

УДК 336.7

Гаврилова Валерия Евгеньевна, к.э.н., доцент кафедры экономики для естественных и гуманитарных факультетов экономического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (МГУ имени М.В.Ломоносова), vegavrilova@econ.msu.ru

Шнипова Александра Александровна, аспирант кафедры финансов и кредита экономического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (МГУ имени М.В.Ломоносова) shnipova.alex@gmail.com

Gavrilova Valeria Evgenievna, PhD, Associate professor, Department of Economics for Natural and Humanitarian Faculties, Faculty of Economics, Lomonosov Moscow State University (MSU), vegavrilova@econ.msu.ru

Shnipova Alexandra Alexandrovna, Postgraduate Student, Department of Finance and Credit (MSU) shnipova.alex@gmail.com

Аннотация

Применение методов машинного обучения для прогнозирования экономических явлений – последнее слово научных исследований. Формула Байеса, хорошо известная из курса теории вероятностей, для многих математиков служит основой для разработки и применения методов машинного обучения. В теории вероятностей есть два классических подхода к пониманию того, что такое случайность. Наиболее распространённым является частотный подход, который предполагает, что случайность – это объективная неопределённость. Второй подход, наиболее популярный среди специалистов по машинному обучению – байесовский (Bayesian) основан на том, что случайность – мера нашего незнания, которое уменьшается при поступлении новой информации. Данная статья посвящена обзору байесовского подхода как основы для машинного обучения и обоснованию его применимости для прогнозирования конечных процентных ставок по банковским продуктам с учетом регуляторной компоненты. В статье проводится анализ основных математических положений теории и ее отличия от классического частотного подхода.

Ключевые слова

Денежно-кредитная политика, байесовский подход, машинное обучение.

Научная специальность публикации: 08.00.10 – Финансы, денежное обращение и кредит

Abstract

The use of machine learning methods to predict economic phenomena is the last word of scientific research. Bayes formula, well known from the course of probability theory for many mathematicians, was the basis for machine learning methods. In probability theory, there are two classical approaches to understanding what randomness is. The most widespread is the frequency approach, which suggests that randomness is objective uncertainty. The second approach, more common among machine learning specialists, is Bayesian. Randomness is a measure of our ignorance; accordingly, experiments simply reduce ignorance by moving from a priori information to a-posteriori. The analysis of the basic mathematical provisions of the theory and its differences from the classical approach is carried out. This article is devoted to the review of the Bayesian approach as the basis of machine learning methods and substantiates its applicability for predicting the final interest rates for banking products taking into account the regulatory component.

Keywords

Monetary policy, Bayesian approach, machine learning

Применение байесовских методов машинного обучения в целях прогнозирования процентных ставок по банковским продуктам

Востребованность прогнозной информации на рынке денег

Качество современной национальной экономической системы во многом определяется результативностью денежно-кредитной политики, привлекательностью банковских услуг и эффективностью финансового сектора в целом. Решение задачи прогнозирования процентных ставок по всем видам кредитов как для физических, так и для юридических лиц – нефинансовых организаций, представляется востребованным для финансового сектора как на микроуровне (для отдельных банков), так и на макроуровне (для центрального банка как мегарегулятора). При этом трудно предположить, каким экономическим агентам перспективная информация о цене денег покажется нейтральной и тем более неинтересной. Поэтому справедливо предположить, что, помимо банков, реципиенты информации о будущих процентных ставках, с достаточной степенью условности, делятся на две группы. Так, для агентов, относимых к первичной группе – страховых, инвестиционных, консалтинговых, аудиторских компаний, подобная информация является системообразующей с точки зрения ценообразования их услуг, конструирования бизнес-планов и осуществления маркетинговых действий. Также к

агентам первичной группы относятся физические лица, в том числе индивидуальные предприниматели и самозанятые, степень платежеспособности и вероятность банкротства которых напрямую зависит от точности расчетов будущей цены денег и их стоимости в настоящий момент времени.

Экономические агенты, относимые ко вторичной группе, напрямую не зависят от данной информации как в процессе ценообразования на свои товары и услуги, так и с позиций вероятностной несостоятельности. Однако для них – а это предприятия легкой, пищевой, автомобильной, нефтехимической промышленности и целого ряда других отраслей реального сектора экономики – информация о динамике кредитных показателей является базовым сигналом для принятия стратегических решений.

Задача прогнозирования конечных процентных ставок по кредитам для физических лиц и нефинансовых организаций до одного года традиционно может быть решена классическими эконометрическими способами с помощью математических моделей. Как правило, математические модели базируются на «трех китах», под которыми понимается аппарат математической статистики, теория вероятностей и дифференциальные уравнения. Указанные три мегаинструмента хорошо зарекомендовали себя не только по части моделирования, но и по части предсказания поведения самих моделируемых систем [6].

Использование данных методов так или иначе подразумевает инженерный подход, основанный на наличии разумных допущений и априорной информации об описываемой системе. Это отличает данный инженерный подход к моделированию от использования неинтерпретируемых black-box моделей (нейронных сетей и проч.). Байесовские методы продолжают эту традицию, позволяя конструировать хорошо интерпретируемые вероятностные модели, и поэтому особенно применимы в задаче предсказания конечных процентных ставок по банковским продуктам.

В силу развития новых методов прогнозирования, в том числе основанных и на методах машинного обучения [5], предложено использовать байесовские методы для ее решения. Следует сказать, что под машинным обучением понимается совокупность особых методов применения слабого искусственного интеллекта для нахождения как однозначного, так и вероятностного результата, характерной особенностью которого является эволюция навыков машины в результате решения большого числа аналогичных задач.

Важно понимать, что машинное обучение является важным, но не единственным разделом искусственного интеллекта, наиболее популярным инструментом которого считаются нейросети, которые на глазах одного поколения за счет постоянного

увеличения их числа и способностей формируют некое ядро, называемое глубоким обучением [1]. В целом можно считать, что байесовская эконометрика – это отрасль эконометрики, которая применяет байесовские принципы и регрессионный анализ (принадлежит к группе методов обучения с учителем) к экономическому моделированию.

Байесовская эконометрика в настоящее время широко используется для формулирования выводов, прогнозирования и анализа решений в экономике, в частности, в области макроэкономики, финансов и маркетинга. Несколько типичных примеров помогут проиллюстрировать значение и степень востребованности байесовской эконометрики. Так, корпорации, специализирующиеся на трансграничной торговле, хотят знать риск изменения валютного курса, которому подвергаются их финансы во время репатриации их доходов от продаж. Другим примером является стремление торговых сетей иметь достоверную информацию для оценки последствий новой (а иногда и пионерской) ценовой политики в условиях риска возникновения ловушки ликвидности. В ловушке ликвидности экономические агенты оказываются довольно стабильно, если в экономике одновременно наблюдается низкий уровень инфляции, снижающиеся и/или низкие темпы экономического роста и околонужная процентная ставка. Подобная картина макроэкономического «штиля» отнюдь нередкое явление в глобальной экономике в 20-е гг. XXI в.

Разберемся, в чем принципиальное отличие байесовских методов от классических методов прогнозирования, а также обоснуем логику их практического применения.

В чем заключается Байесовский подход?

Байесовские методы опираются на теорему Байеса¹, которая гласит, что вероятность события А при условии события В представляет собой отношение совместной вероятности событий А и В, деленное на вероятность события В: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$. Обратим внимание на правую часть данного уравнения: в числителе стоит условная вероятность В при условии события А. Таким образом с помощью формулы Байеса мы фактически поменяли местами причину и следствие. $P(B|A)$ называется правдоподобием (*Likelihood*), $P(A)$ – априорная вероятность события А (Prior), а $P(B)$ – это вероятность события В.

¹ Томас Байес – английский математик XVIII в., сформулировал теорему, которая впоследствии стала одной из основных в элементарной теории вероятности. Намного опередил свое время, поскольку применение его теоремы требует большого массива вычислений, что стало возможным только с разработкой ЭВМ.

Чаще всего теорема Байеса формулируется в терминах функций распределений:

$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int (y|x)p(x)dx}$, где $\int (y|x)p(x)dx$ выполняет роль нормировочной константы и называется доказательность (*Evidence*).

Научное значение теоремы Байеса заключается в том, что она математически формализует связь причины и следствия и позволяет использовать априорные представления о системе с помощью априорного распределения.

Как известно, одна из классических задач статистики заключается в оценке неизвестных параметров предсказательной модели. Рассмотрим два подхода к решению этой задачи: классический частотный и байесовский подход, в которых параметры оцениваются с помощью максимизации функции правдоподобия и максимизации апостериорного распределения² соответственно и сравним эти методы с классическим методом наименьших квадратов.

Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия была подробно описана Рональдом Фишером³ в 1922 г [2].

В статистике функция правдоподобия измеряет достоверность соответствия статистической модели выборке данных для заданных значений неизвестных параметров. Она формируется из совместного распределения вероятностей выборки, но рассматривается и используется только как функция параметров, что позволяет рассматривать случайные величины как фиксированные на наблюдаемых значениях [4].

Физический смысл функции правдоподобия следующий: чем выше значение этой функции правдоподобия нашей выборки, тем наиболее вероятно она была получена из данного распределения с данными параметрами.

Одним из стандартных средств решения задач прогнозирования непрерывной величины Y по значениям переменных $X_1, \dots, X_n$ является использование метода множественной линейной регрессии.

В данном методе связь переменной Y с переменными $X_1, \dots, X_n$ задаётся с помощью линейной модели:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n + \epsilon$$

² Апостериорное распределение – это условное распределение вероятностей какой-либо случайной величины при некотором условии, рассматриваемое в противоположность ее безусловному или априорному распределению (*прим. авторов*)

³ Английский математик и биолог, Р. Фишер является ученым, который позволили статистике занять свое достойное и важное место среди других наук и забыть статус «обслуживающего персонала» для других научных дисциплин. Основная заслуга Р. Фишера заключается в том, что он разработал и успешно применил метод для планирования научных экспериментов, а его бестселлер «Статистические методы для исследователей», опубликованная в 1925 г. выдержала уже 14 переизданий (*прим. авторов*)

Где $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ это белый гауссовский шум, то есть статистический шум, имеющий плотность вероятности, равную плотности вероятности нормального распределения.

Обозначим нашу выборку как $\tilde{S}_t = \{s_1 = (y_1, x_1), \dots, s_m = (y_m, x_m)\}$

Традиционным способом поиска регрессионных коэффициентов является метод наименьших квадратов (МНК). МНК заключается в минимизации функционала эмпирического риска с квадратичными потерями.

$$Q(\tilde{S}_t, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{j=1}^m \left[y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^n x_{ji} \beta_i \right]^2$$

То есть оценка МНК должна доставлять минимум функционала эмпирического риска, что формально записывается следующим образом:

$$(\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_n) = \arg \min [Q(\tilde{S}_t, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)]$$

Получим оценку коэффициентов модели линейной регрессии с помощью метода максимального правдоподобия: рассчитаем функцию правдоподобия для нашей выборки исходя из предположения о распределении величины $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

$$L(\tilde{S}_t, \beta_0, \dots, \beta_n) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)} \exp \frac{-(y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ji})^2}{2\sigma^2}$$

Целью расчета функции правдоподобия является определение параметров $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, которые максимизируют функцию правдоподобия $L(\tilde{S}_t, \beta_0, \dots, \beta_n)$. Видно, что наша функция распределения на самом деле распадается в произведение экспонент и, используя монотонность логарифма, сведём задачу поиска максимума функции правдоподобия к поиску максимума её логарифма.

$$\ln[L(\tilde{S}_t, \beta_0, \dots, \beta_n)] = -\sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} (y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ji})^2 \right]$$

Решая задачу максимизации данного функционала по вектору параметров β получаем так называемую оценку максимального правдоподобия наших параметров. Нетрудно заметить, что оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой метода МНК, что показывает их эквивалентность.

Байесовский подход

Как уже было сказано, байесовский подход к решению статистических задач даёт возможность использовать априорную информацию о модели. В данном случае будем предполагать, что коэффициенты модели концентрируются вокруг нуля и, поскольку линейная регрессия применяется в предположении отсутствия мультиколлинеарности – не зависят друг от друга. Ограничение величины коэффициентов – это предположение, выполнение которого на практике позволяет качественно оценить правильность работы

модели, например степень переобучения. Формализуем это предположение следующим образом: предположим, что априорным распределением весов является стандартное нормальное распределение с нулевым матожиданием и диагональной матрицей ковариации:

$$p(\beta) = \prod_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\beta_j^2}{2\alpha^2}\right)$$

Запишем апостериорную вероятность вектора весов β

$$\begin{aligned} p(\beta|Y, X) &= \prod_{i=1}^m p(y_i|x_i, \beta)p(\beta) = \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)} \exp\left(-\frac{(y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ji})^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\beta_j^2}{2\alpha^2}\right) \end{aligned}$$

Переходя к логарифму и отбросив константные члены, получаем:

$$\log p(\beta|y, x) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (y_i - \langle \beta, x_i \rangle)^2 - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{j=0}^n \beta_j^2$$

Задачу минимизации данного функционала можно заменить задачей максимизации того же самого функционала с обратным знаком, что даёт итоговую оптимизационную задачу

$$\sum_{i=1}^m (y_i - \langle \beta, x_i \rangle)^2 + \lambda |\beta|^2 \rightarrow \min_{\beta}$$

Где $|\beta|^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$, $\lambda = \frac{1}{2\alpha^2}$

Видно, что эта оптимизационная задача очень похожа на оптимизационные задачи из МНК и максимального правдоподобия, но содержит дополнительное слагаемое, заставляющее при максимизации правдоподобия удерживать вектор весов в некотором регулируемом с помощью λ диапазоне вокруг нуля. При этом, чем больше множитель λ , тем более сильные ограничения накладываются. По этой причине слагаемое с λ называется регуляризационным слагаемым, а сам множитель λ называется коэффициентом регуляризации и позволяет повысить обобщающую способность модели.

Итак, в задаче моделирования байесовскими методами моделью называется именно апостериорное распределение, получаемое применением формулы Байеса. Составляющими этой модели являются функция правдоподобия (*Likelihood*), априорное распределение (*Prior*) и доказательность (*Evidence*).

Из приведённых выкладок видно, что основным различием между классическим частотным подходом и байесовским подходом является то, что параметры в классической

модели основаны исключительно на информации, содержащейся в данных, тогда как байесовский подход позволяет включать априорную информацию (информация, известная об объекте до начала измерения) и тем самым существенно повысить качество модели.

По сути, частотный подход определяет, что случайность – объективная неопределенность. Такой подход становится применимым в жизни только при очень больших наборах данных.

Продemonстрируем это на следующем примере: пусть мы подбрасываем монетку 2 раза и все 2 раза выпал «орёл». Можно показать, что в естественном предположении о том, что вероятность выпадения орла при каждом подбрасывании равна p , оценка максимального правдоподобия параметра p равна единице, что никаким образом не согласуется с реальностью, тогда как байесовский вывод даёт оценку 0,75, что гораздо ближе к реальному априорному представлению о том, как на самом деле устроена моделируемая ситуация.

Отсюда следует ещё один интересный вывод: классический частотный статистический подход не применим на малых данных и может давать неадекватные результаты, в то время как байесовский метод построения вероятностных моделей из-за предоставляемых возможностей включения априорных знаний о модели позволяет работать как с малыми, так и с большими данными. Проблема усложняется ещё и тем, что понятие «большие данные» весьма относительно и оптимальное количество данных в выборке может варьироваться от тысяч до сотен миллионов объектов, как например в случае задач распознавания изображений или текста.

Применительно к задаче прогнозирования конечных процентных ставок стоит отметить, что многие переменные в нашей регрессии являются случайными, и некоторые вообще могут быть не учтены классическими методами, хотя эту проблему, впрочем, тоже можно решить используя при моделировании так называемые латентные или скрытые переменные (*latent variables*). Мало того, поскольку ключевые данные известны только ежемесячно, даже собрав их за много лет, мы не будем в состоянии оценить адекватность работы классических статистических моделей. Таким образом, их прогнозирование с применением байесовского подхода с этой точки зрения вполне оправдано.

Несмотря на то, что байесовские методы обладают большими преимуществами, у них существует ряд недостатков. Причины критики байесовских методов в 1930-х гг. со стороны научного сообщества того времени заключались в том, что эти методы с одной стороны, предполагают наличие априорного распределения до начала наблюдений, а с другой – это же самое распределение почти всегда неизвестно, при этом отсутствуют надежные критерии выбора этого априорного распределения. Мало того, распределение

нельзя взять произвольным. Дело в том, что *Evidence* – константа нормировки апостериорного распределения – это интеграл, который, как правило, не берётся аналитически. На этот счёт существует некоторое количество эвристик и методов, но полностью эту проблему решить, к сожалению, нельзя. Отметим, что в большинстве случаев при байесовском выводе используется гауссовское нормальное распределение, поэтому таких проблем, как правило, не возникает.

Другая группа причин критики, которой подвергались байесовские методы, связана с необходимостью колоссальных вычислительных затрат, которые обусловлены необходимостью обращения матриц очень высоких размерностей и только благодаря быстрым алгоритмам численных методов стало возможным использовать байесовские методы на практике.

Таблица 1. Сравнительный анализ частотного и байесовского подходов при вычислении вероятности события

	Частотный подход	Байесовский подход
Параметры (неизвестны)	Точечные оценки	В том числе интервальные
Данные (определены)	Детерминированные	Случайные
Модель вероятности	$L(\theta y, x)$	$\frac{L(\theta y, x)p(\theta)}{\int L(\theta y, x)p(\theta)d\theta}$

(составлено авторами)

Завершая сравнительный анализ частотного и байесовского подходов в рамках решения задач на прогнозирование, мы обратимся к таблице 1, в которой в наглядном виде приведены основные различия между данными подходами.

Обоснование применимости методов машинного обучения в целях прогнозирования конечных процентных ставок до 1 года.

Обратимся к поставленной задаче данной статьи – попытке оценки значимости вклада регуляторных требований в реализацию денежно-кредитной политики Центральным банком Российской Федерации. Взаимосвязанной задачей является создание инструмента прогнозирования целевых параметров: процентных ставок по кредитам физическим лицам и нефинансовым организациям до 1 года.

Машинное обучение и искусственный интеллект на сегодняшний день – это наиболее широко обсуждаемые и одновременно вызывающие много противоречий методы исследования в экономических науках. Исследователи не могут прийти к единому определению данных методов исследования: с одной стороны, их можно охарактеризовать как один из разделов компьютерных наук, с другой стороны – данные методы широко используются в статистике, социальных науках и инженерии.

В любом случае, в широком смысле методы машинного обучения представляют особый класс методов искусственного интеллекта, особенностью которого является не прямое решение задачи, а обучение в процессе анализа данных на первом этапе и применение «полученного опыта» для решения множества схожих задач на втором и последующих этапах.

В частности, одним из объектов их применения являются прогнозные задачи, задачи классификации или группировки. С учетом современных технических возможностей методы машинного обучения пригодны не только для работы с числовыми данными, но и с видеоизображением и текстом.

Вопрос о применимости методов машинного обучения и искусственного интеллекта в экономических исследованиях впервые прозвучал на дискуссионной рабочей платформе PriceWaterhouseCoopers в 2017 г., а, начиная с 2018 г. многие зарубежные исследователи начали предсказывать «большое будущее» методам машинного обучения и зонам практического применения полученных результатов. Многие экономисты-практики ведущих финансовых корпораций мира, в том числе Х. Дэнс и Дж. Хогсворс, С. Атей и др. в своих публикациях утверждают, что методы машинного обучения направлены на максимизацию точности прогноза [3]. Так С. Атей в статье «Влияние машинного обучения на экономику» четко формулирует ряд преимуществ методов машинного обучения. Он считает важным, что в рамках машинного обучения эмпирический анализ рассматривается как алгоритм, который повторяется несколько раз на множестве различных выборок данных, создавая несколько итераций различных альтернативных моделей. Далее он указывает, что в том случае, когда исследователь менее заинтересован в причинно-следственной связи, чем в прогнозе и классификации, то возможно, нужно и эффективно использование методов машинного обучения.

Модели на основе байесовских методов машинного обучения подходят для задачи прогнозирования поведения банковского сектора РФ, так как отвечают сразу следующим параметрам:

- требуется использовать модель, которая бы работала на сравнительно небольшом количестве данных (в нашем случае порядка 100 точек в рамках прогнозируемых временных рядов);
- модель прогнозирования поведения банковского сектора РФ должна быть гибкой, позволять предположить о существовании дополнительных параметров, которые могли бы быть в ней не учтены изначально;

- модель должна быть статистически интерпретируема, то есть она должна позволять получить доверительные интервалы, в рамках которых могут находиться прогнозные значения.

Задача прогнозирования поведения банковского сектора Российской Федерации была поставлена и решена как задача регрессии. Анализ данных и непосредственно предсказание временного ряда были проведены с привлечением как стандартных методов эконометрики (корреляционный анализ, построение линейной регрессии), так и продвинутых байесовских методов машинного обучения, а также t-SNE эмбединга, регрессии на основе гауссовских процессов.

Применимость описанного в данной статье байесовского подхода, а именно, модели под названием «регрессия на основе гауссовских процессов» (Gaussian Process Regression) к данной задаче можно обосновать следующим образом.

Во-первых, в данной модели используется небольшое количество данных, и стандартный статистический частотный подход даёт неадекватные результаты в большинстве случаев.

Во-вторых, параметры распределения, полученные в ходе машинного обучения гауссовского процесса, хорошо интерпретируются статистически: функция ковариации доставляет доверительные интервалы, которые хорошо работают на практике, а среднее значение случайной величины или математическое ожидание является несмещенной эффективной оценкой значения искомой функции.

В-третьих, нам неизвестны многие параметры в задаче, в частности неизвестна мощность зашумления данных. Байесовские методы позволяют с помощью максимизации апостериорного распределения автоматически подбирать значения гиперпараметров и демонстрируют эффективность в условиях многих неизвестных.

В качестве вывода следует сказать, что современный момент является очень интересным и практически новаторским с точки зрения тех возможностей, которые оказались в руках у специалистов. Взаимное дополнение ставших за долгие три столетия байесовских методов и современных возможностей в рамках машинного обучения сделает достоверность банковских и экономических в широком смысле слова будущих событий нормой для принятия стратегических решений с учетом существования дополнительных факторов, которые напрямую не учитываются в модели.

Список литературы

1. Машинное обучение для людей. Разбираемся простыми словами. [Электронный ресурс] URL:<https://vas3k.ru> (дата обращения: 20.05.2020)

2. «Фишер. Статистический вывод». [Электронный ресурс]
URL:<https://www.baguzin.ru> (дата обращения: 20.05.2020)
3. Athey S., The Impact of Machine Learning on Economics, January 2018. [Электронный ресурс] URL:<https://www.nber.org/chapters/c14009.pdf> (дата обращения 02.06.2020)
4. Borsboom, D., Mellenbergh, G. J., & van Heerden, J. (2003). The theoretical status of latent variables. *Psychological Review*, 110(2), 203–219. [Электронный ресурс]
URL:<https://psycnet.apa.org>. (дата обращения 02.06.2020)
5. Christopher M., Bishop «Pattern Recognition and Machine Learning». Springer Science+Business Media, LLC, 2006. [Электронный ресурс] URL:
<https://www.users.isr.ist.pdf>(дата обращения 02.06.2020)
6. Jacquier E., Bayesian methods in finance. September 2010. [Электронный ресурс] URL:
<https://www.people.bu.edu/jacquier/papers/bayesfinance.2011.pdf> (дата обращения 02.06.2020)