МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

МАТВЕЕВ ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПОЛЕЙ

Специальность 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Владимир Григорьевич Чирский
Официальные оппоненты:	Добровольский Николай Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет, зав. кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии
	Горелов Василий Александрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», доцент кафедры математического и компьютерного моделирования
	Пачев Урусби Мухамедович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

Защита диссертации состоится 16 октября 2020 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова"по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико–математический факультет, аудитория 14-08.
E-mail:VGChdissovet@yandex.ru
В связи с эпидемиологической обстановкой защита может пройти в дистанционном режиме, ссылка на трансляцию в сети появится на странице диссертации в системе Истина https://istina.msu.ru/dissertations/302880935/
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27 и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/302880935/

Автореферат разослан 16 сентября 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета МГУ.01.07 ФГБОУ ВО МГУ

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности.

Работа посвящена трансцендентности и алгебраической независимости в областях, представляющих собой прямые произведения бесконечной совокупности полей p–адических чисел.

В 1873 году Ш.Эрмит создал аналитический метод, используя который ему удалось доказать трансцендентность одной из классических постоянных в математике - числа e.

Развивая метод Эрмита, Ф.Линдеман в 1882 году доказал трансцендентность числа π , тем самым получив отрицательное решение проблемы квадратуры круга.

В 1949 году К.Зигель [1] изложил свой метод в виде общей теоремы об алгебраической независимости значений в алгебраических точках совокупности E–функций, удовлетворяющей системе линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами – рациональными функциями. Эта теорема сводит доказательство утверждения об алгебраической независимости значений E–функций в алгебраических точках к проверке некоторого достаточного аналитического условия, названного им условием нормальности, для совокупностей произведений степеней рассматриваемых функций. Самому Зигелю удалось проверить выполнение условия нормальности только для совокупностей E–функций, каждая из которых удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого или второго порядка.

В 1955 году А.Б.Шидловский [2] [3] опубликовал критерий алгебраической независимости значений в алгебраических точках E– функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений.

Теория E–функций получила значительное развитие в работах Ю.В. Нестеренко, В.Х. Салихова, А.И. Галочкина, В.А. Олейникова, И.И. Белогривова, Ю.Н. Макарова, В.А. Горелова, С.Ленга, Д.Бертрана, Нгуен Тьен Тая, и многих других.

В 1929 г. К.Зигель [4] указал, что его метод можно применять при исследовании некоторых арифметических свойств значений ещё одного класса аналитических функций. Степенные ряды, определяющие эти функции, имеют конечный радиус сходимости. Он назвал эти функции G–функциями. Функ-

[1] *Siegel C. L.* Transcendental numbers.-Princeton:Princeton Univ.Press:1949.

[2] *Шидловский А. Б.* О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций /ДАН СССР.-1955.–Т.100,№2.-С.221–224.

[3] *Шидловский А. Б.* О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций //Изв.АН СССР.Сер.мат.-1959.-Т.23,№1 -С.35–66.

[4] *Siegel C. L.* Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen //Abh.Preuss Acad.Wiss.,Phys,-Math.K1,-1929-1930.- №1.-P. 1–70.

ция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

называется G–функцией, если коэффициенты c_n удовлетворяют тем же условиям, что приведены в определении E–функции в узком смысле.

В 1974 году А.И.Галочкин [5] опубликовал теоремы, доказанные им для G–функций, обладающих так называемым условием сокращения факториалов. В 1984 г.Г.В.Чудновский [6] доказал, что это условие выполнено для всех G–функций:

Теория трансцендентных чисел в p – адической области получила меньшее развитие, чем теория трансцендентных чисел в комплексной области. Отметим её фактическое начало – работу Малера [7] и содержащую некоторый обзор этой теории статью Адамса[8]. В 1981 г. Э.Бомбиери в большой работе [9] ввёл понятие глобального соотношения. Дадим это определение.

Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P\left(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)\right) = 0 \tag{1}$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ ($\mathbb{K}_v$ обозначает пополнение поля $\mathbb{K}$ по нормированию v продолжающему соответствующее p–адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$).

Глобальным соотношениям для G-функций посвящены работы И.Андре [10] [11].

В.Г. Чирский ввел в рассмотрение еще один класс рядов,к которому применимо обобщение метода Зигеля – Шидловского.

Степенной ряд называется F – рядом , если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Класс $F\left(\mathbb{K}, c_l, c_2, c_3, q\right)$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

Пусть:

[5] *Галочкин А. И.* Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса /Мат.сб -1974.-Т.95(137),№3(11).—С.396–417.

[6] *Chudnovsky G. V.* On applications of Diophantine approximations //Proc.Natl.Acad.Sci.USA.-1985.-V.81.—P.726l–7265.

[7] *Mahler K.* Über transzendente p – adische Zahlen//Compos.Math.-1935.-V.2.-P.259–275.

[8] *Adams W.* Transcendental numbers in the p – adic domain //Amer.J ,Math.-1966.-V.88.-279–307.

[9] *Bombieri E.* On G – functions// Recent Progress in Analytic Number Theory.V.2.London:Academic Press,1981.-P.1–68.

[10] *André Y.* G – Functions and Geometry.Aspects of Math.-1989.- V.E13,Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden

[11] *André Y.* G – fonctions ét transcendance//J.reine angew.Math.-1996.-V.476.-P.95–125.

1) $a_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) $\overline{|a_n|} = O\left(e^{c_1 n}\right)$, $n \to \infty$ (где для алгебраического числа α символ $\overline{|\alpha|}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);

3) существует последовательность натуральных чисел

$$d_n = q^n d_{0,n},$$

где $q \in \mathbb{N}$, такая, что

$$d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, ; n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не большие $c_2 n$, причём

$$ord_p\ d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right).$$

F–ряды естественным образом дополняют классы – и G – функций Зигеля, представляющих собой степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ соответственно. Более того, сразу ясно, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ является F – рядом, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – G- функция, а $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ – E - функция Зигеля.

Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса F- рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum a_n \cdot n! z^n,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| = O\left(e^{c_1 n}\right)$, $n \to \infty$, где c_1, c_2, c_3- некоторые постоянные.

Далее ряды $f_1(z) \equiv 1, \ldots, f_m(z)$ принадлежат этому классу.

Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, k = 1, \ldots, m, Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z).$$

Приведем несколько упрощенную формулировку теоремы 1. [12]

Пусть F-ряды $f_1(z) \equiv 1, \ldots, f_m(z)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$ и составляют решение системы

$$D:\ y'_i = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}(z) y_i,\ i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

[12] *Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y.* Effective estimates for global relations on Euler-type series, 2004, *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, №2, pp. 241 – 260.

$A_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, число ξ отлично от особых точек системы (2). Пусть форма $L(y_1, \ldots, y_m)$ определена равенством $L(y_1, \ldots, y_m) = h_1 y_1 + \cdots + h_m y_m$. Тогда существует эффективная постоянная H_0 такая, что для любого $H \geqslant H_0$ существуют эффективно вычисляемые границы $P_н(\ln H)$, $P_в(\ln H)$ и простое число p, удовлетворяющее неравенствам

$$P_{\text{н}}(\ln H) < p < P_{\text{в}}(\ln H)$$

такое, что

$$\left|L(\overline{f}(\xi))\right|_p > H^{-m-\frac{m+3+2m\,c_5}{\sqrt{\ln\ln H}}} \tag{3}$$

Актуальность темы диссертации определяется тем что в ней получены теоремы об арифметических свойствах почти полиадических рядов из определенного класса. Они получены как с помощью модификации метода Зигеля – Шидловского так и с помощью построения точных приближающих форм. Это направление активно исследуется в работах российских и зарубежных математиков.

Цели и задачи работы.

Целью работы является получение общих теорем о бесконечной алгебраической независимости и бесконечной линейной независимости некоторых почти полиадических рядов и применение этих теорем к конкретным рядам, представляющим интерес.

Второй целью было проведение исследования полиадического разложения натурального чисела в сравнении с разложениями с двойной базой и исследование статистических свойств цифр десятичных разложений некоторых полиадических представлений некоторых натуральных чисел.

Объект и предмет исследования.

Объектом исследования является полиадические и почти полиадические числа. Предмет исследования – доказательство бесконечной алгебраической независимости сокупности некоторых почти полиадических чисел. Сравнение полиадического разложения с разложением с двойной базой. Изучение статистических свойств цифр полиадических разложений натуральных чисел.

Методы исследования.

В диссертации использованы методы теории трансцендентных чисел: модификация метода Зигеля–Шидловского, методы построения точных приближающих форм, методы полиадического анализа и вычислительные эксперименты.

Научная новизна.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми, получены автором самостоятельно. Они обоснованы строгими математическими доказательствами и относятся к актуальой тематике развиваемой в современных работах отечественных и зарубежных исследователей.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие положения:

- Доказательство новых общих теорем об арифметических свойствах значений F–рядов, удовлетворяющих некоторым системам дифференциальных уравнений первого порядка.

- Применение доказанных теорем к рядам вида

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\dots(a+b(n-1))$$

обобщающим ряд Эйлера $\sum_{n=1}^{\infty} n!$.

- Сравнение полиадического разложения с разложением с двойной базой и цепью с двойной базой.

- Краткий обзор статистических испытаний цифр некоторых полиадических разложений натуральных чисел.

Практическая и теоретическая значимость.

Диссертация носит, в основном, теоретический характер. Её результаты дополняют и развивают обобщение метода Зигеля – Шидловского в теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовыми нормированиями. Они могут быть использованы в учебном процессе в качестве части специального курса. Полученные в четрертой главе результаты будут иметь практическое значение в качестве основы для построения генератора псевдослучайных чисел и использования в учебном процессе в качестве части специального курса.

Степень достоверности и апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- XX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013» Москва(8 - 13 апреля 2013 года).

- Международная заочная научно-практическая конференция «Современное общество, наука и образование: модернизация и инновации» Москва (31 октября 2013 г).

- Всероссийская научно-практическая конференция «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ» Тула (17 апреля 2015 г).

- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова Тула, (25-30 мая 2015 года).

- Международная конференция «Математика и информатика», Москва, (13-17 марта 2016 года).

- IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики» (22-26 мая 2018 года. Нальчик–Эльбрус).

- XVII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 23-28 сентября 2019 года).

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на части. Общий объем работы – 86 страниц. Список цитированной литературы включает 70 наименований.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в шести научных работах, шесть из которых индексируются в международной базе Scopus или входят в список рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список работ приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с В.Г. Чирским, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результата.

Содержание работы

Во введении излагается история вопроса.

Содержание главы 1

В первой главе формулируются постановки задач, основные результаты работы и даны формулировки теорем, доказываемых в диссертации.

Дадим необходимые определения:

В диссертации рассматривается прямое произведение колец $\mathbb{Z}_p$ целых p–адических чисел – так называемое кольцо $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел [13].

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{4}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Кольцо $\mathfrak{G}$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$ и его сумма в этом кольце обозначается $a^{(p_i)}$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами

[13] *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М. Наука. 1971.

существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Термин *почти полиадическое число* использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме, быть может, конечного их числа.

На почти полиадические числа переносится определение бесконечно трансцендентного числа. Кроме того для этих объектов по аналогии определяется понятие бесконечной алгебраической независимости .

Содержание главы 2

Во второй главе диссертации применен модифицированый метод Зигеля–Шидловского.

Теорема 1. *Пусть*

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \tag{5}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{6}$$

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (6), *а также выполняются следующие условия:*

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{7}$$

Тогда почти полиадические числа $\alpha_1 = f_1(\xi), \dots, \alpha_m = f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$

Теорема 2. *Пусть*

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \tag{8}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{9}$$

а также выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{10}$$

Пусть θ_k – целые числа из $\mathbb{K}$ и

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \qquad \Theta_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $d \in \mathbb{N}$, $M = \binom{m+d}{m}$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p таких, что $p \leqslant \exp\left(\ln^{1+2\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)$, и любого нормирования v, продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполнено неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp\left(-\left(M - 1 + \delta\right)\exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{1+2\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right).$$

Пусть последовательность h_n определена равенством

$$\ln h_n = \delta\exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right| - c_4\exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\ln^{(1+\varepsilon)/2}\left|\overline{\Theta_n}\right|,$$

где $c_4 = 2 + c_5$ при $\varepsilon \leqslant 1$ и $c_4 = 2$ при $\varepsilon < 1$, а

$$c_5 = M^2\left(c_1^*\log_p q^* + 1.25c_2^*c_3^* + 2c_3^* + 5\right).$$

где c_1^*, c_2^*, c_3^* – действительные числа и q^* – натуральное число и выполняются следующие условия

1. *$\exp(c_1^* n)$ является верхней границей размера a_n (т. е. максимум модулей алгебраически сопряженных a_n), для любого $n = 0, l, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле степени к над $\mathbb{Q}$*

2. *существует последовательность положительных целых чисел ${q_n}^*$ такая, что ${q_n}^* = {q_{0,n}}^*{q_n}^*$ для всех индексов ${q_n}^*a_k$ $n \geqslant k \geqslant 0$, лежащих в кольце целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ из $\mathbb{K}$, для всех ${q_{0,n}}^*$, делящихся только на простые числа $p \leqslant c_2^* n$ и удовлетворяющих условию $ord_p {q_{0,n}}^* \leqslant c_3^*\left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right)$.*

Тогда существует эффективная постоянная n_0 такая, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P\left(y_1, \ldots, y_m\right)$ степени d по совокупности переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, высота которого h удовлетворяет условиям $h_{n-1} < h \leqslant h_n$ при $n > n_0$, существует простое число p в интервале

$$\left|\overline{\Theta_n}\right| \leqslant p \leqslant M\exp\left(\ln^{1+\varepsilon}\left|\overline{\Theta_n}\right|\right)$$

и нормирование v, продолжающее p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$\begin{aligned}\left|P\left(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)\right)\right|_v &\geqslant \exp\left(-\ln h + \left(-\frac{M-1}{\delta} - \frac{c_4\left(M-1\right)\left(1-\delta\right)}{\delta\left(\ln\ln h_n\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}}\right)\ln h_n\right) \\ &= \exp\left(-B\left(h, h_n\right)\right).\end{aligned}$$

Иными словами, $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ *бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.*

Следствие 1. *Для любых натуральных чисел* k, N *и всякого простого числа* p *ряд*

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!$$

представляет собой трансцендентный над $\mathbb{Q}$ *элемент* $\mathbb{Z}_p$ *и удовлетворяет условию теоремы 2.*

Теорема 3. *Пусть*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z) \tag{11}$$

представляют собой трансцендентные F*–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида*

$$\begin{array}{c} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{array} \tag{12}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{13}$$

тогда ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$*.*

Для доказательства теорем 1, 2 использованы общая теорема 3 из диссертации об арифметических свойствах F-рядов, теоремы из работ [14] и [15] Для доказательства теоремы 3 используется метод доказательства алгебраической независимости над полем $\mathbb{C}(z)$ решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка из работы В.Х. Салихова [16].

Пусть $(a, b) \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1$. Рассмотрим задачу об арифметической природе ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\ldots(a+b\,(n-1))\,. \tag{14}$$

В конечном множестве p–адических полей $\mathbb{Q}_p$, соответствующих тем простым числам p, которые делят b, этот ряд расходится.

Если же простое число p не делит b (что обозначается $p \nmid b$), то ряд сходится.

В качестве следствия теоремы 1 доказана теорема 4

---

[14] *Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y.* Effective estimates for global relations on Euler - type series Annal. Fac. Sci Toulouse.- V.XIII, № 2, 2004, pp. 241 – 260 .

[15] *Т. Р. Азаматов* «Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений», УМН, 62:5(377) (2007), 145 – 146

[16] *Салихов В. Х.* 1973, "Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка", *Матем. заметки.*, т.13., №1, с. 29 – 40.

Теорема 4. *Почти полиадические числа $\mathfrak{a}_i$, определенные равенствами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\,(a_i+b_i)\ldots(a_i+(n-1)\,b_i)=\mathfrak{a}_i, \tag{15}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i)=1$, $i=1,\ldots,m$;

$$\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_j}{b_j}\notin \mathbb{Z}, \quad i\neq j$$

бесконечно алгебраически независимы.

Представляющим интерес частным случаем теоремы 4 является теорема 5.

Теорема 5. *Для любого ненулевого многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ существует бесконечное множество непересекающихся интервалов $(P_{н}(\ln H),\ P_{в}(\ln H))$, где $P_{н}(x)$, $P_{в}(x)$ определены равенствами*

$$P_{н}(x)=\ell\left(\frac{x}{\ln x}\right),\ P_{в}(x)=u\left(\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{2(m+3+(m-1)c_5)}{\left(\ln\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \tag{16}$$

,

$$\ell(x)=e^{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$
$$u(x)=m(x+1)+[x(\ln x)^{-\frac{1}{2}}]$$

в каждом из этих интервалов содержится простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ элемент $\mathfrak{a}\in\mathbb{Q}_p$, определенный равенством

$$\mathfrak{a}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+(n-1))\,b^n \tag{17}$$

, удовлетворяет неравенству $P(\mathfrak{a})\neq 0$.

Содержание главы 3

В третьей главе с помощью построения точных приближающих форм доказаны теоремы 6, 7 .

Теорема 6. *Пусть числа σ_1, σ_2, σ_3 определяются условиями: при $s\geqslant\sigma_1$ выполнено $s>\left(|\lambda|-\frac{1}{2}\right)\ln s$, при $s\geqslant\sigma_2$ выполнены неравенства $s\geqslant\sigma_1$ и $(s+1)\sqrt{\ln s}\geqslant\ln(s+1)e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, при $s\geqslant\sigma_3$ выполнены неравенства $s\geqslant\sigma_2$ и $\ln s>C_1+3\sqrt{\ln s}$. Рассматриваем теперь последовательность $s_k\in\mathbb{N}$ такую, что $s_1\geqslant\sigma_3$ и для каждого $k\geqslant 1$ выполняются неравенства*

$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}}\ >\ a+b\,s_k.$$

Тогда отрезки

$$\left[e^{\sqrt[4]{\ln s_k}}\ ,\ a+b\,s_k\right]\ ,\ k=1,2,\ldots$$

не пересекаются и в каждом из них есть простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\ldots(a+b(n-1))\neq 0 \tag{18}$$

Теорема 7. *Пусть ξ - полиадическое число, обладающее следующими свойствами:*
Существует бесконечное множество полиадических чисел τ_s, $s\in\mathbb{N}$ таких, что

$$\xi=\beta_s+\tau_s,\quad \beta_s\in\mathbb{N},\quad \beta_s\leqslant C_1 e^{\sqrt{\ln s}} \tag{19}$$

Для всех простых чисел p, $p\leqslant a+bs$, выполнено неравенство

$$|\tau_s|_p=|\xi-\beta_s|_p<e^{-s\ln s-2s\sqrt{\ln s}-C_2 s}. \tag{20}$$

Тогда существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ справедливо неравенство

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+(n-1))\,\xi^n\neq 0. \tag{21}$$

Содержание главы 4

Четвертая глава посвящена сравнению полиадического разложения натурального числа с разложением с двойной базой, т.е. представление числа в виде суммы слагаемых вида 2^a3^b.

Рассматривается так называемая полиадическое (факториальное) разложение натурального числа и устанавливается асимптотическая оценка длины полиадического разложения натурального числа N вида $\frac{\ln N}{\ln\ln N}$.

Полиадическим разложением называется представление числа N в виде

$$N=\sum_{n=1}^{r} a_n\cdot n!,$$
$$a_n\in\{0;1;2;\ldots;n\}$$

Теорема 8. *Асимптотическая оценка длины k разложения*

$$N=\sum_{n=1}^{k} a_n\cdot n!,\quad a_n\in\{0,1,\ldots,n\},a_k\neq 0$$

имеет вид

$$k \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}, \quad N \to +\infty.$$

Количество вспомогательных вычислений, используемых в алгоритме полиадического разложения числа N, имеет асимптотическую оценку с главным членом вида

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln N}{\ln \ln N}\right)^2, \quad n \to +\infty.$$

Проводится сравнение оценок длин разложений для разложения известных оценок для разложения с двойной базой, цепи с двойной базой и доказанной оценки для полиадического разложения. Поскольку асимптотические оценки выполняются при $N \to \infty$, имело смысл провести вычислительные эксперименты, результаты которых приведены в третьей главе диссертации. Здесь вкратце отметим, что для рассматриваемых значений N было проведено 10 выборок по 100 чисел каждая. Разрядность каждого из чисел выборки колеблется от 159 до 160 разрядов. Эксперименты показали что хотя разложение с двойной базой несколько короче, чем полиадические разложения, сами полиадические разложения короче, чем цепи с двойной базой. Кроме того, для полиадического разложения требуется значительно меньше вспомогательных вычислений.

Приводятся данные статистических экспериментов которые показали что полиадические разложения могут служить основой для получения псевдослучайных чисел.

Заключение.

Работа посвящена трансцендентности и алгебраической независимости в областях, представляющих собой прямые произведения бесконечной совокупности полей p–адических чисел.

Основные результаты, полученные в диссертации состоят в следующем:

- Доказана новая общая теорема об арифметических свойствах значений F–рядов удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений. Доказанная общая теорема применена к рядам

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b)\dots(a+b(n-1))$$

- Проведено сравнение полиадического разложения с разложениями с двойной базой и цепи с двойной базой. Дана асимптотическая оценка длины полиадического разложения и количества необходимых вспомогательных вычислений. Проведены численные эксперименты сравнения этих разложений в диапазонах, представляющих практический интерес.

- Проведено статистическое испытание цифр некоторых полиадических разложений натуральных чисел.

Дальнейшая разработка тематики, которой посвящена диссертация даст возможность простого и быстрого получения псевдослучайных последовательностей целых чисел.

Благодарности.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Григорьевичу Чирскому за постановку задачи, научные идеи, постоянную поддержку и внимание к работе.

Автор выражает благодарность кандидату педагогических наук, доценту кафедры теории чисел Московского Педагогического Государственного Университета Жмулевой Алевтине Васильевне за замечательные лекции и семинары, пробудившие интерес автора к выбранной тематике.

Основные публикации автора по теме диссертации

Список публикаций автора по теме диссертации
Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[1] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев, «О представлениях натуральных чисел» Вестник Московского университета, сер. 1, математика, механика. 2013. №6 с 57– 59; "Representations of positive integers", Moscow University Mathematics Bulletin, 68:6 (2013), 307–308 (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в РИНЦ
Импакт - фактор 0,348 (за 2018 год)

[2] В. Ю. Матвеев «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», Чебышевский сборник, т.16 выпуск 3, 2015, с 339–354
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[3] В. Ю. Матвеев «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», Чебышевский сборник, т.17 выпуск 3, 2016, с 166–177
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[4] В. Ю. Матвеев «Свойства элементов прямых произведений полей», Чебышевский сборник, т.20 выпуск 2 (70), 2019, с 386–393
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[5] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев «О представлениях натуральных чисел», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 1(45), 2013, с 75–85 (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

[6] В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев «О некоторых свойствах полиадических разложений», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 2(46), 2013, с 164–172 (автору принадлежат доказательства и вычислительные эксперименты)
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт - фактор 0,324 (за 2018 год)

В работах, выполненных в соавторстве, автору диссертации принадлежат доказательства теорем и вычислительные эксперименты.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[1] В. Ю. Матвеев «О бесконечной алгебраической независимости некоторых полиадических чисел»,материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, (13-17 марта 2016 года), с 125–126