

Разные задачи. А.Я. Канель (10-11)

Номер из двух цифр означает, что задача давалась под соответствующим номером на Международной Математической Олимпиаде.

2000, 5. Существует ли такое целое n , имеющее ровно 2000 различных простых делителей, что $2^n + 1$ делится на n ?

2002, 3. Найдите все такие целые $m, n \in \{1, 2, 3\}$, что для бесконечного количества целых чисел $a > 0$ число $a^m + a - 1$ делится на $a^n + a^2 - 1$.

2003, 2. Найдите все пары (a, b) целых положительных чисел, для которых a^2 делится на $2ab^2 - b^3 + 1$.

2003, 6. Пусть p — простое число. Докажите, что для некоторого простого q число $n^p - p$ не делится на q ни при каком n .

2005, 4. Найдите все целые числа, взаимно простые с $2^n + 3^n + 6^n - 1$ для любого n .

2006, 5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(P(\dots(x)\dots))$, где P применен k раз ($k > 0$). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

2007, 5. Пусть a и b — положительные целые числа, для которых $4ab - 1$ делит $(4a^2 - 1)^2$. Докажите, что $a = b$.

1. (а) Число x оканчивается на 2. После того, как его последнюю цифру переставили в начало, оно удвоилось. Найти все такие x .

(б) Последнюю цифру числа x переставили в начало. Оно удвоилось. Доказать, что x есть циклический сдвиг периода дроби $\frac{2}{19}$.

2. Даны числа R и m . Последовательность задана рекуррентно: a_0 задано, $a_{n+1} = m^{a_n}$. Доказать, что остатки a_n от деления на R стабилизируются.

3. Доказать, что если p простое и $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{m}{n}$, то

(а) $p|m$; (б) $p^4|(np - m)$.

4*. Натуральный ряд разбит на несколько арифметических прогрессий. Доказать, что у двух из них разность совпадает.

5*. Положим $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$. Доказать, что в десятичном разложении числа $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ встречается любая комбинация цифр.

6. При каком наименьшем n из любых n чисел можно выбрать k ($k > 0$), попарно сравнимых по модулю m ($m > 0$)?

Указания.

2005, 4. Возьмите простое $n = (n - 1) + 1$ и покажите, что тогда $2^n + 3^n + 6^n - 1$ делится на n .

2003, 6. Используйте индексы и свойства круговых многочленов.

2002, 3. Используйте соображения типа алгоритма Евклида и деление с остатком.

2003, 2. Используйте идею размножения решений по Виету (как для уравнения Маркова, см. Квант, 1988, Диофантово уравнение Маркова). Если $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1)$, то a есть корень квадратного уравнения $a^2 - 2akb^2 +$

⁰Материал Системы дистанционного обучения математике <http://math.olymp.mioo.ru>

$(b^3 - 1)k = 0$. Случай $a \leq b$ легко разбирается. Далее, если написанное квадратное уравнение имеет целое решение, то оно имеет (в силу Виета) и другое целое решение. Хотя бы одно из этих решений $a_1 \leq a_2$ меньше b , поскольку $0 \leq a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b$.

2006, 5. Рассмотрите орбиты под действием многочлена P и используйте то, что $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$. Если $P(x_k) - x_{k-1}$ для любого k и x_0 — периодическая точка ???, то $x_k - x_{k-1} = \pm(x_{k+1} - x_k)$.

5. См. А. Ерошин, Математическое Просвещение, 8.