МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имнени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

МАТВЕЕВ ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПОЛЕЙ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра , теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Владимир Григорьевич Чирский

Москва – 2020

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Работа посвящена трансцендентности и алгебраической независимости в областях, представляющих собой прямые произведения бесконечной совокупности полей p–адических чисел.

Термин «трансцендентное число» ввел Л.Эйлер. Напомним, что число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется алгебраическим, если существует ненулевой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(\alpha) = 0$. В противном случае число α называется трансцендентным.

Существование трансцендентных чисел было доказано Ш. Лиувиллем в 1844 году. Он доказал, что алгебраические числа не могут допускать «слишком высокий» порядок приближения рациональными числами и привел примеры чисел, допускающих «сколь угодно хорошие» приближения рациональными числами.

В 1873 году Ш.Эрмит создал аналитический метод, используя который ему удалось доказать трансцендентность одной из классических постоянных в математике - числа e.

Развивая метод Эрмита, Ф.Линдеман в 1882 году доказал трансцендентность числа π , тем самым получив отрицательное решение проблемы квадратуры круга. Линдеман доказал теорему, которая полностью решала вопрос о трансцендентности и алгебраической независимости значений показательной функции в алгебраических точках. Комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ называются *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от тождественного нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с рациональными коэффициентами, для которого $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$. В противном случае эти числа называются *алгебраически независимыми* (в частности, каждое из этих чисел является трансцендентным). Теорему Линдемана можно сформулировать так:

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *– алгебраические числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, то* $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ *– алгебраически независимые числа.*

Метод Эрмита–Линдемана основан на двух важных свойствах показательной функции :

1) e^x удовлетворяет теореме сложения $f(x + \mathrm{y}) = f(x)f(y)$,

2) e^x является решением дифференциального уравнения $\mathrm{y}' = \mathrm{y}$. После создания метода Эрмита–Линдемана возникла естественная проблема его распространения на другие функции, удовлетворяющие более общим дифференциальным уравнениям.

Развивая и обобщая классический метод Эрмита – Линдемана, К. Зигель [1] в 1929 году предложил новый метод доказательства трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках аналитических функций некоторого класса, содержащего, в частности, e^x.

Предложенный Зигелем метод можно применять к одному классу целых функций, названному им E–функциями. Аналитическая функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

называется E*–функцией*, если

1) $c_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, 1, \dots,$ где $\mathbb{K}$–некоторое алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

2) Для любого $\varepsilon > 0$
$$\overline{|c_n|} = O\left(n^{\varepsilon n}\right), n \to \infty,$$
где для алгебраического числа α символ $\overline{|\alpha|}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин самого числа α и всех алгебраически сопряжённых с ним чисел.

3) Существует последовательность $\{q_n\}$ натуральных чисел такая, что $q_n c_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцу целых чисел поля $\mathbb{K}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

и

$$q_n = O\left(n^{\varepsilon n}\right), n \to \infty.$$

В определении Е–функции в узком смысле должны выполняться соотношения

$$\overline{|c_n|} = O\left({C_1}^n\right), n \to \infty,$$
$$q_n = O\left({C_2}^n\right), n \to \infty.$$

с некоторыми положительными C_1, C_2.

Простейшие примеры E–функций – многочлен с алгебраическими коэффициентами, e^z,$\sin z$,$\cos z$.

Нетрудно проверить, что E–функции образуют кольцо функций, замкнутое относительно операций дифференцирования, интегрирования в пределах от 0 до z и замены аргумента z на λz, где λ – алгебраическое число. E – функции с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ называются $\mathbb{K}E$–функциями.

В 1949 году К.Зигель [2] изложил свой метод в виде общей теоремы об алгебраической независимости значений в алгебраических точках совокупности E–функций, удовлетворяющей системе линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами – рациональными функциями. Эта теорема сводит доказательство утверждения об алгебраической независимости значений E–функций в алгебраических точках к проверке некоторого достаточного аналитического условия, названного им условием нормальности, для совокупностей произведений степеней рассматриваемых функций. Самому Зигелю удалось проверить выполнение условия нормальности только для совокупностей E–функций, каждая из которых удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого или второго порядка.

В 1954 году А.Б.Шидловским [5] была опубликована теорема, аналогичная теореме Зигеля, в которой условие нормальности было заменено менее ограничительным условием неприводимости.

В 1955 году А.Б.Шидловский [6], [7] опубликовал критерий алгебраической независимости значений в алгебраических точках E– функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений. В формулировке критерия участвуют понятия, которые часто используются в дальнейшем. Пусть $\mathbb{V}$–поле, а $\mathbb{W}$ – коммутативное кольцо или поле, содержащее поле $\mathbb{V}$.

Элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{W}$ называются алгебраически зависимыми над полем $\mathbb{V}$, если существует отличный от тождественного нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{V}$ такой, что $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$. В противном случае $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{W}$ называются алгебраически независимыми над полем $\mathbb{V}$.

Если в этих определениях рассматривать только однородные многочлены, то мы будем говорить об однородно алгебраически зависимых над полем $\mathbb{V}$(соответственно, однородно алгебраически независимых над полем $\mathbb{V}$) элементах $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{W}$.

В случае, когда поле $\mathbb{V}$ представляет собой поле алгебраических чисел, а поле $\mathbb{W}$ – поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, говорят просто об алгебраической зависимости (соответственно, алгебраической независимости) чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$.

Пусть рассматриваемые E–функции составляют решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, k = 1, \ldots, m, Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z). \tag{1}$$

Тогда имеет место следующий результат, носящий название второй основной теоремы([8],с.127):

Пусть совокупность E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (1) *и алгебраически независима над* $\mathbb{C}(z)$, ξ *– алгебраическое число,* $\xi T(\xi) \neq 0$ *(многочлен* $T(z)$ *представляет собой общий наименьший знаменатель коэффициентов системы* (1)*). Тогда числа* $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ *алгебраически независимы.*

Вторая основная теорема также имеет много важных следствий. Сформулируем одно из них([8],с.128):

Пусть E–функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения порядка m

$$P_m(z)y^{(m)} + \ldots + P_1(z)y' + P_0(z)y + Q(z) = 0, m \geq 2,$$
$$Q(z), P_k(z) \in \mathbb{C}(z), k = 0, 1, \ldots, m,$$

и не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ порядка меньшего, чем m, ξ– алгебраическое число, $\xi P_m(\xi) \neq 0$.
Тогда числа $f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(m-1)}(\xi)$ алгебраически независимы.

Из второй основной теоремы совсем просто следует и упомянутая выше теорема Линдемана (см. [8],с.128). Теория E–функций получила значительное развитие в работах Ю.В. Нестеренко, В.Х. Салихова, А.И. Галочкина, В.А. Олейникова, И.И. Белогривова, Ю.Н. Макарова, В.А. Горелова, С.Ленга, Д.Бертрана, В.Д.Браунвелла, Ф. Бейкерса, Г. Хекмана, К. Ваананена, Нгуен Тьен Тая, и многих других.

В 1929 г. К.Зигель [1] указал, что его метод можно применять при исследовании некоторых арифметических свойств значений ещё одного класса аналитических функций. Степенные ряды, определяющие эти функции, имеют конечный радиус сходимости. Он назвал эти функции G–функциями. Функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

называется G–функцией, если коэффициенты c_n удовлетворяют тем же условиям, что приведены в определении E–функции в узком смысле.

Нетрудно проверить, что как и E–функции, G–функции образуют кольцо функций, замкнутое относительно операций дифференцирования, интегрирования в пределах от 0 до z и замены аргумента z на λz, где λ – алгебраическое число.

В статье М.С.Нурмагомедова [9] метод Зигеля – Шидловского был применён к исследованию арифметических свойств значений G– функций в достаточно малых по модулю алгебраических точках. Недостатком полученных им результатов было то, что величина точки, в которой проводятся оценки, зависит от высоты рассматриваемых линейной формы или многочлена.

В 1974 году А.И.Галочкин [10] опубликовал теоремы, свободные от вышеупомянутого недостатка, доказанные им для G– функций, обладающих так называемым условием сокращения факториалов. В 1984 г.Г.В.Чудновский [11] доказал, что это условие выполнено для всех G–функций:

Пусть G–функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, k = 1, \ldots, m, Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z).$$

и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ вместе с 1 .Тогда для любогое $\varepsilon > 0$ и любого отличного от нуля числа $r = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ такого, что

$$b^{\varepsilon} \geq C_3 |a|^{(n+1)(n+\varepsilon)},$$

числа $1, f_1(r), \ldots, f_m(r)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Более того, для любых $h_0, \ldots, h_m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию

$$H = \max\left(|h_0|, \ldots, |h_m|\right) > C_4,$$

имеет место неравенство

$$|h_0 + h_1 f_1(r) + \ldots + h_m f_m(r)| > H^{-m-\varepsilon},$$

где $C_3 = C_3\left(f_1, \ldots, f_m, \varepsilon\right)$, $C_4 = C_4\left(f_1, \ldots, f_m, r, \varepsilon\right) > 0$ – эффективно вычисляемые постоянные.

Можно рассматривать не только действительные или комплексные значения G–функций. Имеются исследования (например, [12]) о свойствах p–адических значений G–функций. Отметим одну из работ Е.М.Матвеева [13], в которых рассмотрение линейных форм от значений G–функций в различных p – адических полях позволило получить результаты о диофантовых уравнениях с норменной формой.

Дадим определение и кратко перечислим основные свойства p – адических чисел.

Поле $\mathbb{F}$ называется нормированным, если для каждого его элемента a определена величина $\|a\|$ – норма элемента a , обладающая следующими свойствами:

1) $\|a\| \in \mathbb{R}$, если $a \neq 0$, то $\|a\| > 0$, $\|0\| = 0$;

2) $\|ab\| = \|a\|\|b\|$;

3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;

Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел обладает нормой(или абсолютным значением)

$$\|a\| = |a|,$$

которое в дальнейшем называется архимедовым. Кроме того, для любого простого числа p определено так называемое p–адическое нормирование поля рациональных чисел. Оно определяется следующим образом. Для произвольного отличного от нуля целого числа c положим $ord_p c$ равным кратности вхождения числа p в разложение c на простые множители. Для любого рационального числа $a = \frac{c}{b}$ – положим $ord_p a = ord_p c - ord_p b$. Это определение, очевидно, корректное. Удобно определить нормализованную p – адическую норму равенствами

$$|a|_p = \begin{cases} p^{-ord_p a, a \neq 0}, \\ 0, a \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что определённая равенствами (2) величина обладает всеми свойствами нормы. Кроме того, вместо свойства 3) выполняется более сильное неравенство

$$|a + b|_p \leq \max\left(|a|_p, |b|_p\right).$$

Отметим, что если $|a|_p \neq |b|_p$, то

$$|a+b|_p = \max\left(|a|_p, |b|_p\right).$$

Нормы, для которых $\|a+b\| \leq \max\left(\|a\|, \|b\|\right)$, называются неархимедовыми. Пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $|\ |_p$ называется полем p–адических чисел.

Известная теорема Островского(доказательство приведено в [14],стр.48) гласит:

Каждая нетривиальная норма $\|\ \|$ на поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел эквивалентна либо $|\ |_p$ для некоторого простого числа p, либо обычной абсолютной величине $|\ |$.

Принято обозначать $|\ | = |\ |_\infty$.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое поле конечной степени κ над $\mathbb{Q}$. Пусть V – множество всех нормирований на поле $\mathbb{K}$. Для любого $\nu \in V$ соответствующие пополнения полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Q}$ обозначаем $\mathbb{K}_\nu$ и $\mathbb{Q}_p$. Поле $\mathbb{K}_\nu$ является конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$, $[\mathbb{K}_\nu : \mathbb{Q}_p] = \kappa_\nu$, причём для любого простого числа p

$$\sum_\nu \kappa_\nu = \kappa \tag{3}$$

где суммирование в левой части равенства (3) производится по всем нормированиям ν, продолжающим p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Это же равенство выполняется для продолжений $|\ |_\nu$ обычной абсолютной величины, поскольку все они соответствуют сопряжённым с полем $\mathbb{K}$ полям $\mathbb{K}^{(i)}$, а $\kappa_\nu = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)} \subset \mathbb{R}$, либо $\kappa_\nu = 2$, если $\mathbb{K}^{(i)} \not\subset \mathbb{R}$.

Любое нормирование поля $\mathbb{K}$ продолжает некоторое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Множество архимедовых нормирований поля $\mathbb{K}$ обозначаем V_∞, множество неархимедовых нормирований – V_0. Удобно рассматривать нормализованные нормирования: если ν продолжает p – адическое нормирование (далее это обозначаем так $\nu|p$) то положим

$$|p|_\nu = p^{-\frac{\kappa_\nu}{\kappa}}, \tag{4}$$

а если ν продолжает архимедово нормирование и соответствует полю $\mathbb{K}^{(i)}$, то

$$|x|_\nu = |x^{(i)}|^{\frac{\kappa_\nu}{\kappa}}, \tag{5}$$

где $x^{(i)} \in \mathbb{K}^{(i)}$, а $\kappa_\nu = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)} \subset \mathbb{R}$, либо $\kappa_\nu = 2$, если $\mathbb{K}^{(i)} \not\subset \mathbb{R}$.

Имеет место формула произведения:

Для любого $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$

$$\prod_{\nu \in V} |x|_\nu = 1, \tag{6}$$

где произведение взято по всем нормированиям ν поля $\mathbb{K}$.

Теория трансцендентных чисел в p – адической области получила меньшее развитие, чем теория трансцендентных чисел в комплексной области. Отметим её фактическое начало – работу Малера [15] и содержащую некоторый обзор этой теории статью Адамса [3]. В 1981 г. Э.Бомбиери в большой работе [4] ввёл понятие глобального соотношения. Дадим это определение.

Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P\left(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)\right) = 0 \tag{7}$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$.

Назовём глобальное соотношение (7) *тривиальным*, если оно получается в результате подстановки $z = \xi$ в алгебраическое уравнение, связывающее $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\mathbb{K}(z)$ и нетривиальным в противном случае.

Сформулируем несколько упрощённый вариант основной теоремы работы [4]:

Пусть G–функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами – рациональными функциями от z и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда существует постоянная C такая, что все алгебраические точки ξ, для которых выполняется некоторое глобальное соотношение, удо-

влетворяют неравенству

$$\sum_{\nu} \ln\left(\max(1, |\xi|_\nu)\right) \le C,$$

где суммирование производится по всем нормированиям алгебраического поля конечной степени, полученного присоединением к полю рациональных чисел всех коэффициентов рассматриваемых G – функций и числа ξ.

Глобальным соотношениям для G-функций посвящены работы И.Андре [16], [17].

В.Г. Чирский ввел в рассмотрение еще один класс рядов,к которому применимо обобщение метода Зигеля – Шидловского.

Степенной ряд называется F – рядом , если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Класс $F\left(\mathbb{K}, c_l, c_2, c_3, q\right)$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

Пусть:

1) $a_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, 1, 2, \ldots;$

2) $\overline{|a_n|} = O\left(e^{c_1 n}\right)$, $n \to \infty$ (где для алгебраического числа α символ $\overline{|\alpha|}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);

3) существует последовательность натуральных чисел

$$d_n = q^n d_{0,n},$$

где $q \in \mathbb{N}$, такая, что

$$d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, ; n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не большие $c_2 n$, причём

$$ord_p\, d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что $f(z)$ входит в класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$.

Отметим, что в работе И.Андре [18] для F–рядов использовано наименование Э–ряды (по предложению Д.Бертрана, в связи с рассмотренным ещё Эйлером рядому $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n$, представляющим собой асимптотическое разложение для $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w} dw$). Мы сохраняем использованные в работах В.Г. Чирского [19], [20], [21], [22], [23] обозначения.

F–ряды естественным образом дополняют классы Е – и G – функций Зигеля, представляющих собой степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ соответственно. Более того, сразу ясно, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ является F – рядом, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – G- функция, а $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ – E - функция Зигеля.

Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса F- рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum a_n \cdot n! z^n \,,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| = O\left(e^{c_1 n}\right)$, $n \to \infty$, где c_1- некоторая постоянная (т.е мы рассматриваем класс $F\left(c_1, c_2, c_3, q\right)$ см. [29], в котором $c_2 = c_3 = 0$.)
Далее ряды $f_1(z) \equiv 1, \ldots, f_m(z)$ принадлежат этому классу.

В диссертации рассматривается прямое произведение колец $\mathbb{Z}_p$ целых p–адических чисел – так называемое кольцо целых полиадических чисел. Опишем его конструкцию. На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ, рассматривая множество идеалов (m)в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца (см. [27], [28]). Обозначим это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$. На кольце $\mathbb{Z}_\tau$ можно ввести метрику (см. [27], [29]), положив

$$\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_m(x,y)}{2^m}, \tag{8}$$

где

$$\delta_m(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x\equiv y(\mod m),\\ 1, & \text{если } x\not\equiv y(\mod m).\end{cases} \tag{9}$$

Бесконечная последовательность $x_1, x_2, \ldots$ целых чисел называется фундаментальной, если для любого $k\in\mathbb{N}$ существует $\mathcal{N}\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $m,n>\mathcal{N}$ справедливо сравнение $x_m\equiv x_n(\mod k!)$.

Метрическое пространство $\mathbb{Z}_\tau$ не является полным. Например, последовательность $1!, 1!+2!, \ldots, 1!+2!+\ldots+n!, \ldots$ является фундаментальной, но не имеет предела в $\mathbb{Z}_\tau$. Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k+y_k\}$, $\{x_k-y_k\}$, $\{x_k\cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными. Таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Будем называть последовательность $C_1, C_2, \ldots$ нулевой последовательностью, если $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Назовем фундаментальные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ эквивалентными, если их разность $\{x_k-y_k\}$ является нулевой последовательностью. Это свойство является рефлексивным, симетричным и транзитивным, т.е. определяет отклонение эквивалентности.

Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.

Легко проверить, что если последовательность $\{x_k\}$ эквивалентна последовательности $\{u_k\}$, а последовательность $\{y_k\}$ эквивалентна $\{w_k\}$, то $\{x_k+y_k\}$ эквивалентна $\{u_k+v_k\}$, $\{x_k-y_k\}$ эквивалентна $\{u_k-v_k\}$, $\{x_k\cdot y_k\}$ эквивалентна $\{u_k\cdot v_k\}$. Поэтому на множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$

осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $x, x, x, \ldots$. Так как $\mathbb{Z}_\tau$ - метрическое пространство, его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$. Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ можно метризовать. Пусть $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательности $\{x_k\}$, а $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G}_\tau$ - последовательности $\{y_k\}$.
Определим

$$\rho(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \lim_{k \to \infty} \rho(x_k, y_k), \tag{10}$$

где расстояние $\rho(x_k, y_k)$ между элементами $x_k, y_k \in \mathbb{Z}_\tau$ определено равенством (8).
Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_t$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{11}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$ и его сумма в этом кольце обозначается $a^{(p_i)}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n - сумма цифр в p - ичном разложении числа n. Следовательно, для любого p_i при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (11) в $\mathbb{Z}_{p_i}$.
Теоретико-числовые приложения полиадического анализа даны в [27].

В работе [44] предложена следующая классификация полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Термин *почти полиадическое число* использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме, быть может, конечного их числа.

Назовем почти полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что почти полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Почти полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным почти полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть почти полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть почти полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Назовем почти полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что почти полиадическое число $P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) = 0$.

Почти полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть почти полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)},\ldots,a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть почти полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1,\ldots,x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)},\ldots,a_m^{(p)}) \neq 0$.

Одним из используемых методов исследования является модифицированный метод Зигеля–Шидловского для F-рядов. Рассматриваемый подкласс класса F- рядов состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n ,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где c_1- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z},\ k = 0,\ldots,n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n,\ d_{0,n} \in \mathbb{N},\ n = 0,1,\ldots,\ d \in \mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также,что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F\left(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d\right)$.

Сформулируем теоремы об арифметических свойствах полиадических и почти полиадических чисел, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$D:\ y_i' = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}(z) y_i,\ i = 1,\ldots,m, \tag{12}$$

$A_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z) \cdot A_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i, j = 1, \ldots, m$, причем пусть степень $T(z)$- наименьшая возможная, а коэффиценты $T(z)$- взаимно-простые целые числа.

Обозначаем $degD$ и $H(D)$, соответственно, наибольшие из степеней и высот многочленов $T(z)$, $T(z)A_{i,j}(z)$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Через $n_0(D)$ обозначаем число, существование которого доказано в теории E-функций, G-функций и F-рядов (см. [8], стр. 106). В качестве оценки сверху для $n_0(D)$ можно взять число, стоящее в правой части неравенства

$$n_0(D) \leqslant C(m, \deg D) H(D)^{c(m, \deg D)} \tag{13}$$

(с.м [29], теорема 1.2), причем можно взять

$$c(m, \deg D) = \log_2 \mathrm{C}(m, \deg D) = (2 + (\deg D + 1)m)^{(2+(\deg D+1)m)^{2m}} \tag{14}$$

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (12). Положим

$$c_4 = \mathrm{c}_1 + 5,\ c_5 = m^2 c_4 + 2, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 = max\{n_0(D), exp(4(2(m+3) + c_4(m-1))^2), \\ exp(|\xi|^2 + \deg D(|\xi| + 2) + 2\ln H(D) + 1))\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$H_0 = exp\left(\mathcal{N}_0 \ln \mathcal{N}_0 \left(1 - \frac{m + 3 + (m-1)c_5}{(\ln N_0)^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \tag{17}$$

Обозначим, при $x > 3$,

$$\ell(x) = e^{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$u(x) = m(x+1) - \left[x(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

где $[t]$ обозначает целую часть числа t,

$$P_{\text{н}}(x) = \ell\left(\frac{x}{\ln x}\right),\ P_{\text{в}}(x) = u\left(\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{2(m+3+(m-1)c_5)}{\left(\ln\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \tag{18}$$

Теорема. *(Теорема 1.1. [29]) Пусть F-ряды $f_1(z) \equiv 1, \ldots, f_m(z)$ линей-*

но независимы над $\mathbb{Q}(z)$ *и составляют решение системы (12). Пусть* $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, *число* ξ *отлично от особых точек системы (12). Пусть форма* $L(y_1, \dots, y_m)$ *определена равенством* $L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m$. *Тогда для любого* $H \geqslant H_0$ *существует простое число* p, *удовлетворяющее неравенствам*

$$P_н(\ln H) < p < P_в(\ln H)$$

такое, что

$$\left| L(\overline{f}(\xi)) \right|_p > H^{-m-\frac{m+3+2m\,c_5}{\sqrt{\ln\ln H}}} \tag{19}$$

В работе [42] доказана теорема

Теорема. *Пусть ряды* $f_1(z), \dots, f_m(z)$ *принадлежат некоторому классу* $F\,(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)$ *и алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.
Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ *составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений*

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(z) Y_i,\ i = 1, \dots, m, \tag{20}$$

$B_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. *Пусть* $T_0(z) \in \mathbb{Z}[z]$ *и* $T_0(z) \cdot B_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i, j = 1, \dots, m$, *причем пусть степень* $T_0(z)$*- наименьшая возможная, а коэффиценты* $T_0(z)$*- взаимно-простые целые числа. Пусть* ξ*– целое число, отличное от* 0 *и особых точек системы дифференциальных уравнений. Тогда полиадические числа* $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ *бесконечно алгебраически независимы.*

Актуальность темы диссертации определяется тем что в ней получены теоремы об арифметических свойствах почти полиадических рядов из определенного класса. Они получены как с помощью модификации метода Зигеля – Шидловского так и с помощью построения точных приближающих форм. Это направление активно исследуется в работах российских и зарубежных математиков.

Цели и задачи диссертации

Целью работы является получение общих теорем о бесконечной алгебраической независимости и бесконечной линейной независимости некоторых почти полиадических рядов и применение этих теорем к конкретным рядам, представляющим интерес.

Второй целью было проведение исследования полиадического разложения натурального чисела в сравнении с разложениями с двойной базой и исследование статистических свойств цифр десятичных разложений некоторых полиадических представлений некоторых натуральных чисел.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является полиадические и почти полиадические числа. Предмет исследования – доказательство бесконечной алгебраической независимости сокупности некоторых почти полиадических чисел. Сравнение полиадического разложения с разложением с двойной базой. Изучение статистических свойств цифр полиадических разложений натуральных чисел.

Научная новизна

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми, получены автором самостоятельно. Они обоснованы строгими математическими доказательствами и относятся к актуальой тематике развиваемой в современных работах отечественных и зарубежных исследователей.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

- Доказательство новых общих теорем об арифметических свойствах значений F–рядов, удовлетворяющих некоторым системам дифференциальных уравнений первого порядка.

- Применение доказанных теорем к рядам вида

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\dots(a+b(n-1))$$

обобщающим ряд Эйлера $\sum_{n=1}^{\infty} n!$.

- Сравнение полиадического разложения с разложением с двойной базой и цепью с двойной базой.

- Краткий обзор статистических испытаний цифр некоторых полиадических разложений натуральных чисел.

Методы исследования

В диссертации использованы методы теории трансцендентных чисел: модификация метода Зигеля–Шидловского, методы построения точных приближающих форм, методы полиадического анализа и вычислительные эксперименты.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит, в основном, теоретический характер. Её результаты дополняют и развивают обобщение метода Зигеля – Шидловского в теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовыми нормированиями. Они могут быть использованы в учебном процессе в качестве части специального курса. Полученные в четрертой главе результаты будут иметь практическое значение в качестве основы для построения генератора псевдослучайных чисел и использования в учебном процессе в качестве части специального курса.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- XX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013» Москва(8 - 13 апреля 2013 года).

- Международная заочная научно-практическая конференция «Современное общество, наука и образование: модернизация и инновации» Москва (31 октября 2013 г).

- Всероссийская научно-практическая конференция «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ» Тула (17 апреля 2015 г).

- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова Тула, (25-30 мая 2015 года).

- Международная конференция «Математика и информатика», Москва, (13-17 марта 2016 года).

- IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики» (22-26 мая 2018 года. Нальчик–Эльбрус).

- XVII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 23-28 сентября 2019 года).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в шестии научных работах, шесть из которых индексируются в международной базе Scopus или входят в список рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список работ приведен в конце диссертации. В работах, написанных совместно с В.Г. Чирским, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результата.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на части. Общий объем работы – 86 страниц. Список цитированной литературы включает 70 наименований.

Содержание работы

В первой главе сформулированы основные результаты диссертации.
Во второй главе применяется обобщённый метод Зигеля – Шидловского к исследованию арифметических свойств почти полиадических чисел. Доказаны теоремы 1, 2, 3, 4 и 5.
В главе 3 аппроксимации Эрмита – Паде применены к исследованию арифметических свойств некоторых почти полиадических чисел. Доказаны теоремы 6, 7.
Четвертая глава посвящена некоторым применениям полиадических чисел. Проведено сравнение статистических свойств полиадического представления натуральных чисел с представлением с двойной базой и цепью с двойной базой.

Глава 1. Основные результаты диссертации

1.1 Применение модификации метода Зигеля–Шидловского

Теорема 1. *Пусть*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z) \tag{1.1}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (1.2), *а также выполняются следующие условия:*

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{1.3}$$

Тогда почти полиадические числа $\alpha_1 = f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi) = \alpha_m$ бесконечно алгебраически независимы.

Для доказательства теоремы 1 использованы общая теорема об арифметических свойствах F-рядов из [36] и метод доказательства алгебраической независимости над полем $\mathbb{C}(z)$ решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка из работы В.Х. Салихова [43].

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$

Теорема 2. *Пусть*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z) \tag{1.4}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Пусть θ_k – целые числа из $\mathbb{K}$ и

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \qquad \Theta_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $d \in \mathbb{N}$, $M = \binom{m+d}{m}$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p таких, что $p \leqslant \exp\left(\ln^{1+2\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)$, и любого нормирования v, продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполнено неравенство

$$\left|\xi - \Theta_n\right|_v < \exp\left(-\left(M - 1 + \delta\right)\exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{1+2\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right).$$

Пусть последовательность h_n определена равенством

$$\ln h_n = \delta \exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right| - c_4 \exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{(1+\varepsilon)/2}\left|\overline{\Theta_n}\right|,$$

где $c_4 = 2 + c_5$ при $\varepsilon \leqslant 1$ и $c_4 = 2$ при $\varepsilon < 1$, а

$$c_5 = M^2\left(c_1^* \log_p q^* + 1.25 c_2^* c_3^* + 2c_3^* + 5\right).$$

Тогда существует эффективная постоянная n_0 такая, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P\left(y_1, \ldots, y_m\right)$ степени d по совокупности переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, высота которого h удовлетворяет условиям $h_{n-1} < h \leqslant h_n$ при $n > n_0$, существует *простое число p в интервале*

$$\left|\overline{\Theta_n}\right| \leqslant p \leqslant M \exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)$$

и нормирование v, продолжающее p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$|P\left(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)\right)|_v \geqslant \exp\left(-\ln h + \left(-\frac{M-1}{\delta} - \frac{c_4\left(M-1\right)\left(1-\delta\right)}{\delta\left(\ln\ln h_n\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}}\right)\ln h_n\right)$$
$$= \exp\left(-B\left(h, h_n\right)\right).$$

а также выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int\left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right)dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{1.6}$$

Иными словами, $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.

Пусть $\Phi(k, N)$ – N – кратное возведение в степень и $n_N = \Phi(k, N)$.

$$\Phi(k, N) = \underbrace{k^{k^{\cdots^{k}}}}_{\text{N кратное возведение в степень}}$$

Следствие 1. *Для любых натуральных чисел k, N и всякого простого числа p ряд*

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty}(n_m)!$$

представляет собой трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент $\mathbb{Z}_p$ и удовлетворяет условию теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z) \tag{1.7}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициен-

тами, составляющие решение системы вида

$$\begin{aligned} &P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ &\textit{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{1.9}$$

тогда ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, число $\frac{a}{b}$ не равно нулю и отрицательному целому числу. Рассмотрим задачу об арифметической природе ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\ldots(a+b\,(n-1))\,. \tag{1.10}$$

В конечном множестве p–адических полей $\mathbb{Q}_p$, соответствующих тем простым числам p, которые делят b, этот ряд расходится, так как для его общего члена выполнено равенство

$$\left|a\,(a+b)\ldots(a+b\,(n-1))\right|_p = 1,$$

общий член ряда, тем самым, не стремится к 0, что означает, что ряд расходится. Если же простое число p не делит b (что обозначается $p \nmid b$), то среди чисел $a\,(a+b)\ldots(a+b\,(n-1))$ при $n > p^t$, $t = 1, 2\ldots$, имеется не менее, чем $\left[\frac{n}{p^t}\right]$, но не более, чем $\left[\frac{n}{p^t}\right] + 1$ чисел, делящихся на p^t. Поэтому $\left|a\,(a+b)\ldots(a+b\,(n-1))\right|_p \to 0$ при $n \to \infty$ и ряд (1.10) сходится в $\mathbb{Q}_p$.

Рассматриваемый ряд (1.10) можно представить в виде

$$\mathfrak{a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+(n-1))\,b^n, \tag{1.11}$$

где $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, λ – не 0 и не целое отрицательное число, $(a, b) = 1$.

В качестве следствия теоремы 1 будет доказана теорема 4.

Теорема 4. *Почти полиадические числа $\mathfrak{a}_i$, определенные равенствами*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i+b_i)\dots(a_i+(n-1)\,b_i)=\mathfrak{a}_i, \qquad (1.12)$$
где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i,b_i)=1$, $i=1,\dots,m$;
$$\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_j}{b_j}\notin\mathbb{Z}, \quad i\neq j$$
бесконечно алгебраически независимы.

Уточним теорему 4 в представляющем интерес частном случае.

Теорема 5. *Для любого ненулевого многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ существует бесконечное множество непересекающихся интервалов $(P_н(\ln H),\ P_в(\ln H))$, где $P_н(x)$, $P_в(x)$ определены равенствами* (18), *в каждом из этих интервалов содержится простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ элемент $\mathfrak{a}\in\mathbb{Q}_p$, определенный равенством (1.11), удовлетворяет неравенству $P(\mathfrak{a})\neq 0$.*

1.2 Применение точных приближающих форм

Используя построение точных приближающих форм для гипергеометрических рядов, можно доказать утверждение, следующее из теоремы 5, в котором интервалы для чисел p являются более точными.

Теорема 6. *Пусть числа σ_1, σ_2, σ_3 определяются условиями: при $s\geqslant\sigma_1$ выполнено $s>\left(|\lambda|-\frac{1}{2}\right)\ln s$, при $s\geqslant\sigma_2$ выполнены неравенства $s\geqslant\sigma_1$ и $(s+1)\sqrt{\ln s}\geqslant\ln(s+1)e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, при $s\geqslant\sigma_3$ выполнены неравенства $s\geqslant\sigma_2$ и $\ln s>C_1+3\sqrt{\ln s}$. Рассматриваем теперь последовательность $s_k\in\mathbb{N}$ такую, что $s_1\geqslant\sigma_3$ и для каждого $k\geqslant 1$ выполняются неравенства*
$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}}\ >\ a+b\,s_k.$$

Тогда отрезки

$$\left[e^{\sqrt[4]{\ln s_k}}\ ,\ a+b\,s_k\right]\ ,\ k=1,2,\ldots$$

не пересекаются и в каждом из них есть простое число p *такое, что в поле* $\mathbb{Q}_p$ *выполнено неравенство.*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a(a+b)\ldots(a+b(n-1))\neq 0 \tag{1.13}$$

Теоремы о значениях E–функций в некоторых трансцендентных точках установлены в работе А.И. Галочкина [41]. Теоремы о алгебраических свойствах F–рядов в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами рассмотрены в работе Азаматова [40].

Ввиду громоздкости выражений для границ интервалов, содержащих вышеупомянутые простые числа p , мы их не приводим в формулировке теоремы 7.

Теорема 7. *Пусть* ξ *- полиадическое число, обладающее следующими свойствами:*

1. *Существует бесконечное множество полиадических чисел* τ_s, $s\in\mathbb{N}$ *таких, что*

$$\xi=\beta_s+\tau_s,\quad \beta_s\in\mathbb{N},\quad \beta_s\leqslant C_1e^{\sqrt{\ln s}} \tag{1.14}$$

2. *Для всех простых чисел* p, $p\leqslant a+bs$, *выполнено неравенство*

$$|\tau_s|_p=|\xi-\beta_s|_p<e^{-s\ln s-2s\sqrt{\ln s}-C_2s}. \tag{1.15}$$

Тогда существует бесконечное множество простых чисел p *таких, что в поле* $\mathbb{Q}_p$ *справедливо неравенство*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+(n-1))\,\xi^n\neq 0. \tag{1.16}$$

1.3 Некоторые практические применения полиадических и почти полиадических чисел

Задача представления натуральных чисел слагаемыми определенного вида актуальна в аналитической теории чисел.

Объект исследования диссертации – полиадические числа интересны тем, что их частичные суммы представляют собой полиадические (или факториальные) разложение натуральных чисел.

Натуральные числа можно изображать многими способами. Общеизвестны позиционные системы счисления. Например, в системе счисления с натуральным основанием q любое число n допускает единственное представление в виде $\sum a_n \cdot q^n$ где $a_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. В основном используется двоичная, троичная, десятичная системы счисления.

Актуальна задача быстрого возведения числа в большую степень. Известен бинарный алгоритм.

Пусть $m = \sum_{i=0}^{t} m_i 2^i$, где $m_i \in \{0, 1\}$, $t = [\log_2 m]$. Через $\|m\|$ обозначим двоичный вес вектора $(m_i, \ldots, m_0)$. Если $\|m\| = s$, то пусть $m_{i_1} = m_{i_2} = \ldots = m_{i_s} = 1$, $0 \le i_1 < \ldots < i_s \le t$, т.е. $m = 2^{i_1} + \ldots + 2^{i_s}$. Процесс вычисления x^m может быть организован следующим образом:

1. сначала за t возведений в квадрат вычисляются $x, x^2, x^{2^2}, \ldots, x^{2^t}$;
2. затем за $\|m\| - 1$ умножение вычисляется $x^m = \prod_{j=1}^{s} x^{2^i_j}$.

Итак, для вычисления x^m требуется совершить $[\log_2 m] + \|m\| - 1 = O(\log_2 m)$ умножений и возведений в квадрат, вместо $m - 1$ умножений тривиальным алгоритмом последовательного умножения.

Оказалось, что значительно более эффективным способом быстрого возведения в степень является представление натурального числа с помощью двойной базы. Так называется представление натурального числа x в виде суммы чисел

$$2^a 3^b,\ a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1.17}$$

В работе [24] приводится алгоритм решения этой задачи, на первом шаге которого находят наибольшее число w вида (1.17), не превосходящее число x. Затем та же процедура применяется к числу $x - w$ и так далее, пока не будет получено число 0. В [24] установлена

Теорема. *Продолжительность работы этого алгоритма равна*

$$O\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}\right), x \to +\infty \tag{1.18}$$

Доказательство этой теоремы использует теорему Р. Тайдемана [25], из которой следует, что существует постоянная C такая, что между числами

$$x - \frac{x}{(\ln x)^{\tilde{C}}}, x$$

обязательно есть число вида (1.17). Практические вычисления говорят о том, что реальные значения дают в соотношении (1.18) значительно лучшую оценку подразумеваемой постоянной, чем полученная авторами [24] с использованием известных им оценок линейных форм от логарифмов алгебраических чисел.

В работе [30] использованы существенно лучшие оценки линейных форм от чисел $\ln 2$ и $\ln 3$, установленные В.Х. Салиховым [26]. С их помощью получено следующее уточнение теоремы из [24].

Теорема. *Продолжительность работы упомянутого выше алгоритма при $x \geqslant X_1$ (где X_1 – эффективно вычисляемая) постоянная не превосходит величины*

$$6\frac{\log_2 x}{\log_2 \log_2 x}. \tag{1.19}$$

Рассматриваются также представления чисел с помощью цепи с двойным основанием, т.е. представление числа N в виде

$$\begin{aligned} &N = \sum_{i=1}^{m} s_i 2^{a_i} 3^{b_i}, \text{где } s_i \in \{-1; 1\}, \\ &a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 0, \\ &b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Для этого представления асимптотическая оценка, аналогичная приведенной выше, не доказана.

В четвертой главе диссертации рассматривается так называемая полиадическое (факториальное) разложение натурального числа.

Так называется представление числа N в виде

$$N = \sum_{n=1}^{r} a_n \cdot n!,$$
$$a_n \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$$

В четвертой главе диссертационной работы получена асимптотическая оценка для количества членов полиадического разложения. Также оценивается количество вспомогательных вычислений.

Проводится сравнение оценок длин разложений для разложения с двойной базой, цепи с двойной базой и полиадического разложения. Поскольку асимптотические оценки выполняются при $N \to \infty$, имело смысл провести вычислительные эксперименты, результаты которых приведены в таблице в конце четвертой главы диссертации. Здесь вкратце отметим, что для рассматриваемых значений N было проведено 10 выборок по 100 чисел каждая. Разрядность каждого из чисел выборки колеблется от 159 до 160 разрядов. Эксперименты показали, что хотя разложение с двойной базой несколько короче, чем полиадические разложения, сами полиадические разложения короче, чем цепи с двойной базой. Кроме того, для полиадического разложения требуется значительно меньше вспомогательных вычислений.

Установлена теорема

Теорема 8. *Асимптотическая оценка длины k разложения*

$$N = \sum_{n=1}^{k} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}, a_k \neq 0$$

имеет вид

$$k \sim \frac{\ln N}{\ln\ln N}, \quad N \to +\infty.$$

Количество вспомогательных вычислений, используемых в алгоритме полиадического разложения числа N, имеет асимптотическую оценку с главным членом вида

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln N}{\ln\ln N}\right)^2, \quad n \to +\infty.$$

Свойства цифр некоторых полиадических разложений

Известно, что q-ичное разложение рационального числа представляет собой либо конечную, либо бесконечную периодическую (начиная с некоторого места) дробь.

Некоторым аналогом этого факта служит утверждение (теорема 2) о том, что любое отрицательное целое число, представляемое каноническим полиадическим разложением, при разложении его в поле $\mathbb{Q}_p$ p- адических чисел имеет, начиная с некоторого места, цифры, равные $p-1$.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n!$, равный -1 в любом поле $\mathbb{Q}_p$ имеет в этом поле разложение

$$p-1+(p-1)p+(p-1)p^2+\ldots$$

Рассматривая частичные суммы этого ряда вида

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot n! = (N+1)!-1$$

можно заметить (см. теорему 3), что десятичное разложение этого числа заканчивается не более, чем $\frac{N}{4}$ девятками.

Вычисления показали, что остальные цифры этого числа распределены хаотично.

Не уточняя философских аспектов понятия случайности последовательности чисел, будем следуя Дж.Х. Лемеру и Д.Кнуту [38], считать последовательность чисел псевдослучайной, если «каждый ее член непредсказуем для непосвященного и элементы которой удовлетворяют ряду традиционных среди статистиков критериев, в известной мере зависящих от того, для каких применений служит эта последовательность».

Мы будем рассматривать так называемые критерии нормальности последовательности. Для заданного натурального числа $g > 1$ будем рассматривать числа $a_1, a_2, \ldots$, каждое из которых равно одной из g-ичных цифр, т.е. $0, 1, \ldots, g-1$, как знаки g-ичного разложения действительного числа $\alpha \in [0, 1]$. Э.Борель называл действительное число α

$$\alpha = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

слабо нормальным к основанию g, если частота появления каждой из цифр среди первых n цифр стремится к $\frac{1}{g}$ при $n \to \infty$. Назовем соответствующую последовательность слабо нормальной. Он называл число α *нормальным*, если числа $\alpha, g\alpha, g^2\alpha, \ldots$ слабо нормальны к основаниям $g, g^2, g^3, \ldots$.

Он доказал, что почти все числа α из $[0, 1]$ нормальны.

В работе исследуется предположение о том, что если взять частичные суммы полиадического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!,$$

коэффиценты которого a_n строятся по какому-то простому закону, например, $a_n = 1$ и представить полученные натуральные числа в десятичной системе счисления, то их цифры будут обладать хорошими статистическими свойствами.

Именно, рассматривались числа

$$B_N = \sum_{n=1}^{N} n!$$

и

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} n \cdot n!$$

(в котором отброшены последние $\frac{N}{4}$ знака десятичного разложения числа $(N+1)! - 1$).

Для исследуемых чисел рассматривалась частота появления каждой из цифр $0, 1, \ldots, 9$. Для проверки гипотезы о равномерности частоты цифр использовался критерий χ^2 с 9 степенями свободы. Гипотеза о равномерности отвергнута не была. Кроме того, для каждой цифры рассматривалась последовательность номеров ее появления. Оказалось, что эти номера также равномерно распределены.

Глава 2. Арифметические свойства некоторых почти полиадических чисел. Применение метода Зигеля–Шидловского

Алгебраическая независимость почти полиадических чисел доказывается в теореме 1, для доказательства которой используется модифицированный метод Зигеля-Шидловского для F–рядов [36].

Напомним что мы рассматриваем подкласс F- рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n \,,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где c_1- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z},\ k = 0, \ldots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n,\ d_{0,n} \in \mathbb{N},\ n = 0, 1, \ldots,\ d \in \mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также,что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F\left(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d\right)$.

Пусть трансцендентные формальные степенные ряды $y_1, \ldots, y_m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y = Q_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

2.1 Доказательство теорем 1, 2, 3 и следствия 1

Для доказательства теоремы 1 нужно доказать алгебраическую независимость над $\mathbb{C}(z)$ рядов $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Она следует из доказываемой ниже теоремы 3. Доказательство теоремы 3 имеет ту же схему, что и доказательства теорем В.Х. Салихова [43], (см. также [8], стр.198,199).

Доказательство теоремы 3 Для доказательства теоремы 3 потребуются леммы.

Лемма 1. *Пусть трансцендентные ряды y_i удовлетворяют системе уравнений* (2.1) *и пусть выполняется условие (1.3) . Тогда ряды $y_1, \ldots, y_m$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть размерность векторного пространства над $\mathbb{Q}(z)$, порожденного этими рядами, равна k, $k < m$. Так как среди рядов $y_1, \ldots, y_m$ нет рациональных функций, $k \geqslant 2$. Предположим, что $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$ линейно независимы, а $1, y_1, \ldots, y_k$ – линейно зависимы и имеет место равенство

$$q_0 + q_1 y_1 + \ldots + q_k y_k = 0, \quad \text{где} \quad q_i \in \mathbb{Q}(z), i = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.2}$$

Заметим, что по выбору k функция $q_k \neq 0$. Кроме того, так как среди $y_1, \ldots, y_k$ нет рациональных функций, существует номер l, $1 \leqslant l \leqslant k-1$ такой, что $q_l \neq 0$.

Продифференцируем равенство (2.2), используя систему (2.1):

$$
\begin{aligned}
&(q_0{}' + q_1{}' y_1 + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}}y_1 + \frac{Q_1}{P_{1,1}}\right) + \ldots + \\
&+ q_l{}' y_l + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}y_l + \frac{Q_l}{P_{1,l}}\right) + \ldots + \\
&+ q_k{}' y_k + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}y_k + \frac{Q_k}{P_{1,k}}\right)) = 0
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&q_0{}' + \sum_{l=1}^{k}\frac{Q_l}{P_{1,l}}q_l + \left(q_1{}' + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}}\right)\right)y_1 + \ldots + \\
&\left(q_l{}' + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right)\right)y_l + \ldots + \left(q_k{}' + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right)\right)y_k = 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что в поле рациональных функций выполняется равенство

$$
\frac{q_l{}'}{q_l} - \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} = \frac{q_k{}'}{q_k} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}, \tag{2.4}
$$

иначе бы из этих двух уравнений можно было бы исключить переменную y_k и получить нетривиальное уравнение, связывающие над $\mathbb{Q}(z)$ ряды $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$. Равенство (2.4) преобразуем к виду

$$
\begin{aligned}
&{q_l}' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l = {q_k}' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k \\
&\frac{q_l' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l}{q_l} = \frac{q_k' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k}{q_k} \\
&\frac{q_l'}{q_l} + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) = \frac{q_k'}{q_k} + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\frac{q_l'}{q_l} - \frac{q_k'}{q_k} = \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}} \\
&(\ln q_l)' - (\ln q_k)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) - \left(\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\left(\ln \frac{q_l}{q_k}\right)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\ln \frac{q_l}{q_k} = \int \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz + \ln C \\
&\frac{q_l}{q_k} = e^{\int \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz} \cdot C
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Из условия (1.3) следует , что правая часть этого равенства не является рациональной функцией и не может быть равна $\frac{q_l}{q_k}$. Лемма 1 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Пусть $m > 1$, пусть ряды

$$
f_1 = f_1(z), \ldots, f_m = f_m(z) \tag{2.6}
$$

алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}(z)$, а число l таково, что любые $l-1$ среди этих рядов алгебраически независимы, но существуют l рядов таких, что они алгебраически зависимы. Так как нумерация рядов (2.6) в нашем распоряжении, можно считать, что $f_1, \ldots, f_{l-1}$ алгебраически независимы, а $f_1, \ldots, f_l$ алгебраически зависимы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют ряды $f_1, \ldots, f_l$

$$
{w_i}' = P_{0,i} w_i - Q_i, \quad i = 1, \ldots, l \tag{2.7}
$$

и соответствующий системе (2.7) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{l} \left(P_{0,i} w_i - Q_i\right) \frac{\partial}{\partial w_i} \tag{2.8}$$

Пусть $P = P\left(z, w_1, \ldots, w_l\right) \in \mathbb{Q}\left[z, w_1, \ldots, w_l\right]$ отличный от тождественного нуля и неприводимый многочлен такой, что

$$P\left(z, f_1, \ldots, f_l\right) = 0. \tag{2.9}$$

Применяя лемму 4 из книги [8] (глава 4, стр 161–162) получаем, что с некоторым $Q(z) \in \mathbb{Q}(z)$ выполнено равенство многочленов из $\mathbb{Q}\left[z, w_1, \ldots, w_l\right]$

$$DP = QP. \tag{2.10}$$

Пусть степень многочлена P по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$ равна s. Представим многочлен P в виде

$$P = \sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \cdot {w_1}^{k_1} \ldots {w_l}^{k_l}, \tag{2.11}$$

где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, $P_{\overline{k}} \in \mathbb{Q}[z]$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Из (2.7) – (2.11) следует, что

$$D\left(\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right) = Q\left(\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right),$$

откуда

$$\begin{gathered}\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} \left(P'_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l} + \sum_{i=1}^{l} P_{\overline{k}} \left(k_i w_1^{k_1} \ldots w_i^{k_i-1} \ldots w_l^{k_l}\right) \cdot \left(P_{0,i} w_i - Q_i\right)\right) = \\ = \sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} Q P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Рассмотрим произвольный отличный от нуля член многочлена P, имеющий наибольшую степень s по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$. Пусть он имеет вид $P_{\overline{r}} w_1^{r_1} \ldots w_l^{r_l}$, где $r_1 + \ldots + r_l = s$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, $P_{\overline{r}} \neq 0$.

Из (2.12) следует, что $P_{\overline{r}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} r_i P_{0,i} \right) y. \tag{2.13}$$

Аналогичное равенство с заменой r_i на t_i выполняется для любого коэффициента $P_{\overline{t}}$ с индексом $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, удовлетворяющим условию $t_1 + \ldots + t_l = s$.

Пусть j выбрано так, что $r_j > 0$ и пусть $P_{\overline{k}}$ – коэффициент многочлена P с индексом $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, для которого выполнены равенства: $k_i = r_i$, $i \neq j$, $k_j = r_j - 1$. Из (2.12) следует, что

$$\begin{gathered} P_{\overline{k}}{}' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) P_{\overline{k}} + \\ \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, Q_i P_{\overline{k}} \end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\overline{k}_j = (k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \ldots, k_l) \tag{2.15}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi = \overline{\Phi}(z) = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, P_{\overline{k}_j} f_j \tag{2.16}$$

и вычислим, используя (2.13), (2.16) (т.к. для $P_{\overline{k}_j}$ сумма индексов равна s)

$$\begin{gathered} \Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(P_{\overline{k}_j}{}' f_j + P_{\overline{k}_j} f_j{}' \right) = \\ = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(f_j \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) P_{\overline{k}_j} + P_{\overline{k}_j} \left(P_{0,j} f_j \right) - Q_j P_{\overline{k}_j} \right), \end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j+1) \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) P_{\overline{k}_j} f_j + \sum_{j=1}^{l} (k_j+1)\, Q_j P_{\overline{k}_j}$$

Из уравнений (2.14), (2.17) следует, что

$$P_{\overline{k}}' - \Phi' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) \left(P_{\overline{k}} - \Phi \right). \tag{2.18}$$

Обозначим $Y_{\overline{k}} = P_{\overline{k}} - \Phi$. Пусть

$$w = \frac{Y_{\overline{k}}}{P_{\overline{k}_j}},$$

где $P_{\overline{k}_j} = P_{\overline{r}} \neq 0$ по определению $\overline{k}_j$. Тогда согласно (2.13), (2.18)

$$\frac{w'}{w} = \frac{Y'_{\overline{k}}}{Y_{\overline{k}}} - \frac{P'_{\overline{k}_j}}{P_{\overline{k}_j}} = \left(Q - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l} k_i P_{0,i} \right) - \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) = P_{0,j},$$

Следовательно,

$$w' = P_{0,j} w. \tag{2.19}$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{gathered}
\Omega = f_j - \frac{1}{k_j+1} w = f_j - \frac{1}{k_j+1} \left(\frac{P_{\overline{k}} - \Phi}{P_{\overline{r}}} \right) = \\
\frac{1}{(k_j+1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{r}} {f_j}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \Phi \right) = \\
\frac{1}{(k_j+1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{r}} {f_j}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \sum_{i=1}^{l} (k_i+1)\, P_{\overline{k}_i} \cdot f_i \right) = \\
-\frac{1}{(k_j+1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{k}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l} (k_i+1)\, P_{\overline{k}_i} f_i \right),
\end{gathered} \tag{2.20}$$

так как $\overline{r} = \overline{k}_j$, ввиду определения $\overline{k}$ и равенства (2.15).

Поскольку, ввиду (2.7) и (2.19)

$$
\begin{aligned}
&{f_j}' = P_{0,j}f_j - Q_{0,j},\\
&w' = P_{0,j}w,\\
&\frac{w'}{k_j+1} = \frac{wP_{0,j}}{k_j+1},
\end{aligned}
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
\Omega' &= \left(f_j - \frac{1}{k_j+1}w\right)' = f_j' - \frac{1}{k_j+1}\cdot P_{0,j}w =\\
&= P_{0,j}f_j - Q_{0,j} - P_{0,j}\cdot\frac{w}{k_j+1} =\\
&= P_{0,j}\left(f_j - \frac{w}{k_j+1}\right) - Q_{0,j},
\end{aligned}
$$

т.е. Ω является решением того же уравнения, что и f_j, но равенство (2.20) означает, что ряды $\Omega, 1, f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_l$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}(z)$. Но это противоречит лемме 1. Теорема 3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Применение теоремы 1 из [42] к значениям рядов (1.1) и применение теоремы 3 завершает доказательство теоремы 1.

Применение теоремы 3 и теоремы из работы Т.Р. Азаматова [40] завершают доказательство теоремы 2.

Доказательство следствия 1 Достаточно доказать, что существует

бесконечное множество A целых чисел a из поля $\mathbb{K}$ таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих условию

$$p \le \exp\left(\ln^{1+2\delta}|\overline{a}|\right),$$

выполняется неравенство

$$|\xi - \mathrm{a}|_p < \exp\left(-\exp\left(\ln^2|\overline{\mathrm{a}}|\right)\right), \tag{2.21}$$

из которого следует неравенство

$$|\xi - a|_v < \exp\left(-\exp\left(\ln^{1+\delta}|\overline{a}|\right)\ln^{1+2\delta}|\overline{a}|\right).$$

Обозначим $\Phi(N) = \Phi(k, N)$ и рассмотрим множество

$$A = \left\{\sum_{N=0}^{n}(\Phi(N))!, n = 0, 1, 2, \dots\right\}.$$

Ясно, что для

$$a = \sum_{N=0}^{n}(\Phi(N))!$$

при всех $n \geq 1$ выполняются неравенства

$$a \leq 2(\Phi(n))! \leq \exp(\Phi(n)\ln\Phi(n)) \tag{2.22}$$

и при всех n справедливо равенство

$$|\xi - a|_p = |\Phi(n+1)!|_p. \tag{2.23}$$

С учётом (2.22),(2.23), для установления (2.21) требуется доказать, что существует число n_0 такое, что при $n > n_0$ и всех простых

$$p \leq \exp\left(\ln^2(\exp(\Phi(n)\ln\Phi(n)))\right) = \exp\left((\Phi(n)\ln\Phi(n))^2\right) \tag{2.24}$$

выполняются неравенства

$$|\Phi(n+1)!|_p \leq \exp\left(-\exp\left((\Phi(n)\ln\Phi(n))^2\right)\right) \tag{2.25}$$

Неравенство (2.25) следует из неравенства

$$\exp\left(-\frac{\Phi(n+1)}{p-1}\ln p\right)\Phi(n+1) \leq \exp\left(-\exp\left((\Phi(n)\ln\Phi(n))^2\right)\right),$$

которое, в свою очередь, следует из неравенства

$$\frac{\Phi\left(n+1\right)}{p-1}-\ln\Phi\left(n+1\right)>\exp\left(\left(\Phi\left(n\right)\ln\Phi\left(n\right)\right)^{2}\right). \tag{2.26}$$

С учётом (2.24) отметим, что неравенство (2.26) вытекает из неравенства

$$\Phi\left(n+1\right)>\exp\left(\left(\Phi\left(n\right)\ln\Phi\left(n\right)\right)^{2}\right)\left(\ln\Phi\left(n+1\right)+\exp\left(\left(\Phi\left(n\right)\ln\Phi\left(n\right)\right)^{2}\right)\right). \tag{2.27}$$

По условиям следствия имеет место неравенство

$$\Phi\left(n+1\right)\geq 2^{2^{\Phi(n)}}. \tag{2.28}$$

Очевидно, что при $n\geq n_0$ неравенство (2.27) следует из (2.28).

2.2 Доказательство теоремы 4

Перейдем к доказательству теоремы 4

Таким образом, следует сначала проверить, что рассматриваемые ряды

$$f_i\left(z\right)=\sum\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)\ldots\left(\lambda_i+\left(n-1\right)\right)\left(b_iz\right)^n=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)\ldots\left(\lambda_i+n-1\right)}{n!}n!\left(b_iz\right)^n$$

входят в класс $F-$ рядов.

В рассматриваемом случае

$$a_n=\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)}{n!}\in\mathbb{Q},\quad n=1,2,\ldots$$

$$|a_n|=a_n=\left(1+\left(\lambda-1\right)\right)\left(1+\frac{\lambda-1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda-1}{n}\right)=$$
$$e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\lambda-1}{k}\right)}=e^{\sum_{k=1}^{n_0}\ln\left(1+\frac{\lambda-1}{k}\right)}\cdot e^{\sum_{k=n_0+1}^{n}\ln\left(1+\frac{\lambda-1}{k}\right)},$$

где $n_0 \geqslant |\lambda - 1|$. Используя формулу Тейлора:

$$\ln\left(1 + \frac{\lambda - 1}{k}\right) = \frac{\lambda - 1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \to \infty$$

и формулу

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

(где C– постоянная Эйлера), получаем, что $a_n = O\left(n^{\lambda}\right)$, $n \to \infty$.
Поэтому при некотором C_1 (точное значение этой постоянной нам не нужно) $|a_n| \leqslant e^{C_1 n}$ для всех n.

Все простые числа, на которые делится знаменатель a_n делят либо число b, либо $n!$. Поэтому в качестве C_2 достаточно взять число 1, например. Далее, $q = b$. Оценим степень, в которой простое число $p \leqslant n$ входит в $d_{0,n}$. Она равна разности степеней p, входящих в разложение на множители чисел $a\,(a+1)\ldots(a+b\,(n-1))$ и $n!$. Как отмечалось выше, в произведение $a\,(a+1)\ldots(a+b\,(n-1))$ простое число p, не делящее b, входит в степени не меньшей, чем $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$ и не большей, чем $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \log_p{}^n$ ($\log_p{}^n$ – оценка количества отличных от 0 чисел вида $\left[\frac{n}{p^t}\right]$, $t \in \mathbb{N}$).
В число $n!$ простое число p входит в степени $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n - сумма цифр в p- ичном разложении числа n.

Для числа S_n очевидна оценка

$$1 \leqslant S_n \leqslant (p-1)\left(\log_p{}^n + 1\right).$$

Суммы $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$ и $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \log_p{}^n$ отличаются от $\frac{n-S_n}{p-1}$ на величину порядка $\frac{n}{p^2} + 2\log_p{}^n$, поэтому можно считать $C_3 = 2$.

Таким образом, ряды $f_i(z)$ входят в класс $F\left(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d\right)$.

Легко проверить, что ряды $f_i(z)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y_i' = \frac{1 - a_i z}{b_i z^2} y_i - \frac{\lambda_i}{z}, i = 1, \ldots, m. \tag{2.29}$$

Осталось проверить условие (1.2) теоремы 1. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)},$$

принимающее вид

$$\frac{1}{b_i z^2} - \frac{1}{b_j z^2} + \frac{\lambda_j}{z} - \frac{\lambda_i}{z},$$

или

$$\left(-\frac{1}{b_i z}\right)' + \left(\frac{1}{b_j z}\right)' + \left(\ln z^{\lambda_j}\right)' - \left(\ln z^{\lambda_i}\right)' =$$

$$\left(\frac{1}{b_j z} - \frac{1}{b_i z}\right)' + \left(\ln z^{\lambda_j - \lambda_i}\right)'.$$

Первообразная этой функции равна

$$\frac{1}{b_j z} - \frac{1}{b_i z} + \ln z^{\lambda_j - \lambda_i} + \ln C.$$

Экспонента этого выражения имеет вид

$$e^{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_i}\right)} \cdot z^{\lambda_j - \lambda_i} \cdot C.$$

Если $b_j \neq b_i$, то это не рациональная функция. Если $b_j = b_i$, то так как $\lambda_j - \lambda_i \notin \mathbb{Z}$, правая часть этого равенства также не является рациональной функцией. Теорема 4 доказана.

Ряд

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \, z^n$$

где $(\lambda)_0 = 1$, $(\lambda)_n = \lambda\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y_1{}' = \frac{1-\lambda z}{z^2} y_1 + \frac{\lambda}{z'}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ функция $\left(y_1(z)\right)^k = y_k$ удовлетворяет уравнению

$$y_k{}' = k\left(\frac{1-\lambda z}{z^2}\right) y_k + k\frac{\lambda}{z} y_{k-1}.$$

Все функции y_k, $k = 1, \ldots, m$ принадлежат классу F с параметрами $C_1 + \ln 2$, C^2, $(C_3 + 1)\, m$, $q^{1+[\ln m]}$ (см. [36], стр. 245, замечание 1.4). Легко проверить, что ряд $y_1(z)$ трансцендентен над $\mathbb{Q}(z)$.

Осталось применить теорему (Теорема 1.1. [29]). Теорема 5 доказана.

Глава 3. Применение аппроксимаций Эрмита–Паде

3.1 Доказательство теоремы 6

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(n-1))$, $n \geqslant 1$. Как и в работе [33], обозначим

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!}\, z^n \tag{3.1}$$

и рассмотрим

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n\, z^n = F(\lambda, 1, z) \tag{3.2}$$

Рассмотрим также

$$f_1(z) = F(\lambda+1, 1, z). \tag{3.3}$$

Вновь используя обозначения из [5], положим $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = 1$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ определим числа t и s равенствами $N = t+1$, $N = 2s + r$, где $r = 1$ или $r = 2$.

Для любого $N \geqslant 3$ положим $\alpha_N = \alpha_r + s$, что означает, что

$$\alpha_{2s+1} = \lambda + s,\ \ \alpha_{2s+2} = 1 + s, \tag{3.4}$$

Обозначим

$$f_N(z) = F(\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, z), \tag{3.5}$$

$$u_N(z) = \alpha_1 \dots \alpha_N z^{N-1} f_N(z), \quad N \geqslant 2, \tag{3.6}$$

$$u_0(z) = f_0(z), \quad u_1(z) = f_1(z). \tag{3.7}$$

Из (3.4), (3.5), (3.6) получаем

$$u_{2s+1}(z) = \alpha_1 \dots \alpha_{2s+1} z^{2s} F(\alpha_{2s+2}, \alpha_{2s+3}, z) = (\lambda)_{s+1} \cdot s! F(1+s, \lambda+1+s, z), \tag{3.8}$$

$$u_{2s+2}(z) = \alpha_1 \dots \alpha_{2s+2} z^{2s+1} F(\alpha_{2s+3}, \alpha_{2s+4}, z) = (\lambda)_{s+1} \cdot (s+1)! F(\lambda+1+s, 2+s, z). \tag{3.9}$$

Лемма 2. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют многочлены $P_{N,0}(z), P_{N,1}(z)$ с рациональными коэффициентами такие, что справедливы равенства*

$$u_N(z) = P_{N,0}(z) u_0(z) + P_{N,1}(z) u_1(z), \tag{3.10}$$

$$u_{N+2}(z) = u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}\, z\, u_N(z),$$

$$P_{N+2,i}(z) = P_{N+1,i}(z) - \alpha_{N+1}\, z\, P_{N,i}(z), \ i = 0, 1, \tag{3.11}$$

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} P_{N,0}(z) & P_{N,1}(z) \\ P_{N+1,0}(z) & P_{N+1,1}(z) \end{vmatrix} = \alpha_1 \dots \alpha_N z^{N-1}. \tag{3.12}$$

Лемма представляет собой следствие из замечания в конце статьи [33].

Пусть

$$C_0{}^2 > 1 + C_0, \quad C_0 \geqslant |\lambda| + 1 \tag{3.13}$$

Лемма 3. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ и для $N = 2s+1$, $N = 2s+2$ выполнены неравенства*

$$H(P_{N,i}(z)) \leqslant C_0{}^N (C_0 + 1) \dots (C_0 + s).$$

($H(P(x))$ - высота многочлена $P(x)$).

Доказательство. Доказательство леммы 3 проведем по индукции.
Лемма, очевидно, верна при $N = 1$ и $N = 2$.
Предположим, что она верна для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и для $N = 2s + 1$ и $N = 2s + 2$. Проверим справедливость её утверждения для $N = 2s + 3$, $N = 2s + 4$.

Используя (3.11), (3.4) и индуктивное предположение получаем

$$
\begin{aligned}
&H(P_{2s+3,i}) = H\left(P_{2s+2,i} - \alpha_{2s+2}\; z\; P_{2s+1,i}\right) \leqslant \\
&\leqslant H(P_{2s+2,i}) + (1+s)H(P_{2s+1,i}) \leqslant \\
&\leqslant {C_0}^{2s+2}(C_0+1)\dots(C_0+s) + (1+s)\cdot {C_0}^{2s+1}(C_0+1)\dots(C_0+s) = \\
&= {C_0}^{2s+1}(C_0+1)\dots(C_0+s+1).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Используя (3.11), (3.4), (3.13), (3.14) и индуктивное предположение, получаем

$$
\begin{aligned}
&H(P_{2s+4,i}) = H\left(P_{2s+3,i} - \alpha_{2s+3}\; z\; P_{2s+2,i}\right) \leqslant \\
&\leqslant H(P_{2s+3,i}) + \big(\big|\lambda\big| + s + 1\big)\, H(P_{2s+2,i}) \leqslant \\
&\leqslant C_0^{2s+1}(C_0+1)\dots(C_0+s+1) + \big(\big|\lambda\big| + s + 1\big)\cdot {C_0}^{2s+2}\cdot \\
&\cdot(C_0+1)\dots(C_0+s) \leqslant {C_0}^{2s+1}(C_0+1)\dots(C_0+s+1)(1+C_0) \leqslant \\
&\leqslant {C_0}^{2s+3}(C_0+1)\dots(C_0+s+1)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Из неравенств (3.14), (3.15) следует утверждение леммы 3. □

Из (3.12) следует, что хотя бы один из определителей

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N,0}(b) & P_{N,1}(b) \end{vmatrix}\quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N+1,0}(b) & P_{N+1,1}(b) \end{vmatrix}
$$

отличен от 0. Выберем N так, что

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N,0}(b) & P_{N,1}(b) \end{vmatrix} \quad = P_{N,1}(b) \neq 0 \tag{3.16}
$$

Лемма 4. *При $s \geqslant \sigma_1$ имеет место неравенство*

$$
\prod \big|P_{N,1}(b)\big|_p > e^{-s\ln s - C_1 s}, \tag{3.17}
$$

где произведение в левой части (3.17) взято по всем простым числам

p, $p \nmid b$, удовлетворяющим неравенствам

$$e^{\sqrt[4]{\ln s}} \;\leqslant\; p \;\leqslant\; a+bs, \tag{3.18}$$

а C_1 и σ_1 - положительные постоянные, зависящие от C_0 и b.

Замечание 1. *В качестве C_1 можно выбрать число $\ln b + 2\ln C_0$, а число σ_1 определено условием, что при $s \geqslant \sigma_1$ выполняется неравенство $s > \left(\left|\lambda - \frac{1}{2}\right|\right)\ln s$.*

Доказательство. Ввиду (3.16) имеет место формула произведения

$$\prod_p \left|P_{N,1}(b)\right|_p \;\cdot\; \left|P_{N,1}(b)\right| \;=\; 1, \tag{3.19}$$

Где произведения в левой части (3.19) взято по всем простым p. Поэтому

$$\prod_p \left|P_{N,1}(b)\right|_p \;=\; \frac{1}{\left|P_{N,1}(b)\right|}. \tag{3.20}$$

По лемме 3, и при $N = 2s+1$, и при $N = 2s+2$

$$\left|P_{N,1}(b)\right| \;\leqslant\; b^s {C_0}^N (C_0+1)\dots(C_0+s) \;\leqslant\; b^s {C_0}^{2s+2}(C_0+1)\dots(C_0+s).$$

Так как при $a > 0$

$$(a+1)\dots(a+s) \;=\; \frac{\Gamma(a+s+1)}{\Gamma(a+1)} \tag{3.21}$$

и

$$\ln\Gamma(s+a) \;=\; \left(s+a-\frac{1}{2}\right)\ln s \;-\; s + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \to +\infty \tag{3.22}$$

Из (3.20)– (3.22) вытекает утверждение леммы 4. □

Лемма 5. *При $s \geqslant \sigma_2$ выполнено неравенство*

$$\prod \left|u_N(b)\right|_p \;\leqslant\; e^{-2s\ln s \,+\, 3s\sqrt{\ln s}}, \tag{3.23}$$

где σ_2-положительная постоянная, а произведение в первой части (3.23) взято по всем простым $p \nmid b$, удовлетворяющим (3.18).

Доказательство. Согласно (3.8), (3.9) для любого $p \nmid b$

$$\begin{aligned}\left|u_{2s+1}(b)\right|_p &\leqslant \left|(\lambda)_{s+1}\right|_p \left|s!\right|_p,\\ \left|u_{2s+2}(b)\right|_p &\leqslant \left|(\lambda)_{s+1}\right|_p \left|(s+1)!\right|_p.\end{aligned}$$

Так как $(\lambda)_{s+1} \cdot b^{s+1} = a(a+b)\ldots(a+bs)$, все простые делители числа $(\lambda)_{s+1}$, так же, как и числа $(s+1)!$, не превосходят $a+bs$. Поэтому

$$\prod_{p, p\nmid b} \left|u_{2s+1}(b)\right|_p = \prod_{p, p\nmid b} \left|(\lambda)_{s+1} s!\right|_p = \prod_{p, p\nmid b, p\leqslant a+bs} \left|(\lambda)_{s+1} s!\right|_p \tag{3.24}$$

и аналогично,

$$\prod_{p, p\nmid b} \left|u_{2s+2}(b)\right|_p = \prod_{p, p\nmid b, p\leqslant a+bs} \left|(\lambda)_{s+1} (s+1)!\right|_p. \tag{3.25}$$

Из (3.24), (3.25) и формулы произведения вытекают неравенства

$$\prod_{p, p\nmid b, p\leqslant a+bs} \left|(\lambda)_{s+1}\right|_p \left|s!\right|_p \leqslant \left((\lambda)_{s+1}\right)^{-1} (s!)^{-1} \cdot e^{C_3 s}. \tag{3.26}$$

$$\prod_{p, p\nmid b, p\leqslant a+bs} \left|(\lambda)_{s+1}\right|_p \left|(s+1)!\right|_p \leqslant \left((\lambda)_{s+1}\right)^{-1} \left((s+1)!\right)^{-1} \cdot e^{C_4 s}. \tag{3.27}$$

Из (3.26), (3.27) и (3.21), (3.22) при $a = \lambda$ получаем, что

$$\left((\lambda)_{s+1}\right)^{-1} (s!)^{-1} e^{C_3 s} < e^{-2s \, \ln s + C_5 s} \tag{3.28}$$

и

$$\left((\lambda)_{s+1}\right)^{-1} \left((s+1)!\right)^{-1} e^{C_4 s} < e^{-2s \, \ln s + C_5 s}. \tag{3.29}$$

Оценим теперь величину

$$\prod \left|a(a+b)\ldots(a+bs)\right|_p \left|(s+1)!\right|_p, \tag{3.30}$$

где произведение в (3.30) взято по простым числам p, $p\nmid b$, удовлетворяющим неравенству

$$p \ < \ e^{\sqrt[4]{\ln s}},$$

Известно что число p входит в $k!$ в степени

$$\frac{k-S_k}{p-1},$$

где S_k - сумма цифр p- ичного разложения числа k. Поэтому степень в которой p входит в $(s+1)!$ не больше, чем $\frac{s+1}{p-1}$. Следовательно,

$$\prod_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \big|(s+1)!\big|_p \ \geqslant \ \prod_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}} p^{-\frac{s+1}{p-1}} = e^{-(s+1)\sum_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}}\frac{\ln p}{p-1}} \geqslant e^{-(s+1)\int\limits_2^{e^{\sqrt[4]{\ln s}}}\frac{\ln p}{p-1}\,dp} \geqslant e^{-(s+1)\sqrt{\ln s}}. \tag{3.31}$$

Выше мы выяснили, что среди чисел $a,\ a+b,\ldots,a+bs$ на число p^t делятся не менее, чем $\left[\frac{s+1}{p^t}\right]$ и не более, чем $\left[\frac{s+1}{p^t}\right]+1$. Поэтому

$$\big|a(a+b)\ldots(a+bs)\big|_p \geqslant p^{-\sum_{1\leqslant t\leqslant \log_p(s+1)}\left(\left[\frac{s+1}{p^t}\right]+1\right)} \tag{3.32}$$

Так как

$$\sum_{1\leqslant t\leqslant \log_p(s+1)}\left(\left[\frac{s+1}{p^t}\right]+1\right) \ \leqslant \ (s+1)\sum_{1\leqslant t\leqslant \log_p(s+1)}\frac{1}{p^t}+\log_p(s+1)\leqslant$$
$$\leqslant (s+1)\cdot\frac{1}{p-1} \ + \ \log_p(s+1), \tag{3.33}$$

из (3.32), (3.33), аналогично, (3.31) получаем

$$\prod_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}} |a(a+b)\dots(a+bs)|_p \geqslant e^{-(s+1)\sum_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \frac{\ln p}{p-1} - \sum_{p<e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \log_p(s+1)} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-(s+1)\sqrt{\ln s} - \int\limits_2^{e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \frac{\ln(s+1)}{\ln p} dp} \geqslant e^{-(s+1)\sqrt{\ln s} - \ln(s+1) \int\limits_2^{e^{\sqrt[4]{\ln s}}} dp} =$$

$$= e^{-(s+1)\sqrt{\ln s} - \ln(s+1) e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \geqslant e^{-2(s+1)\sqrt{\ln s}} \tag{3.34}$$

при $s \geqslant \sigma_2$, определяемого из условия: при $s \geqslant \sigma_2$, $(s+1)\sqrt{\ln s} \geqslant \ln(s+1) e^{\sqrt[4]{\ln s}}$.

Из (3.28), (3.29), (3.31), (3.34) вытекает утверждение леммы.
Из (3.1), (3.2), (3.3) следует что

$$f_0(z) \ = \ 1 + \lambda\, z\, f_1(z). \tag{3.35}$$

Если предположить, что для всех p, $p \nmid b$, удовлетворяющих (3.18), не выполняется (1.13), т.е. в поле $\mathbb{Q}_p$ имеет место равенство $f_0(b) = 0$, то из (3.35) следует, что для всех таких p выполняется неравенство $f_1(b) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$. Тогда, по лемме 4, при $s \geqslant \sigma_1$

$$\prod \bigl|P_{N,1}(b) f_1(b)\bigr|_p \ \geqslant \ e^{-s\ln s \,-\, C_1 s}, \tag{3.36}$$

где произведение в левой части (3.36) взято по всем простым p, $p \nmid b$, удовлетворяющим (3.18). Так как, ввиду (3.7), (3.10),

$$u_N(b) = P_{N,0}(b) f_0(b) + P_{N,1}(b) f_1(b)$$

и по лемме 5 при $s \geqslant \sigma_2$

$$\prod \bigl|u_N(b)\bigr|_p \ \leqslant \ e^{-2s\ln s \,+\, 3s\sqrt{\ln s}}, \tag{3.37}$$

где произведение в левой части взято по всем p, удовлетворяющим условиям (3.18), при $s \geqslant \sigma_3$ из (3.36), (3.37) следует, что при некотором p, удовлетворяющем (3.18), $p \nmid b$ имеет место неравенство

$$\left|P_{N,0}(b)\, f_0(b)\right|_p \neq 0$$

вопреки сделанному предположению. Число σ_3 определяется условием

$$-s\ln s - C_1 s > -2s\ln s + 3s\sqrt{\ln s}$$

при $s > \sigma_3$. Это условие можно переписать в виде

$$\ln s > \mathrm{C}_1 + 3\sqrt{\ln s}$$

$\square$

Итак, доказано, что если $s \geqslant \sigma_3$, то в промежутке $\left[e^{\sqrt[4]{\ln s}},\ a+bs\right]$ есть простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство (1.13).

Рассматриваем теперь последовательность $s_k \in \mathbb{N}$ такую, что $s_1 \geqslant \sigma_3$ и для каждого $k \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}} \ > \ a + b\, s_k.$$

При этом отрезки

$$\left[e^{\sqrt[4]{\ln s_k}}\ ,\ a+b\, s_k\right]\ ,\ k = 1, 2, \ldots$$

не пересекаются и в каждом из них есть простое число p такое, что выполнено неравенство (1.13). Теорема доказана.

Замечание 2. *Числа σ_1, σ_2, σ_3 определяются условиями: при $s \geqslant \sigma_1$ выполнено $s > \left(|\lambda| - \frac{1}{2}\right)\ln s$, при $s \geqslant \sigma_2$ выполнены неравенства $s \geqslant \sigma_1$ и $(s+1)\sqrt{\ln s} \geqslant \ln(s+1)e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, при $s \geqslant \sigma_3$ выполнены неравенства $s \geqslant \sigma_2$ и $\ln s > C_1 + 3\sqrt{\ln s}$.*

3.2 Доказательство теоремы 7

Естественно использовать обозначения из теоремы 6. Из (3.12) следует, что для любого N и любого $\beta \in \mathbb{N}$

$$\Delta_N(\beta) = \begin{vmatrix} P_{N,0}(\beta) & P_{N,1}(\beta) \\ P_{N+1,0}(\beta) & P_{N+1,1}(\beta) \end{vmatrix} = \alpha_1 \dots \alpha_N \beta^{N-1} \neq 0.$$

Поэтому хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N,0}(\beta_s) & P_{N,1}(\beta_s) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N+1,0}(\beta_s) & P_{N+1,1}(\beta_s) \end{vmatrix}$$

отличен от 0. Выбираем $\mathbb{N}$ так, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ P_{N,0}(\beta_s) & P_{N,1}(\beta_s) \end{vmatrix} = P_{N,1}(\beta_s) \neq 0. \tag{3.38}$$

Лемма 6. *При $s \geqslant \sigma_1$ имеет место неравенство*

$$\prod |P_{N,1}(\xi)|_p > e^{-s\ln s - s\sqrt{\ln s} - C_3 s}, \tag{3.39}$$

где произведение в левой части (3.39) взято по всем простым числам p, $p \nmid b$, для которых

$$e^{\sqrt[4]{\ln s}} \leqslant p \leqslant a + bs, \tag{3.40}$$

а σ_1 и C_3 - положительные постоянные, зависящие от C_0, C_1, C_2, b, ξ.

Доказательство. Ввиду (3.38), по формуле произведения

$$\prod_p |P_{N,1}(\beta_s)|_p \cdot |P_{N,1}(\beta_s)| = 1, \tag{3.41}$$

где произведения в левой части (3.41) взято по всем простым числам p. Поэтому

$$\prod_p |P_{N,1}(\beta_s)| = \frac{1}{|P_{N,1}(\beta_s)|} \tag{3.42}$$

Из леммы 3 и условия (1.14), как в случае $N = 2s+1$, так и в случае $N = 2s+2$, получаем

$$|P_{N,1}(\beta_s)| \leqslant C_0^{2s+2}(C_0+1)\dots(C_0+s)\cdot(C_1 e^{\sqrt{\ln s}})^s. \tag{3.43}$$

Из (3.42), (3.43), $(a+1)\dots(a+s) = \frac{\Gamma(a+s+1)}{\Gamma(a+1)}$, и из известных свойств Γ-функций $\ln\Gamma(s+a) = \left(s+a-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right)$, $\quad s \to +\infty$ следует, что

$$\prod_p |P_{N,1}(\beta_s)|_p \geqslant e^{-s\ln s - s\sqrt{\ln s} - C_3 s}. \tag{3.44}$$

Докажем что в полях $\mathbb{Q}_p$ где $p \leqslant a+bs$, выполнено равенство

$$|P_{N,1}(\beta_s)|_p = |P_{N,1}(\xi)|_p\,. \tag{3.45}$$

Для этого используем разложение по формуле Тейлора:

$$P_{N,1}(\xi) = P_{N,1}(\beta_s) + P'_{N,1}(\beta_s)(\xi-\beta_s) + \dots$$

Все величины

$$\frac{P_{N,1}^{(k)}(\beta_s)}{k!}$$

представляют собой целые p- адические числа. Поэтому, ввиду (1.15), (3.44),

$$\left|\frac{P_{N,1}^{(k)}(\beta_s)}{(k!)}\right|_p \quad |\xi-\beta_s|_p^k < e^{-s\ln s - 2s\sqrt{\ln s} - C_1 s} < e^{-s\ln s - s\sqrt{\ln s} - C_3 s} < |P_{N,1}(\beta_s)|_p$$

при $s \geqslant \sigma_1$. Тем самым, равенство (3.45), а с ним и лемма 6, доказаны. □

Лемма 7. *При $s \geqslant \sigma_2$ выполнено неравенство*

$$\prod |u_N(\xi)|_p \leqslant e^{-2s\ln s + C_4 s\sqrt{\ln s}}, \tag{3.46}$$

где σ_2, C_4 - положительные постоянные, зависящие от C_0, C_1, C_2, b, ξ, а произведение в левой части (3.46) взято по всем простым числам p,

$p \nmid b$, удовлетворяющим (3.40).

Доказательство леммы 7 совпадает с доказательством леммы 4 из [31].

Так как, согласно формулам $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \, z^n = F(\lambda, 1, z)$, $f_1(z) = F(\lambda+1, 1, z)$ имеет место равенство

$$f_0(z) = 1 + \lambda z \; f_1(z), \tag{3.47}$$

то если предположить, что для p, $p \nmid b$, p удовлетворяющих (3.40) имеем $f_0(\xi) = 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$, то тогда в этих $\mathbb{Q}_p$, согласно (3.47), $f_1(\xi) \neq 0$.

По лемме 6, при $s \geqslant \sigma_1$

$$\prod \left| P_{N,1}(\xi) f_1(\xi) \right|_p \geqslant e^{-s \ln s - s\sqrt{\ln s} - C_3 s} \tag{3.48}$$

где произведение в левой части (3.48) взято по всем простым p, $p \nmid b$, удовлетворяющим (3.40).

Ввиду равенства $u_N(z) = P_{N,0}(z) u_0(z) + P_{N,1}(z) u_1(z)$, получаем

$$u_N(\xi) = P_{N,0}(\xi) f_0(\xi) + P_{N,1}(\xi) f_1(\xi)$$

и по лемме 7, при $s \geqslant \sigma_2$

$$\prod \left| u_N(\xi) \right|_p \; \leqslant \; e^{-2s \ln s + C_4 s \sqrt{\ln s}}, \tag{3.49}$$

где произведение в левой части (3.49) взято по тем же p, что и в (3.48), при $s \geqslant \sigma_3$ получаем что при некотором p, $p \nmid b$, удовлетворяющем (3.40), должно выполняться неравенство

$$\left| P_{N,0}(\xi) f_0(\xi) \right|_p \neq 0.$$

Итак, доказано что если $s \geqslant \sigma_3$, то в промежутке $\left[e^{\sqrt[4]{\ln s}}, a + bs \right]$ найдется простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство (1.16).

Для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть последовательность $s_k \in \mathbb{N}$ такую, что $s_1 \geqslant \sigma_3$ и для каждого $k \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}} > a + bs_k.$$

Теорема доказана. $\square$

В заключении приведем пример полиадического числа ξ, удовлетворяющего условиям теоремы.

Пусть выбраны числа

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k, \qquad n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, k$$

так, что для числа

$$s = \left[e^{n_k^2 \ln^2 n_k}\right] + 1$$

выполнено неравенство $s \geqslant \sigma_3$.

Положим

$$\beta_s = \sum_{i=1}^{k} n_i!$$

и пусть n_k было выбрано так, что

$$\beta_s \ \leqslant\ C_1 e^{\sqrt{\ln s}} \tag{3.50}$$

Рассматриваем простые числа p,

$$p \ \leqslant\ a + bs$$

и выбираем число n_{k+1} из условий

$$\ln p \left(\frac{n_{k+1}}{p-1} - \log_p n_{k+1}\right) \ >\ s \ln s + 2s\sqrt{\ln s} + C_2 s.$$

При этом для любого p, $p \ \leqslant\ a + bs$

$$\left|n_{k+1}!\right|_p \ <\ e^{-s\ln s - 2s\sqrt{\ln s} - C_2 s} \tag{3.51}$$

Осталось положить

$$\xi \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} n_k!$$

При этом

$$|\xi - \beta_s|_p \;=\; |n_{k+1}!|_p$$

и (3.50), (3.51) означают, что условия теоремы выполнены.

Глава 4. Некоторые применения полиадических чисел

4.1 Сравнение полиадического представления натуральных чисел с представлением с двойной базой

Задача представления натуральных чисел в виде сумм слагаемых определенного вида актуальна в теории чисел и ее приложениях [27], [24], [34], [35]). Интерес представляют среднее значение длины таких разложений и необходимое количество вспомогательных вычислений. В работе проводится сравнение следующих способов представления натуральных чисел. Во-первых, это разложение чисел с использованием двух оснований, т.е. представление чисел в виде суммы слагаемых вида $2^a 3^b$, a, b- неотрицательные целые числа, которое принято называть разложением DBNS.

Во-вторых, это представление чисел с помощью цепи с двойным основанием, т.е. представление числа N в виде

$$\begin{aligned} &N = \sum_{i=1}^{m} s_i 2^{a_i} 3^{b_i}, \text{где } s_i \in \{-1; 1\}, \\ &a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 0, \\ &b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Третье рассматриваемое представление назовем полиадическим или (факториальным) представлением числа N в виде

$$N = \sum_{n=1}^{r} a_n \cdot n!,$$
$$a_n \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$$

Представления натурального числа с двойной базой и в виде цепи с двойной базой

Напомним, что представлением натурального числа N с двойной базой называется его представление суммой слагаемых вида $2^a 3^b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{u\}$. На первом шаге выбирается наибольшее число w, имеющее указанный вид, которое не превосходит числа N. Затем также процедура применяется к числу N и так далее, пока не будет получено число 0.

Алгоритм разложения с двойной базой таков:

Вход: k, n-разрядное положительное целое число;
Выход: Последовательность $(\alpha_i, \beta_i)_{i \geqslant 0}$ такая что $k = \sum_{i=0}^{m} 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$
1: $\alpha_{max} \leftarrow \log_2 k$, $\beta_{max} \leftarrow \log_3 k$
2: while $k > 0$ do
3: Определить $z = 2^{\alpha_m} 3^{\beta_m}$ как наилучшее приближение к числу k и $(k - z) \geqslant 0$
4: print(α_m,β_m)
5: $k \leftarrow k - z$
6: $\alpha_{max} \leftarrow \log_2 k$, $\beta_{max} \leftarrow \log_3 k$

К недостаткам этого алгоритма можно отнести необходимость вычисления достаточно большого количества чисел вида $2^a 3^b$.

Кроме того, показатели получающихся при этом чисел $2^a 3^b$ распределены, как показывают примеры, несколько хаотично.

Для представления числа N в виде суммы слагаемых вида $2^a 3^b$ известна [30] асимптотическая оценка длины такого разложения числа N:

$$C_0 \frac{\log_2 N}{\log_2 \log_2 N},$$

где для любого $\varepsilon > 0$ при $N > N(\varepsilon)$ $C_0 = 5,70996 + 4,125 \cdot \varepsilon$.

Известно также [34], что существуют числа N такие, что длина их представления с помощью двойной базы не меньше, чем

$$\frac{C_0 \log_N}{(\log \log_N)(\log \log \log_N)},$$

например, число 103- наименьшее число, не имеющее представления (4.1) длины 2, число 4985 - наименьшее число, не имеющее представления (4.1) длины 3, число 641687 - наименьшее число не имеющее представления длины 4, а число 326552784 - наименьшее число, не имеющее представления длины 6.

Оценим количество вспомогательных вычислений используемых для разложения числа N с двойной базой. Оно равно количеству чисел вида $2^a 3^b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2^a 3^b \leqslant N$. Подобная задача рассматривалась Рамануджаном (см. [37])

Для полноты изложения приведем простое доказательство асимптотической оценки, главный член которой совпадает с главным членом оценки Рамануджана.

Теорема 1. *При $N \to +\infty$ для количества чисел $2^a 3^b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2^a 3^b \leqslant N$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\frac{(\ln N)^2}{\ln 2 \ln 9} + O(\ln N).$$

Доказательство. При $b = 0$ количество чисел вида 2^a, $2^a \leqslant N$, $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ равно $[\log_2 N] + 1$. При $b = 1$ количество чисел вида $2^a \cdot 3$, $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2^a \cdot 3 \leqslant N$ равно $\left[\log_2 \frac{N}{3}\right] + 1$ и.т.д., количество чисел вида $2^a \cdot 3^b$ равно $\left[\log_2 \frac{N}{3^b}\right] + 1$. Пусть l– наибольшее натуральное число с условием $3^l \leqslant N$. Тогда $l = [\log_3 N]$. Общее количество чисел вида $2^a \cdot 3^b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$2^a \cdot 3^b \leqslant N$ равно

$$\sum_{b=1}^{l} \left[\log_2 \frac{N}{3^b}\right] = \sum_{b=1}^{l} \left[\log_2 N - b \log_2 3\right].$$

Так как $l = [\log_3 N]$, замена $[\log_2 N - b\log_2 3]$ величиной $(\log_2 N - b\log_2 3)$ дает суммарную погрешность $O(\log_3 N) = O(\ln N)\,, \quad N \to \infty$

$$\sum_{b=1}^{[\log_3 N]} (\log_2 N - b\log_2 3) + O(\ln N)$$
$$= [\log_3 N] \log_2 N - \frac{[\log_3 N]\,([\log_3 N] + 1) \cdot \log_2 3}{2} + O(\ln N).$$

Снова заменяя целые части $[\log_3 N]$ на $\log_3 N$, получаем добавочную погрешность $O(\ln N)$ и, в итоге, формулу

$$\log_3 N \log_2 N - \frac{\log_3 N\,(\log_3 N + 1)\log_2 3}{2} + O(\ln N) =$$
$$= \frac{(\log_2 N)^2}{\log_2 3} - \frac{(\log_2 N)^2}{2\log_2 3} + O(\ln N) =$$
$$= \frac{(\log_2 N)^2}{2\log_2 3} + O(\ln N) = \frac{(\ln N)^2}{\ln 2 \ln 9} + O(\ln N),$$

что и утверждалось. □

Перейдем к цепям с двойной базой . Алгоритм разложения таков

Вход: k, n-разрядное положительное целое число;
Выход: Последовательность $(\alpha_i, \beta_i)_{i \geqslant 0}$ такая что $k = \sum_{i=0}^{m} 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$ причем $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m$ и $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_m$
1: $\alpha_{max} \leftarrow \log_2 k$, $\beta_{max} \leftarrow \log_3 k$
2: while $k > 0$ do
3: Определить $z = 2^{\alpha_m} 3^{\beta_m}$ как наилучшее приближение к числу k причем
$\alpha_{max} \geqslant \alpha_{m+1} \geqslant \alpha_m$ и $\beta_{max} \geqslant \beta_{m+1} \geqslant \beta_m$ и $(k - z) \geqslant 0$ где $\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}$

значения степеней на предыдущем шаге, полученные при определении наилучшего приближения к числу k

4: print(α_m,β_m)

5: $k \leftarrow k - z$

6: $\alpha_{max} \leftarrow \log_2 k$, $\beta_{max} \leftarrow \log_3 k$

Здесь показатели упорядочены, однако оценки длины разложения вида $O\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)$ не доказаны. Разумеется, количество вспомогательных вычислений то же, что и для разложения с двойной базой.

Полиадическое (факториальное) представление натурального числа

Любое натуральное число N допускает единственное представление в виде

$$N = \sum_{n=1}^{k} a_n \cdot n!,$$
$$a_n \in \{0; 1; \ldots; n\}, a_k \neq 0.$$

Алгоритм полиадического представления имеет вид

Вход: k, n-разрядное положительное целое число;

Выход: Последовательность $(a_i, i)_{i>0}$ такая что $k = \sum_{i=1}^{m} a_i\, i!$.

1: Определить i таким что $(i+1)! > k$, $i \in \mathbb{N}$.

2: while $k > 0$ do

3: Определить $a_i\, i!$ как наилучшее приближение к числу k где $1 \geqslant a_i \geqslant i$, $a_i \in \mathbb{N}$ и $(k - a_i\, i!) \geqslant 0$

4: print(a_i,i)

5: $k \leftarrow (k - a_i\, i!)$

6: $i \leftarrow (i - 1)$

Доказательство теоремы 8

Так как $a_k \neq 0$,

$$k! \leqslant N < (k+1)!,$$
$$\ln k! \leqslant \ln N < \ln(k+1)!,$$

Используя формулу Стирлинга, при достаточно больших N получаем:

$$k \ln k - k \leqslant \ln N \leqslant (k+1) \ln k,$$
$$k \ln k \sim \ln N,\ N \to \infty,$$
$$\ln k \sim \ln \ln N,\ N \to \infty,$$

откуда $k \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}$.

Таблица чисел вида $a_n \cdot n!$, $a_n = 0; 1, 2, \ldots, n$ для каждого n состоит из n чисел.

Размер таблицы чисел вида $a_n \cdot n!$, $a_n = 0; 1, 2, \ldots, n$, $n \leqslant k$ равен $1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Подставляя $k \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}$, $N \to \infty$ получаем утверждение теоремы.

Составление таблицы можно провести, используя только операцию сложения:

если известно число $n!$, то $2n! = n! + n!$, $3n! = 2n! + n!, \ldots, n \cdot n! = (n-1) \cdot n! + n!$, $(n+1)! = n \cdot n! + n!$.

Вычислительные эксперименты

Теоремы 1 и 8 показали, что лучшая известная асимптотическая оценка длины разложения натурального числа N с двойной базой несколько хуже, чем асимптотическая оценка длины полиадического разложения, а для оценок количества вспомогательных вычислений имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln N}{\ln \ln N}\right)^2 = o\left(\frac{(\ln N)^2}{\ln 2 \ln 9}\right), \quad N \to +\infty.$$

Однако выше точная асимптотическая оценка для длины полиадического разложения сравнивалась с наилучшей оценкой для разложения с двойной базой, которую удается доказать. Кроме того, интерес представляют длины разложений чисел, величина которых находится в некотором заданном диапазоне. Поэтому проводились вычислительные эксперименты, в которых сравнивались длины полученых разложений

Приведем несколько примеров разложений чисел указанными выше способами.

$$p_{64} = 3490529510847650949147849619903898133417764638493387843990820577$$

Разложение этого числа также представлено в работе [24].
Для разложения ниже приведенный чисел требуются вспомогательные таблицы размером: для $a_k \cdot k!$ - 1285, для $2^a \cdot 3^b$ - 28837, для цепи $2^a \cdot 3^b$ - 28837. Результаты вычислений приведены в таблицах.

Сверху каждой таблицы указан вид слагаемых.

$a_k \cdot k!$:

$(5{\cdot}49!)$	$(36{\cdot}48!)$	$(8{\cdot}47!)$	$(27{\cdot}46!)$	$(13{\cdot}45!)$	$(44{\cdot}44!)$
$(9{\cdot}43!)$	$(12{\cdot}42!)$	$(35{\cdot}41!)$	$(26{\cdot}40!)$	$(10{\cdot}39!)$	$(33{\cdot}38!)$
$(29{\cdot}37!)$	$(12{\cdot}36!)$	$(7{\cdot}35!)$	$(17{\cdot}34!)$	$(7{\cdot}33!)$	$(27{\cdot}32!)$
$(16{\cdot}31!)$	$(11{\cdot}30!)$	$(5{\cdot}29!)$	$(1{\cdot}28!)$	$(15{\cdot}27!)$	$(2{\cdot}26!)$
$(22{\cdot}25!)$	$(6{\cdot}24!)$	$(6{\cdot}23!)$	$(15{\cdot}22!)$	$(3{\cdot}21!)$	$(11{\cdot}20!)$
$(5{\cdot}19!)$	$(5{\cdot}17!)$	$(6{\cdot}16!)$	$(9{\cdot}15!)$	$(3{\cdot}14!)$	$(9{\cdot}13!)$
$(6{\cdot}12!)$	$(11{\cdot}11!)$	$(6{\cdot}10!)$	$(5{\cdot}9!)$	$(5{\cdot}8!)$	$(7{\cdot}7!)$
$(1{\cdot}6!)$	$(4{\cdot}5!)$	$(4{\cdot}4!)$	$(1{\cdot}1!)$		

$2^a \cdot 3^b$:

(51,101)	(63,88)	(55,86)	(21,103)	(22,97)	(79,56)
(46,72)	(125,18)	(27,73)	(109,16)	(40,53)	(76,26)
(17,59)	(54,31)	(69,16)	(50,24)	(45,23)	(40,21)
(11,35)	(21,25)	(7,28)	(38,5)	(12,17)	(18,10)
(14,9)	(5,10)	(10,4)	(8,3)	(6,2)	(0,0)

Цепь $2^a \cdot 3^b$:

(51,101)	(44,100)	(44,96)	(43,94)	(40,91)	(39,89)
(39,87)	(39,82)	(34,81)	(33,79)	(33,76)	(29,76)
(25,76)	(22,76)	(21,75)	(21,72)	(19,69)	(17,65)
(15,64)	(11,64)	(8,64)	(4,64)	(3,61)	(1,59)
(0,57)	(0,54)	(0,54)	(0,53)	(0,50)	(0,50)
(0,46)	(0,45)	(0,44)	(0,41)	(0,39)	(0,38)
(0,37)	(0,36)	(0,35)	(0,32)	(0,32)	(0,31)
(0,30)	(0,29)	(0,27)	(0,26)	(0,26)	(0,24)
(0,23)	(0,22)	(0,21)	(0,17)	(0,17)	(0,13)
(0,10)	(0,8)	(0,5)	(0,5)	(0,3)	(0,2)
(0,0)					

$$p_{64} = 9340255901486795094418746991098389314371676483943378489309285077$$

$a_k \cdot k!$:

($15 \cdot 49!$)	($17 \cdot 48!$)	($19 \cdot 47!$)	($14 \cdot 46!$)	($4 \cdot 45!$)	($7 \cdot 44!$)
($8 \cdot 43!$)	($14 \cdot 42!$)	($28 \cdot 41!$)	($6 \cdot 40!$)	($31 \cdot 39!$)	($13 \cdot 38!$)
($20 \cdot 37!$)	($31 \cdot 36!$)	($2 \cdot 35!$)	($22 \cdot 34!$)	($15 \cdot 33!$)	($29 \cdot 32!$)
($22 \cdot 31!$)	($27 \cdot 30!$)	($8 \cdot 29!$)	($17 \cdot 28!$)	($9 \cdot 27!$)	($17 \cdot 26!$)
($9 \cdot 25!$)	($14 \cdot 24!$)	($1 \cdot 23!$)	($12 \cdot 22!$)	($11 \cdot 21!$)	($9 \cdot 20!$)
($16 \cdot 19!$)	($9 \cdot 18!$)	($7 \cdot 17!$)	($11 \cdot 16!$)	($8 \cdot 15!$)	($1 \cdot 14!$)
($10 \cdot 13!$)	($11 \cdot 12!$)	($3 \cdot 10!$)	($6 \cdot 9!$)	($3 \cdot 7!$)	($2 \cdot 6!$)
($1 \cdot 4!$)	($2 \cdot 3!$)	($1 \cdot 1!$)			

$2^a \cdot 3^b$:

(54,100)	(7,125)	(0,124)	(10,111)	(50,81)	(142,17)
(61,62)	(19,82)	(62,50)	(22,69)	(78,28)	(53,39)
(45,40)	(31,44)	(16,49)	(58,17)	(33,28)	(41,19)
(39,14)	(15,25)	(5,28)	(0,28)	(35,1)	(7,13)
(10,8)	(2,10)	(4,4)	(0,3)	(2,0)	

Цепь $2^a \cdot 3^b$:

(203,6)	(198,4)	(198,1)	(194,1)	(191,0)	(189,0)
(186,0)	(184,0)	(182,0)	(179,0)	(177,0)	(171,0)
(170,0)	(166,0)	(162,0)	(161,0)	(154,0)	(151,0)
(150,0)	(147,0)	(145,0)	(141,0)	(138,0)	(136,0)
(135,0)	(132,0)	(130,0)	(129,0)	(126,0)	(123,0)
(109,0)	(107,0)	(106,0)	(102,0)	(101,0)	(98,0)
(96,0)	(94,0)	(90,0)	(88,0)	(86,0)	(78,0)
(72,0)	(69,0)	(67,0)	(65,0)	(59,0)	(56,0)
(53,0)	(51,0)	(50,0)	(47,0)	(45,0)	(40,0)
(33,0)	(30,0)	(28,0)	(26,0)	(24,0)	(22,0)
(20,0)	(17,0)	(14,0)	(11,0)	(9,0)	(8,0)
(5,0)	(3,0)	(2,0)	(0,0)		

Для сравнения реальных величин длин различных типов разложений было проведено 10 выборок по 100 чисел каждая. Разрядность каждого

из чисел выборки колеблется от 159 до 160 разрядов.
Для получения чисел использовался программный генератор псевдослучайных чисел для генерирования каждого разряда чисел выборок. В таблицах приведены средние значения длин разложений.

	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 5
$a_k \cdot k!$	81	81	82	81	81
$2^a \cdot 3^b$	61	61	61	61	62
Цепь $2^a \cdot 3^b$	107	110	97	111	104

	Выборка 6	Выборка 7	Выборка 8	Выборка 9	Выборка 10
$a_k \cdot k!$	81	81	81	81	81
$2^a \cdot 3^b$	61	61	61	62	61
Цепь $2^a \cdot 3^b$	112	108	107	113	104

В этих пределах требуются таблицы размером: для $a_k \cdot k!$ - 5151, для $2^a \cdot 3^b$ - 175867, для цепи $2^a \cdot 3^b$ - 175867.

4.2 Статистические свойства цифр полиадического представления

Теорема 2. *Любое отрицательное целое число, представленное полиадическим рядом, изображается в любом поле $\mathbb{Q}_p$ рядом, все члены которого, начиная с некоторого места, равны $p-1$.*

Доказательство. В любом поле $\mathbb{Q}_p$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! = -1.$$

Для доказательства этого равенства заметим, что в любом поле $\mathbb{Q}_p$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!$. Действительно, для сходимости ряда в поле $\mathbb{Q}_p$ необходимо и достаточно, чтобы общий член этого ряда стремился к 0 по p-адической метрике. Так как степень, в которой число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна

$$\frac{n-S_n}{p-1},$$

где S_n- сумма цифр p-ичного разложения числа n, имеет место равенство

$$|n!|_p = p^{-\frac{n-S_n}{p-1}},$$

из которого следует, что $|n!|_p \to 0$ при $n \to \infty$ и исследуемый ряд сходится. Тогда $\sum n \cdot n! = \sum (n+1)! - \sum n! = -1$. В любом поле $\mathbb{Q}_p$ число -1 имеет каноническое разложение

$$p-1+(p-1)p+(p-1)p^2+\ldots$$

Рассмотрим теперь число $-k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $-k = -1-(k-1)$. Представим число $k-1$ в позиционной системе счисления с основанием p. Оно будет иметь некоторый вид $a_0+a_1p+\ldots+a_mp^m$, где все $a_i \leqslant p-1$. Поэтому

$$(p-1-a_0)+(p-1-a_1)p+\ldots+(p-1-a_m)p^m+(p-1)p^{m+1}+\ldots$$

является искомым разложением числа - k, все коэффиценты которого, начиная с $(m+1)$-го, равны $p-1$. Теорема доказана. $\square$

Если $g = p_1^{k_1}\ldots p_m^{k_m}$, то можно ввести аналогичное p-адическому нормированию g-адическое псевдонормирование рациональных чисел. Оно определяется следующим образом: Пусть r, s и g - целые числа, такие что

$$r \neq 0, \quad s \geqslant 1, \quad \text{НОД}(r,s)=1, \quad g \geqslant 2.$$

Тогда существует единственное целое число f и пара целых чисел R, S, таких что

$$g^f\frac{r}{s} = \frac{R}{S}, \quad g \nmid R, \quad \text{НОД}(R,S)=\text{НОД}(g,S)=1.$$

при этом для $a = \frac{r}{s}$, при $a \neq 0$, мы положим

$$|a|_g = g^f, \quad |0|_g = 0.$$

Так определенная функция $|x|_g$ называется g-адической псевдо-нормой x. Эта псевдонорма обладает следующими свойствами:

1. $|a|_g = 1 \Leftrightarrow a = \frac{r}{s}$, где $g \nmid r$, НОД$(g, s) = 1$.
2. $|a|_g = g^f \Leftrightarrow \left|g^f a\right|_g = 1$.
3. Для каждого целого ϕ $\left|g^{\phi} a\right|_g = g^{-\phi} \left|a\right|_g$.
4. $|a \pm b|_g \leqslant max(|a|, |b|)$ (неравенство треугольника).
5. $|ab|_g \leqslant |a|_g |b|_g$.

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по этой псевдонорме дает кольцо g- адических чисел. Имеет место теорема(см. [39])

$$\mathbb{Q}_g = \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_m}$$

Следствие (теоремы 2). *Для любого $g \in \mathbb{N}$, $g > 1$ и любого отрицательного целого числа, заданного каноническим полиадическим рядом, разложение этого числа в кольце $\mathbb{Q}_g$ имеет, начиная с некоторого места, все цифры, равные $g - 1$.*

Доказательство. Действительно, для числа -1 в кольце $\mathbb{Q}_g$ справедливо разложение

$$-1 = (g-1) + (g-1)g + (g-1)g^2 + \ldots.$$

Для произвольного целого числа $-k$, $k \in \mathbb{N}$, доказательство дословно повторяет теорему 1. $\square$

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим число $\sum_{n=1}^{N} n \cdot n! = (N+1)! - 1$.

Теорема 3. *p-ичное разложение числа $(N+1)! - 1$ имеет не более, чем $\frac{N}{p-1}$ начальных цифр, равных $p - 1$.*

Доказательство. Действительно, как отмечено выше, число $(N+1)!$ делится на число p в степени, равной $\frac{N+1-S_{N+1}}{p-1}$. Поэтому ровно столько цифр в p-ичном разложении числа $(N+1)!-1$ и равны $p-1$. Так как $S_{N+1} \geqslant 1$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие. *Десятичное разложение числа* $(N+1)!-1$ *имеет не более, чем* $\frac{N}{4}$ *девяток в начале.*

Доказательство. Действительно, $N+1$ делится не более, чем на 2^N и на $5^{\left[\frac{N}{4}\right]}$. Поэтому оно делится не более, чем на $10^{\left[\frac{N}{4}\right]}$. $\square$

В этой главе представлены данные о статистических свойствах совокупностей цифр десятичных разложений некоторых чисел вида

$$M = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Именно, рассматриваются числа

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} n \cdot n! = (N+1)! - 1, \tag{4.2}$$

$$B_N = \sum_{n=1}^{N} n!, \tag{4.3}$$

Разумеется, имеет смысл рассматривать не все цифры чисел (4.2), (4.3). По следствию теоремы 3 примерно $\frac{N}{4}$ последних цифр числа A_N равны 9. Поэтому рассматриваются только цифры "головной части"десятичных разложений чисел (4.2).

В вычислительных экспериментах для значений $N \in [4500!; 5000!]$ рассматривались цифры чисел (4.2) и (4.3), за исключением "хвоста"из повторяющихся цифр в конце числа (4.2), и проверена гипотеза о равномерном распределении цифр рассматриваемых чисел.

Данные вычислительных экспериментов

Далее будут приведены результаты экспериментов выборки чисел $N = \{4361, 4471\}$ для десятичных разложений чисел (4.2) и (4.3). Использовался критерий χ^2.

Для A_{4471} получаем следущие результаты:
Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1297	1349	1306	1297	1409
Средние значения позиций	6640	6753	6604	6700	6789

Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1333	1337	1334	1316	1290
Средние значения позиций	6679	6637	6363	6751	6409

Всего чисел: 13268
χ^2: 8,38378052457039

Для A_{4361} получаем следущие результаты:
Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1294	1209	1292	1328	1258
Средние значения позиций	6458	6341	6540	6565	6601

Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1330	1307	1300	1275	1302
Средние значения позиций	6347	6344	6499	6363	6413

Всего чисел: 12895
χ^2: 8,84412563008918

Для B_{4361} получаем следущие результаты:
Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1397	1378	1395	1407	1461
Средние значения позиций	7070	6768	6967	6934	7160

Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1346	1380	1417	1389	1411
Средние значения позиций	6726	6797	6877	6750	6904

Всего чисел: 13981
χ^2: 5,79279021529218

Для B_{4471} получаем следующие результаты:
Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1455	1394	1376	1471	1472
Средние значения позиций	7030	7182	7173	7313	7251

Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1375	1388	1484	1482	1485
Средние значения позиций	7153	7286	7349	7158	7015

Всего чисел: 14382
χ^2: 5,79279021529218

Некоторые табличные критические значения критерия χ^2.

Число степеней свободы	Уровни значимости		
	0,10	0,05	0,01
9	14,684	16,919	21,666
10	15,987	18,307	23,209

Приведенные для критерия χ^2 для 9 степеней свободы статистические данные позволили сделать вывод о том, что цифры рассмотренных значений равномерно распределены.

Заключение.

Работа посвящена трансцендентности и алгебраической независимости в областях, представляющих собой прямые произведения бесконечной совокупности полей p–адических чисел.

Основные результаты, полученные в диссертации состоят в следующем:

- Доказана новая общая теорема об арифметических свойствах значений F–рядов удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений. Доказанная общая теорема применена к рядам

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\dots(a+b(n-1))$$

- Проведено сравнение полиадического разложения с разложениями с двойной базой и цепи с двойной базой. Дана асимптотическая оценка длины полиадического разложения и количества необходимых вспомогательных вычислений. Проведены численные эксперименты сравнения этих разложений в диапазонах, представляющих практический интерес.

- Проведено статистическое испытание цифр некоторых полиадических разложений натуральных чисел.

Дальнейшая разработка тематики, которой посвящена диссертация даст возможность простого и быстрого получения псевдослучайных последовательностей целых чисел.

Литература

[1] Siegel C.L.Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen//Abh.Preuss Acad.Wiss.,Phys,-Math.K1,-1929-1930.-№1.-P. 1–70.

[2] Siegel C.L. Transcendental numbers.-Princeton:Princeton Univ.Press:1949.

[3] Adams W. Transcendental numbers in the p – adic domain//Amer.J ,Math.-1966.-V.88.-279–307 .

[4] Bombieri E. On G – functions// Recent Progress in Analytic Number Theory.V.2.London:Academic Press,1981.-P.1–68.

[5] Шидловский А.Б. О трансцендентносги и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов//ДАН СССР.-1954.-Т.96,№4.-С.697–700.

[6] Шидловский А.Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций/ДАН СССР.-1955.— Т.100,№2.-С.221–224.

[7] Шидловский А.Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций//Изв.АН СССР.Сер.мат.- 1959.-Т.23,№1 -С.35–66.

[8] Шидловский А. Б., «Трансцендентные числа.», *М.: "Наука"*,1987, 417с.

[9] Нурмагомедов М.С. Об арифметических свойствах значений одного класса аналитических функций//Мат.сб.-1972.— Т.85(127), №3(7).-С.339–365.

[10] Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса/Мат.сб -1974.-Т.95(137),№3(11).—С.396–417.

[11] Chudnovsky G.V. On applications of Diophantine approximations //Proc.Natl.Acad.Sci.USA.-1985.-V.81.—P.726l–7265.

[12] Flicker Yu. On p–adic G–functions//J.London Math.Soc.-1977.-V.15,№3.-P.395–4O2.

[13] Матвеев Е.М. Линейные формы от значений G – функций и диофантовы уравнения//Мат.сб.-1982.- Т.117(159),№3 .-С.379–396.

[14] Боревич З.И.,Шафаревич И.Р. Теория чисел.-М.:Наука,1972.

[15] Mahler K. Über transzendente p – adische Zahlen//Compos.Math.-1935.-V.2.-P.259–275.

[16] André Y. G – Functions and Geometry.Aspects of Math.-1989.-V.E13,Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden

[17] André Y. G – fonctions ét transcendance//J.reine angew.Math.-1996.-V.476.-P.95–125.

[18] André Y. Séries Gevrey de type arithmétique//Inst. Math.,Jussieu.

[19] Чирский В.Г. О нетривиальных глобальных соотношениях//Вестн.МГУ.Сер. 1.Математика,механика.- 1989,№5.-с.33–36.

[20] Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций// Мат.замегки.-1992.-т.52.-№2.- с. 125–131.

[21] Чирский В.Г. Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей//Вестн.МГУ.Сер.1.Математика,механика.-1994.-№4.-с.З5–39.

[22] Чирский В.Г. О глобальных соотношениях для гипергеометрических рядов//Труды семин. им. И.Г.Петровского.- 1995,№18.-с.204–212.

[23] Чирский В.Г. О линейных глобальных соотношениях//Вестн. МГУ. Сер.1.Математика,механика.-1998,№4 -с.70–72.

[24] Dimitrov V. S., Jullien G. A. and Miller W. C., "An Algorithm for Modular Exponentiation". Inform. Process. Lett. 66 (1998), no. 3, 155 – 159.

[25] R. Tijdeman On the maximal distance between integers composed of small primes. – Composito mathematica, Vol. 28, Fasc. 2, 1974, pag. 129 – 162.

[26] Салихов В. Х. О мере иррациональности log 3. – Докл. АН, 2007, т. 417, №6, стр. 753 – 755.

[27] Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М. Наука. 1971.

[28] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М. Наука. 1984 .

[29] Новоселов Е. В. Топологическая теория делимости целых чисел. Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та 3, 1960, С. 3 – 23.

[30] Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований. М. Чебышевский сборник. 2013, №1.

[31] В. Г. Чирский, В.Ю. Матвеев. О ряде из произведений членов арифметической прогрессии. Преподаватель XXI век.

[32] V. G. Chirskii «On the arithmetic properties of polyadic integers», International Mathematical Forum, Vol. 8, 2013, no. 37, 1793 – 1796

[33] Ю. В. Нестеренко. Приближения Эрмита–Паде обобщённых гипергеометрических функций. Матем. сборник, т.185, №10, 1994, 48 – 72 .

[34] Dimitrov V. S., Rowe E. W. Lower bounds on the lenghts of double base representations. Proc. Amer. Math. Soc. v.139, №10, 2011, pp. 3423 – 3430

[35] Edward B. Burger, David C. Clyde, Cory H. Colbert, Gea Hyun Shin and Zhaoning Wang (Williamstown, MA) A generalization of a theorem of Lekkerkerker to Ostrowski's decomposition of natural numbers. ACTA ARITHMETICA 153.3 (2012) pp. 217 – 249

[36] Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y., «Effective estimates for global relations on Euler-type series», 2004, *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, №2, pp. 241 – 260.

[37] Г. Харди «Двенадцать лекций о Рамануджане.» – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 334 с.

[38] Д. Э. Кнут ,Искусство программирования, том 2. «Получисленные алгоритмы» – 3-е изд. – М.: «Вильямс», 2007.

[39] Kurt Mahler, Introduction to p-adic numbers and their functions, London, «Cambridge University Press», 1973.

[40] Т. Р. Азаматов, «Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений», УМН, 62:5(377) (2007), 145 – 146

[41] А. И. Галочкин, «Об алгебраической независимости значений E–функций в некоторых трансцендентных точках», Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем., мех.,1970, №5, 58 – 63.

[42] Чирский В. Г., «Арифметические свойства целых полиадических чисел», 2015, *Чебышевский сборник*, том 16, выпуск 1, с. 254 – 264.

[43] Салихов В. Х., «Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка», 1973, *Матем. заметки.*, т.13., №1, с. 29 – 40.

[44] Чирский В. Г., «Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами», 2014, *Доклады Академии наук, математика*, том 439, №6, с. 677 – 679.

[45] В. Г. Чирский, «Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series», Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 98, № 3, 2018, с. 589–591

[46] V. G. Chirskii, E. S. Krupitsyn, «On Liouville Decomposition of Polyadic Integers», Global Journal of Science Frontier Research (GJSFR): F Mathematics and Decision Sciences, том 18, № 1, 2018, с. 33–36

[47] В. Г. Чирский, «Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F–рядов», Доклады Российской Академии Наук, сер. математическая, том 483, № 3, 2018, с. 257–259

[48] V. G. Chirskii, A. Yu Nesterenko,«An approach to the transformation of periodic sequences», Discrete Mathematics and Applications, издательство V S P (Netherlands), том 27, № 1, 2017, с. 1–6 DOI

[49] V. G. Chirskii, «Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients», Izvestiya. Mathematics, издательство American Mathematical Society (United States), том 81, № 2,2017 , с. 444–461 DOI

[50] V. G. Chirskii, «Representation of positive integers by summands of a certain form», Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, издательство Springer Verlag (Germany), том 298, № 1,2017 , с. 70–73 DOI

[51] V. G. Chirskii, «Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko», Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 24, № 2, 2017 , с. 153–171 DOI

[52] В. Г. Чирский, «Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами», Известия РАН. Серия математическая, том 81, № выпуск 2, 2017 , с. 215–232 DOI

[53] В. Г. Чирский, «Периодические и непериодические конечные последовательности», Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого» (Тула), том 18, № 2, 2017, с. 275–278 DOI

[54] В. Г. Чирский, «Представление натуральных чисел слагаемыми определённого вида», Современные проблемы математики, № 24, 2017, с. 81–84

[55] В. Г. Чирский, «О преобразованиях периодических последовательностей», Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого» (Тула), том 17, № 3, 2016 ,с. 180–185

[56] V. G. Chirskii, «Arithmetic properties of Euler series», Moscow University Mathematics Bulletin, издательство Allerton Press Inc. (United States), том 70, № 1, 2015, с. 41–43 DOI

[57] P. Bundschuh , V. G. Chirskii, «Estimating polynomials jxer Z_p at points from C_p», Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, том 5, № 1–2, 2015, с. 14–20

[58] В. Г. Чирский, «Арифметические свойствацелых полиадических чисел», Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого» (Тула), том 16, № 1, 2015, с. 254–264

[59] В. Г. Чирский, «Об арифметических свойствах ряда Эйлера», Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), № 1, 2015, с. 59–61

[60] В. Г. Чирский, А. Ю. Нестеренко, «Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей», Дискретная математика, издательство Наука (М.), том 27, № 4, 2015, с. 150–157

[61] V. G. Chirskii, «Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients», Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 90, № 3, 2014,с. 766–768 DOI

[62] V. G. Chirskii, «On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters», Izvestiya. Mathematics, издательство American Mathematical Society (United States), том 78, № 6, 2014, с. 1244–1260

[63] В. Г. Чирский, «Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами», Доклады Академии наук, издательство Наука (М.), том 459, № 6, 2014, с. 677–679

[64] В. Г. Чирский, «Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами», Известия РАН. Серия математическая, том 78, № 6, 2014, с. 193–210

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[65] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев, «О представлениях натуральных чисел», 2013, *Вестник Московского университета*, сер. 1, математика, механика. №6 с 57– 59; "Representations of positive integers", Moscow University Mathematics Bulletin, 68:6 (2013), 307 — 308. (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в РИНЦ
Импакт - фактор 0,348 (за 2018 год)

[66] В. Ю. Матвеев «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», 2015, *Чебышевский сборник*, т.16 выпуск 3, с 339 – 354.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[67] В. Ю. Матвеев «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», 2016, *Чебышевский сборник*, т.17 выпуск 3, с 166 – 177.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[68] Матвеев В. Ю., «Свойства элементов прямых произведений полей», 2019, *Чебышевский сборник*, том 20, выпуск 2 (70), с. 386 – 393.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[69] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев «О представлениях натуральных чисел», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 1(45), 2013, с 75–85 (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[70] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев «О некоторых свойствах полиадических разложений», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 2(46), 2013, с 164–172 (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)