Глава I. Квантование суперсимметричных теорий

Действие удобно записывать в явно SUSY виде в терминах суперполей. Этот метод также позволяет проводить квантование без нарушения SUSY.

§1. Квантование модели Весса-Зумино в безмассовом случае.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^*\phi + \left(\frac{1}{6}\lambda \int d^4x\, d^2\theta\, \phi^3 + \text{к.с.}\right)$$

свободное действие

взаимодействие

Введём киральные источники j:

$$(1-\gamma_5)D\phi = 0\ ; \quad (1-\gamma_5)Dj = 0$$

$D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu$ – суперсимметричная ковариантная производная

Тогда член с источниками будут

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \phi j + \text{к.с.} = \int d^4x\, d^2\theta\, \phi j + \int d^4x\, d^2\bar\theta\, \phi^* j^*$$

$$\equiv S_{source}$$

Определим вариационную производную по киральному полю:

$$\frac{\delta}{\delta j_y}\int d^4x\, d^2\theta_x\, \phi_x j_x \equiv \phi_y .$$

Что будет представлять собой $\dfrac{\delta j_x}{\delta j_y}$ чтобы это равенство было верно?

Определим δ-функцию от антикоммут. переменных:

$$\delta^4(\theta) \equiv \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2$$

тогда $\int d^4\theta\, \delta^4(\theta) = \frac{1}{8}\int d^4\theta\, (\bar\theta\theta)^2 = \frac{1}{8}\cdot 8 = 1$

$$\theta_a \cdot \delta^4(\theta) = 0$$

Как следствие, $\delta^4(\theta_x-\theta_y) = \frac{1}{8}\left[(\bar\theta_x-\bar\theta_y)(\theta_x-\theta_y)\right]^2$ и

$$\theta_{x_a}\delta^4(\theta_x-\theta_y) = \theta_{y_a}\delta^4(\theta_x-\theta_y)$$

С помощью этой δ-ф-и можно записать рассматриваемую производную в виде

$$\frac{\delta j_x}{\delta j_y} = -\frac{1}{2}\bar D^2 \delta^8_{xy} \quad , \text{где } \delta^8_{xy} \equiv \delta^4(x-y)\delta^4(\theta_x-\theta_y)$$

$$\bar D^2 \equiv \frac{1}{2}\bar D(1-\gamma_5)D$$

— проектор на киральные поля.

Действительно, тогда

$$\frac{\delta}{\delta j_y}\int d^4x\, d^2\theta_x\, \phi_x j_x = \int d^4x\, d^2\theta_x\, \phi_x \frac{\delta j_x}{\delta j_y} =$$

$$= \int d^4x\, d^2\theta_x\, \phi_x \cdot \left(-\frac{1}{2}\bar{D}_x^2\right)\delta^8_{xy} = \Big[-\frac{1}{2}\bar{D}_x^2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}$$

$$+ \text{п. произв.} \Longrightarrow \int d^2\bar\theta_x + \text{п. произв.}\Big] =$$

$$= \int d^4x\, d^4\theta_x\, \phi_x\, \delta^8_{xy} = \int d^8x\, \phi_x\, \delta^8_{xy} = \phi_y \text{ — верно.}$$

Определим производящий ф-л

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\phi^*\, \exp\left(iS + iS_{source}\right) = Z[j, j^*] \longrightarrow$$

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\Big(\frac{i}{4}\int d^8x\, \phi^*\phi + \frac{i}{6}\lambda\int d^4x\, d^2\theta\, \phi^3$$

$$+ \frac{i}{6}\lambda\int d^4x\, d^2\bar\theta\, \phi^{*3} + i\int d^4x\, d^2\theta\, j\phi + i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, j^*\phi^*\Big)$$

$$= \exp\left(\frac{i}{6}\lambda\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)^3 + \frac{i}{6}\lambda\int d^4x\, d^2\bar\theta\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}\right)^3\right)$$

$$\cdot \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left(\frac{i}{4}\int d^8x\, \phi^*\phi + i\int d^4x\, d^2\theta\, j\phi + i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, j^*\phi^*\right)$$

Определим величину

$$Z_0 \equiv \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left(\frac{i}{4}\int d^8x\, \phi^*\phi + i\int d^4x\, d^2\theta\, j\phi + i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, \phi^* j^*\right)$$

Этот интеграл является гауссовым.
Его можно вычислить с использованием ур-й движения:

$$0 = \frac{\delta}{\delta \Phi_x}\left(S + S_{source}\right) = \frac{1}{4}\int d^8y\, \Phi_y^* \frac{\delta \Phi_y}{\delta \Phi_x} + j_y =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^8y\, \Phi_y^* \left(-\frac{\bar{D}_y^2}{2}\right) \delta^8_{xy} + j_y = -\frac{1}{8}\bar{D}_y^2 \Phi_y^* + j_y .$$

Умножим это на величину $D_y^2 \equiv \frac{1}{2}\bar{D}(1+\gamma_5)D$ и воспользуемся тождеством

$$D_y^2 \bar{D}_y^2 \Phi_y^* = -16\,\partial^2 \Phi_y^*$$

Действительно, $\{D_a, D_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab}\, i\partial_\mu$

– выводится аналогично КС алгебры SUSY.

$$\frac{1}{2}\bar{D}^a(1+\gamma_5)D_a \frac{1}{2}\bar{D}^b(1-\gamma_5)D_b \phi^* = -2\cdot \bar{D}^a \bar{D}^b \left\{\frac{1}{2}(1+\gamma_5)D_a,\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(1-\gamma_5)D_b\right\}\phi^* = \cancel{-2}\,\bar{D}^a\bar{D}^b\cdot(\cancel{-}2i)\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}(1+\gamma_5)\gamma^\mu C\right)_{ab}\partial_\mu \phi^*$$

$$= \left[\bar{\psi} = \psi^T C;\ \bar{\psi}^a = \psi_b C^{ba}\right] = \underset{R}{D_c}\, C^{\underline{ca}}\cdot \underset{L}{D_d}\, C^{\underline{\underline{db}}}\, 2i\cdot$$

$$\cdot\left((1+\gamma_5)\gamma^\mu C\right)_{\underline{\underline{ab}}}\partial_\mu \phi^* =$$

$$= \{D_c, D_d\}\, C^{ca}\cdot 2i\left((1+\gamma_5)\gamma^\mu\right)_a{}^d \partial_\mu \phi^* =$$

$$= -2i\,(\gamma^\nu C)_{\underset{\nu,\,\text{„}+\text{"}}{cd}}\,\partial_\nu\, C^{ca}\, 2i\left((1+\gamma_5)\gamma^\mu\right)_a{}^d \partial_\mu \phi^*$$

$$= -4\,(\gamma^{\nu})_{\dot\alpha}{}^{a}\,((1+\gamma_5)\gamma^{\mu})_{a}{}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi^* =$$

$$= -4\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)\,\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -16\,\partial^2\phi^*$$ – верно.

тогда

$$0 = -\frac{1}{8}D_y^2\bar D_y^2\phi_y^* + D_y^2 j_y$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = 2\partial^2\phi^* + D^2 j$$

$$\phi^* = -\frac{1}{2\partial^2}D^2 j$$

$$\Longrightarrow \quad Z_0 = \left[\begin{array}{c}\text{линейные члены} = \\ = (-2)\times\text{квадратичные}\end{array}\right] =$$

$$= \exp\left(i\int d^4x\,d^2\bar\theta\,\phi^* j^*\right) = \exp\left(i\int d^4x\,d^2\bar\theta\, j^*\left(-\frac{1}{2\partial^2}D^2 j\right)\right)$$

$$= \exp\left(i\int d^8x\, j^*\frac{1}{\partial^2}j\right)$$

Поэтому окончательно

$$Z = \exp\left(\frac{i}{6}\lambda\int d^4x\,d^2\theta\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)^3 + \frac{i}{6}\lambda\int d^4x\,d^2\bar\theta\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}\right)^3\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(i\int d^8x\, j^*\frac{1}{\partial^2}j\right)$$

Производящий функционал для связных функций Грина: $W[j] \equiv -i \ln Z[j]$

Эффективное действие:

$$\Gamma[\Phi] = W[j] - \int d^4x\, d^2\theta\, \phi j - \int d^4x\, d^2\bar\theta\, \phi^* j^*$$

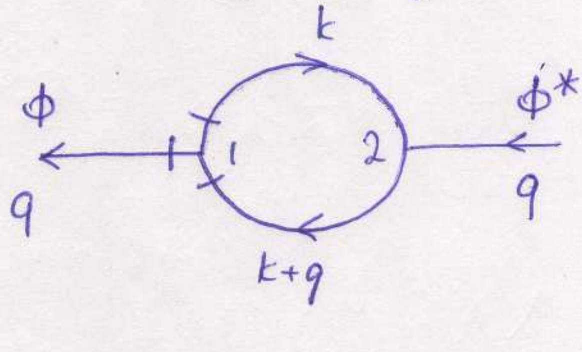
где необходимо выразить источники через поле из уравнения

$$\phi \equiv \frac{\delta W}{\delta j} \qquad \phi^* \equiv \frac{\delta W}{\delta j^*}$$ (преобразование Лежандра)

Эффективное действие представляет собой производящий ф-л для 1PI диаграмм.

§2. Однопетлевая перенормировка суперполей материи в модели Весса-Зумино

Вычислим однопетлевую расходимость, которая соответствует диаграмме



Соответствующий вклад в эффективное действие будет получаться как

$$\cancel{(-i)} \cdot \frac{\cancel{i}}{6}\lambda \int d^4x_1 d^2\theta_1 \cdot 3\phi_1 \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1}\cdot\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1}\cdot \frac{i}{6}\lambda\cdot\int d^4x_2\, d^2\bar\theta_2 \cdot$$

$$\cdot 3\phi_2^* \cdot \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_2^*}\cdot\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_2^*}\, \exp\left(i\int d^8x\, j^*\frac{1}{\partial^2} j\right) =$$

$$= \frac{i}{4}\int d^4x_1 d^2\theta_1\cdot\phi_1\cdot\int d^4x_2 d^2\bar\theta_2\cdot\phi_2^*\cdot\lambda^2\cdot 2\,\frac{i\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{i\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{q+k}{\delta^8_{12}}$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\,\phi_1\phi_2^*\lambda^2\cdot\frac{1}{\partial^2}\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{q+k}{\delta^8_{12}}$$

При этом

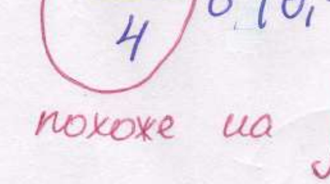
$$\delta^8_{12} = \delta^4(x_1-x_2)\,\frac{1}{8}\left((\bar\theta_1-\bar\theta_2)(\theta_1-\theta_2)\right)^2$$

Очевидно, что все 4 спинорные производные должны свестись к $\partial/\partial\theta$ или $\partial/\partial\bar\theta$

$$\frac{\bar D^2 D^2}{4}\delta^4(\theta_1-\theta_2)\cdot\delta^4(\theta_1-\theta_2) = \delta^4(\theta_1-\theta_2)$$

похоже на $\int d^4\theta = \frac{D^2\bar D^2}{4}$ + п. произв.

Поэтому



$$= -\frac{i\lambda^2}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\,\phi_1\phi_2^*\,\frac{1}{\partial^2}\delta^4(x_1-x_2)\,\delta^4(\theta_1-\theta_2)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\partial^2}\delta^4(x_1-x_2) =$$

$$= \frac{-i\lambda^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \, d^4\theta \, \phi(x_1,\theta) \cdot \phi^*(x_2,\theta) \frac{1}{\partial^2} \delta^4(x_1-x_2) \cdot \frac{1}{\partial^2} \delta^4(x_1-x_2)$$

$$= -\frac{i\lambda^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \, d^4\theta \cdot \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \phi(q_1,\theta) e^{-iq_{1\alpha}x_1^\alpha} \cdot \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \phi^*(q_2,\theta) \cdot$$

$$\cdot e^{-iq_{2\alpha}x_2^\alpha} \cdot \frac{1}{\partial^2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{-ik_{1\alpha}(x_1-x_2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\partial^2} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{-ik_{2\alpha}(x_1-x_2)^\alpha}$$

$$= -\frac{i\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{\cancel{(2\pi)^4}} \phi(q_1,\theta) \phi^*(q_2,\theta)$$

$$\cdot \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \delta^4(q_1+k_1+k_2) \delta^4(q_2-k_1-k_2) (2\pi)^4 \cancel{(2\pi)^4} =$$

$$= -\frac{i\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{\cancel{(2\pi)^4}} \phi(q_1,\theta) \phi^*(q_2,\theta) \cdot$$

$q_1 \to q$, $k_1 \to k$

$$\cdot \delta^4(q_1+q_2) \cdot \frac{1}{k_1^2 (q_2-k_1)^2} \cancel{(2\pi)^4} =$$

$$= \frac{-i\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi(q,\theta) \phi^*(-q,\theta) \frac{1}{k^2(k+q)^2} .$$

– видно, что интеграл логарифмически расходится;

$$\equiv \frac{1}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta \, \phi(q,\theta) \phi^*(-q,\theta) \Delta G(q,\lambda)$$

где $\Delta G(q,\lambda) \equiv -2i\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k+q)^2}$

После поворота Вика $k_0 = iK_4$; $k_i = K_i$

$$\Delta G(Q,\lambda) = +2\lambda^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 (K+Q)^2}.$$

Если верхний предел обрезать на импульсе Λ, то

$$\Delta G(Q,\lambda) = +2\lambda^2 \cdot \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int^{\Lambda} \frac{dK}{K} \sim + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{Q} +$$

+ конечное слагаемое.

Как устранить расходимость?

$$\phi \equiv \sqrt{Z}\,\phi_R$$

Тогда

$$\phi^*\phi \cdot G = \phi_R^* \phi_R \, ZG$$

подберём Z т.ч. в G не было расходимостей

$$G = 1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{Q} + \text{конечные члены}$$

$$\Rightarrow Z = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{\mu}$$ устраняет расходимости

$$ZG = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{\mu}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi} \ln\frac{\Lambda}{Q} + \text{конечные члены}\right)$$

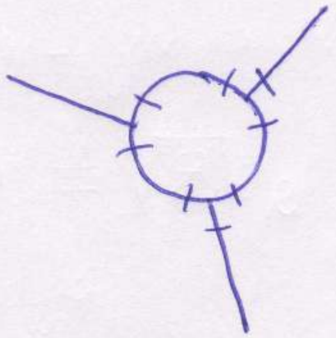
$$= 1 + \frac{\lambda^2}{4\pi} \ln\frac{\mu}{Q} + \text{конечные члены},$$ где μ – точка нормировки.

Аномальная размерность:

$$\boxed{\gamma(\lambda)} = + \frac{d\ln Z}{d\ln\mu} = \frac{d}{d\ln\mu}\ln\left(1-\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu}+\ldots\right) =$$

$$= -\frac{d}{d\ln\mu}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu} = \boxed{+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Перенормировка константы связи получается благодаря перенормировке ВФ. Действительно,



$\sim$ перенормировке $\lambda\Phi^3$

Но эта диаграмма $=0$ т.к. таких пропагаторов нет

– проявление теоремы о неперенормировке

$$S = \frac{1}{4}\int d^8x\, \Phi^*\Phi + \frac{\lambda}{6}\int d^4x d^2\theta\, \Phi^3 + \frac{\lambda}{6}\int d^4x d^2\bar\theta\, \Phi^{*3}$$

$$= \frac{1}{4} Z\int d^8x\, \Phi_R^*\Phi_R + \frac{\lambda}{6}\int d^4x d^2\theta\cdot Z^{3/2}\Phi_R^3 +$$

$$+ \frac{\lambda}{6}\int d^4x d^2\bar\theta\, Z^{3/2}\Phi_R^{*3/2}$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_R = \lambda Z^{3/2}$ где λ - голая константа связи.

Т.о. перенормировка кубичного взаимодействия в $N=1$ SUSY теориях связана с перенормировкой ВФ.

---

§3. Квантование модели ВЗ в массивном случае

$$S = \frac{1}{4}\int d^8x\, \phi^*\phi + \left(\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3\right) + \text{к.с.}\right)$$

$$S_{source} = \int d^4x\, d^2\theta\, \phi \cdot j + \text{к.с.}$$

$$Z = \exp\left\{ i\int d^4x\, d^2\theta\, \frac{1}{6}\lambda\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)^3 + i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, \frac{1}{6}\lambda\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}\right)^3 \right\}$$

$\cdot Z_0$, где

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left\{ \frac{i}{4}\int d^8x\, \phi^*\phi + i\int d^4x\, d^2\theta\left(\frac{1}{4}m\phi^2 + \phi j\right) + i\int d^4x\, d^2\bar\theta\left(\frac{1}{4}m\phi^{*2} + \phi^* j^*\right)\right\}$$

– отличие массивного случая именно в Z_0.

Вычислим Z_0 в явном виде:

Ур-я движения для ϕ и ϕ^* имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{\bar{D}^2}{8}\phi^* + \frac{1}{2}m\phi + j = 0 \\ -\frac{D^2}{8}\phi + \frac{1}{2}m\phi^* + j^* = 0 \end{cases}$$

Выражаем ϕ^* из второго ур-я и подставляем в первое:

$$\phi^* = \frac{2}{m}\left(-j^* + \frac{D^2}{8}\phi\right)$$

$$-\frac{\bar{D}^2}{8}\cdot\frac{2}{m}\left(-j^* + \frac{D^2}{8}\phi\right) + \frac{1}{2}m\phi + j = 0$$

$$\frac{1}{4m}\bar{D}^2 j^* - \frac{\bar{D}^2 D^2}{32m}\phi + \frac{1}{2}m\phi + j = 0$$

$$\frac{1}{4m}\bar{D}^2 j^* + j + \frac{\partial^2}{2m}\phi + \frac{m}{2}\phi = 0$$

$$\frac{1}{2m}(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{1}{4m}\bar{D}^2 j^* - j$$

$$\phi = \frac{2m}{\partial^2 + m^2}\left(-\frac{1}{4m}\bar{D}^2 j^* - j\right) = -\frac{\bar{D}^2 j^*}{2(\partial^2 + m^2)} - \frac{2mj}{\partial^2 + m^2}.$$

Поэтому

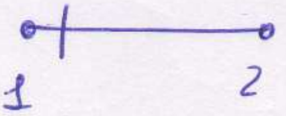
$$Z_0 = \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \phi j + \frac{i}{2}\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, \phi^* j^*\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, j\left[-\frac{\bar{D}^2}{2(\partial^2 + m^2)}j^* - \frac{2m}{\partial^2 + m^2}j\right]\right.$$

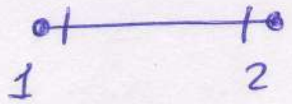
$$+\frac{i}{2}\int d^4x\, d^2\bar\theta\, j^*\left[-\frac{D^2}{2(\partial^2+m^2)}\, j-\frac{2m}{\partial^2+m^2}\, j^*\right]\Big\}=$$

$$\boxed{=\exp\Big\{ i\int d^8x\, j\,\frac{1}{\partial^2+m^2}\, j^* - i\int d^4x\, d^2\theta\, j\,\frac{m}{\partial^2+m^2}\, j - i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, j^*\,\frac{m}{\partial^2+m^2}\, j^*\Big\}}$$

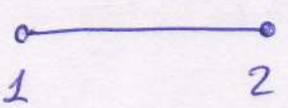
Это соответствует пропагаторам



$$=\frac{i\bar D_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)}\,\delta^8_{12}$$

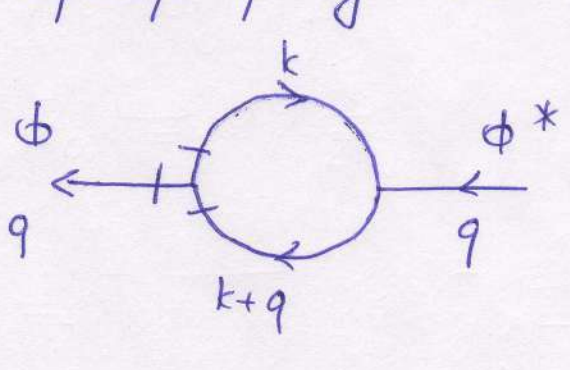


$$=\frac{im\bar D^2}{\partial^2+m^2}\,\delta^8_{12}$$



$$=\frac{imD^2}{\partial^2+m^2}\,\delta^8_{12}$$

Какие диаграммы будут теперь определять перенормировку ВФ суперполей материи?



— почти такая же, как и ранее, но теперь

$$\Delta\Gamma = -\frac{i}{2}\int d^4x_1 d^2\theta_1\, \Phi_1 \cdot \int d^4x_2\, d^2\bar{\theta}_2\, \Phi_2^* \lambda^2 \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)} \underset{k}{\delta^8_{12}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)} \underset{q+k}{\delta^8_{12}} =$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\, \Phi_1 \Phi_2^* \lambda^2 \frac{1}{\partial^2+m^2} \underset{k}{\delta^8_{12}} \cdot \frac{\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)} \underset{q+k}{\delta^8_{12}}$$

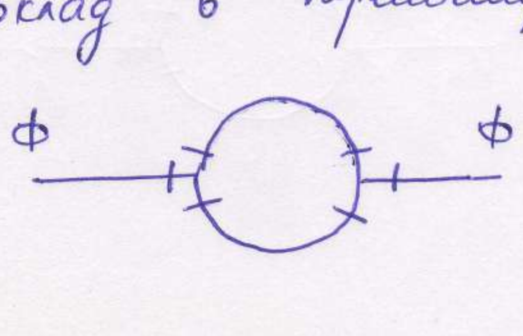
$$\Rightarrow -\frac{i\lambda^2}{2}\int d^4\theta \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \Phi(q,\theta)\, \Phi^*(-q,\theta) \frac{1}{(-k^2+m^2)(-(k+q)^2+m^2)}$$

$$\Delta G(q,\lambda) = -2i\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-k^2+m^2)(-(k+q)^2+m^2)}$$

$$\Delta G(Q,\lambda) = 2\lambda^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2+m^2)((K+Q)^2+m^2)}$$

– всё совпадает с безмассовым случаем с точностью до замены $K^2 \to K^2+m^2$ и т.д. Аномальная размерность такая же.

Но теперь есть ещё диаграмма, дающая вклад в перенормировку массы:



которой не было в безмассовом случае.

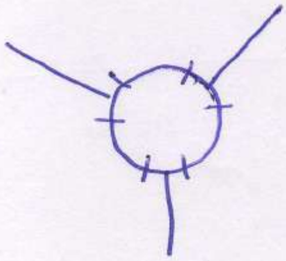
Она пропорциональна

$$\Delta\Gamma \sim i\int d^4x_1 d^2\theta_1\, \phi_1 \int d^4x_2 d^2\theta_2\, \phi_2 \cdot \lambda^2 \frac{m\bar{D}_1^2}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12\atop k} \cdot$$

$$\cdot \frac{m\bar{D}_2^2}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12\atop q+k} \sim$$

$$\sim i\int d^8x_1 d^8x_2\, \phi_1\phi_2 \lambda^2 \frac{m}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12\atop k} \cdot \frac{m}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12\atop q+k} = 0$$

— видно, что вновь нет расходящихся (и вообще никаких квантовых поправок к суперпотенциалу)

Тоже самое для  $= 0.$

§4. Квантование $N=1$ электродинамики.

$$S = \frac{1}{4e^2} \mathrm{Re}\int d^4x d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta \left(\phi^* e^{-2V}\phi\right.$$

$$\left. + \tilde{\phi}^* e^{+2V}\tilde{\phi}\right) + \left(\frac{1}{2} m \int d^4x d^2\theta\, \tilde{\phi}\phi + \text{к.с.}\right)$$

где $$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{2V}(1+\gamma_5)D_a e^{-2V}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\bar{D}^2\left[e^{2V}(1+\gamma_5)D_a e^{-2V}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\bar{D}^2\left[e^{2V} D_{Ra} e^{-2V}\right] \Rightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_{Ra} V$$

Для электродинамики действие для калибровочного поля квадратично и не содержит взаимодействия.

$$\frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\; W_a C^{ab} W_b =$$

$$= \frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\; \frac{1}{16}\bar{D}^2 D_{Ra} V C^{ab}\cdot \bar{D}^2 D_{Rb} V =$$

$$= -\frac{1}{32e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^4\theta\; D_{Ra} V\cdot C^{ab}\bar{D}^2 D_{Rb} V =$$

$$= +\frac{1}{32e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\cdot V\cdot D_{Ra} C^{ab}\bar{D}^2 D_{Rb} V$$

Определим величину

$$-\frac{1}{8} D_{Ra} C^{ab}\bar{D}^2 D_{Rb} \equiv \partial^2 \Pi_{1/2}$$ – суперсимметричный поперечный проектор

Действительно, мы исследуем выражение аналогичное

$$-\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}\int d^4x\, \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x \left((\partial_\mu A_\nu)^2 - \partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu\right) =$$

$$= +\frac{1}{2}\int d^4x\, A_\alpha \left(\partial_\mu^2 \eta^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta\right) A_\beta$$

где $\partial_\mu^2 \eta^{\alpha\beta} - \partial^\alpha\partial^\beta$ – обычный поперечный проектор.

В суперсимметричном случае мы получаем, что

$$\frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b = -\frac{1}{4e^2}\int d^4x\, d^4\theta\, V \partial^2 \Pi_{1/2} V$$

Re часть можно убрать

Пропагатор не $\exists$ как и в обычном случае из-за продольной нулевой моды:

$$\left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\mu^2 - \partial^\alpha\partial^\beta\right)\partial_\beta = \partial^\alpha \partial_\mu^2 - \partial^\alpha \partial_\beta^2 = 0$$

Аналогично

$$\partial^2 \Pi_{1/2} \cdot D_R^2 = 0 \quad \text{и} \quad \partial^2 \Pi_{1/2} \cdot \bar{D}_L^2 = 0$$

очевидно, т.к. D_R в 3-й степени даёт 0

очевидно, т.к.

$$\bar{D}^2 D_{Ra} \bar{D}^2 = 0$$

$$\{D_{Ra}, D_{Lb}\} = -2i\,\frac{1}{2}\left((1+\gamma_5)\gamma^\mu\right)_{ab}\partial_\mu$$

потом 3-я степень D_L которая равна 0.

Имеет место полезное тождество:

$$-\partial^2\Pi_{1/2} - \frac{\bar{D}^2 D^2}{16} - \frac{D^2\bar{D}^2}{16} = \partial^2$$

которое можно доказать коммутируя ковариантные производные. (Д/З).

Необходимо добавить к действию слагаемое, фиксирующее калибровку

$$S_{gf} = -\frac{1}{32 e^2 \xi}\int d^4x\, d^4\theta\, D^2 V \cdot \bar{D}^2 V =$$

$$= -\frac{1}{64 e^2 \xi}\int d^4x\, d^4\theta\, V\left(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2\right)V$$

Тогда

$$S_{gauge} + S_{gf} = \frac{1}{4e^2}\int d^4x\, d^4\theta\, V\left\{-\partial^2\Pi_{1/2} - \frac{D^2\bar{D}^2}{16\xi} - \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\xi}\right\}V$$

Видно, что в случае $\xi = 1$ получается величина

$$S_{gauge} + S_{gf} = \frac{1}{4e^2}\int d^4x\, d^4\theta\, V\partial^2 V$$

– получилась калибровка Фейнмана.

Производящий функционал записывается в виде

$$Z = \int \mathcal{D}V\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \exp\left(iS + iS_{gf} + iS_{source}\right)$$

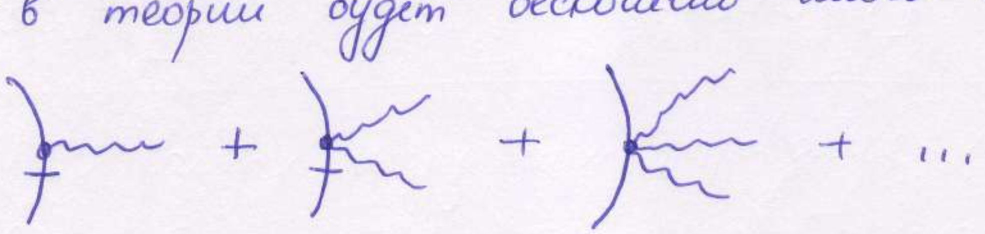
где
$$S_{source} = \int d^8x\, VJ + \int d^4x\, d^2\theta \left(\phi j + \tilde{\phi}\tilde{j}\right) +$$
$$+ \int d^4x\, d^2\bar{\theta} \left(\phi^* j^* + \tilde{\phi}^* \tilde{j}^*\right)$$

Выделяем взаимодействие: Все квадратично, кроме

$$\int d^8x \left(\frac{1}{4}\phi^* e^{-2V}\phi + \frac{1}{4}\tilde{\phi}^* e^{2V}\tilde{\phi}\right) = \frac{1}{4}\int d^8x \left(\phi^*\phi + \tilde{\phi}^*\tilde{\phi}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^8x \left[\phi^*(-2V)^n\phi + \tilde{\phi}^*(2V)^n\tilde{\phi}\right]$$

– в теории будет бесконечно много вершин:



Поэтому

$$Z = \exp\left\{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^8x \left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}\left(-2\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)^n \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \tilde{j}^*}\left(2\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)^n \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \tilde{j}}\right]\right\} Z_0 \,, \text{ где}$$

$$Z_0 = \int \mathcal{D}V\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \exp\left\{ i\int d^8x \left[\frac{1}{4e^2} V\left(-\partial^2\Pi_{1/2} - \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box}\right)V + \frac{1}{4}\left(\phi^*\phi + \tilde{\phi}^*\tilde{\phi}\right) + JV\Big] + i\int d^4x\, d^2\theta \cdot$$

$\left(\frac{1}{2}m\phi\tilde{\phi}+j\phi+\tilde{j}\tilde{\phi}\right)+i\int d^4x\,d^2\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}m\phi^*\tilde{\phi}^*\right.$

$\left.+j^*\phi^*+\tilde{j}^*\tilde{\phi}^*\right)\Big\}$

– видно, что Z_0 распадается на произведение 2-х частей:

$$Z_0 = Z_{0V} Z_{0\Phi}$$

Имеем:

$$Z_{0V} = \int \mathcal{D}V \exp\left\{\frac{i}{4e^2}\int d^8x\, V\left(\partial^2 + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{D^2\bar{D}^2}{16}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)V + i\int d^8x\, JV\right\}$$

Ур-я движения:

$$\frac{1}{2e^2}\left(\partial^2 + \frac{\bar{D}^2D^2}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{D^2\bar{D}^2}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)V + J = 0$$

Ищем решение в виде

$$V = x\cdot J + y\cdot\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2D^2}{16}\right)J$$

где x и y – дифференциальные операторы, зависящие от ∂^2.

$$0 = J + \frac{1}{2e^2}\left[\partial^2 + \frac{\bar{D}^2D^2}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{D^2\bar{D}^2}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\left[xJ + y\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2D^2}{16}\right)J\right. =$$

$$= J + \frac{x}{2e^2}\partial^2 J + \left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\right)\left[\frac{1}{2e^2}\cdot x\left(1-\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{2e^2} y\partial^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2e^2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right) y\partial^2\right] J$$

Поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2e^2}\partial^2 = -1 \\ x\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right) + \cancel{y\partial^2} - \left(\cancel{1}-\dfrac{1}{\xi}\right) y\partial^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{2e^2}{\partial^2}$$

$$-\frac{2e^2}{\partial^2}\cdot\frac{(\xi-1)}{\xi} + \frac{1}{\xi} y\partial^2 = 0$$

$$y = \frac{2e^2}{\partial^4}(\xi-1)$$

Поэтому

$$V = -\frac{2e^2}{\partial^2} J + \frac{2e^2}{\partial^4}(\xi-1)\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\right) J$$

и $\Rightarrow$

$$Z_{0V} = \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^8x\, J V\right\} = \exp\left\{ie^2\int d^8x\left[-J\frac{1}{\partial^2}J\right.\right.$$

$$\left.\left. + J\frac{1}{\partial^4}(\xi-1)\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\right) J\right]\right\}$$

Как следствие, пропагатор суперполя V имеет вид

$$- 2ie^2\left[\frac{1}{\partial^2} - \frac{(\xi-1)}{\partial^4}\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\right)\right]\delta^8(x_1-x_2)$$

В калибровке Фейнмана всё упрощается:

$$Z_{0V} = \exp\left\{-ie^2\int d^8x\, J\frac{1}{\partial^2}J\right\}$$

а пропагатор имеет вид $-\frac{2ie^2}{\partial^2}\delta^8(x_1-x_2)$.

Вычислим теперь $Z_{0\phi}$, которая даётся выражением

$$Z_{0\phi} = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\tilde{\phi}\, \exp\left\{\frac{i}{4}\int d^8x\,(\phi^*\phi + \tilde{\phi}^*\tilde{\phi}) + i\int d^4x\, d^2\theta \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left(\frac{1}{2}m\phi\tilde{\phi} + j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}\right) + i\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}m\phi^*\tilde{\phi}^* + j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*\right)\right\}$$

Ур-я движения имеют вид

$$\phi:\quad -\frac{\bar{D}^2}{8}\phi^* + \frac{1}{2}m\tilde{\phi} + j = 0 \qquad (1)$$

$$\phi^*:\quad -\frac{D^2}{8}\phi + \frac{1}{2}m\tilde{\phi}^* + j^* = 0 \qquad (2)$$

$$\tilde{\phi}:\quad -\frac{\bar{D}^2}{8}\tilde{\phi}^* + \frac{1}{2}m\phi + \tilde{j} = 0 \qquad (3)$$

$$\tilde{\phi}^*:\quad -\frac{D^2}{8}\tilde{\phi} + \frac{1}{2}m\phi^* + \tilde{j}^* = 0 \qquad (4)$$

Рассмотрим ур-я (1) и (4): Из (4) получим

$$\phi^* = \frac{2}{m}\left(\frac{D^2}{8}\tilde{\phi} - \tilde{j}^*\right)$$

Тогда (1) даёт

$$0 = -\frac{\bar{D}^2}{8}\cdot\frac{2}{m}\left(\frac{D^2}{8}\tilde{\phi} - \tilde{j}^*\right) + \frac{1}{2}m\tilde{\phi} + j =$$

$$= \frac{\partial^2}{2m}\tilde{\phi} + \frac{1}{2}m\tilde{\phi} + \frac{1}{4m}\bar{D}^2\tilde{j}^* + j =$$

$$= \frac{1}{2m}(\partial^2+m^2)\tilde{\phi} + \frac{1}{4m}\bar{D}^2\tilde{j}^* + j$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi} = \frac{2m}{\partial^2+m^2}\left(-\frac{1}{4m}\bar{D}^2\tilde{j}^* - j\right)$$

$$\phi^* = \frac{2}{m}\left[\frac{D^2}{\cancel{8}\,4}\cdot\frac{\cancel{2}m}{\partial^2+m^2}\left(-\frac{1}{4m}\bar{D}^2\tilde{j}^* - j\right) - j^*\right] =$$

$$= \frac{2}{m}\left[\partial^2\cdot\frac{1}{\partial^2+m^2}\tilde{j}^* - \tilde{j}^* - \frac{mD^2}{4(\partial^2+m^2)}j\right] =$$

$$= -\frac{2m}{\partial^2+m^2}\tilde{j}^* - \frac{D^2}{2(\partial^2+m^2)}j$$

$$\tilde{\phi} = -\frac{2m}{\partial^2+m^2}j - \frac{\bar{D}^2}{2(\partial^2+m^2)}\tilde{j}^*$$

Подставляем в $Z_{0\phi}$:

$$Z_{0\phi} = \exp\left\{ i\int d^4x\,d^2\theta\,\frac{1}{2}(j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}) + i\int d^4x\,d^2\bar{\theta}\,\frac{1}{2}\cdot\right.$$

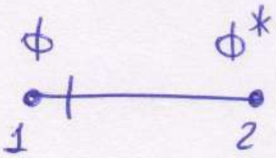
$$\left.\cdot(j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*)\right\} =$$

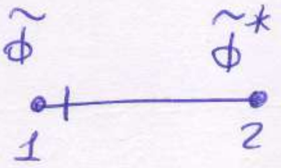
$$= \exp\Big\{ i\int d^4x\, d^2\theta \cdot \frac{1}{2}\Big[j\Big(-\frac{2m}{\partial^2+m^2}\tilde{j} - \frac{\bar{D}^2}{2(\partial^2+m^2)} j^*\Big) + \tilde{j}\Big(-\frac{2m}{\partial^2+m^2} j - \frac{\bar{D}^2}{2(\partial^2+m^2)}\tilde{j}^*\Big)\Big] + i\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\Big[j^*\Big(-\frac{2m}{\partial^2+m^2}\tilde{j}^* - \frac{D^2}{2(\partial^2+m^2)} j\Big) + \tilde{j}^*\Big(-\frac{2m}{\partial^2+m^2} j^* - \frac{D^2}{2(\partial^2+m^2)}\tilde{j}\Big)\Big]\Big\} =$$

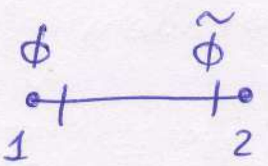
$$= \exp\Big\{ i\int d^8x \Big[j\frac{1}{\partial^2+m^2} j^* + \tilde{j}\frac{1}{\partial^2+m^2}\tilde{j}^*\Big] - i\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{j}\frac{2m}{\partial^2+m^2} j - i\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, \tilde{j}^*\frac{2m}{\partial^2+m^2} j^*\Big\}$$

Поэтому пропагаторы киральных суперполей материи имеют вид

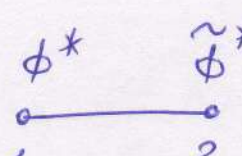


$=$


$$= \frac{i\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)}\delta^8_{12}$$



$$= \frac{i m \bar{D}^2}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12}$$



$$= \frac{i m D^2}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12}$$

§5. Однопетлевая перенормировка $N=1$ SQED

$$S = \frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\phi^* e^{-2V}\phi + \right.$$

$$\left. + \tilde\phi^* e^{2V}\tilde\phi\right) + \left(\frac{1}{2} m \int d^4x\, d^2\theta\, \tilde\phi\phi + \text{к.с.}\right)$$

$$Z = \exp\left\{ i S_I \left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} Z_0 \quad , \text{ где}$$

$$S_I = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left[\phi^*(e^{-2V}-1)\phi + \tilde\phi^*(e^{2V}-1)\tilde\phi\right]$$

а Z_0 имеет вид (в минимальной калибровке)

$$Z_0 = \exp\left\{ -ie^2\int d^8x\, J\frac{1}{\partial^2}J + i\int d^8x \left[j\frac{1}{\partial^2+m^2} j^* + \right.\right.$$

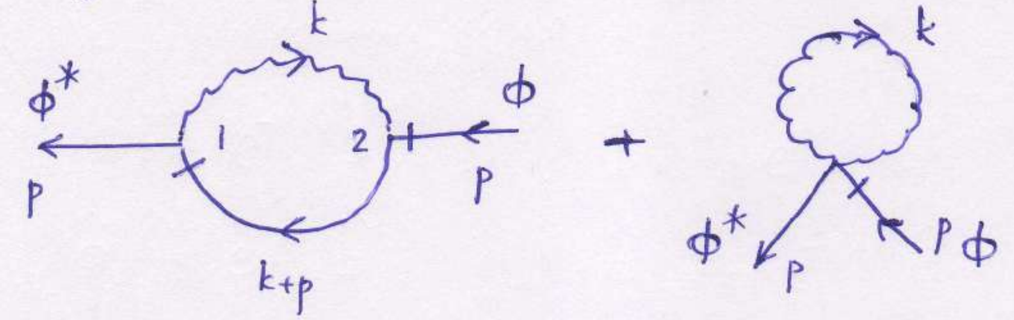
$$\left. + \tilde j \frac{1}{\partial^2+m^2}\tilde j^*\right] - i\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde j\, \frac{2m}{\partial^2+m^2} j -$$

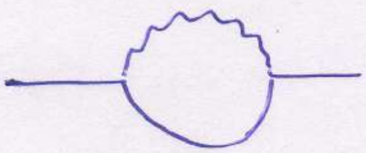
$$\left. - i\int d^4x\, d^2\bar\theta\, \tilde j^* \frac{2m}{\partial^2+m^2} j^* \right\}$$

Что может перенормироваться?

1) Заряд e
2) Масса m
3) Вф ϕ и $\tilde\phi$
4) Вф V – можно доказать, что не будет перенормироваться.

Найдём вначале перенормировку ВФ Φ и $\bar{\Phi}$:





$$\sim (-i)\, i S_{I_1}\, i S_{I_2} Z_0 = i S_{I_1} S_{I_2} Z_0$$

$$= i\int d^8x_1\, \Phi_1^* \cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta J_1}\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1}\cdot\int d^8x_2\, \frac{1}{2\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_2^*}\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta J_2}\,\Phi_2\, Z_0$$

$$= \frac{i}{4}\int d^8x_1\, d^8x_2\, \Phi_1^*\Phi_2 \cdot \frac{(-2ie^2)}{\partial^2}\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot \frac{i\,\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{k+p}{\delta^8_{12}} =$$

$$= \frac{ie^2}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, \Phi_1^*\Phi_2\cdot\frac{1}{\partial^2}\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{4}{\partial^2+m^2}\underset{k+p}{\delta^4(x_1-x_2)} \overset{\rightarrow}{=}$$

$$\overset{\rightarrow}{=} \frac{ie^2}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\, \Phi^*(p,\theta)\,\Phi(-p,\theta)\cdot\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(-k^2)(-(k+p)^2+m^2)}$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\, \Phi^*(p,\theta)\,\Phi(-p,\theta)\cdot\Delta G_1$$

где $\Delta G_1 = 2ie^2\displaystyle\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(-k^2)(-(k+p)^2+m^2)}$

После поворота Вика

$$\Delta G_1 = -2e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2((k+p)^2+m^2)} =$$

$$= -2e^2 \cdot \frac{2\pi^2}{16\pi^4} \ln\frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены} =$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{p} + \begin{matrix}\text{конечные}\\ \text{члены}\end{matrix} = -\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{p} + \begin{matrix}\text{конечн.}\\ \text{члены}\end{matrix}$$

Вторая диаграмма:

$$\sim (-i)\, iS_I Z_0 = S_I Z_0 \implies$$

$$\implies \frac{1}{2}\int d^8x\, \phi^*\phi \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)^2 Z_0 = -\frac{1}{2}\int d^8x\, \phi^*\phi \cdot$$

$$\cdot \frac{(-2ie^2)}{\partial^2}\delta^8_{12}\Big|_{1=2} = 0 \implies \Delta G_2 = 0.$$

Поэтому

$$G(\alpha, \Lambda/p) = 1 - \frac{\alpha}{\pi}\ln \Lambda/p + \begin{matrix}\text{конечные}\\ \text{члены}\end{matrix} + O(\alpha^2)$$

Положим $\phi = \sqrt{Z}\,\phi_R$. Тогда

$G_R = ZG$ и Z нужно выбрать в виде

$$Z = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\ln \Lambda/\mu + O(\alpha^2)$$

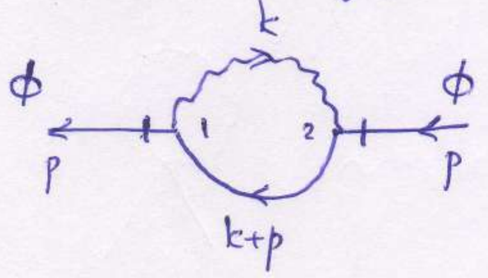
Аномальная размерность

$$\gamma(\alpha) = \frac{d\ln Z}{d\ln\mu} = \frac{d}{d\ln\mu}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}+O(\alpha^2)\right) =$$

$$= \frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}+O(\alpha^2)\right) = -\frac{\alpha}{\pi}.$$

Для $\tilde{\Phi}$ всё будет точно также.

Затем исследуем перенормировку массы:

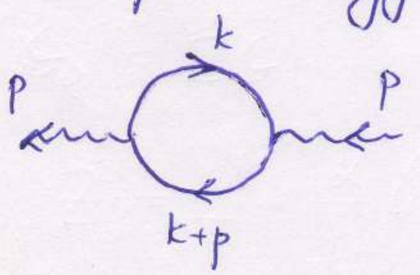


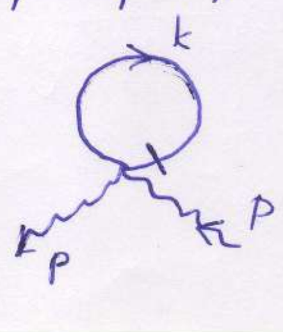
$$\sim \int d^8x_1 d^8x_2 \cdot \Phi_1\Phi_2 \cdot \frac{(-2ie^2)}{\partial^2}\delta^8_{12} \cdot \frac{mD^2}{\partial^2+m^2}\delta^8_{12} = 0$$

– нет расходящихся квантовых поправок к суперпотенциалу.

$\Longrightarrow$ $m_R = Zm$ и перенормировка массы оказывается связанной с перенормировкой волновой функции.

Теперь исследуем перенормировку заряда:





$$\sim (-i)\, i S_I Z_0 = S_I Z_0 =$$

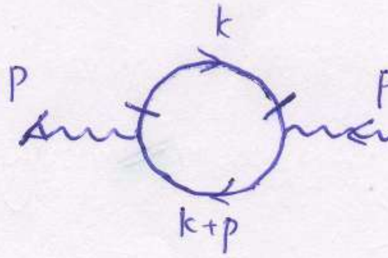
$$= \frac{1}{2}\int d^8x\, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*}\cdot V^2 \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j} \exp\Big(i\int d^8x \,\cdot$$

$$\cdot j \frac{1}{\partial^2+m^2} j^*\Big) = -\frac{1}{2}\int d^8x\, V^2 \cdot \frac{i D^2 \bar{D}^2}{4(\partial^2+m^2)}\, \delta^8_{12}\Big|_{1=2=x}$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^8x\, V^2 \frac{1}{\partial^2+m^2}\, \delta^4(x_1-x_2)\Big|_{x_1=x_2=x}$$

$$= -\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\, V(p,\theta)\, V(-p,\theta)\cdot \frac{1}{(-k^2+m^2)} \quad \Big| \times 2 \;\; \Phi \text{ и } \tilde{\Phi}$$

Аналогичным образом



$$\sim (-i)\, (i S_{I1})^2 Z_0 = i\, S_{I1}^2 Z_0 =$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^8x_1\, \frac{1}{2\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1^*}\, V_1 \cdot \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1}\cdot \int d^8x_2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta \tilde{j}_2^*}\, V_2\, \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta \tilde{j}_2} Z_0$$

$$= -\frac{i}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_1 V_2 \cdot \frac{i m \bar{D}^2}{\partial^2+m^2}\, \underset{k}{\delta^8_{12}} \cdot \frac{i m D^2}{\partial^2+m^2}\, \underset{k+p}{\delta^8_{12}}$$

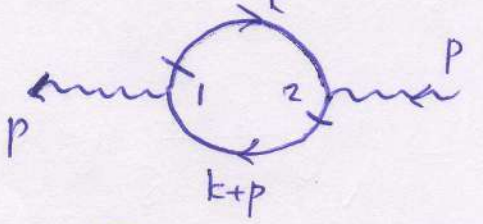
$$= +\frac{i}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_1 V_2 \cdot \frac{m^2}{\partial^2+m^2}\, \underset{k}{\delta^8_{12}} \cdot \frac{1}{\partial^2+m^2}\, \underset{k+p}{\delta^4(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\; V(p,\theta)\, V(-p,\theta)\, \frac{m^2}{(-k^2+m^2)\left(-(k+p)^2+m^2\right)}$$

$\times 2$

ϕ и $\tilde{\phi}$

Самая сложная диаграмма:



$$= \frac{i}{8}\int d^8x_1\, \frac{\delta}{\delta j_1^*}\, V_1\, \frac{\delta}{\delta j_1}\int d^8x_2\, \frac{\delta}{\delta j_2^*}\, V_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{\delta}{\delta j_2}\, Z_0 = \frac{i}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, \underset{+p}{V_1} V_2 \cdot \frac{iD_1^2\bar{D}_2^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{k+p}{\delta^8_{12}} \cdot \frac{i\bar{D}_1^2 D_2^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{+k}{\delta^8_{12}}$$

$$= -\frac{i}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_2\, \frac{\bar{D}_1^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{k+p}{\delta^8_{12}} \cdot \Big[\underset{+p}{D_1^2 V_1} \cdot \frac{\bar{D}_1^2 D_1^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{+k}{\delta^8_{12}}$$

$$- \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{4\partial^2 D_1^2}{\partial^2+m^2}\underset{+k}{\delta^8_{12}} + 2\,\underset{+p}{\bar{D}^a_{1R} V_1}\, \frac{D_{1Ra}\bar{D}_1^2 D_1^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{+k}{\delta^8_{12}}\Big] =$$

$$= -\frac{i}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_2\, \frac{1}{4(\partial^2+m^2)}\underset{k+p}{\delta^8_{12}} \Big[\underset{+p}{\bar{D}_1^2 D_1^2 V_1} \cdot \frac{\bar{D}_1^2 D_1^2}{4(\partial^2+m^2)}\underset{+k}{\delta^8_{12}}$$

$$- \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{4\partial^2 \bar{D}_1^2 D_1^2}{\partial^2+m^2}\underset{+k}{\delta^8_{12}} - \cancel{4}\,\underset{+p}{\bar{D}^b_{1L}\bar{D}^a_{1R} V_1}\, \frac{D_{1Lb}D_{1Ra}\bar{D}_1^2 D_1^2}{\cancel{4}(\partial^2+m^2)}\underset{+k}{\delta^8_{12}}\Big]$$

Воспользуемся коммутационным соотношением

$$\{D_{Lb}, D_{Ra}\} = -\left((1-\gamma_5)\gamma^\mu C\right)_{ba} \cdot i\partial_\mu$$

Тогда получаем, что

$$= -\frac{i}{8}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_2 \cdot \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} \underset{k+p}{\delta^8_{12}} \cdot \Big[\bar{D}_1^2 D_1^2 \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{\bar{D}_1^2 D_1^2}{4(\partial^2+m^2)} \underset{+k}{\delta^8_{12}} - \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{4\partial^2 \bar{D}_1^2 D_1^2}{\partial^2+m^2} \underset{+k}{\delta^8_{12}} + 2i\, \bar{D}^b_{1L} \bar{D}^a_{1R} \underset{+p}{V_1} \cdot (\gamma^\mu C)_{ba} \frac{\partial_\mu \bar{D}_1^2 D_1^2}{\partial^2+m^2} \underset{+k}{\delta^8_{12}} \Big] =$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_2 \cdot \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} \underset{k+p}{\delta^8_{12}} \Big[\bar{D}_1^2 D_1^2 \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} - \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{4\partial^2}{\partial^2+m^2} + 2i\, \bar{D}^b_{1L} \bar{D}^a_{1R} \underset{+p}{V_1} \cdot (\gamma^\mu C)_{ba} \frac{\partial_\mu}{\partial^2+m^2} \Big] \underset{+k}{\delta^4(x_1-x_2)}$$

Имеем:

$$\bar{D}^2 D^2 V = \frac{1}{2}\left(\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2\right) V + \frac{1}{2}\left(\bar{D}^2 D^2 - D^2 \bar{D}^2\right) V =$$

$$= -8\partial^2 \Pi_{1/2} V - 8\partial^2 V + \frac{1}{2}\left[\bar{D}^2, D^2\right] V$$

где $\left[\bar{D}^2, D^2\right] V \overset{D/3}{=} -2\left[\bar{D}^b_L \bar{D}^a_R\right] \cdot \left\{D_{Lb}, D_{Ra}\right\} V =$

$$= 4\left[\bar{D}^b_L, \bar{D}^a_R\right] i (\gamma^\mu C)_{ba} \partial_\mu V$$

Поэтому результат может быть преобразован к виду

 $= -\frac{i}{2}\int d^8x_1\, d^8x_2\, V_2 \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} \underset{k+p}{\delta^8_{12}} \cdot$

$$\cdot\Big[-8\partial^2\Pi_{1/2} \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} - 8\partial^2 \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{1}{4(\partial^2+m^2)} - \underset{+p}{V_1} \cdot \frac{4\partial^2}{\partial^2+m^2}$$

+ члены с $[\bar D^2_1, D^2]V$ $+ 2i \cdot \frac{1}{2}\{\bar D^b_{1L}, \bar D^a_{1R}\} V_1 \cdot$

$$\cdot (\gamma^\mu C)_{ba} \frac{\partial_\mu}{\partial^2+m^2}\Big] \underset{k}{\delta^4(x_1-x_2)}$$

$$\longrightarrow = -\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta\, V(-p,\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{4(-(k+p)^2+m^2)}$$

$$\cdot\Big[-2\partial^2\Pi_{1/2} V(p,\theta) \cdot \frac{1}{(-k^2+m^2)} - 2\frac{(-p^2)}{(-k^2+m^2)} V(p,\theta)$$

$$-\frac{4(-k^2)}{(-k^2+m^2)} V(p,\theta) + i(\gamma^\mu C)_{ba} \cdot \cancel{(-1)} C^{db} C^{ca} ((1-\gamma_5)\gamma^\nu C)_{dc}\, i$$

$$\cancel{i^2}\, p_\nu k_\mu \frac{1}{(-k^2+m^2)} V(p,\theta)\Big]$$

$$tr(\gamma^\mu C \cdot (-C) \cdot (1+\gamma_5)\gamma^\nu C) \cdot C) = -4\eta^{\mu\nu}$$

$$2p^2 + 4k^2 + 4k_\mu p_\mu = 2k^2 + 2(k+p)^2$$

$$= \frac{-i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\, \frac{1}{(-(k+p)^2+m^2)(-k^2+m^2)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ -\frac{1}{2} V\partial^2\Pi_{1/2}V + \frac{1}{2}\left(k^2+(k+p)^2\right) V^2 \right\} \Big| \times 2$$

Φ и $\tilde{\Phi}$

Суммируем все диаграммы:

$$=$$

$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, d^4\theta \left\{ \frac{1}{(-(k+p)^2+m^2)(-k^2+m^2)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left[+\frac{1}{2} V\partial^2\Pi_{1/2}V - \frac{1}{2}\cancel{\left(k^2+(k+p)^2\right) V^2} \cancel{+ m^2V^2} \right]$$

$$\left. - \cancel{\frac{1}{(-k^2+m^2)}}\, V^2 \right\}$$

$$= +\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\, V(p,\theta)\partial^2\Pi_{1/2}V(-p,\theta) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(-k^2+m^2)(-(k+p)^2+m^2)}$$

– все вклады, не являющиеся поперечными, взаимно уничтожаются.

Далее будет показано, что квантовые поправки к рассматриваемой функции Грина поперечны, т.е.

$$\Gamma^{(2)}_V - S_{gf} = -\frac{1}{16\pi}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta\, V(-p,\theta)\,\partial^2\Pi_{1/2} V(p,\theta)\cdot d^{-1}$$

где $d^{-1} = d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p, \Lambda/m)$

В древесном приближении (см. стр. 17)

$$S = -\frac{1}{4e_0^2}\int d^8x\, V\partial^2\Pi_{1/2}V = -\frac{1}{4e_0^2}\int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} V(-p,\theta)\,\partial^2\Pi_{1/2}V(p,\theta)$$

Поэтому

$$d^{-1} = \frac{16\pi}{4e_0^2} = \frac{4\pi}{e_0^2} = \frac{1}{\alpha_0}$$ где $\alpha_0 \equiv \frac{e_0^2}{4\pi}$ — голая константа связи.

С учётом однопетлевого приближения

$$d^{-1} = \alpha_0^{-1} - 16\pi\cdot\left(+\frac{i}{2}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{(-k^2+m^2)(-(k+p)^2+m^2)} + O(\alpha_0)$$

Интеграл вычисляется в Евклидовом пространстве после поворота Вика:

$$d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/P, \Lambda/m) = \alpha_0^{-1} + 16\pi\cdot\frac{1}{2}\int^{\Lambda}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{1}{(K^2+m^2)((K+P)^2+m^2)} + O(\alpha_0)$$

$$= \alpha_0^{-1} + 8\pi\cdot 2\pi^2\cdot\frac{1}{16\pi^4}\ln\frac{\Lambda}{P} + \text{конечные члены} + O(\alpha_0)$$

$$d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/\rho, \Lambda/m) = \alpha_0^{-1} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\rho} + \text{конечные члены} + O(\alpha_0)$$

Перенормировка: Положим

$$\alpha_0^{-1} \equiv \alpha^{-1} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha)$$ где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ – перенормированная константа связи.

Тогда

$$d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/\rho, \Lambda/m) = \alpha^{-1} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\rho} + \text{конечные члены} + O(\alpha)$$

$$= \alpha^{-1} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{\mu}{\rho} + \text{конечные члены} + O(\alpha)$$

– конечное выражение.

Перенормировка заряда кодируется в β-функции

$$\beta(\alpha) \equiv \left.\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0 = const}.$$

В нашем случае

$$\alpha^{-1} = \alpha_0^{-1} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha_0)$$

$$\frac{d\alpha^{-1}}{d\ln\mu} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{d\ln\mu} = -\frac{1}{\pi} + O(\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad \beta(\alpha) = +\frac{\alpha^2}{\pi} + O(\alpha).$$

Общее предположение – NSVZ β-функция

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}\left(1 - \gamma(\alpha)\right).$$

§ 6. Тождества Уорда в N=1 SQED

Почему квантовые поправки к 2-х точечной функции Грина калибровочного поля поперечны? Это следствие калибровочной инвариантности, которая на квантовом уровне закодирована в тождествах Уорда (Славнова-Тейлора).

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \mathcal{D}V \; \exp\left(iS + iS_{gf} + iS_{source}\right)$$

Теория инвариантна относительно преобразований

$$\phi \to e^{-i\Lambda}\phi\,; \quad \tilde{\phi} \to e^{+i\Lambda}\tilde{\phi}\,; \quad V \to \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda) + V$$

Совершим в производящем функционале замену

$$\left.\begin{aligned} \phi &\to \phi' \equiv \phi - i\Lambda\phi \\ \tilde{\phi} &\to \tilde{\phi}' \equiv \tilde{\phi} + i\Lambda\phi \\ V &\to V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda) \end{aligned}\right\} \quad \text{где } \Lambda - \text{бесконечно малый параметр.}$$

Тогда S не изменится, а изменятся S_{gf} и S_{source}. Имеем:

$$S_{gf} = -\frac{1}{64 e_0^2 \xi_0}\int d^8x\; V(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2)V \longrightarrow$$

$$\to -\frac{1}{32e_0^2 Z_0}\int d^8x\, V\left(D^2\bar{D}^2+\bar{D}^2D^2\right)\cdot\frac{i}{2}(\Lambda^*-\Lambda)+S_{gf}$$

$$= S_{gf} - \frac{i}{64e_0^2 Z_0}\int d^8x\, V\left(D^2\bar{D}^2\Lambda^* - \bar{D}^2D^2\Lambda\right) =$$

$$= S_{gf} + \frac{i}{4e_0^2 Z_0}\int d^8x\, V\partial^2(\Lambda^*-\Lambda)$$

$$S_{source} = \int d^8x\, JV + \int d^4x\, d^2\theta\,(j\phi+\tilde{j}\tilde{\phi}) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}\,\cdot$$

$$\cdot(j^*\phi^*+\tilde{j}^*\tilde{\phi}^*) \to$$

$$\to S_{source} + \frac{i}{2}\int d^8x\, J(\Lambda^*-\Lambda) + \int d^4x\, d^2\theta\,\big(j(-i\Lambda)\phi$$

$$+\tilde{j}\cdot i\Lambda\tilde{\phi}\big) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}\,\left(j^*\cdot i\Lambda^*\phi^* - i\tilde{j}^*\Lambda^*\tilde{\phi}^*\right)$$

Поэтому

$$Z \to Z' = \int D\phi\, D\tilde{\phi}\, DV\, \exp\Big\{iS + iS_{gf} + iS_{source}$$

$$-\frac{1}{4e_0^2 Z_0}\int d^8x\, V\partial^2(\Lambda^*-\Lambda) - \frac{1}{2}\int d^8x\, J(\Lambda^*-\Lambda) +$$

$$+\int d^4x\, d^2\theta\,\left(j\Lambda\phi - \tilde{j}\Lambda\tilde{\phi}\right) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}\,\big(-j^*\Lambda^*\phi^*$$

$$+\tilde{j}^*\Lambda^*\tilde{\phi}^*\big)\Big\} = Z$$

Раскладываем по Λ:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \mathcal{D}V \exp\left(iS + iS_{gf} + iS_{source}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ -\frac{1}{4e_0^2 \xi_0} \int d^8x\, V \partial^2 (\Lambda^* - \Lambda) - \frac{1}{2} \int d^8x\, J(\Lambda^* - \Lambda) \right.$$

$$\left. + \int d^4x\, d^2\theta \left(j\Lambda\phi - \tilde{j}\Lambda\tilde{\phi} \right) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta} \left(-j^*\Lambda^*\phi^* + \tilde{j}^*\Lambda^*\tilde{\phi}^* \right) \right\}$$

Продифференцируем по Λ:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \mathcal{D}V \exp\left(iS + iS_{gf} + iS_{source}\right) \cdot \left\{ -\frac{\bar{D}^2}{8e_0^2 \xi_0} \partial^2 V \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{D}^2}{4} J + j\phi - \tilde{j}\tilde{\phi} \right\} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{Z}$$

$$0 = -\frac{\bar{D}^2}{4} J - \frac{\bar{D}^2}{8e_0^2 \xi_0} \partial^2 \langle V \rangle + j \langle \phi \rangle - \tilde{j} \langle \tilde{\phi} \rangle$$

где $\langle A \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\tilde{\phi}\, \mathcal{D}V \exp\left(iS + iS_{gf} + iS_{source}\right)$

При этом $\langle V \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} Z \cdot \frac{1}{Z} = \frac{\delta W}{\delta J} \equiv V$

и т.д.

С другой стороны, если

$\Gamma = W - S_{source}$, то $\frac{\delta \Gamma}{\delta V} = -J$ – стандартное преобразование Лежандра

Аналогично,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} = -j\ ; \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}} = -\tilde{j} \quad \Longrightarrow$$

$$0 = +\frac{\bar D^2}{4}\frac{\delta\Gamma}{\delta V} - \frac{\bar D^2}{8e_0^2\xi_0}\partial^2 V - \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\phi + \frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde\phi}\cdot\tilde\phi$$

Важно:

$$\frac{\bar D^2}{4}\frac{\delta S_{gf}}{\delta V} = \frac{\bar D^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{32e_0^2\xi_0}\right)\Big(\underbrace{D^2\bar D^2}_{-16\partial^2} + \cancelto{0}{\bar D^2 D^2}\Big)V =$$

$$= \frac{\bar D^2}{8e_0^2\xi_0}\partial^2 V$$

$\Longrightarrow$

$$0 = \frac{\bar D^2}{4}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta V} - \frac{\delta S_{gf}}{\delta V}\right) - \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\phi + \frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde\phi}\tilde\phi$$

Окончательно тождество Уорда записывается в виде

$$\boxed{\bar D^2\frac{\delta}{\delta V}\left(\Gamma - S_{gf}\right) = 4\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\cdot\phi - 4\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde\phi}\cdot\tilde\phi}$$

Аналогичным образом при дифференцировании по Λ^* получаем

$$\boxed{D^2\frac{\delta}{\delta V}\left(\Gamma - S_{gf}\right) = -4\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*}\phi^* + 4\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde\phi^*}\tilde\phi^*}$$

Важно: поля при этом не полагались равными 0.

Докажем теперь поперечность квантовых поправок:

Дифференцируем по V_y и полагаем поле $= 0$.

Тогда

$$0 = \bar D_x^2\frac{\delta}{\delta V_x}\frac{\delta}{\delta V_y}\left(\Gamma - S_{gf}\right) = D_x^2\frac{\delta^2}{\delta V_x\,\delta V_y}\left(\Gamma - S_{gf}\right)$$

В общем случае

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{gf} = \frac{1}{2}\int d^8x \left[V A(\partial^2)\, \partial^2 \Pi_{1/2} V + V B(\partial^2) V \right] =$$

$$\left[\text{поскольку} \quad \int d^8x\, V [D^2, \bar{D}^2] V \equiv 0 \right]$$

$$= \int d^4\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[V(p,\theta) A(-p^2)\, \partial^2 \Pi_{1/2} V(-p,\theta) + V(p,\theta) B(-p^2) \cdot V(-p,\theta) \right]$$

Как следствие,

$$\frac{\delta^2}{\delta V_x \delta V_y} \left(\Gamma_V^{(2)} - S_{gf} \right) = \frac{\delta}{\delta V_x} \cdot \left[A(\partial^2) \partial^2 \Pi_{1/2} V_y + B(\partial^2) V_y \right] =$$

$$= \left[A(\partial^2) \partial^2 \Pi_{1/2} + B(\partial^2) \right] \delta^8_{xy}.$$

Подставляем это выражение в тождество Уорда:

$$0 = D_x^2 \frac{\delta^2}{\delta V_x \delta V_y} \left(\Gamma^{(2)} - S_{gf} \right) = D_x^2 \left[\underset{0}{A(\partial^2) \partial^2 \Pi_{1/2}} + B(\partial^2) \right] \delta^8_{xy}$$

$\Longrightarrow B(\partial^2) = 0$ и остаётся только $A(\partial^2)$.

При этом очевидно, что т.к.

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{gf} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta\, V(-p,\theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(p,\theta) \cdot d^{-1}, \text{ то}$$

$$A(\partial^2) = -\frac{1}{8\pi^2} d^{-1}(\partial^2)$$ — поперечность доказана.

Обычно под ТУ понимается связь между 3-х точечными ф-ями Грина с калибровочным полем и 2-х точечными функциями Грина суперполей материи. Получим их. Имеем:

$$\bar{D}_x^2 \frac{\delta}{\delta V_x}(\Gamma - S_{gf}) = 4\,\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_x}\,\phi_x - 4\,\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_x}\,\tilde{\phi}_x .$$

Продифференцируем это равенство по ϕ_y и ϕ_z^*; а затем положим поле равными 0:

$$\bar{D}_x^2 \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x\, \delta \phi_z^*\, \delta \phi_y} = 4 \underbrace{\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x\, \delta \phi_z^*}}_{\frac{1}{16} \bar{D}_x^2 D_z^2 G(\partial^2)\, \delta^8_{xz}} \cdot \left(-\frac{\bar{D}^2}{2}\, \delta^8_{xy}\right)$$

продольная часть

Поэтому

$$\bar{D}_x^2 \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta V_x\, \delta \phi_z^*\, \delta \phi_y} = -\frac{1}{8}\, G(\partial^2) \cdot \bar{D}_x^2 D_x^2\, \delta^8_{xz} \cdot \bar{D}_x^2\, \delta^8_{xy} =$$

$$= -\frac{1}{8} \bar{D}_x^2 \left[G(\partial^2) D_x^2\, \delta^8_{xz}\, \bar{D}_x^2\, \delta^8_{xy} \right]$$

$$= -\frac{1}{8} \bar{D}_x^2 \left[G(\partial^2) D_z^2\, \delta^8_{xz} \cdot \bar{D}_y^2\, \delta^8_{xy} \right]$$

— очевидны свойства киральности.

Другие ТУ получаются аналогичным образом.

§7. Квантование $N=1$ SYM

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\, tr\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i} (e^{-2V})_i{}^j \phi_j$$

$$+ \left(\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4} m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}\lambda^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \right) + к.с. \right)$$

Предполагаем калибровочную инвариантность

$$\phi \to e^{-i\Lambda}\phi \qquad e^{-2V} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-2V} e^{i\Lambda}$$

$$\phi^+ \to \phi^+ e^{i\Lambda^+}$$

Тогда $\quad W_a = \frac{1}{8}\bar{D}^2 \left(e^{2V} D_{aR}\, e^{-2V} \right) \to e^{-i\Lambda} W_a e^{i\Lambda}$

Для того, чтобы суперпотенциал был бы калибровочно инвариантным, необходимо, чтобы

$$m^{ij}\phi_i\phi_j \longrightarrow m^{ij}(e^{-i\Lambda})_i{}^k \phi_k \cdot (e^{-i\Lambda})_j{}^l \phi_l = m^{ij}\phi_i\phi_j$$

В низшем порядке по Λ это даёт

$$0 = m^{ij}\Lambda_i{}^k \phi_k \phi_j + m^{ij}\Lambda_j{}^l \phi_i \phi_l$$

где $\Lambda_i{}^j = \Lambda^A (T^A)_i{}^j$. Поэтому

$$0 = \Lambda^A \left\{ m^{il}(T^A)_i{}^k \phi_k \phi_l + m^{ki}\Lambda_i{}^l \phi_k \phi_l \right\}$$

$$\Longrightarrow\quad 0 = m^{il}(T^A)_i{}^k + m^{ki}(T^A)_i{}^l$$

Аналогичным образом юкавские слагаемые инвариантны в случае

$$0 = \lambda^{imn}(T^A)_i{}^k + \lambda^{kin}(T^A)_i{}^m + \lambda^{kmi}(T^A)_i{}^n$$

Как и в $N=1$ SQED необходимо провести фиксацию калибровки. Как и ранее, можно использовать

$$S_{gf} = -\frac{1}{16e^2\xi}\, tr\int d^4x\, d^4\theta\; D^2V\,\bar{D}^2V$$

(В наших обозначениях $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$)

Но в неабелевом случае аккуратная процедура квантования сложнее и требует введения духов Фаддеева-Попова:

Вставляем в производящий ф-л

$$1 = \Delta\int \mathcal{D}\Lambda\; \delta(D^2V^\Lambda - a^+)\,\delta(\bar{D}^2V^\Lambda - a)$$

где a - киральное суперполе, т.ч.

$$Z[J=0; j=0] = \int \mathcal{D}V\,\mathcal{D}\phi_i\; e^{iS}\cdot\Delta\int\mathcal{D}\Lambda\;\delta(D^2V^\Lambda - a^+)\,\delta(\bar{D}^2V^\Lambda - a)$$

Затем делаем замену переменных, совпадающую по форме с калибровочными преобразованиями.

$$Z[\underset{0}{\underset{\parallel}{J}},\underset{0}{\underset{\parallel}{j}}] = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\phi_i \, e^{iS} \cdot \Delta \cdot \cancel{\int \mathcal{D}\Lambda} \, \delta(D^2 V - a^+) \delta(\bar{D}^2 V - a)$$

можно убрать, т.к. ничего не зависит от Λ.

Вычислим величину Δ. Для этого нужно знать бесконечно малое преобразование суперполя V:

$$e^{-2V} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-2V} e^{i\Lambda}$$

Имеем:

$$0 = [V, e^{-2V}] \quad \Rightarrow \quad 0 = [V', e^{-2V'}]$$

$$0 = [\delta V, e^{-2V}] + [V, \delta e^{-2V}]$$

При этом $\delta e^{-2V} = -i\Lambda^+ e^{-2V} + e^{-2V} i\Lambda$

$$\Rightarrow \quad 0 = [\delta V, e^{-2V}] + [V, -i\Lambda^+ e^{-2V} + e^{-2V} i\Lambda]$$

Умножим слева на e^{2V}:

$$0 = e^{2V} \delta V e^{-2V} - \cancel{e^{2V} e^{-2V}} \delta V - e^{2V} [V, i\Lambda^+] e^{-2V}$$

$$+ [V, i\Lambda]$$

$$\delta V - e^{2V} \delta V e^{-2V} = - e^{2V} [V, i\Lambda^+] e^{-2V} + [V, i\Lambda]$$

Положим $\quad V_{Adj} X \equiv [V, X]$

Тогда если $f(V) = f_0 + f_1 V + f_2 V^2 + \ldots$, то

$$f(V)_{Adj} \cdot X = f_0 X + f_1 [V, X] + f_2 [V[V, X]] + \ldots$$

При этом очевидно, что

$$(e^{2V})_{Adj} X = e^{2V} X e^{-2V}$$

Поэтому

$$(1 - e^{2V})_{Adj} \, \delta V = -(Ve^{2V})_{Adj} \, i\Lambda^+ + V_{Adj} \, i\Lambda$$

$$\Rightarrow \quad \delta V = \left(\frac{V}{1 - e^{2V}}\right)_{Adj} \cdot i\Lambda - \left(\frac{Ve^{2V}}{1 - e^{2V}}\right)_{Adj} i\Lambda^+ =$$

$$= \left(\frac{V}{1 - e^{2V}}\right)_{Adj} \cdot i\Lambda + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}}\right)_{Adj} i\Lambda^+$$

Поэтому

$$\frac{1}{\Delta} = \int \mathcal{D}\Lambda \, \delta(D^2 V^\Lambda - a^+) \, \delta(\bar{D}^2 V^\Lambda - a)$$

Нас интересует значение Δ при $D^2 V = a^+$ и $\bar{D}^2 V = a$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta} = \int \mathcal{D}\Lambda \, \delta[D^2 V + D^2 \delta V - a^+] \cdot \delta[\bar{D}^2 V + \bar{D}^2 \delta V - a] =$$

$$= \int \mathcal{D}\Lambda \, \delta(D^2 \delta V) \, \delta(\bar{D}^2 \delta V) =$$

$$= \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta\left[D^2 \left(\left(\frac{V}{1-e^{2V}}\right)_{Adj} i\Lambda + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}}\right)_{Adj} i\Lambda^+ \right)\right]$$

$$\cdot\, \delta\left[\bar{D}^2 \left(\left(\frac{V}{1-e^{2V}}\right)_{Adj} i\Lambda + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}}\right)_{Adj} i\Lambda^+ \right)\right]$$

Имеем:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \quad \text{т.к.}$$

$$\int dx\, \delta(ax) = \frac{1}{a}\int d(ax)\,\delta(ax) = \frac{1}{a} = \int dx\, \frac{1}{a}\delta(x)$$

Аналогично

$$\delta^n(a_i{}^j x_j) = \frac{1}{\det a}\,\delta^n(x_i)$$

Поэтому

$$\Delta\Big|_{\substack{D^2V = a^+ \\ \bar{D}^2 V = a}} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta\Lambda} D^2\delta V & \frac{\delta}{\delta\Lambda}\bar{D}^2\delta V \\ \frac{\delta}{\delta\Lambda^+} D^2\delta V & \frac{\delta}{\delta\Lambda^+}\bar{D}^2\delta V \end{pmatrix} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{c}_0 \mathcal{D}c\, \exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^8x \left(\bar{c}_0^A D^2 \delta V^A \Big|_{\substack{\Lambda\to c \\ \Lambda^+\to c^+}} + \bar{c}_0^{+A} \bar{D}^2 \delta V^A \Big|_{\substack{\Lambda\to c \\ \Lambda^+\to c^+}} \right)\right\}$$

грассманово нечётные духи

Вводим новые поля

$$\bar{c}^+ \equiv D^2 \bar{c}_0 \quad \text{– антикирально}$$

$$\bar{c} \equiv \bar{D}^2 \bar{c}_0^+ \quad \text{– кирально.}$$

тогда

$$\Delta\Big|_{\substack{D^2V=a^+\\ \bar{D}^2V=a}} = \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\, \exp\Big\{ i\cdot\frac{1}{e_0^2}\int d^8x\, \mathrm{tr}\,(\bar{c}+\bar{c}^+)\cdot$$

$$\cdot\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-\bar{e}^{2V}}\Big)_{Adj} c^+\Big]\Big\}$$

т.о.

$$S_{FP} = \frac{1}{e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\,(\bar{c}+\bar{c}^+)\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-\bar{e}^{2V}}\Big)_{Adj} c^+\Big]$$

т.о. мы получили, что

$$Z = \int \mathcal{D}V\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\, \exp(iS+iS_{FP})\,\delta(D^2V-a^+)\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\bar{D}^2V-a)$$

– Но здесь от a ничего не зависит, т.ч. можно провести усреднение по всем возможным калибровкам с весом $\exp\Big(-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\mathrm{tr}\int d^8x\, a^+a\Big)$.

тогда

$$Z[J,j] = \int \mathcal{D}a\,\mathcal{D}V\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\, \exp(iS+iS_{FP})\cdot\delta(D^2V-a^+)$$

$$\cdot\,\delta(\bar{D}^2V-a)\cdot\exp\Big(-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\mathrm{tr}\int d^8x\, a^+a\Big)\exp(iS_{source})$$

$$= \int \mathcal{D}V\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\, \exp(iS+iS_{FP}+iS_{gf}+iS_{source})$$

где

$$S_{gf} = -\frac{1}{16 e_0^2 \xi_0} \operatorname{tr} \int d^8x\, D^2 V\, \bar{D}^2 V = -\frac{1}{32 \xi_0} \int d^8x\, D^2 V^A \bar{D}^2 V^A.$$

– похоже на фиксацию калибровки в эл./д., но теперь ещё имеются духи.

т.о.

$$Z[J, j] = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \; e^{iS_{total} + iS_{source}}, \text{ где}$$

$$S_{total} = S_{SYM} + S_{FP} + S_{gf}.$$

---

§ 8. BRST – инвариантность

После фиксации калибровки полное действие уже не является калибровочно инвариантным. Но остаётся некоторый кусок, который называется BRST симметрией.

Чтобы записать BRST-преобразования в наиболее удобном виде введём вспомогательное поля

f – киральное

f^+ – антикиральное

Тогда

$$\exp(iS_{gf}) = \exp\left(-\frac{i}{16\xi_0 e_0^2}\operatorname{tr}\int d^8x\, D^2V\bar{D}^2V\right) =$$

$$= \int \mathcal{D}f\, \exp\left\{\frac{16\xi_0 i}{e_0^2}\operatorname{tr}\int d^8x\, f^+f + \frac{i}{e_0^2}\operatorname{tr}\int d^8x\left(f D^2V\right.\right.$$

$$\left.\left. + f^+\bar{D}^2V\right)\right\}$$

Действительно, на ур-ях движения тогда

$$\frac{16\xi_0}{e_0^2} f + \frac{1}{e_0^2}\bar{D}^2V = 0$$

$$\Rightarrow \quad f = -\frac{1}{16\xi_0}\bar{D}^2V$$

Аналогично

$$f^+ = -\frac{1}{16\xi_0}D^2V$$

Поэтому после исключения вспомогательных полей получим

$$\exp\left\{-\frac{16\xi_0 i}{e_0^2}\left(-\frac{1}{16\xi_0}\right)^2\operatorname{tr}\int d^8x\, D^2V\bar{D}^2V\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\operatorname{tr}\int d^8x\, D^2V\bar{D}^2V\right\} = \exp(iS_{gf})$$

– верно.

В такой форме записи BRST-преобразования могут быть записаны в виде

$$\delta V = -\varepsilon \left\{ \left(\frac{V}{1-e^{-2V}}\right)_{Adj} c^+ + \left(\frac{V}{1-e^{2V}}\right)_{Adj} c \right\}$$

$$\delta \bar{c} = \varepsilon \bar{D}^2 f^+ ; \qquad \delta \bar{c}^+ = \varepsilon D^2 f \qquad \delta\phi_i = (\varepsilon c \phi)_i$$

$$\delta c = \varepsilon c^2 ; \qquad \delta c^+ = \varepsilon (c^+)^2 ; \quad \delta f = \delta f^+ = 0$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ – грассманово нечётный скалярный параметр.

Для доказательства BRST-инвариантности полного действия необходимо доказать нильпотентность BRST-преобразований: $\Lambda \to i\varepsilon c$, $\Lambda^+ \to i\varepsilon c^+$

$$\delta_1 \delta_2 e^{-2V} = \delta_1 \left[+ \varepsilon_2 c^+ e^{-2V} - e^{-2V} \varepsilon_2 c \right] =$$

$$= \Big[\overset{\text{"}-\text{"}}{+} \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 \cancel{(c^+)^2 e^{-2V}} + \varepsilon_2 c^+ \big(\overset{\text{"}+\text{"}}{+} \cancel{\varepsilon_1 c^+ e^{-2V}} - e^{-2V} \varepsilon_1 c \big)$$

$$- \big(+ \varepsilon_1 c^+ e^{-2V} - \cancel{e^{-2V} \varepsilon_1 c} \big) \cdot \varepsilon_2 c - e^{-2V} \cancel{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 c^2} \Big]$$

$$= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 c^+ e^{-2V} c + \varepsilon_1 \overset{\text{"}-\text{"}}{\varepsilon_2} c^+ e^{-2V} c = \overset{\text{"}-\text{"}}{0} \text{ – верно.}$$

$$\delta_1 \delta_2 \bar{c} = \delta_1 (\varepsilon_2 \bar{D}^2 f^+) = 0$$

$$\delta_1 \delta_2 c = \delta_1 (\varepsilon_2 c^2) = \varepsilon_2 (\varepsilon_1 \cancel{c^2 c} + \cancel{c\, \varepsilon_1 c^2}) = 0$$

$$\delta_1 \delta_2 \phi_i = \delta_1 (\varepsilon_2 c \phi)_i = (\varepsilon_2 \overset{\text{"}-\text{"}}{c} \cdot \varepsilon_1 c \phi)_i + (\varepsilon_2 \varepsilon_1 c^2 \phi)_i = 0$$

– всё получается правильно.

Убедимся в BRST-инвариантности полного действия

$$S_{total} = S + S_{gf} + S_{gh}.$$

Для калибровочного поля и материи BRST-преобразования получаются из калибровочных преобразований заменой

$$\Lambda \to i\varepsilon c \qquad (\Lambda^+ \to (i\varepsilon c)^+ = -ic^+\varepsilon = i\varepsilon c^+)$$

$$\Lambda^+ \to i\varepsilon c^+$$

Поэтому калибровочно инвариантное действие S также будет и BRST-инвариантным.

Остальные слагаемые имеют вид

$$S_{gf} + S_{gh} = \frac{16\xi_0}{e_0^2}\, tr\int d^8x\, f^+ f + \frac{1}{e_0^2}\, tr\int d^8x\, (f D^2 V +$$

$$+ f^+ \bar{D}^2 V) + \frac{tr}{e_0^2}\int d^8x\, (\bar{c} + \bar{c}^+)\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+\Big]$$

Первое слагаемое очевидно BRST инвариантно.

Кроме того, замечаем, что

$$\delta V = -\varepsilon\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+ + \Big(\frac{V}{1-e^{+2V}}\Big)_{Adj} c\Big]$$

Поэтому в силу нильпотентности BRST-преобразований

$$\delta\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+ + \Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c\Big] = 0$$

Поэтому

$$\delta(S_{gf}+S_{gh}) = \frac{1}{e_0^2}\,tr\int d^8x\,\big(f D^2\delta V + f^+\bar D^2\delta V\big)$$

$$+\frac{1}{e_0^2}\,tr\int d^8x\,\big(\delta\bar c+\delta\bar c^+\big)\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+\Big]$$

$$= \frac{1}{e_0^2}\,tr\int d^8x\,\Big\{-\varepsilon f D^2\Big[\cancel{\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+}\Big]$$

$$-\varepsilon f^+\bar D^2\Big[\cancel{\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+}\Big] +$$

$$+\big(\cancel{\varepsilon\bar D^2 f^+ + \varepsilon D^2 f}\big)\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj} c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj} c^+\Big]\Big\} = 0$$

после интегрирования по частям.

При этом суперполе f можно исключить из уравнений движения и подставить в BRST-преобразования. Тогда

$$\delta\bar c = \bar D^2 f^+ \Rightarrow \varepsilon\bar D^2\Big(-\frac{1}{16\xi_0}D^2 V\Big)$$

$$\delta\bar c^+ = \varepsilon D^2 f \Rightarrow \varepsilon D^2\Big(-\frac{1}{16\xi_0}\bar D^2 V\Big)$$

тогда как

$$S_{gf} = -\frac{1}{16 e_0^2\xi_0}\,tr\int d^8x\, D^2 V\,\bar D^2 V$$

§9. Тождества Славнова-Тейлора

Производящий функционал теории Янга-Миллса имеет вид

$$Z[J,j,\mathfrak{z}] = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\, \exp\{ iS + iS_{gf} +$$

$$+ iS_{gh} + iS_{source} \}$$

где S_{source} можно выбрать в виде

$$S_{source} = \int d^4x\, d^4\theta\, J^A V^A + \int d^4x\, d^2\theta \left(\mathfrak{z}^A c^A + \bar{\mathfrak{z}}^A \bar{c}^A + j^i \phi_i \right)$$

$$+ \int d^4x\, d^2\bar{\theta} \left(c^{*A} \mathfrak{z}^{*A} + \bar{c}^{*A} \bar{\mathfrak{z}}^{*A} + j^*_i \phi^{*i} \right)$$

Для того, чтобы получить тст, необходимо сделать в производящем функционале замену переменной, которая по форме совпадает с BRST-преобразованием. При этом f и f^+ можно выразить из ур-ях движения. Тогда

$$0 = \int d^4x\, d^4\theta_x\, J^A_x \langle \delta V^A_x \rangle + \int d^4x\, d^2\theta_x \left(\mathfrak{z}^A_x \langle \delta c^A_x \rangle \right.$$

$$+ \bar{\mathfrak{z}}^A_x \langle \delta \bar{c}^A_x \rangle + j^i_x \langle \phi_{i_x} \rangle \Big) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}_x \left(\langle \delta c^{*A}_x \rangle \mathfrak{z}^{*A}_x \right.$$

$$\left. + \langle \delta \bar{c}^{*A}_x \rangle \bar{\mathfrak{z}}^{*A}_x + j^*_{i_x} \langle \phi^i_x \rangle \right)$$

При этом

$$\Gamma = W - S_{source} \quad \text{и} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta V^A} = -J^A; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta c^A} = +\zeta^A; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^A} = +\bar{\zeta}^A; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i} = -j^i$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c^{*A}} = -\zeta^{*A}; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^{*A}} = -\bar{\zeta}^{*A}; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^{*i}} = -j_i^*$$

Поэтому тет можно переписать в виде

$$0 = \int d^4x\, d^4\theta\, \frac{\delta\Gamma}{\delta V_x^A} \langle \delta V_x^A \rangle + \int d^4x\, d^2\theta_x \Big(\langle \delta c_x^A \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta c_x^A}$$

$$+ \langle \delta \bar{c}_x^A \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}_x^A} + \langle \delta\phi_{ix} \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{ix}} \Big) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}_x \Big(\langle \delta \bar{c}_x^{*A} \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}_x^{*A}}$$

$$+ \langle \delta c_x^{*A} \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta c_x^{*A}} + \langle \delta\phi_x^{*i} \rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_x^{*i}} \Big)$$

где $\delta V = -\varepsilon \left\{ \left(\frac{V}{1-e^{-2V}} \right)_{Adj} c^+ + \left(\frac{V}{1-e^{2V}} \right)_{Adj} c \right\}$

$$\delta\bar{c} = \varepsilon \cdot \bar{D}^2 \left(-\frac{1}{16\xi_0} D^2 V \right) \qquad \delta c = \varepsilon c^2$$

$$\delta\bar{c}^+ = \varepsilon D^2 \left(-\frac{1}{16\xi_0} \bar{D}^2 V \right) \qquad \delta c^+ = \varepsilon (c^+)^2$$

Дальнейшие варианты:

1) Вводить дополнительные источники для BRST вариаций полей

2) Дифференцировать по различным полям.

Докажем, например, поперечность 2-х точечной функции Грина калибровочного поля:

Дифференцируем тет по V_y^B и c_z^D, а затем положим поле равными 0.

При этом очевидно, что все слагаемые с отличными друг от друга числами духов и антидухов будут равны 0:

Кроме того, $\dfrac{\delta^2 \Gamma}{\delta c_z^D \delta \bar{c}_x^A} = 0$ при нулевых полях.

$\Longrightarrow$

антикоммутация

$$0 = \int d^4x\, d^4\theta_x \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_y^B \delta V_x^A} \cdot \frac{\delta}{\delta c_z^D} \langle \delta V_x^A \rangle - \int d^4x\, d^2\bar{\theta}_x \cdot$$

$$\cdot \frac{\delta}{\delta V_y^B} \langle \delta \bar{c}_x^{*A} \rangle \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c_z^D \delta \bar{c}_x^{*A}}$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta V_y^B} \langle \delta \bar{c}_x^{*A} \rangle = \frac{\delta}{\delta V_y^B} \cdot \langle \varepsilon D^2 \left(-\frac{1}{16\xi_0}\right) \bar{D}^2 V_x^A \rangle =$$

$$= \varepsilon \left(-\frac{1}{16\xi_0}\right) D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta V_x^A}{\delta V_y^B} = \varepsilon \left(-\frac{1}{16\xi_0}\right) D^2 \bar{D}^2 \delta^8_{xy} \delta^{AB}.$$

Поэтому

$$0 = \int d^8x \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_y^B \delta V_x^A} \cdot \frac{\delta}{\delta c_z^D} \langle \delta V_x^A \rangle - \int d^4x\, d^2\bar{\theta}_x \left(-\frac{1}{16\xi_0}\right) \cdot \varepsilon$$

$$\cdot D^2\bar{D}^2\delta^8_{xy}\cdot\delta^{AB}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta\bar{c}_x^{*A}} =$$

$$= \int d^8x\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_x^A}\cdot\frac{\delta}{\delta c_z^D}<\delta V_x^A> - \varepsilon\int d^8x\cdot\frac{1}{8\xi_0}\cdot\bar{D}^2\delta^8_{xy}\cdot$$

$$\cdot\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta\bar{c}_x^{*B}} = \int d^8x\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_x^A}\cdot\frac{\delta}{\delta c_z^D}<\delta V_x^A> - \frac{\varepsilon}{8\xi_0}\bar{D}_y^2\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta\bar{c}_y^{*B}}$$

Воспользуемся теперь уравнением Швингера-Дайсона для поля антидуха, которое получается следующим образом:

Делаем замену $\bar{c}^+\to\bar{c}^+ + a^+$ в производящем функционале, где a^+ - произвольное антикиральное суперполе. Тогда (a^+ антикоммутирует)

$$\varepsilon\,\Big|\;\delta Z = 0 = \int DV D\phi D\bar{c} Dc\,\exp(iS_{total} + iS_{source})\cdot$$

$$\cdot\Big(i\,\frac{1}{e_0^2}\,tr\int d^8x\,a^+\Big[\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj}c + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj}c^+\Big]$$

$$+ i\int d^4x\,d^2\bar{\theta}\,a^{*A}\xi^{*A}\Big)$$

Умножая на ε слева, получаем, что

$$0 = \int d^8x\,\frac{1}{2}a^{*A}<\delta V^A> - \int d^4x\,d^2\bar{\theta}\,a^{*A}\cdot\varepsilon\Big(-\frac{\delta\Gamma}{\delta c^{*A}}\Big)$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{D^2}{4}<\delta V^A> = +\varepsilon\,\frac{\delta\Gamma}{\delta c^{*A}}$$

Поэтому

$$D_x^2 \frac{\delta}{\delta c_z^D}\langle \delta V_x^A\rangle = -4\varepsilon \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D \delta c_x^{*A}} = \varepsilon\cdot\frac{D_x^2\bar D_x^2}{4\partial^2}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta c_x^{*A}}$$

— можно убрать D_x^2 поскольку обе части могут быть пропорциональны только $D_x^2\bar D_z^2\delta^8_{xz}$

Поэтому

$$\frac{\delta}{\delta c_z^D}\langle\delta V_x^A\rangle = \frac{\varepsilon\bar D_x^2}{4\partial^2}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta c_x^{*A}} = \frac{\varepsilon \bar D_x^2}{\cancel{4\partial^2}}\,\frac{\cancelto{-1}{D_x^2\bar D_z^2}}{\cancel{16}}\, G\,\delta^8_{xz}\,\delta^{AD}$$

Подставляя это в ТСТ получим, что

$$0 = \int d^8x \frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_x^A}\cdot\frac{\varepsilon\bar D_x^2}{4\partial^2}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta c_x^{*A}} - \frac{\varepsilon}{8\xi_0}\bar D_y^2\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c_z^D\delta \bar c_y^{*B}}$$

$$\Longrightarrow\quad 0 = \int d^8x\, \frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_x^A}\cdot\left(-\frac{\varepsilon\bar D_x^2}{4}\right)\cdot G\,\delta^8_{xz}\,\delta^{AD} -$$

$$-\varepsilon\cdot\frac{1}{8\xi_0}\bar D_y^2\cdot\frac{D_y^2\bar D_y^2}{16}G\,\delta^8_{zy}\,\delta^{DB} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4}G\cdot\bar D_z^2\frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_z^D} + \varepsilon\frac{\bar D_z^2}{8\xi_0}\partial^2 G\,\delta^8_{zy}\,\delta^{DB}$$

т.о.

$$\bar D_z^2\frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_y^B\delta V_z^D} = \frac{1}{2\xi_0}\partial^2\bar D_z^2\,\delta^8_{zy}\,\delta^{DB}$$

С другой стороны, $S_{gf} = -\frac{1}{16\,\xi_0}\cdot\frac{1}{2}\int d^8x\, D^2V^A\bar D^2V^A$

Поэтому

$$\frac{\delta^2 S_{gf}}{\delta V_y^B \delta V_z^D} = -\frac{1}{32\xi_0} \cdot \frac{\delta}{\delta V_y^B} \left(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2\right) V_z^D =$$

$$= -\frac{1}{32\xi_0} \left(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2\right)_z \delta^8_{yz} \delta^{BD}$$

$$\Rightarrow \bar{D}^2_z \frac{\delta^2 S_{gf}}{\delta V_y^B \delta V_z^D} = \frac{\partial^2}{2\xi_0} \bar{D}^2_z \delta^8_{yz} \delta^{BD}$$

Поэтому

$$\bar{D}^2_z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_y^B \delta V_z^D} = \bar{D}^2_z \frac{\delta^2 S_{gf}}{\delta V_y^B \delta V_z^D}$$

$$\bar{D}^2_z \frac{\delta^2}{\delta V_y^B \delta V_z^D} \left(\Gamma - S_{gf}\right) = 0$$ $\Rightarrow$ квантовые поправки к 2-х точечной ф-и суперполя V являются чисто поперечными.

§ 10. Метод фонового поля в эл/д.

Хотя мст и выражают калибровочную инвариантность на квантовом уровне, более желательно работать с явно калибровочно инвариантным эффективным действием.

Для его построения используют метод фонового поля. Начнём его изучение с $N=1$ SQED.

Пусть $V \to V + V_\Phi$. тогда

$$\tilde{S} = S[V + V_\Phi, \Phi, \tilde{\Phi}]$$

$$\tilde{Z} = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp\left(iS[V + V_\Phi, \Phi, \tilde{\Phi}] + iS_{gf} + iS_{source}\right)$$

где $S_{source} = \int d^8x\, VJ + \left(\int d^4x\, d^2\theta\, (\Phi j + \tilde{\Phi}\tilde{j}) + \text{к.с.}\right)$

$$S_{gf} = -\frac{1}{32 e_0^2 \xi_0} \int d^8x\, D^2 V \bar{D}^2 V$$

Сделаем замену $V \to V + V_\Phi$. тогда

$$\tilde{Z}[J] = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp\left(iS[V, \Phi, \tilde{\Phi}] + iS_{gf}[V - V_\Phi] + iS_{source} - i\int d^8x\, V_\Phi J\right)$$

$$S_{gf}[V - V_\Phi] = -\frac{1}{32 e_0^2 \xi_0} \int d^8x \left[D^2 V \bar{D}^2 V + \bar{D}^2 V_\Phi D^2 V_\Phi - D^2 V \cdot \bar{D}^2 V_\Phi - D^2 V_\Phi \bar{D}^2 V\right] = S_{gf}[V] + S_{gf}[V_\Phi]$$

$$+ \int d^8x \left(+\frac{1}{32 e_0^2 \xi_0}\right) V \left(D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2\right) V_\Phi \equiv S_{gf}[V] + S_{gf}[V_\Phi] + \int d^8x\, V \tilde{J}[V_\Phi]$$

тогда

$$\tilde{Z}[J, V_\phi] = Z\left[J + \tilde{J}[V_\phi]\right] \cdot \exp\left(-i\int d^8x\, V_\phi J + iS_{gf}[V_\phi]\right)$$

$$\tilde{W}[J, V_\phi] = W[J + \tilde{J}] - \int d^8x\, V_\phi J + S_{gf}[V_\phi]$$

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{W} - S_{source} = W[J + \tilde{J}] - \int d^8x\, V_\phi J + S_{gf}[V_\phi]$$

$$- \int d^8x\, VJ - \left(\int d^4x\, d^2\theta\, (\phi j + \tilde{\phi}\tilde{j}) + \text{к.с.}\right) =$$

где источники должны быть выражены через поле из уравнений

$$\frac{\delta \tilde{W}}{\delta J} = V = \frac{\delta W}{\delta J}[J + \tilde{J}] - V_\phi$$

$$\frac{\delta \tilde{W}}{\delta j} = \phi = \frac{\delta W}{\delta j} \quad \text{и т.д.}$$

$\Rightarrow$ $J + \tilde{J}$ выражается через $V + V_\phi$ также как J через V в обычном случае. Поэтому

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma[V + V_\phi] + \int d^8x\, (V_\phi + V)\tilde{J}[V_\phi] + S_{gf}[V_\phi]$$

$$= \Delta\Gamma[V + V_\phi] + S_{gf}[V] + \cancel{S_{gf}[V_\phi]} - \cancel{\int d^8x\, V\tilde{J}[V_\phi]}$$

$$+ \int d^8x\, (\cancel{V_\phi} + \cancel{V})\tilde{J}[V_\phi] + \cancel{S_{gf}[V_\phi]}$$

т.к. $\int d^8x\, V_\phi \tilde{J}[V_\phi] = -2S_{gf}[V_\phi]$

т.о. мы получаем, что

$$\tilde{\Gamma} = \Delta\Gamma[V + V_\Phi] + S_{gf}[V] \implies V \text{ неперенормируется.}$$

Если положить $V = 0$, то получится, что

$$\tilde{\Gamma}\Big|_{V=0} = \Delta\Gamma[V_\Phi] = (\Gamma - S_{gf})[V_\Phi]$$

– очень удобный способ вычислить эффективное действие – не нужно делать преобразование Лежандра и т.п.

Легко видеть, что исходное действие с фоновым полем калибровочно инвариантно:

$$\Phi \to e^{-i\Lambda}\Phi \;; \qquad \tilde{\Phi} \to e^{+i\Lambda}\tilde{\Phi}$$

$$e^{-2V} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-2V} e^{i\Lambda} \longrightarrow V \to +\frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda) + V$$

теперь

$$V + V_\Phi \to V + V_\Phi + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$$

– можно по-разному преобразовывать фоновое и квантовые поля.

Квантовая инвариантность:

$$V \to V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$$

$$V_\Phi \to V_\Phi$$

Фоновая инвариантность:

$$V_\Phi \to V_\Phi + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$$

$$V \to V$$

— очевидно, что полагая $V=0$ получим фоново-инвариантное эффективное действие

$$\Delta\Gamma[V_\Phi, \phi, \tilde{\phi}]$$

$\Longrightarrow$ V_Φ не перенормируется, чтобы величина

$\phi^* e^{-2V_\Phi}\phi$ была бы фоново инвариантной.

§ 11. Метод фонового поля в неабелевых теориях

Разделим калибровочное суперполе на фоновую и квантовую части т.ч. в теории были бы как квантовая, так и фоновая инвариантности.

Оказывается, что такое разделение нужно проводить нелинейно:

$$e^{-2V} \longrightarrow e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi}$$

где $e^{-2V_\Phi} \equiv e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-\Omega_\Phi}$

Действительно, тогда имеют место обе инвариантности:

Фоновая инвариантность:

$$e^{-\Omega_\Phi} \to e^{iK} e^{-\Omega_\Phi} e^{i\Lambda}$$ где K – вещественное суперполе

$$e^{-\Omega_\Phi^+} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-iK}$$

$$V \to e^{iK} V e^{-iK} \quad ; \quad \Phi \to e^{-i\Lambda}\Phi$$

Действительно, тогда

$$e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-\Omega_\Phi^+} \cancel{e^{-iK}} \cdot \cancel{e^{iK}} e^{-2V} \cancel{e^{-iK}} \cancel{e^{iK}} e^{-\Omega_\Phi} \cdot e^{i\Lambda} = e^{-i\Lambda^+} \left(e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi}\right) e^{i\Lambda}$$

– обычное калибровочное преобразования.

$$e^{-2V_\Phi} = e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-\Omega_\Phi} \to e^{-i\Lambda^+} e^{-\Omega_\Phi^+} \cancel{e^{-iK}} \cdot \cancel{e^{iK}} e^{-\Omega_\Phi} e^{i\Lambda} =$$

$$= e^{-i\Lambda^+} e^{-2V_\Phi} e^{i\Lambda}$$

– преобразуется также как обычное калибровочное суперполе.

Условие $V=0$ очевидно будет фоново калибровочно инвариантным.

Фоновые ковариантные производные:

$$\nabla_{\Phi a_R} \equiv e^{+\Omega_\Phi^+} D_{aR}\, e^{-\Omega_\Phi^+} \quad ; \quad \nabla_{\Phi \dot a_L} \equiv e^{-\Omega_\Phi} D_{\dot a L}\, e^{+\Omega_\Phi}$$

$$D_{aR} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5) D_a \qquad D_{\dot a L} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5) D_{\dot a}$$

При действии на суперполе, которое преобразуется как

$$X \to e^{iK} X$$

$$\nabla_{\Phi aR} X = e^{+\Omega_\Phi^+} D_{aR} \left(e^{-\Omega_\Phi^+} X \right) \to e^{iK} e^{\Omega_\Phi^+} \cancel{e^{i\Lambda^+}} \cdot$$

$$\cdot D_{aR} \left(\cancel{e^{-i\Lambda^+}} e^{-\Omega_\Phi^+} \cancel{e^{-iK}} \cancel{e^{iK}} X \right) = e^{iK} e^{\Omega_\Phi^+} D_{aR} \left(e^{-\Omega_\Phi^+} X \right) =$$

$$= e^{iK} \nabla_{\Phi aR} X$$

Аналогичным образом

$$\nabla_{\Phi L\dot{a}} X = e^{-\Omega_\Phi} D_{L\dot{a}} \left(e^{\Omega_\Phi} X \right) \to e^{iK} e^{-\Omega_\Phi} \cancel{e^{i\Lambda}} \cdot D_{L\dot{a}} \cdot$$

$$\cdot \left(\cancel{e^{-i\Lambda}} e^{\Omega_\Phi} \cancel{e^{-iK}} \cancel{e^{iK}} X \right) = e^{iK} \nabla_{\Phi L\dot{a}} X$$

По аналогии с формулой

$$\{ D_a, D_b \} = -2i (\gamma^\mu C)_{ab} \partial_\mu$$

или, эквивалентно,

$$\{ D_{aR}, D_{\dot{b}L} \} = -i \left((1+\gamma_5) \gamma^\mu C \right)_{a\dot{b}} \partial_\mu$$

можно определить фазовую производную с векторным индексом:

$$\{ \nabla_{\Phi Ra}, \nabla_{\Phi L\dot{b}} \} \equiv -i \left((1+\gamma_5) \gamma^\mu C \right)_{a\dot{b}} \nabla_{\mu\Phi}$$

Легко проверяется, что

$$\nabla_{\mu\phi} X \to e^{ik} \nabla_{\mu\phi} X$$

при фоновых калибровочных преобразованиях.

Квантовая инвариантность:

$$e^{-2V} \to e^{i\Lambda_\phi^+} e^{-2V} e^{i\Lambda_\phi}$$

$$e^{\Omega_\phi} \to e^{\Omega_\phi}; \quad e^{\Omega_\phi^+} \to e^{\Omega_\phi^+}$$

$$\phi \to e^{\Omega_\phi} e^{-i\Lambda_\phi} e^{-\Omega_\phi}\phi$$

где Λ_ϕ - фоново-киральный параметр преобразований, который удовлетворяет условию

$$\nabla_{\phi L\dot{a}} \Lambda_\phi = 0$$

Эквивалентно (с учётом Adj)

$$0 = e^{-\Omega_\phi} D_{L\dot{a}} (e^{\Omega_\phi} \Lambda_\phi e^{-\Omega_\phi}) e^{\Omega_\phi}$$

$\Longrightarrow \Lambda_\phi = e^{-\Omega_\phi} \Lambda e^{\Omega_\phi}$ где Λ - обычное киральное суперполе.

Тогда $e^{\Omega_\phi} e^{+i\Lambda_\phi} e^{-\Omega_\phi} = e^{+i\Lambda}$ и $\Rightarrow \phi \to e^{-i\Lambda}\phi$

- обычное преобразование;

$$e^{-\Omega_\phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\phi} \to e^{-\Omega_\phi^+} e^{-i\Lambda_\phi^+} e^{-2V} e^{i\Lambda_\phi} e^{-\Omega_\phi} =$$

$$= \left[e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-i\Lambda_\Phi^+} e^{+\Omega_\Phi^+} = e^{-i\Lambda^+} \right] =$$

$$= \cancel{e^{-\Omega_\Phi^+}} \cdot \cancel{e^{\Omega_\Phi^+}} e^{-i\Lambda^+} e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} e^{i\Lambda} \cancel{e^{\Omega_\Phi}} \cancel{e^{-\Omega_\Phi}} =$$

$$= e^{-i\Lambda^+} \left(e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} \right) e^{i\Lambda}$$

– также стандартный закон калибровочного преобразования.

§ 12. Квантование неабелевых теорий с использованием метода фонового поля

Удобно по аналогии с абелевом случаем определить эффективное действие т.ч. оно было бы явно инвариантным относительно фоновых калибровочных преобразований.

Тогда вставляем в производящий функционал

$$1 = \Delta \int \mathcal{D}\Lambda \, \delta(\nabla_\Phi^2 V^\Lambda - a_\Phi^+) \, \delta(\bar{\nabla}_\Phi^2 V^\Lambda - a_\Phi)$$

где теперь a_Φ – фоново-киральное суперполе, т.ч.

$$\nabla_{\Phi L \dot{a}} a_\Phi = 0 = e^{-\Omega_\Phi} D_{\dot{a}L} \left(e^{\Omega_\Phi} a_\Phi e^{-\Omega_\Phi} \right) e^{\Omega_\Phi}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что

$$\Delta\Big|_{\substack{\nabla_\Phi^2 V = a_\Phi^+ \\ \bar\nabla_\Phi^2 V = a_\Phi}} = \int \mathcal{D}c_\Phi \mathcal{D}c_\Phi^+ \exp\left\{ \frac{i}{e_0^2}\int d^8x\, tr\,(\bar c_\Phi + \bar c_\Phi^+)\cdot \left[\left(\frac{V}{1-e^{2V}}\right)_{Adj} c_\Phi + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}}\right)_{Adj} c_\Phi^+ \right]\right\}$$

где $\nabla_{\Phi\dot\alpha}\, c_\Phi = 0$ и $\Rightarrow$ $c_\Phi = e^{-\Omega_\Phi} c\, e^{\Omega_\Phi}$

Аналогично $c_\Phi^+ = e^{\Omega_\Phi^+} c^+ e^{-\Omega_\Phi^+}$.

При этом замены переменной по форме совпадают с квантовыми калибровочными преобразованиями.

Духи фазово-киральны, поскольку параметр преобразований является фазово-киральным

Антидухи – т.к. условие калибровки фазово-кирально.

$$Z = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}\Phi\, \mathcal{D}\bar c\, \mathcal{D}c\, \exp(iS + iS_{FP})\, \delta(\nabla_\Phi^2 V - a_\Phi^+)\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\bar\nabla_\Phi^2 V - a_\Phi).$$

Далее нужно усреднять по калибровкам с весом $\exp\left(-\frac{i}{16 e_0^2 \xi_0} tr \int d^8x\, a_\Phi^+ a_\Phi\right) =$

$$= \exp\left(-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\,\mathrm{tr}\int d^8x\; e^{\Omega_\Phi^+} a^+ e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-\Omega_\Phi} a\, e^{\Omega_\Phi}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\,\mathrm{tr}\int d^8x\; a^+ e^{-2V_\Phi} a\, e^{2V_\Phi}\right)$$

– теперь при интегрировании по a возникает детерминант, зависящий от фонового поля. Чтобы его скомпенсировать, добавляют духи Нильсена-Каллош b – антикоммутирующие киральные поле в Adj:

$$Z = \int \mathcal{D}a\,\mathcal{D}b\,\mathcal{D}V\mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\,\exp(iS + iS_{FP})\,\delta(\bar{\nabla}_\Phi^2 V - a_\Phi^+)\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\nabla_\Phi^2 V - a_\Phi)\cdot\exp\left(-\frac{i}{16e_0^2\xi_0}\,\mathrm{tr}\int d^8x\,(a_\Phi^+ a_\Phi + b_\Phi^+ b_\Phi)\right)\cdot$$

$$\cdot\exp(iS_{source}) =$$

$$= \int \mathcal{D}V\mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}b\,\exp(iS + iS_{FP} + iS_{gf} + iS_{NK} + iS_{source})$$

где $S_{gf} = -\dfrac{1}{16e_0^2\xi_0}\,\mathrm{tr}\int d^8x\;\nabla_\Phi^2 V\bar{\nabla}_\Phi^2 V$

$$S_{NK} = -\frac{1}{16e_0^2\xi_0}\,\mathrm{tr}\int d^8x\; b^+ e^{-2V_\Phi} b\, e^{2V_\Phi} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\; b^+ e^{-2V_\Phi} b\, e^{2V_\Phi}.$$

§13. Однопетлевая перенормировка заряда в суперсимметричных калибровочных теориях

В силу фоновой калибровочной инвариантности 2-х точечная функция Грина фонового калибровочного поля поперечна:

$$\Gamma_{V_\Phi} = \Gamma\Big|_{V=0;\,\phi=0}$$

$$0 = \int d^8x\, \frac{\delta\Gamma_{V_\Phi}}{\delta V_{\Phi x}}\,\delta V_{\Phi x}$$

где $\delta V_\Phi = \left(\frac{V_\Phi}{1-e^{2V_\Phi}}\right)_{Adj} i\Lambda + \left(\frac{V_\Phi}{1-e^{-2V_\Phi}}\right)_{Adj} i\Lambda^+ \approx$

$$\approx \left(\frac{V_\Phi}{-2V_\Phi - 2V_\Phi^2 + \dots}\right)_{Adj} i\Lambda + \left(\frac{V_\Phi}{2V_\Phi - 2V_\Phi^2 + \dots}\right)_{Adj} i\Lambda^+$$

$$\approx \left(-\frac{1}{2(1+V_\Phi)}\right)_{Adj} i\Lambda + \left(\frac{1}{2(1-V_\Phi)}\right)_{Adj} i\Lambda^+ \approx$$

$$\approx \frac{i}{2}\Lambda - \frac{i}{2}[V_\Phi, \Lambda] + \frac{i}{2}\Lambda^+ + \frac{i}{2}[V_\Phi, \Lambda^+] + O(V_\Phi^2)$$

Продифференцируем по $V_{\Phi y}$ и положим $V_\Phi = 0$:

$$0 = \int d^8x\, \frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_{\Phi y}\,\delta V_{\Phi x}} \cdot \frac{i}{2}\left(\Lambda_x + \Lambda_x^+\right)$$

Дифференцируем теперь по Λ или Λ^+ и получаем

$$0 = D_x^2 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_{\Phi y} \delta V_{\Phi x}} \; ; \quad 0 = \bar{D}_x^2 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_{\Phi x} \delta V_{\Phi y}}$$

– поперечность. Поэтому

$$\Gamma^{(2)}_{V_\Phi} = -\frac{1}{8\pi} \, tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4\theta \, V_\Phi(p,\theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V_\Phi(-p,\theta) \cdot$$

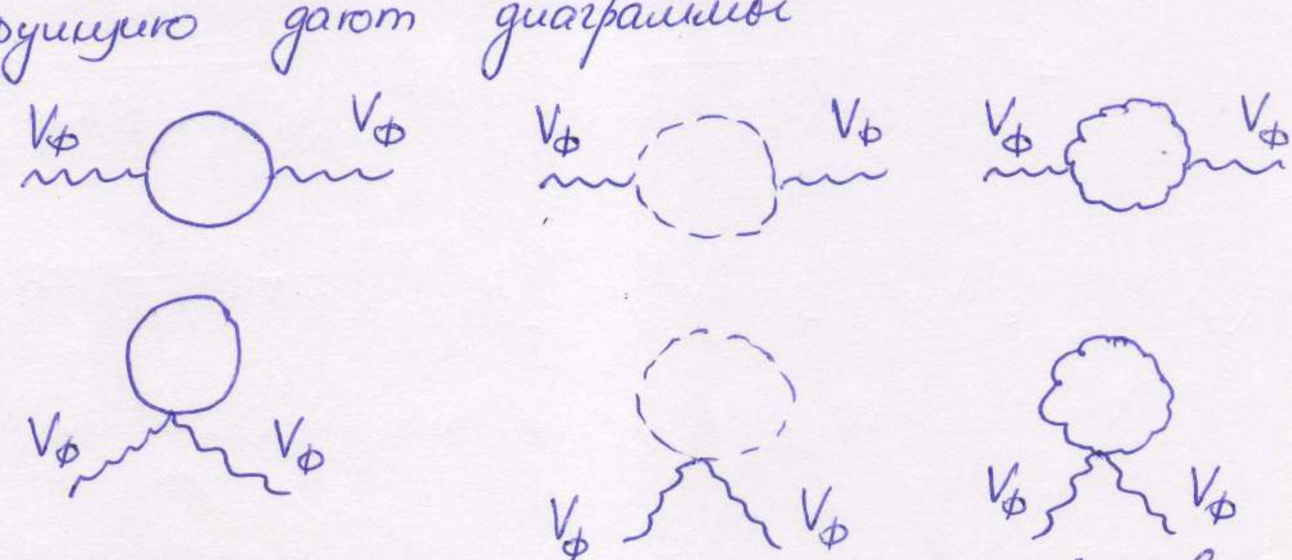
$$\cdot d^{-1}(\alpha_0, p/\Lambda) = \left[V_\Phi = V_\Phi^A t^A \right] =$$

причём в древесном приближении $d^{-1} = \alpha_0^{-1}$, поскольку

$$= -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4\theta \, V_\Phi^A(p,\theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V_\Phi^A(-p,\theta) d^{-1}(\alpha_0, p/\Lambda)$$

– аналог соответствующего выражения в эл/д.

В однопетлевом приближении вклад в эту функцию дают диаграммы



материя — духи FP и NK — квантовое калибровочное поле.

Диаграммы с материей уже вычислялись ранее. Теперь просто добавляется множитель

$tr(T^A T^B)$ из вершины.

При этом

$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$ – условие нормировки

$tr(T^A T^B) \equiv T(R)\delta^{AB}$ для генераторов некоторого представления R

При этом если $R = Adj$, то

$$tr(T^A_{Adj} T^B_{Adj}) = -if_{ACD}\cdot(-i)f_{BDC} = C_2\delta^{AB}, \text{ т.ч.}$$

$$T(Adj) = C_2.$$

Поэтому вклад материи будет (Евклид)

$$d^{-1} = \alpha_0^{-1} + 4\pi \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{T(R)}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} + \ldots$$

где было учтено, что в $N=1$ SQED есть 2 суперполя материи, которые удваивают результат.

Духи Нильсена-Каллош:

$$S_{NK} = \frac{1}{2e_0^2} tr \int d^8x\, b^+ e^{-2V_\phi} b\, e^{2V_\phi}$$

– такая же материя в Adj, но антикоммутирующая.

т.к. $$\int d\bar{x}\, dx \exp(-\bar{x} A x) \sim (\det A)^{-1}$$

$$\int d\bar{\alpha}\, d\alpha \exp(-\bar{\alpha} A \alpha) \sim (\det A)^{+1}$$

если x – коммутирующее, α - антикоммутирующее, то вклады в $W = -i\ln Z$

из-за антикоммутации будут иметь другой знак и ⇒ получим

$$-4\pi \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{C_2}{k^2(k+p)^2}$$

Духи Фаддеева-Попова

$$S_{FP} = \frac{1}{e_0^2} \int d^8x\, tr\left[e^{-\Omega_\phi} \bar{c}\, e^{\Omega_\phi} + e^{\Omega_\phi^+} \bar{c}^+ e^{-\Omega_\phi^+} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(\frac{V}{1-e^{2V}}\right)_{Adj} (e^{-\Omega_\phi} c\, e^{\Omega_\phi}) + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}}\right)_{Adj} (e^{\Omega_\phi^+} c^+ e^{-\Omega_\phi^+}) \right\}$$

В одной петле для рассматриваемых диаграмм квантовое поле не существенно. Поэтому с учётом того, что $e^{-2V_\phi} = e^{-\Omega_\phi^+} e^{-\Omega_\phi}$, получаем

$$S_{FP} = \frac{1}{e_0^2} \operatorname{tr} \int d^8x \left[e^{-\Omega_\Phi} \bar{c}\, e^{\Omega_\Phi} + e^{\Omega_\Phi^+} \bar{c}^+ e^{-\Omega_\Phi^+} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\Omega_\Phi} c\, e^{\Omega_\Phi} + \frac{1}{2} e^{\Omega_\Phi^+} c^+ e^{-\Omega_\Phi^+} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2e_0^2} \operatorname{tr} \int d^8x \left[\bar{c}\, e^{2V_\Phi} c^+ e^{-2V_\Phi} - \bar{c}^+ e^{-2V_\Phi} c\, e^{2V_\Phi} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2e_0^2} \operatorname{tr} \int d^8x \left[c^+ e^{-2V_\Phi} \bar{c}\, e^{2V_\Phi} + \bar{c}^+ e^{-2V_\Phi} c\, e^{2V_\Phi} \right]$$

– получается 2 таких вклада для Adj

$\Rightarrow$ получим $\quad 2\, C_2 \cdot (-4\pi) \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 (k+p)^2}$

Диаграммы с петлей квантового калибровочного поля вклада не дают. Действительно, в методе фонового поля

$$W_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 \left(e^{2V} D_{a} e^{-2V} \right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{8} \bar{D}^2 \left(e^{\Omega_\Phi} e^{2V} e^{\Omega_\Phi^+} D_a \left(e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{8} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}_\Phi^2 \left[e^{2V} e^{\Omega_\Phi^+} D_a \left(e^{-\Omega_\Phi^+} e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} e^{-\Omega_\Phi^+} e^{\Omega_\Phi^+} \right) \right.$$

$$\left. \cdot\, e^{-\Omega_\Phi^+} e^{\Omega_\Phi^+} e^{\Omega_\Phi} \right] e^{-\Omega_\Phi} =$$

$$= \frac{1}{8} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \left[e^{2V} \nabla_{\Phi Ra} \left(e^{-2V} e^{-\Omega_\Phi} e^{-\Omega^+_\Phi} \right) e^{\Omega^+_\Phi} e^{\Omega_\Phi} \right] e^{-\Omega_\Phi}$$

$$= \frac{1}{8} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \left[e^{2V} \nabla_{\Phi Ra} e^{-2V} + \nabla_{\Phi Ra} \left(e^{-\Omega_\Phi} e^{-\Omega^+_\Phi} \right) e^{\Omega^+_\Phi} e^{\Omega_\Phi} \right]$$

$$\cdot e^{-\Omega_\Phi} =$$

$$= \frac{1}{8} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \left[e^{2V} \nabla_{\Phi Ra} e^{-2V} \right] e^{-\Omega_\Phi} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 \left[e^{\Omega_\Phi} e^{\Omega^+_\Phi} D_{Ra} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(e^{-\Omega^+_\Phi} e^{-\Omega_\Phi} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{8} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \left[e^{2V} \nabla_{\Phi Ra} e^{-2V} \right] e^{-\Omega_\Phi} + W_{\Phi a}$$

где $W_{\Phi a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 \left[e^{2V_\Phi} D_a e^{-2V_\Phi} \right]$

Поэтому слагаемые в действии, квадратичные по квантовому полю имеют вид:

$$W_a \Rrightarrow -\frac{1}{4} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \nabla_{\Phi Ra} V e^{-\Omega_\Phi} -$$

$$-\frac{1}{4} e^{\Omega_\Phi} \bar{\nabla}^2_\Phi \left[V, \nabla_{\Phi Ra} V \right] e^{-\Omega_\Phi} + W_{\Phi a}$$

т.к. $e^{2V} D_a e^{-2V} = \left(1 + 2V + 2V^2 \right) D_a \left(-2V + 2V^2 \right) =$

$$= -2 D_a V + 2 D_a V \cdot V + 2 V D_a V - 4 V D_a V =$$

$$= -2 D_a V - 2 \left[V, D_a V \right]$$

Между 2-мя V не может быть одна спинорная производная $\Rightarrow$ остаётся только

$(\xi_0 = 1)$

$$\frac{Re}{2e_0^2}\, tr \int d^4x\, d^2\theta \cdot \frac{1}{16}\, \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R a} V \cdot C^{ab} \cdot \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R b} V$$

$$-\frac{1}{32 e_0^2}\, tr \int d^8x\, V \left(\nabla_\Phi^2 \bar\nabla_\Phi^2 + \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_\Phi^2 \right) V =$$

$$= Re\, tr \int d^8x \left(-\frac{1}{32 e_0^2} \right) V \left[\nabla_\Phi^2 \bar\nabla_\Phi^2 + \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_\Phi^2 - 2 \nabla_{\Phi R a} C^{ab} \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R b} \right] V$$

– это выражение сводится к коммутаторам спинорных производных. Действительно,

$$\nabla_\Phi^2 \bar\nabla_\Phi^2 = \nabla_{\Phi a \atop R} C^{ab} \nabla_{\Phi b \atop R} \bar\nabla_\Phi^2 = \nabla_{\Phi R a} C^{ab} \cdot \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R b}$$

$$+ \nabla_{\Phi R a} C^{ab} \left[\nabla_{\Phi R b}, \nabla_{\Phi L \dot c} C^{\dot c \dot d} \nabla_{\Phi L \dot d} \right] =$$

$$= \nabla_{\Phi R a} C^{ab} \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R b} + \nabla_{\Phi R a} C^{ab} C^{\dot c \dot d} \{ \nabla_{\Phi R b}, \nabla_{\Phi L \dot c} \} \nabla_{\Phi L \dot d}$$

$$- \nabla_{\Phi R a} C^{ab} C^{\dot c \dot d} \nabla_{\Phi L \dot c} \{ \nabla_{\Phi R b}, \nabla_{\Phi L \dot d} \}$$

Поэтому получаем выражение

$$-\frac{Re}{32 e_0^2}\, tr \int d^8x\, V \Big[\bar\nabla_\Phi^2 \nabla_\Phi^2 - \nabla_{\Phi R a} C^{ab} \bar\nabla_\Phi^2 \nabla_{\Phi R b} +$$

$$+ \nabla_{\phi Ra} C^{ab} C^{\dot c\dot d} \{\nabla_{\phi Rb}, \nabla_{\phi L\dot c}\} \nabla_{\phi L\dot d} - \nabla_{\phi Ra} C^{ab} C^{\dot c\dot d} \nabla_{\phi L\dot c}$$

$$\cdot \{\nabla_{\phi Rb}, \nabla_{\phi L\dot d}\} \Big] V$$

Имеем:

$$- \nabla_{\phi Ra} C^{ab} \bar{\nabla}^2_\phi \nabla_{\phi Rb} = - \bar{\nabla}^2_\phi \nabla^2_\phi - C^{ab} [\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot c} C^{\dot c\dot d} \nabla_{\phi L\dot d}]$$

$$\cdot \nabla_{\phi Rb} = - \bar{\nabla}^2_\phi \nabla^2_\phi - C^{ab} \{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot c}\} C^{\dot c\dot d} \nabla_{\phi L\dot d} \nabla_{\phi Rb}$$

$$+ C^{ab} C^{\dot c\dot d} \nabla_{\phi L\dot c} \{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot d}\} \nabla_{\phi Rb}$$

т.о. суммарно рассматриваемое выражение может быть преобразовано к виду

$$- \frac{Re}{32 e_0^2} \operatorname{tr} \int d^8x \; V \, C^{ab} C^{\dot c\dot d} \Big[- \{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot c}\} \nabla_{\phi L\dot d} \nabla_{\phi Rb}$$

$$+ \nabla_{\phi L\dot c} \{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot d}\} \nabla_{\phi Rb} + \nabla_{\phi Ra} \{\nabla_{\phi Rb}, \nabla_{\phi L\dot c}\} \nabla_{\phi L\dot d}$$

$$- \nabla_{\phi Ra} \nabla_{\phi L\dot c} \{\nabla_{\phi Rb}, \nabla_{\phi L\dot d}\} \Big] V =$$

$$= - \frac{Re}{32 e_0^2} \operatorname{tr} \int d^8x \; V C^{ab} C^{\dot c\dot d} \Big[-2 \{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot c}\} \{\nabla_{\phi L\dot d}, \nabla_{\phi Rb}\}$$

$$+ \nabla_{\phi L\dot c} \big[\{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot d}\}, \nabla_{\phi Rb} \big] + \big[\nabla_{\phi Ra}, \{\nabla_{\phi Rb}, \nabla_{\phi L\dot c}\} \big] \nabla_{\phi L\dot d} \Big] V$$

Имеем:

$$\{\nabla_{\Phi R a}, \nabla_{\Phi L \dot c}\} = -2i(\gamma^\mu C)_{a\dot c}\nabla_{\Phi\mu}$$, т.ч. первое слагаемое перепишется в виде

$$\frac{1}{16e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\, V\, C^{ab}C^{\dot c\dot d}(-2i)(\gamma^\mu C)_{a\dot c}(-2i)(\gamma^\nu C)_{\dot d b}\nabla_{\Phi\mu}\cdot$$

$$\cdot\nabla_{\Phi\nu}V =$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{4e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\, V\,(\gamma^\mu C)_{\dot c a}C^{ab}(\gamma^\nu C)_{b\dot d}(\cancel{-}C^{\dot d\dot c})\nabla_{\Phi\mu}\nabla_{\Phi\nu}V$$

$$= \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\, V\cdot\nabla_{\Phi\mu}^2 V$$

Вычислим теперь величину

$$C^{ab}\left[\{\nabla_{\Phi Ra}, \nabla_{\Phi L\dot d}\}, \nabla_{\Phi Rb}\right]X$$

$$\{\nabla_{\Phi Ra}, \nabla_{\Phi L\dot d}\}X = \nabla_{\Phi Ra}\nabla_{\Phi L\dot d}X + \nabla_{\Phi L\dot d}\nabla_{\Phi Ra}X =$$

$$= e^{\Omega_\Phi^+}D_{Ra}e^{-\Omega_\Phi^+}e^{-\Omega_\Phi}D_{L\dot d}e^{\Omega_\Phi}X + e^{-\Omega_\Phi}D_{L\dot d}e^{\Omega_\Phi}e^{\Omega_\Phi^+}\cdot$$

$$\cdot D_{Ra}e^{-\Omega_\Phi^+}X = e^{\Omega_\Phi^+}D_{Ra}e^{-2V_\Phi}D_{L\dot d}e^{2V_\Phi}e^{-\Omega_\Phi^+}X$$

$$+ e^{\Omega_\Phi^+}e^{-2V_\Phi}D_{L\dot d}e^{2V_\Phi}D_{Ra}e^{-\Omega_\Phi^+}X =$$

$$= e^{\Omega_\Phi^+}\Big[D_{Ra}D_{L\dot d} + D_{Ra}e^{-2V_\Phi}(D_{L\dot d}e^{2V_\Phi}) + D_{L\dot d}D_{Ra} + e^{-2V_\Phi}(D_{L\dot d}e^{2V_\Phi})\cdot$$

$$\cdot D_{Ra}\Big]e^{-\Omega_\Phi^+}X$$

$$C^{ab}\left[\{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot\alpha}\}, \nabla_{\phi Rb}\right]X =$$

$$= C^{ab}\left(\nabla_{\phi Ra}\nabla_{\phi L\dot\alpha}\nabla_{\phi Rb} + \nabla_{\phi L\dot\alpha}\nabla_{\phi Ra}\nabla_{\phi Rb} - \right.$$

$$\left. - \nabla_{\phi Rb}\nabla_{\phi Ra}\nabla_{\phi L\dot\alpha} - \nabla_{\phi Rb}\nabla_{\phi L\dot\alpha}\nabla_{\phi Ra}\right)X =$$

$$= 2C^{ab}\cdot e^{\Omega_\phi^+} D_{Ra}\, e^{-2V_\phi} D_{L\dot\alpha}\, e^{2V_\phi} D_{Rb}\left(e^{-\Omega_\phi^+}X\right)$$

$$+ e^{\Omega_\phi^+} e^{-2V_\phi} D_{L\dot\alpha}\, e^{+2V_\phi} D^2\left(e^{-\Omega_\phi^+}X\right) - e^{\Omega_\phi^+} D^2 e^{-2V_\phi} D_{L\dot\alpha}\, e^{2V_\phi}\left(e^{-\Omega_\phi^+}X\right)$$

$$= e^{\Omega_\phi^+}\Big\{ 2C^{ab}\cdot D_{Ra}\left[e^{-2V_\phi}\left(D_{L\dot\alpha}e^{2V_\phi}\right)D_{Rb} + D_{L\dot\alpha}D_{Rb}\right]$$

$$+ e^{-2V_\phi}\left(D_{L\dot\alpha}e^{2V_\phi}\right)D^2 + D_{L\dot\alpha}D^2 - D^2 e^{-2V_\phi}\left(D_{L\dot\alpha}e^{2V_\phi}\right)$$

$$- D^2 D_{L\dot\alpha}\Big\}\left(e^{-\Omega_\phi^+}X\right) = e^{\Omega_\phi^+} C^{ab}\cancelto{0}{\left[\{D_{Ra}, D_{L\dot\alpha}\} D_{Rb}\right]}\left(e^{-\Omega_\phi^+}X\right)$$

$$- e^{\Omega_\phi^+} D^2\left(e^{-2V_\phi}\left(D_{L\dot\alpha}e^{2V_\phi}\right)\right)\cdot e^{-\Omega_\phi^+}X$$

$$\Longrightarrow$$

$$C^{ab}\left[\{\nabla_{\phi Ra}, \nabla_{\phi L\dot\alpha}\}, \nabla_{\phi Rb}\right] = - e^{\Omega_\phi^+} D^2\left(e^{-2V_\phi} D_{L\dot\alpha}\, e^{2V_\phi}\right)e^{-\Omega_\phi^+}$$

$$\equiv 8\,\bar W_{\dot\alpha_\phi}$$

Поэтому, окончательно, член с 2-мя V в действии можно записать в виде

$$+\frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x\,\Big\{ V\,\nabla_{\Phi\mu}^2 V + \frac{1}{2}\nabla_{\Phi\dot c} V\cdot\big[\bar W_{\Phi\dot d}, V\big]\,C^{\dot c\dot d}$$

$$-\frac{1}{2} V\big\{\bar W_{\Phi\dot c}, \nabla_{\Phi\dot d} V\big\}\Big\}$$ – содержит только одну спинорную производную

$\Longrightarrow$


$= 0$


$= 0.$

Т.о. окончательно получаем, что

$$\alpha^{-1} = \alpha_0^{-1} + 4\pi\, T(R)\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2+m^2)\big((k+p)^2+m^2\big)} -$$

$$-\,12\pi\, C_2\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2(k+p)^2} =$$

$$= \alpha_0^{-1} + 4\pi\big(T(R)-3C_2\big)\cdot\frac{2\pi^2}{16\pi^4}\ln\frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены}.$$

$$= \alpha_0^{-1} + \big(T(R)-3C_2\big)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha^{-1} = \alpha_0^{-1} + \big(T(R)-3C_2\big)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha_0)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\beta(\alpha)}{\alpha^2} = -\frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{d}{d\ln\mu}\left[\left(T(R)-3C_2\right)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}\right]$$

$$= -\frac{\left(3C_2 - T(R)\right)}{2\pi}$$ – однопетлевое выражение для β-функции.

Это выражение является первым слагаемым в т.н. точной NSVZ β-функции

$$\beta(\alpha,\lambda) = -\frac{\alpha^2\left(3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j(\gamma_\phi)_i{}^j(\alpha,\lambda)/r\right)}{2\pi\left(1 - C_2\alpha/2\pi\right)}$$

где $C(R)_i{}^j = (T^A T^A)_i{}^j$; $r = \dim G$

$$(\gamma_\phi)_i{}^j = \frac{d\ln Z_i{}^j}{d\ln\mu}$$

При этом

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,d^4\theta\,\phi^{*i}(p,\theta)\,G_i{}^j(\alpha,\lambda,p/\Lambda)\,\phi_j(-p,\theta)$$

и по построению $Z_i{}^j G_j{}^k$ – конечная величина

$\Longrightarrow$ перенормировка константы связи в $N=1$ суперсимметричных теориях связана с перенормировкой суперполей материи.

§ 14. Теорема о неперенормировке в $N=1$ суперсимметричных теориях

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\, tr\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i} (e^{-2V})_i{}^j \phi_j$$

$$+ \Big[\int d^4x\, d^2\theta\, \underbrace{\Big(\frac{1}{4} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \Big)}_{\text{суперпотенциал}} + \text{к.с.} \Big]$$

Утв. В $N=1$ суперсимметричных теориях отсутствуют расходящиеся квантовые поправки к суперпотенциалу.

Доказательство.

1) Все вершины теории представляют собой интегралы по полному суперпространству:

$$\frac{1}{2e_0^2}\int d^4x\, d^2\theta \cdot \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{2V} D_a e^{-2V}) \cdot C^{ab} W_b =$$

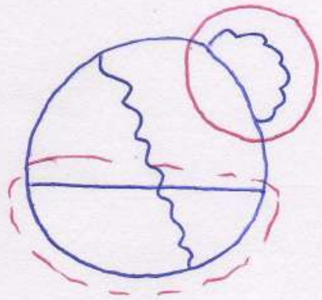
$$= -\frac{1}{8e_0^2}\int d^4x\, d^4\theta\, (e^{2V} D_a e^{-2V})\, C^{ab} W_b \quad \text{- верно}$$

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i} (e^{-2V})_i{}^j \phi_j \quad \text{- уже необходимый вид}$$

$$\frac{1}{6}\int d^4x\, d^2\theta\, \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k = \frac{1}{6}\int d^4x\, d^2\theta\, \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \Big(-\frac{\bar{D}^2 D^2}{16\partial^2} \phi_k \Big)$$

$$= -\frac{1}{48}\int d^4x\, d^4\theta\, \lambda^{ijk}\phi_i\phi_j \frac{D^2}{\partial^2}\phi_k$$ — появилась нелокальность.

2) Алгоритм вычисления суперграфа:



– стягиваем в точку интегрируя по частям

$\delta^8_{12} D^\alpha \delta^8_{12} = 0$ всегда если $\alpha \leq 3$

Только при $\alpha = 4$ результат отличен от 0.

Итог: $\int d^4x\, d^4\theta$ в ответе

$\Rightarrow$ $\forall$ вклад в Γ представим в виде интеграла по полному суперпространству.

3) Расходимости локальны:

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k+p)^2} \sim \ln \Lambda/p$$

(Квадратичных расходимостей нет)

$\Rightarrow$ локальность + $\int d^4x\, d^4\theta$ приводит к неперенормировке суперпотенциала.

§ 15. Теорема о ненеренормировке для $N=2$ суперсимметричных теорий

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\, tr\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, C^{ab} W_a W_b + \frac{1}{2e_0^2}\, tr \int d^4x\, d^4\theta \cdot \Phi^+ e^{-2V}$$

$$\Phi e^{+2V} + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\phi^+ e^{-2V}\phi + \tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi}\right) +$$

$$+\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\phi}^T \Phi \phi + \frac{m_0}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\phi}^T \phi + \text{к.с.}\right)$$

При этом V и $\Phi \in Adj$ образуют $N=2$ калибровочный мультиплет, а

$\phi \in R_0$; $\tilde{\phi} \in \bar{R}_0$ – гипермультиплет.

$N=2$ теория является частным случаем $N=1$ теории с материей в представлении

$Adj + R_0 + \bar{R}_0 \equiv R$

В $N=1$ суперполях вторая суперсимметрия является скрытой, но $\exists$ и формулировки, где она явная (например, $N=2$ гармоническое суперпространство)

$N=2$ теорема о неперенормировке может быть получена исходя из $N=1$ теоремы о неперенормировке и NSVZ β-функции.

Если $\quad \phi = \sqrt{Z_\phi}\,\phi_R \;;\quad \tilde{\phi} = \sqrt{Z_\phi}\,\tilde{\phi}_R$

$$\Phi = \sqrt{Z_\Phi}\,\Phi_R$$

то из $N=1$ теоремы о неперенормировке

$$\Longrightarrow \quad Z_\phi^2 Z_\Phi = 1.$$

Кроме того, из $N=2$ суперсимметрии $\Longrightarrow$ что $Z_\Phi = 1 \Longrightarrow Z_\phi = 1$ - гипермультиплет не перенормируется.

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2\left(3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j \gamma_j{}^i(\alpha)/r\right)}{2\pi\left(1 - C_2\alpha/2\pi\right)}$$

$$\mathrm{tr}\,(T^A T^B) = T(R)\,\delta^{AB} \qquad (T^A T^A)_i{}^j = C(R)_i{}^j$$

$$f^{ACD} f^{BCD} = C_2\,\delta^{AB} \qquad r = \dim G$$

т.к. $R = Adj + R_0 + \bar{R}_0$, то

$$T^A(R) = \begin{pmatrix} T^A(Adj) & 0 & 0 \\ 0 & T^A(R_0) & 0 \\ 0 & 0 & -T^A(R_0)^T \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$T(R)\,\delta^{AB} = tr\, T^A(R)\, T^B(R) = \delta^{AB}\left(C_2 + 2T(R_0)\right)$$

т.о. $\quad T(R) = C_2 + 2T(R_0).$

$$C(R)_i{}^j = \begin{pmatrix} C_2\,\delta_A{}^B & 0 & 0 \\ 0 & C(R_0) & 0 \\ 0 & 0 & C(R_0) \end{pmatrix}$$

т.к. $\quad C_i{}^j \sim \delta_i{}^j$ для неприводимого представления.

Найдём аномальную размерность Φ^A, т.ч.

$\Phi = e_0 \Phi^A t^A.$

Мы знаем, что

$$\Phi = \sqrt{Z_\Phi}\,\Phi_R \;; \qquad \frac{1}{e_0^2} = \frac{Z_3}{e^2} \;; \quad Z_\Phi = 1.$$

Поэтому

$$e_0 \Phi^A t^A = e Z_3^{-1/2} \Phi^A t^A \equiv e\, \Phi_R^A t^A$$

Поэтому $\quad \Phi^A = Z_3^{1/2}\, \Phi_R^A.$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_A{}^B = \delta_A{}^B \frac{d\ln Z_3}{d\ln\mu} = \delta_A{}^B \frac{d\ln e^2/e_0^2}{d\ln\mu} =$$

$$= \delta_A{}^B \cdot \frac{1}{e^2}\frac{de^2}{d\ln\mu} = \delta_A{}^B \cdot \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\ln\mu} = \delta_A{}^B \frac{1}{\alpha}\cdot\beta(\alpha).$$

Поэтому

$$\gamma_i{}^j = \begin{pmatrix} \delta_A{}^B \cdot \frac{1}{\alpha}\beta(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим теперь NSVZ β-функцию

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}\cdot\Big[3C_2 - \underbrace{(C_2 + 2T(R_0))}_{T(R)} +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{r}} C_2 \cancel{\delta_A{}^B} \cdot \cancel{\delta_B{}^A} \cdot \frac{1}{\alpha}\beta(\alpha)\Big]$$

$$\beta(\alpha) - \cancel{\frac{C_2\alpha}{2\pi}\beta(\alpha)} = -\frac{\alpha^2}{2\pi}\left[2C_2 - 2T(R_0)\right] - \cancel{\frac{\alpha C_2}{2\pi}\beta(\alpha)}$$

Поэтому окончательно

$$\boxed{\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi}\left(C_2 - T(R_0)\right)}$$

что соответствует однопетлевой расходимостям, в то время как супермультиплет не перенормируется.

Можно построить конечные $N=2$ теории требуя, чтобы

$$C_2 = T(R_0)$$

Примеры 1) $R_0 = Adj \Longrightarrow T(Adj) = C_2$

$$\Longrightarrow \beta(\alpha) = 0$$

– это $N=4$ SYM.

2) $G = SO(10)$

Известно (Slansky), что в этом случае

$C_2 = 8$

в то время как $T(16) = 2$

Поэтому $SO(10)$ теория с $N=2$ SUSY и 4-мя поколениями гипермультиплетов $4\times(16+\overline{16})$ полностью конечна (но не является феноменологически приемлимой)

Регуляризация высшими производными и новый метод вычисления β-функции

$N=1$ SQED , $m=0$

$$S = \frac{1}{4e_0^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\phi^* e^{2V}\phi + \right.$$

$$\left. + \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}\right)$$

Добавляем слагаемое с высшими производными:

$$R(x) \equiv 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} R_\alpha x^\alpha$$

$$S_{reg} = \frac{1}{4e_0^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} R(\partial^2/\Lambda^2) W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\cdot$$

$$\cdot\left(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}\right)$$

Аналогичным образом поступаем с фиксацией калибровки:

$$S_{gf} \Longrightarrow -\frac{1}{32 e_0^2 \xi_0}\int d^4x\, d^4\theta\, D^2 V\, K(\partial^2/\Lambda^2)\, \bar{D}^2 V$$

Повторяя описанные ранее вычисления, получаем, что пропагатор калибровочного поля примет вид

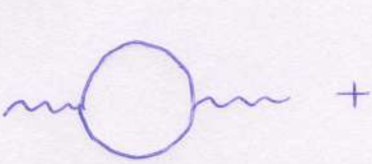
$$Z_{0V} = \exp\left\{ i e_0^2 \int d^8x \left[-J\frac{1}{\partial^2 R} J + J\frac{1}{\partial^4}\left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16} + \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}\right) J\right]\right\}$$

Поэтому все диаграммы с пропагаторами калибровочного поля будут конечными

 ,  и т.п.

Но однопетлевые диаграммы при этом не регуляризуются:

 +  – не содержат внутренних калибровочных линий.

Для их регуляризации в производящий ф-л вставляются детерминанты Паули-Вилларса:

$$Z = \int \mathcal{D}\mu \, \mathcal{D}et(PV, M) \exp\left(iS_{reg} + iS_{gf} + iS_{sources}\right)$$

где

$$\mathcal{D}et(PV, M)^{-1} \equiv \int \mathcal{D}\Phi \, \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp\left(iS_{PV}\right)$$

При этом

$$S_{PV} = \frac{1}{4}\int d^8x \left(\Phi^* e^{2V}\Phi + \tilde{\Phi}^* e^{-2V}\tilde{\Phi}\right) + \left(\frac{1}{2} M \int d^6x \, \tilde{\Phi}\Phi + \text{к.с.}\right)$$

где масса полей Паули-Вилларса M выбирается пропорциональной Λ: $M = a\Lambda$.

Тогда в одной петле

$$\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2(K+P)^2} \longrightarrow \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{K^2(K+P)^2} - \frac{1}{(K^2+M^2)((K+P)^2+M^2)} \right]$$

– получается выражение, конечное в УФ области.

Вычислим теперь 2-х петлевую β-функцию новым способом

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{gf} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta\, V(-p,\theta)\, \partial^2 \Pi_{1/2} V(p,\theta)\, d^{-1}$$

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d\ln\Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{\substack{p=0 \\ \alpha=\text{const}}} \qquad \left(\beta = \frac{d\alpha_0}{d\ln\Lambda} \right)$$

т.к. d^{-1} – конечная функция перенормированных величин.

В одной петле (см. ранее)

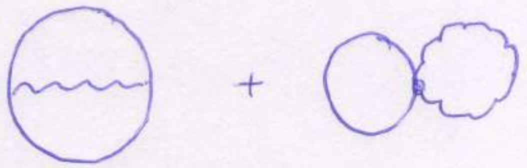
$$d^{-1} = \alpha_0^{-1} + 8\pi \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{K^2(K+P)^2} - \frac{1}{(K^2+M^2)((K+P)^2+M^2)} \right]$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d\ln\Lambda} 8\pi \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{K^4} - \frac{1}{(K^2+M^2)^2} \right] \overset{\mathcal{D}/3}{=}$$

$$= 2\pi \frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial K^\mu} \frac{\partial}{\partial K_\mu} \frac{\ln(K^2+M^2)}{K^2} = \frac{1}{\pi}$$

Для вычисления 2-х петлевого вклада можно рассмотреть вакуумные диаграммы



и следовать такому алгоритму:

1) Строим формальное выражение
2) Добавляем $\theta^4 v^2$ в получившееся выражение

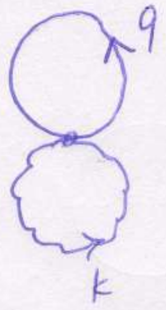
$$\int d^4\theta \cdot \theta^4 = 4 \qquad \int d^4x\, v^2 \equiv \mathcal{V}_4 \sim R^4 \longrightarrow \infty$$

3) Вычисляем результат до импульсного интеграла
4) Добавляем $\partial^2/\partial Q_\mu^2$ в подынтегральное выражение, где Q_μ - импульс петли материи. (если несколько петель, то сумму аналогичных выражений)
5) Умножаем результат на

$$-\frac{2\pi}{\mathcal{V}_4}\frac{d}{d\ln\Lambda}$$

Результатом будет вклад в $\frac{1}{\alpha_0^2}\left(\beta(\alpha_0) - \beta_{1\text{-}loop}(\alpha_0)\right)$

Вычисляем диаграммы:



$$\sim -i(iS_I)Z_0 = S_I Z_0 \stackrel{\to}{=}$$

$$\stackrel{\to}{=} \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\int d^8x\, \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j^*}\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta J}\cdot\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta J}\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j}\,Z_0$$

Φ и $\tilde{\Phi}$

$$= \int d^8x\cdot 2ie_0^2\left(-\cancelto{0}{\frac{1}{R\partial^2}}+\frac{1}{16\partial^4}\left(\frac{\mathcal{Z}_0}{k}-\frac{1}{R}\right)\underbrace{\left(D^2\bar{D}^2+\bar{D}^2D^2\right)}_{8}\right)_k \delta^8_{xy}\Big|_{y=x}$$

$$\cdot\frac{i\bar{D}^2D^2}{4\partial^2}\delta^8_{xy}\,{}_q\Big|_{y=x}\cdot\theta^4 v^2$$

где было учтено, что при $m=0$

$$Z_{0\Phi} = \exp\left\{i\int d^8x\left(j\frac{1}{\partial^2}j^*+\tilde{j}\frac{1}{\partial^2}\tilde{j}^*\right)\right.$$

$$\stackrel{\varepsilon}{\Longrightarrow} \cancel{i}\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cancel{(-1)}\,e_0^2\cdot\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}k^4}\left(\frac{\mathcal{Z}_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k\frac{1}{Q^2}\cdot$$

$$\cdot\int d^8x\,\theta^4 v^2 = 4\partial_4\, e_0^2\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^4Q^2}\left(\frac{\mathcal{Z}_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k$$

$$\longrightarrow -\frac{2\pi}{\cancel{\partial_4}}\cdot\frac{d}{d\ln\Lambda}\,4\cancel{\partial_4}\,e_0^2\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\left(\frac{1}{k^4Q^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\mathcal{Z}_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k\right) =$$

$$= \boxed{-8\pi e_0^2 \frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\left(\frac{1}{k^4Q^2}\left(\frac{\xi_0}{K}-\frac{1}{R}\right)_k\right)}$$

Аналогичным образом вычислим 2-ю диаграмму:

Φ и $\bar{\Phi}$

$$\sim (-i)\cdot 2\,\frac{1}{2}(iS_I)^2 Z_0 = iS_I^2 Z_0 =$$

$$= \cancel{i}\int d^8x_1\, \frac12\, \frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1^*}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_1}\cdot\int d^8x_2\, \frac12\,\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_2^*}\cdot\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta J_2}$$

$$\cdot\frac{1}{\cancel{i}}\frac{\delta}{\delta j_2}Z_0 =$$

$$= -\frac{\cancel{i}}{4}\int d^8x_1\, d^8x_2\, \theta_1^4 v_1^2 \cdot 2\cancel{i} e_0^2\left(-\frac{1}{\partial^2 R}+\frac{1}{16\partial^4}\left(\frac{\xi_0}{K}-\frac1R\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(D_1^2\bar D_1^2+\bar D_1^2 D_1^2)\right)\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot \frac{\cancel{i}D_1^2\bar D_2^2}{4\partial^2}\underset{q}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{\cancel{i}\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{q+k}{\delta^8_{12}} =$$

$$= -\frac14\int d^8x_1\, d^8x_2\, \theta_1^4 v_1^2\cdot 2e_0^2\left[-\frac{1}{\partial^2 R}\cdot\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{D_1^2\bar D_2^2}{4\partial^2}\underset{q}{\delta^8_{12}}\,\frac{\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{q+k}{\delta^8_{12}}\right.$$

$$-\frac{1}{\partial^4}\left(\frac{\xi_0}{K}-\frac1R\right)D_1^2\bar D_1^2\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{\bar D_1^2 D_1^2}{4\partial^2}\underset{q}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{1}{4}\underset{k+q}{\delta^8_{12}} -$$

$$\left.-\frac{1}{\partial^4}\left(\frac{\xi_0}{K}-\frac1R\right)\bar D_1^2 D_1^2\underset{k}{\delta^8_{12}}\cdot\frac14\underset{q}{\delta^8_{12}}\cdot\frac{\bar D_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underset{k+q}{\delta^8_{12}}\right]$$

$$\xrightarrow{\varepsilon} = \frac{1}{\cancel{4}} \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \cancel{4}\partial_4 \cdot 2e_0^2 \left[-\frac{1}{k^2R_kQ^2(Q+k)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{Q^2+(Q+k)^2}{k^4Q^2(k+Q)^2}\left(\frac{\xi_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k\right]$$

Поэтому вклад в β/e_0^2 будет иметь вид

$$-\frac{2\pi}{\cancel{\partial_4}}\frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, 2\cancel{\partial_4}\, e_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\left[-\frac{1}{k^2R_kQ^2(Q+k)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{k^4Q^2}\left(\frac{\xi_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k\right] =$$

$$\boxed{= +4\pi e_0^2 \frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\left[\frac{1}{k^2R_kQ^2(Q+k)^2} + \frac{2}{k^4Q^2}\left(\frac{\xi_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k\right]}$$

Суммарно

 +  $= 4\pi e_0^2 \frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\cdot$

$$\left[\frac{1}{k^2R_kQ^2(Q+k)^2} + \cancel{\frac{2}{k^4Q^2}\left(\frac{\xi_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k} - \cancel{\frac{2}{k^4Q^2}\left(\frac{\xi_0}{k}-\frac{1}{R}\right)_k}\right]$$

— все калибровочно зависимые слагаемые сокращаются.

Поэтому

$$\frac{\beta_{2\text{-loop}}}{\alpha_0^2} = 16\pi^2\alpha_0 \frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} \left(\frac{1}{k^2 R_k Q^2 (Q+k)^2} \right) =$$

$$= 16\pi^2 \cdot \frac{4\pi^2 \alpha_0}{(2\pi)^4} \frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{2}{k^4 R_k} = 4\alpha_0 \frac{2\cdot 2\pi^2}{16\pi^4} = \frac{\alpha_0}{\pi}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha_0^2} = \frac{1}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\pi^2} + O(\alpha_0^2) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \gamma(\alpha_0)\right)}$$