - \dot{x}_i) \quad (13)$$

#### Активный динамический гаситель (AMD)

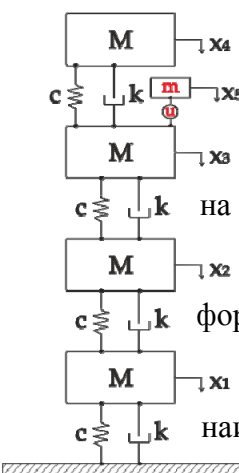
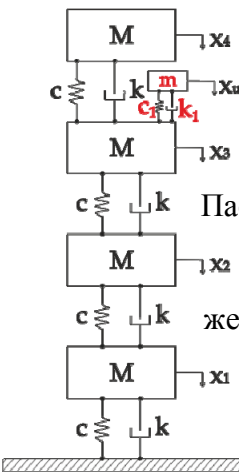
Активный динамический гаситель колебаний является некоторым достаточно сложным устройством, где между дополнительной и основной массой устанавливается силовой привод различной природы (гидравлический, пневматический, электрический) в задачу которого входит развитие силового воздействия вырабатываемым управляющим устройством на основе информации от датчиков. В качестве сигнала обратной связи возьмём смещение первого этажа, хотя наилучше место установки и тип датчика обратной связи требует отдельного исследования. В качестве закона формирования обратной связи примем так называемое управление по состоянию.

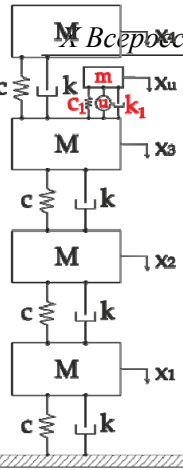
$$u = \Theta x \quad (14)$$

Данный тип управления является наиболее эффективным, но в тоже время и наиболее трудно реализуемым. В данном случае размерность вектора обратной связи  $\Theta$  составляет 22, что подразумевает установку аналогичного количества датчиков смещения и скорости смещения.

#### Гибридный динамический гаситель (HMD)

Гибридный динамический гаситель своего рода объединяет свойства предыдущих двух типов, и подразумевает установку одновременно с пассивными элементами (жесткостью и пружиной) еще и силового привода. Делается это по разным причинам, во первых, из соображений безопасности, если по каким либо причинам откажет в работе сложное устройство





активного управления, то работу продолжит пассивный гаситель. Также учитывается стоимость и сложность активного гасителя. В гибридных системах основную работу обычно выполняет пассивный динамический гаситель, а активное устройство только корректирует работу, используется как “подруливающее” устройство. Такое разделение подразумевает значительную экономию на стоимости системы виброзащиты, поскольку силовые приводы большой мощности, сложны в изготовлении и имеют высокую стоимость.

В качестве закона управления примем следующее

$$u = u_p + u_a = -c_1(x_u - x_i) - k_1(\dot{x}_u - \dot{x}_i) + \alpha x_1 \quad (15)$$

где помимо известных настроечных параметров пассивного гасителя добавился параметр активного управления  $\alpha$ . Настройка таких систем может происходить несколькими принципиально разными путями. Если учитывать требования безопасности, то сначала настраивают пассивную часть, как обычный пассивный динамический гаситель, а затем уже активную часть. Тем самым достигается приемлемая работа системы гашения в случае поломки активной части. Другой способ (принятый в данной работе) это одновременная настройка и пассивной и активной части, такой способ позволяет повысить результат гашения, поскольку все части работают согласованно.

#### Результаты

Учитывая всё вышесказанное и проведя соответствующие расчеты, получили следующую таблицу, для различных значений параметра  $\kappa$  и разных типов гасителя.

$\kappa$	1843.5	TMD	HMD	AMD
0.1	$J_1$	377,379	128,4711	68,59326
	$J_2$	6,306502	7,544968	7,85885
0.5	$J_1$	143,588	82,41353	68,59045
	$J_2$	8,693305	7,922528	7,530646

#### Заключение

В работе проведен синтез различных типов динамических гасителей и анализ их работы, по результатам которого можно сделать несколько выводов. Во первых, в очередной раз подтвердился факт, что активное гашение колебаний позволяет более эффективно подавлять колебания механических систем, также параметр  $\kappa$  играет ключевую роль в работе пассивного динамического гасителя и в реальных системах его желательно повышать, учитывая конечно требования на габариты и конечную стоимость, для активных систем этот параметр не так значим, поскольку всегда можно увеличить мощность силового привода. Одновременно с этим можно заметить, что гибридное управление не намного хуже полностью активного, но вместе с тем позволяет комбинировать качества пассивных и активных систем, повышая тем самым вариативность конечной системы и уменьшая стоимость. Одновременно с этим можно сказать, что решение многокритериальной задачи позволяет значительно улучшить характеристики конечной системы виброзащиты, поскольку позволяет с единых позиций учитывать различные показатели качества, количество которых в свою очередь может достигать двух десятков [5].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, ФЦП проект №14.578.21.0110.

### **Список литературы**

1. Булгаков Б. В. Колебания. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954.
2. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Наука, 2007.
3. David A. Wilson Convolution and Hankel Operation Norms for Linear System // IEEE Transaction on automatic control, vol.34, no.1, January 1989.
4. Dmitry V. Balandin, Mark M. Kogan Pareto suboptimal solution in control and filtering problems under multiple deterministic and stochastic disturbances. // 2016 European Control Conference June 29 – July 1, 2016, Aalborg, Denmark.
5. Ohtori Y., Christenson R.E., Spencer B.F. Jr., and Dyke S.J. Benchmark control problems for seismically excited nonlinear buildings. // Journal of engineering mechanics, ASCE, 2004. Vol. 130, pp. 366-385.

## РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

**А.А. Федюков**

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
603950 Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: [TeleginSasha@yandex.ru](mailto:TeleginSasha@yandex.ru)

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
Институт информационных технологий, математики и механики.  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Рассматривается задача робастной стабилизации по состоянию динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные и управление. Показано, что решение задачи сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств. В качестве примера построен робастный регулятор для двухмассовой системы.

**Ключевые слова:** робастная стабилизация, управление, линейные матричные неравенства

### Введение

О параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением. Существуют разные способы построения регуляторов, в частности, способ с применением линейных матричных неравенств. В задаче робастной стабилизации по состоянию систему управления строят в виде линейной обратной связи по измеряемому состоянию. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов MATLAB) можно получить параметры такого регулятора [1].

Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта и управление. Проблема синтеза робастного управления, а также проблема синтеза управления при заданных ограничениях являются сложными и актуальными в настоящее время [1-4].

В данной работе решается задача синтеза регулятора, который обеспечивает робастную стабилизацию объекта с ограничениями на фазовые переменные и управление; сформулированы достаточные условия для существования таких регуляторов. В качестве примера приведено решение задачи синтеза робастного управления для двухмассовой системы с неопределенностью в случае, когда есть ограничение на отклонение одной из масс и ограничение на управление.

### 1. Математическая модель объекта и постановка задачи

В качестве примера объекта с неопределенностью рассмотрим двухмассовую систему, изображенную на рис. 1 и описываемую уравнениями:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 &= -b\dot{\xi}_1 - c\xi_1 + b(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + c(\xi_2 - \xi_1) + U(t), \\ m\ddot{\xi}_2 &= -b(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - c(\xi_2 - \xi_1), \end{aligned} \tag{1}$$



где  $m$  – масса материальных точек,  $b$  – коэффициент трения и  $c$  – коэффициент упругости пружин.

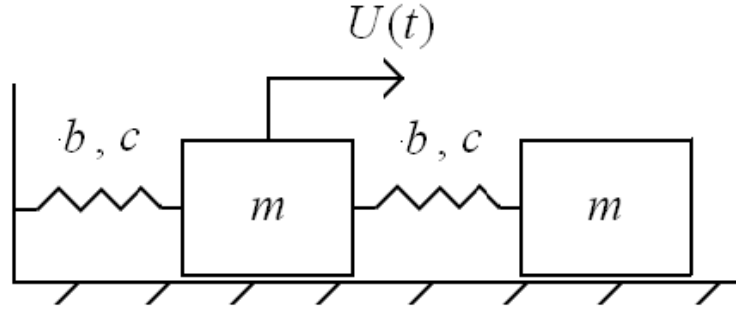


Рис. 1. Двухмассовая система

Будем предполагать, что значения коэффициентов точно не известны и лежат в некотором диапазоне  $m = m_0(1 + w_m \delta_m)$ ,  $b = b_0(1 + w_b \delta_b)$  и  $c = c_0(1 + w_c \delta_c)$ , где  $m_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $w_m$ ,  $w_b$  и  $w_c$  – номинальные значения параметров, а неизвестные  $\delta_m$ ,  $\delta_b$  и  $\delta_c$  удовлетворяют условиям  $|\delta_m| \leq \eta$ ,  $|\delta_b| \leq \eta$  и  $|\delta_c| \leq \eta$  для некоторого заданного значения  $\eta$ . На первую материальную точку действует внешняя сила  $U(t)$ . Величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – смещения первой и второй материальных точек относительно состояния равновесия системы.

Приведем данный объект к каноническому виду управляемой системы с неопределенностью

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_\Delta v_\Delta, \quad (2)$$

$$z_\Delta = C_\Delta x + D_u u + D_\Delta v_\Delta, \quad (3)$$

$$v_\Delta = \Delta z_\Delta. \quad (3)$$

Обозначим  $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2)^T$  и представим уравнения (1) в виде

$$m \ddot{\xi} = -bK \dot{\xi} - cK \xi + pU(t), \quad (4)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как параметры системы  $m$ ,  $b$  и  $c$  имеют указанный выше вид, запишем уравнение (4) как

$$m_0(1 + w_m \delta_m) \ddot{\xi} = -b_0(1 + w_b \delta_b) K \dot{\xi} - c_0(1 + w_c \delta_c) K \xi + pU(t).$$

Тогда

$$\ddot{\xi} = -\frac{b_0}{m_0} K \dot{\xi} - \frac{c_0}{m_0} K \xi - w_m \delta_m \ddot{\xi} - w_b \frac{b_0}{m_0} \delta_b K \dot{\xi} - w_c \frac{c_0}{m_0} \delta_c K \xi + p \frac{U(t)}{m_0}. \quad (5)$$

Обозначив

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \dot{\xi}, \quad u = \frac{U(t)}{m_0}, \quad v_m = -\delta_m \ddot{\xi}, \quad v_b = -\frac{b_0}{m_0} \delta_b \dot{\xi}, \quad v_c = -\frac{c_0}{m_0} \delta_c \xi, \quad (6)$$

запишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_0}{m_0} K x_1 - \frac{b_0}{m_0} K x_2 + w_m I_2 v_m + w_b K v_b + w_c K v_c + p u. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь обозначив  $v_\Delta = (v_m, v_b, v_c)^T$ ,  $z_\Delta = (z_m, z_b, z_c)^T$ , где

$$z_m = -\dot{x}_2, z_b = -\frac{b_0}{m_0} Kx_2, z_c = -\frac{c_0}{m_0} x_1. \quad (8)$$

запишем систему (6), (7) в каноническом виде управляемого объекта с неопределенностью вида (2), (3). Здесь  $x = (\xi, \dot{\xi})^T$  – состояние системы, а блочные матрицы  $A$ ,  $B_u$ ,  $B_\Delta$ ,  $C_\Delta$ ,  $D_\Delta$ ,  $D_u$  и  $\Delta$  – неизвестная матрица, описывающая параметрические возмущения, имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I \\ -\frac{c_0}{m_0} K & -\frac{b_0}{m_0} K \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ p \end{pmatrix}, B_\Delta = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ w_m I & w_b K & w_c K \end{pmatrix},$$

$$C_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{m_0} K & \frac{b_0}{m_0} K \\ 0_{2 \times 2} & -\frac{b_0}{m_0} I \\ -\frac{c_0}{m_0} I & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, D_u = \begin{pmatrix} -p \\ 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix}, D_\Delta = \begin{pmatrix} -w_m I & -w_b K & -w_c K \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_m I & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \delta_b I & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \delta_c I \end{pmatrix}.$$

$I$ ,  $0_{2 \times 2}$  – единичная и нулевая матрицы соответствующего размера. Неизвестная матрица  $\Delta$ , описывает параметрические возмущения и удовлетворяет для всех  $t \geq 0$  условию

$$\Delta^T \Delta \leq \eta^2 I \quad (9)$$

при заданном значении  $\eta \neq 0$ .

Относительно  $v_\Delta$  и  $z_\Delta$ , которые можно трактовать как вход и как выход неопределенности системы, будем предполагать, что они ограничены по норме  $L_2$ , т.е.

$$\|v_\Delta\| = \left( \int_0^\infty |v_\Delta(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \|z_\Delta\| = \left( \int_0^\infty |z_\Delta(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Введем  $z_i \in R^{m_i}$  – выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные и на управление

$$z_i = C_i x + D_i u, i = 0, 1, \quad (10)$$

где  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $i = 0, 1$  – заданные матрицы, соответствующего размера.

Линейную систему (2) с неопределенностью (3) структурно можно представить в виде блок-схемы, изображенной рис. 2, где  $H(s)$  – передаточная функция системы от входов  $u(t)$  и  $v_\Delta(t)$  к выходам  $z_i(t)$  и  $z_\Delta(t)$ .

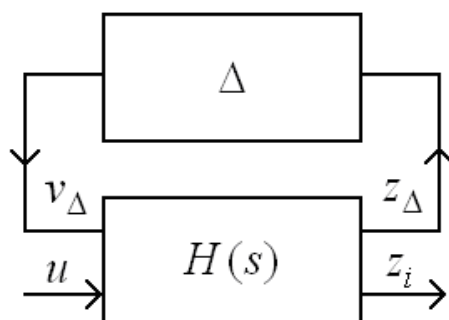


Рис. 2. Блок-схема системы с неопределенностью

Для объекта (2), (3) поставим задачу робастной стабилизации по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. Требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = \theta x, \quad (11)$$

который для любых допустимых неопределенностей  $\Delta$ , удовлетворяющих условию (9), обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2), (3), (11) со степенью устойчивости не меньшей, чем  $\beta$ , а также обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1$$

при заданных значениях  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

## 2. Синтез робастного регулятора

Для синтеза регулятора наряду с исходной системой (2), (3) рассмотрим также вспомогательную систему (2), (12), в которой вход неопределенности  $v_\Delta$  и выход неопределенности  $z_\Delta$  в каждый момент времени связаны неравенством

$$|v_\Delta|^2 \leq \eta^2 |z_\Delta|^2. \quad (12)$$

Структурно вспомогательную систему можно представить в виде блок-схемы, изображенной рис. 3,

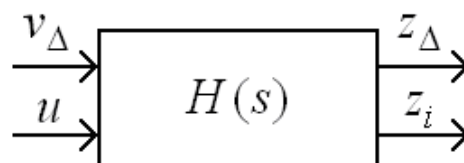


Рис. 3. Блок-схема системы вспомогательной системы

Заметим, что в силу выполнения условия (9) вход неопределенности  $v_\Delta$  и выход неопределенности  $z_\Delta$  исходной системы (3) также удовлетворяют неравенству (12) вспомогательной системы. Следовательно, закон управления  $u(t)$ , обеспечивающий робастную стабилизацию вспомогательной системы будет обеспечивать и робастную стабилизацию исходной системы (2), (3).

Пусть для вспомогательной системы (2), (12) выполнено условие

$$I - \eta^2 D_{\Delta}^T D_{\Delta} > 0. \quad (13)$$

В этом случае состояние  $x = 0$  является состоянием равновесия вспомогательной системы. В самом деле, из неравенства (12) с учетом второго неравенства (2) при  $x = 0$  следует, что

$$v_{\Delta}^T (I - \eta^2 D_{\Delta}^T D_{\Delta}) v_{\Delta} \leq 0, \quad (14)$$

и, следовательно, с учетом условия (13) следует, что и  $v_{\Delta} = 0$ .

Получим достаточные условия существования робастного регулятора для вспомогательной системы (2), (12) при наличии ограничений на фазовые и управляющие переменные. Рассмотрим область фазового пространства, заданную неравенствами  $|z_i(t)| \leq \gamma_i, i = 0, 1$ .

Впишем в нее эллипсоид  $x^T X x = 1$ . Пусть существует квадратичная функция  $V(x) = x^T(t) X x(t)$  с матрицей  $X = X^T > 0$  такая, что по любой траектории вспомогательной системы выполнено неравенство

$$\dot{V}(x) < -2\beta V \quad (15)$$

при фиксированном  $\beta > 0$  и при всех  $x$  и  $v_{\Delta}$  удовлетворяющих условию (12). Обозначим матрицу  $Y = X^{-1}$ . Тогда область в фазовом пространстве, полученную объединением всех множеств  $E = \{x : x^T X x \leq 1\}$ , отвечающих всевозможным квадратичным функциям Ляпунова вида (15), можно выделить, в терминах линейных матричных неравенств, следующим образом.

**Теорема 1.** Если начальное состояние  $x(0)$ , матрицы  $Y = Y^T > 0$ ,  $Z$  и величины  $\gamma_i^2, i = 0, 1$  удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} Y & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \\ \begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_u^T + B_u Z + 2\beta Y & B_{\Delta} & Y C_{\Delta}^T + Z^T D_u^T \\ & B_{\Delta}^T & -\eta^{-1} I & D_{\Delta}^T \\ & C_{\Delta} Y + D_u Z & D_{\Delta} & -\eta^{-1} I \end{pmatrix} < 0, \quad (16) \\ \begin{pmatrix} Y & Y C_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 0, 1,$$

то все траектории замкнутой системы (2), (11), (12) с начальными условиями  $x(0) \in E$  удовлетворяют ограничениям  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = 0, 1$ . Параметры робастного закона управ-

ления (11) для системы (2), (12) при фазовых ограничениях вычисляются как  $\theta = ZY^{-1}$ .

Доказательство **Теоремы 1** приведено в **Приложении**.

Пусть  $Y$  обозначает множество всех матриц  $Y$ , удовлетворяющих (16). Максимальная по объему по всем  $Y \in Y$  область  $E(Y_*)$  начальных условий для траекторий, удовлетворяющих фазовым ограничениям и ограничениям на управление, находится путем максимизации определителя матрицы  $Y$ . Эта операция является стандартной в пакете программ Matlab с использованием приложения CVX.

Из доказательства **Теоремы 1** следует, что если для заданного начального состояния  $x_0$  найдены матрицы  $Y$ ,  $Z$  и величины  $\gamma_i^2$ ,  $i = 0,1$ , удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (16) и построен робастный регулятор, то для всех начальных значений  $x_0$ , принадлежащих множеству  $E$ , этот же регулятор обеспечивает выполнение ограниченного  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ ,  $i = 0,1$ .

### 3. Результаты численного эксперимента

Для объекта (2) с неопределенностью (3) решалась задача синтеза робастного управления при наличии ограничений на величину отклонения второй материальной точки объекта  $\xi_2(t)$  и на величину управления  $u$ :

$$\max_{t \geq 0} | \xi_2(t) | \leq \gamma_0, \max_{t \geq 0} | u(t) | \leq 2,$$

где  $\gamma_0$  – заданное значение. Численное решение проводилось в Matlab для значений параметров  $\eta = 0.1$ ,  $m_0 = 1$ ,  $b_0 = 0.1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $w_m = w_b = w_c = 0.1$ . Начальное состояние системы  $(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)^T = (1.2, -0.4, -1.9, 0.3)^T$ .

В табл. 1 представлена зависимость минимального значения  $\gamma_0$  от степени устойчивости  $\beta$ .

$\beta$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.3	0.3872
$\gamma_0$	0.4210	0.4214	0.4226	0.4253	0.4936	0.9191

Из табл. 1 следует, что при увеличении значения степени устойчивости  $\beta$  увеличивается величина  $\gamma_0$ . В результате экспериментов не удалось получить робастный регулятор, который обеспечивает степень устойчивости замкнутой системы (2), (3), (11) выше, чем  $\beta^* = 0.3872$ .

Ниже приведены полученные для значений  $\beta = 0.1$  и  $\gamma_0 = 0.4253$  параметры регулятора  $\theta$ , который гарантирует робастную стабилизацию объекта при ограничениях на фазовую переменную и на величину управления

$$\theta = (-2.3430 \quad -1.2653 \quad -2.0110 \quad -4.1147), \tag{17}$$

а также матрица  $Y$ , полученная в результате решения системы линейных матричных неравенств (16)

$$Y = \begin{pmatrix} 2.6951 & -0.4916 & -1.5218 & -0.5343 \\ -0.4916 & 0.1777 & 0.5803 & -0.0773 \\ -1.5218 & 0.5803 & 6.1363 & -1.5013 \\ -0.5343 & -0.0773 & -1.5013 & 0.8417 \end{pmatrix}.$$

Робастный регулятор с матрицей (17) для любого начального состояния  $x_0$  из области  $E = \{ x : x^T Y^{-1} x \leq 1 \}$  гарантирует стабилизацию двухмассовой системы при наличии

заданных выше ограничений на отклонение второй материальной точки объекта  $\xi_2(t)$  и на величину управления  $u$ .

Выберем двухмассовую систему из семейства объектов (3). Зададим величины  $\delta_m = 0.01$ ,  $\delta_b = -0.01$ ,  $\delta_c = 0.01$  и начальное состояние системы  $(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)^T = (1.1950, -0.3033, -2.0800, 0.3090)^T$  из данной области. Непрерывной линией на рис. 4, рис. 5, рис. 6 показаны графики  $u(t)$ ,  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  для закона управления (11) с матрицей параметров регулятора (17). Штриховая линия соответствует графикам  $u(t)$ ,  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  для робастного закона управления по состоянию с матрицей параметров регулятора

$$\theta = (-6.7619 \quad 3.8381 \quad -4.9502 \quad -2.6624). \quad (18)$$

Закон управления с матрицей (18) получен без учета в модели ограничений на  $u(t)$  и  $\xi_2(t)$ .

Пунктирной линией на рис. 4 показано ограничение  $\max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 2$ , а на рис. 6 ограничение  $\max_{t \geq 0} |\xi_2(t)| \leq 0.4253$ .

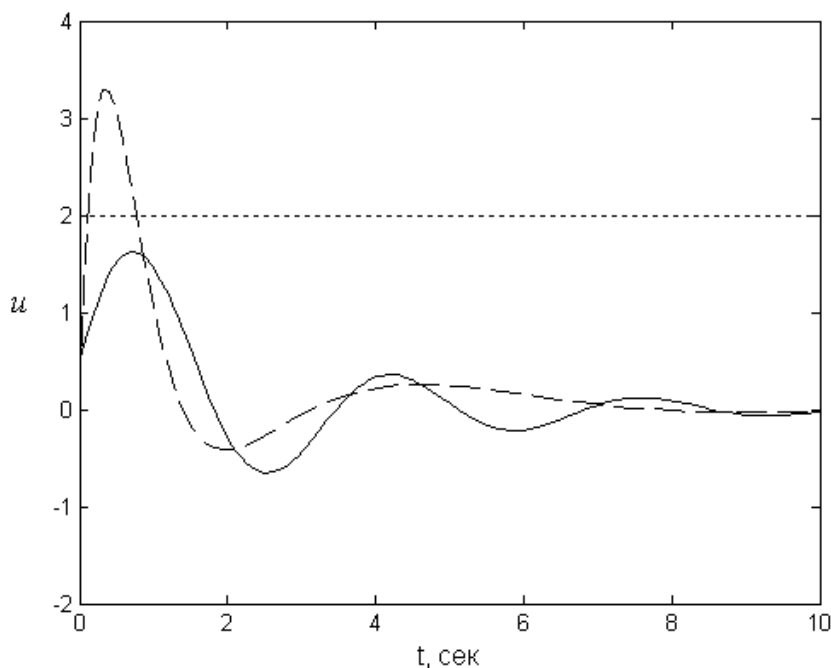


Рис. 4. График  $u(t)$

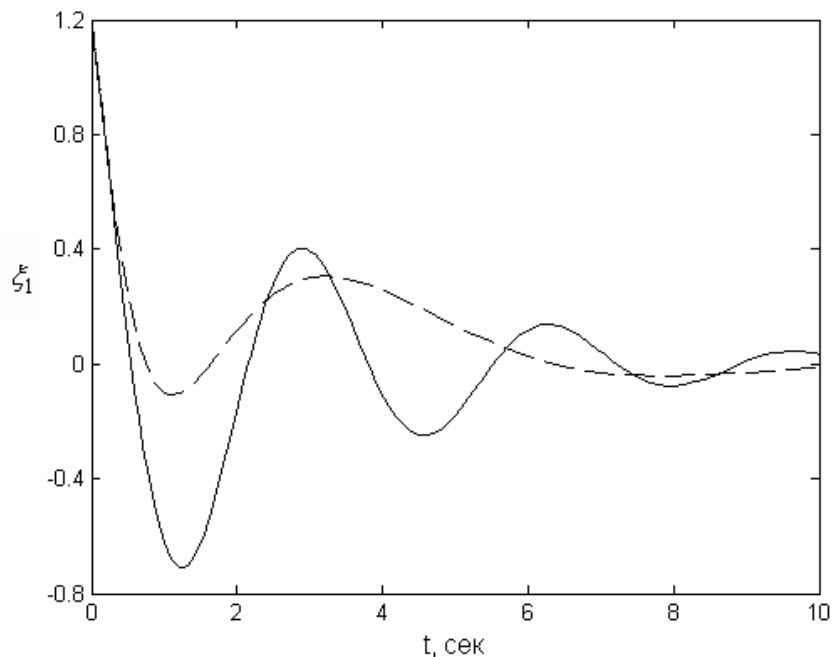


Рис. 5. Смещение первой материальной точки объекта

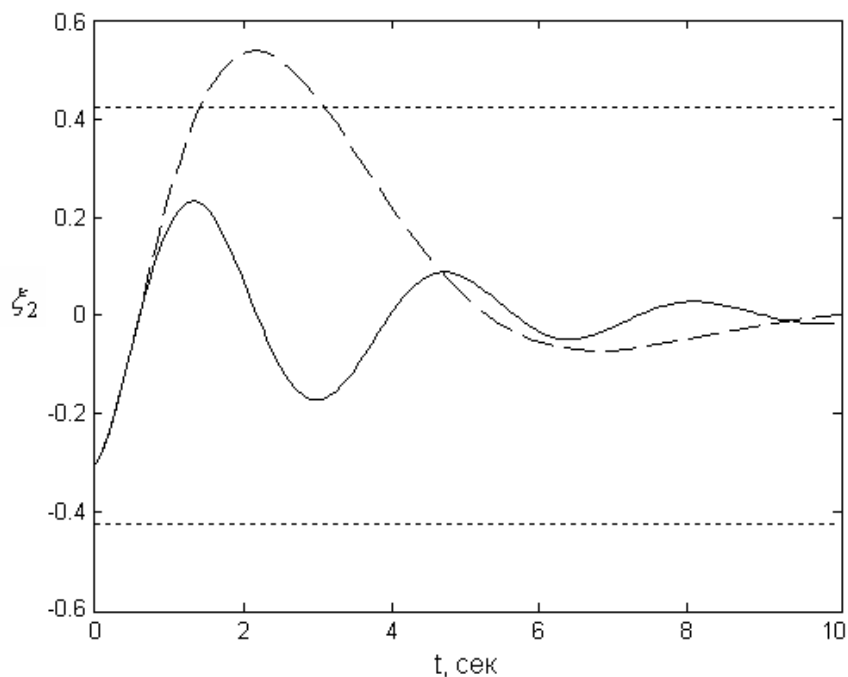


Рис. 6. Смещение второй материальной точки объекта

Таким образом, регулятор с матрицей (17) обеспечивает выполнение заданных ограничений.

#### 4. Заключение

В работе решена задача синтеза на основе линейных матричных неравенств регуляторов, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные. Сформулированы достаточные условия для существования таких регуляторов. В качестве примера приведено решение задачи синтеза робастного управления для двухмассовой системы при отсутствии полной информации об ее параметрах, при наличии ограничений на величину смещения одной из материальных точек и на величину управления. Приведено сравнение получен-

ного закона управления с робастным законом управления по состоянию без учета ограничений.

### Приложение

Докажем справедливость **Теоремы 1**. Согласно неущербности S-процедуры для квадратичной формы при одном ограничении [5], выполнение неравенства (15) при условии (12) эквивалентно существованию числа  $\mu > 0$ , при котором выполняется неравенство

$$\dot{V}(x) + 2\beta V - \mu(|v_\Delta|^2 - \eta^2|z_\Delta|^2) < 0, \quad (19)$$

для всех  $x$  и  $v_\Delta$  таких, что  $|x|^2 + |v_\Delta|^2 \neq 0$ .

Без ограничения общности положим  $\mu = 1$ . В самом деле, достаточно умножить неравенство (19) на  $\mu^{-1}$  и учесть, что при  $\mu > 0$  неравенство (15) и неравенство  $\mu^{-1}[\dot{V}(x) + 2\beta V] < 0$  эквивалентны. Выражение в левой части неравенства (19) представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных  $x$  и  $v_\Delta$ , следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо, что

$$\dot{V}(x) + 2\beta V - \mu(|v_\Delta|^2 - \eta^2|z_\Delta|^2) < -\varepsilon(|x|^2 + |v_\Delta|^2) < -\varepsilon|x|^2.$$

Это означает, что  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость вспомогательной (2), (12), а значит, и исходной системы (2), (3) со степенью устойчивости не меньшей  $\beta$ .

Первое неравенство (16) обеспечивает выполнение условия, что начальная точка  $x(0) \in E$ . В самом деле, так как  $V(x) = x^T(t)Xx(t)$  – функции Ляпунова, значит для всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $x^T(t)Xx(t) \leq 1$ . Учтем, что  $X = Y^{-1}$ . Тогда при  $t = 0$  по лемме Шура [6] оно эквивалентно первому неравенству (16).

Покажем, что выполнение второго неравенства (16) обеспечивает существование робастного регулятора вида (11), который гарантирует асимптотическую устойчивость объекта (2), (3), (12) со степенью устойчивости не меньшей, чем  $\beta$ . Согласно частотной теореме [7] существование квадратичной функции  $V(x)$ , удовлетворяющей неравенству (19), эквивалентно выполнению частотного условия

$$H^T(-j\omega)H(j\omega) - \eta^{-2}I < 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty).$$

или, что то же, выполнению условия

$$\|H(s)\|_\infty < \eta^{-1}, \quad H(s) = D_\Delta + \bar{C}_\Delta(sI - \bar{A})^{-1}B_\Delta, \quad (20)$$

где  $\bar{A} = A + B_u\theta$ ,  $\bar{C}_\Delta = C_\Delta + D_u\theta$ .

Таким образом, уровень гашения возмущений во вспомогательной системе (2), (11), (12) не должен превышать величину  $\eta^{-1}$ . Согласно [2] условие (20) выполнено, если справедливо матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X + X\bar{A} + 2\beta X & XB_\Delta & \bar{C}_\Delta^T \\ B_\Delta^T X & -\eta^{-1}I & D_\Delta^T \\ \bar{C}_\Delta & D_\Delta & -\eta^{-1}I \end{pmatrix} < 0, \quad (21)$$



Учтем, что  $X = Y^{-1}$ . Умножим неравенство (21) слева и справа на диагональную матрицу  $\text{diag}(Y, I, I)$  и, обозначив  $Z = \theta Y$ , получим второе неравенство (16).

Покажем, что третье неравенство (16) обеспечивает выполнения условий  $|z_i(t)|^2 \leq \gamma_i^2$ ,  $i = 0, 1$ , т.е. гарантирует, что фазовая траектория системы удовлетворяет заданным фазовым ограничениям. Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении [7], неравенство  $|z_i(t)|^2 \leq \gamma_i^2$ , выполнено для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x^T(t)Xx(t) \leq 1$ , тогда и только тогда, когда для некоторого числа  $\lambda_i > 0$  и для всех  $x$  выполнено неравенство

$$|z_i(t)|^2 - \gamma_i^2 - \lambda_i(x^T(t)Xx(t) - 1) \leq 0, \quad i = 0, 1. \quad (22)$$

Учитывая, что  $z_i = \bar{C}_i x$ , где  $\bar{C}_i = C_i + D_i \theta$ , представим (22) в виде

$$x^T(t)[\bar{C}_i^T \bar{C}_i - \lambda_i X]x(t) + \lambda_i - \gamma_i^2 \leq 0, \quad i = 0, 1. \quad (23)$$

Неравенство (23) выполнено при всех  $x$ , а значит и при  $x = 0$ . Отсюда следует, что  $\lambda_i \leq \gamma_i^2$  и  $\bar{C}_i^T \bar{C}_i \leq \lambda_i X$ . Таким образом получим условие

$$\bar{C}_i^T \bar{C}_i \leq \gamma_i^2 X. \quad (24)$$

Применив лемму Шура запишем (24) в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} X & C_i^T + \theta_i^T D_i^T \\ C_i + D_i \theta & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0. \quad (25)$$

Учтем, что  $X = Y^{-1}$ . Умножим неравенство (25) слева и справа на диагональную матрицу  $\text{diag}(Y, I)$  и, учитывая, что  $Z = \theta Y$ , получим третье неравенство (16).

Утверждение доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00603, 14-01-00266). Статья подготовлена в рамках выполнения НИР 3021 "Управление механическими системами в условиях неопределенности" с финансированием из средств Минобрнауки России, в рамках базовой части государственного задания на научные исследования.

### Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007.
2. Федюков А.А. Синтез стабилизирующих регуляторов по выходу для динамических систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник ННГУ, Нижний Новгород, Издательство ННГУ, 2013. – № 2 (1). – С. 152–159.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика, 2009. – № 6. – С. 48–57.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.
5. Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник ЛГУ, сер. 1. 1971. – Вып. 1. – С. 66–77.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.
7. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978.

## **ВЛИЯНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ВИБРАЦИЙ НА ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В РАСПЛАВЕ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ**

**А.И. Федюшкин**

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Москва, проспект Вернадского 101-1.

e-mail: [fai@ipmnet.ru](mailto:fai@ipmnet.ru)

В работе приводятся результаты численного моделирования конвективного тепло-массообмена при выращивании монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны. Показано, что вибрации могут интенсифицировать тепло-массообмен в расплаве, выглаживать фронт кристаллизации, а также уменьшать толщины пограничных слоев (динамического, температурного и концентрационного), что может приводить к увеличению температурного градиента на фронте кристаллизации и увеличению скорости роста кристаллов.

**Ключевые слова:** вибрация, теплообмен, кристаллизация монокристаллов, пограничные слои, численное моделирование.

### **Введение**

Вибрации могут быть, как негативным, так и позитивным фактором, влияющим на протекание многих физических, химических, технических и технологических процессов, а также могут являться эффективным средством управления в различных процессах. Изучение воздействия вибраций на жидкие среды проводится уже около 200 лет, начиная с работ [1, 2]. Обзоры работ по вибрационному конвективному течению можно найти в монографиях [3, 4]. В частности, в технологических процессах, например, при выращивании монокристаллов, вибрации могут оказывать существенное влияние на гидродинамику расплава, на распределение температуры и примеси, на скорость кристаллизации и, как следствие, на свойства и совершенство кристаллов. В данной работе негативные проявления вибрационного воздействия на рост и качество кристаллов не рассматриваются. Следует отметить, что вибрационное управление теплообменом в расплаве может быть энергетически экономичным и более простым, чем управление гравитационным или магнитным полями. Поэтому исследование воздействий вибраций на гидродинамику расплава является актуальной задачей.

Вибрационные воздействия на жидкий объем могут создаваться двумя способами: в первом способе вибрациям подвергается весь объем жидкости благодаря, например, изменению гравитационного поля (так называемый,  $g$ -jitter), во втором способе вибрации приложены только к части границы объема жидкости, например, к погруженному в расплав вибратору. Исследованию вибраций первого типа посвящено много теоретических [3-7] и экспериментальных [8-13] работ, в которых установлено, что вибрационное воздействие создает в жидкости слабое осредненное по времени вибрационное конвективное течение.

Влияние вращательных вибраций (вибрации второго типа) на гидродинамику и однородность распределения примеси в расплаве и кристалле было рассмотрено в работах [15, 17, 20, 21]. В работах [14, 17] приведены результаты по моделированию конвективного тепло-массообмена с учетом прикристаллизационной зоны (mushy zone), подробный обзор сделан в работе [14].

В настоящей работе представлено продолжение и обобщение работ [14-22] по изучению влияния гармонических поступательных вибраций второго типа, вызванных погруженным вибратором или колебаниями некоторой части границы жидкого объема. Рассмотрено выращивание монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны. Для

квазиустановившихся режимов приведены мгновенные и осредненные по времени характеристики вибрационных течений.

### Постановка задачи

Расчеты вибрационных течений расплава основаны на прямом численном решении уравнений Навье-Стокса несжимаемой вязкой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha \nu \frac{u}{r^2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g\beta(T - T_m)$$

$$\frac{d\rho c_p T}{dt} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Здесь:  $r$  и  $z$  радиальная и осевая координаты,  $t$  - время,  $u$  и  $w$  - радиальная и осевая компоненты вектора скорости,  $T$  - температура,  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\beta_T$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$  - коэффициенты линейного температурного расширения, кинематической вязкости, теплопроводности и теплоёмкости,  $\alpha$  - геометрический фактор, который равен 0 для плоской и 1 для осесимметричной геометрии,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  - субстанциональная временная производная.

Задание граничных условий рассмотрено при описании примеров расчета.

Начальные условия имеют вид:

$$t=0: u = 0, w = 0, T = T_m$$

Вибрации задавались в виде гармонической функции времени для перемещения или скорости на заданной границе или на погруженном вибраторе (2.11). В данной работе были рассмотрены две модели: первая - без учета перемещения вибратора (для малых амплитуд задавались гармонические изменения скорости) и вторая - с учетом перемещения вибратора или части границы расчетной области (для больших амплитуд) с перестройкой расчетной сетки.

При заданном фронте кристаллизации, скорость роста кристаллов была постоянной и в базовых вариантах расчёта равной  $W_s = 0.3$  см/час. Амплитуды вибраций были постоянными со значениями в диапазоне от 0 до 400 мкм, а частоты были в диапазоне от 0 до 100 Гц. и 3000 Гц.

Задача характеризуется следующими числами подобия: число Рейнольдса, связанное со скоростью роста кристалла  $Re_s = W_s R / \nu$ ; вибрационное число Рейнольдса  $Re_{vibr} = A \omega R / \nu$ , где  $A$  - амплитуда,  $\omega = 2\pi f$  круговая частота поступательных движений вибратора, число Грасгофа  $Gr = g\beta\Delta T R^3 / \nu^2$  (или числа Рэлея  $Ra = Gr Pr$ ), где  $\Delta T$  - масштаб температуры, и число Прандтля  $Pr = \nu \rho c_p / \lambda$ .

В данной работе при моделировании использовались пакеты программ [23-27]

### Метод Бриджмена

Проведено математическое моделирование теплообмена при выращивании кристаллов методом Бриджмена с различными формами и расположениями погруженного вибратора, схемы которых представлены на рис. 1. Расчетная область представлена на рис.1г, где нижняя граница является фронтом кристаллизации.

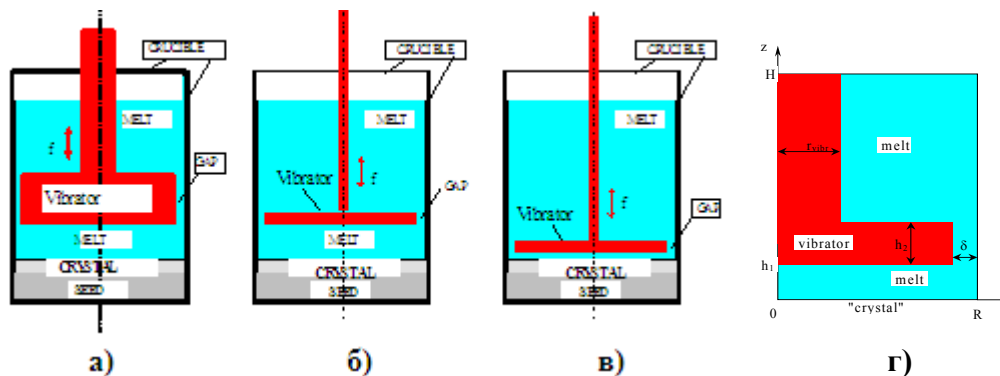


Рис. 1. Вертикальный метод Бриджмена с погруженным нагревателем-вибратором (а-в), схема расчетной области (г). Параметры геометрии: R - радиус тигля, H - высота расчетной области, 0z - ось симметрии,  $\delta$  - величина зазора между вибратором и стенками тигля,  $r_{vibr}$  - радиус штока вибратора, "crystal" - поверхность кристалла ( $z=0$ ).

Для схемы расположения вибратора, изображенной на рис.1а, с помощью конечно-элементного пакета программ АСТРА [26] были выполнены расчеты с целью определения времени формирования установившегося осредненного течения [17-19].

Граничные условия задавались в виде:

на оси симметрии  $r=0$ :  $u=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r}=0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}=0$

на фронте кристаллизации

$z=0$ :  $u=0$ ,  $w=W_s + A \omega \sin(\omega t)$ ,  $T=T_m$

на боковой стенке тигля

$r=R$ :  $u=0$ ,  $w=0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}=0$  ( $0 < z < h$ ),  $T=T_h$  ( $h < z < H$ )

где  $T_m$  - температура кристаллизации, определяемая из диаграммы состояния.

На погруженном нагревателе задавались условия прилипания и температура.

Влияние вибраций на течение расплава показано на Рис. 2-4.

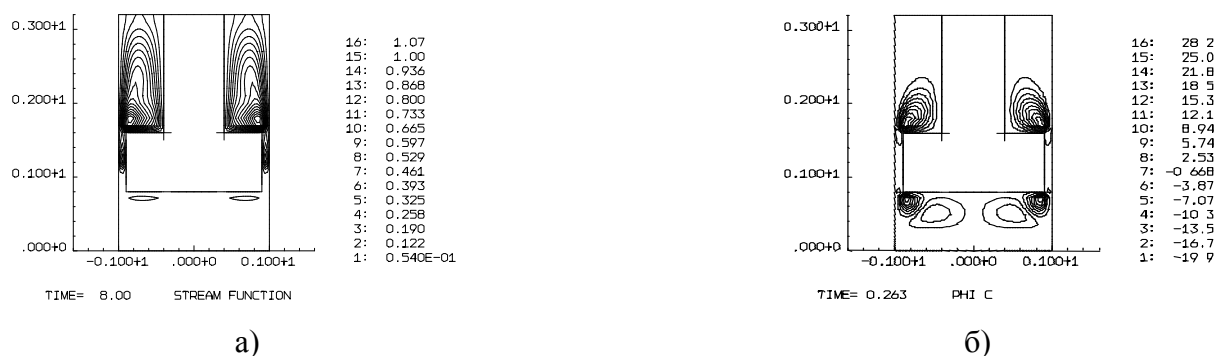


Рис. 2. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). а) функция тока без вибраций; б) функция тока осредненного по времени вибрационного течения ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц)

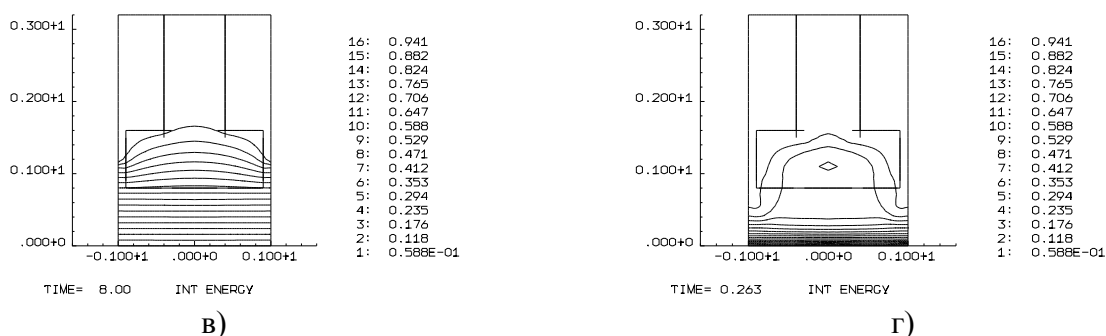


Рис. 3. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). а) температура без вибраций; б) температура осредненного по времени вибрационного течения ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц).

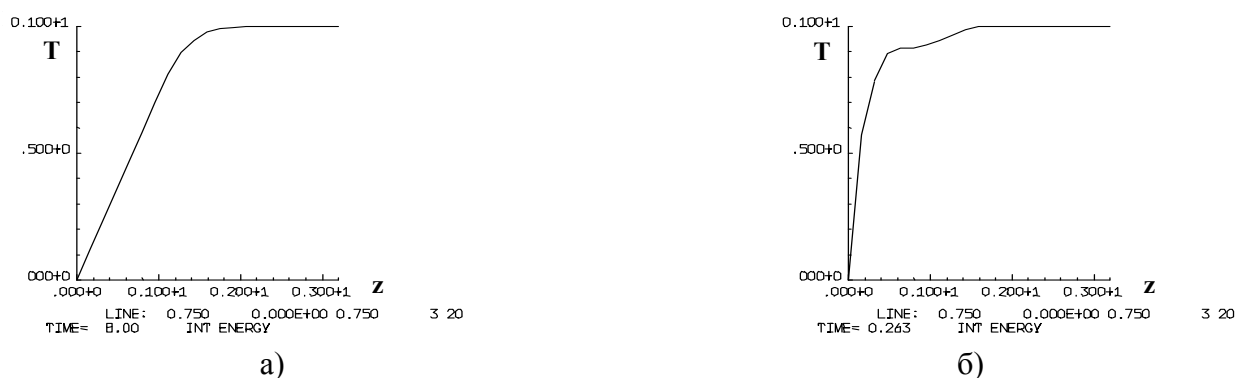


Рис. 4. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). вертикальные профили температуры при  $r=0.75$ : а) без вибраций; б) вибрационное течение ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц).

Для метода Бриджмена, при указанных выше параметрах, также были проведены численные расчеты с учетом конвекции, которые показали, что вклад вибраций при вибрационном числе Рейнольдса  $Re_{vibr}=A\omega R/\nu > 10$ , (где  $\omega=2\pi f$ , а  $\nu$  - кинематическая вязкость) в гидродинамику и распределение температуры является преобладающим по сравнению с конвекцией ( $Ra=2 \cdot 10^5$ ,  $Pr=5.43$ ).

На Рис. 5 показаны изотермы (в правой части рисунка – без вибраций, в левой - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ ). На Рис. 6 для этих случаев представлены вертикальные профили (при  $r=0.75$ ) температуры в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ ).

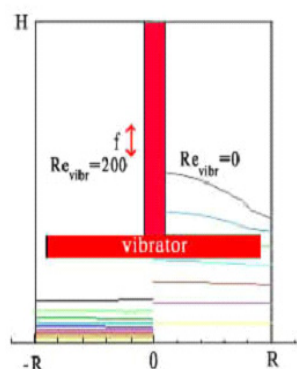


Рис 5. Изотермы в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ ) (справа – без вибраций, слева - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )

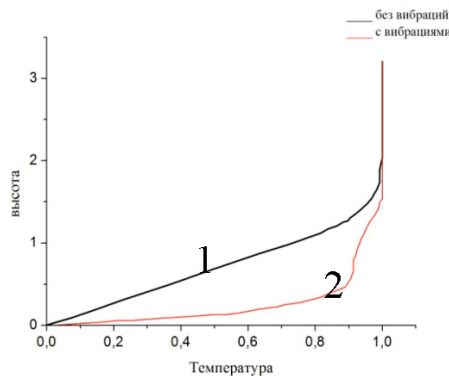


Рис. 6. Вертикальные профили температуры ( $r=0.75$ ) в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ ) (линия 1 – без вибраций, 2 - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )

Данные расчеты показывают, что с помощью вибрационного воздействия можно уменьшить температурный пограничный слой и увеличить градиент температуры около фронта кристаллизации, а это открывает возможности управлять кинетикой роста кристаллов, в частности, скоростью роста, как это впервые было установлено в экспериментах [8].

### Метод Чохральского

В методе Чохральского, в отличие от метода Бриджмена, тепловая конфигурация соответствует неустойчивому распределению температуры: холодный фронт кристаллизации расположен над расплавом. В реальных условиях метода Чохральского на расплав влияют многие факторы, такие, как вращение, интенсивное естественно-конвективное и термокапиллярное перемешивание расплава за счет бокового и донного подогрева расплава. Исследованию этих типов течений в методе Чохральского посвящено много работ, однако вибрационным воздействиям начали уделять активное внимание только в последнее пятнадцать лет [3-23].

В настоящей работе исследовано влияние вибраций на гидродинамические и температурные пограничные слои в расплаве. Предполагается, что кристалл (либо погруженный вибратор) совершают колебательные движения с малой амплитудой  $A$  и с частотой  $f$  по закону  $z = A \sin(2\pi ft)$ . На рис. 7 показана схема двумерной осесимметричной математической модели метода Чохральского. Была использована система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в осесимметричном приближении ( $\alpha=1$ ). На кристалле и тигле применялись граничные условия прилипания и задавалась температура (см. рис. 7), на свободной поверхности расплава при  $z=H$  для скоростей и температуры ставились условия продолжения решения (нормальные производные этих переменных равнялись нулю).

Результаты расчетов показали преобладание вибрационной конвекции (для расплавов с  $Pr > 1$ ) при частоте  $f > 10$  Гц над термокапиллярной и естественной конвекциями, а также хороший эффект гомогенизации температурного поля во всей внутренней области расплава и образование пограничных слоев за счет вибраций. На рис. 7 представлены изотермы в модели метода Чохральского для  $Pr=5.43$ ,  $H/R=1$ ,  $R_c/R=0.3$  (где  $H$ ,  $R$  и  $R_c$  - высота, радиус тигля и радиус кристалла). Для других жидкостей и параметров результаты представлены в работе [17]. На рис. 7 слева показано распределение температуры на квазистационарном режиме для случая перемешивания расплава только вертикальными гармоническими вибрациями, приложенными к кристаллу с частотой  $f=10$  Гц и амплитудой  $A=100$  мкм ( $Re_{vibr}=40$ ), а справа на рис. 7 изображены изотермы для течения без вибраций ( $Re_{vibr}=0$ ).

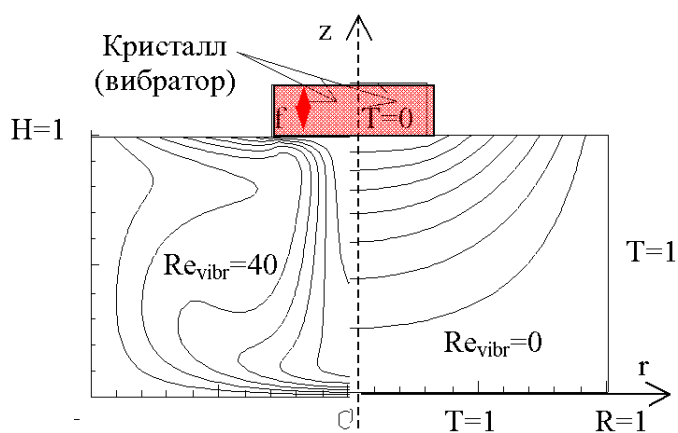


Рис. 7. Изотермы в расплаве  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr=5.43$ ,  $H/R=1$ ,  $R_c/R=0.3$ ). Справа - без вибраций ( $Re_{vibr}=0$ ), слева при вибрациях кристалла с частотой  $f=10$  Гц и амплитудой  $A=100$  мкм ( $Re_{vibr}=40$ ).

### Метод Чохральского с погруженным в расплав вибратором

Выращивать монокристалл и совершать им же вибрационные воздействия технологически затруднительно, поэтому несколько лет назад академик В.В. Осико предложил в методе Чохральского кроме влияния вибраций кристалла исследовать вибрационное воздействие от погруженного в расплав вибратора.



Рис. 8. а) Расчетная область и сетка,

б) треки течения жидкости на квазистационарном режиме ( $A=0.4$ мм,  $f=20$ Гц).

Такие параметрические расчеты были выполнены здесь в упрощенной двумерной постановке. Была использована система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в плоском приближении ( $\alpha=0$ ). На рис. 8 показана исследуемая область. Расчетная область представляла собой квадрат со стороной 3 см. Кристалл имеет диаметр  $d=1$  см и заглублен в расплав на глубину 1 мм. Вибратор имеет диаметр 0.8 см и толщину 1 мм. В данной работе рассматриваются удаления вибратора от поверхности кристалла на  $h=5$  мм, 8 мм и 13.5 мм. (другие случаи были рассмотрены ранее в работе [17].

В расчетах использовалась неравномерная сетка со сгущением вблизи твердых стенок. Для задания вибраций использовалась динамическая сетка. При перестроении сетки использовался метод послойного наращивания (либо удаления) слоев сетки.

Для температуры ставились такие условия: тигель имеет постоянную температуру  $400^\circ\text{K}$ , кристалл (расположенный сверху) холодный и имеет температуру в  $300^\circ\text{K}$ . На свободной поверхности, соединяющей кристалл с тиглем были условия теплоизоляции  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ , где  $n$  внешняя нормаль. В качестве начальных условий задавалась неподвижная жидкость с температурой в  $300^\circ\text{K}$ . Вибратор совершал вертикальные колебания с амплитудой  $A = 0.4$  мм и частотой  $f = 20$  Гц в соответствии с законом:  $z = A \sin(2\pi f t)$ .

Рассчитанные центральные вертикальные профили температуры (в случае вибраций показана осредненная по времени температура) представлены на рис. 9. Вибрации имели параметры ( $A=0.4$ мм,  $f=20$ Гц). На рисунках 9:  $z=0.014$  м – соответствует поверхности кристалла;  $z=0.009$  м – соответствует ближайшей к кристаллу поверхности вибратора.

Результаты показаны для следующих значений параметров процесса:

- а)  $Pr=0.1$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ . Линия 1 - без вибрации, а линия 2 - с вибрацией,
- б)  $Pr=7$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ . Линия 1 - без вибраций, линия 2 - с вибрациями,
- в) ( $Pr=100$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ ). Линия 1 - без вибрации, а линия 2 - с вибрацией,
- г) ( $Pr=100$ ). Линия 1 соответствует  $Gr=0$ ,  $Re_{vibr}=0$ . Линия 2 соответствует,  $Gr=1000$ ,  $Re_{vibr}=0$ . Линия 3 соответствует  $Gr=1000$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,
- д) ( $Pr=100$ ). Линия 1 - без естественной конвекции  $Gr=0$ . Линия 2 - с естественной конвекцией  $Gr=1000$ . В обоих случаях присутствует вибрация  $Re_{vibr}=1500$ ,
- е). ( $Pr=7$ ). Линия 1 - без вибрации, линия 2 - с вибрацией при  $h/d=0.8$ , а линия 3 - с вибрацией при  $h/d=0.5$
- ж) ( $Pr=100$ ). Линия 1 - без вибрации, линия 2 - с вибрацией при  $h/d=0.5$ , а линия 3 - с вибрацией при  $h/d=1.35$



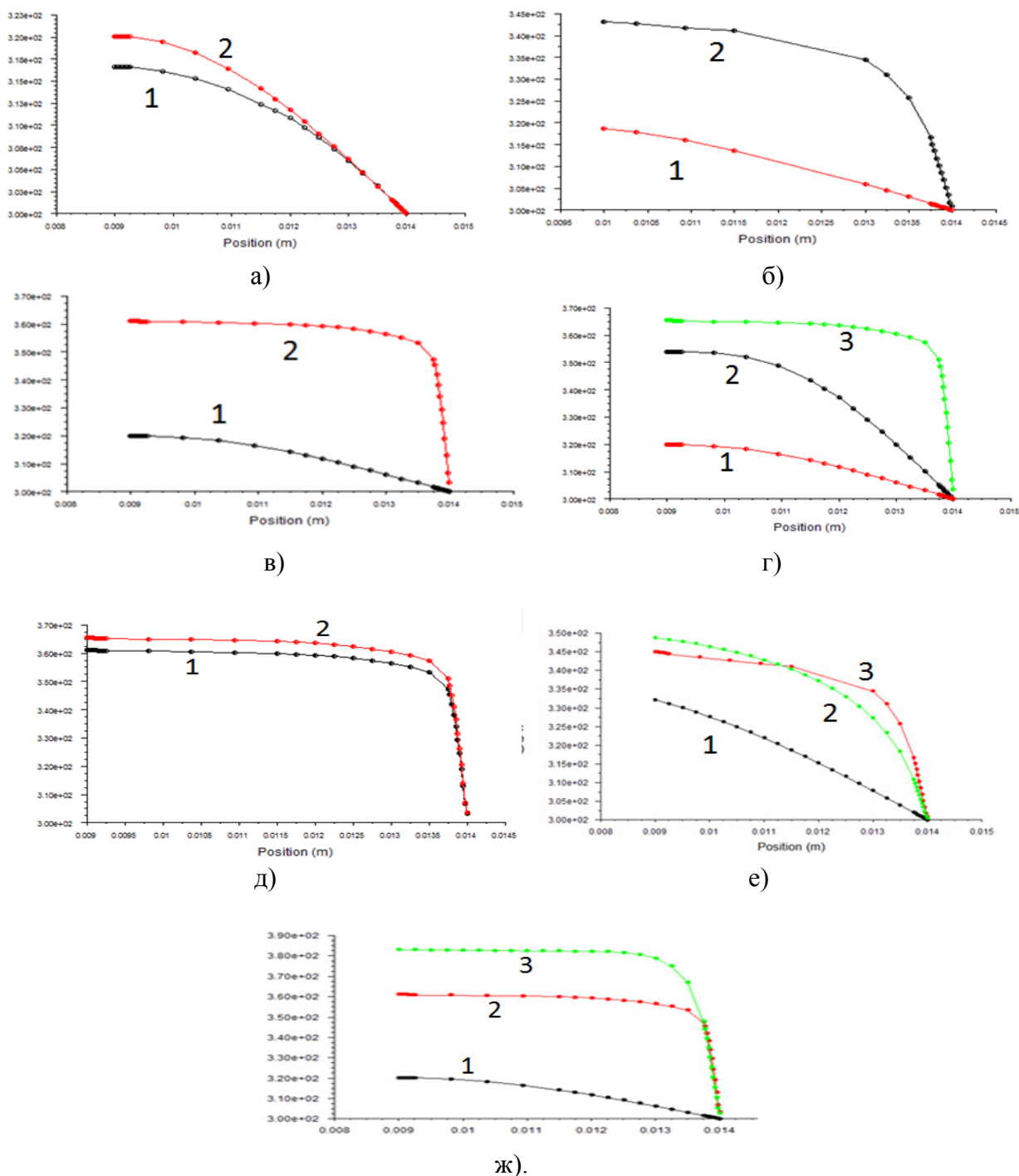


Рис. 9. Зависимости осредненной температуры в центральном вертикальном сечении расчётной области от значения координаты  $z$ .

Из представленных на рис.9 результатов, хорошо видна общая закономерность уменьшения температурного слоя при вибрациях.

### Метод плавающей зоны

Метод зонной плавки заключается в том, что расплавляется узкая часть слитка (часто поликристаллического) и затем перемещением слитка (или температурного поля) происходит его перекристаллизация и получение монокристалла. Расплавленная часть слитка - плавающая зона граничит с твердым не расплавившимся слитком и атмосферой, и удерживается за счет сил вязкости и поверхностного натяжения. В поле силы тяжести форма расплавлен-



ной зоны отличается от формы твердого слитка. В данной работе мы рассмотрели вертикальный метод плавающей зоны, то есть, когда вектор силы тяжести направлен параллельно оси слитка (и плавающей зоны). В этом случае форма расплавленной зоны имеет осевую симметрию. Для сокращения времени расчета, сначала рассчитывалась форма плавающей зоны и при дальнейших расчетах гидродинамики и теплопереноса влиянием гидродинамики на форму плавающей зоны пренебрегалось. Численное моделирование конвективного теплопереноса для модели плавающей зоны (рис. 8) было проведено на основе решения двумерных уравнений Навье-Стокса с учетом осевой симметрии и для моделирования подвижной (вибрирующей) границы использовались динамически изменяемые сетки. В данных расчетах геометрия плавающей зоны была определена предварительно, на основе расчетов уравнения равновесия при наличии силы тяжести и с учетом величины угла смачивания, для кремния ( $Pr=0.01$ ). Фронт кристаллизации в данной модели задавался изотермой, равной температуре кристаллизации.

На рис. 10а показана расчетная область диаметром 6 мм и высотой 5 мм, граничные условия и параметры расчетов. В расчетах рассматривались вибрации кристалла, поликристалла и свободной поверхности с частотой  $f=3\text{КГц}$  и амплитудой  $A=10\text{мкм}$ , скорость вращения  $\pm 30\text{rpm}$ , на боковой свободной поверхности задавалось условие излучения, температура для условия излучения задавалась температура  $T_{\infty} = 2200\text{К}$ , остальные теплофизические параметры брались для расплава кремния Si.

На рис. 10б представлен вертикальный профиль температуры при учете влияния теплопроводности и излучения, но без учета вращения, конвекции и вибраций (кривая 1). Там же показан вертикальный профиль осредненной по времени температуры при дополнительном действии вибраций (кривая 2). Хорошо видно уменьшения температурного слоя при вибрациях.

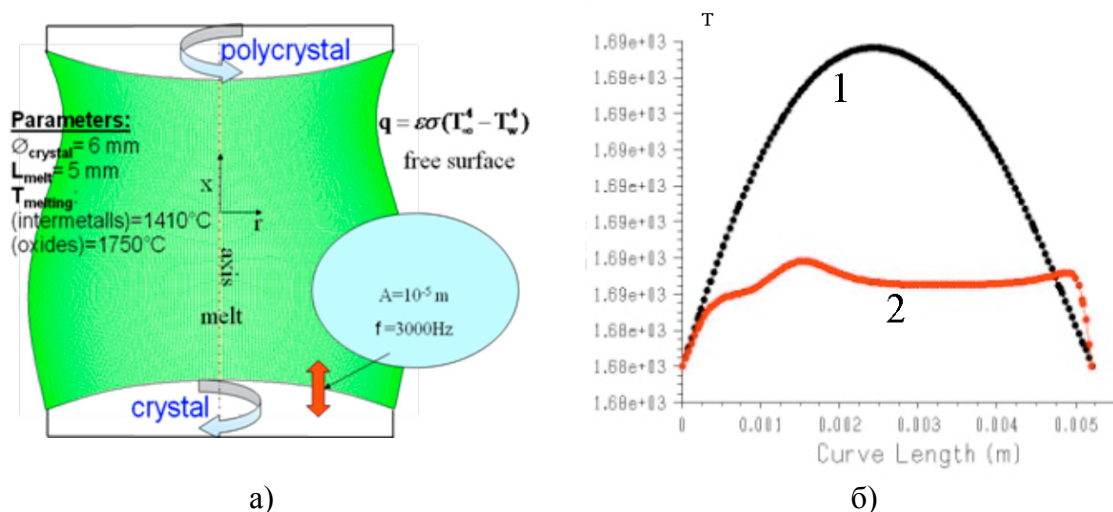


Рис. 10. . Метод зонной плавки кремния ( $A=0.01\text{мм}$ ,  $f= 3000\text{Hz}$ )  
 а) – схема модели. б) – вертикальные профили температуры ( $\tau=0.5\text{ R}$ )  
 (1 - без вибраций, 2 - с вибрациями)

Результаты расчетов показали, что для зонной плавки для малых чисел Прандтля так же, как и для методов Бриджмена и Чохральского, вибрации существенно уменьшают толщину температурного пограничного слоя, т.е. увеличивают градиент температуры около кристалла. Для больших значений чисел Прандтля данный эффект уже был обнаружен ранее. Данные расчеты подтвердили предположения автора, высказанные в [15-19] о том, что эффект уменьшения толщины пограничных слоев имеет место и для малых чисел Прандтля, например, для  $Pr=0.01$ , но при более больших вибрационных числах Рейнольдса (частотах или амплитудах).

## **Выводы**

Представленные расчеты показывают существенное влияние вибрационного числа Рейнольдса на распределение температуры в расплаве. Численно показано, что вибрации могут уменьшать ширину температурного пограничного слоя и, как следствие, увеличивать температурный градиент на фронте кристаллизации. Это может интенсифицировать тепло-массообмен около фронта кристаллизации, а также скорость роста кристаллов. Эти выводы справедливы применительно к выращиванию монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны и могут быть использованы на практике. Численные расчеты помогут точнее определить оптимальные режимы роста кристаллов.

## **Благодарность**

Автор благодарен К.А. Иванову за помощь в проведении расчетов.

## **Список литературы**

1. Faraday M. On a Peculiar Class of Acoustical Figures. Phil. Trans. Roy. Soc. 1831, 121, 299-340.
2. Rayleigh. On the Circulation of Air observed in Kundt's Tubes, and on some Allied Acoustical Problems, Transactions of the Royal Society of London, 1883. 175 (1), 1-21.
3. Gershuni Z. and Lubimov D.V.. Thermal vibrational convection. John Willey&Sons Ltd., G 1998, 357p.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.. Устойчивость конвективных течений. Москва, «Наука», 1989, 320с.
5. Иванова А.А. Устойчивость свободно-конвективного течения в горизонтальном цилиндрическом слое в вибрационном поле. Конвективные течения. Пермь, 1989, с.37-44.
6. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. №5. С. 51-55.
7. Lan C.W. Effects of axial vibration on vertical zone-melting processing // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 1987-1997.
8. Витовский Б.В. Повышение скорости роста кристалла подачей на него колебаний звуковой частоты. // Труды ИКАН СССР. 1955. выпуск 11. С. 1.
9. Козлов В.Г. О вибрационной тепловой конвекции в полости совершающей высокочастотные вращательные качания // Изв. АН СССР. № 3. С. 138-144.
10. Zharikov E.V., Prihod'ko L.V., Storozhev N.R. Vibrational convection during the growth of crystals // Growth of Crystals. 1993. V. 19. P. 71-81.
11. Аветисов И.Х., Жариков Е.В., Зиновьев А.Ю., Садовский А.П. Новый метод управления тепломассопереносом в расплаве при выращивании кристаллов по Чохральскому // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 428. № 2. С. 177-179.
12. Avetissov I., Sadovskiy A., Belov S., Khomyakov A., Rekunov K., Kostikov V., Sukhanova E. Thermodynamic features of axial vibrational control technique for crystal growth from the melt // CrystEngComm 2013. V. 15. P. 2213-2219.
13. Zyuzgin A.V., Putin G.F., and Kharisov A.F. Ground Modeling of Thermovibrational Convection in Real Weightlessness // Fluid Dynamics, 2007, Vol. 42, No. 3, pp. 354-361
14. Федюшкин А.И. Моделирование гидродинамики и теплообмена при выращивании кристаллов с учетом прикристаллизационной (mushy) зоны без и с вибрационным воздействием на расплав. Обзор. - Препринт ИПМех РАН, № 1074, Москва, 2014, 35с.
15. Fedyushkin A. The gravitation, rotation and vibration - controlling factors of the convection and heat – mass transfer. Proc. of 4th ICCHMT, Paris, FRANCE, 2005
16. Fedyushkin A., Bourago N., Polezhaev V. and Zharikov E. The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth // J. Crystal Growth. 2005. Vol. 275. P. e1557-e1563.

17. Федюшкин А.И., Иванов К.А. Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов. - Препринт ИП-Мех РАН. № 1085. Москва. 2014. 107 с.
18. Федюшкин А.И. Конвекция, вращение и вибрация - управляющие факторы при выращивании монокристаллов. VIII съезд по теоретической и прикладной механике. Екатеринбург. УрО РАН. 2001. стр. 576.
19. Федюшкин А.И. Гидродинамика и тепломассоперенос при вибрационных воздействиях на расплав. Сборник трудов XIX Международной конференции « Математические методы в технике и технологиях», Т.3, Воронеж, 2006, стр. 29-34.
20. Bourago N.G., Fedyushkin A.I., Polezhaev V.I. Dopant distribution in crystals growth by the submerged heater method under steady and oscillatory rotation. Adv. Space Res. 1999. Vol.24. No 10. pp. 1245-1250.
21. Bourago N.G., Fedyushkin A.I. Impurity distribution in submerged heater method with and without rotation Proceedings of the Int.Conf. on Computational Heat and Mass Transfer. April 26-29. 1999, N.Cyprus, Turkey, pp. 207-215.
22. Федюшкин А.И., Бураго Н.Г., Полежаев В.И., Жариков Е.В. "Влияние вибраций на гидродинамику и тепло-массообмен в расплаве при выращивании кристаллов методом Бриджмена". Сборник трудов VII Российского симпозиума "Механика невесомости. Итоги и перспективы фундаментальных исследований гравитационно-чувствительных систем", Москва, ИПМ РАН, 2001, стр.365-392.
23. Полежаев В.И., Белло М.С., Везуб Н.А., Дубовик К.Г., Лебедев А.П., Никитин С.А., Павловский Д.С., Федюшкин А.И. Конвективные процессы в невесомости. - М.: Наука, 1991, 240 с.
24. Пшеничников А.Ф., Пинягин А.Ю., Полежаев В.И., Федюшкин А.И., Шайдуров Г.Ф. Термоконцентрационная конвекция в прямоугольной области при боковых потоках тепла и массы. Препринт, УНЦ АН СССР. Свердловск. 1985. 54 с.
25. Федюшкин А.И. Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА». Препринт ИПМ АН СССР. № 471. Москва. 1990. 32 с.
26. Bourago N.G. Numerical methods for non-linear processes in elastic plastic media. In: "Lectures of FEM-94 Seminar", Chalmers Univ. Techn., Struct.Mech.Dept., Publ:1994.1, Gothenborg, pp. 1-15.
27. Manual of Ansys-FLUENT 17. User's Guides, ANSYS-Fluent.Inc., 2016.

## **НЕЛИНЕЙНОЕ САМОСОГЛАСОВАННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМОЙ СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЫ**

**Филатов Л.В.<sup>1</sup>, Мельников В.Ф.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 603950, г.Нижний Новгород, ул.Ильинская, д.65, e-mail: filatovlv@yandex.ru

<sup>2</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140, г.Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, д.65, корп.1.

В работе рассматривается резонансное взаимодействие пучка быстрых электронов, инжектированных в вспышечную корональную петлю, с БМЗ волнами свистового диапазона, их влияние на распределение и перераспределение электронов в процессе их удержания, а так же сравнение с влиянием кулоновского взаимодействия с частицами плазмы короны. Для одномерной модели петли с заданным распределением магнитного поля и плотности плазмы, исследуется кинетика электронов в каждой точке петли в диффузионном приближении, для этого проводится численное совместное решение нестационарного уравнения Фоккера-Планка и уравнения для нелинейного затухания Ландау. Исследовано влияние параметров плазмы и БМЗ волн в ней на торможение электронов, их локализацию вдоль петли, на время удержания в магнитном поле петли.

*Ключевые слова:* Астрофизическая плазма, солнечные вспышки, открытые магнитные ловушки, кулоновское и резонансное взаимодействие частица-волна, численное моделирование.

Направленные пучки быстрых электронов с энергиями, намного превышающими тепловые электроны, используются в различных физико-технических устройствах. В астрофизике пучки таких энергичных электронов наблюдаются при исследованиях звезд и галактик[1]. В солнечной физике потоки энергичных электронов возникают и ускоряются при пересоединении линий магнитного поля в короне во время магнитной активности Солнца, при этом они инжектируются в нижние слои короны и хромосферу вдоль линий поля[2]. Взаимодействуя с магнитным полем и фоновой тепловой плазмой короны электроны пучка генерируют излучение в широком частотном диапазоне от микроволнового радиоизлучения до жесткого рентгеновского. Нетепловое излучение активного Солнца во всех диапазонах наблюдается и исследуется наземными и космическими радиогелиографами с высоким пространственным и временным разрешением[3]. Инжектированные быстрые электроны двигаются вдоль поля и в силу его топологии могут дополнительно ускоряться, находится некоторое время в замкнутой магнитной ловушке и взаимодействуя с плазмой короны высыпаться через конус потерь ловушки в фотосферу. Наблюдение излучения при всех этих процессах является инструментом исследования активности Солнца, причин и последствий этого явления, поэтому наблюдение и моделирование всех этих процессов является весьма актуальной задачей.

В настоящей работе рассматривается пучок быстрых электронов в магнитном поле как вспышечная петля заданной геометрии в заданном по высоте распределении магнитного поля и концентрации фоновой полностью ионизированной плазмы короны. Эти распределения известны из экспериментальных и модельных исследований[2], согласно которым магнитное поле образует ловушку в силу его нарастания к поверхности Солнца, в которой электроны совершают гировращение вокруг линии поля и баунс-колебания, многократно отражаясь от магнитных пробок у поверхности[4]. Быстрые электроны не могут быть описаны магнитогидродинамической моделью в силу малой концентрации, поэтому рассматривается их кинетическая модель. Целью работы является исследование нестационарного распределения инжектированных электронов в петле пучке по энергии  $E$ , местоположению  $s$ , pitch-угловой ориентации его скорости по отношению к магнитному полю  $\mu = \cos \alpha$  и времени  $t$ . Для быстрых электронов строится и анализируется функция плотности их распределения  $f(E, s, \mu, t)$  через которую исследуются процессы ускорения механизмами Ферми и бетатронным, времена удержания электронов в ловушке, их кулоновское взаимодействие с частица-

ми фоновой плазмы и волновыми полями в ней. Предполагая адиабатичность ловушки, обусловленную медленными процессами изменения ее параметров по сравнению с гирочастотой и баунсчастотой, а так же малой частотой столкновений частицами фоновой плазмы (замагниченность плазмы). Пренебрегаем так же влиянием кривизны петли на поперечный дрейф электронов и влиянием излучения электронов на их динамику. Учитывая кулоновское взаимодействие с частицам плазмы и резонансное взаимодействие с волнами в плазме дрейфовая модель кинетики электронов в диффузионном приближении описывается нестационарным уравнением Фоккера-Планка с переменными коэффициентами и заданной правой частью функции источника[5]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\dot{s}f) + \frac{\partial}{\partial \mu}(\dot{\mu}f) + \frac{\partial}{\partial E}(\dot{E}f) = \frac{\partial}{\partial E}(A_E f) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( D_{\mu\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + F(t, s, \mu, E)$$

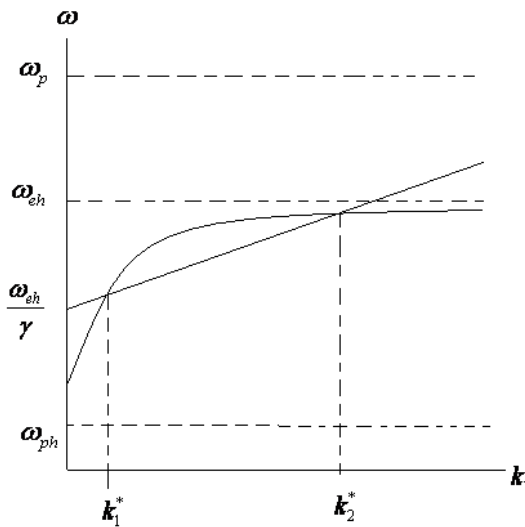
с коэффициентами переноса:  $\dot{s} = v_{\parallel} = c\beta\mu$ , где  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

$$\dot{\mu} = -c\beta \frac{1-\mu^2}{2} \frac{B_s}{B} - \mu \cdot \frac{1-\mu^2}{2} \frac{B_t}{B} - 2\mu \cdot (1-\mu^2) \frac{\dot{l}}{l}, \quad \dot{E} = \dot{\gamma} = \gamma\beta^2 \frac{1-\mu^2}{2} \frac{B_t}{B} - \gamma\beta^2 \mu^2 \frac{\dot{l}}{l},$$

кулоновского трения  $A_E = \frac{c}{\lambda_0} \frac{1}{\beta}$ ,  $\lambda_0 = \frac{1}{4\pi n_0 \cdot n \cdot \ln \Lambda}$ , диффузии  $D_{\mu\mu} = D_{\mu\mu}^C + D_{\mu\mu}^V$ , куло-

новской  $D_{\mu\mu}^C = \frac{c}{\lambda_0 \beta^3 \gamma^2} (1-\mu^2)$  и волновой  $D_{\mu\mu}^V = \frac{\pi \omega_{eh}}{2B} (1-\mu^2) \sum_r k_r^* W(k_r^*)$ ,

где  $W(t, s, k)$  средняя плотность волновой энергии.



Резонансное взаимодействие электрона с волной определяются из дисперсионной характеристики  $D(\omega, k)$  соответствующей волны и условий Доплера-Черенкова[1]:

$$D(\omega, k_r) = 0, \quad \omega - \mu v = \frac{\omega_{eh}}{\gamma}$$

Среди плазменных волн в короне солнца[2] наиболее интенсивны продольные быстрые магнитозвуковые волны, которые в частотном диапазоне  $\omega_{ph} < \omega < \omega_{eh}$  называются вистлерами (геликонами, свистами). Дисперсионное уравнение для вистлеров принято следующим:

$$\frac{ck}{\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_{eh})}$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n / m_e}$  плазменная частота,  $\omega_{eh}$ ,  $\omega_{ph}$  гирочастоты электронов и протонов.

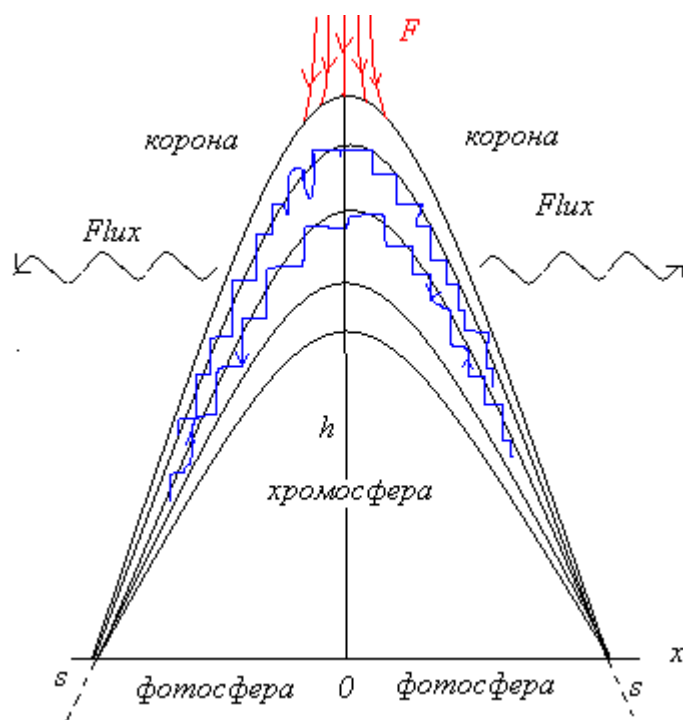
Нелинейность поведения электронов в петле связана с самосогласованностью взаимодействия волна-частица, при котором быстрые электроны не только рассеиваются в поле волны ускоряясь или тормозясь при этом, но и сами влияют на плотность энергии волны. Волна в плазме испытывает нелинейное затухание Ландау, при котором амплитуда волны затухает не только за счет перераспределения электронов по энергии, но и их влияния на поле волны. В квазилинейном приближении, когда взаимодействием мод в волновом пакете можно пренебречь, уравнение для интенсивности волны, взаимодействующей с частицей, будет следующим[4]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\partial \omega}{\partial s} \cdot \frac{\partial W}{\partial k} = \frac{\pi \omega^3}{n \cdot k^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial E},$$

где  $\omega(s, k)$  - ветвь дисперсионной характеристики вистлеровской волны.

При исследовании кинетики пучка быстрых электронов во вспышечной петле при согласованном взаимодействии с плазмой короны, в работе использовался численный конечно-разностный метод решения начально-краевой задачи для приведенных выше уравнений [6].

Рассматривалась симметричная вспышечная петля со стационарным распределением магнитного поля и плотности фоновой плазмы по ее длине  $l$ , которая так же оставалась постоянной. При этом ускорительные механизмы в петле-ловушке отсутствуют. Функции для магнитного поля в петле  $B(s)$ , концентрации изотропной плазмы  $n(s)$  и нестационарной инжекции быстрых электронов  $F(t, s, \mu, E)$  считаются заданными с известными константами



$$h(x) = h_0 \left( 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right),$$

$$B(s) = B_0 + (B_1 - B_0) \cdot \left( \frac{s}{l} \right)^2,$$

$$K_B = \frac{B_1}{B_0} = 3$$

$$n(s) = n_0 + (n_1 - n_0) \cdot \left( \frac{s}{l} \right)^4,$$

$$K_n = \frac{n_1}{n_0} = 1000$$

$$F(t, s, \mu, E) = F_0 \left( \frac{E}{E_0} \right)^{-\delta} e^{-\left( \frac{s-s_0}{s_1} \right)^2} e^{-\left( \frac{\mu-\mu_0}{\mu_1} \right)^2} e^{-\left( \frac{t-t_0}{t_1} \right)^2}$$

$$-l \leq s \leq l, \quad l = 3 \cdot 10^9 \text{ ci},$$

$$0 \leq t \leq 30 \text{ ñäê}.$$

$$E_0 \leq E \leq 10 \text{ ÿÁ}, \quad E_0 = 30 \text{ éÿÁ}, \quad \delta = 3.4$$

Исследование времени удержания быстрых электронов, их энергетического спектра, пространственно временного распределения в петле-ловушке проводилось в зависимости от параметров взаимодействия с частицами и полями фоновой плазмы. На рисунках 1-3 приводятся результаты расчетов для случаев без столкновительного взаимодействия с частицами и волнами, кулоновского взаимодействия только с частицами плазмы, взаимодействия с вистлеровскими волнами в линейном и нелинейном приближении и наконец для взаимодействия с частицами и волнами.

Как показывают верхние левые панели на рисунках, при отсутствии взаимодействия быстрых электронов с фоновой плазмой короны, их энергетический спектр повторяет спектр инжектированных электронов и остается степенным за все время вспышки. Электроны с большими питч-углами, сосредотачиваются в центре петли ("LT":  $s \leq 1 \cdot 10^9 \text{ ci}$ ) и удерживаются в петле неограниченно долго. В срединной части петли ("NG":  $1 \cdot 10^9 \leq s \leq 2 \cdot 10^9 \text{ ci}$ ) и в ее основаниях петли ("FP":  $s \geq 2 \cdot 10^9 \text{ ci}$ ) идет процесс падения концентрации электронов из-за их высыпания в конус потерь в соответствии с принятой моделью питч-угловой изотропии. Таким образом идет процесс анизотропизации энергичных электронов и заселения ими вершины петли.

Нижние левые панели на рисунках 1-3 демонстрируют влияние кулоновского взаимодействия с частицами фоновой плазмы короны. Высоко энергичные частицы практически не взаимодействуют с плазмой, не рассеиваются путем питч-угловой диффузии, а значит не высыпаются из ловушки через конус потерь. Низкоэнергичные электроны, с энергиями ни-

же некоторого критического значения, за висящего от плотности плазмы, тормозятся и высыпаются в фотосферу через конус потерь.

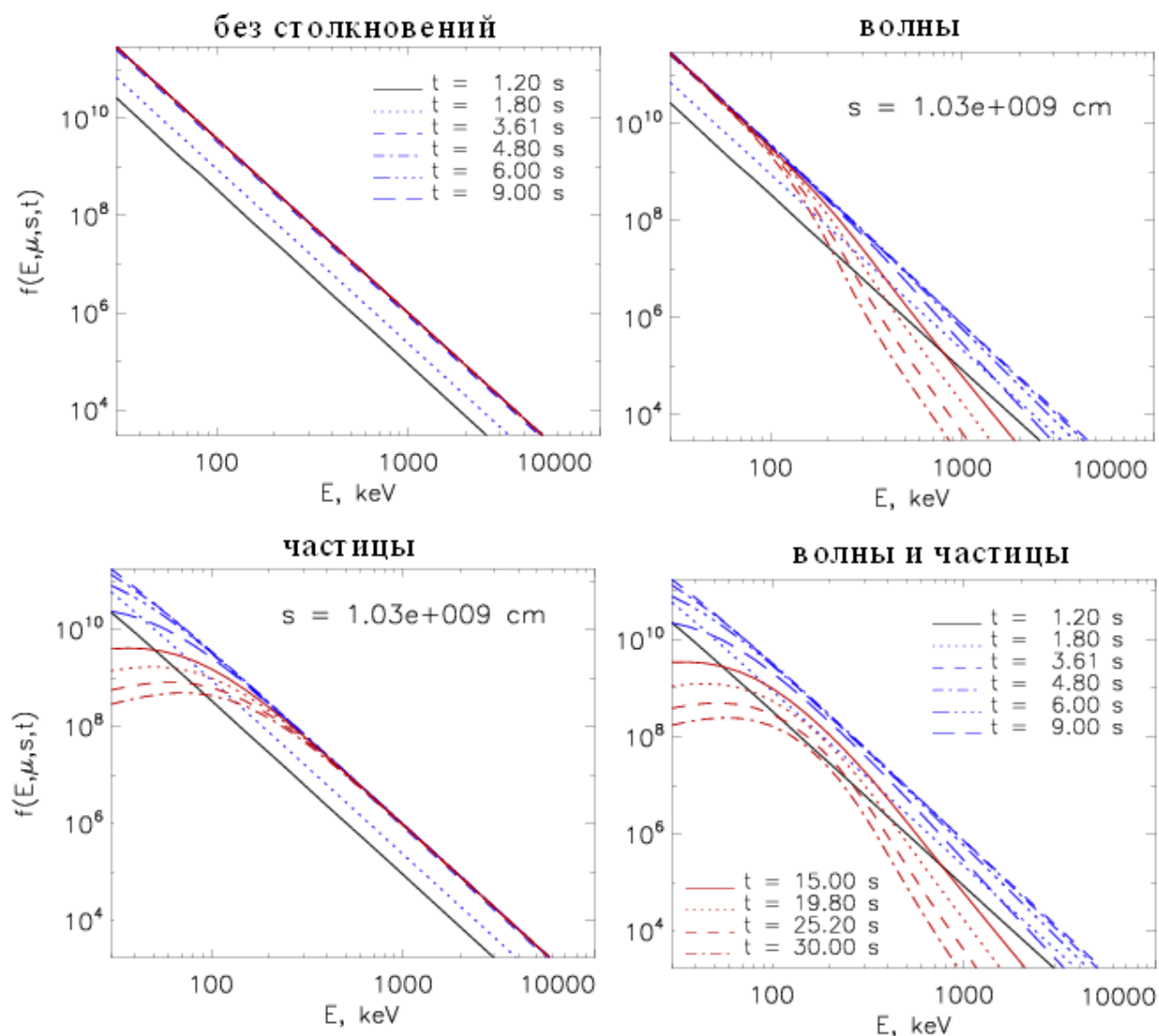


Рис. 1. Распределение быстрых электронов по энергиям в различные моменты времени в средней точке петли.

Взаимодействие электронов с вистлерами в плазме показано на верхних правых панелях тех же рисунков. Картина здесь в некотором смысле обратная к кулоновскому взаимодействию, низкоэнергичные электроны не взаимодействуют с вистлерами, а высокоэнергичные активно тормозятся, рассеиваются по питч-углам и высыпаются в конус потерь. Как видим ловушка гаснет быстрее, чем при кулоновском рассеянии. Этот процесс сильно зависит от интенсивности вистлера и степени его затухания Ландау, в том числе и нелинейного, а также от количества потенциальных ям вистлера в петле. Расчеты показывают, что при согласованности кинетики электронов и вистлеровских волн, его затухание происходит с большим декрементом, то есть удержание электронов в ловушке будет иметь место и для высоких энергий.

На нижних правых панелях рисунков представлены распределения быстрых электронов при взаимодействиях как кулоновском с частицами плазмы, так и резонансом с вистлерами. Здесь первоочередным является параметр соотношения интенсивностей рассеяния (питч-угловой диффузии)



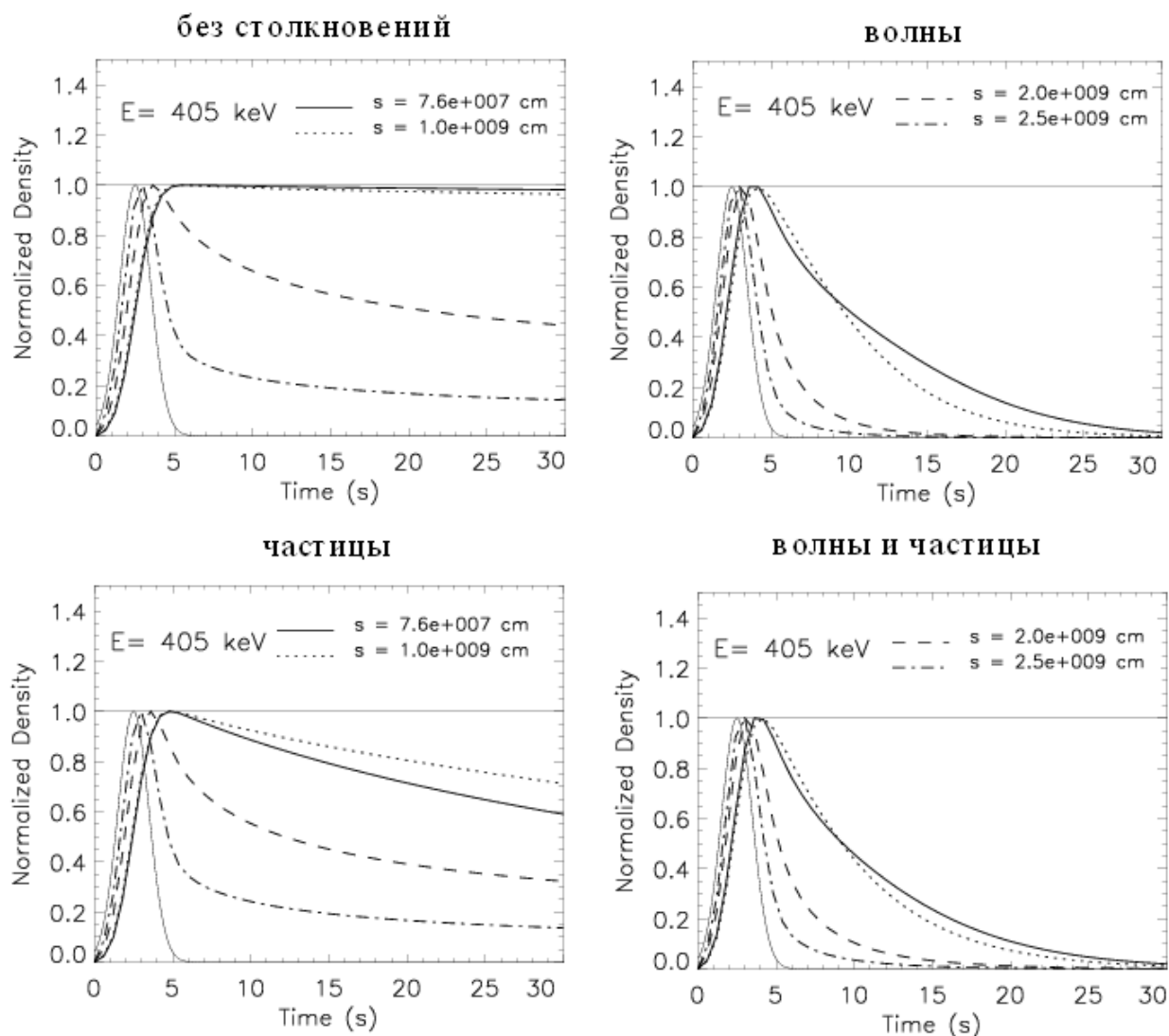


Рис. 2. Распределение быстрых электронов с энергией 405 кэВ по времени в различных точках петли.

Обсуждение результатов и выводы. Исследование распределения пучка быстрых электронов в петле солнечной вспышки показало, что использование простой пространственно – одномерной диффузионной модели, рассогласованной с магнитным полем и характеристиками плазмы короны позволяет достаточно адекватно описать процессы происходящие во вспышке. Это подтверждают исследования и наблюдения излучения из вспышечных областей солнца. Эффекты в поведении быстрых электронов пучка, такие как перераспределения по петле, анизотропизация, изменение крутизны энергетических спектров хорошо интерпретируют наблюдаемые интенсивности, спектральный состав, длительность и задержки излучения из разных частей петли. Эффекты связанные с взаимодействием излучающих электронов с волнами в плазме короны (встлерами), такие как торможение и рассеяние высокоэнергичных электронов и противоположный эффект затухания Ландау (линейный и нелинейный) так же может быть использован для диагностики плазмы и магнитного поля короны. Однако для этого необходимо в многообразии солнечных вспышек подобрать вспышки с параметрами, где эти эффекты значимы на фоне других наблюдательных эффектов.



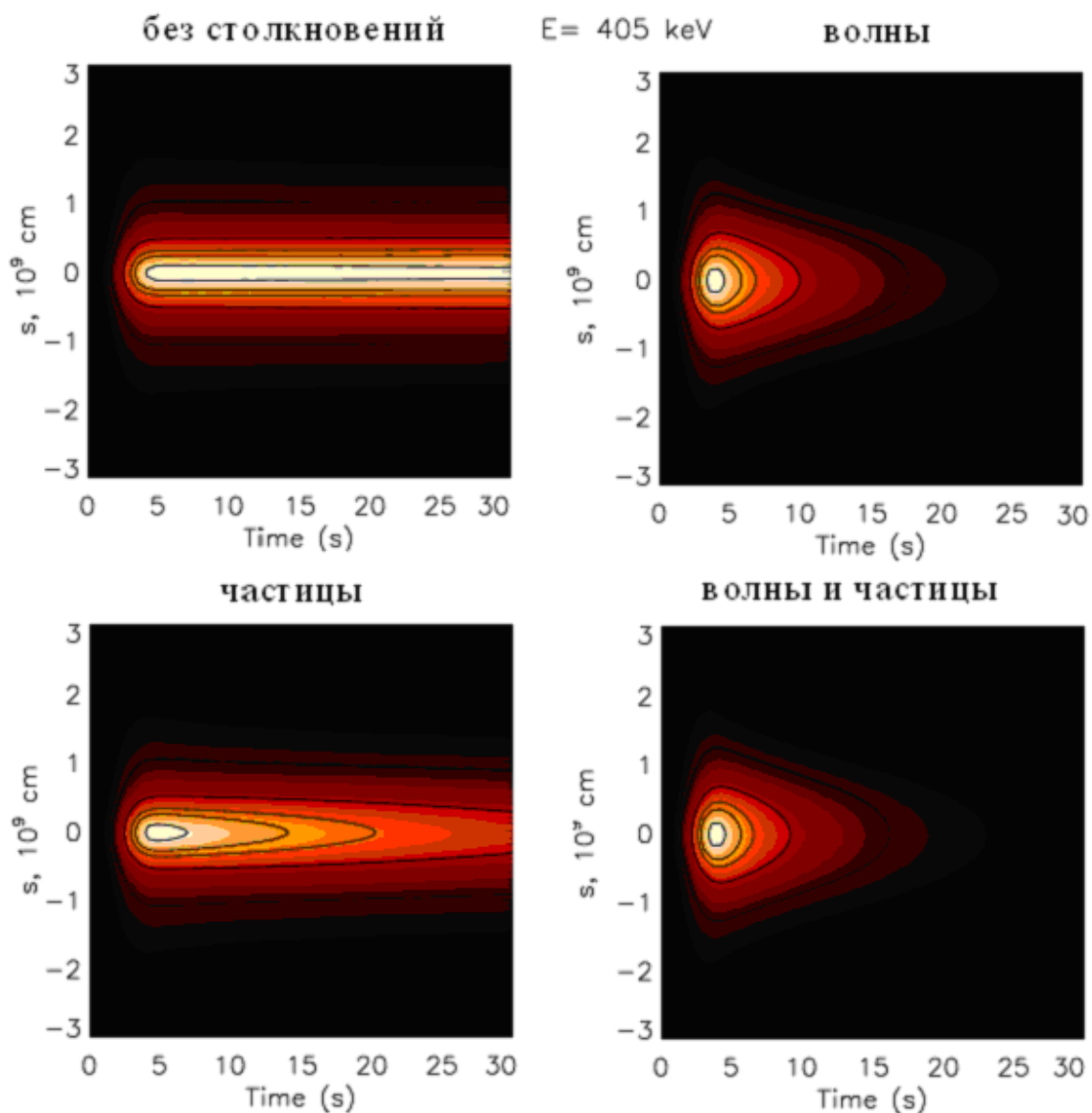


Рис. 3. Распределение электронов с энергией 405 кэВ в пространственно-временной области вспышечной петли

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 14-02-00924

### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б., Сивухин Д.В. Вопросы теории плазмы, вып.4, М: Атомиздат, 1964.
2. M. J. Aschwanden, *Particle Acceleration and Kinematics in Solar Flares* (Kluwer Academ. Publ., Dordrecht, 2002).
3. Reznikova V. E., Melnikov V. F., Shibasaki K., Gorbikov S. P., Pyatakov N. P., Myagkova I. and Ji H. 2002 august 24 limb flare loop: dynamics of microwave brightness distribution//*Astrophys.J.* V.697. №1. P.735-746. 2009.
4. Bespalov, P. A and Trakhtengerts, V. Y.: 1986, *Rev. Plasma Phys.* **10**, 155.
5. Hamilton R.J., Petrosian V. // *Astrophys.J.* V.398. №10. P.350-358. 1992.
6. Filatov L.V., Melnikov V.F., Gorbikov S.P. *Ge&Ae*, 2013, V.53, №8, P.1007-1012

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

**А.А. Хлыбов**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,  
Институт физико-химических технологий и материаловедения.  
603003 Нижний Новгород, ул. Минина, 24, e-mail: [hlybov\\_52@mail.ru](mailto:hlybov_52@mail.ru)

В статье приводятся результаты экспериментальных и теоретических исследований влияния характеристик магнито-реологической жидкости на акустические свойства. Описана экспериментальная установка для измерения скорости (времени распространения), затухания продольных, поверхностных волн, волн Лэмба. Приводятся погрешности измерения.

Ключевые слова: магнито-реологические жидкости, скорость, затухание, продольные, поверхностные волны, волны Лэмба.

Магнито-реологические жидкости (МРЖ) характеризуются сочетанием "взаимоисключающих" свойств: хорошей текучестью и высокой намагниченностью и соответственно управляемостью.

Важной особенностью магнитных коллоидов, в отличие от большинства известных магнитных систем, является свобода поступательного перемещения ферромагнитных частиц, которая предопределяет возможность структурных превращений - изменение характера магнитного упорядочения и пространственного расположения частиц в жидкости. В реальных условиях структурные превращения существенно зависят от гранулометрического состава, внешних условий - величины и продолжительности воздействия магнитного поля, динамической деформации объема жидкости и температуры. Эти условия необходимо учитывать при оценке работоспособности устройств, использующих МРЖ. Поскольку от состояния этих жидкостей зависит надежная работа машин и механизмов и, в первую очередь, обеспечение безопасной жизнедеятельности людей, их параметры подлежат контролю. Поэтому прогнозирование свойств МРЖ является актуальным исследованием. В частности интерес представляет возможность оценки как поведения жидкости в условиях сил тяжести, взаимодействия между частицами, так и влияния длительного воздействия магнитного поля на процессы перестройки структуры МРЖ. В исследованиях применяют широкий комплекс методов и средств контроля вязкости и плотности таких материалов. К ним относятся различные виды вискозиметров (капиллярные, ротационные и вибрационные) и плотномеров (поплавковые, массовые, гидростатические и вибрационные, радиационные и ультразвуковые).

К числу наиболее эффективных методов экспериментального исследования структурных перестроек в МРЖ относятся методы ультразвуки. Физической основой применения ультразвуковых методов для измерения характеристик жидких сред является функциональная зависимость параметров ультразвуковых волн, распространяющиеся в жидкостях (скорость распространения, коэффициент затухания, продольный и сдвиговый акустические импедансы) от свойств жидкости: вязкость, плотность. [1]

В настоящее время применяются в основном измерения скорости звука. Технические сложности измерений сдвиговой вязкости и плотности с помощью существующих ультразвуковых методов вызваны очень малыми численными значениями сдвиговых и продольных импедансов жидкости по сравнению с твердыми телами, что приводит к большим погрешностям измерений.

Для решения проблемы контроля МРЖ в качестве измеряемых акустических характеристик использовались время распространения импульсов (задержка) и затухание объемных: продольных волн [4, 5, 6], волн Рэлея и Лэмба. Для акустического зондирования эволюции структуры МРЖ был использован измерительно-вычислительный комплекс «АСТРОН». [2] ИВК «АСТРОН» реализует

акустический метод отраженного излучения (эхо-метод) и предназначен для генерации зондирующих сигналов, регистрации и обработки параметров отраженных и прошедших через исследуемую среду упругих волн. Вся обработка информации, поступающей с датчиков, проводится автоматически в процессорном блоке. Система позволяет хранить всю исходную информацию (может быть создана база данных), необходимую для использования в практических задачах контроля. ИВК нашел достаточно широкое применение для решения задач в физике твердого тела.

Погрешность измерения времени распространения отраженных импульсов при работе с преобразователем на резонансной частоте не более  $1 \times 10^{-9}$  с и погрешность измерения коэффициента затухания не более  $\pm 4\%$ . ИВК позволяет провести любое количество измерений, после чего определяется среднее значение в точке измерения. Частотный диапазон: до 30 МГц. Можно работать как с одним датчиком, работающим на излучение и прием, так и с двумя: излучение и прием осуществляется разными датчиками.

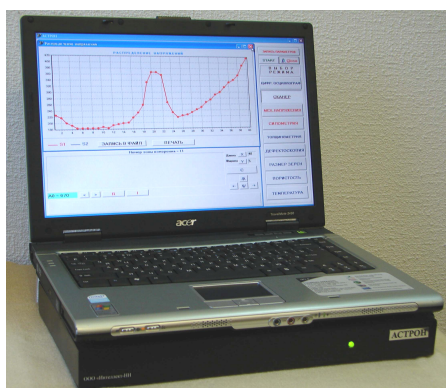


Рис. 1. ИВК «Астрон»

Учитывая то, что температура оказывает существенное влияние на точность результатов контроля, в измерительную часть прибора была введена возможность аппаратно учитывать температуру материала образца. При проведении измерений с использованием поверхностной волны отсчет положения поверхностной волны осуществляется относительно термоимпульса.

Общий вид осциллограммы с термоимпульсом и импульсом поверхностной волны (волна Лэмба) представлен на рисунке 2. На этом рисунке  $t_1$  соответствует задержке термоимпульса,  $t_2$  задержка импульса поверхностной волны,  $dts(1)$  задержка импульса ПАВ относительно термоимпульса, единица измерений, нс. Такая схема измерений позволила автоматически учитывать температурные изменения после стабилизации температур у датчика и зоны контроля.

При работе в импульсном режиме с продольными волнами обычно за начало отсчета времени принимается первый отраженный импульс. Это позволяет исключить эффекты, связанные с видом импульса возбуждения, с акустическим контактом, с характеристиками электронной аппаратуры, датчиков и другие эффекты, понижающие точность измерений, так как влияние этих эффектов на все переотраженные импульсы одинаковое. В качестве точки отсчета используются синфазные точки импульсов. В качестве информативной точки используется пересечение нулевого уровня после первого максимума. Для повышения точности количество точек пересечения может быть увеличено.

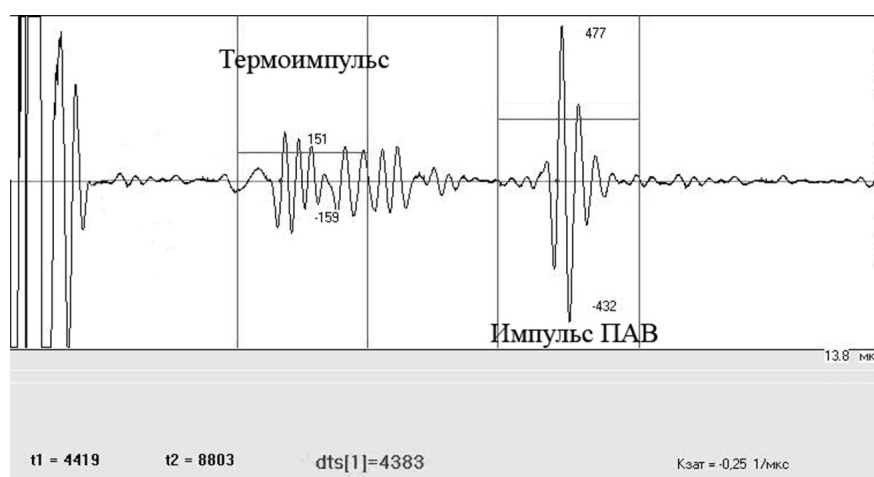


Рис. 2. Осциллограмма импульсов при работе с поверхностной волной

Точность измерения (Рис. 3) времени распространения продольных (задержка) в исследуемых МРЖ импульсным методом достигает 1 нс. При временных измерениях в качестве опорной измерительной точки взято пересечение с нулем первого максимума упругого импульса. В следующем преотраженном импульсе такое же пересечение с нулем служит точкой измерения. Разность времен между этими двумя нулями является задержкой (временем распространения) упругих волн. Обычно в качестве опорного импульса используется первый отраженный.

Точность измерений может быть повышена, если взять несколько пересечений с нулевым уровнем. Для поверхностных волн в качестве опорного импульса берется импульс продольной волны, служащий для учета температуры в момент измерений.

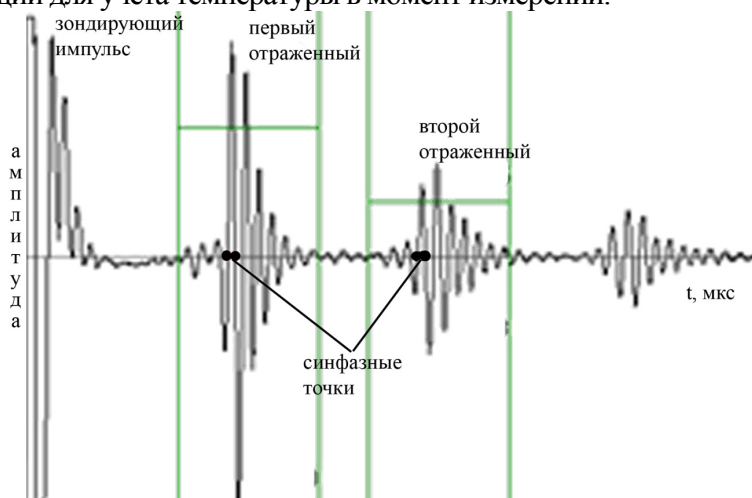


Рис. 3.. Амплитудно-временная диаграмма исследуемых импульсов продольных волн

Погрешность измерения задержки для образцов толщиной  $\sim 10^{-2}$  м равна 0,005 %.

Соответственно ошибка измерения скорости продольной волны равна 0,25 %. Основной вклад в ошибку вносит погрешность измерения толщины образца. Для измерения толщины в большинстве случаев использовался электронный микрометр, погрешность измерения которого 0,001 мм. Такая точность измерения скорости вполне удовлетворяет требованиям решаемых в данной работе задач.

В работе использовались пьезокерамические преобразователи, контактирующие непосредственно с контролируемым образцом (через стенку акустической кюветы). Акустический контакт между датчиком продольной волны и контролируемой средой осуществляется через слой вязкой жидкости. В одной точке проводилось не менее 5 измерений. Эти данные усреднялись, и определялось среднее значение задержки для каждого из типов используемых упругих волн.

Для экспериментов с продольными волнами использовалась кювета. Корпус кюветы выполнен в виде квадрата со стороной длиной 15 мм, и высотой 100 мм. В качестве материала использовалась немагнитная латунь. Одна из сторон была прозрачная (из стекла) – для визуального наблюдения поведения жидкости. На стороны кюветы с шагом 10 мм наклеивались пьезокерамические пластины (излучатель и приемник) размещаются соосно. Собственная частота пьезопластин - 5 МГц. Магнитная жидкость заполняет всю кювету. Такая установка позволяет проводить исследования в течении длительного времени, не искажая при этом распределение магнитных частиц в МРЖ. При выбранной пространственной ориентации кюветы с образцом МРЖ звуковые импульсы распространялись по горизонтали. Для падающей продольной волны используем уравнение:

$$\sigma_{ik} = \lambda_G \frac{\partial u_k^W}{\partial x_k} \delta_{ik} + \mu_G \left( \frac{\partial u_i^W}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^W}{\partial x_i} \right)$$

Решая уравнение, получаем, что коэффициент отражения продольной волны зависит не только от волновых сопротивлений граничащих сред, но и от вязкости жидкости.

Экспериментальные исследования особенностей прохождения ультразвуковых волн через магнитную жидкость показали, что коэффициент поглощения ультразвуковых волн является наиболее чувствительным параметром к изменению состава дисперсной системы и структуры, образуемой магнитными частицами. Ошибка, допускаемая при этом, составляет 0.1...0.3%.

Исследовано изменение параметров поверхностной волны, симметричной и антисимметричной волн Лэмба и ГПНВ, распространяющихся либо в твердом теле вдоль границы с вязкой жидкостью, либо в пластине, погруженной в вязкую жидкость.

Дисперсионное уравнение для поверхностных волн, распространяющихся в твердом теле вдоль поверхности, контактирующей с жидкостью:

$$4k_R^2 q s - (k_R^2 + s^2)^2 = -i \frac{\rho^L}{\rho^W} \frac{q(k_S^W)^4}{\sqrt{(k_i^L)^2 - k_R^2}}$$

Волновое число такой волны становится комплексным числом, что свидетельствует о затухании волны по мере распространения. Физической причиной затухания волны является дополнительное излучение упругой энергии в жидкость.

В экспериментах, для измерения параметров жидкости, анализировалось влияние жидкости на параметры волны Лэмба, возбуждаемой в пластине, погруженной в исследуемую жидкость. Известно, что волны Лэмба, симметричные и антисимметричные, при своем распространении также создают на поверхности пластины нормальные и тангенциальные смещения. Поэтому подобно поверхностной волне наличие жидкости изменяет по сравнению с воздухом граничные условия и этим изменяет условия распространения и параметры волн Лэмба. Более того, в тонких пластинах, нулевая мода симметричной волны Лэмба практически не обладает частотной дисперсией, и ее скорость распространения значительно превышает скорость сдвиговой волны. Антисимметричная волна Лэмба, обладает частотной дисперсией. Однако в этой области параметров скорость распространения антисимметричной волны может стать близкой к скорости распространения продольной волны в жидкости. Как и в случае поверхностных волн, влияние жидкости, в первом приближении увеличивается коэффициент затухания волны. Изменение скорости волны вследствие влияния жидкости является эффектом второго порядка.

Для возбуждения поверхностных волн и волн Лэмба использовался наклонный пьезоэлектрический преобразователь на частоте 5 МГц. Угол падения в призме соответствовал второму критическому углу. Правильность угла призмы контролировалась обеспечением максимальной амплитуды принимаемого сигнала по сравнению с другими углами призмы. Для этого были проведены эксперименты с несколькими призмами из оргстекла, в которых угол падения варьировался вокруг критического угла.

**Выводы:**

полученные экспериментальные данные, свидетельствуют

1. о наличии анизотропии скорости ультразвука в МРЖ, при помещении в магнитное поле (при коллинеарном и ортогональном измерении скорость звука в продольном магнитном поле на 3 м/с больше скорости звука в поперечном направлении).
2. разработан экспериментальный комплекс (система двух установок) для акустического зондирования структуры МЖ на основе импульсной методики
3. Предложенная экспериментальная установка по предложенным параметрам упругих волн может проводить измерения: вязкости, плотности МРЖ
4. При проведении соответствующих тарировок предложенная установка может быть использована в качестве экспресс-метода для оценки характеристик МРЖ.~

Работа выполнялась по проекту № 15-19-10026 «Обеспечение вибробезопасности окружающей среды посредством электромагнитного управления вибрацией машин и создания новых магнитореологических материалов»

**Список литературы**

1. Шутилов, В.А. Основы физики ультразвука [Текст] / В.А. Шутилов // Л.: Изд-во ЛГУ. 1980. 280с.
2. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Отв. редактор академик РАН Ф.М. Митенков. М.: Наука. 2009. 280 с.



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛА С ПАРАМИ ВАЛОВ

Ш.Р.Хуррамов<sup>1</sup>, А.Абдукаримов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский архитектурно-строительный институт,  
Узбекистан, 100025 г. Ташкент. Наваи 13

<sup>2</sup>Научно-исследовательский центр по проблемам отраслевого машиноведения при ТашГТУ,  
100125, г. Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули-31, e-mail: [aabdusalam54@gmail.com](mailto:aabdusalam54@gmail.com)

В работе рассмотрена задача контактного взаимодействия в двухвалковом модуле. При этом деформационные характеристики обрабатываемого материала и покрытия валков заданы реологическими моделями Кельвина-Фойгта. Установлено, что уравнение кривой контакта вала зависит в основном от соотношения скоростей деформирования обрабатываемого материала и покрытия вала. Определены соотношения скоростей деформирования обрабатываемого материала и покрытия вала.

Ключевые слова: валковая машина, обрабатываемый материал, валы с эластичными покрытиями, задача контактного взаимодействия, реологические модели Кельвина-Фойгта, уравнения кривых контакта.

Процесс обработки материала в валковых машинах осуществляется в результате контактного взаимодействия валов с прокатываемым материалом. Для силового анализа контактного взаимодействия в валковых машинах модуле необходимо разработать математические модели взаимодействия, т.е. уравнения кривых контакта валов.

Моделирование процесса взаимодействия в валковых машинах, когда валы имеют эластичное покрытие, является сложной задачей и зависит от того, насколько полно в нем представлена деформация взаимодействующих тел. Уравнения кривых контакта валов для этого случая определены в работе [1] с использованием для деформационной характеристики контактирующих тел степенной зависимости вида

$$\sigma = A\varepsilon^n.$$

В этой работе рассмотрена задача взаимодействия, когда деформационные характеристики контактирующих тел заданы реологическими моделями вида

$$\sigma = E\varepsilon + \mu d\varepsilon / dt.$$

Очаг деформации валов относительно линии центров разделим на зоны I и II (рис.1). Будем считать, что в зоне I происходит одновременное сжатие контактирующих тел, а в зоне II восстановление их деформации. Взаимодействия обрабатываемого материала с каждым валом в очаге деформации происходит по кривой *AE*. Согласно [1] в кривой *AE* есть зоны скольжения отставания *AB*, прилипания *BD* и скольжения опережения *DE*. При этом часть зоны прилипания (отрезок *BC*) относится к зоне сжатия, а часть (отрезок *CE*) – к зоне восстановления, поэтому на них деформационные свойства контактирующих тел разные.

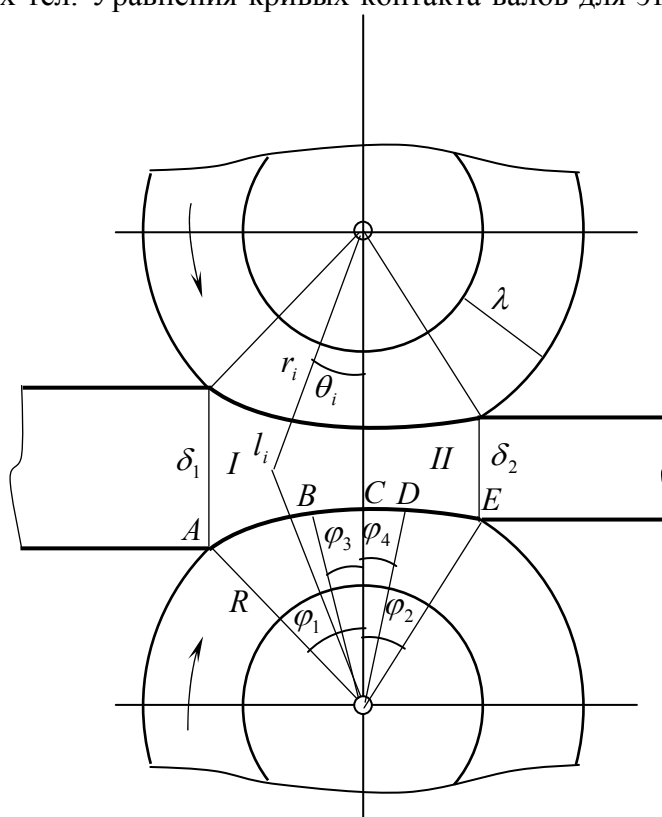


Рис.1. Схема контактного взаимодействия в двухвалковом модуле

В связи с этим зону прилипания разделим на два участка (2 и 3), соответствующие отрезкам  $BC$  и  $CE$ , где  $C$  – точка, в которой пересекаются линия центров и кривая контакта. Поэтому кривая контакта  $AE$  имеет участки 1, 2, 3 и 4 соответствующие отрезкам  $AB, BC, CD$  и  $DE$ .

Пусть деформация контактирующих тел на этих участках определяются реологическими моделями

$$\sigma_i = E_k \varepsilon_i \pm \mu_k d\varepsilon_i / dt, \quad \sigma'_i = E'_k \varepsilon'_i \pm \mu'_k d\varepsilon'_i / dt, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где  $k$  – индекс, означающий номер участка;  $\sigma_i, \sigma'_i, \varepsilon_i, \varepsilon'_i, E_i, \mu_i, \mu'_i$  – соответственно, напряжение, деформация, модуль деформации, коэффициент вязкости покрытия вала и обрабатываемого материала. Знак (+) относится  $k = 1$ , знак (–) относится  $k = 2$ . Когда  $i = 1, 2, k = 1$  и когда  $i = 3, 4, k = 2$ .

В кривой контакта вала выделим элементарный сектор, соответствующий углу  $\theta_i$ . Представив покрытия вала и обрабатываемого материала, состоящими из бесконечно большого числа таких секторов, рассмотрим происходящие с ними изменения при переходе из положения, соответствующего углу  $\theta_i$ , в новое, определяемое углом  $\theta_i - d\theta_i$ .

Из рисунка следует, что

$$2(r_i \pm dr_i + l_i \pm dl_i) \cos(\theta_i \pm d\theta_i) = A. \quad (2)$$

Обозначая  $dl_i / dr_i = m_k$ , где  $m_k$  – отношение скорости деформирования обрабатываемого материала к скорости деформирования покрытия вала при сжатии ( $k = 1$ ) и восстановлении ( $k = 2$ ) и пренебрегая величинами высшего порядка малости, преобразуем (2) в дифференциальное уравнение

$$(1 + m_k) dr_i \frac{A \sin \theta_i}{2 \cos^2 \theta_i} d\theta_i = 0.$$

Решение уравнения находим с учетом начальных условий:  $r_1 = R$  когда  $\theta_1 = -\varphi_1$  и  $r_2 = R$  когда  $\theta_4 = \varphi_2$  и получим уравнение кривой контакта вала

$$r_i = R + \frac{A_1}{1 + m_k} \left( \frac{1}{\cos \theta_i} - \frac{1}{\cos \varphi_k} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где  $-\varphi_1 \leq \theta_1 \leq -\varphi_3$ ,  $-\varphi_3 \leq \theta_2 \leq 0$ ,  $0 \leq \theta_3 \leq \varphi_4$ ,  $\varphi_4 \leq \theta_4 \leq \varphi_2$ ,  $A_1 = A/2$ ,

здесь  $r_i, \theta_i$  – полярные координаты;  $i$  – участка вала;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  – углы между лучами  $OC$  и  $OA, OE, OB, OD$ , соответственно;  $A$  – расстояние между валами;  $R$  – радиус вала.

Из формулы (3) видно, что уравнение кривой контакта вала зависит в основном от соотношения скоростей деформирования обрабатываемого материала и покрытия вала.

Определяем отношение скоростей деформирования обрабатываемого материала и покрытия вала  $m_k$ .

Для любого времени  $t$  в кривых контакта справедливы следующие соотношения:

$$\Delta r_i + \Delta l_i = \Delta h_i, \quad (4)$$

$$\frac{dr_i}{dt} + \frac{dl_i}{dt} = \frac{dh_i}{dt}, \quad (5)$$

$$E_k \varepsilon_i \pm \mu_k d\varepsilon_i / dt = E'_k \varepsilon'_i \pm \mu'_k d\varepsilon'_i / dt, \quad (6)$$

где  $h_i = r_i + l_i$ ,  $\varepsilon_i = \frac{R - r_i}{\lambda}$ ,  $\varepsilon'_i = \frac{l_{ko} - l_i}{l_{ko}}$ ,  $l_{ko} = \frac{\delta_k}{2 \cos \varphi_k}$ .

здесь  $\lambda$  – толщина эластичного покрытия вала;  $\delta_1, \delta_2$  – начальная и конечная толщины обрабатываемого материала.

Уравнение (6) преобразуем к виду



$$\frac{\Delta r_i}{\lambda} E_k \pm \frac{dr_i / dt}{\lambda} \mu_k = \frac{\Delta l_i}{l_{k0}} E'_k \pm \frac{dl_i / dt}{l_{k0}} \mu'_k, \quad (7)$$

где  $\Delta r_i = R - r_i$ ,  $\Delta l_i = l_{i0} - l_i$ ,

С учетом выражения  $m_k = \frac{dl_i}{dr_i} = \frac{\Delta l_i}{\Delta r_i} = \frac{dl_i / dt}{dr_i / dt}$  из соотношений (5) имеем

$$\Delta r_i = \Delta h_i / (1 + m_k), \quad \Delta l_i = m_k \Delta h_i / (1 + m_k), \\ dr_i / dt = (dh_i / dt) / (1 + m_k), \quad dh_i / dt = (dl_i / dt) m_k / (1 + m_k).$$

С учетом последнее из уравнения (7) получаем

$$\frac{\Delta h_i}{\lambda} E_k \pm \frac{\mu_k}{\lambda} \frac{dh_i}{dt} = m_k \frac{\Delta h_i}{l_{i0}} E'_k \pm m_k \frac{\mu'_k}{l_{i0}} \frac{dh_i}{dt}.$$

Откуда

$$m_k = \frac{l_{k0}}{\lambda} \left( \frac{E_k \cdot \Delta h_i \pm \mu_k dh_i / dt}{E'_k \cdot \Delta h_i \pm \mu'_k dh_i / dt} \right)$$

или заменив  $m_k$  средним значением  $m_{kc}$

$$m_{kc} = \frac{\delta_k}{2\lambda \cos \varphi_k} \left( \frac{E_k \Delta h_{ic} \pm \mu_k (dh_i / dt)_c}{E'_k \Delta h_{ic} \pm \mu'_k (dh_i / dt)_c} \right). \quad (8)$$

Среднее значение  $\Delta h_{ic}$  и  $(dh_i / dt)_c$  находим, используя теорему о среднем интегральном исчислении:

$$\Delta h_{ic} = \frac{1}{\varphi_k} \int_0^{\varphi_k} h_{k0} \left( 1 - \frac{\cos \varphi_k}{\cos \theta_i} \right) d\theta_i, \\ (dh_i / dt)_c = \frac{1}{\varphi_k} \int_0^{\varphi_k} \omega h_{k0} \cos \varphi_k \frac{\sin \theta_i}{\cos^2 \theta_i} d\theta_i$$

или после интегрирования

$$\Delta h_{ic} = h_{k0} \left[ 1 - \frac{\cos \varphi_k}{2\varphi_k} \ln \frac{1 + \sin \varphi_k}{1 - \sin \varphi_k} \right], \\ (\Delta h_i / dt)_c = \frac{\omega h_{k0}}{\varphi_k} (1 - \cos \varphi_k),$$

где  $h_{k0} = R + \delta_k / 2 \cos \varphi_k$ ;  $\omega$  - угловая скорость вала.

Имея в виду  $r_2 = r_3$  при  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ , на основании выражения (3) находим

$$R + \frac{A_1}{1 + m_1} \left( 1 - \frac{1}{\cos \varphi_1} \right) = R + \frac{A_1}{1 + m_2} \left( 1 - \frac{1}{\cos \varphi_2} \right)$$

или после преобразования

$$\left( \frac{1 - \cos \varphi_1}{1 - \cos \varphi_2} \right) \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{1 + m_1}{1 + m_2}$$

Отсюда можно найти ограничения на выбор  $m_1$  и  $m_2$ .

Используя, очевидные соотношения между углами контакта

$$\varphi_1 \geq \varphi_2 \quad (\cos \varphi_1 \leq \cos \varphi_2, \quad 1 - \cos \varphi_1 \geq 1 - \cos \varphi_2),$$

искомое ограничение запишем так:  $m_1 \geq m_2$ .

**Список литературы**

1. Хуррамов Ш.Р. и др. Математические модели взаимодействия материала с отжимными валами. Прикладные задачи математики. XXI международная научно-техническая конференция. Севастополь, 16-20 сентября 2013 г. С.4-8.

## НОВЫЕ ЕДИНЫЕ МОДЕЛИ МАКРО И МИКРОМИРА

**В.И. Шабуневич**

АО «Корпорация «ВНИИЭМ»  
107078, РФ, г. Москва, Хоромный тупик, дом 4, строение 1  
e-mail: [Viktor-shab@yandex.ru](mailto:Viktor-shab@yandex.ru)

Изложена динамическая интерпретация физики масштабного эффекта, приведен краткий обзор этапов создания теории суперструн в качестве единой физической М-теории, и предлагаются к рассмотрению для этих целей результаты модального и гармонического анализов разномасштабных моделей Земли; показано проявление масштабного эффекта при анализе идентичных наборов собственных частот для разномасштабных моделей Земли, Солнца, Галактики и Вселенной.

**Ключевые слова:** масштабный эффект, теория суперструн, конечно-элементные модели Земли и Солнца.

В середине прошлого века в двух ведущих морских державах мира — в Великобритании и США в течение пяти лет работали государственные комиссии, состоящие из лучших в мире специалистов по строительству и эксплуатации кораблей. Для них были созданы уникальные условия, в том числе и юридические — потенциальные виновники многочисленных аварий крупноразмерных судов во время второй мировой войны и других объектов заранее получили амнистии. Естественно было ожидать, что причины всех этих неприятностей окажутся быстро установленными, будут изменены требования к строительству кораблей и загадочные катастрофы больше не появятся. Однако, как это ни парадоксально, ожидания такого рода не оправдались. По мере работы комиссий постепенно выяснялось, что многие лежащие на поверхности возможные объяснения этих катастроф оказались несостоятельны. В конечном итоге комиссии однозначно установили, что *причиной не могли быть*: прочность конструкций или ошибки в расчетах, квалификация судостроителей, технология изготовления, недостаточная жесткость судов, концентрации напряжений или остаточные напряжения, качество сварки или последствия сварных работ. Было также установлено, что второстепенными причинами могли являться усталость металла, последствия ударных нагрузок и температурный фактор. Но они не могли сыграть решающей роли и являлись скорее дополнительными факторами. Удивительный вывод для таких представительных комиссий: причина кроется в неуловимом свойстве материала [1].

Согласно курсу Сопротивления материалов, масштабный эффект (МЭ) - это уменьшение предела выносливости при увеличении масштаба образцов. Общепризнанное в научном мире объяснение: в идентичных сечениях больших образцов больше абсолютное число микротрещин, дислокаций и т.п., и, следовательно, вероятность разрушения больших сечений в больших образцах выше, чем в малых, поэтому большие образцы и разрушаются быстрее [2].

Автором предложена новая, динамическая интерпретация физики масштабного эффекта, заключающаяся в том, что изменение масштаба исследуемого объекта влечет за собой обратно-пропорциональное изменение его собственных частот. И, следовательно, при гармоническом нагружении резонансы на определенных собственных частотах в большом объекте наступают значительно раньше, чем в малом объекте, что объясняет физику более раннего разрушения больших объектов. В книгах автора на многочисленных примерах динамических расчетов по методу конечных элементов идентичных моделей различных объектов разного масштаба продемонстрированы плодотворные возможности такой динамической интерпретации масштабного эффекта [3-6].

Таким образом, разработана методика определения масштабного эффекта при динамическом нагружении различных конструкций, заключающаяся в проведении модального и

гармонического анализом разномасштабных конечно-элементных моделей этих конструкций и выявления проявлений МЭ на их соответствующих резонансных режимах при различных видах нагружения. При этом рассмотрены проявления МЭ при расчетах валов, например, электродвигателей и самих их конструкций, при расчетах и экспериментальных измерениях рамных конструкций, при расчетах напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с прорезями, а также рассмотрены проявления МЭ при анализе и возможном прогнозировании разрушительных землетрясений. В области Механики разрушения рассмотрено влияние масштаба плоских и объемных образцов с центральными трещинами при различных видах нагружения. В области Системного анализа рассмотрены задачи динамического нагружения конуса и пирамиды как моделей развивающихся систем. Кроме всего, предлагаются к рассмотрению новые возможные модели единой теории физики.

Объединение двух фундаментальных теорий современной физики — квантовой теории и общей теории относительности — в рамках единого теоретического подхода до недавнего времени было одной из важнейших проблем. Поразительный успех этих двух теорий состоит в том, что вместе они могут объяснить поведение материи практически в любых условиях — от внутриядерной до космической области. Большой загадкой, однако, была несовместимость этих двух теорий. И было непонятно, почему Природа на своем самом глубоком и фундаментальном уровне должна требовать двух различных подходов с двумя наборами математических методов, двух наборов постулатов и двух наборов физических законов? В идеале хотелось иметь Единую теорию поля, объединяющую эти две фундаментальные теории. Однако попытки их соединения постоянно разбивались из-за появления бесконечностей (расходимостей) или нарушения некоторых важнейших физических принципов. Объединить две эти теории удалось лишь в рамках теории струн и суперструн. В середине 1980-х гг., в апогее первой революции в теории суперструн, на семинарах царила безграничная эйфория. Физиков окрыляла надежда на то, что скоро у них появится полное понимание теории струн, и она предстанет пред ними в качестве окончательной теории Вселенной. Конференции по струнам, проводившиеся в конце 1980-х гг., уже отражали скрытое разочарование: физики представляли интересные результаты, но в атмосфере конференции не чувствовалось вдохновения. На конференции по струнам, состоявшейся в марте 1995 г. в университете Южной Калифорнии, Эдвард Виттен сделал доклад, который вызвал вторую революцию в теории суперструн. Он объявил о новой стратегии выхода за рамки теории возмущений в теории струн, главным элементом этой стратегии было понятие дуальности. Подобно лучикам морской звезды все теории струн рассматриваются сейчас как части единого целого. Этот единый формализм условно назвали М-теорией. М-теория рассматривает *одинадцать* измерений (десять пространственных и одно временное). Второе установленное свойство М-теории состоит в том, что она, кроме колеблющихся струн, включает и другие объекты: колеблющиеся двумерные мембраны и трехмерные капли (последние называют 3-бранами) [7, 8].

Известны результаты расчетов для моделей Земли с внутренним заполнением [5, 6]. Рассматриваемые модели представляют собой сферические оболочки с радиусами 6.333 м, 6333 м и 6333 км и толщинами 0.21 м, 210 м и 210 км соответственно. Внутри каждой модели действует давление 650000 Па. Радиусы внутренних ядер моделей соответственно равны 3.475 м, 3475 м и 3475 км. Пространство между оболочкой и ядром заполняет мантия. Плотность оболочек  $2700 \text{ кг/м}^3$ , плотность мантий  $3700 \text{ кг/м}^3$ , плотность ядер  $13000 \text{ кг/м}^3$ . Массы моделей соответственно равны  $5.45 \cdot 10^6 \text{ кг}$ ,  $5.45 \cdot 10^{15} \text{ кг}$  и  $5.45 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ . Основное закрепление моделей осуществляется в центрах ядер. Вид КЭ моделей представлен на рисунке 1.

Анализ форм собственных колебаний этих моделей Земли и большой однородной модели (см. Таблицу 2), упомянутой выше как трехмерная капля [7], показал, что многие из решаемых в настоящее время задач при создании М-теории находят там свое решение. Так, например, четко проявляются необходимые одинадцать и более (16, 26, 35, 52 и т.д) пространственно-временных измерений и т.п. Там, как и ранее [4, 5, 6], на разномасштабных

моделях Земли ярко проявляется действие масштабного эффекта [3]. Так, «колючие» (по-видимому, взрывные) картинки для большой модели Земли начинают появляться с 252-ой формы колебаний, для средней модели Земли – с 370-ой формы и для малой модели – с 377-ой формы колебаний. Для большой каплеобразной модели таких «колючих» картинок не обнаружено при расчетах до 550-ой формы колебаний за 55 запусков задачи. По-видимому, для их появления на ядрах и оболочках моделей необходимо наличие промежуточной, передающей взаимное воздействие прослойки (мантии) или полей взаимодействия ядер и оболочек.

Видим, что модель трехмерной однородной капли не дает такого богатого разнообразия форм собственных колебаний, как отражающие внутреннее строение Земли модели, содержащие ядро, мантию и оболочку.

Аналогичные подходы оправдывают себя при рассмотрении, например, модели Солнца. На рисунке 2 показана схема внутреннего строения Солнца. На схеме видны периодически расположенные арочные протуберанцы. Аналогичные картинки с протуберанцами получены для некоторых форм собственных колебаний конечно-элементной модели Солнца (рисунок 3).

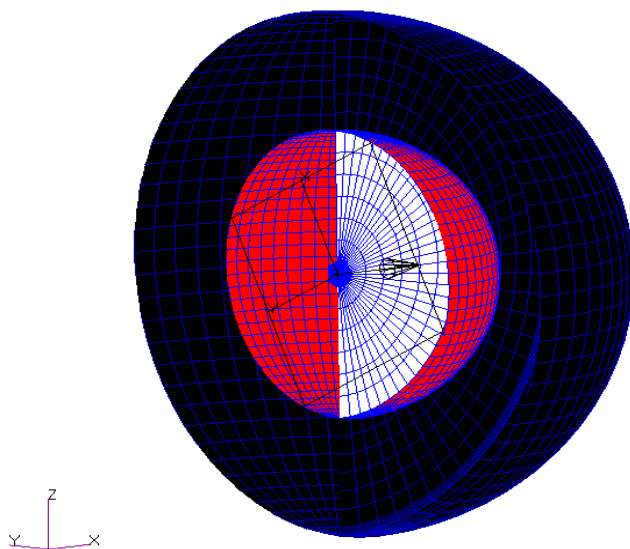


Рис. 1. Заполненная КЭ модель планеты Земля



Рис. 2. Внутреннее строение Солнца

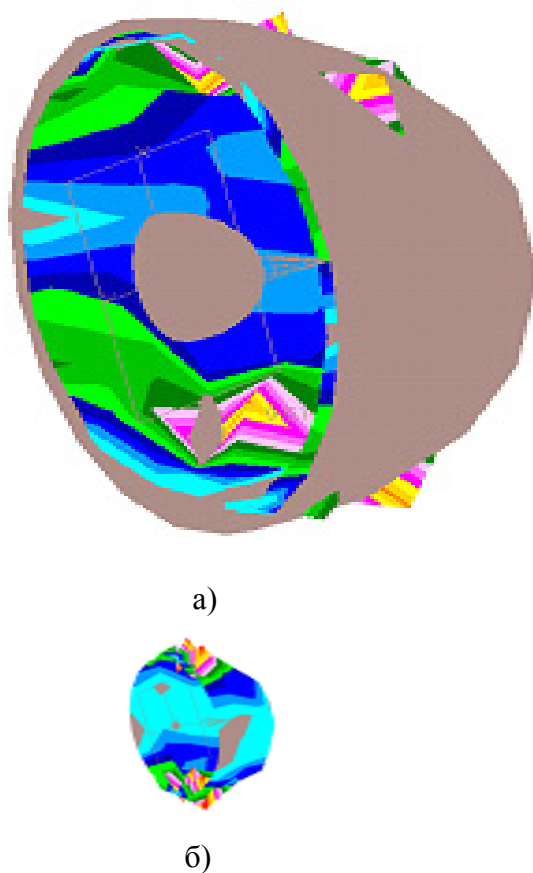


Рис. 3. Формы собственных колебаний фотосферы Солнца а) и его ядра б)

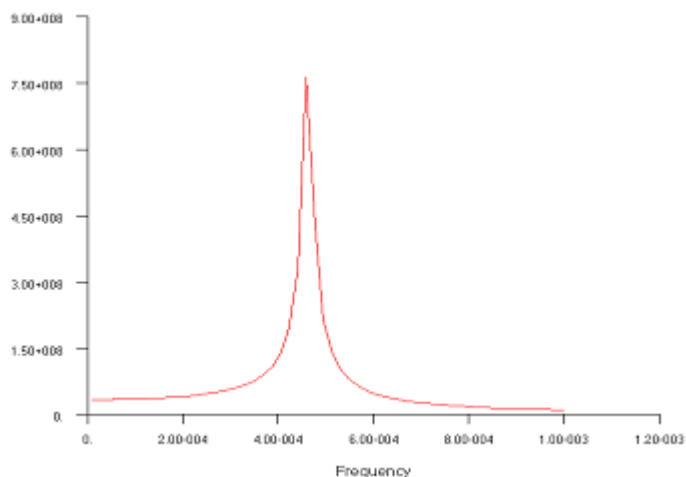


Рис. 4. Изменение по частоте магнитуды перемещений узла фотосферы в модели Солнца

В таблице 1 приведены расчетные оценки, сделанные благодаря масштабному эффекту, периодов резонансных колебаний Земли, Солнца, нашей Галактики и Вселенной. Видим, что периоды этих колебаний для Галактики и Вселенной составляют многие миллиарды лет. Резонансы могут объяснять физику происхождения огромной темной энергии и другие проблемные вопросы современной науки. Так расширяется или просто колеблется и резонирует наша Галактика и Вселенная?

Таблица 1

№п/п	Параметр	Земля	Солнце	Галактика	Вселенная
1	Радиус	6378 км	695500 км	100000 св.лет	>10 млрд. св.лет
2	Период резонансных колебаний	8.8 часа	11.6 суток	34 млрд. лет	>34000 млрд. лет

В докладе сделан краткий обзор этапов создания теории суперструн в качестве единой физической М-теории, и предлагаются к рассмотрению для этих целей также результаты модального и гармонического анализов разномасштабных моделей нашей планеты Земля. Видно, что именно с помощью анализа собственных частот колебаний и резонансных явлений для моделей, отражающих внутреннее строение Земли (а не однородных каплеобразных), можно достаточно просто решить многие вопросы, возникающие при создании единой теории физических процессов. Также показано проявление масштабного эффекта при анализе идентичных наборов собственных частот для разномасштабных моделей Земли.

Может быть сама Природа-матушка подсказывает строить единую физическую М-теорию на основе моделей, подобных отражающим строение Земли моделям? При этом параметры составляющих ее структур (ядра, мантии и оболочки) или полей их взаимодействия можно изменять в широчайших диапазонах [9].

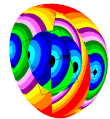
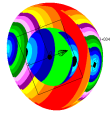
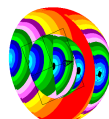

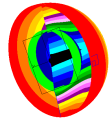
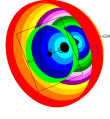
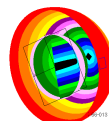


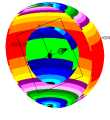
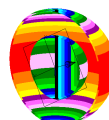

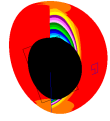
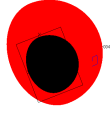
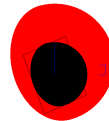

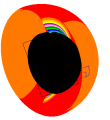
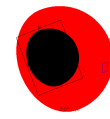
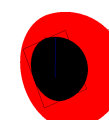

### Список литературы

1. Сухонос С.И. Масштабный эффект – неразгаданная угроза. М.: Новый центр, 2001, - 68с.
2. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1986, - 512с.
3. Шабуневич В.И. Динамический масштабный эффект. Примеры применения. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, - 56с.

4. Шабуневич В.И. Масштабный эффект в механике разрушения. Образцы с трещинами. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, - 64с.
5. Шабуневич В.И. Масштабный эффект в динамике различных объектов. Примеры применения. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, - 262с.
6. Шабуневич В.И. Масштабный эффект в механике разрушения. Продолжение LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, - 62с.
7. Брайан Грин Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. Перевод с английского под общим руководством академика РАН С.С.Герштейна, М: Издательство УРСС, 2004, -292с.
8. М.Каку Введение в теорию суперструн. Пер. с англ. М.: Мир, 1999, -624с.
9. Шабуневич В.И. Возможные модели единой теории физики. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, - 104с.

Таблица 2

Формы собственных колебаний моделей Земли и капли

№ форм	Формы колебаний			
	Моделей Земли			Трехмерной капли
	Малой модели	Средней модели	Большой модели	
1				
2				
3				
4				
5				











## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

**Шакирьянов М. М.**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, лаборатория механики твердого тела. 450054 Уфа, пр. Октября, 71, лабораторный корпус; Уфимский государственный авиационный технический университет, кафедра теоретической механики. 450000 Уфа, ул. К.Маркса, 12, e-mail: [shakmar9@mail.ru](mailto:shakmar9@mail.ru)

Рассмотрены пространственные хаотические колебания трубопровода в вязкой сплошной среде относительно горизонтальной оси, проходящей через неподвижные опоры. Учитываются силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы вязкого сопротивления и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. Колебания трубы происходят под действием переменного внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону. Дан анализ влияния изменения величины начальной фазы переменной составляющей внутреннего давления в трубопроводе на его пространственные колебания.

*Ключевые слова:* трубопровод, пространственные колебания, начальная фаза переменного внутреннего давления

Рассматриваются пространственные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси  $x$ , проходящей через опоры. Длина трубы, ее внутренний радиус и толщина стенки  $L$ ,  $R_i$  и  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости –  $m$ . Труба окружена вязкой несжимаемой средой. В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием постоянного внутреннего давления. Предполагается, что из этого вертикального положения она выводится путем отклонения на угол  $\theta_0$  и сообщения начальной угловой скорости  $\omega_0$ . Далее совершается свободное вращение трубопровода вокруг оси  $x$ , проходящей через опоры, поэтому его изогнутая ось является плоской кривой. При этом отсутствует деформация кручения. Учитываются силы гравитации, силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда, силы вязкого сопротивления, пропорциональные первой степени скорости и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. Колебания трубы происходят под действием переменного внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону:  $p_i = p_0 + p_a \sin(\Omega t + \varphi_0)$ , где  $\Omega$ ,  $\varphi_0$ ,  $p_0$  и  $p_a$  – круговая частота, начальная фаза, среднее давление и его амплитуда колебаний.

Согласно принятым предположениям пространственное движение трубопровода можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного вращения вокруг оси  $x$  и относительного движения в плоскости изгиба. Дифференциальные уравнения, описывающие вращательные и изгибные движения трубопровода с учетом указанных выше сил, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{dt^2} \left\{ \frac{m+m'}{2} [W_0 + w(t)]^2 + J_p \right\} + \mu(R_i + h)L \frac{d\theta}{dt} [W_0 + w(t)]^2 + \\ & + [W_0 + w(t)] \left[ \frac{2mg_1}{\pi} \sin\theta + (m+m') \frac{d\theta}{dt} \frac{dw}{dt} \right] = 0, \\ & \frac{m+m'}{L} \frac{d^2w}{dt^2} + 2\mu(R_i + h) \frac{dw}{dt} + \frac{\pi^4 EJ}{L^4} [W_0 + w(t)] = \\ & = \frac{m}{L} \left\{ \frac{4g_1}{\pi} \cos\theta + [W_0 + w(t)] \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} - \\ & - \left\{ \frac{\pi^2 EF}{4L^2} [W_0 + w(t)]^2 - F_i (p_0 + p_a \sin \Omega t) \right\} \frac{\pi^2}{L^2} [W_0 + w(t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время,  $\theta(t)$  – угол поворота плоскости изгиба,  $W_0$  и  $w(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета  $E$  и  $\rho_p$  – модуль Юнга и плотность материала,  $J_p = \pi \rho_p L [(R_i+h)^4 - R_i^4]/2$  – момент инерции относительно собственной оси,  $F_i = \pi R_i^2$  – площадь проходного сечения,  $F = \pi [(R_i+h)^2 - R_i^2]$  и  $J = \pi [(R_i+h)^4 - R_i^4]/4$  – площадь и осевой момент инерции поперечного сечения трубы,  $\rho_c$ ,  $m' = \rho_c \pi (R_i+h)^2 L$  и  $\mu$  – плотность, присоединенная масса и коэффициент сопротивления окружающей среды,  $g_1 = g(1 - m'/m)$ ,  $g$  – гравитационное ускорение. Следует отметить, что величина коэффициента сопротивления зависит от вязкости окружающей среды и режима обтекания трубопровода. Отметим также, что при выводе этих уравнений функция прогиба  $W(x,t)$ , удовлетворяющая граничным условиям  $W(0,t) = W(L,t) = d^2W(0,t)/dx^2 = d^2W(L,t)/dx^2 = 0$ , принималась в виде

$$W(x,t) = [W_0 + w(t)] \sin(\pi x/L).$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1) решается при следующих начальных условиях

$$\theta = \theta_0, \quad d\theta/dt = \omega_0, \quad w = 0, \quad dw/dt = 0 \quad (t=0). \quad (2)$$

В настоящем исследовании численное решение задачи Коши (1), (2) при  $\theta_0 = 0$  рад и  $\omega_0 = 1.0$  рад/с определялось методом Рунге–Кутты. Затем к этому решению применялось дискретное преобразование Фурье и выполнялось отображение Пуанкаре.

Далее обсуждается влияние изменения величины начальной фазы переменного внутреннего давления в трубопроводе на его изгибно-вращательные колебания.

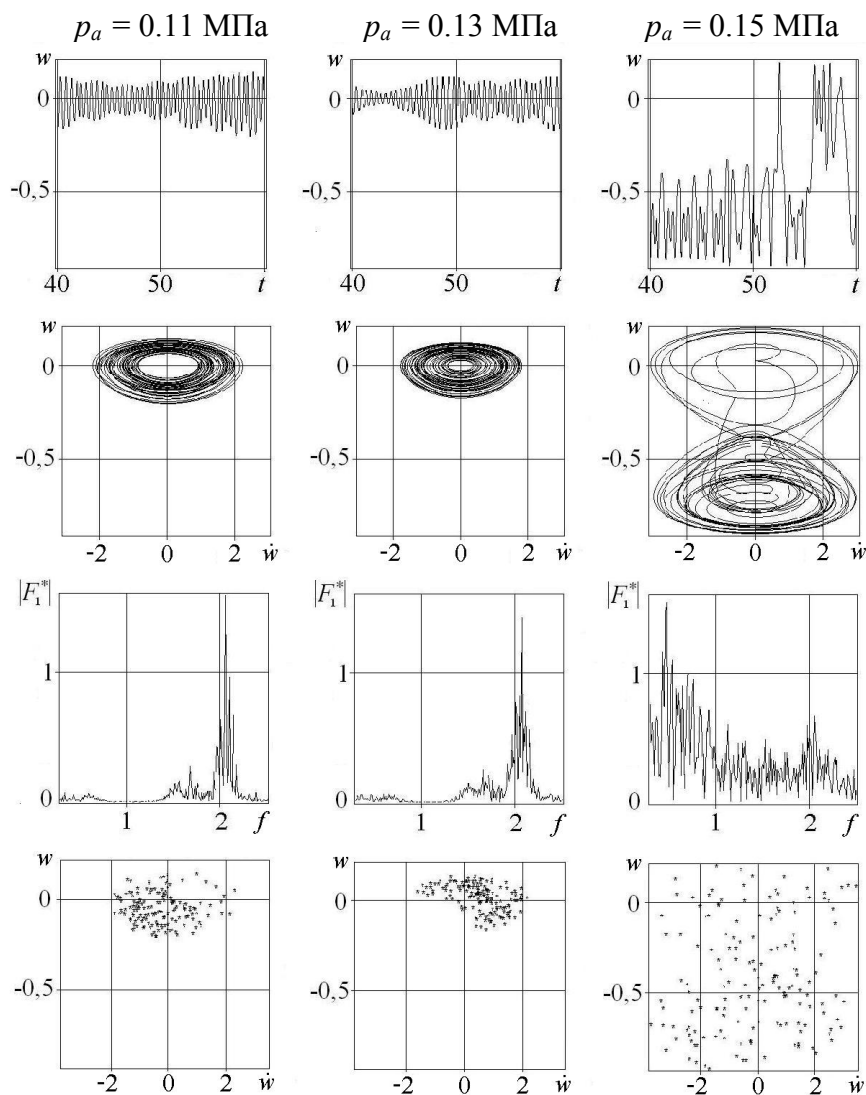
Вычисления были проведены для стальной трубы длиной  $L = 25$  м, с внутренним радиусом  $R_i = 0.259$  м и толщиной стенки  $h = 0.006$  м. Модуль Юнга и плотность материала:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho_p = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Труба заполнена жидкостью с плотностью  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Суммарная масса трубы и жидкости:  $m = 6141$  кг. В качестве окружающих трубопровод сред рассматривались водная и воздушная среды с плотностями  $\rho_c = 800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_c = 1.25$  кг/м<sup>3</sup>, с коэффициентами сопротивления  $\mu = 0.256$  Пас/м и  $\mu = 0.460 \cdot 10^{-2}$  Пас/м соответственно. Гравитационное ускорение  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>. Параметры давления в трубе:  $p_0 = 7.08$  МПа,  $p_a = 0.11, 0.13, \text{ и } 0.15$  МПа,  $\varphi_0 = 0$  рад и  $\varphi_0 = \pi$  рад. Отметим, что при принятых параметрах приближенные числовые значения статической составляющей прогиба, собственных частот изгибных  $f_1 = 2\pi/k_1^*$  и вращательных  $f_2 = 2\pi/k_2^*$  колебаний трубы, определяемых соответственно уравнениями (21) и (24) [1], следующие:  $W_0 = 0.281$  м,  $f_1 = 1.16$  Гц,  $f_2 = 0.374$  Гц – при колебаниях трубы в водной среде и  $W_0 = 0.353$  м,  $f_1 = 2.01$  Гц,  $f_2 = 0.815$  Гц – воздушной среде. Приближенное значение внутреннего критического давления, которое вычисляется по формуле (22) указанной выше работы:  $p_0' = 5.08$  МПа.

Значение частоты  $f = \Omega/(2\pi)$  переменной составляющей внутреннего давления в трубе принималось около значения первой собственной частоты:  $f = 2,01$  Гц при рассмотрении воздушной среды и  $f = 1,10$  Гц – водной среды. Максимальное время  $t_{\max}$ , в течение которого изучались движения трубопровода, составляло 100 секунд. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимостей динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубы в отрезке времени  $t$  от 40 до 60 секунд, фазовых траекторий и зависимостей модулей Фурье-спектров  $|F_1^*|$  изгибных и  $|F_2^*|$  вращательных колебаний от частоты  $f$  и отображений Пуанкаре. Переменные на графиках измеряются: время  $t$  – в секундах, динамическая составляющая прогиба  $w$  – в метрах, линейная скорость  $dw/dt = \dot{w}$  – в метрах в секунду, угол  $\theta$  – в радианах, угловая скорость  $d\theta/dt = \dot{\theta}$  – в радианах в секунду, частота  $f$  – в Герцах. Фурье – спектры  $|F_1^*|$  – в метрах на секунду и  $|F_2^*|$  – в радианах на секунду.

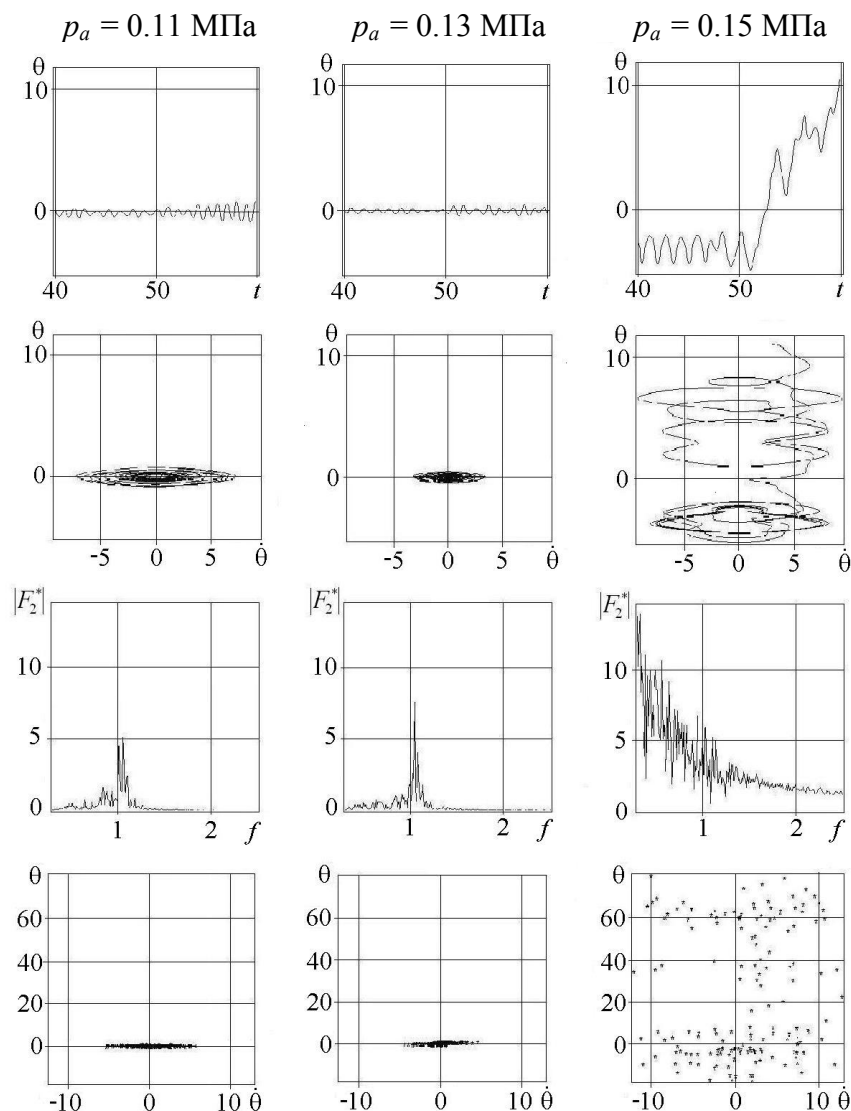
Чтобы исключить начальный участок процесса колебаний трубопровода, обработка фазовых точек при построении отображений Пуанкаре производилась с момента времени  $t_0 = 20$  с. Период обработки фазовых точек:  $\tau = 2\pi/\Omega$ . Числовые значения этого периода для принятых частот переменной части давления равны соответственно 0,499 и 0,909 секундам.

В пределах рассматриваемого отрезка времени число точек, содержащихся в отображении Пуанкаре, в первом случае равняется 161, а во втором – 88.

Рисунки 1- 4 относятся к случаю колебаний трубопровода в воздушной среде, а рисунки 5-8 – в водной среде. На всех рисунках фрагменты сверху дают зависимости прогиба или угла поворота трубы от времени, ниже - соответствующие фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре. Слева направо на рисунках расположены столбцы графиков для трех значений амплитуды переменной составляющей внутреннего давления  $p_a$ , которые так же указаны сверху. Начальная фаза переменной составляющей давления принимала два значения:  $\varphi_0 = 0$  рад и  $\varphi_0 = \pi$  рад.



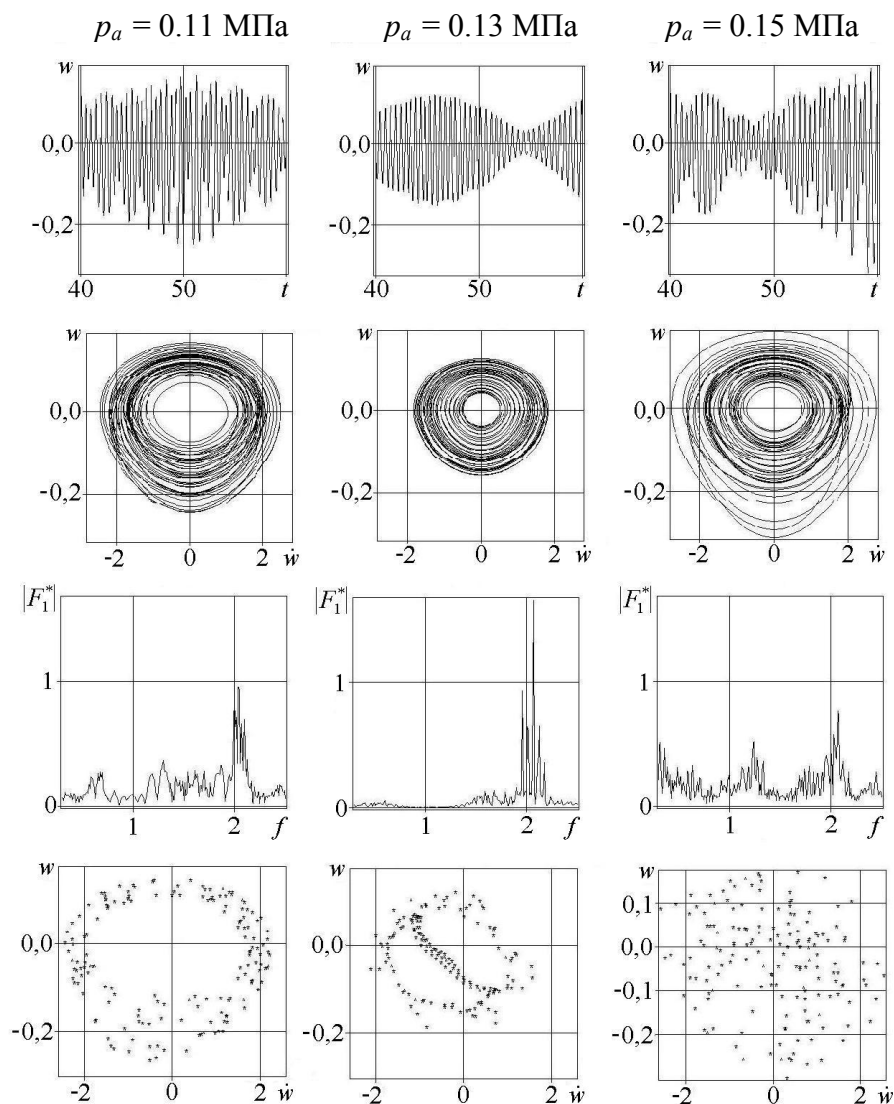
**Рис. 1.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в воздушной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 2.01$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления



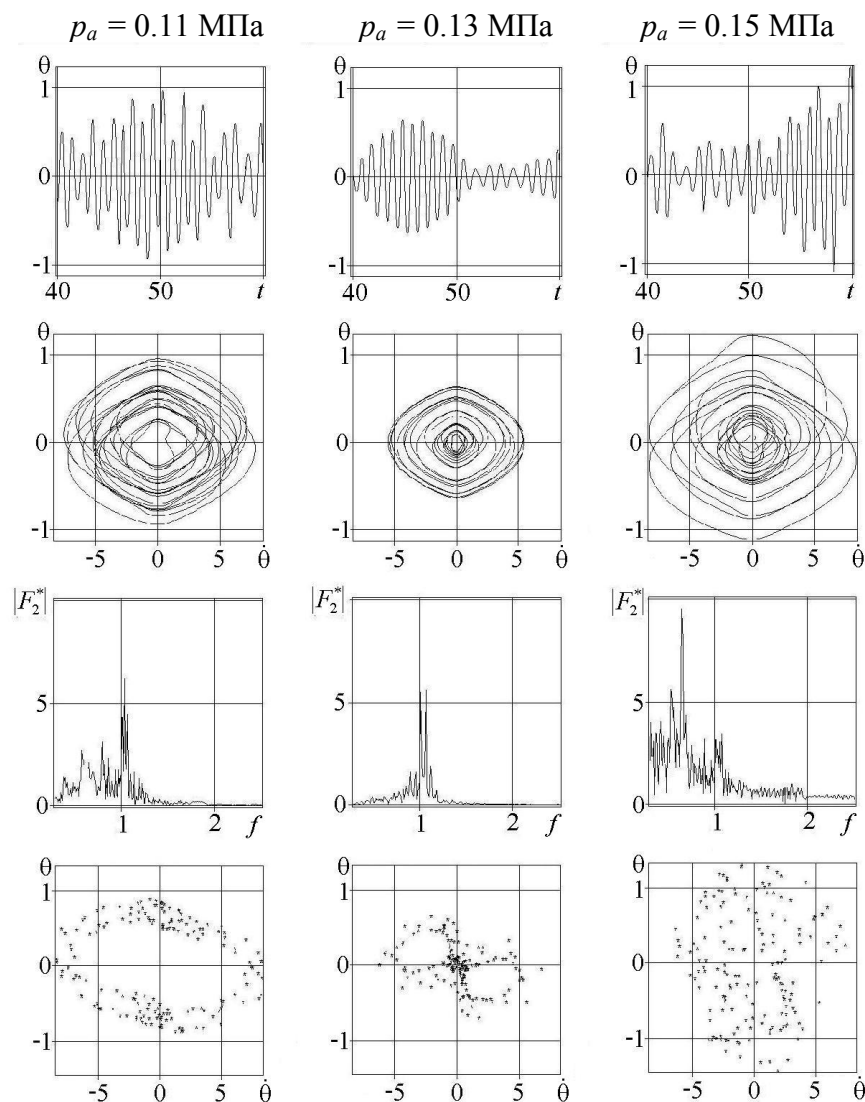
**Рис. 2.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в воздушной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 2.01$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления

Из рисунков 1 и 2 можно видеть, что при указанном выше значении среднего давления, когда начальная фаза давления  $\varphi_0 = 0$  рад, изменение амплитуды переменного давления с величины  $p_a = 0,11$  МПа до величины  $p_a = 0,13$  МПа может привести даже к некоторому уменьшению амплитуд изгибных и вращательных колебаний трубы в воздушной среде. Эти колебания имеют вид биений и остаются непериодическими, несмотря на то, что значение среднего давления в трубе значительно больше значения критического  $p_0' = 5,08$  МПа. Данное обстоятельство означает, что при таких амплитудах внутреннего давления подводимой энергии недостаточно для дальнейшей раскачки трубопровода. Если же амплитуда переменной составляющей давления  $p_a = 0,15$  МПа, то из рисунков 1 и 2 видно, что изгибные и вращательные колебания трубы становятся хаотическими, амплитуды этих колебаний многократно возрастают, их спектры частот имеют сплошной вид и область отображения Пуанкаре существенно расширяется.





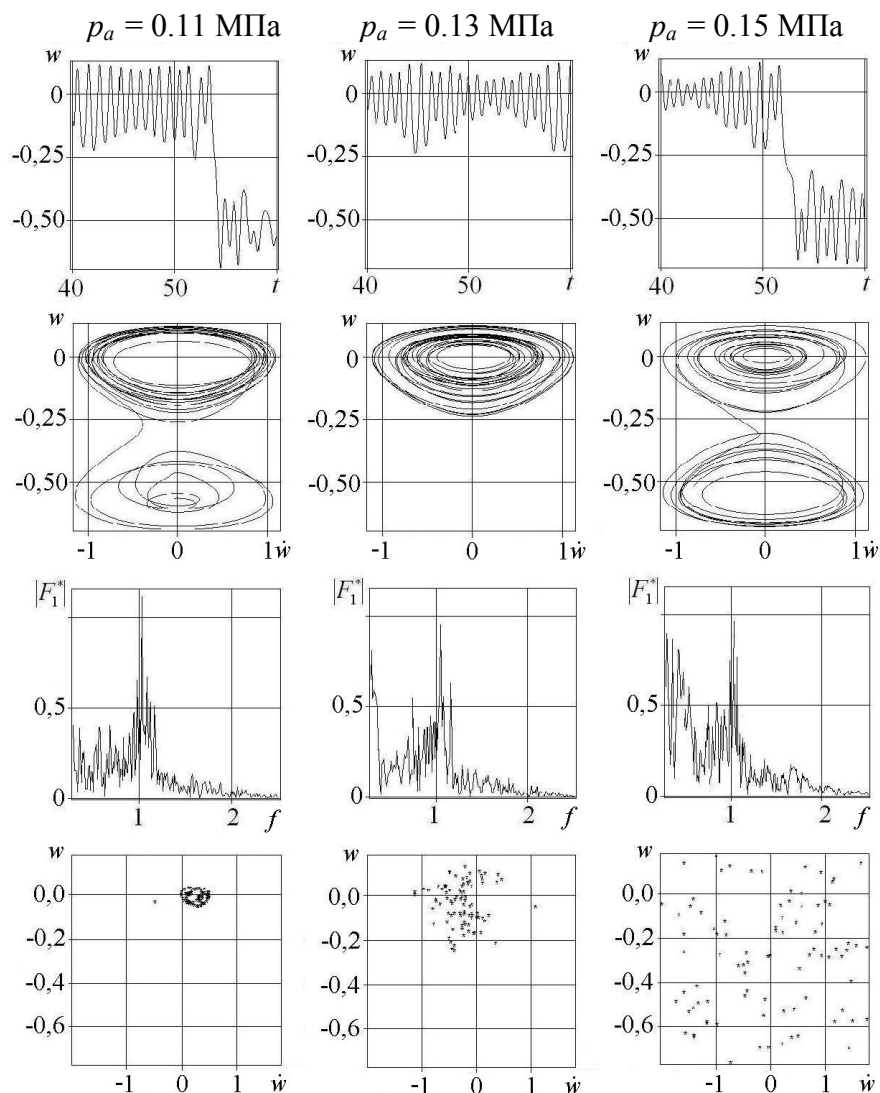
**Рис. 3.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в воздушной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 2.01$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = \pi$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления



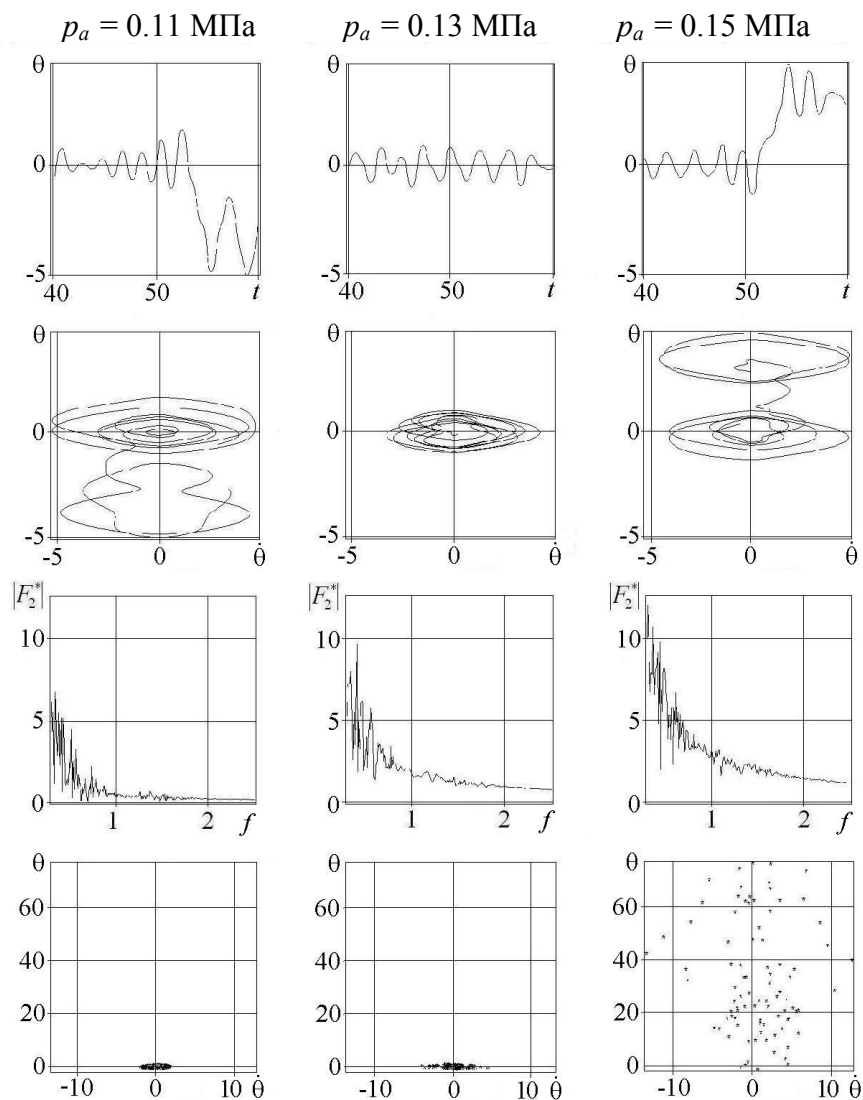
**Рис. 4.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в воздушной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 2.01$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = \pi$  рад и разных величинах амплитуд  $p_a$  переменного внутреннего давления

К таким же выводам можно прийти, если изменить значение начальной фазы давления, сохранив числовые величины всех остальных параметров. Это подтверждается графиками на рисунках 3,4 ( $\varphi_0 = \pi$  рад). Из сравнения графиков на рисунках 1 – 4 видно, что в последнем случае претерпевают изменения амплитуды изгибных и вращательных колебаний трубы, форма и размеры их фазовых траекторий, спектров частот и областей Пуанкаре. И, как показывают числовые расчеты, хаотические движения трубопровода в воздушной среде происходят лишь при значении амплитуды переменной составляющей давления  $p_a = 0,15$  МПа.

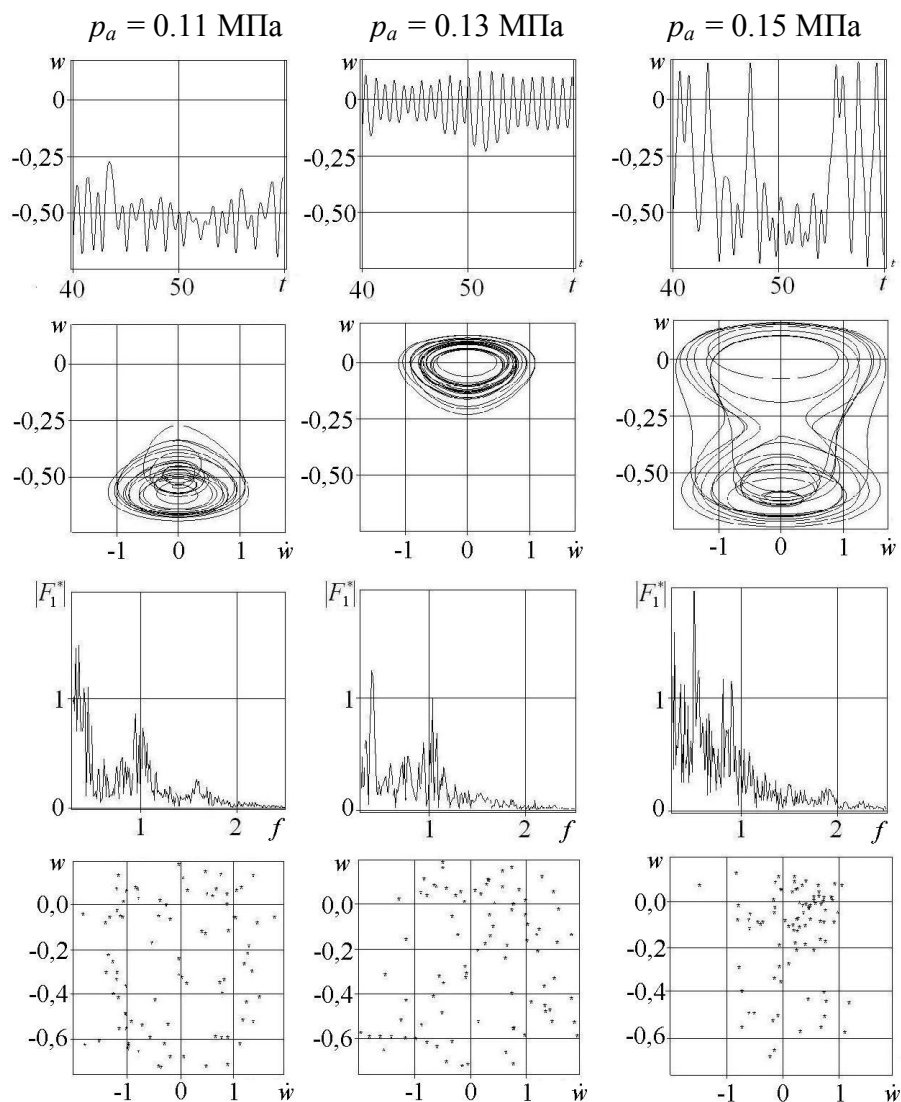
Графики, приведенные на рисунках 5 – 8 свидетельствуют о том, что при движении трубопровода в водной среде его изгибные и вращательные колебания являются хаотическими для всех трех значений амплитуды переменного давления:  $p_a = 0,11, 0,13$  и  $0,15$  МПа.



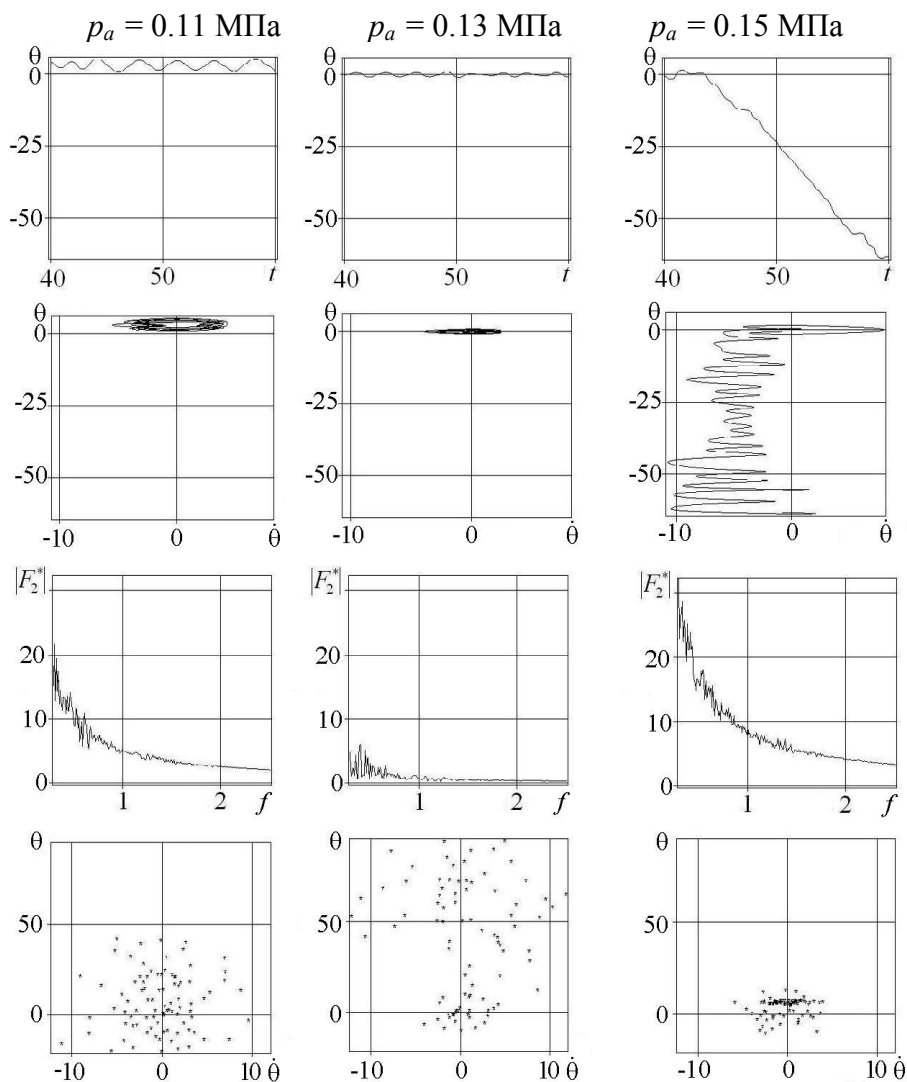
**Рис. 5.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в водной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 1.10$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления



**Рис. 6.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в водной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 1.10$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления



**Рис. 7.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в водной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 1.10$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = \pi$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления



**Рис. 8.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в водной среде при среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа, частоте  $f = 1.10$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = \pi$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления

Это объясняется значительным уменьшением величины статической составляющей прогиба  $W_0$  трубы вследствие действия выталкивающей силы Архимеда. При среднем давлении  $p_0 = 7,08$  МПа статическая составляющая прогиба равна:  $W_0 = 0,353$  м для колебаний трубы в воздушной среде и  $W_0 = 0,281$  м – водной среде. Причем хаотический режим как изгибных, так и вращательных колебаний трубопровода в водной среде сохраняется для указанных выше трех значений амплитуды переменного внутреннего давления при изменении его величины начальной фазы ( $\varphi_0 = \pi$  рад) – рис. 7 – 8.

### Список литературы

1. Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные хаотические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления. Итоги науки. Вып. 24. – Избранные труды Всероссийского симпозиума по механике и процессам управления. – М.: РАН, 2016. -150 с.

## КОЛЕБАНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СУХИМ ТРЕНИЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

**В.Н. Шамберов, А.М. Камачкин**

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
факультет корабельной энергетики и автоматики  
190008, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3, e-mail: [shamberov@mail.ru](mailto:shamberov@mail.ru)  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
факультет прикладной математики и процессов управления  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7 / 9, e-mail: [akamachkin@mail.ru](mailto:akamachkin@mail.ru)

Предлагаемый в работе подход основан на точных аналитических методах исследования нелинейных динамических систем, имеющих сложную структуру пространства состояний. В основе подхода лежит идея декомпозиции пространства параметров системы, позволяющая исследовать поведение исходной многомерной нелинейной системы по динамическому поведению составляющих ее базовых подсистем, имеющих более низкую размерность пространства состояний.

**Ключевые слова:** пространство состояний, сухое трение, существенная неоднозначная нелинейность, декомпозиция пространства параметров, разбиение пространства параметров.

**Введение.** Метод позволяет в большинстве практических случаев исследовать поведение исходной многомерной системы по динамическому поведению не составляющих между собой единую замкнутую систему базовых подсистем, имеющих более низкую размерность пространства состояний и доступных строгому анализу [1, 2].

**Постановка задачи.** Демонстрацию метода осуществим на примере следующей динамической системы

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ \dot{y}_1(t) &= n_1[y_1(t)], \\ v_2(t) &= \psi_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + n_2[y_2(t)] \end{aligned} \tag{1}$$

В описании (1):  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  – элементы матрицы состояния (**A**) некоторого объекта (как правило, на момент исследования уже имеют определенные значения);  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$  – элементы матрицы управления (**B**) объектом (могут являться элементами настройки);  $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$  – элементы матрицы наблюдения (**C**) за объектом (в основном являются элементами настройки);  $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$  – элементы матрицы обхода (**D**) (определяют структуру системы и, как правило, на момент исследования заданы).

Допустим, нелинейная функция  $n_1[y_1(t)]$  соответствует учету сухого трения в элементе при пренебрежении его массой (представлено на рисунке 1).

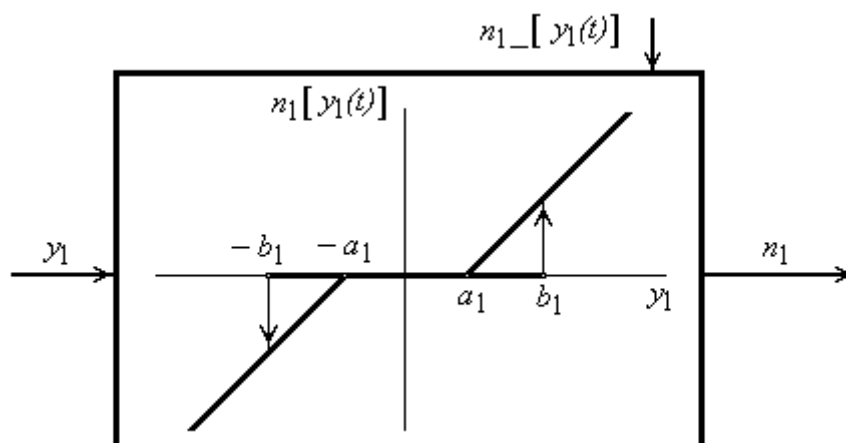


Рис. 1. Нелинейность  $n_1[y_1(t)]$

Аналитическое описание нелинейности:  $n_1[y_1(t)]$

$$\begin{aligned} &\text{Если } |y_1| \leq b_1, \text{ или, если } b_1 < |y_1| < a_1 \text{ и } n_{1-}(y_1) = 0 \text{ тогда } n_1(y_1) = 0; \\ &\text{если } |y_1| \geq a_1 \text{ и } n_{1-}(y_1) = 0, \text{ или если } |y_1| > b_1 \text{ и } n_{1-}(y_1) \neq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{тогда } n_1(y_1) = y + b_1 \cdot \text{Sign}(y_1)$$

Допустим, нелинейная функция  $n_2[y_2(t)]$  соответствует учету сухого трения в элементе при пренебрежении не только его массой, но и вязким трением (представлено на рисунке 2).

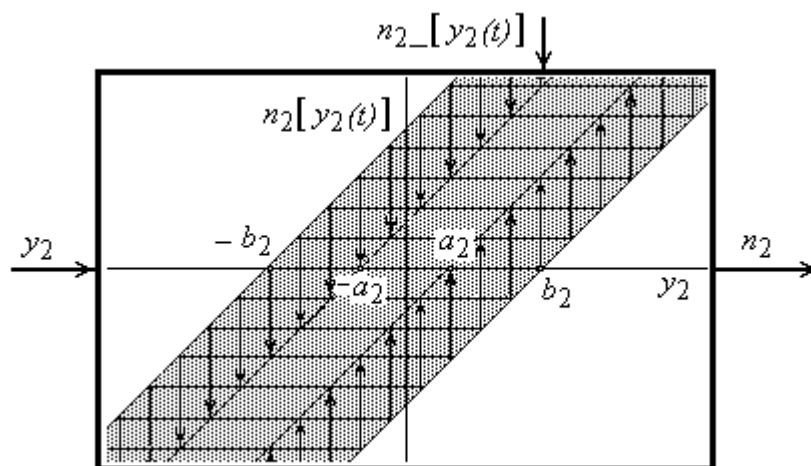


Рис. 2. Нелинейность  $n_2[y_2(t)]$

Аналитическое описание нелинейности:

- 1) если  $|n_2(y_2) - y_2| < b_2$ , тогда  $n_2(y_2) = n_2(y_2)$ ;
  - 2) если  $|n_2(y_2) - y_2| \geq b_2$ , тогда  $n_2(y_2) = y_2 - a_2$ ;
  - 3) если  $|n_2(y_2) - y_2| \leq b_2$ , тогда  $n_2(y_2) = y_2 + a_2$ .
- (3)



**Примечание.** Описание (3) возможно, если элемент с трением охвачен отрицательной обратной связью [3]. В описаниях (2), (3)  $n_{1-}(y_1)$  и  $n_{2-}(y_2)$  - предыстория состояния нелинейных функций ввиду их неоднозначности.

Как можно видеть, система (1) представляет собой находящуюся под внешним гармоническим воздействием многомерную нелинейную динамическую систему 3-го порядка с двумя существенными неоднозначными нелинейностями. Необходимо исследовать данную систему, при этом исследование необходимо провести аналитически точными методами.

**Пример исследования.** Допустим, элементам матрицы **A** приданы значения:  $a_{11} = -2.0$ ,  $a_{12} = -1.0$ ,  $a_{21} = 1.5$ ,  $a_{22} = 0.5$ , элементам матрицы **D** – значения:  $d_{11} = -1$ ,  $d_{12} = 0$ ,  $d_{21} = 0$ ,  $d_{22} = 0$ . Структура системы представлена на рисунке 3.

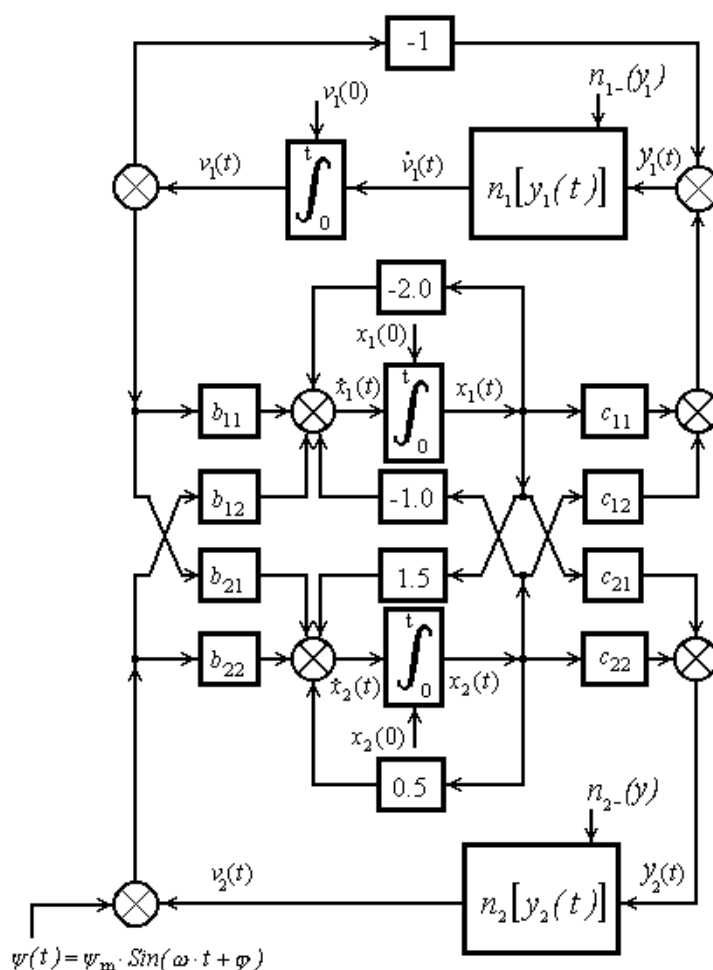


Рис. 3. Исходная многомерная система

Преобразованием  $x(t) = M \cdot g(t)$ ,  $g(t) = M^{-1} x(t)$  с матрицей преобразования

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.5 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 \\ -2.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

система (1) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} & 3 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} \\ -2 \cdot (b_{11} + b_{21}) & -2 \cdot (b_{12} + b_{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} - c_{12} & c_{11} - 1.5 \cdot c_{12} \\ c_{21} - c_{22} & c_{21} - 1.5 \cdot c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{y}_1(t) &= n_1[y_1(t)]; \\ v_2(t) &= \psi_m \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t + \varphi) + n_2[y_2(t)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda_1 = -0.5 \text{ c}^{-1}$ ,  $\lambda_2 = -1.0 \text{ c}^{-1}$  - собственные числа матрицы  $A$  при заданных в примере значениях ее элементов.

В преобразованном виде системе «подготовлена» к декомпозиции. В структурном виде преобразованная система (4) представлена на рисунке 4.

Декомпозицией - выбором значений параметров настройки  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{22}$  и  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$  - преобразованную систему (4) можно «расщепить» на две независимые подсистемы второго и первого порядков.

Так, для декомпозиции 1:  $1.5 \cdot b_{12} = -b_{22}$ ;  $b_{11} = -b_{21}$ ;  $c_{11} = 1.5 \cdot c_{12}$ ;  $c_{21} = c_{22}$  система (4) будет представлена двумя независимыми подсистемами

$$\dot{g}_1 = -0.5 \cdot g_1 + (3 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21}) \cdot v_1, \quad y_1 = (c_{11} - c_{12}) \cdot g_1 - v_1, \quad \dot{y}_1 = n_1(y_1); \quad (5-a)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= -1.0 \cdot g_2 - 2 \cdot (b_{12} + b_{22}) \cdot [v_2 + \psi_m \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t + \varphi)], \\ y_2 &= (c_{21} - 1.5 \cdot c_{22}) \cdot g_2, \quad v_2 = n_2(y_2). \end{aligned} \quad (5-b)$$

Структура системы (4) в условиях декомпозиции 1 представлена на рисунке 5.

Для декомпозиции 2:  $1.5 \cdot b_{11} = -b_{21}$ ;  $b_{12} = -b_{22}$ ;  $c_{21} = 1.5 \cdot c_{22}$ ;  $c_{11} = c_{12}$ . система (4) также может быть представлена двумя подсистемами:

$$\dot{g}_2 = -1.0 \cdot g_2 - 2 \cdot (b_{11} + b_{22}) \cdot v_1, \quad y_1 = (c_{11} - 1.5 \cdot c_{12}) \cdot g_2 - v_1, \quad \dot{y}_1 = n_1(y_1) \quad (6-a)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= -0.5 \cdot g_1 + (3 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22}) \cdot [v_2 + \psi_m \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t + \varphi)], \\ y_2 &= (c_{21} - c_{22}) \cdot g_1, \quad v_2 = n_2(y_2). \end{aligned} \quad (6-b)$$

Структура системы (4) в условиях декомпозиции 2 представлена на рисунке 6.

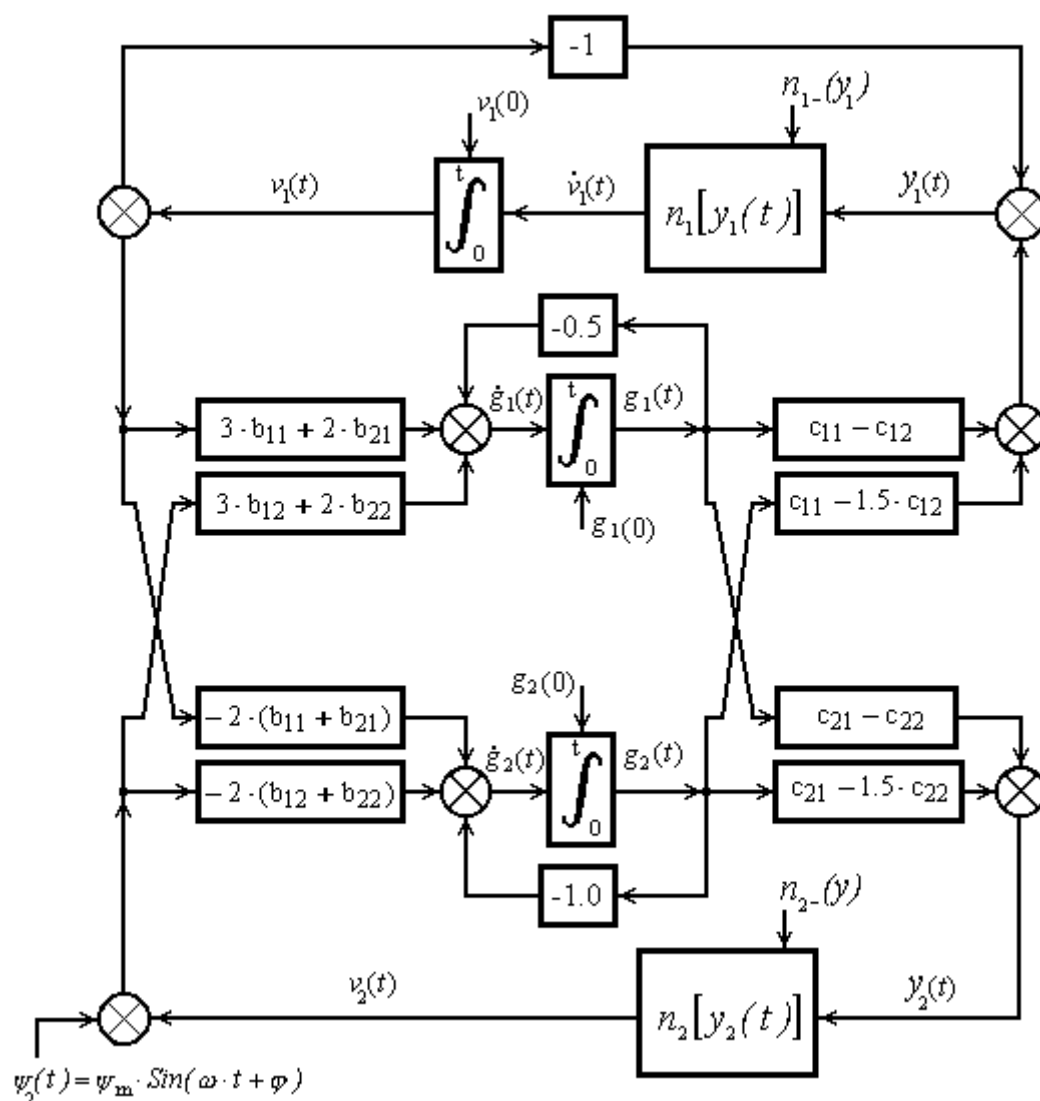


Рис. 4. Структура преобразованной системы (4)

Как можно видеть из выражений (5-а), (6-а) и (5-б), (6-б) (см. также рис. 5, 6), преобразованная система (4) в условиях каждой декомпозиции «расщепляется» на автономную нелинейную подсистему 2-го порядка (5-а), (6-а) и неавтономную (находящуюся под внешним гармоническим воздействием) нелинейную подсистему 1-го порядка (5-б), (6-б).

Каждая из полученных подсистем может быть исследована точным аналитическим методом. Так, например, система вида (5-а), (6-а) с нелинейностью (2) (см. также рис. 1) была исследована методом точечных отображений в работах [4, 5]. Система вида (5-б), (6-б) с нелинейностью (3) (см. также рис. 2) в автономном случае ( $\psi_m = 0$ ) была исследована в работе [6], в неавтономном случае (с гармоническим внешним воздействием) – в работах [7, 8].

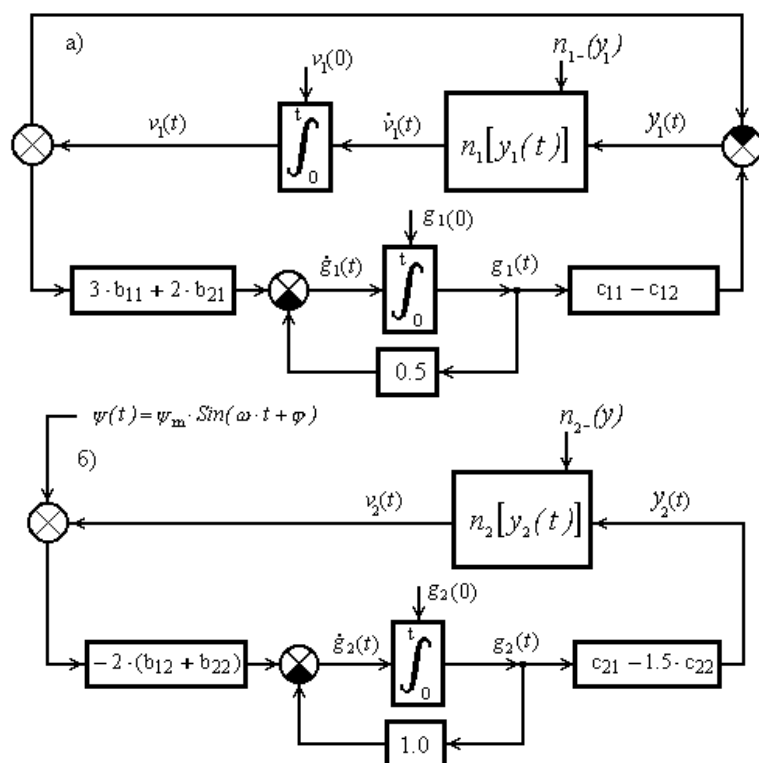


Рис. 5. Преобразованная система (4) в условиях декомпозиции 1  
 а) структура подсистемы (5-а), б) структура подсистемы (5-б)

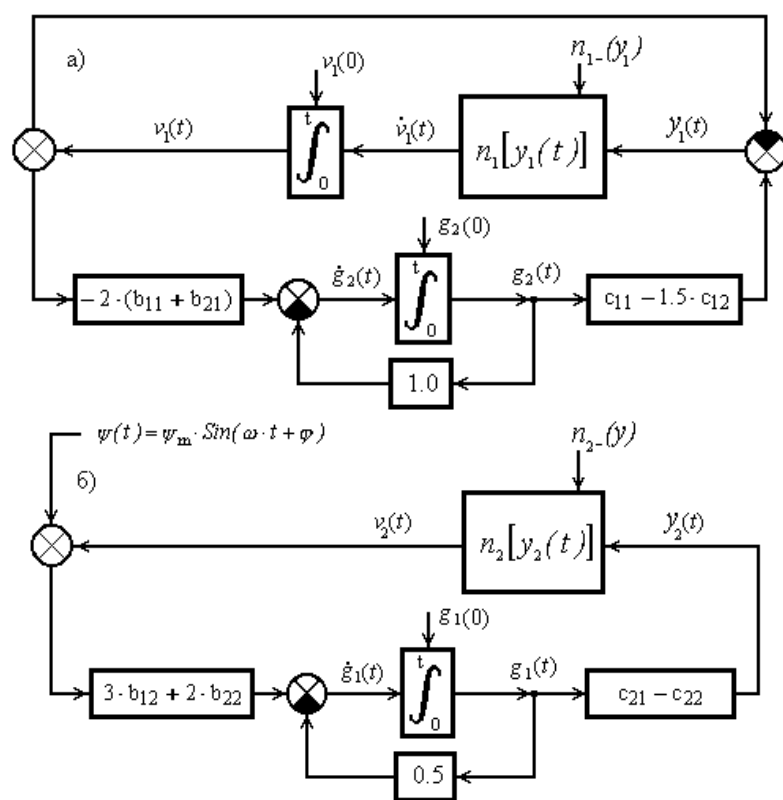


Рис. 6. Преобразованная система (4) в условиях декомпозиции 2  
 а) структура подсистемы (6-а), б) структура подсистемы (6-б)

Выберем элементы настройки в матрице управления **B** и в матрице наблюдения **C** системы (1), например, следующим образом

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4.0 \text{ c}^{-1} & 3.0 \text{ c}^{-1} \\ 6.0 \text{ c}^{-1} & -3.0 \text{ c}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4.0 & 4.0 \\ 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

С данными значениями (7) коэффициентов матриц **B** и **C** выполняются условия декомпозиции 2, при которых подсистемы (6-а) и (6-б) приобретают следующий вид:

$$\dot{g}_2 = -1.0 \cdot g_2 - 8 \cdot v_1, \quad y_1 = 2 \cdot g_2 - v_1, \quad \dot{v}_1 = n_1(y_1); \quad (8-а)$$

$$\dot{g}_1 = -0.5 \cdot g_1 + 3.0 \cdot [n_2(y_2) + \psi_m \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t + \varphi)], \quad y = -0.5 \cdot g_1. \quad (8-б)$$

Поскольку системы вида (6-а) и (6-б) уже исследованы, не составляет труда узнать, какие движения будут существовать в подсистемах (8-а) и (8-б).

При заданных значениях коэффициентов (7) подсистема (8-а) является автоколебательной и совершает автоколебательные движения с собственной частотой (представлено на рисунках 6-а, 6-б).

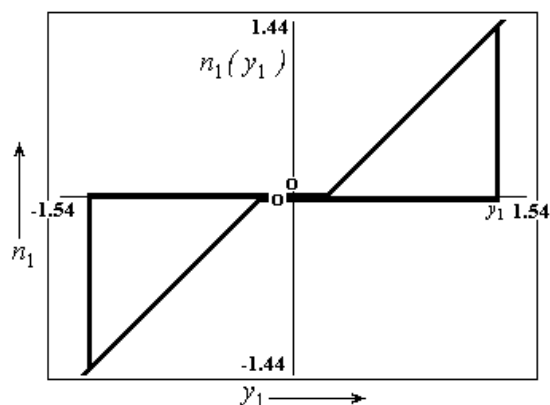


Рис. 6-а. Движения в подсистеме (8-а) по нелинейности  $n_1(y_1)$

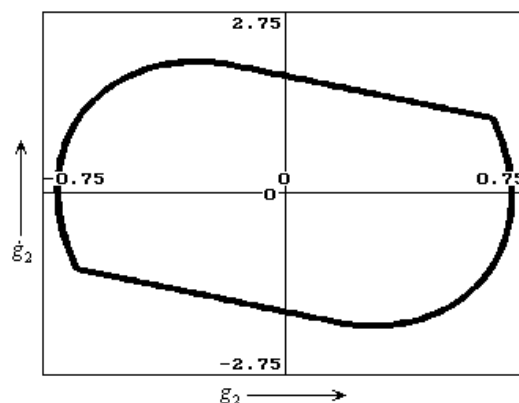


Рис. 6-б. Устойчивый предельный цикл на трехлистной фазовой плоскости подсистемы (8-а)

При заданных значениях коэффициентов (7) подсистема (8-б) является также автоколебательной и при действующем на нее внешнем гармоническом воздействии, например, с частотой  $\omega = 0.2 \text{ рад/сек}$  и амплитудой  $\psi_m = 1.1$  совершает устойчивое вынужденное движение, представленное на рисунках 7-а, 7-б.

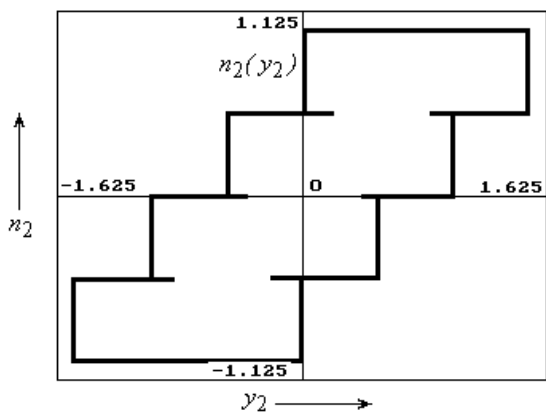


Рис. 7-а - Вынужденное периодическое движение в подсистеме (8-б) по нелинейности  $n_2(y_2)$

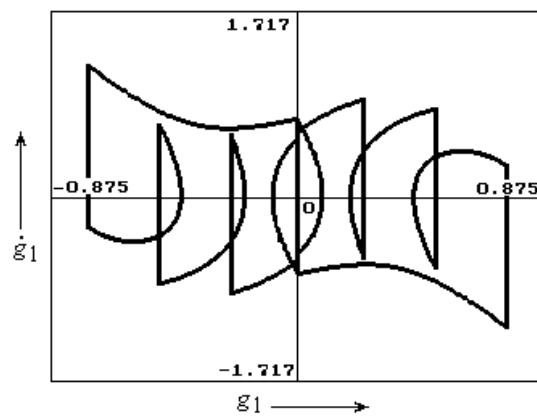


Рис. 7-б. Вынужденное периодическое движение на многолистной двусторонней фазовой плоскости подсистемы (8-б)

Во временной области данные движения представлены на рисунках 8 и 9 соответственно  $\xi_1$

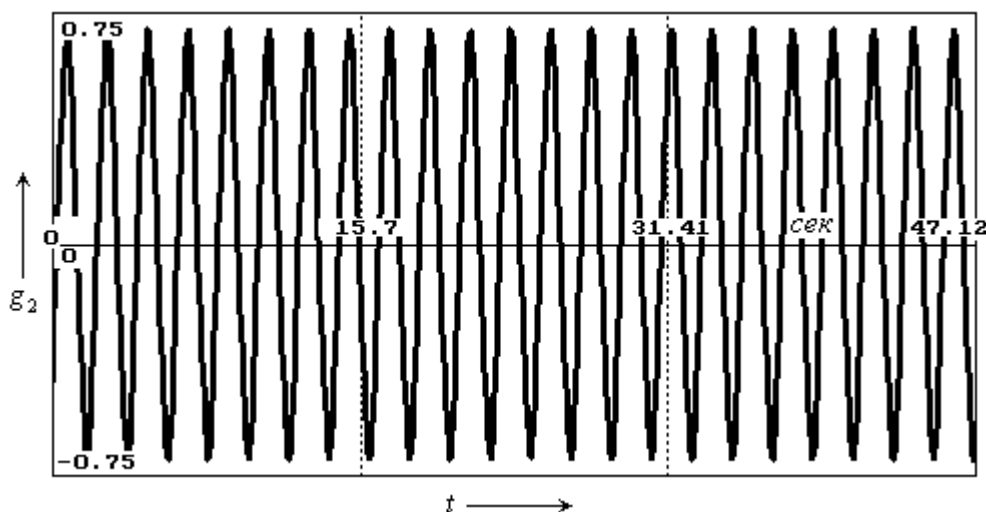


Рис. 8. Автоколебательное движение в подсистеме (8-а)

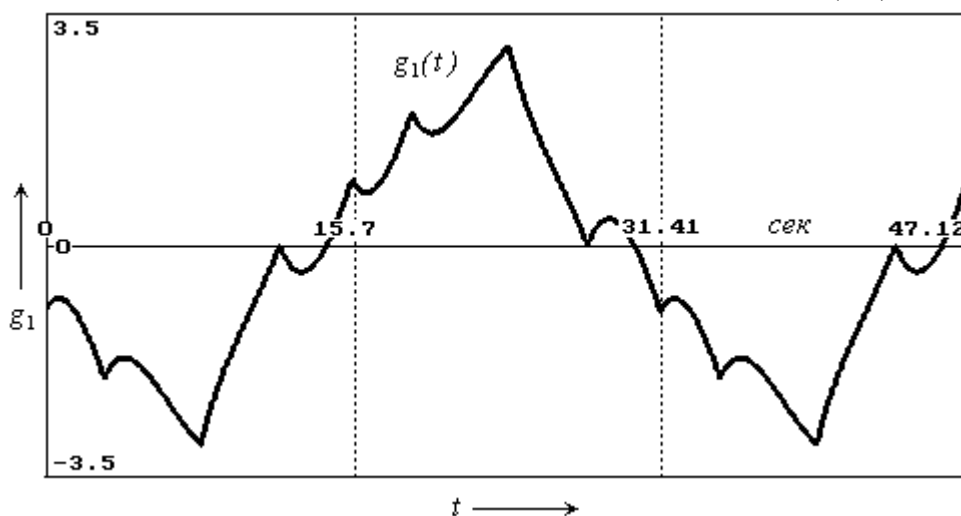


Рис. 9. Вынужденное периодическое движение в подсистеме (8-б) при  $\psi_m = 1.1$ ,  $\omega = 0.2$  рад/с

В соответствии с преобразованием  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}(t)$  и принятой матрице преобразования справедливо следующее

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В соответствии с (9) движения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в исходной системе (1) будут представлять собой следующие сочетания движений  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  из преобразованной системы (4) в условиях декомпозиции 2:

$$x_1(t) = g_1(t) + g_2(t); \quad x_2(t) = -g_1(t) - 1.5 \cdot g_2(t).$$

Во временной области движения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  представлены на рисунке 10.

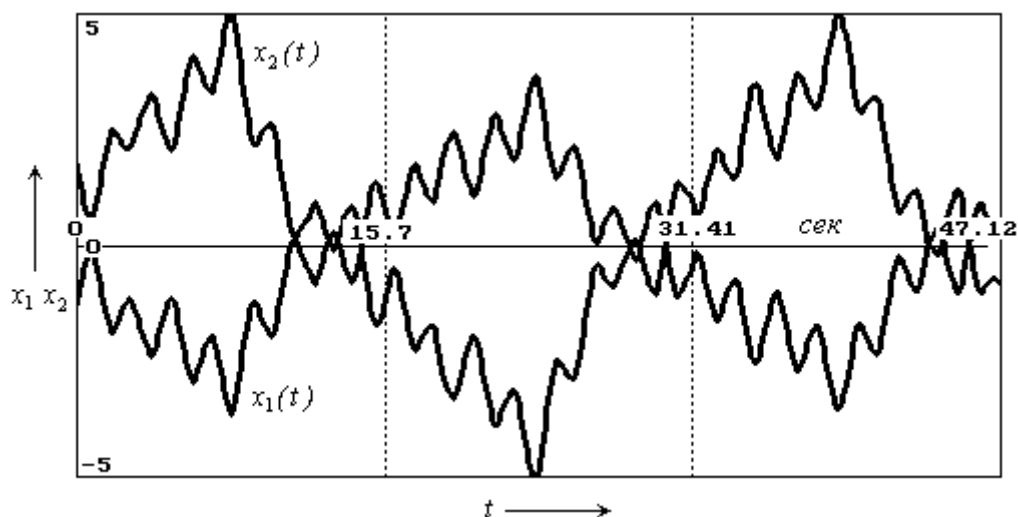


Рис. 10. Движения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в исходной системе (1)

Аналогичные результаты можно получить и для другой комбинации значений элементов матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , соответствующей декомпозиции 1.

**Заключение.** Истоки представленного метода лежат в работах Р.А. Нелепина [9], впервые применившего аналитически точный подход к исследованию существенно нелинейных систем высокой размерности.

В данном изложении метод обобщен на многомерные нелинейные динамические системы [10]. Значительно расширен спектр нелинейных функций, определяющих учет сухого трения в элементах реальных автоматических систем, предложен новый подход к получению матрицы преобразования исходной системы, введено понятие двусторонней фазовой плоскости. В большинстве случаев метод позволяет оценить структуру пространства состояний нелинейных многомерных систем, определить основные типы движений, установить основные закономерности динамического поведения системы.

Поскольку данный подход не позволяет исследовать все пространство состояний системы и выявить все существующие в системе виды движений. Метод наиболее эффективен в сочетании с другими методами исследования (аналитическими приближенными, неаналитическими, графо-аналитическими и др.)

## Список литературы

1. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». Вып. 1, 2012. С. 47-55.
2. Камачкин А.М., Согонов С.А., Шамберов В.Н. Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж, Изд-во «Научная книга», № 1(55), 2014. С. 12–15.
3. Шамберов В.Н. Влияние сухого трения на устойчивость работы машин // Проблемы машиноведения: точность, трение и износ, надежность, перспективные технологии. СПб: Наука, Институт проблем машиноведения РАН, 2005. С. 256–273.
4. Шамберов В.Н. Влияние некулоновского сухого трения на устойчивость автоматических систем // Доклады Академии Наук. М.: 2005, том 401, №2. С. 193-195.
5. Нелепин Р.А., Шамберов В.Н. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования (к теории регулятора прямого действия при учете вязкого и некулоновского сухого трения) // Численные и качественные методы прикладной математики (вопросы механики и процессов управления; выпуск 23). - СПб: Изд-во СПбГУ, 2004.- С. 159– 80.
6. Шамберов В.Н. Влияние сухого трения на возникновение автоколебаний в машинах (аналитическое исследование) // Акустические проблемы большого города: Труды ЦНИИ им.акад.А.Н.Крылова. Вып. 15(299) – СПб.: ЦНИИ им. акад.А.Н.Крылова , 2003. - С. 125–132.
7. Аунг П.В., Шамберов В.Н. Вынужденные колебания в системе в сухим трением, находящейся под внешним гармоническим воздействием / Системы управления и информационные технологии. №4(58). ООО Издательство «Научная книга», Воронеж. 2014. С. 4-6.
8. Аунг Пьюэ Вин Автоколебания в неавтономных автоматических системах с сухим трением при гармоническом внешнем воздействии // Вестник АГТУ, серия «Морская техника и технология». Астрахань: Изд-во АГТУ. Вып. 2. 2016. С. 77–87.
9. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. О работах Р.А. Нелепина, выполненных в области разработки и применения точных аналитических методов в теории нелинейных автоматических систем // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», № 3, 2013, с. 37-60. ([http://www.math\\_spbu.ru/diffjournal](http://www.math_spbu.ru/diffjournal)).
10. Kamachkin A.M., Chitrov G.M., Shamberov V.N. Algebraical aspects of parametrical decomposition method // 2015 International Conference «Stability and control Processes» in memory of V.I. Zubov (SCP-2015), pp. 52-54 (DOI: 10.1109/SCP. 2015. 7342056 ).



## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ И СУХИМ ТРЕНИЕМ

В.Н. Шамберов

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
факультет корабельной энергетики и автоматики  
190008, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3, e-mail: [shamberov@mail.ru](mailto:shamberov@mail.ru)

Часто подвижные элементы исполнительных устройств автоматических систем необходимо рассматривать в условиях существования внешнего периодического воздействия. При этом в математической модели такого устройства бывает также необходимо учитывать, как инерционные свойства нагрузки, так и присутствие сухого трения. Возникающие в устройстве вынужденные периодические движения, могут иметь качественно различный вид, зависящий, как от параметров самого устройства, так и от параметров внешнего воздействия. С практической точки зрения важно знать, при каких значениях параметров возникнет тот, или иной вид движения.

**Ключевые слова:** сухое трение, математическая модель, формула Коши, фазовая плоскость, фазовая траектория, структура разбиения пространства параметров.

**Введение.** Сухое трение в подвижной части любого технического устройства может вызывать особые виды движений [1 - 4]. Некоторые виды движений являются нежелательными для эксплуатации технического устройства. Для выяснения причин появления того или иного вида движений необходима математическая модель, позволяющая объяснить наблюдаемое динамическое поведение устройства.

Принятая во многих исследованиях кулоновская модель сухого трения не может отразить большинство видов движений, возникающих в технических устройствах с сухим трением. В данной работе применяется некулоновская модель сухого трения, учитывающая превышение сил трения покоя над силами трения движения.

**Постановка задачи.** Для принятой в работе математической модели технического устройства (некоторого механического подвижного элемента, обладающего массой, при наличии сухого и вязкого трения, находящегося по внешним периодическим воздействием) необходимо осуществить разбиение пространства параметров на области качественно различных типов движений.

**Математическая модель.** Для моделирования динамики элемента с трением представим его в виде условной механической системы с одной степенью свободы с внешним трением при наличии внешнего гармонического воздействия (представлено на рисунке 1).

На рисунке обозначено: тело с сосредоточенной массой; условное изображение вязкого трения; условное изображение сухого трения [5];  $F(t) = F_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  - внешнее периодическое (гармоническое) воздействие – сила.

Сухое трение при движении (скольжении) моделируется зависимостью

$$F_{\text{с.тр.дв.}}(v) = F_{\text{ск.}} \cdot \text{Sign}(v). \quad (1)$$

Вязкое трение моделируем зависимостью

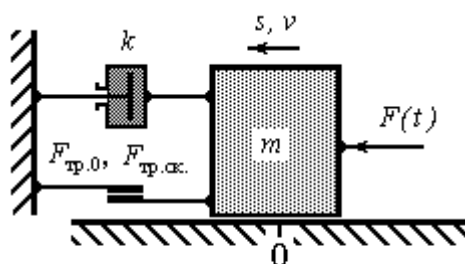


Рис. 1 – Условная механическая система

$$F_{в.тр.}(v) = k \cdot v. \quad (2)$$

При этом параметрами системы являются:  $m$  - масса тела;  $k$  - коэффициент, характеризующий вязкое трение;  $F_{тр.0}$  - сила трения покоя;  $F_{ск.} < F_{тр.0}$  - сила сухого трения при движении (скольжении);  $F_{max}$  - максимальное значение силы внешнего воздействия за период (амплитуда);  $\omega$  - угловая частота внешнего воздействия;  $\varphi$  - фаза внешнего воздействия. Переменными являются:  $s(t)$  - перемещение тела;  $v(t)$  - скорость перемещения тела;  $a(t)$  - ускорение перемещения тела;  $F(t)$  - внешнее воздействие;  $t$  - время (независимая переменная).

Внешнее трение  $F_{тр}(v)$  учитываем в виде суммы сухого и вязкого трения (представлено на рисунке 2).

$$|F_{тр}(v)| < F_{тр.0}, \text{ если } v = 0; \quad (2)$$

$$F_{тр}(v) = F_{в.тр.}(v) + F_{с.тр.дв.}(v), \text{ если } v \neq 0.$$

Динамическую модель элемента с трением, с учетом (1), (2) получим на основе принципа динамического равновесия Даламбера - масса ( $m$ ) вызывает силу инерции ( $m \cdot a$ ), пропорциональную ускорению ( $a$ ) и противоположно ему направленную:

$$m \cdot a = 0,$$

$$\text{если } v_- = 0 \text{ и } |F - m \cdot a_-| < F_{тр.0};$$

$$m \cdot a = F - F_{в.тр.}(v) - F_{с.тр.дв.}(v), \quad (3)$$

$$\text{если } v_- \neq 0, \text{ или}$$

$$\text{если } v_- = 0 \text{ и } |F - m \cdot a_-| \geq F_{тр.0},$$

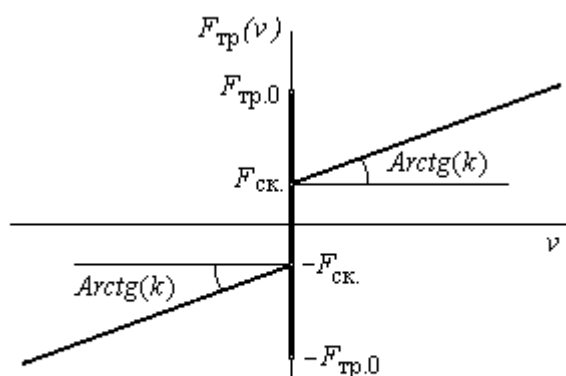


Рис.2 – Геометрическая интерпретация закона внешнего трения

В описании (3) переменные  $v_-$ ,  $a_-$  - характеризуют предысторию состояния системы –

предыдущие значения скорости  $v$  и ускорения  $a$  системы на момент определения последующего значения.

Описание (1)-(3) относится к моделям логико-динамического класса (помимо дифференциальных уравнений для описания процесса используются логические высказывания), первое уравнение в (3) соответствует состоянию покоя, второе в (3) – собственно движению (скольжению). Описанию (3) соответствует структурная математическая модель (представлено на рисунке 3). Функционирование в составе модели логического элемента (ЛЭ) характеризуется определенным алгоритмом (представлено на рисунке 4).

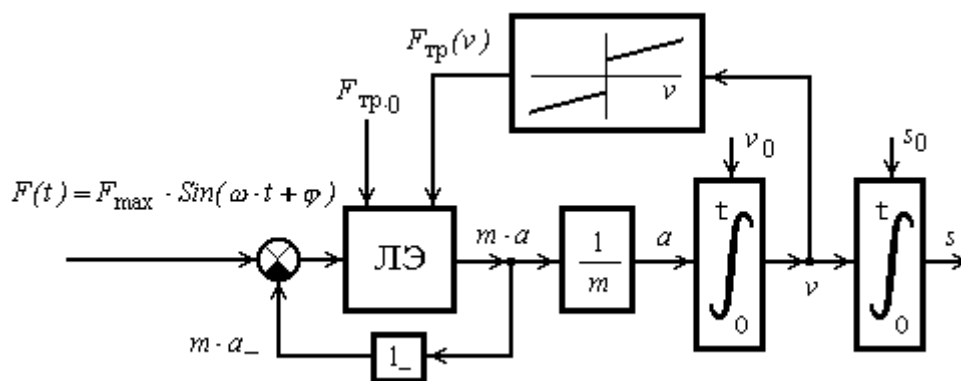


Рис. 3. Структурная схема рассматриваемой динамической системы

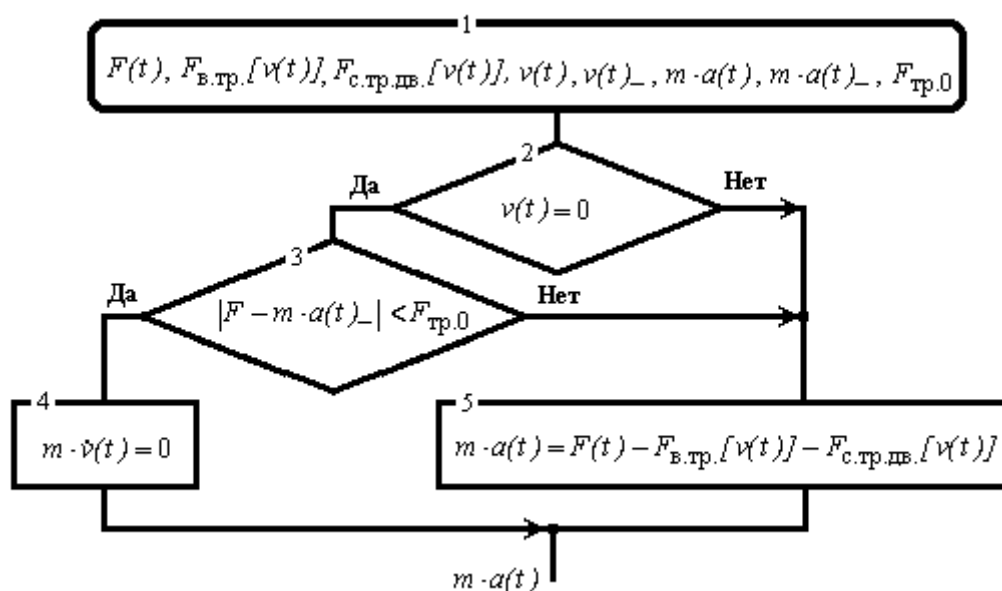


Рис. 4. Структура алгоритма логико-динамической модели

Под воздействием внешнего гармонического воздействия тело совершает периодическое, устойчивое движение с периодом равным периоду внешнего воздействия.

Однако, в зависимости от значений параметров, движение может иметь два качественно различного между собой вида:

1). Плавное периодическое движение близкое к гармоническому движению (представлено на рисунке 5).

2). Периодическое движение с остановками (представлено на рисунке 6).

С технической точки зрения важно знать, при каких значениях параметров возникнет тот, или другой тип движения.

Речь идет о разбиении пространства параметров на две области: 1) область значений параметров, для которых остановки невозможны и 2) область значений параметров, для которых остановки неизбежны.

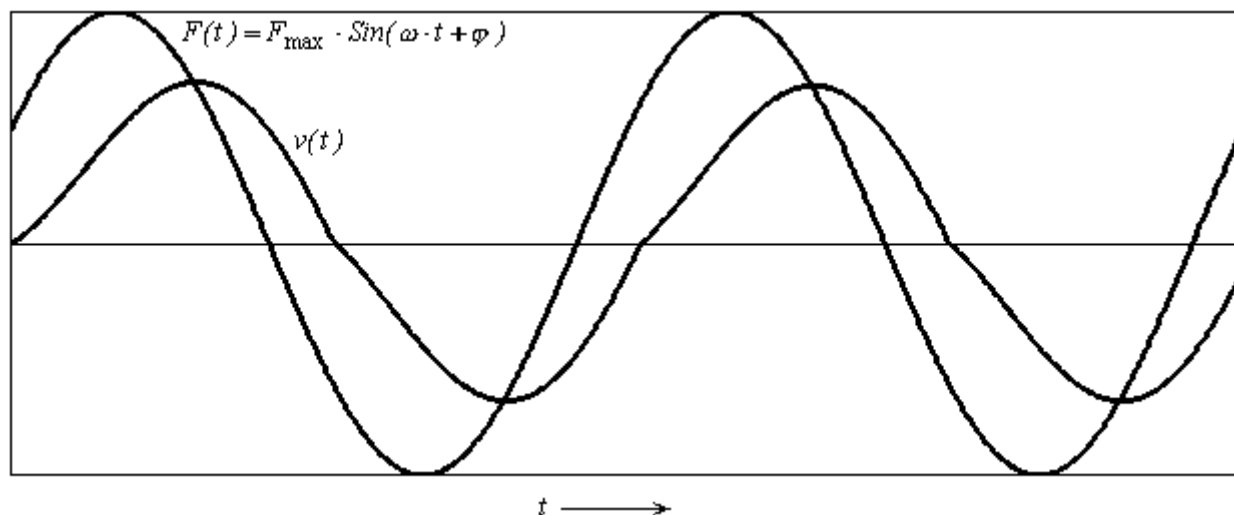


Рис. 5. Периодическое движение физического тела без остановок

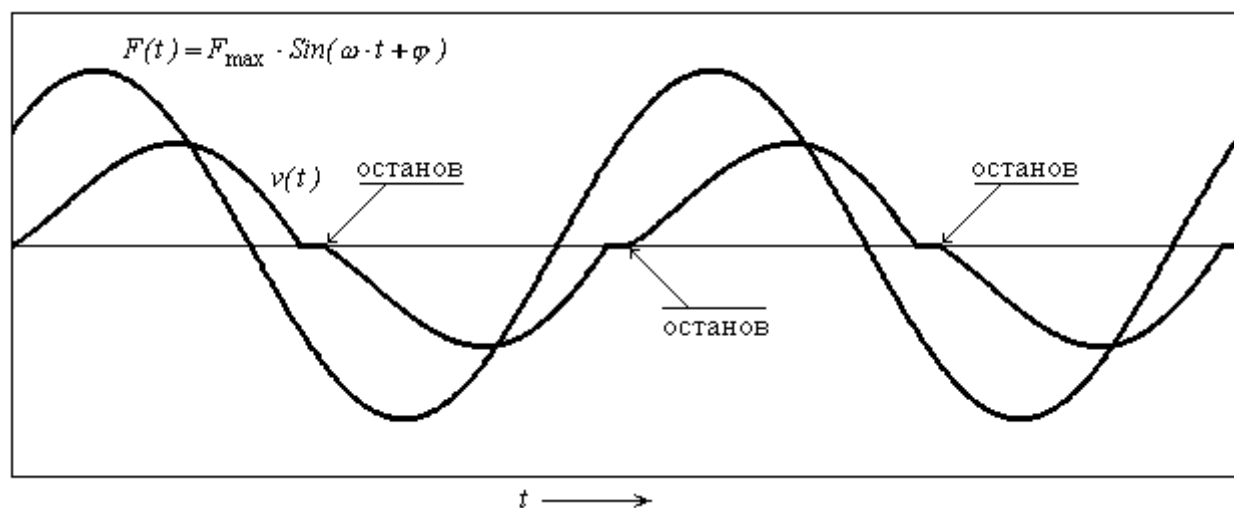


Рис. 6. Периодическое движение физического тела с остановками

Движение в модели при  $v_- = 0$  может начаться (или продолжиться) только при  $|F - m \cdot a_-| \geq F_{\text{тр.0}}$ . С возникновением движения (или продолжения движения после  $v_- = 0$ ) сила сухого трения скачком, в силу уравнений (2) и (3), уменьшается на величину  $F_{\text{тр.0}} - F_{\text{ск.}}$ . Скачкообразное изменение силы сопротивления, согласно принципу Даламбера, вызовет скачкообразное изменение силы инерции  $m \cdot a$  и, соответственно, скачкообразное изменение ускорения на величину  $|a_- - a| = (F_{\text{тр.0}} - F_{\text{ск.}}) / m$ .

При смене знака скорости  $v$  (прохождении  $v$  через ноль) сила сухого трения движения меняет свое значение на противоположное, т.е. изменяет собственное значение на величину равную  $2 \cdot F_{\text{ск.}}$ .

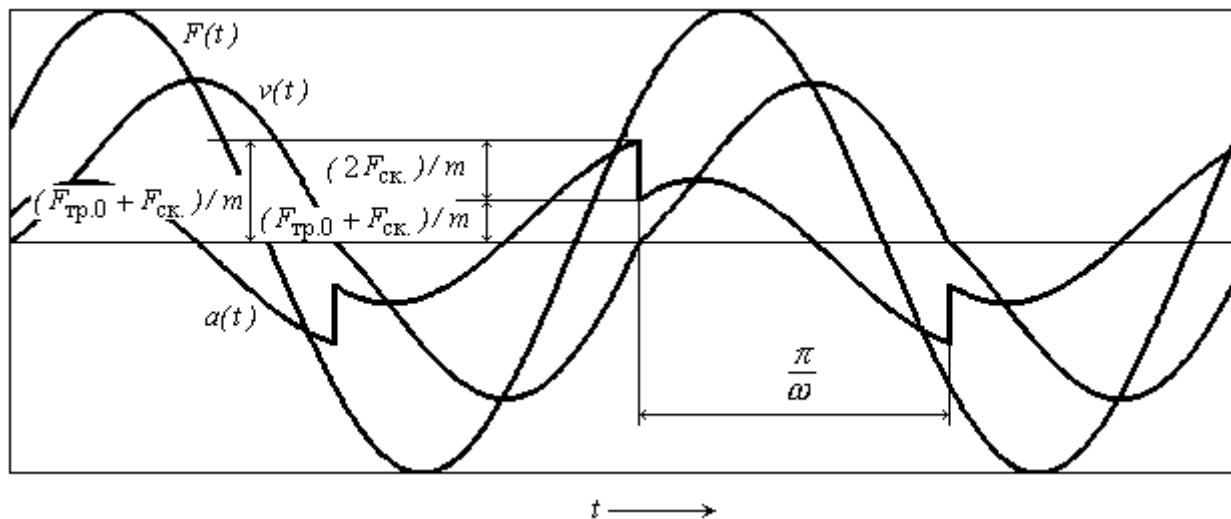
Для продолжения движения необходимо, чтобы при  $v_- = 0$  выполнялось бы условие

$$|F - m \cdot a_-| \geq F_{\text{тр.0}} + F_{\text{ск.}} \quad (4)$$

тогда после смене знака скорости  $v$  (прохождении  $v$  через ноль) будет выполняться условие

$$|F - m \cdot a| \geq F_{\text{тр.0}} - F_{\text{ск.}} \quad (5)$$

и движение будет продолжено без остановки (представлено на рисунке 7).



Ри

с. 7. Периодическое движение физического тела без остановок

При невыполнении условия (4) и соответственно условия (5) произойдет остановка физического тела, которая будет длиться до тех пор, пока изменяющееся значение внешнего воздействия не обеспечит выполнение условия (4) и соответственно условия (5) (представлено на рисунке 8).

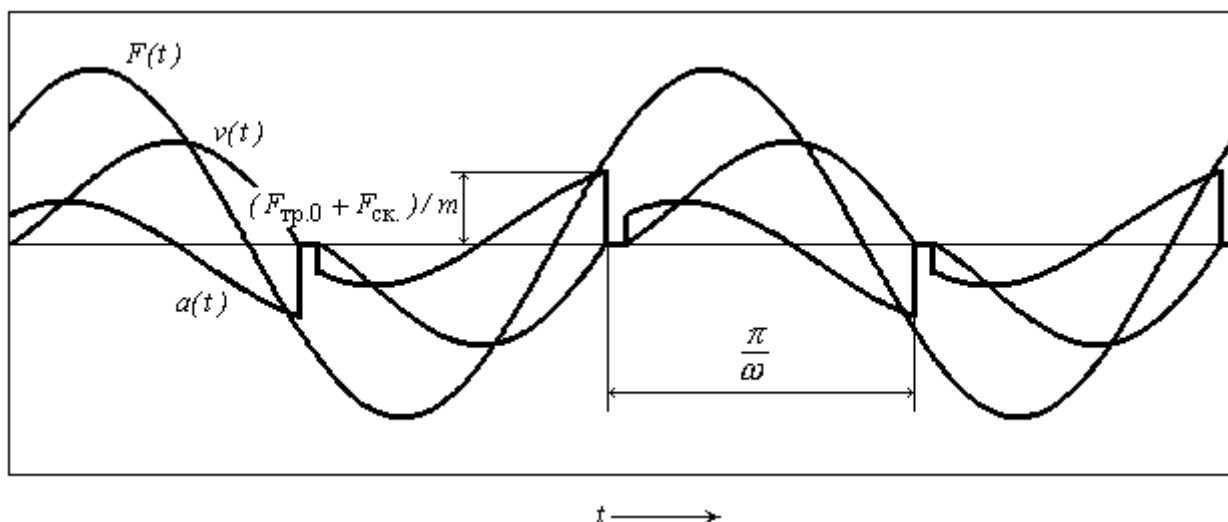


Рис. 8 – Периодическое движение физического тела с остановками

На фазовой плоскости  $v(t) - a(t)$  этим двум граничным случаям будет соответствовать (в силу симметричности модели) фазовая полутраектория, выходящая из точки с координатами  $v(t) = 0$ ,  $a(t) = (F_{\text{тр.0}} - F_{\text{ск.}}) / m$  и проходящая через точку с координатами  $v(t + \pi/\omega) = 0$ ,  $a(t + \pi/\omega) = -(F_{\text{тр.0}} + F_{\text{ск.}}) / m$  (представлено на рисунке 9).

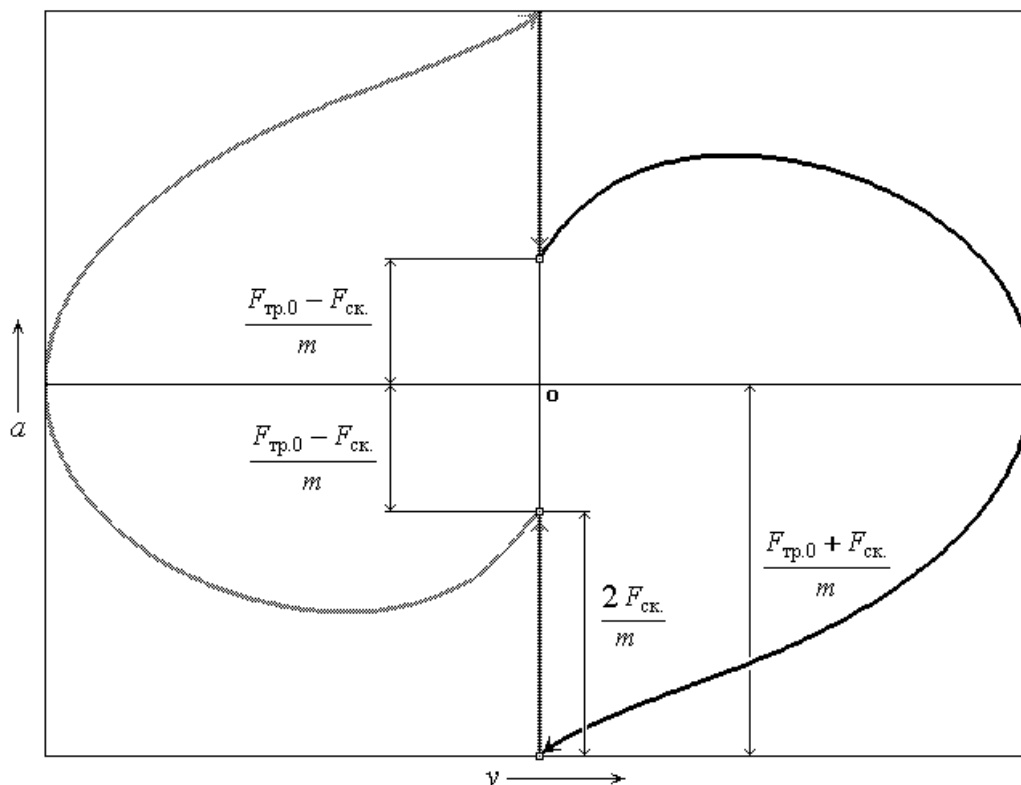


Рис. 9 – Искомая фазовая полутраектория на фазовой плоскости  $v(t) - a(t)$

Для нахождения условий существования такой фазовой полутраектории, определяющей границу между двумя видами движений воспользуемся формулой Коши.

Рассмотрим уравнение (3) при  $v(t) > 0$

$$a(t) = -\frac{k}{m} v(t) - \frac{F_{ск.}}{m} + \frac{F_{max}}{m} \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad v(t) > 0. \quad (6)$$

Запишем решение уравнения (6) в форме Коши на отрезке времени  $[t_i, t_{i+1}]$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) \cdot e^{-\frac{k}{m}(t_{i+1}-t_i)} + \frac{F_{max}}{m} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t_{i+1}} \times \int_{t=t_i}^{t=t_{i+1}} e^{\frac{k}{m}t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot dt - \frac{F_{ск.}}{J} e^{\lambda \cdot t_{i+1}} \cdot \int_{t=t_i}^{t=t_{i+1}} e^{\frac{k}{m}t} dt \quad (7)$$

Раскрывая интегралы в уравнении (7), получим

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) \cdot e^{-\frac{k \cdot (t_{i+1} - t_i)}{m}} + \frac{F_{\max} \cdot e^{-\frac{k \cdot t_{i+1}}{m}}}{\sqrt{m^2 \cdot \omega^2 + k^2}} \times$$

$$\times \left[ -e^{\frac{k \cdot t_{i+1}}{m}} \cdot \cos(\omega \cdot t_{i+1} + \varphi + \delta) + e^{\frac{k \cdot t_i}{m}} \cdot \cos(\omega \cdot t_i + \varphi + \delta) \right] -$$

$$-\frac{F_{\text{ск.}}}{k} \left[ 1 - e^{-\frac{k \cdot (t_{i+1} - t_i)}{m}} \right], \quad (8)$$

где  $\delta = \text{Arctg}\left(\frac{k}{m \cdot \omega}\right)$ ,  $\varphi = \text{ArcSin}\left(\frac{F_{\text{тр.0}}}{F_{\max}}\right)$  - определяется из уравнения (3), в которое

подставлено  $v(t) = 0$ ,  $a(t) = (F_{\text{тр.0}} - F_{\text{ск.}})/m$  (или  $a(t) = -(F_{\text{тр.0}} + F_{\text{ск.}})/m$ ).

Для сокращения числа параметров введем обобщенный параметр  $\alpha = m \cdot \omega/k$ .

Подставив в (8)  $t_i = 0$ ,  $t_{i+1} = \pi/\omega$ ,  $v(0) = 0$ ,  $v(\pi/\omega) = 0$ , окончательно получим уравнение граничной поверхности

$$\left( 1 + e^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right) \cdot \cos(\varphi + \delta) = \frac{F_{\text{ск.}}}{F_{\max}} \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right), \quad (9)$$

где  $\delta = \text{Arctg}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ,  $\varphi = \text{ArcSin}\left(\frac{F_{\text{тр.0}}}{F_{\max}}\right)$ .

Граничная поверхность, представленная уравнением (9) разбивает пространство параметров модели  $F_{\text{тр.0}}$ ,  $F_{\text{ск.}}$ ,  $F_{\max}$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $k$  (соответственно  $\alpha = m \cdot \omega/k$ ) на две области: 1) область, где остановки подвижного устройства невозможны; 2) область, для которой подвижное устройство перемещается с остановками. Фрагмент структуры разбиения пространства параметров  $F_{\text{тр.0}}$ ,  $F_{\text{ск.}}$ ,  $\alpha = m \cdot \omega/k$  на соответствующие области представлен на рисунке 10.

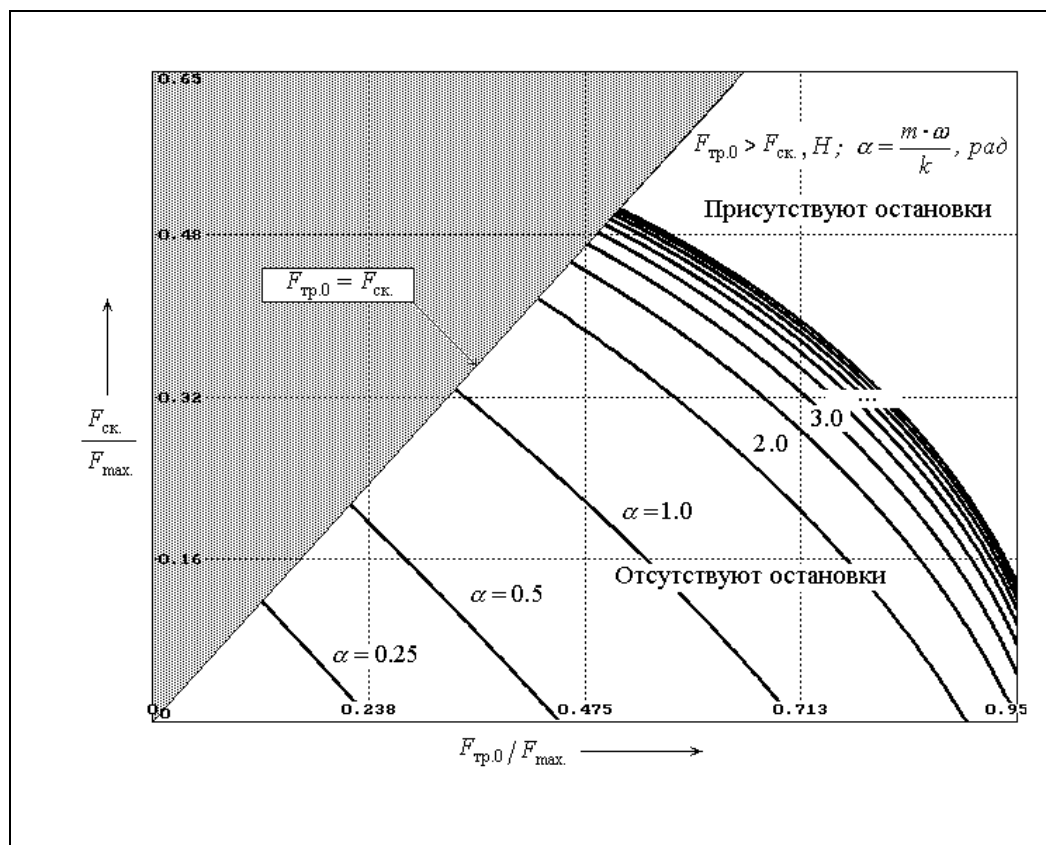


Рис. 10. Структура разбиения пространства параметров

Разбиение пространства параметров можно осуществлять в координатах любых параметров, например, на плоскости параметров внешнего воздействия  $F_{\max}$ ,  $\omega$  при задаваемых значениях параметра  $k$  и заданных значениях параметров  $m$ ,  $F_{\text{тр.0}}$ ,  $F_{\text{ск.}}$  (представлено на рисунке 11).

**Заключение.** Полученное разбиение позволяет установить причинно-следственную связь между значениями каждого из параметров и динамическим поведением модели - понять «механизм» влияния каждого параметра модели на ее динамическое поведение. Так из представленной структуры ясно, что для устранения остановок необходимо уменьшать такие обобщенные параметры как:  $\alpha = m \cdot \omega / k$ ,  $F_{\text{тр.0}} / F_{\max}$ ,  $F_{\text{ск.}} / F_{\max}$ .



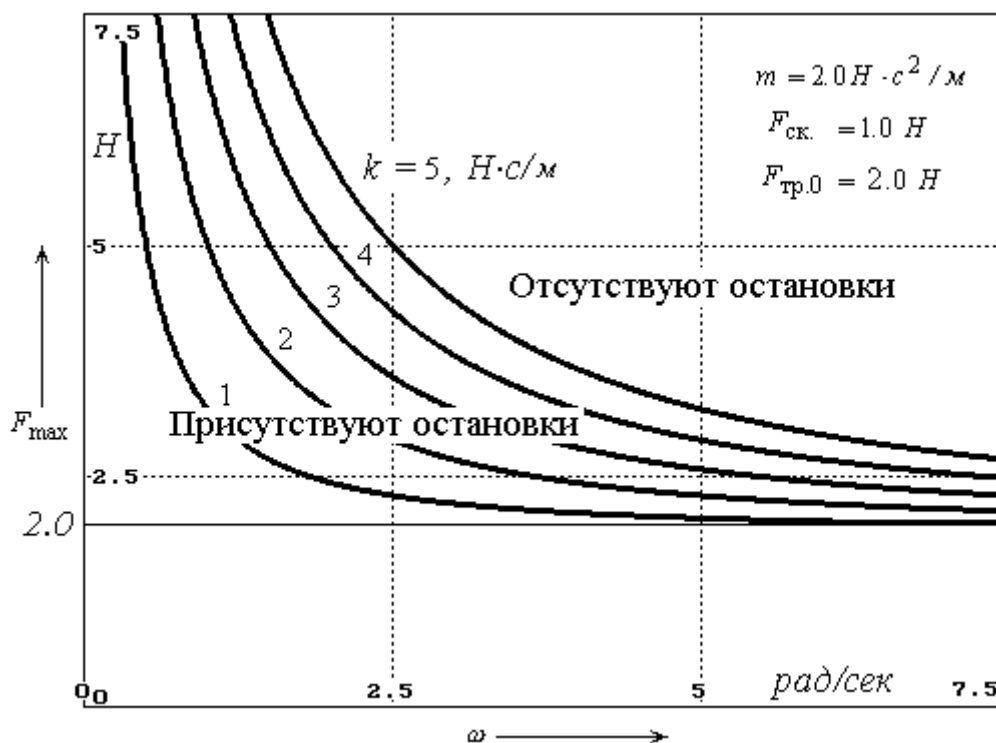


Рис. 11. Фрагмент структуры разбиения пространства параметров

### Список литературы

1. Шамберов В.Н. Фрикционные автоколебания в механических системах (еще раз о маятнике Фруда) // *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики: Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского*, 2011, № 4(5). С. 2610-2611.
2. Шамберов В.Н. Фрикционные автоколебания в механических системах (на примере маятника Фруда) // *Трибология и надежность: сборник научных трудов XI международной конференции* / Под ред. проф. К.Н.Войнова. – СПб: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2011. – С. 282–296.
3. Шамберов В.Н. Фрикционные автоколебания в механических системах (еще раз о тормозной колодке) // *Нелинейные колебания механических систем: труды IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И.Неймарка* (Нижний Новгород, 24 – 29 сентября 2012 г.). Нижний Новгород. Издательский дом «Наш дом», 2012. С. 997–1002.
4. Шамберов В.Н. Фрикционные автоколебания в тормозной колодке (аналитическое исследование) // *Трибология и надежность: Сборник научных трудов 12 международной конференции* (Санкт-Петербург, 24-26 октября 2012 г.). СПб.: БГТУ им. Д.Ф.Устинова (ВОЕНМЕХ), 2012. С. 226–235.
5. Тондл А. *Нелинейные колебания механических систем* / Перевод с англ. В.Г. Аверьяновой. Под ред. К.В.Фролова. - М.: Мир, 1973. - 334 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

**М.В. Шамолин**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Институт механики.

119192 Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: [shamolin@rambler.ru](mailto:shamolin@rambler.ru)

Автор возвращается к построению нелинейной математической модели плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела. Проводится сравнение фазовых портретов, полученных при исследовании нелинейной модели воздействия среды, и реальными вихревыми дорожками, полученными Карманом.

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивляющаяся среда, фазовый портрет, гидродинамическая аналогия

**1. Более общая задача о движении со следящей силой.** В работе [1] рассматривалась модель взаимодействия твердого тела со средой через передний плоский участок. Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [2, 3]. Если  $(v, \alpha)$  – полярные координаты вектора скорости точки  $D$  (центра пластины),  $\Omega$  – значение его угловой скорости,  $I, m$  – инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} v \dot{\alpha} \cos \alpha - \alpha \dot{v} \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= F_x / m, \\ v \dot{\alpha} \sin \alpha + \alpha \dot{v} \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega \dot{\alpha} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N(\alpha, \Omega / v) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $F_x = -S$ ,  $S = s(\alpha)v^2$ .

Первые два уравнения (1.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости  $E^2$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2$ , связанную с телом. При этом  $Dx_1$  – срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс  $C$  симметричного тела, а  $Dx_2$  – ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела.

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $T$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ( $V_C$  – скорость центра масс, см. также [4, 5])

$$V_C \equiv \text{const}, \quad (1.2)$$

то в системе (1.1) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:  $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$ ,  $\sigma = DC$ .

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad T \equiv -S. \quad (1.3)$$

Случай (1.3) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (1.1). Действительно, пусть выполнено следующее условие:

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1(\alpha, \Omega / v)v^2 + \tau_2(\alpha, \Omega / v)\Omega v + \tau_3(\alpha, \Omega / v)\Omega^2 = T_1(\alpha, \Omega / v)v^2.$$

Систему (1.1) можно переписать в виде

$$v \dot{\alpha} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha [y_N(\alpha, \Omega / v) s(\alpha) v^2 / I] = [T_1(\alpha, \Omega / v) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m,$$

$$\alpha \cdot v + \Omega v - \sigma \cos \alpha [y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha) v^2 / I] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha = [-T_1(\alpha, \Omega/v) v^2 + s(\alpha) v^2] \sin \alpha / m, \quad (1.4)$$

$$I \Omega \cdot = y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha) v^2.$$

Вводя далее новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам  $\Omega = n_1 v \omega$ ,  $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle \cdot \rangle$ ,  $n_1 v > 0$ ,  $n_1 v = \text{const}$ , система (1.4) приведет к следующему виду:

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (1.5)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \cos \alpha - [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \sin \alpha / m n_1,$$

$$\omega' = y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1^2 - \omega [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \sin \alpha + \quad (1.6)$$

$$+ \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m n_1,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \sin \alpha + [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m n_1.$$

Видно, что в системе третьего порядка (1.5), (1.6) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (1.6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (1.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

## 2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N})$  – координаты точки  $N$  приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на пластину,  $Q = (Q_1, Q_2)$  – компоненты координат точки  $N$  приложения силы  $S$  воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори, как уже указывалось выше, не очевидно [6]. Примем следующую зависимость:  $x = Q + R$ , где  $R = (R_1, R_2)$  – вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости – гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $(h_1, h_2)$  – некоторые положительные параметры (ср. с [5, 7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то  $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \Omega / v$ .

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [7]

$$Q_2 = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (2.1)$$

динамические функции  $s$  и  $y_N$  примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N(\alpha, \Omega/v) = A \sin \alpha - h \Omega / v, \quad A, B, h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (2.2)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (1.2), (2.1), (2.2) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (2.3)$$

$$\alpha' = -\omega + b \omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b H_1 \omega \cos^2 \alpha, \quad (2.4)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b \omega^3 \cos \alpha + b H_1 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b \omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - b H_1 \omega \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  следующим образом:  $b = \sigma n_0$ ,  $n_0^2 = AB / I$ ,  $H_1 = Bh / I n_0$ ,  $n_1 = n_0$ .

Итак, система (2.3), (2.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре

$$W_1 = \mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}. \quad (2.5)$$

**3. Строение фазовых портретов на фазовом цилиндре.** Для анализа фазовых портретов исследуемой системы (2.4) рассмотрим вспомогательную систему второго порядка на фазовом цилиндре, получающуюся из системы (2.4) формальным приравнением  $H_1 = 0$ :

$$\alpha' = -\omega + b\omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad \omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Три типа фазовых портретов системы (3.1) известны (рис. 1-3,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) [4, 5]. Более точно, справедливо

**Предложение 1.** Существует величина  $b = b^* < 2$  такая, что при  $b < b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис. 1; при  $b = b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис. 2; при  $b > b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис. 3.

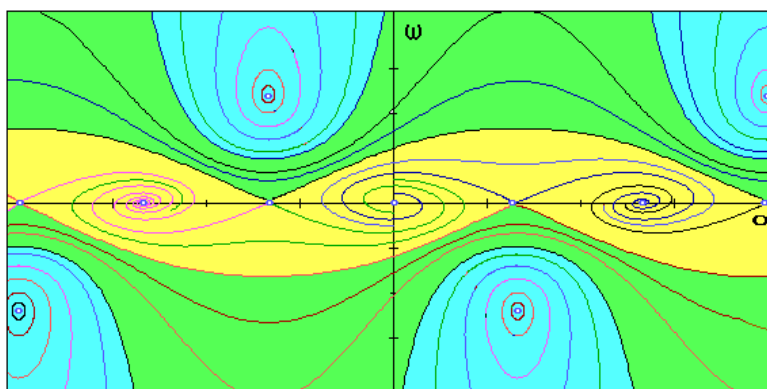


Рис. 1

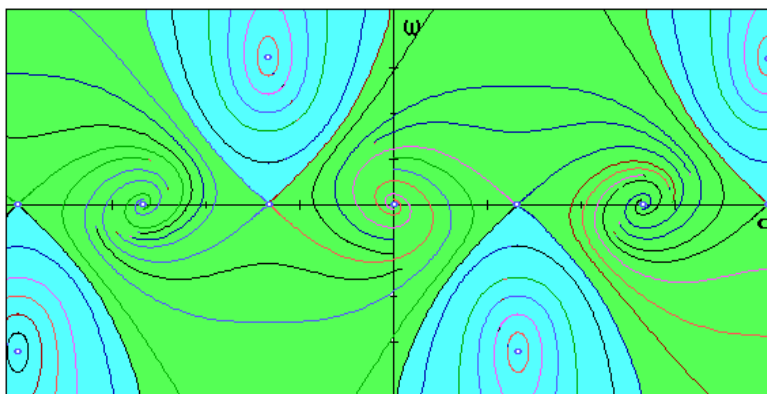


Рис. 2

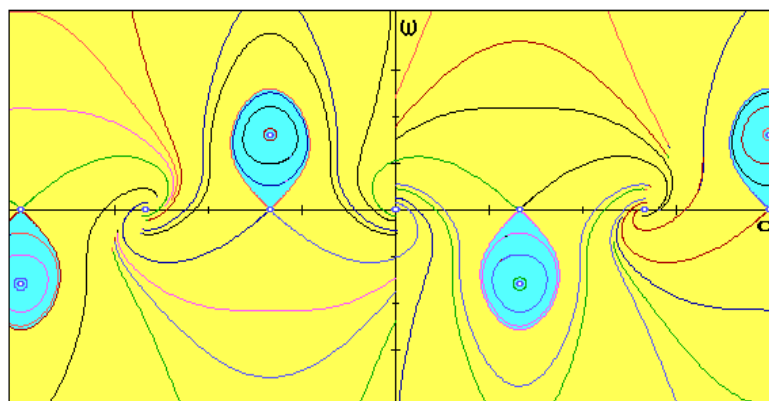


Рис. 3

**3.1. Симметрии в исследуемой системе и ее положения равновесия.** Для начала напомним, что характеристической функцией двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений на евклидовой поверхности, задаваемых векторными полями  $X = \{X_1, X_2\}$  и  $Y = \{Y_1, Y_2\}$ , называется кососимметрическая функция

$$\chi = \chi(X, Y) = -\chi(Y, X) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1,$$

которая «отвечает» за синус угла между рассматриваемыми полями. В частности, функция  $\chi$  равна нулю там, где поля касаются (в том числе, в точках покоя одной из систем) [8]. Исследование положений равновесия системы (2.4) поможет провести

**Предложение 2.** *Характеристическая функция систем (3.1), (2.4) имеет вид*

$$\chi = \chi((3.76), (3.52)) = H_1 \omega^2 \cos \alpha \{ (b\omega - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \}.$$

Видно, что положения равновесия системы (2.4) могут лежать лишь в объединении  $W_2 = \{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$ , т.е. совпадают с положениями равновесия системы (3.1). Действительно, система (2.4) имеет лишь следующие положения равновесия (точки покоя):

1.  $(0, 0);$  (3.2)

2.  $(\pi, 0);$  (3.3)

3.  $(\pm\pi/2, 0);$  (3.4)

4.  $(\pm\pi/2, \pm 1/b).$  (3.5)

Проведем их классификацию. Характеристические уравнения около точек (3.2)–(3.5) имеют, соответственно, вид:

$$\lambda^2 + (H_1 - b)\lambda + 1 = 0, \quad \lambda^2 + (b - H_1)\lambda + 1 = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 + 1/b^2 = 0.$$

Положения равновесия (3.2) при  $H_1 > b$  ( $H_1 < b$ ) являются притягивающими (отталкивающими), а положения равновесия (3.3) – наоборот (при  $H_1 > b$  ( $H_1 < b$ ) являются отталкивающими (притягивающими)). Так, в частности, на фазовых портретах системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) (при  $H_1 = 0$ , рис. 1–3) начало координат – отталкивающая точка, точка  $(\pi, 0)$  – притягивающая. Положения равновесия (3.4) (как и на рис. 1–3,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) являются седлами, а возле положений равновесия (3.5) возникает, вообще говоря, проблема центра и фокуса, которая решается в пользу центра благодаря наличию в системе следующих симметрий:

центральной симметрией. Такая симметрия возле точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , возникает по причине того, что векторное поле системы (2.4) в координатах  $(\alpha, \omega)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix};$$

некоторой зеркальной симметрией (НЗС). Такая симметрия относительно прямых  $\Lambda_i = \{(\alpha, \omega) : \alpha = \pi/2 + \pi i\}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , возникает по причине того, что  $\alpha$ -составляющая векторного поля системы в координатах  $(\alpha, \omega)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \omega \end{pmatrix}, \omega\text{-составляющая меняет знак.}$$

Важную роль в построении глобальных фазовых портретов системы вида (2.4) играют предьявленные симметрии. Действительно, как нетрудно видеть, симметрия НЗС «оставляет» положения равновесия (3.5) центрами и в нелинейном случае. К тому же центрально симметричные положения равновесия  $(\pi/2, 0)$  и  $(-\pi/2, 0)$ , а также  $(\pi/2, 1/b)$  и  $(-\pi/2, -1/b)$  объединены вместе (соответственно, в случаи (3.4) и (3.5)) по причине наличия центральной симметрии. Более того, положения равновесия (3.2), (3.3) меняют характер устойчивости при изменении знака величины  $H_1 - b$  как раз из-за наличия симметрии НЗС.

**3.2. Эволюция фазовых портретов при изменении параметров.** Получим еще следствия из предложения 2. Будем изменять параметр  $H_1$ , увеличивая его вдоль объединения интервалов  $(0, b) \cup (b, +\infty)$ . У рассматриваемой системы не существует простых и сложных предельных циклов, а поэтому при  $H_1 \in (0, b)$  она допускает фазовые портреты, показанные на рис. 1–3 (в зависимости от величины  $|b - H_1|$ ,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , при этом предложение 1 и определяет три возможных случая фазового портрета).

Далее, при увеличении значения  $H_1 \in (b, +\infty)$  положение равновесия  $(0, 0)$  становится притягивающим, а положение равновесия  $(\pi, 0)$  – отталкивающим. Тогда фазовые портреты для этого случая можно получить из рис. 1–3 (в зависимости от величины  $|b - H_1|$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ , при этом предложение 1 по-прежнему определяет три возможных случая фазового портрета).

**Следствие 1.** При  $b = H_1$  положения равновесия  $(\pi i, 0)$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , являются центрами.

Действительно, если бы данные положения равновесия являлись бы слабыми фокусами (устойчивыми или неустойчивыми), то при достаточно малом значении параметра  $\delta = |b - H_1| > 0$  в окрестности данных положений равновесия существовал бы, по крайней мере, один предельный цикл, родившийся в силу бифуркации рождения цикла из слабого фокуса (бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа), что противоречит следствию 1.

**Следствие 2.** При  $b = H_1$  у системы (2.4) в полосах

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \omega) : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\} \text{ или } \Pi' = \left\{ (\alpha, \omega) : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\}$$

реализуется гетероклиническая ситуация (рис. 4).

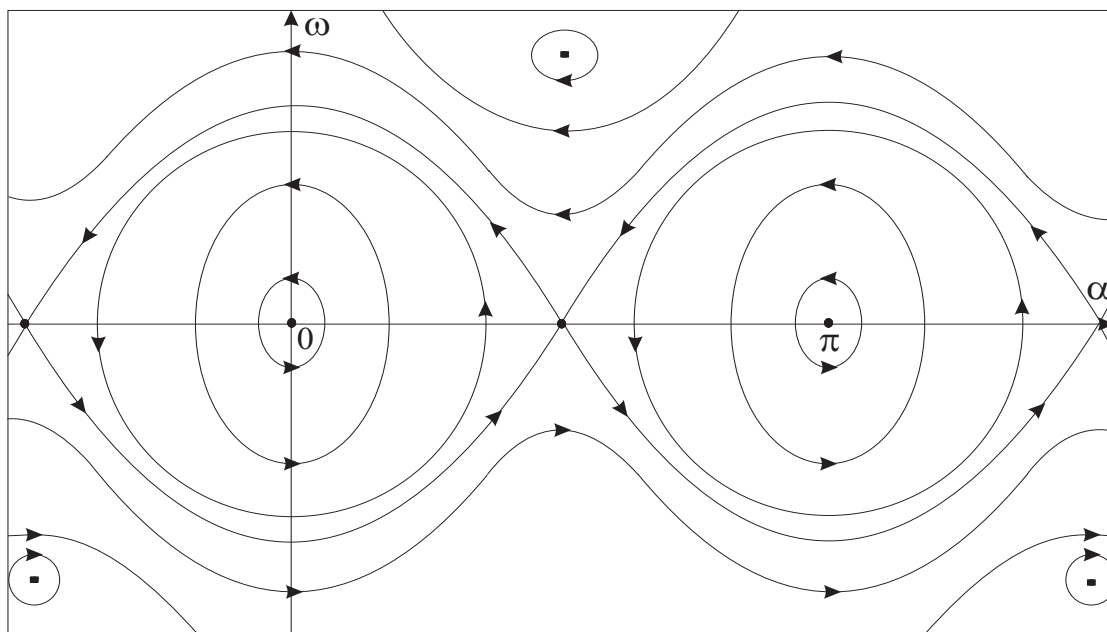


Рис. 4

**4. Замечания о возможных автоколебаниях в системе.** Достаточно обстоятельно был разобран случай, когда функции воздействия среды представлялись в виде (2.2), т.е. были аналитическими функциями. Но вот только при моделировании воздействия среды на тело функции  $s(\alpha)$  и  $y_N(\alpha, \Omega/\nu) = y(\alpha) - h\Omega/\nu$ , вообще говоря, не представляются в таком аналитическом виде. Более того, для каждой конкретной передней пластины, через которую происходит взаимодействие тела со средой, явный вид пары функций  $s(\alpha)$  и  $y(\alpha)$  не известен, а имеется лишь качественная информация о таких функциях [1, 2, 5].

Опорным для нас выше уже является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины получил функции необходимые функции в аналитическом виде (2.2). Этот результат помогает построить функциональные классы  $\{y\}$ ,  $\{s\}$  [1, 2, 5]. Они состоят из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $y(\alpha)$  – нечетная, а  $s(\alpha)$  – четная), удовлетворяющих следующим условиям:  $y(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем  $y'(0) > 0$ ,  $y'(\pi) < 0$  (класс функций  $\{y\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0$ ,  $s'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{s\} = \Sigma$ ). Как  $y$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом,

$$y \in Y, s \in \Sigma. \quad (4.1)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что  $F = ys$  – достаточно гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая условиям:  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{F\} = \Phi$ ). Таким образом,

$$F \in \Phi. \quad (4.2)$$

Тогда преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (4.3)$$

$$\alpha' = -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha, \quad (4.4)$$

$$\omega' = \frac{F(\alpha)}{In_0^2} - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha),$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \sin \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  и постоянную  $n_1$  следующим образом:  $b = \sigma n_0$ ,  $n_0^2 = AB/I$ ,  $H_1 = BH/In_0$ ,  $n_1 = n_0$ .

Итак, система (4.3), (4.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре (2.5). Для начала исследуем устойчивость ее тривиального решения, соответствующего невозмущенному движению, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:  $\lambda^2 + \lambda[\mu_3 - \mu_2] + 1 = 0$ . Очевидно

**Предложение 3.** При  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) тривиальное решение системы (4.4) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (4.4) при критическом соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \quad (4.5)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных  $(\alpha, \omega) \rightarrow (a, w)$  в системе

$$(4.4): \alpha = a, \omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2} (\mu_2 a - w), \omega_0 = 1, \text{ переводящую ее в систему следующую:}$$

$$a' = |\omega_0| w + B_1 a^3 + B_2 a^2 w + B_3 a w^2 + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \quad (4.6)$$

$$w' = -|\omega_0| a + B_4 a^3 + B_5 a^2 w + B_6 a w^2 + B_7 w^3 + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}),$$

$$B_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{2(1 + \mu_2^2)}, B_2 = \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2^2}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)},$$

$$B_3 = \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, B_4 = -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, B_6 = -\frac{\mu_2^2(3 + \mu_2^2)}{(1 + \mu_2^2)^2},$$

$$B_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1 + \mu_2^2)} - \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, B_7 = \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, s_2 = s''(0), f_3 = F'''(0).$$

Введем следующий вспомогательный индекс [5, 9]:

$$Ind = |\omega_0| \{Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2\} + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 + Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

где  $\begin{pmatrix} Y_1(a, w) \\ Y_2(a, w) \end{pmatrix}$  – правая часть системы (4.6).

Более конкретно, для системы (4.6) построенный индекс будет иметь вид:

$$Ind = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1 + 3\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} (3 + \mu_2^2).$$

Поскольку для данной системы  $Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0$  (по причине нечетности ее

правой части от фазовых переменных) для любых индексов  $i, j, k$ , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $Ind \neq 0$ .

**Предложение 4.** Если  $Ind < 0$  ( $Ind > 0$ ) и при этом выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2, \quad (4.7)$$

то начало координат фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  системы (4.6) при критическом соотношении параметров (4.5) является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.



Условие (4.7) является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом. Следствием теоремы Пуанкаре–Андронов–Хопфа [10] является

**Теорема.** Пусть для системы (4.4) выполнено неравенство (4.7). Тогда:

1) Если  $Ind < 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

2) Если  $Ind > 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 + \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_{N,s})$ , или от их значений. А вот проверка условия  $Ind < 0$  ( $Ind > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_{N,s})$  неизвестны.

Итак, если функции воздействия среды не удовлетворяют условию (2.2), то полосе  $\Pi$  (или  $\Pi'$ ) при некоторых естественных условиях возможно возникновение предельных циклов, говорящее о том, что фазовые портреты более общей допустимой системы (4.4) не совпадают, вообще говоря, с показанными фазовыми портретами. Последнее говорит нам об относительной негрубости систем вида (4.4) при допустимых деформациях ее правых частей в классах функций (4.1) ((4.2)).

**5. Из гидродинамической теории сопротивления жидкости.** Теперь приведем некоторые размышления, известные еще по классическим работам, при этом отметим наглядные и топологические аналогии.

Как известно, если тело движется равномерно в жидкости, лишенной трения и простирающейся во все стороны до бесконечности, то при обычном потенциальном обтекании тела не возникает ни сопротивления движению, ни подъемной силы, перпендикулярной к направлению движения, какова бы ни была форма тела. Этот результат нетрудно объяснить [11]. Исследование также показывает, что добавочные скорости, а также разности давлений, вызванные движением тела, очень быстро уменьшаются по всем направлениям по мере удаления от тела — по крайней мере, пропорционально третьей степени расстояния.

С другой стороны, наблюдение показывает, что пластина, установленная в набегающем потоке под углом к его направлению, поворачивается так, что, в конце концов, устанавливается перпендикулярно к потоку, а значит, набегающий поток сообщает ей определенный вращающий момент. При ускоренном движении тела в жидкости без трения сопротивление возникает, однако это сопротивление такого рода, как если бы масса тела увеличилась на величину массы жидкости, увлекаемой телом при своем движении. Для шара подсчитано [3, 12], что величина такой при-

соединенной равна половине массы жидкости, вытесняемой шаром. Так как при возникновении движения из состояния покоя вначале образуется всегда течение, похожее на потенциальное, то понятие о присоединенной массе вполне имеет значение и для реальных жидкостей.

Равенство нулю сопротивления тела, равномерно движущегося без трения в жидкости, можно вывести также из энергетических соображений. Действительно, при отсутствии трения работа, необходимая для преодоления сопротивления, может накапливаться в жидкости только в виде кинетической энергии. Между тем при потенциальном течении, когда жидкость позади равномерно движущегося тела так же смыкается, как расступается впереди него, за телом не остается никакого возмущения течения, в котором могла бы накапливаться кинетическая энергия. Следовательно, при таком движении не может быть и сопротивления.

Однако могут быть и такие случаи движения в жидкости без трения, когда позади тела в жидкости остается кинетическая энергия и, следовательно, возникает сопротивление. Одним из таких случаев является движение крыла самолета [11]. Возникновение подъемной силы без продолжающегося накопления кинетической энергии в жидкости не противоречит закону сохранения энергии, поскольку подъемная сила перпендикулярна к пути тела в жидкости и поэтому при установившемся движении для ее сохранения затраты работы равны нулю.

Возникновение сопротивления при ускоренном движении также легко понять и с точки зрения закона сохранения энергии. В самом деле, если бы сопротивление при таком движении не возникало и, таким образом, не требовалось бы силы для преодоления этого сопротивления, то наша присоединенная масса не могла бы накапливать и кинетическую энергию.

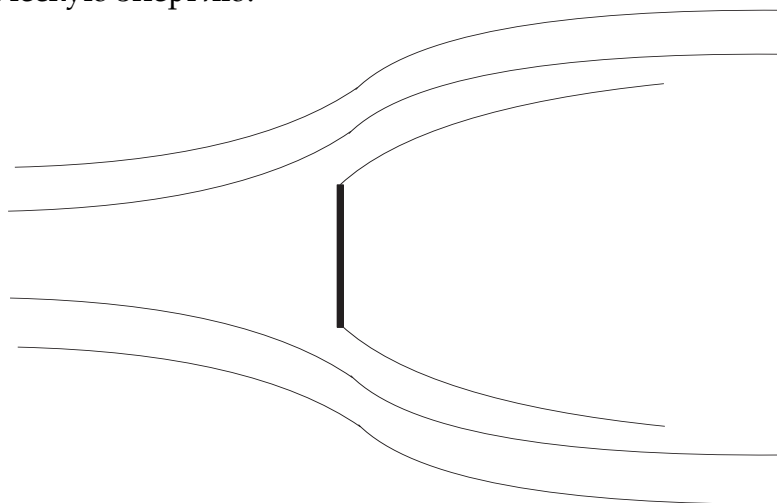


Рис. 5. Обтекание плоской пластины с образованием поверхности раздела

В действительности же полное сопротивление почти всех тел значительно больше всегда неизбежного сопротивления трения [11]. Как известно, причина этого в том, что при движении таких тел образуются поверхности раздела и вихри, которые и являются основной причиной сопротивления. Они препятствуют смыканию потока позади обтекаемого тела и объясняют несимметричное распределение давления на поверхности тела; кроме того, для их образования требуются затраты энергии.

Чтобы определить сопротивление тел, движущихся в идеальной жидкости, остановимся на двух типичных, предпринятые Кирхгофом [13] и Карманом [14].

Кирхгоф исследовал обтекание плоской пластины, поставленной перпендикулярно к потоку (рис. 5). Перед пластиной поток разделяется и затем слетает с ее кра-

ев, образуя поверхности раздела. Позади пластины пространство между поверхностями раздела заполнено покоящейся жидкостью. Поскольку давление в этом пространстве, если пренебрегать силой тяжести, везде одинаковое, то должно быть одинаковым также давление во всех точках поверхностей раздела, поэтому, на основании теоремы Бернулли, должна быть одинаковой и скорость. Если все это довести до вычислений, то возможны только такие решения задачи, при которых поверхности раздела простираются до бесконечности, а скорость на поверхностях раздела равна скорости невозмущенного потока, т.е. скорости жидкости в бесконечности. Что касается распределения давления, то перед пластиной в ее центре мы имеем динамическое давление  $\rho v^2 / 2$  ( $\rho$  – плотность жидкости). По мере приближения к краям пластины давление уменьшается и на краях совпадает с давлением в невозмущенном потоке. На задней же стороне пластины имеет место постоянное давление, равное давлению в невозмущенном потоке. Поэтому сопротивление пластины пропорционально ее площади и динамическому давлению, и поэтому коэффициент сопротивления  $c$  должен иметь постоянное значение. Согласно вычислениям Кирхгофа, это значение равно  $c = 2\pi / (4 + \pi) \approx 0,88$  [13].

Но на самом деле, как известно, поверхности раздела неустойчивы и быстро распадаются, образуя различные вихри. Поэтому давление позади пластины намного ниже, чем в невозмущенном потоке. Таким образом, задняя поверхность пластины оказывает как бы отрицательное действие, и сопротивление получается больше, чем у Кирхгофа. Так, для бесконечно широкой пластины измерения дают  $c = 2,0$ . При обтекании же прямоугольных пластин с конечным отношением сторон жидкость обгибает узкие стороны и значительно уменьшает разрежение [13].

Расчет Кирхгофа относится к бесконечно длинной пластине и он плохо согласуется с результатом опыта. Но хорошее совпадение расчета с экспериментом получается в том случае, когда при обтекании водой пластины пространство позади пластины заполняется, например, воздухом. В этом случае поверхности раздела почти не распадаются, и поэтому условия хорошо удовлетворяются [13].

При обтекании узких пластин, когда поток жидкости перед телом не разделяется на две части (как это было в рассмотренном случае) иногда образуется позади тела довольно правильная последовательность вихрей, попеременно срывающихся то с одного, то с другого края тела (вихревая дорожка).

Наблюдения над вихревыми дорожками побудили Кармана [14, 15] исследовать устойчивость различных систем параллельных и прямолинейных вихревых нитей. Вычисления показали, что все такие системы (кроме одной) почти всегда неустойчивы. А устойчивая система изображена на рис. 6. Для нее отношение расстояния  $h$  между обоими рядами вихрей к расстоянию  $l$  между вихрями в каждом ряду равно 0,283 [14, 15]. Но вихревые дорожки, наблюдающиеся в реальности, обладают структурой, очень близкой к этой. Но, по некоторым причинам расстояние между вихрями увеличивается.

Образование за обтекаемым телом новых вихрей означает, что тело испытывает сопротивление, поскольку иначе не соблюдался бы закон сохранения энергии. Можно использовать и другой способ вычисления сопротивления, основанный на теореме о количестве движения. Данное исследование было выполнено Карманом.

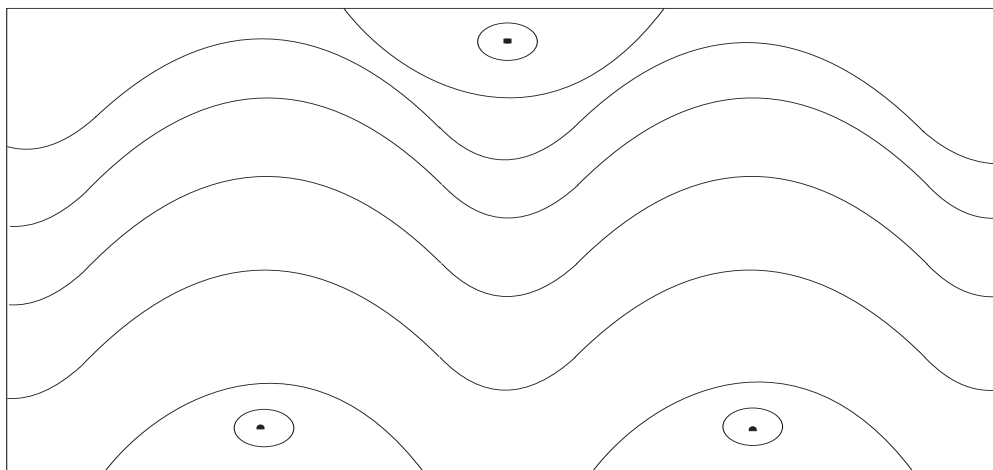


Рис. 6. Линии тока в вихревой дорожке

Главное же в данных рассуждениях заключается в том, что линии тока, определяемые полем направлений среды (рис. 6), имеют топологическую картину, поразительно похожую на фазовую картину разбиения на траектории динамической системы (2.4), показанной на рис. 1.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант № 15-01-00848-а).

### Список литературы

1. Шамолин М.В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 12. – С. 79–104.
2. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54, 105.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.
4. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1992. – № 1. – С. 52–58, 112.
5. Шамолин М.В. [Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Издательство «Экзамен», 2007. – 352 с.](#)
6. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
7. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.
8. Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993, № 2, с. 66–70, 113.
9. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
10. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
11. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во Иностранной лит-ры, 1949. – 520 с.
12. Чаплыгин С.А. Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
13. Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelle's Journ., т. 70, 1869.
14. Karman und Rubach, Phys. Zeitschr., т. 13, 1912.
15. Кочин Н.Е. О неустойчивости вихревых цепочек // Доклады АН СССР, т. XXIV, 1939.

## О ПРИЛИВНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ С ЯДРОМ

**А.В.Шатина, Е.В.Шерстнев**

Московский технологический университет, МИРЭА,  
119454, г. Москва, Проспект Вернадского, д. 78, e-mail: shatina\_av@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию приливных деформаций планеты, состоящей из твердого ядра и жестко прикрепленной к нему вязкоупругой оболочки, в гравитационном поле притягивающего центра и спутника. Получена скалярная функция, описывающая деформации в фиксированной точке поверхности планеты в зависимости от времени. Построены графики этой функции для планеты «Земля», движущейся в гравитационном поле Солнца и Луны.

**Ключевые слова:** приливы; гравитация; приливные деформации; вязкоупругая планета.

Рассмотрим задачу о движении механической системы «планета-спутник» в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Планету будем моделировать телом, состоящим из твердого ядра и жестко прикрепленной к нему вязкоупругой оболочки. В естественном недеформированном состоянии планета занимает область  $V$  в трехмерном евклидовом пространстве:

$$V = V_0 \cup V_1, V_0 = \{ \mathbf{r} \in E^3, |\mathbf{r}| \leq r_0 \}, V_1 = \{ \mathbf{r} \in E^3, r_0 \ll |\mathbf{r}| \leq r_1 \},$$

$r_0, r_1$  – внутренний и внешний радиусы оболочки. Предполагается, что материал оболочки планеты является однородным, изотропным и имеет постоянную плотность  $\rho_1$ .

Спутник будем моделировать материальной точкой  $P$  с массой  $m_2$ . Система планета-спутник движется относительно общего центра масс  $C_0$ , который в свою очередь совершает движение по кеплеровской орбите относительно неподвижного притягивающего центра  $O$  с массой  $m_1$ . Считаем, что

$$m_2 \ll m \ll m_1, |\mathbf{R}_2| \ll |\mathbf{R}_1|, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{OC}_0$ ,  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{CP}$ ,  $C$  – центр масс планеты.

Пусть  $OXYZ$  – инерциальная система координат с началом в притягивающем центре;  $Cx_1x_2x_3$  – подвижная система координат, связанная с ядром планеты;  $CX'Y'Z'$  – система осей Кенига (рис.1). Положение точки  $M$  планеты в инерциальной системе координат  $OXYZ$  определяется векторным полем:

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{r}, t) = \mathbf{OC} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (2)$$

где  $\Gamma$  – оператор перехода от подвижной системы координат  $Cx_1x_2x_3$  к системе осей Кенига  $CX'Y'Z'$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  – вектор упругого смещения, тождественно равный нулю для точек твердого ядра.

Так как  $C_0$  – центр масс системы «планета-спутник», то

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{OC}_0 = \frac{1}{m + m_2} \left\{ \int_V \mathbf{R}_M(\mathbf{r}, t) \rho dv + m_2 \cdot \mathbf{OP} \right\}, \quad \rho = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } \mathbf{r} \in V_0, \\ \rho_1, & \text{если } \mathbf{r} \in V_1. \end{cases} \quad (3)$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\mathbf{OC} + \mathbf{R}_2 = \mathbf{OP} \quad (4)$$

Тогда из соотношений (2) - (4) получим:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{R}_1 + \frac{m}{m + m_2} \mathbf{R}_2 - \frac{1}{m + m_2} \int_{V_1} \Gamma \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rho_1 dv,$$

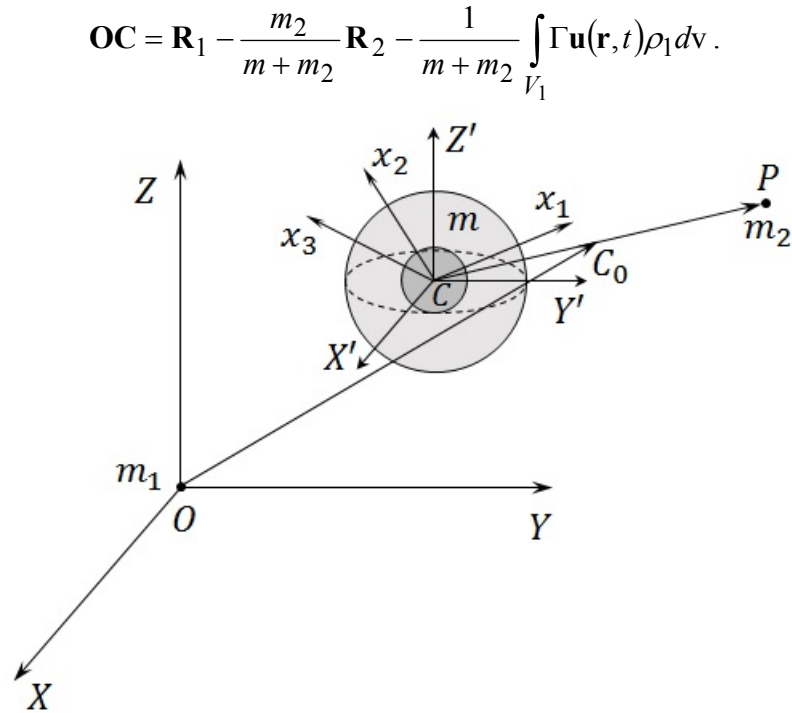


Рис. 1. Постановка задачи

Предполагается, что вязкоупругая оболочка планеты имеет большую жесткость, и период собственных колебаний оболочки на наименьшей частоте много меньше времени затухания этих колебаний, которое в свою очередь меньше характерного времени движения планеты. Применяя асимптотический метод разделения движений для механических систем с бесконечным числом степеней свободы [1], получим решение квазистатической задачи теории упругости для вязкоупругой оболочки планеты в виде [2,3]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_1 \omega^2}{E} \left\{ \frac{2}{3} \left[ d_1 r^2 + d_2 + \frac{d_3}{r^3} \right] \mathbf{r} + \left[ b_1 r^2 + b_2 + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^5} \right] \left[ \frac{1}{3} \mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega, \mathbf{r}) \mathbf{e}_\omega \right] + \left[ b_5 + \frac{b_6}{r^5} + \frac{b_7}{r^7} \right] \left[ \frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\omega, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_{1j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{3\rho_1 f m_j}{E Q_j^3} \left( 1 + \frac{3\chi \dot{Q}_j}{Q_j} \right) \left\{ \left[ b_1 r^2 + b_2 + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^5} \right] \left[ \frac{1}{3} \mathbf{r} - (\xi_j, \mathbf{r}) \xi_j \right] + \left[ b_5 + \frac{b_6}{r^5} + \frac{b_7}{r^7} \right] \left[ \frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{2} (\xi_j, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} \right\} - \frac{3\chi \rho_1 f m_j}{E Q_j^3} \left\{ \left[ b_1 r^2 + b_2 + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^5} \right] [(\xi_j, \mathbf{r}) \xi_j + (\xi_j, \mathbf{r}) \dot{\xi}_j] + \left[ b_5 + \frac{b_6}{r^5} + \frac{b_7}{r^7} \right] (\dot{\xi}_j, \mathbf{r}) (\xi_j, \mathbf{r}) \mathbf{r} \right\}, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$d_1 = -\frac{1+\nu}{5(k+2)}, \quad d_2 = -\frac{d_1 r_1^2 (4x^5 + 5k + 6)}{4x^3 + 3k + 2}, \quad d_3 = -\frac{d_1 r_1^5 x^3 ((3k+2)x^2 - 5k - 6)}{4x^3 + 3k + 2},$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{(1+\nu)}{\Delta_0} \left\{ 8(9k+14)x^{10} + 80x^7 + 24(k+1)(5k+11)x^5 - \right. \\
 &\quad \left. - 5(k+2)(15k+16)x^3 + 2(3k+8)(5k+4) \right\}, \\
 b_2 &= \frac{(1+\nu)r_1^2}{\Delta_0} \left\{ 8(9k+14)x^{12} + 8(15k^2 + 46k + 51)x^7 - \right. \\
 &\quad \left. - (63k^2 + 114k + 56)x^5 + 4(3k+8)(4k+3) \right\}, \\
 b_3 &= \frac{2(1+\nu)r_1^5 x^3}{\Delta_0} \left\{ 40x^9 - 16(k+6)x^7 + (21k+16)x^2 - 10(4k+3) \right\}, \\
 b_4 &= \frac{2(1+\nu)(k+1)r_1^7 x^5}{\Delta_0} \left\{ 24x^7 - 2(3k+26)x^5 + (15k+16)x^2 - 6(4k+3) \right\}, \\
 b_5 &= -\frac{4(1+\nu)(k+1)}{\Delta_0} \left\{ 60x^7 - 12(2k+17)x^5 + 5(3k+26)x^3 - 2(3k+8) \right\}, \\
 b_6 &= (3k+1)b_3, \quad b_7 = -5b_4, \\
 \Delta_0 &= 8(2k+7)(9k+14)x^{10} + 200(3k^2 + 8k + 7)x^7 - 1008(k+1)^2 x^5 + \\
 &\quad + 25(27k^2 + 56k + 28)x^3 + 2(3k+8)(19k+14), \\
 k &= \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad x = \frac{r_0}{r_1}, \quad r = |\mathbf{r}|.
 \end{aligned}$$

Здесь  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки планеты соответственно,  $\omega$  – модуль вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  планеты,  $\mathbf{e}_\omega$  – единичный вектор, направленный по вектору  $\boldsymbol{\omega}$ , задаваемый в подвижной системе координат  $Sx_1x_2x_3$ ,  $f$  – универсальная гравитационная постоянная,  $\chi$  – коэффициент внутреннего вязкого трения вязкоупругой оболочки планеты,

$$Q_j = |\mathbf{Q}_j|, \quad \xi_j = \Gamma^{-1} \mathbf{Q}_j / Q_j, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2. \quad (8)$$

Вектор-функция  $\mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t)$  в формуле (5) характеризует деформации планеты, вызванные ее вращением, и описывает сжатие планеты вдоль оси вращения.

Вектор-функции (7) определяют приливные деформации планеты со стороны притягивающего центра и спутника. Слагаемые, содержащие множитель  $\chi$  в выражениях (7), характеризуют запаздывание приливных горбов, образующихся вдоль прямых, соединяющих центр масс планеты с точками  $O$  и  $P$  соответственно из-за сил вязкого трения.

Величины  $\omega$ ,  $\mathbf{e}_\omega$ ,  $Q_j$ ,  $\xi_j$  ( $j = 1, 2$ ), входящие в формулы (6), (7), являются заданными функциями времени. В соответствии с методом разделения движений зависимость указанных величин от времени соответствует невозмущенной задаче, когда центр масс  $S_0$  системы планета-спутник движется по кеплеровской эллиптической орбите относительно притягивающего центра  $O$ , а точки  $S, P$  движутся согласно классической задаче двух тел. При этом планета равномерно вращается вокруг оси, неизменно ориентированной в инерциальной системе координат  $OXYZ$ .

Получим в явном виде скалярную функцию  $F(\mathbf{r}_M, t) = |\mathbf{r}_M + \mathbf{u}(\mathbf{r}_M, t)| - |\mathbf{r}_M|$ , описывающую приливные деформации в фиксированной точке  $M$  поверхности планеты без учета за-

паздывания приливных горбов (для этого в (7) положим  $\chi = 0$ ). Так как  $|\mathbf{u}(\mathbf{r}_M, t)| \ll |\mathbf{r}_M|$ ,  $\mathbf{r}_M = \mathbf{e}_M r_1$ , где  $\mathbf{e}_M$  – единичный вектор, направленный по радиус-вектору  $\mathbf{CM}$ , то в линейном приближении по компонентам вектора  $\mathbf{u}$

$$F(\mathbf{r}_M, t) = (\mathbf{e}_M, \mathbf{u}(\mathbf{r}_M, t)).$$

Для упрощения задачи будем считать, что движение точек  $C, P$  происходит в плоскости  $OXY$ . В инерциальной системе  $OXYZ$  координаты векторов  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  имеют вид:

$$\mathbf{R}_i = R_i (\cos(g_i + \vartheta_i), \sin(g_i + \vartheta_i), 0), \quad R_i = \frac{a_i(1 - e_i^2)}{(1 + e_i \cos \vartheta_i)} \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

$a_1$  – большая полуось,  $e_1$  – эксцентриситет,  $g_1$  – долгота перигелия,  $\vartheta_1$  – истинная аномалия орбиты точки  $C_0$  относительно неподвижного центра  $O$ ;  $a_2$  – большая полуось,  $e_2$  – эксцентриситет,  $g_2$  – долгота перигелия,  $\vartheta_2$  – истинная аномалия орбиты точки  $P$  относительно точки  $C$ . Истинные аномалии являются функциями времени:

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{(1 + e_i \cos \vartheta_i)^2}{(1 - e_i^2)^{3/2}} n_i, \quad n_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (i = 1, 2). \quad (10)$$

Через  $T_i$  в формуле (10) обозначены соответствующие периоды обращения.

Согласно (1), (9)  $m_2 \ll m$  и  $a_2 \ll a_1$ , поэтому

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left| \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \mathbf{R}_2 \right| = \sqrt{\left( \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \mathbf{R}_2 \right)^2} = \\ &= R_1 \left( 1 - \frac{2m_2}{m + m_2} \frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{R_1^2} + \left( \frac{m_2}{m + m_2} \right)^2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)^{1/2} \approx R_1 \left( 1 - \frac{m_2}{m + m_2} \frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{R_1^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (9), получим:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{a_1(1 - e_1^2)}{(1 + e_1 \cos \vartheta_1)} (1 - h_{12} \cdot \cos(g_1 + \vartheta_1 - g_2 - \vartheta_2)) \\ h_{12} &= \frac{m_2}{m + m_2} \frac{a_2(1 - e_2^2)(1 + e_1 \cos \vartheta_1)}{a_1(1 - e_1^2)(1 + e_2 \cos \vartheta_2)}, \quad h_{12} \ll 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем единичные векторы, направленные по векторам  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , задаваемые в подвижной системе координат  $Cx_1x_2x_3$ :

$$\boldsymbol{\eta}_j = \Gamma^{-1} \mathbf{R}_j / R_j, \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left( R_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} R_2 \boldsymbol{\eta}_2 \right) \cdot Q_1^{-1} \approx \boldsymbol{\eta}_1 (1 + h_{12} \cos(g_1 + \vartheta_1 - g_2 - \vartheta_2)) - h_{12} \boldsymbol{\eta}_2, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\eta}_2. \quad (13)$$

Оператор перехода от подвижной системы координат  $Cx_1x_2x_3$  к системе осей Кенига  $CX'Y'Z'$  можно представить в виде произведения трех ортогональных матриц:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_3(\psi) \Gamma_1(\theta) \Gamma_3(\varphi), \\ \Gamma_3(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Здесь  $\psi, \theta, \varphi$  - углы Эйлера [4]. Компоненты  $p, q, s$  вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  в подвижной системе координат  $Sx_1x_2x_3$  связаны с углами Эйлера посредством кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ s = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (14)$$

Направим ось  $Sx_3$  по вектору  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда первые две компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  будут равны нулю. Поэтому из системы (14) получим:  $\dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = \omega$ , т.е. углы Эйлера  $\psi, \theta$  постоянны, а угол  $\varphi$  линейно зависит от времени. Без ограничения общности можно считать, что  $\psi_0 = 0$ . Поэтому оператор  $\Gamma$  и обратный к нему представляются равенствами:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1(\theta_0)\Gamma_3(\varphi), \quad \Gamma^{-1} = \Gamma_3(-\varphi)\Gamma_1(-\theta_0) \\ \psi &= \psi_0(\psi_0 = 0), \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi(0). \end{aligned}$$

Точку  $M$  поверхности планеты в подвижной системе координат  $Sx_1x_2x_3$  можно задать с помощью параметров  $\lambda, \mu$  (долготы и широты):

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{e}_M r_1, \quad \mathbf{e}_M = (\cos \lambda \cos \mu; \sin \lambda \cos \mu; \sin \mu).$$

Функция, описывающая изменение формы планеты, примет вид:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}_M, t) &= F_0(\mathbf{r}_M) + F_1(\mathbf{r}_M, t), \quad (15) \\ F_0(\mathbf{r}_M) &= k_0 + k_1 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \mu \right), \\ F_1(\mathbf{r}_M, t) &= k_2 (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3 (1 + 3h_{12} \cos(g_1 + \vartheta_1 - g_2 - \vartheta_2)) (3(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{e}_M)^2 - 1) + \\ &\quad + k_3 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)^3 (3(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_M)^2 - 1), \\ k_0 &= \frac{2\rho_1 \omega^2 r_1^3}{15E} \Phi_0(v, x), \quad k_1 = \frac{\rho_1 \omega^2 r_1^3}{E} \Phi_1(v, x), \quad k_2 = \frac{m_1 \cdot \Delta}{a_1^3 (1 - e_1^2)^3}, \quad k_3 = \frac{m_2 \cdot \Delta}{a_2^3 (1 - e_2^2)^3}, \quad (16) \\ \Phi_0(v, x) &= \frac{(1+v)(2+3x^5-5x^3)}{4x^3+3k+2}, \\ \Phi_1(v, x) &= \frac{(1+v)}{\Delta_0} \left\{ 120(k+2)x^{12} - (30k^2+266k+436)x^{10} + \right. \\ &\quad \left. + (75k^2+155k+160)x^7 + (237k+222)x^5 - (75k^2+350k+250)x^3 + \right. \\ &\quad \left. + 30k^2+104k+64 \right\}, \\ \Delta &= \frac{f\rho_1 r_1^3}{E} \Phi_1(v, x), \\ (\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{e}_M) &= (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_M) (1 + h_{12} \cos(g_1 + \vartheta_1 - g_2 - \vartheta_2)) - h_{12} \cdot (\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_M), \\ (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_M) &= (\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_M), \\ (\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{e}_M) &= \cos \mu \cos(g_i + \vartheta_i) \cos(\varphi + \lambda) + \cos \mu \cos \theta_0 \sin(g_i + \vartheta_i) \sin(\varphi + \lambda) - \\ &\quad - \sin \theta_0 \sin(g_i + \vartheta_i) \sin \mu \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Функция  $F_0(\mathbf{r}_M)$  в правой части (15) описывает постоянную деформацию, вызванную вращением планеты вокруг собственной оси, а функция  $F_1(\mathbf{r}_M, t)$  изменяется со временем и описывает приливные деформации.

В дальнейшем будем рассматривать систему Солнце-Земля-Луна и применим полученные теоретические результаты для исследования приливных деформаций на поверхности Земли. Для этого возьмем следующие значения параметров, входящих в  $F_1(\mathbf{r}_M, t)$  [5,6]:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{rot}}, T_{rot} = 23,934194 \text{ ч} - \text{период обращения Земли вокруг своей оси};$$

$$f = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2) - \text{универсальная гравитационная постоянная};$$

$$m_1 = 1,98911 \cdot 10^{30} \text{ кг} - \text{масса Солнца};$$

$$m = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ кг} - \text{масса Земли};$$

$$m_2 = 7,349 \cdot 10^{22} \text{ кг} - \text{масса Луны};$$

$$a_1 = 1,4959787 \cdot 10^{11} \text{ м} - \text{большая полуось орбиты барицентра системы «Земля-Луна»};$$

$$e_1 = 0,01671022 - \text{эксцентриситет орбиты барицентра системы «Земля-Луна»};$$

$$a_2 = 3,844 \cdot 10^8 \text{ м} - \text{большая полуось орбиты Луны};$$

$$e_2 = 0,054900 - \text{эксцентриситет орбиты Луны};$$

$\theta_0 = 23,45^\circ = 0,409280 \text{ рад}$  – угол наклона экватора Земли к её орбите (угол между осью вращения Земли и нормалью к плоскости орбиты Земли).

$T_1 = 365,26 \text{ сут} = 365,26 \cdot 24 \text{ ч}$  – период обращения барицентра системы «Земля-Луна» вокруг Солнца;

$$T_2 = 27,321661 \text{ сут} = 27,321661 \cdot 24 \text{ ч} - \text{период обращения Луны вокруг Земли.}$$

Ось  $OX$  инерциальной системы координат направим по радиус-вектору перигея орбиты барицентра системы «Земля-Луна». Тогда  $g_1 = 0$ .

Так как большая полуось лунной орбиты поворачивается в ту же сторону, куда движется Луна и период обращения большой полуоси Луны  $T_3$  равен 8,85 лет, то  $\dot{g}_2 = n_3 = 2\pi/T_3$ .

Согласно (16) коэффициенты  $k_2, k_3$  содержат общий множитель  $\Delta$ , зависящий от параметров, характеризующих упругие свойства материала оболочки планеты, а также от параметра  $x$ , равного отношению внутреннего и внешнего ее радиусов.

В выражении для функции  $F_1(\mathbf{r}_M, t)$  слагаемое, содержащее множитель  $k_3$ , характеризует деформации планеты, вызванные притяжением Луны. Максимальное значение равновесного лунного прилива имеет вид:

$$F_{1л} = 2k_3(1 + e_2)^3. \quad (17)$$

Тогда из (16)-(17) получим:

$$\Delta = \frac{a_2^3(1 - e_2)^3 F_{1л}}{2m_2}.$$

Данные по численному значению величины  $F_{1л}$  разнятся: 0,36 м [6, с.148], 0,75 м [7, с.15], 0,43 м (максимальная амплитуда на экваторе с учетом солнечного прилива) [5, с. 63]. Поэтому для описания приливных деформаций введем в рассмотрение безразмерную функцию:

$$F_{10}(\mathbf{r}_M, t) = \frac{F_1(\mathbf{r}_M, t)}{F_{1л}} = k_{20}(1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3(1 + 3h_{12} \cos(g_1 + \vartheta_1 - g_2 - \vartheta_2))(3(\xi_1, \mathbf{e}_M)^2 - 1) + k_{30}(1 + e_2 \cos \vartheta_2)^3(3(\xi_2, \mathbf{e}_M)^2 - 1),$$

$$k_{20} = \frac{k_2}{2k_3(1+e_2)^3} = \frac{m_1 a_2^3 (1-e_2)^3}{2m_2 a_1^3 (1-e_1^2)^3}, \quad k_{30} = \frac{1}{2(1+e_2)^3}.$$

Для системы Солнце-Земля-Луна получим следующие значения коэффициентов  $k_{j0}$  ( $j = 2,3$ ):

$$k_{20} = 0,193987 \quad , \quad k_{30} = 0,425928 \quad .$$

От размерного времени  $t$  перейдем к безразмерной переменной  $\tau$ , равной числу оборотов Земли вокруг своей оси:

$$\tau = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t + \varphi(0)}{2\pi}.$$

Тогда  $\varphi = 2\pi\tau$ .

Обозначая штрихом производную по  $\tau$ , получим:

$$g'_i = \frac{2\pi}{\omega} \dot{g}_i = \frac{2\pi(1+e_i \cos g_i)^2}{(1-e_i^2)^{3/2}} \frac{n_i}{\omega} = \frac{2\pi(1+e_i \cos g_i)^2}{(1-e_i^2)^{3/2}} \frac{T_{rot}}{T_i} \quad (i=1,2),$$

$$g'_2 = \frac{2\pi}{\omega} \dot{g}_2 = \frac{2\pi T_{rot}}{T_3}.$$

На рис. 2 представлен график функции  $F_{10}(\tau)$ , описывающей приливные деформации для точки на экваторе рассматриваемой двуслойной модели Земли за 30 суток. В начальный момент времени Солнце, Земля, Луна находились на одной прямой, причем Солнце и Луна – по разные стороны Земли, при этом на поверхности Земли взята точка с нулевыми значениями широты и долготы ( $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $g_1(0) = 0$ ,  $g_2(0) = 0$ ,  $g_2(0) = 0$ ). Амплитуда колебаний точки  $M$  зависит от фазы Луны.

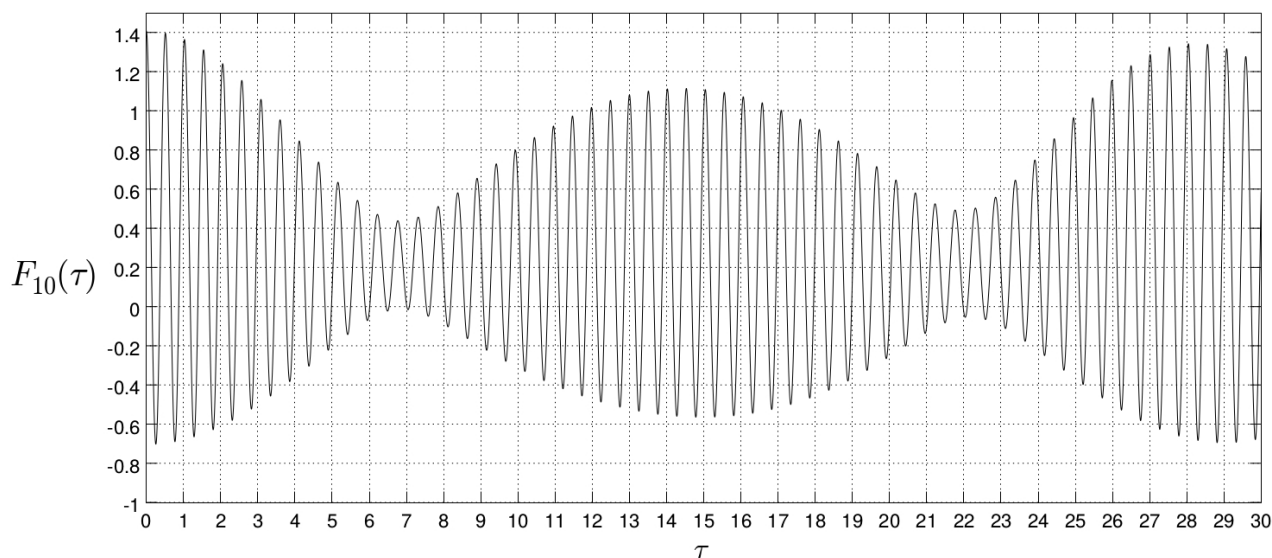


Рис. 2. Приливные деформации на экваторе планеты ( $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$ )

На рис. 3, 4 изображены графики функции  $F_{10}(\tau)$  для точки поверхности планеты, расположенной на широтах  $30^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно. Графики построены в среде Octave.

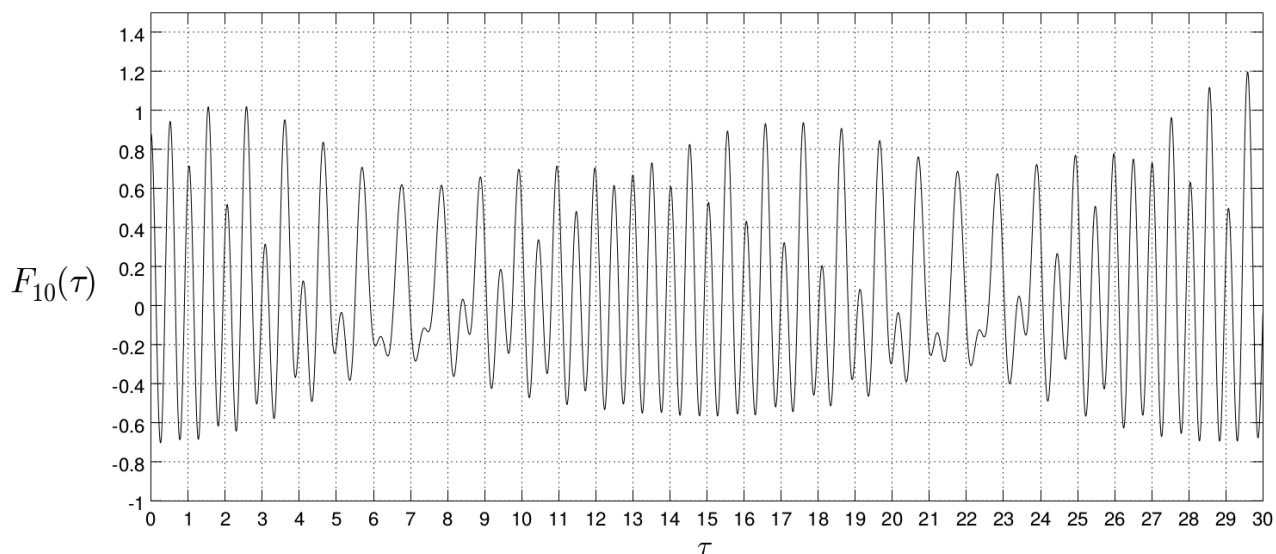


Рис. 3. Приливные деформации на широте  $30^\circ$  ( $\mu = \pi/6$ ,  $\lambda = 0$ )

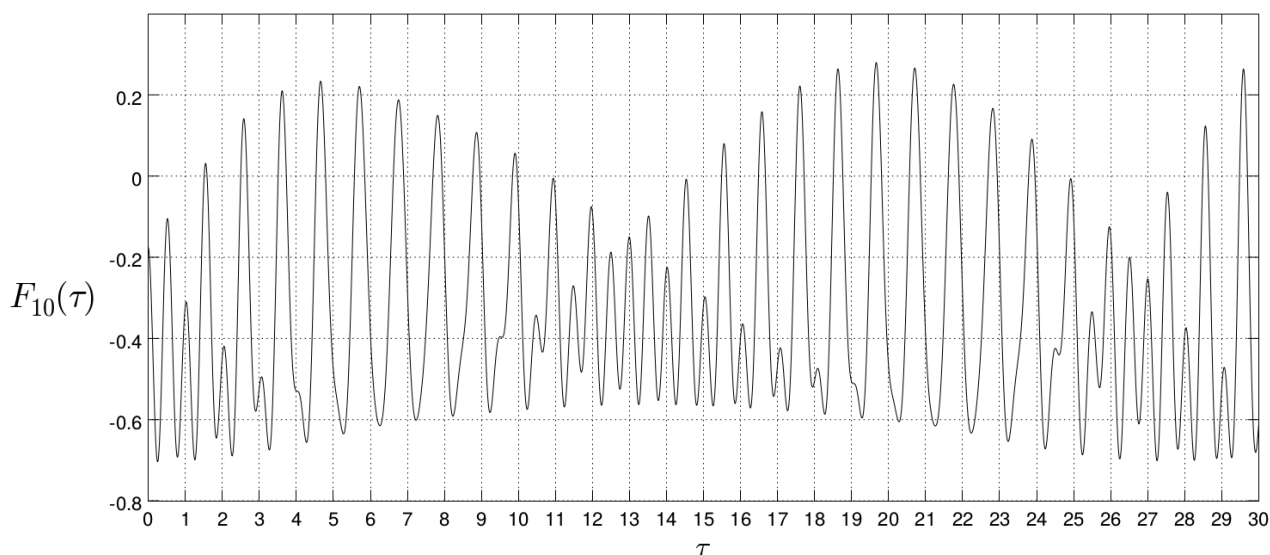


Рис. 4. Приливные деформации на широте  $60^\circ$  ( $\mu = \pi/3$ ,  $\lambda = 0$ )

#### Список литературы:

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч 1,2. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1997.
2. Шатина А.В. О деформациях планеты, содержащей подвижное внутреннее ядро, в гравитационном поле центрального тела и спутника// Известия АН. Механика твердого тела. 2005. №1. С. 3-12.
3. Шатина А.В., Шерстнев Е.В. Движение спутника в гравитационном поле вязкоупругой планеты с ядром// Космические исследования. 2015. Т.53. №2. С.173-180.
4. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003.
5. Куликовский П.Г. Справочник любителя астрономии. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
6. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010.
7. Сурдин В.Г. Пятая сила. М.: Изд-во МЦНМО, 2002.

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ ПОТОКА С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ И ИХ РЕШЕНИЯ

**М.И. Шишина**

Нижегородский планетарий.

603002, Нижний Новгород, ул. Революционная, 20, e-mail: java-jsp@yandex.ru

В настоящей работе для поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока бесконечной глубины с постоянной завихренностью с помощью конформных переменных и техники конформных преобразований выведена система точных интегро-дифференциальных уравнений. Получены уравнения для профиля стационарных волн и найдены их решения в виде рядов Фурье. Найдены полные системы нелинейных уравнений для определения коэффициентов решений уравнений профиля стационарных волн.

**Ключевые слова:** завихренность, конформные переменные, поверхностные гравитационные волны, стационарные волны, ряды Фурье.

Пусть двумерное течение идеальной жидкости существует на потоке с постоянной завихренностью  $\omega$ , свободной границей, глубины  $H_0$ . Рассматриваются волны на поверхности жидкости, длины которых много меньше  $H_0$ . Тогда, при изучении таких возмущений жидкости, слой жидкости может считаться бесконечно глубоким.

В плоскости  $(x, y)$  идеальная несжимаемая жидкость занимает ограниченную свободной поверхностью  $F(x, y, t) = 0$  ( $t > 0$  - время) область  $D$ .  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\}$  - вектор скорости течения жидкости. На дне выполнено условие непротекания жидкости:

$$v_y \Big|_{y \rightarrow -\infty} = 0.$$

Рассмотрим волны на потоке с постоянной завихренностью  $\omega$ :

$$\omega = -\Delta\Psi(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\Psi = \Psi(x, y, t)$  - функция тока, такая что

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Общее решение уравнения (1), в силу его линейности при постоянном  $\omega = const$ , для функции тока может быть представлено в следующем виде:

$$\Psi = -\frac{\omega y^2}{2} + \Phi, \quad (2)$$

где функция  $\Phi = \Phi(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0.$$

По гармонической функции  $\Phi(x, y, t)$  находится сопряженная гармоническая функция  $\varphi = \varphi(x, y, t)$  (с точностью до постоянного слагаемого, которое считается равным нулю), связанная с  $\Phi(x, y, t)$  условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Функция  $\varphi$  называется эффективным потенциалом. Тогда функция

$$W(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + i\Phi(x, y, t)$$

представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного  $z = x + iy$  в области  $D$ . Функция  $W(z, t)$  условно называется "комплексным потенциалом".

Уравнение Эйлера в форме Громеки – Лэмба

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 + [\mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}] + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g}$$

с учетом равенства

$$[\mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}] = \omega \nabla \Psi$$

запишется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \omega \Psi + \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0 \quad (3)$$

со следующими граничными условиями на свободной поверхности:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{F(x, y, t) = 0} = 0$$

$$p \Big|_{F(x, y, t) = 0} = p_a$$

$$v_y \Big|_{y \rightarrow -\infty} = 0$$

Поскольку вектор скорости течения жидкости

$$\mathbf{v} = -\omega y \cdot \mathbf{x}_0 + \nabla \varphi$$

( $\mathbf{x}_0$  - единичный вектор оси абсцисс плоскости  $(x, y)$ ), и выполняется равенство (2), то уравнение (3) переписывается в виде

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi - \omega y \mathbf{x}_0|^2 + \omega \left( \Phi - \frac{\omega y^2}{2} \right) + \frac{p_a}{\rho} + gy \right) = 0$$

Следовательно, требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

со следующими граничными условиями на свободной поверхности:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi - \omega y \mathbf{x}_0|^2 + \omega \left( \Phi - \frac{\omega y^2}{2} \right) + \frac{p_a}{\rho} + gy \right) \Big|_{F(x, y, t) = 0} = 0 \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} - \omega y \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{F(x, y, t) = 0} = 0 \quad (5)$$

$$p \Big|_{F(x, y, t) = 0} = p_a$$

$$\varphi_y \Big|_{y \rightarrow -\infty} = 0$$

Пусть несжимаемая жидкость в плоскости  $(x, y)$  занимает ограниченную свободной поверхностью область

$$G = \{ -\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq f(x, t) \}.$$

Введем комплексную функцию  $z = z(\xi, \eta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t)$ , аналитическую в области  $G$ . Выполним конформное отображение области  $G$ , занятой жидкостью в плоскости  $z = x + iy$ , в полуплоскость  $-\infty < \xi < +\infty, -\infty < \eta \leq 0$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью функции

$$z(\xi, \eta, t) = \xi + i\eta + z_1(\xi, \eta, t) \equiv \xi + i\eta + x_1(\xi, \eta, t) + iy_1(\xi, \eta, t),$$

где  $x_1(\xi, \eta, t), y_1(\xi, \eta, t)$  - функции, гармонические в полуплоскости  $\text{Im}\zeta \leq 0$  и удовлетворяющие в этой полуплоскости условиям Коши – Римана

$$x_{1\xi} = y_{1\eta}, \quad x_{1\eta} = -y_{1\xi}.$$

При этом функции  $y$  и  $x_1$  связаны между собой соотношением:

$$y = H(x_1),$$

где  $H$  - интегральный оператор - преобразование Гильберта:

$$H f(u) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

Якобиан отображения

$$J = x_\xi^2 + y_\xi^2 \neq 0.$$

Функции  $\varphi(\xi, \eta, t)$  и  $\Phi(\xi, \eta, t)$  - гармонические в полуплоскости  $\text{Im}\zeta \leq 0$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\varphi_\xi = \Phi_\eta, \quad \varphi_\eta = -\Phi_\xi.$$

Следовательно, “комплексный потенциал”  $W = \varphi + i\Phi$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Im}\zeta \leq 0$ . При этом на действительной оси

$$W = \varphi + i H(\varphi).$$

В случае глубокой воды справедливы равенства:

$$\Phi = H(\varphi), \quad \Phi_\xi = H(\varphi_\xi).$$

Совершив конформное преобразование, от уравнений (4), (5) приходим к уравнениям:

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{(x_t x_\xi + y_t y_\xi) \varphi_\xi}{J} + \frac{(y_t x_\xi - x_t y_\xi) \Phi_\xi}{J} - \frac{\omega y (x_\xi \varphi_\xi + y_\xi \Phi_\xi)}{J} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2J} [(\varphi_\xi)^2 + (\Phi_\xi)^2] + \omega \Phi + \frac{p_a}{\rho} + gy \right]_{\eta=0} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0} = (x_t y_\xi - y_t x_\xi + \omega y y_\xi) \Big|_{\eta=0} \tag{7}$$

С учетом кинематического граничного условия, динамическое граничное условие (6) запишется в виде, аналогичном уравнению Бернулли:

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{x_t x_\xi + y_t y_\xi + \omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi + \frac{1}{2J} ((\varphi_\xi)^2 - (\Phi_\xi)^2) + \omega \Phi + \frac{p_a}{\rho} + gy \right]_{\eta=0} = 0 \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) приводятся к виду, разрешенному относительно производной по времени (при  $\eta = 0$ ):

$$\begin{cases} z_t = -iz_\xi (1 + i\hat{H}) \left( \frac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J} \right), \\ \varphi_t + gy + \omega\Phi + \frac{p_a}{\rho} = \varphi_\xi \hat{H} \left( \frac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J} \right) + \frac{\omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi - \frac{1}{2J} \left( (\varphi_\xi)^2 - (\Phi_\xi)^2 \right) \end{cases} \quad (9)$$

Считая в дальнейшем  $p_a = 0$ , приведем систему уравнений (9) к эквивалентной системе уравнений, заданной в неявном виде:

$$y_t (1 + x_{1\xi}) - x_t y_\xi - \omega y y_\xi = -\hat{H}(\varphi_\xi), \quad (10)$$

$$\varphi_t y_\xi - \varphi_\xi y_t + g y y_\xi + \omega \Phi y_\xi + \hat{H}(\varphi_t (1 + x_{1\xi}) - \varphi_\xi x_t + g y (1 + x_{1\xi}) + \omega (\Phi (1 + x_{1\xi}) - \varphi_\xi y)) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет частное решение:

$$y = y(\xi - ct), \quad x_1 = x_1(\xi - ct), \quad \varphi = \varphi(\xi - ct) - g b_0 t, \quad (12)$$

описывающее стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью  $c$ .

Подставляя (12) в уравнение (10), получаем

$$(c + \omega y) y_\xi = \hat{H}(\varphi_\xi), \quad (13)$$

откуда следует, что

$$\Phi = cy + \frac{\omega y^2}{2}. \quad (14)$$

Подставляя (12) в уравнение (11) и учитывая равенства (13), (14), после преобразований приходим к уравнению для профиля стационарной волны (формы поверхности):

$$\begin{aligned} (c^2 + 2g b_0) y_\xi = g y y_\xi + g \hat{H}(y(1 + x_{1\xi})) + \frac{\omega^2}{2} y^2 y_\xi + \omega \hat{H} \left( cy + \frac{\omega y^2}{2} (1 + x_{1\xi}) \right) + \\ + \omega^2 \hat{H}(y \hat{H}(y y_\xi)). \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что система уравнений (9) эквивалентна системе уравнений, заданной в неявном виде:

$$y_t x_\xi - x_t y_\xi - \omega y y_\xi = -\hat{H}(\varphi_\xi), \quad (16)$$

$$\varphi_t + gy = -\frac{1}{2J} \left( (\varphi_\xi)^2 - (\Phi_\xi)^2 \right) + \varphi_\xi \hat{H} \left( \frac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J} \right) + \frac{\omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi - \omega \Phi. \quad (17)$$

Отсюда (с учетом (13) и (14)) имеем

$$-c \varphi_\xi - g b_0 + gy = -\frac{(\varphi_\xi)^2 - (c + \omega y)^2 y_\xi^2}{2J} + c \varphi_\xi \hat{H} \left( \frac{y_\xi}{J} \right) + \frac{\omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi - \omega \left( cy + \frac{\omega y^2}{2} \right).$$

Учитывая, что

$$\hat{H} \left( \frac{y_\xi}{J} \right) = \frac{x_\xi}{J} - 1 \quad ([1]),$$

после преобразований приходим к уравнению

$$gy - g b_0 = \frac{1}{2} c^2 - \frac{(c + \omega (\hat{H}(y y_\xi) + y x_\xi))^2}{2J} \quad (18)$$



для профиля стационарной волны, эквивалентному уравнению (15).

Найдем решение уравнения (15). Далее будем предполагать, что все функции являются периодическими с периодом  $L = \frac{2\pi}{k}$ , где  $k$  - целое число. Полное сохранение массы жидкости в этом случае предполагает равенство ([1]):

$$\langle y(1 + x_{1\xi}) \rangle = 0, \quad (19)$$

где треугольные скобки означают усреднение по периоду. Решение уравнения (15) будем искать в виде ряда Фурье

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nk\xi. \quad (20)$$

Отсюда после усреднения получаем

$$a_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}, \quad (21)$$

где  $S_n = nk$ .

Из уравнения (18) находим

$$b_0 = a_0 - \frac{1}{2g} \left( c^2 - \left\langle \frac{(c + \omega a_1 \cos k\xi)^2}{J} \right\rangle \right), \quad (22)$$

где якобиан преобразования

$$J = 1 + 2(a_1 k) \cos k\xi + (a_1 k)^2.$$

Подставляя в уравнение (15) ряд (20), найдем, что коэффициенты ряда  $a_n$  удовлетворяют бесконечной системе нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^2 - (g + \omega c + \omega^2 a_0) S_1) a_1 &= \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{S_1(S_m + S_{m+1})}{S_m S_{m+1}} \right) a_m a_{m+1} + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} S_1 a_m a_{m+1} + \\ &+ \frac{\omega^2}{2} \cdot a_1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} S_1 \cdot \frac{C_m a_{m+1}}{S_{m+1}} - \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m B_{m+1} + a_{m+1} B_m) \cdot S_1; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^2 - (g + \omega c + \omega^2 a_0) S_n) a_n &= \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{S_n(S_m + S_{n+m})}{S_m S_{n+m}} \right) a_m a_{n+m} + \\ &+ \frac{g}{4} \sum_{m=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{S_n(S_m + S_{n-m})}{S_m S_{n-m}} \right) a_m a_{n-m} + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} S_n a_m a_{n+m} + \frac{\omega^2}{4} \sum_{m=1}^{n-1} S_n a_m a_{n-m} + \\ &+ \frac{\omega^2}{2} a_n \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_n C_m a_{n+m}}{S_{n+m}} + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{S_n C_m a_{n-m}}{S_{n-m}} - \\ &- \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} S_n (a_m B_{n+m} + a_{n+m} B_m) - \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{n-1} S_n a_m B_{n-m}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $n \geq 2$ .

Здесь

$$\tilde{c}^2 = c^2 + 2g(b_0 - a_0); B_n = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l a_{n+l}}{S_n} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{a_l a_{n-l}}{S_n}; C_n = \sum_{l=1}^{\infty} a_l a_{n+l} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} a_l a_{n-l}.$$

В полученных уравнениях (23), (24) амплитуда первой гармоники  $a_1$  произвольна.

Положим  $a_1$  малой, тогда в главном порядке в соответствии с линейной теорией, находим:

$$a_0 = 0, b_0 = 0, c^2 = \tilde{c}^2 = \frac{g + \omega c}{k}. \quad (25)$$

Начальная скорость  $c_0$  удовлетворяет соотношению:

$$c_0^2 = \frac{g + \omega c_0}{k}.$$

Далее получаем, что в первом нетривиальном приближении коэффициенты  $a_2$  и  $c^2$ :

$$a_2 = \frac{4gk + \omega^2}{4(g + \omega c_0)} a_1^2, \quad (26)$$

$$c^2 = \frac{g + \omega c_0}{k} \left( 1 + \frac{c_0}{2c_0 k - \omega} \cdot \frac{8g^2 k^2 + 10gk\omega^2 + 2k\omega^3 c_0 + \omega^4}{4k(g + \omega c_0)^2} (a_1 k)^2 \right). \quad (27)$$

Решение уравнения (18) ищем в виде ряда (20). Аналогично, так же как для уравнения (15), находим коэффициенты  $a_0$ ,  $b_0$ , которые имеют вид (21), (22) соответственно, при этом якобиан преобразования

$$J = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \cos nk\xi + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \cos nk\xi \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \sin nk\xi \right)^2.$$

Далее получаем, что коэффициенты  $a_1$ ,  $a_n$  удовлетворяют следующей бесконечной системе нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2\tilde{c}^2}{S_1} - 2g - 2\omega c - 2\omega^2 a_0 \right) a_1 = 2ga_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m^2} + 2g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m + S_{1+m}}{S_m S_{1+m}} a_m a_{1+m} + \\ & + g \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (C_{m+1} + D_{m+1}) + a_{m+1} (C_m + D_m)] - 2\tilde{c}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{m+1}}{S_m S_{m+1}} + 2\omega c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{m+1}}{S_m} + \\ & + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_{m+1} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - B_m)(A_{m+1} - B_{m+1}) + \omega^2 a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m} + 2a_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{m+1}}{S_m} + \\ & + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{m+1}}{S_m} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (A_{m+1} - B_{m+1}) + a_{m+1} (A_m - B_m)]. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{2\tilde{c}^2}{S_n} - 2g - 2\omega c - 2\omega^2 a_0 \right) a_n = 2ga_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m^2} + 2g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m + S_{n+m}}{S_m S_{n+m}} a_m a_{n+m} + \\
 & + g \sum_{m=1}^{n-1} \frac{S_m + S_{n-m}}{S_m S_{n-m}} a_m a_{n-m} + g \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (C_{n+m} + D_{n+m}) + a_{n+m} (C_m + D_m)] + \\
 & + g \sum_{m=1}^{n-1} a_m (C_{n-m} + D_{n-m}) - 2\tilde{c}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{n+m}}{S_m S_{n+m}} + 2\omega c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{n+m}}{S_m} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_{n+m} + \\
 & + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{n-1} a_m a_{n-m} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - B_m)(A_{n+m} - B_{n+m}) + \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{n-1} (A_m - B_m)(A_{n-m} - B_{n-m}) + \\
 & + \omega^2 a_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m} + 2a_0 \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{n+m}}{S_m} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{S_m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_{n+m}}{S_m} + \\
 & + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (A_{n+m} - B_{n+m}) + a_{n+m} (A_m - B_m)] + \omega^2 \sum_{m=1}^{n-1} a_m (A_{n-m} - B_{n-m}),
 \end{aligned} \tag{29}$$

где  $n \geq 2$ .

Здесь

$$\tilde{c}^2 = c^2 + 2g(b_0 - a_0), \quad A_n - B_n = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l a_{l+n}}{S_l}, \quad C_n + D_n = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l a_{l+n}}{S_l S_{n+l}}.$$

Отсюда в главном порядке в соответствии с линейной теорией находим

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c^2 = \tilde{c}^2 = \frac{g + \omega c}{k}$$

и получаем, что в первом нетривиальном приближении  $a_2$  и  $c^2$  имеют вид (26) и (27) соответственно.

Отметим, что из (27) при  $\omega = 0$  следует результат Стокса [2] для волн на глубокой воде без завихренности:

$$c^2 = \frac{g}{k} \left( 1 + (ka_1)^2 \right),$$

а из уравнения (15) и системы уравнений (23), (24) при  $\omega = 0$  следует результат Дьяченко [1] для волн на воде конечной глубины без завихренности.

### Список литературы

1. Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1996. V. 22. № 10. P. 916-928.
2. Stokes G.G. Mathematical and Physical Papers // Cambridge: Cambridge University Press. 1880. V. 1. P. 225.

## **К РАСЧЕТУ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛОПАТКАХ КОМПРЕССОРОВ АВИАЦИОННЫХ ГТД ПРИ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОМ РАССЕЯНИИ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ**

**Б.Ф. Шорр, Г.В. Мельникова, Н.Н. Серебряков, А.Д.Бортников**

ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова»  
111116, г. Москва, ул. Авиамоторная д.2, e-mail: shorr@ciam.ru

Рассмотрено решение нелинейной задачи определения динамических напряжений в лопатках компрессора ГТД при вынужденных (в частности, резонансных) колебаниях и амплитудно-зависимом демпфировании в материале. Характеристики демпфирования в материале определяются обработкой результатов испытаний образцов на вибростенде. Нестационарные газодинамические нагрузки, возбуждающие колебания, предполагаются заданными. В качестве примера, приведен расчет коэффициента рассеяния энергии по 3-й форме колебаний одной из лопаток на основе полученных авторами экспериментальных данных по рассеянию энергии в титановом сплаве ВТ-6.

Амплитудно-зависимый декремент колебаний, титановый сплав, лопатка компрессора, нелинейные вынужденные колебания

### **Введение**

Для успешного прогнозирования динамических напряжений в лопатках компрессоров и турбин газотурбинных двигателей на этапе проектирования необходимо знать как действующие переменные нагрузки, так и факторы, приводящие к рассеянию энергии при колебаниях.

Успехи расчетных методов газовой динамики при использовании современной вычислительной техники позволяют достаточно точно определять действующие на лопатки нестационарные газовые нагрузки на различных режимах работы (см, например, [1-3]).

В широко применяющихся в современных двигателях «ближних» конструкциях роторов (когда лопатки изготавливаются заодно с диском) рассеяние энергии при колебаниях лопаток происходит только от газодинамических сил потока и демпфирования в материале. Но в ряде случаев (для относительно коротких и жестких лопаток внутренних ступеней компрессоров, при высокочастотных формах колебаний, а также на некоторых нерасчетных режимах работы двигателей), роль газодинамического демпфирования уменьшается и на первый план выходит демпфирование в материале лопаток. Большое значение имеет демпфирование в лопатках из композитных материалов.

Исследования показывают, что рассеяние энергии в материале в ряде случаев существенно зависит от амплитуды переменных напряжений [4-7]. Это приводит к возникновению нелинейных колебаний конструкции, демпфирование которой зависит не только от свойств ее материала, но и от уровня возникающих динамических напряжений и их распределения по детали при данной форме колебаний.

В настоящей статье изложен подход к решению задачи определения динамических напряжений в деталях машин применительно к лопаткам компрессора рабочего колеса ГТД при установившихся вынужденных (в частности, резонансных) колебаниях и амплитудно-зависимом демпфировании в материале. Характеристики демпфирования в материале определяются обработкой результатов испытаний образцов на вибростенде. Нестационарные газодинамические нагрузки, возбуждающие колебания, предполагаются заданными. В качестве примера, приведен расчет коэффициента рассеяния энергии по третьей форме колебаний одной из лопаток на основе полученных авторами экспериментальных данных по рассеянию энергии в титановом сплаве ВТ-6.

### **Постановка задачи о расчете установившихся вынужденных колебаний лопатки компрессора при амплитудно-зависимом демпфировании в материале**

Будем исходить из следующих предпосылок:

\* Собственные частоты и распределения по лопатке векторов амплитуд относительных перемещений  $\bar{x}$  и интенсивностей напряжений  $\bar{\sigma}_i$  для интересующих проектировщика форм колебаний рассчитаны путем имеющихся в программных конечно-элементных (КЭ) комплексах опций модального анализа. Амплитуды перемещений и интенсивности напряжений отнесены к их максимальным значениям для каждой формы колебаний.

\* Путем имеющихся в программных комплексах опций газодинамического расчета или с помощью пользовательских программ типа [1-3] получены численные решения задачи нестационарного течения потока воздуха в компрессоре. В результате найдены значения действующих на деталь векторов амплитуд газовых сил во временной области  $\mathbf{P}(t)$  на интересующих проектировщика режимах работы двигателя.

\* Из спектрального анализа указанных сил найдены амплитуды их составляющих  $\mathbf{P}$ , на частотах, кратных частоте вращения, и выявлены возможные резонансы рабочего колеса на исследуемом режиме по какой-либо форме колебаний.

\* Зависимость коэффициента рассеяния энергии в материале  $\psi_{mat}$  от амплитуд интенсивности действительных напряжений  $\sigma_i$  при произвольных сложных напряженных состояниях определяется той же функцией  $\psi_{mat}(\sigma_1)$ , как и при динамических испытаниях на изгиб плоских образцов при  $\sigma_i = \sigma_1$  [4,6]. Далее будем описывать рассеяние энергии, в основном, с помощью обычно используемого в инженерных расчетах логарифмического декремента колебаний, равного  $\delta = 0.5\psi$ .

Ставится задача оценить возможный уровень амплитуд динамических напряжений в лопатках на исследуемом режиме при установившихся резонансных колебаниях и известной характеристики демпфирования в материале, представленной для каждого КЭ в виде зависимости  $\delta_{mat} = f(\sigma_i)$ .

В конечно-элементной постановке при постоянной величине коэффициента рассеяния энергии колебаний задача сводится к решению матричного линейного уравнения вида:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P} \cos(\omega t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$  - соответственно, матрицы инерции, демпфирования и жесткости,  $\mathbf{x}$  - вектор действительных перемещений.

При амплитудно-зависимом демпфировании нелинейное уравнение движения в КЭ постановке примет вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P} \cos(\omega t). \quad (2)$$

В общем случае, нагрузка  $\mathbf{P}$  в правой части уравнения (2) также может зависеть от амплитуд перемещения  $\mathbf{x}$  и скорости  $\dot{\mathbf{x}}$ .

При колебаниях лопатки в упругой области вектор амплитуд перемещений  $\mathbf{x}$  однозначно определяет распределение и величину амплитуд интенсивности динамических напряжений  $\bar{\sigma}_i$ , но демпфирование в различных точках будет различным. Чтобы линеаризовать уравнение (2), необходимо найти величину постоянного коэффициента рассеяния энергии в материале  $\psi_{eq}$ , эквивалентную по интегральному эффекту общему демпфированию колебаний лопатки при данном распределении в ней напряжений.

В работе [4] подобный подход был применен для нахождения амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний для материала  $\delta_{mat}(\sigma)$  по амплитудной зависимости  $\delta_{\Sigma}(\sigma_i)$ , полученной испытаниями образца в целом при определенном поле амплитуд напряжений  $\sigma_i$ .

В данной работе решается обратная задача: нахождение  $\delta_{\Sigma} = \delta_{eq}$  для заданного поля амплитуд интенсивностей относительных напряжений  $\bar{\sigma}_i$  в детали при известной характеристике  $\delta_{mat} = f(\sigma_i)$ , но заранее неизвестных абсолютных величинах амплитуд интенсивности напряжений  $\sigma_i$ .

В общем случае при произвольной характеристике  $\delta_{mat} = f(\sigma_i)$  задача решается итерационным путем. При использовании приближенной аналитической формулы  $\delta_{mat}(\sigma_i)$ , полученной обработкой экспериментальных амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) образцов (см. следующий раздел), возможно замкнутое решение.

### Экспериментальное определение амплитудно-зависимого декремента колебаний в материале образца из титанового сплава

Титановые сплавы имеют низкий уровень демпфирования, которому соответствуют острые пики АЧХ, получаемых обычно возбуждением на электродинамическом вибраторе колебаний образцов на около резонансных частотах при нескольких уровнях амплитуд напряжений. Для определения амплитудно-зависимого логарифмического декремента колебаний образца по его экспериментальным АЧХ в выбранной точке образца, был разработан следующий подход [4].

Образец препарируется тензодатчиками, один из которых выбирается в качестве контрольного. После настройки вибростенда на резонанс с заданным уровнем амплитуды переменных напряжений  $\sigma_k$  по контрольному датчику, определяется подводимая энергия к стенду, которая затем поддерживается постоянной. В диапазоне около резонансных частот  $\pm(1.5 \div 3)\%$  проводится ступенчатая настройка возбуждения на нескольких фиксированных частотах с выдержкой (~5-10 с) на установившихся вынужденных колебаниях. На рис.1 приведена получающаяся типичная временная запись сигнала с контрольного тензодатчика, по данным которого строится экспериментальная АЧХ. Заметим, что современное программное обеспечение стендового оборудования позволяет получать АЧХ непосредственно в процессе проведения эксперимента, однако для ее корректного представления необходимо достаточно медленное время прохода через резонанс. Экспериментальная работа выполнялась совместно с А.Н. Стадниковым и В.А.Шестаковым.

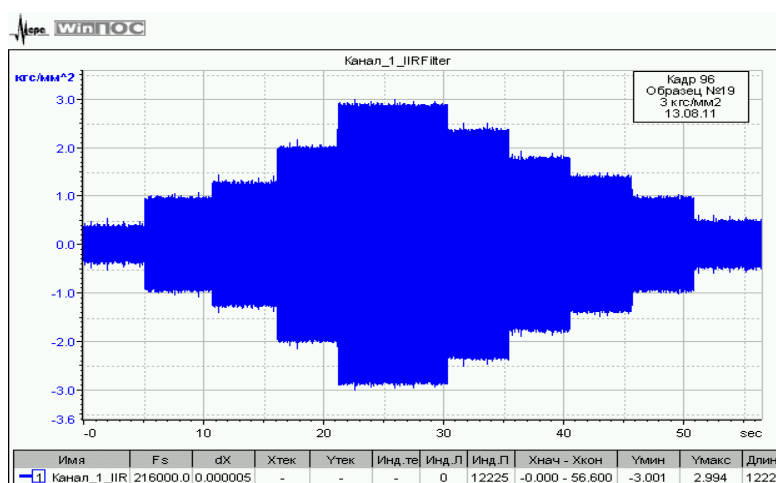


Рис.1. Временная запись сигнала с тензорезистора при установившихся колебаниях плоского образца с контролируемой амплитудой переменных напряжений  $\sigma_k = 30$  МПа

В работе [4] показано, что при амплитудно-зависимом демпфировании декремент колебаний в образце может быть определен с достаточной точностью по формуле

$$\delta_{\Sigma} \approx \pi \Delta \bar{\omega}(\tilde{\sigma}) \tilde{\sigma}, \quad (3)$$

где  $\Delta \bar{\omega} = \Delta \omega / \omega_p \ll 1$  - относительная ширина резонансного пика на высоте  $\tilde{\sigma} = \sigma / \sigma_p \approx 0.2$  от максимального значения амплитуды  $\sigma_p$  на резонансной частоте  $\omega_p$ .

Полученная экспериментальная зависимость декремента колебаний  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$  в образце из титанового сплава ВТ6 от амплитуд контролируемых переменных напряжений  $\sigma_k$  приведена на рис.2 кривой 1, где  $\sigma_i = \sigma_k$ ,  $\delta = \delta_{\Sigma}$ . Эта зависимость может быть с достаточной точностью аппроксимирована степенной функцией

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{in} + k_{\Sigma} \sigma_k^n, \quad (4)$$

где  $k_{\Sigma}$  и  $n$  - положительные константы, зависящие от свойств материала и конфигурации образца.

Их значения могут быть найдены по трем точкам кривой  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$ . В данном случае  $n \approx 1$ . В области малых амплитуд напряжений демпфирование пренебрежимо мало, поэтому влиянием члена  $\delta_{in}$  в уравнении (4) можно пренебрегать.

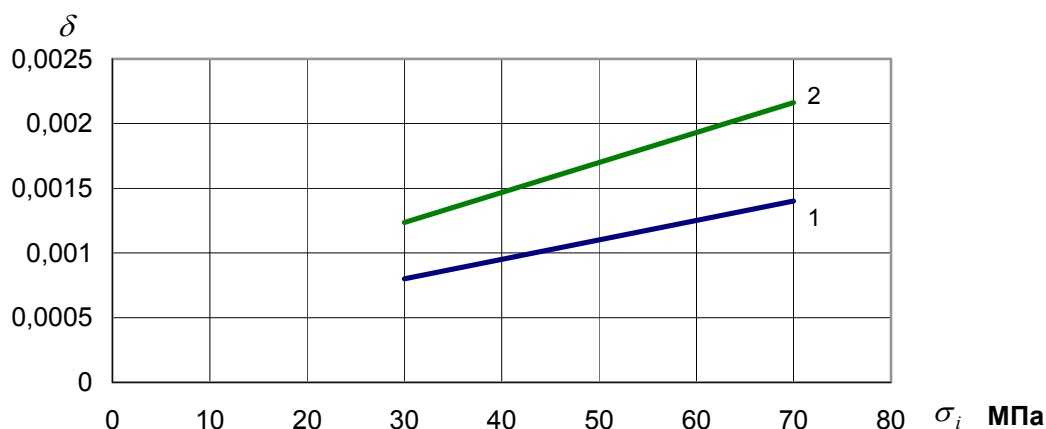


Рис.2. Амплитудно-зависимый декремент колебаний: 1 - для плоского образца из титанового сплава; 2 – для материала образца

Поскольку рассеяние энергии в материале при колебаниях должно зависеть, в основном, от работы сил внутреннего трения, возникающих при деформации формоизменения и определяющихся амплитудой интенсивности напряжений  $\sigma_i$  [6], естественно предположить, что зависимости  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$  и  $\delta_{mat}(\sigma_i)$ , хотя бы условно подобны, т.е.

$$\delta_{\Sigma}(\sigma_k) = \eta(\sigma_k) \delta_{mat}(\sigma_i), \quad (5)$$

где  $\eta(\sigma_k)$  - коэффициент условного подобия, который в общем случае может зависеть от уровня напряжений. В случае строгого подобия  $\eta = \text{const}$ .

Для определения  $\eta(\sigma_k)$  учтем, что при сложном напряженном состоянии колеблющегося тела энергия формоизменения единичного объема равна

$$U(\sigma_i) = \frac{\sigma_i^2}{6G} \quad (6)$$

где  $G$  - модуль сдвига, а рассеяние энергии за один период колебаний

$$\Delta U(\sigma_i) = 2\delta_{mat}(\sigma_i)U(\sigma_i) \quad (7)$$

Рассеяние энергии всего колеблющегося тела объемом  $V$  может быть представлено [7] в двух видах:

$$\Delta U_{\Sigma} = \int_V \Delta U(\sigma_i) dV = 2 \int_V \delta_{mat}(\sigma_i) U(\sigma_i) dV \quad (8a)$$

или

$$\Delta U_{\Sigma} = 2\delta_{\Sigma}(\sigma_k) \int_V U(\sigma_i) dV. \quad (8b)$$

Приравняв правые части формул (8a) и (8б), получим с учетом соотношений (5) и (6) условие энергетического баланса

$$F(\sigma_k) = \int_V \delta_{mat}(\sigma_i) \sigma_i^2 dV - \delta_{\Sigma}(\sigma_k) \int_V \sigma_i^2 dV = 0, \quad (9)$$

связывающее характеристики демпфирования в материале и в детали в целом.

Для определенной формы колебаний представим амплитуду интенсивности напряжений в произвольной точке детали как

$$\sigma_i = \sigma_k \bar{\sigma}_i \quad (10)$$

где относительные амплитуды  $\bar{\sigma}_i$  во всех конечных элементах образца для данной формы колебаний образца определены из модального расчета.

Когда известна экспериментальная характеристика демпфирования образца  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$  для данной формы колебаний, уравнение (9) принимает вид

$$F(\sigma_k) = \int_V \eta^{-1}(\sigma_k) \delta_{\Sigma}(\sigma_k, \bar{\sigma}_i) \bar{\sigma}_i^2 dV - \delta_{\Sigma}(\sigma_k) \int_V \bar{\sigma}_i^2 dV = 0 \quad (11a)$$

откуда функция  $\eta(\sigma_k)$ , может быть вычислена путем последовательных итераций, что позволяет найти характеристику материала  $\delta_{mat}(\sigma_i) = \eta^{-1}(\sigma_k) \delta_{\Sigma}(\sigma_k)$ .

При уже известной характеристике материала  $\delta_{mat}(\sigma_i)$ , из уравнений (5), (9) и (10) следует

$$F(\sigma_k) = \int_V \delta_{mat}(\sigma_k, \bar{\sigma}_i) \bar{\sigma}_i^2 dV - \eta(\sigma_k) \delta_{mat}(\sigma_k) \int_V \bar{\sigma}_i^2 dV = 0 \quad (11b)$$

что позволяет прямо найти функцию  $\eta(\sigma_k)$  и установить по формуле (5) характеристику демпфирования для других деталей из того же материала при заданных формах колебания.

В частном случае, при аппроксимации по формуле (4) экспериментальной зависимости  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$  степенной функцией  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k) = k_{\Sigma} \sigma_k^n$ , имеем  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k, \bar{\sigma}_i) = k_{\Sigma} \sigma_k^n \bar{\sigma}_i^n$ , и уравнение (11a) удовлетворяется при постоянном значении коэффициента подобия

$$\eta = \frac{\int_V \bar{\sigma}_i^{2+n} dV}{\int_V \bar{\sigma}_i^2 dV}. \quad (12)$$

Декремент колебаний материала представляется функцией

$$\delta_{mat} = k_{mat} \sigma_i^n, \quad (13)$$

где

$$k_{mat} = \eta^{-1} k_{\Sigma}. \quad (14)$$

Соответствующая зависимость (13) для титанового сплава ВТ6, перестроенная с кривой 1, рис.2, показана выше на рисунке кривой 2 при  $\delta = \delta_{mat}$ .

**Расчет динамических напряжений в детали при вынужденных колебаниях с амплитудно-зависимым демпфированием в материале**



Имея характеристику демпфирования материала в форме зависимости  $\delta_{mat}(\sigma_i)$  или, в частном случае, в виде формулы (13) и рассчитав для данной формы колебаний распределение амплитуд интенсивностей напряжений  $\bar{\sigma}_k$ , отнесенных к контрольному напряжению  $\sigma_k$  в выбранном элементе детали, находим по формулам предыдущего раздела коэффициент соответствия характеристик  $\eta$ . В качестве контрольного элемента удобно принимать точку с максимальным значением напряжением  $\sigma_{max}$ . Демпфирующие характеристики материала пересчитываются по формуле (5) на демпфирующие характеристики детали  $\psi_{\Sigma}(\sigma_k)$ , что дает кривую 1, условно показанную на рис.3.

В соответствии с линеаризованным уравнением (2), должна решаться задача о вынужденных колебаниях детали при постоянном для нее (но еще неизвестном) коэффициенте демпфирования  $\delta_{\Sigma}$ . Если последовательно задаваться рядом значений  $\sigma_k$  и соответствующими величинами  $\delta_{\Sigma}(\sigma_k)$ , можно получить новые значения контрольного напряжения  $\sigma'_k$ , удовлетворяющие уравнению (2), и построить зависимость  $\delta_{\Sigma}(\sigma'_k)$ , которая будет иметь вид кривой 2 на рис.3. При повышенном демпфировании напряжение  $\sigma'_k$  уменьшается, при снижении демпфирования – увеличивается. Точка пересечения кривых 1 и 2 дает искомое решение с расчетным значением контрольного напряжения  $\sigma_k$  и соответствующим ему коэффициентом  $\delta_{\Sigma}$ .

Процесс решения можно ускорить, используя итерационный процесс, схематически показанный на рис.3. В качестве исходного значения при  $i = 0$  принято большое демпфирование  $\delta_{\Sigma}^{(0)}$  (точка I), соответствующее по характеристике материала (13) большому напряжению (точка I), но при котором решение уравнения (2) даст малое напряжение  $\sigma_k^{(0)}$  (точка II) и соответствующее ему малое демпфирование  $\tilde{\delta}_{\Sigma}^{(1)}$  (точка III). Для начала следующей итерации примем  $\delta_{\Sigma}^{(1)} = 0.5[\delta_{\Sigma}^{(0)} + \tilde{\delta}_{\Sigma}^{(1)}]$  (точка IV). Расчет напряжений при  $\delta_{\Sigma}^{(1)}$  даст напряжение  $\sigma_k^{(1)}$  (точка V), и т.д.

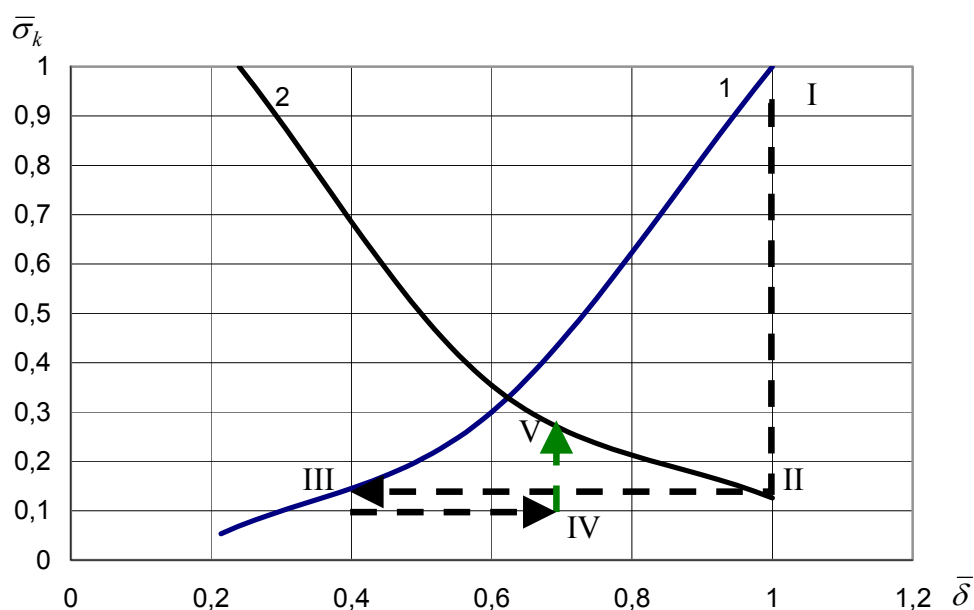


Рис. 3. Схема итерационного решения системы уравнений вынужденных колебаний детали и амплитудно-зависимого демпфирования материала

Обозначив демпфирующую характеристику детали как  $\delta_\Sigma = f(\sigma_k)$  и результат решения уравнения (2) как  $\sigma_k = F(\delta_\Sigma)$ , получим для итераций  $i > 1$  следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_\Sigma^{(i)} &= f[\sigma_k^{(i-1)}], \\ \delta_\Sigma^{(i)} &= 0.5[\delta_\Sigma^{(i-1)} + \tilde{\delta}_\Sigma^{(i)}], \\ \sigma_k^{(i)} &= F[\delta_\Sigma^{(i)}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Процесс расчета заканчивается при  $\sigma_k^{(i)} \approx \sigma_k^{(i-1)}$ .

В частном случае аппроксимации характеристик демпфирования  $\delta_\Sigma = k_\Sigma \sigma_k^n$  их значения при двух уровнях напряжений связаны соотношением

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \left( \frac{\sigma_{d1}}{\sigma_{d2}} \right)^n, \quad (16a)$$

где для простоты записи нижние индексы  $\Sigma$  и  $k$  опущены, а индекс  $d$  указывает на то, что параметры данного соотношения относятся к демпфированию.

С другой стороны из решения линеаризованного уравнения (2) при  $\mathbf{P} = const$  и малом демпфировании следует

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (16b)$$

Видно, что отношения напряжений, полученные из разных условий, связаны соотношением

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left( \frac{\sigma_{d1}}{\sigma_{d2}} \right)^n. \quad (17)$$

Если для какого-нибудь декремента  $\delta_1$  найдены соответствующие ему значения напряжений  $\sigma_{d1}$  и  $\sigma_1$ , то напряжение в точке пересечения кривых определится как

$$\sigma_{d2} = \sigma_2 = (\sigma_1 \sigma_{d1}^n)^{1/(1+n)}. \quad (18)$$

При  $n \rightarrow 0$  напряжения  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ , при  $n = 1$  имеем  $\sigma_2 = (\sigma_1 \sigma_{d1})^{0.5}$  и т.д.

### **Пример расчета динамических напряжений в лопатке компрессора.**

Для демонстрации изложенного способа расчета рассмотрим модельную лопатку компрессора, конечно-элементная модель которой представлена на рис.4. Материал лопатки – титановый сплав ВТ-6, демпфирующие характеристики которого были представлены выше кривой 2 на рис.2. Расчет вынужденных колебаний линеаризованного уравнения (2) выполнялся средствами коммерческого КЭ пакета MSC.Nastran при заданном поле гармонически меняющихся газодинамических нагрузок. Спектральная составляющая нестационарной компоненты газовых сил вызывала резонанс лопатки по третьей форме колебаний. Распределение по спинке пера лопатки амплитуд относительных интенсивностей напряжений по указанной форме колебаний  $\bar{\sigma}_i$  представлено на рис.5. Стрелкой показано положение точки с максимальным значением напряжений  $\bar{\sigma}_i = 1$ , которая принята в качестве контрольной.

Используя результаты расчета распределения амплитуд по лопатке, определим по формуле (12) коэффициент формы, который получился равным  $\eta = 0.336$ , и пересчитаем кривую 2 рис.2 в зависимость  $\delta_\Sigma(\sigma_k)$ , которая приведена на рис.6. При одном и том же максимальном напряжении демпфирование в лопатке по сравнению с образцом уменьшилось из-за большей неравномерности поля напряжений.

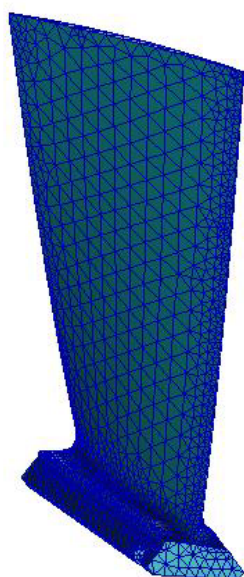


Рис.4. Конечно-элементная модель лопатки

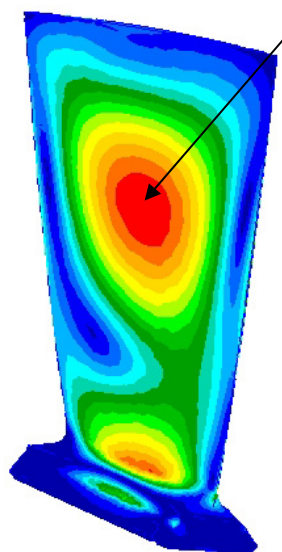


Рис.5. Распределение интенсивности амплитуд переменных напряжений по лопатке для третьей форме колебаний

Решение с требуемой точностью для итерационного процесса способа сошлось на второй итерации и, как и следовало ожидать, оно соответствовало расчету по формуле (18).

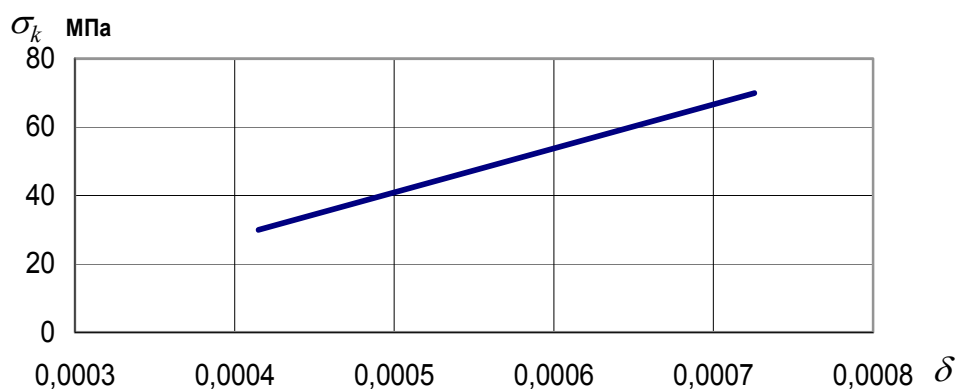


Рис.6. Амплитудная зависимость декремента колебаний лопатки по 3-й форме с представлением итерационного поиска

Полученная расчетным путем АЧХ лопатки компрессора на заданном режиме работы представлена на рис.7. Можно ожидать, что при заданных газодинамических нагрузках максимальная амплитуда интенсивности динамических напряжений на резонансе по 3-ей форме колебаний не превысит ~52 МПа.

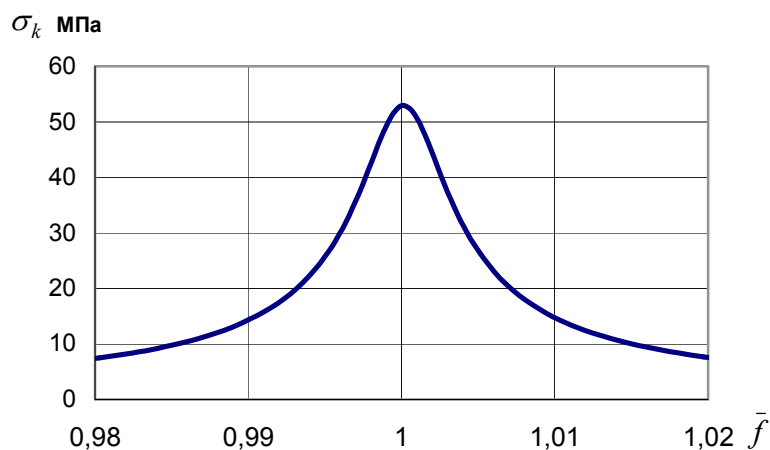


Рис.7. Расчетная амплитудно-частотная характеристика лопатки компрессора при амплитудно-зависимом трении в материале

### Выводы

Изложен способ решения нелинейной задачи о вынужденных колебаниях лопаток компрессора при амплитудно-зависимом рассеянии энергии в материале лопаток. Расчет динамических напряжений опирается на результаты численных расчетов действующих на лопатки нестационарных газовых нагрузок, экспериментальные данные по демпфирующим характеристикам материала, полученные пересчетом результатов динамических испытаний образцов, и на конечно-элементную процедуру решения линеаризованного уравнения вынужденных колебаний лопатки. Способ решения проиллюстрирован примером расчета резонансных напряжений в лопатке компрессора, который может быть выполнен на стадии проектирования.

### Список литературы

1. А.О. Шкловец, Г.М. Попов, Д.А. Колмакова. Расчет вынужденных колебаний лопаток рабочего колеса компрессора авиационного газотурбинного двигателя, возникающих от действия окружной неоднородности газового потока // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, том 14, №1(2), 2012. С.517-520;
2. A Startsev, I Brailko, I Orekhov, Development of a centrifugal compressor outlet system in ESPOSA Project // Paper ISAI12-003, Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, 13-16 July 2015;
3. В. Е. Макаров, С. П. Андреев, В. А. Шорстов, Т.В. Буюкли. Расчет коэффициента аэродинамического демпфирования лопаток рабочего колеса вентилятора ТРДД большой степени двухконтурности // Вестник УГАТУ 2015. Т. 19, № 3 (69). С. 61–64;
4. Б.Ф. Шорр, Н.Н. Серебряков. Расчетно-экспериментальный анализ амплитудно-зависимых характеристик демпфирования в деталях и материалах // Проблемы машиностроения и надежности машин, №3, 2011. С. 91-99;
5. Б.Ф.Шорр, Г.В. Мельникова, Н.Н. Серебряков Расчетно-экспериментальное исследование эффективности демпфирующих покрытий для рабочих лопаток турбомашин // Прочность материалов и элементов конструкций: Труды Международной научно-технической конференции «Прочность материалов и элементов конструкций» (Киев, 28-30 сентября 2010 г.)/ Отв. ред. В.Т. Трощенко. - Киев: Ин-т проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, 2011. С. 133-141;
6. Писаренко Г.С., Матвеев В.В., Богинич О.Е. О возможности представления характеристик рассеяния энергии в материале при колебаниях как функций инвариантов тензора на-

пряжений. В Сб. «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Материалы X Всесоюзного научно-техн. совещания», под ред. Г.С.Писаренко, Наукова думка, Киев, 1976, С.103-112;

7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем // М.: Наука, - 1967, С. 303-310;

УДК 517.912 + 517.925

## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА

**Е.Г. Якубовский**

Пенсионер E-mail: [Yakubovski@Rambler.ru](mailto:Yakubovski@Rambler.ru)

Для интегрирования системы нелинейных уравнений, она сводится к отдельным уравнениям, зависящим от одного неизвестного, относительно функции времени. При этом используются положения равновесия этой системы нелинейных уравнений.

**Ключевые слова:** сведение системы нелинейных уравнений к отдельным уравнениям, положения равновесия, турбулентный и ламинарный режим

### 1. Новый способ решения системы нелинейных уравнений с помощью положений равновесия

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = F_l(x_1, \dots, x_N), l = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе  $t$ , т.е.  $x_l(t_0) = x_l^0, l = 1, \dots, N$ , где величина  $t_0$  соответствует начальному моменту интегрирования, а величина  $x_l^0$  в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях  $x_k, k = 1, \dots, N$ , правая часть (1.1) действительна.

Систему дифференциальных уравнений (1.1) можно представить при не кратных положениях равновесия в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (1.2)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель  $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)]$ , который равен

$\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N) / \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)$ . При подстановке этого множителя в

(1.2), получим (1.1). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины  $a_l^s$  удовлетворяют условию  $F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$ , где величина  $S$  конечна.

При условии  $x_l \rightarrow a_l^\alpha, l = 1, \dots, N$  имеем конечный предел

$$\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = \frac{\partial F_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)}{\partial x_l} / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)]$$

где произвели сокращение множителя  $x_l - a_l^\alpha$ , числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t, t_0)} = \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (1.3)$$

$$\frac{dH_l(t, t_0)}{dt} = \exp\{G_l[x_1(t), \dots, x_N(t)]\}$$

где  $H_l(t, t_0)$  стремящаяся к бесконечности функция при условии  $t \rightarrow \infty$ . В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция.

Решением дифференциального уравнения (1.1) является функция  $x_l(t)$ , удовлетворяющая формуле (1.4). Для получения (1.4) разделим уравнение (1.3) на произведение множителей  $x_l - a_l^s$  и умножим (1.4) на величину  $dH_l(t, t_0)$ . Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Потенцируя полученное выражение, получим (1.4)

$$\prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} / \prod_{s=1}^S (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[H_l(t, t_0)]; \quad (1.4)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

где все значения координат положения равновесия не одинаковы.

Сумма коэффициентов  $\lambda_l^s$  по индексу  $s$  равна нулю, т.е.  $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s = 0$ . Для доказательства

этого тождества рассмотрим полином  $S - 1$  степени относительно  $y$

$$P(y) = \sum_{s=1}^S \frac{(y - a_l^1) \dots (y - a_l^{s-1})(y - a_l^{s+1}) \dots (y - a_l^S)}{(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)},$$

В точках положения равновесия  $y = a_l^s, s = 1, \dots, S$  полином удовлетворяет  $P(a_l^s) = 1$ . В силу единственности полинома степени  $S - 1$ , проходящего через  $S$  точек, получаем  $P(y) = 1$ , так как это значение удовлетворяет точкам аппроксимации. Распишем формулу

для полинома, равного единице, разделив его на произведение  $(y - a_l^1) \dots (y - a_l^S)$ , получим

$$\sum_{s=1}^S \frac{1}{(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)(a_l^s - y)} +$$

$$+ \frac{1}{(y - a_l^1) \dots (y - a_l^{s-1})(y - a_l^s)(y - a_l^{s+1}) \dots (y - a_l^S)} = 0$$

полагая,  $y = a_l^{S+1}$  получим тождество  $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_l^s = 0$ , в случае, если имеется  $S + 1$  положение равновесия.

## 2. Исследование уравнений Эйлера-Пуассона

Вращение твердого тела вокруг закрепленной точки описывается следующими уравнениями [1]

$$A\dot{p} = (B - C)qr + Mg(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3)$$

$$B\dot{q} = (C - A)pr + Mg(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)$$

$$C\dot{r} = (A - B)pq + Mg(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3; \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1; \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

где величины  $A, B, C, M, G, x_0, y_0, z_0$  константы. Эту автономную систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{m,n=1}^6 F_{lmn}x_mx_n + \sum_{m=1}^6 G_{lm}x_m, l=1, \dots, 6 \quad (2.1)$$

Положения равновесия этой автономной нелинейной системы могут быть комплексными и действительными.

Докажем существование совокупности 6 координат положения равновесия. Для чего представим эту систему в виде

$$\sum_{m=1}^6 \left( \sum_{n=1}^6 F_{lmn}x_n + G_{lm} \right) x_m = 0$$

$$\sum_{m=1}^6 A_{im}x_m = 0$$

Если определитель этой системы уравнений равен нулю, то имеется не нулевое решение этой системы уравнений, определяемое с точностью до множителя. Этот множитель определится из равенства нулю определителя этой системы. Причем множитель определяется из корня полинома 6 степени. Т.е. имеется 6 совокупностей координат положения равновесия.

Отметим, что подобная система уравнений со счетным количеством неизвестных получается при решении уравнения Навье – Стокса. Также как у уравнения Навье – Стокса получается ламинарный и турбулентный режим, у этих уравнений имеется плавное – ламинарное и пульсирующее – турбулентное решение. При этом докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1). Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае, если у системы (2.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия, то при конечном аргументе  $t$  действительное решение задачи Коши системы (2.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, а потом переходит в комплексное решение. При этом правую часть (2.1) считаем регулярной функцией. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

**Доказательство.**

Если решать систему (2.2) в действительной плоскости при не кратных положениях равновесия, то получим

$$\{-2\lambda_{iml}^s \arctan[(x_l - a_l^s) / b_l^s] + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2]\} \Big|_{t_0}^t + \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), \quad (2.3)$$

где  $a_l^s + ib_l^s$  выделенное комплексное положение равновесия,  $c_l^s$  остальные положения равновесия. Коэффициенты  $\lambda_l^s$  удовлетворяют  $\sum_s \lambda_l^s = 0$ . При этом в сумме  $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s$  величина действительной части  $\lambda_{rel}^s$  в случае комплексного значения  $\lambda_l^s$  участвует дважды и в



силу того, что все числа  $\lambda_l^s$  удовлетворяют условию  $\sum_s \lambda_l^s = 0$ , имеем формулу

$$2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k = 0.$$

Обоснуем формулу (2.3). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс  $l$  опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s}{x - a_s - ib_s} + \frac{\lambda_{re}^s - i\lambda_{im}^s}{x - a_s + ib_s} = \frac{2(x - a_s)\lambda_{re}^s - 2b_s\lambda_{im}^s}{(x - a_s)^2 + b_s^2}, \quad (2.4)$$

где  $\lambda^s = \lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s$ . После интегрирования (2.4) по аргументу  $x$ , получим формулу (2.3)

$$\lambda_{re}^s \ln[(x - a_s)^2 + b_s^2] - 2\lambda_{im}^s \arctan \frac{x - a_s}{b_s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \tan D_l(t),$$

где

$$\begin{aligned} D_l(t) &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - c_l^k) \Big|_{t_0}^t + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] \Big|_{t_0}^t - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s = \\ &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s, \\ &\quad \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s = 0 \end{aligned}$$

При этом величина  $\sum_k (\lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s)$  действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия. Т.е. имеем равенство при условии  $|x_l| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} x_l(t) &= a_l^s + b_l^s \tan D_l(t) = \\ &= a_l^s + b_l^s \tan \left\{ \left[ \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - c_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right] / 2\lambda_{iml}^s \right\} = \quad (2.5) \\ &= a_l^s + b_l^s \tan \left\{ \left[ -\left( \sum_k \lambda_l^k c_l^k + 2\lambda_{rel}^s a_l^s \right) / x_l + 0(1 / x_l^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right] / 2\lambda_{iml}^s \right\} \end{aligned}$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности при условии

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - c_l^k) + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - a_l^s)^2 + (b_l^s)^2] + H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s \rightarrow \\ \rightarrow \pi / 2 + \frac{Q_l}{x_l} + A_l \Delta t \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя формулу (2.6) в формулу (2.5), получим

$$x_l(t) = a_l^s - \frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{\sum_n \lambda_l^n \ln(1 - c_l^n / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - a_l^s / x_l)^2 + (b_l^s)^2 / x_l^2] + Q_l / x_l + A_l \Delta t}.$$

При этом, это уравнение имеет решение  $|x_l| \rightarrow \infty$ , так как сводится к тождеству

$$\frac{\sum_n \lambda_l^n c_l^n + 2\lambda_{rel}^s a_l^s + Q_l}{x_l} + A_l \Delta t + S_l^2 \left(\frac{1}{x_l}\right)^2 + \dots = \frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{x_l}.$$

Это уравнение определяет бесконечное решение, которое меняет знак бесконечности справа от координаты бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте  $H_l(t, t_0)$  может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0).$$

При этом, так как справедливо  $\sum_k \lambda_l^k = 0$  имеются числа с отрицательной действительной

частью  $\lambda_l^k$ , значит неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия, чтобы обеспечить бесконечность правой части. Значит, если при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при условии бесконечности  $H_l(t, t_0)$ . Решение будет стремиться к комплексному положению равновесия, пройдя через бесконечность решения, при этом нарушатся условия существования решения задачи Коши. Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

#### Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

Причем положения равновесия чисто мнимые  $x = \pm i$ , и значит, решение может не стремиться к положению равновесия.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции  $x$ , получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Которое при условии  $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$  определит конечное комплексное решение.

Причем комплексное решение обладает новыми свойствами, оно сложным образом вращается вокруг положения равновесия. При этом действительное решение стремится к бесконечности, т.е. правая часть дифференциального уравнения стремится к бесконечности, и нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, и возникает дополнительное комплексное решение. Получив комплексное решение по неявной схеме, запишем решение с комплексными начальными условиями  $x(t_0) = x_0 + i\delta$ , тогда получим конечное комплексное решение  $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]$  при любом  $t$ . Т.е. приближенно имеем

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -i \frac{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} - \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}}{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}} = \\
 &= i - 2i \exp\{2i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + i \exp\{4i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \dots = \\
 &= i - 2i \exp[2i(t - t_0 + \alpha) - 2\beta] + i \exp[4i(t - t_0 + \alpha) - 4\beta] + \dots \\
 &\qquad \qquad \qquad \arctan(x_0 + i\delta) = \alpha + i\beta
 \end{aligned}$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается.

### 3. Физический смысл мнимой части комплексной скорости

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $x_\alpha(t)$ .

Пусть начальные данные имеют среднее  $x_\alpha^0$  и дисперсию  $\langle [\Delta x_\alpha^0]^2 \rangle$ . Тогда для дисперсии решения имеем

$$\begin{aligned}
 \langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle &= \langle [x_\alpha(t) - \langle x_\alpha(t) \rangle]^2 \rangle = \langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle - 2 \langle x_\alpha(t) \rangle \langle x_\alpha(t) \rangle + [\langle x_\alpha(t) \rangle]^2 = \\
 &= \langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle - [\langle x_\alpha(t) \rangle]^2
 \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\langle [x_\alpha(t)]^2 \rangle = [\langle x_\alpha(t) \rangle]^2 + \langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle = |\langle x_\alpha(t) \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_\alpha(t)]^2 \rangle}|^2 \quad (3.1)$$

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения, причем среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть - это его среднеквадратическое отклонение. Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (3.1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

### Заключение

Система уравнений Эйлера-Пуассона допускает как плавное - ламинарное решение, так и пульсирующее - турбулентное решение. Причем пульсирующему турбулентному решению соответствуют комплексные положения равновесия. По существу, доказано более сильное утверждение. Нелинейные системы обыкновенных автономных дифференциальных уравнений, имеющие комплексные положения равновесия, имеют пульсирующее турбулентное комплексное решение, мнимая часть которого соответствует вращениям в фазовом пространстве, приводящим к пульсациям в этом же пространстве, причем пульсации увеличиваются с увеличением мнимой части решения.

### Список литературы

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию движения твердого тела около неподвижной точки. - М.: Гостехиздат, 1953

## Содержание

<b>Абдукаримов А., Хуррамов Ш.Р.</b> (Ташкент, ТашГТУ, ТАСИ) Некоторые вопросы взаимодействия неравномерного по толщине материала с парами валов .....	4
<b>Абрашкин А.А.</b> (Н.Новгород, ВШЭ) Квантовая модель первичного вакуума и его упругие свойства .....	7
<b>Айнбиндер Р.М., Гордеев Б.А.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Использование магнито-реологических жидкостей в системах демпфирования и гашения вибраций.....	12
<b>Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.</b> (Москва, ИПМех; Одесса, Одесская государственная академия строительства и архитектуры) Эволюция вращательно-колебательных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа .....	21
<b>Андронов П.Р., Дынникова Г.Я., Стрекалов С.Д.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) Численное моделирование волнового ветроэнергетического устройства .....	28
<b>Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.</b> (Сызрань, Сызранский филиал СГТУ) Исследование корректности описания колебаний объектов с движущимися границами волновым уравнением .....	38
<b>Анкилов А.В., Вельмисов П.А.</b> (Ульяновск, УГТУ) Методика построения функционалов для одного класса нелинейных задач аэрогидроупругости .....	44
<b>Антоновская О.Г., Горюнов В.П.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ, ННГУ) Метод точечных отображений в динамике системы с комбинированным частотно-фазовым управлением .....	52
<b>Архипова Н.И.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Поперечные волны в двухслойной мембране .....	58
<b>Архипова Н.И.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Поперечные волны в двухслойной мембране с учетом геометрической нелинейности .....	62
<b>Ахмедов А.Х.</b> (Ташкент, ТашГТУ) О нелинейных колебаниях высотных сооружений несущих сосредоточенные массы и резервуары с жидкостью .....	72
<b>Баладин Д.В., Котельников И.В., Теклина Л.Г.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Применение методов распознавания образов в задаче гашения колебаний высотных зданий .....	75
<b>Банах Л.Я.</b> (Москва, ИМАШ РАН) Особенности колебаний и устойчивости многомассовой роторной системы при воздействии циркуляционных сил .....	85
<b>Баринов В.А., Басинский К.Ю.</b> (Тюмень, ТюмГУ) Моделирование нелинейных волн на поверхности двухфазной смеси .....	93
<b>Бахадиров Г.А., Абдукаримов А., Хусанов К., Набиев М.К.</b> (Ташкент, ТашГТУ) Динамика движения управляющих механизмов клиноремных вариаторов .....	102
<b>Белых В.Н.</b> (Н.Новгород, ВГУВТ) Синхронизация пешеходов, вызывающая колебания мостов, включая лондонский мост Millenium Bridge .....	109
<b>Белых В.Н., Киняпина М.С., Шестерикова Н.В.</b> (Н.Новгород, ВГУВТ) Бифуркации и аттракторы в семействе нелинейных трехмерных систем .....	111
<b>Бирюков Р.С.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Обобщенное $H_\infty$ -управление непрерывно-дискретным линейным объектом по дискретным наблюдениям выхода .....	113
<b>Блинкова А.Ю., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И., Попов В.С.</b> (Саратов, СГТУ им. Ю.А. Гагарина, ПИУ им. П.А. Столыпина) Продольные и поперечные колебания стенки канала с сильновязкой жидкостью .....	116
<b>Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И.</b> (Саратов, СГУ им. Н.Г. Чернышевского, СГТУ им. Ю.А. Гагарина) Математическое моделирование волновых явлений в двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость .....	121
<b>Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) Новые асимптотики дисперсионных кривых при исследовании устойчивости транзвукового пограничного слоя с самоиндуцированным давлением .....	130
<b>Болотник Н.Н., Нунупаров А.М., Чашухин В.Г.</b> (Москва, ИПМех РАН) Динамика и управление движением мобильного вибрационного робота с возвратной пружиной.	131
<b>Бохонский А.И.</b> (Севастополь, СевГУ) Колебания объекта с физически нелинейным подвесом .....	138

<b>Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А.</b> (Москва, ИПМех РАН, ИАП РАН, МАИ) Высокочастотные колебания и СВМУ-долговечность упругого диска переменной толщины .....	146
<b>Бырдин В.М.</b> (Москва, ИМАШ РАН) Петли, извилины и спирали дисперсии, трансцендентных функций и кривых: сингулярный анализ, асимптотика и кинематика обратных волн и D– и ZGV-проблема (“Double and Zero-group-velocity”) .....	152
<b>Ванягин А.В., Родюшкин В.М.</b> (Н.Новгород, НИРФИ, ИПМ РАН) Акустическая нелинейность в поврежденной среде .....	161
<b>Васильев А.А.</b> (Тверь, ТГУ) Многополюсное моделирование динамики коротковолновых структур в цепочке частиц конечного размера .....	167
<b>Вельмисов П.А., Анкилов А.В.</b> (Ульяновск, УГТУ) Нелинейная математическая модель вибрационного устройства .....	170
<b>Викулин А.В.</b> (Петропавловск-Камчатский, Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН) Ротационные волны в блоковых вращающихся средах (на примере геологической среды) .....	180
<b>Волков И.А., Волков А.И., Шишулин Д.Н.</b> (Н.Новгород, ВГУВТ) Оценка усталостной долговечности конструкций на базе уравнений механики поврежденной среды .....	190
<b>Волоховская О.А.</b> (Москва, ИМАШ РАН) Оценка амплитуд нестационарных колебаний двухпролетного погнутого ротора с остаточным дисбалансом при выбеге .....	198
<b>Воронков В.С.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Восстановление траектории прецессии свободного гироскопа по малому ее отрезку .....	206
<b>Востоков В.С., Лебедева С.В.</b> (Н.Новгород, ВГУВТ) Анализ влияния гибкости на устойчивость системы «ротор на электромагнитных подшипниках» .....	212
<b>Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Тотышев К.В., Трепалов Н.А.</b> (Саров (Нижегородская область), РФЯЦ-ВНИИЭФ, Н.Новгород, ИПМ РАН) Теневой фоновый метод в практике полигонных испытаний .....	220
<b>Горбиков С.П.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Дифференциальные уравнения, определяемые динамическими системами с ударными взаимодействиями на гиперповерхности удара ...	227
<b>Гордеев А.Б.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Нелинейные преобразования зондирующих сигналов при диагностике шнековых валов .....	230
<b>Гордеев Б.А., Деулин М.М.</b> (Н.Новгород, НН234ГАСУ, НГТУ) Разработка системы управления гидравлической адаптивной виброопорой .....	234
<b>Гордеев Б.А., Осмехин А.Н., Охулков С.Н., Плехов А.С.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Влияние внутренних электромагнитных полей на характеристики магнито-реологических демпферов .....	240
<b>Гордеев Б.А., Осмехин А.Н., Охулков С.Н., Плехов А.С.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Погрешности акустических методов при исследовании характеристик магнито-реологических демпферов .....	246
<b>Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Злобин П.А.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН, ННГАСУ) Магнито-реологический демпфер ударных нагрузок .....	251
<b>Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Филатов Л.В.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН, ННГАСУ) Задачи статистического анализа данных испытаний гидропор на вибростенде .....	261
<b>Горобцов А.С., Рыжов Е.Н., Полянина А.С.</b> (Волгоград, ВолГТУ) Расчет параметров синтеза системы колебаний с многоканальной стабилизацией .....	268
<b>Грезина А.В., Малышева И.В., Панасенко А.Г.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Моделирование распределения примеси в ограниченной среде .....	274
<b>Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р.</b> (Казань, ИММ КазНЦ РАН) Численное исследование акустического захвата дисперсных частиц в двумерном резонаторе .....	279
<b>Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.</b> (Казань, ИММ КазНЦ РАН) Динамика акустических волн в многослойной среде, содержащей слой жидкости с полидисперсными пузырьками .....	289
<b>Гусак Г.В., Вильке В.Г.</b> (Москва, МГУ) Качение колеса со стержневым протектором по шероховатой плоскости .....	298
<b>Демин В.А.</b> (Пермь, ПГНИУ) Нелинейные колебания в жидких молекулярных смесях. динамические модели в сочетании с методом конечных разностей .....	306

<b>Дерендяев Н.В., Дерендяев Д.Н.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Роторные системы с полостями, содержащими жидкость; изучение устойчивости вращения .....	313
<b>Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О.</b> (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана) Метод асимптотической гомогенизации для расчета гармонических колебаний вязкоупругих тонких пластин .....	320
<b>Долгая А.А., Герус А.И., Викулин А.В.</b> (Петропавловск-Камчатский, Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН) Миграция геодинамической активности как ротационные волны в блоковой геосреде .....	330
<b>Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Никитина Е.А., Родюшкин В.М.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Влияние малоциклового нагружения и напряженно-деформированного состояния на акустические параметры упругой волны в поврежденном материале .....	336
<b>Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.</b> (Москва, МГУ) Колебания скорости вращения как способ управления свойствами турбулентности .....	339
<b>Зайцев М.В., Метрикин В.С.</b> (Н.Новгород, НИИ Механики ННГУ) Динамика виброударной системы с трением наследственного типа .....	342
<b>Зарипов Д.М.</b> (Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова) Реакция трубопровода на внутреннее ударное давление в жидкости .....	347
<b>Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.</b> (Казань, ИММ КазНЦ РАН) Нелинейные колебания газа в акустическом резонаторе при переходе к ударным волнам ...	353
<b>Зароднюк А.В., Логинова А.С., Черкасов О.Ю.</b> (Москва, МГУ) К задаче о брахистохроне с постоянной разгоняющей силой .....	356
<b>Заславский Ю.М.</b> (Н.Новгород, ИПФ РАН) Об излучении упругих волн быстро движущимся виброисточником .....	362
<b>Захарова О.С., Нуриев А.Н.</b> (Казань, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»; Н.Новгород, ННГУ) Численное и аналитическое исследование оптимального движения системы с вибрационным двигателем в вязкой жидкости .....	370
<b>Землянухин А.И., Бочкарев А.В.</b> (Саратов, СГТУ им. Гагарина Ю.А.) Непрерывные дробы и точные решения нелинейных дифференциальных уравнений .....	380
<b>Иванов В.А., Купреев В.А., Ручинский В.С., Павлович Д.Д.</b> (Москва, МАИ) Бифуркационные значения параметров управляемого движения связанных космических объектов .....	387
<b>Игумнов Л.А., Ипатов А.А., Литвинчук С.Ю.</b> (Н.Новгород, НИИ Механики ННГУ) Численное решение задач поровязкоупругой динамики .....	394
<b>Игумнов Л.А., Марков И.П.</b> (Н.Новгород, НИИ Механики ННГУ) Гранично-элементное моделирование динамики однородных электромагнитоупругих трехмерных тел .....	400
<b>Иляхинский А.В.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Исследование акустической нелинейности металлов ультразвуковым методом .....	407
<b>Исанькин М.А., Маликов А.И.</b> (Казань, КНИТУ-КАИ) Синтез управления робота манипулятора с тремя звеньями с нежестким соединением .....	412
<b>Калашников А.Л.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Регуляризация для задачи оптимального управления .....	422
<b>Калинина А.В., Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попова А.А.</b> (Саратов, ПИУ им. П.А. Столыпина, СГУ, СГТУ) Гидроупругие колебания кольцевого канала с геометрически нерегулярной внешней стенкой при наличии вибрации .....	429
<b>Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш.М.</b> (Москва, Центральный институт авиационного моторостроения; Тараз (Казахстан) Таразский инновационно-гуманитарный университет) Напряженное состояние консольно закрепленной балки цилиндрического профиля при поперечном локальном ударе .....	435
<b>Каримов К.А.</b> (Ташкент, ТашГТУ им. А.Р. Беруни) Решение нелинейной задачи управляемого вибрационного перемещения позиционирующего механизма .....	445
<b>Каримов Р.И., Шахобутдинов Р.Э.</b> (Ташкент, ТашГТУ им. А.Р. Беруни) Исследование влияния колебаний привода на нагруженность высшей кинематической пары управляющего кулачка .....	449
<b>Киселева Н.В., Гусева Е.А.</b> (Н.Новгород, ННГУ) О вращениях маятника под действием периодического момента .....	453

<b>Климина Л.А.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) Качественный анализ динамики шарнирного механизма, взаимодействующего с потоком среды .....	459
<b>Ковалева М.А., Смирнов В.В., Маневич Л.И.</b> (Москва, Институт химической физики РАН) Исследование системы двух гармонически связанных маятников .....	464
<b>Комиссарова Т.Н., Хроматов В.Е.</b> (Москва, НИУ «МЭИ») Влияние продольного магнитного поля на динамическую устойчивость ферромагнитных пластин .....	470
<b>Красинский А.Я., Ильина А.Н.</b> (Москва, МАИ) О стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam как мехатронной системы с геометрической связью .	480
<b>Кривоносова О.Э., Жиленко Д.Ю.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) Определение структуры течений путем построения волновых поверхностей .....	487
<b>Кудайбергенов Аскар К.</b> (Алматы, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби) Моделирование нелинейных поперечных колебаний буровой колонны .....	490
<b>Кудайбергенов Аскат К.</b> (Алматы, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби) Об устойчивости нелинейных колебаний бурильных колонн .....	495
<b>Куклина И.Г.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Динамика машины с линейно-зависимой в продольном направлении подвеской .....	501
<b>Кулешов А.С., Черняков Г.А.</b> (Москва, МГУ) Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости .....	509
<b>Куликов А.Н.</b> (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова) Некоторые бифуркационные задачи для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского .....	517
<b>Куликов Д.А.</b> (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова) Циклы и торы в задаче об обобщенной синхронизации слабосвязанных осцилляторов .....	523
<b>Лебедев Д.А.</b> (Москва, НИИ механики МГУ) Устойчивость стационарных движений гиригастата .....	529
<b>Леонтьева А.В., Леонтьев Н.В.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Влияние деформируемого основания на установление режима синхронизации в системе двух двигателей .....	532
<b>Масленников Д.А., Бочков В.С., Лоцилов А.А., Катаева Л.Ю., Ильичева М.Н.</b> (Н.Новгород, НГТУ) Использование роботизированных систем для тушения лесных пожаров на основе анализа физических закономерностей .....	539
<b>Метрикин В.С., Никифорова И.В.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Динамика вибрационных систем с несколькими ударными парами .....	542
<b>Митенков Ф.М., Овчинников В.Ф., Николаев М.Я., Литвинов В.Н., Фадеева Е.В.</b> (Н.Новгород, НИИМ ННГУ) Компенсация остаточного дисбаланса сложного гибкого ротора на электромагнитном подвесе с помощью штатной системы управления .....	550
<b>Мишакин В.В., Курашкин К.В., Руденко А.Л., Гончар А.В.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Использование метода акустоупругости для оценки напряженно-деформированного состояния ротора гидроагрегата .....	556
<b>Моренко И.В.</b> (Казань, ИММ КазНЦ РАН) Численное моделирование вынужденных колебаний цилиндра в ламинарном потоке вязкой жидкости .....	557
<b>Морозов А.Д., Морозов К.Е.</b> (Н.Новгород, ННГУ) О транзиторных маятниковых уравнениях .....	562
<b>Мотова Е.А., Никитина Н.Е.</b> (Н.Новгород, ИПМ РАН) Экспериментальное исследование поведения конструкционных материалов при циклическом нагружении, с помощью ультразвука .....	566
<b>Мошкин Р.П.</b> (Москва, МГУ) Неудерживающие связи в случае саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности .....	571
<b>Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Мухаммадиев Т.Д.</b> (Ташкент, ТГТУ) Амплитудно–частотные характеристики крутильных колебаний пыльного цилиндра .....	582
<b>Овсянников В.М.</b> (Москва, МГАВТ) Озвучивание поля скорости течений газа .....	586
<b>Овсянников В.М.</b> (Москва, МГАВТ) Генерация звука членами второго порядка малости конечно-разностного уравнения неразрывности Леонарда Эйлера .....	589
<b>Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) О колебаниях оси оперенного тела при спуске в атмосфере .....	591
<b>Ольшанский В.Ю.</b> (Саратов, Институт проблем точной механики и управления РАН) Прецессионное движение в модели Пуанкаре-Жуковского .....	596

<b>Ольшанский В.Ю., Растегаев Ю.О.</b> (Саратов, Институт проблем точной механики и управления РАН) Температурные воздействия на колебания чувствительного элемента микромеханического пьезогироскопа .....	599
<b>Парфенова Е.С., Князева А.Г.</b> (Томск, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, институт физики высоких технологий) Взаимодействие механических и диффузионных волн в начальной стадии обработки поверхности металла потоком частиц .....	604
<b>Побегайло П.А.</b> (Москва, ИМАШ РАН) Современное состояние и некоторые перспективы исследований динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов .....	610
<b>Пономаренко В.П.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Динамические режимы и бифуркации в системах с частотно-фазовым управлением .....	614
<b>Прошкин В.А.</b> (Москва, МГУ) Старшее приближение в окрестности двойного резонанса задачи о быстром вращении несимметричного тела на эллиптической орбите как два слабо связанных маятника .....	623
<b>Пшеничников С.Г.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) О влиянии непрерывной неоднородности материала на волновые процессы в упругих и вязкоупругих телах .....	629
<b>Радин В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н., Новикова О.В.</b> (Москва, МЭИ) Закритическое поведение двойного маятника при неконсервативном нагружении .....	639
<b>Ромашин С.Н., Шоркин В.С.</b> (Орел, ОГУ им. И.С. Тургенева) Определение потенциалов нелокального взаимодействия частиц упругой среды .....	646
<b>Савельев В.А.</b> (Москва, НАМИ) Модели упругих и демпфирующих свойств листовой рессоры .....	655
<b>Сальникова Т.В., Степанов С.Я., Шувалова А.И.</b> (Москва, МГУ, РУДН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН) Об устойчивости периодических орбит частицы в системе Земля–Луна–Солнце .....	661
<b>Самогин Ю.Н., Чирков В.П.</b> (Москва, МЭИ) К вопросу о точности метода квазидиагонализации и методов, использующих идею декомпозиции в сочетании с конденсацией, в задачах на собственные значения .....	668
<b>Саркисян А.А., Саркисян С.О.</b> (Гюмри, Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна) Свободные колебания микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек по геометрически нелинейным моделям ...	676
<b>Сергеев А.Д.</b> (С.-Петербург, ИПМаш РАН) Природа нелинейности поперечных колебаний графенового резонатора .....	686
<b>Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.</b> (Гомель, УО «БелГУТ») Колебание вязкоупругой трехслойной пластины на винклеровском основании .....	692
<b>Стребуляев С.Н.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Исследование робастной устойчивости системы электропривода .....	698
<b>Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.</b> (Москва, МАИ) Нестационарные волны в упругих оболочках с упругим и акустическим наполнителем .....	701
<b>Тукмаков А.Л., Тонконог В.Г., Арсланова С.Н.</b> (Казань, КНИТУ-КАИ) Волновая коагуляция полидисперсных парокпельных смесей в технологии газификации сжиженного природного газа .....	711
<b>Тукмаков Д.А.</b> (Казань, Институт физики К(П)ФУ) Численное моделирование ударно-волновых процессов в газозвеси с периодическим распределением дисперсной фазы ...	719
<b>Тукмакова Н.А.</b> (Казань, КНИТУ-КАИ) Формирование параметрического акустического резонанса в системе коагулирующей газозвеси .....	722
<b>Урман Ю.М., Лапин Н.И.</b> (Н.Новгород, ИМХ РАН) Влияние нелинейности и анизотропии ротора на динамику неконтактного гироскопа в однородном магнитном поле .....	729
<b>Федосеев В.Б.</b> (Н.Новгород, ИМХ РАН) Осцилляции, возникающие при совместных фазовых превращениях кристалл–раствор, жидкость–пар .....	735
<b>Федотов И.А., Ежов Е.Н., Петраков Е.В.</b> (Н.Новгород, ННГУ) Синтез динамических гасителей колебаний высотного сооружения на основе решения многокритериальной задачи .....	741
<b>Федюков А.А.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ) Робастная стабилизация линейного объекта с фазовыми ограничениями .....	746



<b>Федюшкин А.И.</b> (Москва, ИПМех РАН) Влияние управляемых вибраций на пограничные слои в расплаве при выращивании монокристаллов .....	756
<b>Филатов Л.В., Мельников В.Ф.</b> (Н.Новгород, ННГАСУ; С.-Петербург, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН) Нелинейное самосогласованное взаимодействие электронного пучка с замагниченной плазмой солнечной короны .....	766
<b>Хлыбов А.А.</b> (Н.Новгород, НГТУ) Экспериментальные исследования акустических характеристик магнитореологических жидкостей .....	772
<b>Хуррамов Ш.Р., Абдукаримов А.</b> (Ташкент, ТАСИ, ТашГТУ) Математическая модель взаимодействия материала с парами валов .....	777
<b>Шабуневич В.И.</b> (Москва, АО «Корпорация «ВНИИЭМ») Новые единые модели макро и микромира .....	781
<b>Шакирьянов М.М.</b> (Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН) Пространственные хаотические колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления .....	791
<b>Шамберов В.Н., Камачкин А.М.</b> (С.-Петербург, СПбГМТУ, СПбГУ) Колебания в многомерных динамических системах с сухим трением, находящихся под внешним периодическим воздействием .....	801
<b>Шамберов В.Н.</b> (С.-Петербург, СПбГМТУ) Моделирование и исследование динамики автоматических систем с инерционной нагрузкой и сухим трением .....	811
<b>Шамолин М.В.</b> (Москва, НИИ Механики МГУ) Моделирование движения тела в сопротивляющейся среде и гидродинамические аналогии .....	820
<b>Шатина А.В., Шерстнев Е.В.</b> (Москва, Московский технологический университет, МИРЭА) О приливных деформациях вязкоупругой планеты с ядром .....	831
<b>Шишина М.И.</b> (Н.Новгород, Нижегородский планетарий) Уравнения для описания стационарных поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока с постоянной завихренностью и их решения .....	839
<b>Шорр Б.Ф., Мельникова Г.В., Серебряков Н.Н., Бортников А.Д.</b> (Москва, ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова») К расчету динамических напряжений в лопатках компрессоров авиационных гтд при амплитудно-зависимом рассеянии энергии в материале .....	846
<b>Якубовский Е.Г.</b> (С.-Петербург) Интегрируемость уравнений Эйлера-Пуассона .....	856