

Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания

© Авторы, 2020

© ООО «Издательство «Радиотехника», 2020

М.А. Басараб – д.ф.-м.н., доцент,

МГТУ им. Н.Э. Баумана

E-mail: bmic@mail.ru

Б.С. Лунин – д.т.н., вед. науч. сотрудник,

химический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова

E-mail: luninboris@yandex.ru

А.В. Колесников – к.т.н., доцент,

МГТУ им. Н.Э. Баумана

E-mail: avkolesnikov@list.ru

Аннотация

Постановка проблемы. Функционирование волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) основано на эффекте прецессии упругих волн, возбужденных в осесимметричных телах (эффект Брайана). В реальности в качестве таких тел (резонаторов) используются соответствующим образом закрепленные достаточно тонкие оболочки вращения, выполненные из упругих материалов с высокой добротностью. Возбужденная в них стоячая волна перемещается по окружному углу в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, аналогично твердому телу, демонстрируя таким образом свои инертные свойства. Она поворачивается в пространстве на угол, меньший угла поворота основания, что позволяет измерять угол поворота последнего. Полное математическое описание ВТГ содержит системы дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории тонких оболочек. Для численного интегрирования таких систем с достаточной точностью требуются значительные вычислительные мощности. Учитывая тот факт, что основная часть энергии колебаний резонатора (а также максимальная амплитуда стоячей волны) соответствует области, примыкающей к его кромке, вместо оболочки часто рассматривается кольцевая модель. Ранее для некоторых типов законов угловых скоростей были получены аналитические решения уравнений динамики. Однако, во-первых, класс возможных аналитических решений достаточно узок и не позволяет исследовать многие практически важные нестационарные режимы работы прибора, включая динамику переходных процессов и др. Во-вторых, аналитические решения, как правило, представляются в виде бесконечных рядов по специальным функциям и требуют в зависимости от диапазона угловой скорости использования тех или иных асимптотических приближений. Последний факт практически сводит на нет все преимущества аналитического подхода.

Цель. Исследовать динамику свободных колебаний кольцевого резонатора, закрепленного на основании, вращающемся с произвольной угловой скоростью и рассмотреть численно-аналитическое решение дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания, основанное на комбинированном использовании метода интегральных преобразований по углу и метода прямых (Роте) по временной переменной.

Результаты. Предложено численно-аналитическое решение уравнения динамики свободных колебаний кольцевого резонатора, закрепленного на произвольно вращающемся основании, на основе комбинированного использования метода интегральных преобразований по углу и метода прямых (Роте) по временной переменной. Рассмотрены вопросы, связанные с оценкой погрешности и вычислительной сложностью алгоритма реализации. Даны примеры, позволяющие оценить предложенный подход для случаев постоянной и переменной скоростей вращения при возбуждении резонатора по второй форме колебаний.

Практическая значимость. Приведенные примеры демонстрируют эффективность предложенного подхода, который позволяет эффективно исследовать динамические режимы функционирования волнового твердотельного гироскопа как кольцевого типа, так и имеющих резонатор в форме оболочки вращения (полусферический – HRG, цилиндрический – CRG, и др.).

Ключевые слова

Волновой твердотельный гироскоп, упругое кольцо, метод Роте.

Для цитирования

Басараб М.А., Лунин Б.С., Колесников А.В. Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания // Динамика сложных систем. 2020. Т. 14. № 2. С. 5–15. DOI: 10.18127/j19997493-202002-01.

Введение

Функционирование волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) основано на эффекте прецессии упругих волн, возбужденных в осесимметричных телах [1–3]. В реальности в качестве таких тел (резонаторов) используются соответствующим образом закрепленные достаточно тонкие оболочки вращения, выполненные из упругих материалов с высокой добротностью. Возбужденная в них стоячая волна перемещается по окружному углу (в плоскости, перпендикулярной оси симметрии) аналогично твердому телу, демонстрируя таким образом свои инертные свойства. Однако она поворачивается в пространстве на угол, меньший угла поворота основания, что позволяет измерять угол поворота последнего. Угловые скорости вращения основания резонатора Ω и возбужденной в его плоскости стоячей волны ϑ связаны соотношением

$$\vartheta = BF \cdot \Omega,$$

где $0 < BF < 1$ – масштабный коэффициент (коэффициент Брайана) [4].

В [1] доказано, что данный эффект справедлив при любой переменной скорости вращения основания $\Omega = \Omega(t)$.

Полное математическое описание ВТГ содержит системы дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории тонких оболочек. Для численного интегрирования таких систем с достаточной точностью требуются значительные вычислительные мощности. Учитывая тот факт, что основная часть энергии колебаний резонатора (а также максимальная амплитуда стоячей волны) соответствует области, примыкающей к его кромке, вместо оболочки часто рассматривается кольцевая модель [1–3]. Такая модель хорошо описывает динамику цилиндрического резонатора, коэффициент прецессии которого в пределе стремится к коэффициенту прецессии кольца с увеличением отношения высоты цилиндра к его радиусу.

Особенно просто анализ динамики кольцевого резонатора выполняется в случае постоянной угловой скорости: $\Omega = \text{const}$. При этом аналитически решаются уравнения динамики, находятся собственная частота колебаний, угол поворота стоячей волны и другие параметры.

При определенных зависимостях $\Omega(t)$ (линейная, гармоническая, закон квадратного корня) [1] путем сведения к известным дифференциальным уравнениям 2-го порядка с переменными коэффициентами для кольцевого резонатора решения уравнений динамики также могут быть найдены аналитически. Однако, во-первых, вид этих решений может быть достаточно громоздким (выражаются через специальные функции). Во-вторых, далеко не любой закон поворота основания позволяет получить хорошо изученные аналитически дифференциальные уравнения. В частности, это касается таких практически важных случаев, когда зависимость $\Omega(t)$ либо плавно, либо скачкообразно меняется со временем, а также если она задана не в аналитическом, а в табличном виде.

В работе рассматривается численно-аналитический подход к решению уравнения динамики колебаний кольцевого резонатора при произвольном законе поворота основания, основанный на комбинированном использовании метода интегральных преобразований по пространственной переменной и метода прямых (Роте) по временной переменной. В литературе он встречается под названием *метода Канторовича* [5] или *обобщенного метода Бубнова–Галеркина* [2].

Ц е л ь р а б о т ы – исследовать динамику свободных колебаний кольцевого резонатора, закрепленного на основании, вращающемся с произвольной угловой скоростью и рассмотреть численно-аналитическое решение дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания, основанное на комбинированном использовании метода интегральных преобразований по углу и метода прямых (Роте) по временной переменной.

Принцип действия и модель динамики кольцевого волнового твердотельного гироскопа

Выделим с кромки резонатора кольцо радиуса R (кольцевой резонатор) с конечной площадью поперечного сечения. Возбудим в кольцевом резонаторе упругую стоячую волну с номером формы колебания k .

На рис. 1 показана форма такой волны для $k=2$. Ее радиусы максимумов (пучности) в полярной системе координат, связанной с корпусом прибора, расположены под углом φ_0 . При вращении корпуса с угловой скоростью Ω угол ориентации пучностей φ_k^* будет изменяться по закону

$$\varphi_k^*(t) = \varphi_0 - \frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(s) ds. \quad (1)$$

Стоячая волна перемещается по «окружному» углу аналогично твердому телу, демонстрируя, таким образом, свои инертные свойства. Однако, из (1) следует, что стоячая волна поворачивается в пространстве на угол, меньший угла поворота корпуса прибора, и при известном φ_0 угол $\varphi_k^*(t)$ служит мерой угла поворота основания.

Если бы стоячая волна не обладала инертными свойствами, то ее пучности повернулись бы относительно основания на угол

$$\varphi^*(t) - \varphi_0 = - \int_0^t \Omega(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Отличие (1) от (2) заключается в масштабном коэффициенте прецессии Брайана:

$$BF = \frac{2}{k^2 + 1} < 1 \text{ при } k = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Механизм возникновения прецессии (эффект Брайана) объясняется действием силы Кориолиса при совершении точками вращающегося кольца сложных движений: относительного колебательного и переносного с угловой скоростью Ω .

Независимо могут существовать различные рабочие формы упругих колебаний с номерами $k = 2, 3, \dots$. При этом образуется несколько независимых каналов измерения вращения основания с формулами преобразования (1) и коэффициентами прецессии (3).

Вторая форма колебаний ($k = 2$) является низшей собственной формой изгибных колебаний упругого кольцевого резонатора и чаще всего используется в качестве рабочей.

Однородное дифференциальное уравнение колебаний идеального упругого кольца в радиальном направлении, в общем виде имеет вид [1–3]

$$\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' - \Omega^2(w^{IV} + 3w'') + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \kappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = F, \quad (4)$$

где $w = w(\varphi, t)$ – радиальное перемещение точки на кромке кольца, м; $\Omega = \Omega(t)$ – угловая скорость поворота основания, рад/с; $\kappa^2 = \frac{EJ}{\rho_V SR^4}$, с^{-2} (здесь ρ_V – объемная плотность материала, кг/м^3 ; S – площадь поперечного сечения, м^2 ; R – радиус средней нейтральной линии, м; E – модуль упругости материала, Па); $J = h^4/12$ – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, м^4 ; h – толщина, м; ξ – характерное время затухания упругих релаксаций, с; $F = \frac{1}{\rho_S S}(p_w'' - p_v')$ – ускорение точек системы под влиянием проекции внешней распределенной нагрузки на плоскость кольца, м/с^2 ; ρ_S – поверхностная плотность материала, кг/м^2 ; p_w, p_v – проекции внешней распределенной нагрузки в нормальном и тангенциальном направлении соответственно, Па; штрих обозначает производную по углу, точка – производную по времени.

Далее рассмотрим случай свободных колебаний, когда правая часть $F \equiv 0$.

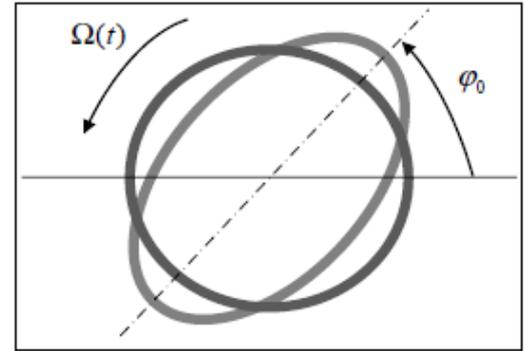


Рис. 1. Графическое представление эффекта Брайана в кольцевом резонаторе

Fig. 1. Bryan's effect in an elastic ring resonator

Аналитические методы расчета динамики кольцевого резонатора

Приведем уравнение (4) к безразмерной форме:

$$\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Theta\dot{w}' + 2\dot{\Theta}w' - \Theta^2(w^{IV} + 3w'') + (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \zeta(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = 0, \quad (5)$$

где $\tau = \kappa t$ – безразмерное время; $\Theta = \Omega / \kappa$ – безразмерная угловая скорость; $\zeta = \kappa \zeta$ – безразмерное время затухания упругих релаксаций; здесь и далее точка обозначает производную по безразмерному времени τ .

Для однозначного решения уравнения динамики его необходимо дополнить начальными условиями:

$$w(\varphi, 0) = a_0(\varphi), \quad \dot{w}(\varphi, 0) = a_1(\varphi), \quad (6)$$

а также условиями периодичности по окружному углу φ :

$$w^{(l)}(0, \tau) = w^{(l)}(2\pi, \tau), \quad l = 0, \dots, 5. \quad (7)$$

Рассмотрим метод Бубнова–Галеркина применительно к решению уравнения свободных колебаний идеального кольца. При этом произвольное колебание кольцевого резонатора представляется тригонометрическим рядом Фурье с неопределенными динамическими коэффициентами $p_k(\tau)$, $q_k(\tau)$:

$$w(\varphi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (p_k(\tau) \sin k\varphi + q_k(\tau) \cos k\varphi). \quad (8)$$

При рассмотрении одномодовых колебаний нужно оставить лишь члены, соответствующие номеру формы k :

$$w(\varphi, \tau) = p(\tau) \sin k\varphi + q(\tau) \cos k\varphi, \quad (9)$$

где $p(\tau) \equiv p_k(\tau)$, $q(\tau) \equiv q_k(\tau)$.

Согласно методу Бубнова–Галеркина следует приравнять к нулю скалярные произведения левой части (5) на функции пространственного базиса $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$:

$$\int_0^{2\pi} \left[\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Theta\dot{w}' + 2\dot{\Theta}w' - \Theta^2(w^{IV} + 3w'') + (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \zeta(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') \right] \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Theta\dot{w}' + 2\dot{\Theta}w' - \Theta^2(w^{IV} + 3w'') + (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \zeta(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') \right] \sin k\varphi d\varphi = 0.$$

Подставляя в (10) вместо w выражение (9), после интегрирования получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{p} + \omega_k^2 \zeta \dot{p} - 4\Theta \frac{k}{k^2 + 1} \dot{q} + \left(\omega_k^2 + \Theta^2 \frac{k^2(k^2 - 3)}{k^2 + 1} \right) p - 2\dot{\Theta} \frac{k}{k^2 + 1} q = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{q} + \omega_k^2 \zeta \dot{q} + 4\Theta \frac{k}{k^2 + 1} \dot{p} + \left(\omega_k^2 + \Theta^2 \frac{k^2(k^2 - 3)}{k^2 + 1} \right) q + 2\dot{\Theta} \frac{k}{k^2 + 1} p = 0,$$

где ω_k – собственная частота колебаний:

$$\omega_k = \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (12)$$

Введем комплекснозначную функцию

$$r = p - iq. \quad (13)$$

Тогда вместо системы (11) получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{r} + \left(\omega_k^2 \zeta - 4\Theta \frac{k}{k^2 + 1} i \right) \dot{r} + \left(\omega_k^2 + \Theta^2 \frac{k^2(k^2 - 3)}{k^2 + 1} - 2\dot{\Theta} \frac{k}{k^2 + 1} i \right) r = 0. \quad (14)$$

Введем замену:

$$r(\tau) = s(\tau) \exp \left(-\frac{\omega_k^2 \zeta}{2} \tau + 2i \frac{k}{k^2 + 1} \int \Theta(\tau) d\tau \right). \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), получим следующее дифференциальное уравнение для $s(\tau)$:

$$\ddot{s} + f_k(\tau)s = 0, \quad (16)$$

где $f_k(\tau) = b_k - \frac{d_k^2}{4}$; $b_k(\tau) = \omega_k^2 + \Theta^2(\tau) \frac{k^2(k^2 - 3)}{k^2 + 1}$; $d_k(\tau) = \zeta \omega_k^2 - 4\Theta(\tau) \frac{k}{k^2 + 1} i$.

Наиболее просто (16) решается в случае, когда $\Theta = \text{const}$:

$$s(\tau) = C_1 \exp(-i\sqrt{f_k} \tau) + C_2 \exp(i\sqrt{f_k} \tau), \quad (17)$$

где C_1, C_2 – неопределенные коэффициенты, которые могут быть найдены из начальных условий.

Численно-аналитический метод расчета динамики кольцевого резонатора

Аналитический метод позволяет исследовать динамику упругого кольца лишь для очень узкого класса угловых скоростей основания [1]:

- постоянной ($\Omega = \text{const}$);
- изменяющейся по линейному закону (с помощью функций параболического цилиндра);
- изменяющейся по закону квадратного корня (с помощью функций Эйри);
- изменяющейся по гармоническому закону (с помощью функций Матье).

При переменной угловой скорости основания решение, полученное с помощью аналитического метода, имеет достаточно громоздкий вид, будучи выраженным через специальные функции. Поэтому в наиболее общем случае для решения (16) необходимо использовать *метод конечных разностей по времени*. В комбинации с использованным выше методом Бубнова–Галеркина данный подход носит название *метода прямых (Роте) и интегральных преобразований*. Он также часто встречается под названием метода Канторовича [5] или либо обобщенного *метода Бубнова–Галеркина* [2].

Представим комплекснозначную функцию $s(\tau)$ в виде комбинации

$$s(\tau) = u(\tau) + iv(\tau).$$

Тогда (16) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \alpha u - \beta v &= 0, \\ \ddot{v} + \alpha v + \beta u &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha(\tau) = \text{Re } f_k(\tau)$, $\beta(\tau) = \text{Im } f_k(\tau)$.

Для решения системы (18) на интервале $\tau \in [0, T]$ введем сетку: $\tau_j = j\Delta\tau$; $j = 0, \dots, M$; $\Delta\tau = \frac{T}{M}$.

Введем обозначения $u_j = u(\tau_j)$ и $v_j = v(\tau_j)$. Аппроксимируем вторые производные конечными разностями:

$$\ddot{u}(\tau_j) = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta\tau^2} + O(\Delta\tau^2), \quad \ddot{v}(\tau_j) = \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{\Delta\tau^2} + O(\Delta\tau^2).$$

Решение системы (18) может быть получено *численным методом Адамса–Штермера* [6]:

$$\begin{aligned} u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} &= \Delta\tau^2 \sum_{p=0}^K \gamma_p \nabla^p (-\alpha_j u_j + \beta_j v_j), \\ v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} &= \Delta\tau^2 \sum_{p=0}^K \gamma_p \nabla^p (-\alpha_j v_j - \beta_j u_j), \end{aligned} \quad (19)$$

(явная схема) или

$$\begin{aligned} u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} &= \Delta\tau^2 \sum_{p=0}^K \delta_p \nabla^p (-\alpha_j u_{j+1} + \beta_j v_{j+1}), \\ v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} &= \Delta\tau^2 \sum_{p=0}^K \delta_p \nabla^p (-\alpha_j v_{j+1} - \beta_j u_{j+1}). \end{aligned} \quad (20)$$

(неявная схема).

В (19) $\alpha_j = \alpha(\tau_j)$, $\beta_j = \beta(\tau_j)$; ∇^p – обратная разделенная разность p -го порядка; коэффициенты $\{\gamma_p\}$ и $\{\delta_p\}$ принимают следующие значения: $\{\gamma_p\} = 1, 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{19}{240}, \dots$; $\{\delta_p\} = 1, -1, \frac{1}{12}, 0, -\frac{1}{240}, \dots$.

Далее рассмотрим явные схемы (19).

Для явной схемы метода Адамса–Штермера 1-го порядка при $j = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= (2 - \alpha_j \Delta\tau^2) u_j + \beta_j \Delta\tau^2 v_j - u_{j-1}, \\ v_{j+1} &= (2 - \alpha_j \Delta\tau^2) v_j - \beta_j \Delta\tau^2 u_j - v_{j-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично для явной схемы метода Адамса–Штермера 2-го порядка можно записать:

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \left(2 - \frac{13}{12} \alpha_j \Delta\tau^2\right) u_j + \left(-1 + \frac{1}{6} \alpha_j \Delta\tau^2\right) u_{j-1} - \frac{1}{12} \alpha_j \Delta\tau^2 u_{j-2} + \frac{1}{12} \beta_j \Delta\tau^2 (13v_j - 2v_{j-1} + v_{j-2}), \\ v_{j+1} &= \left(2 - \frac{13}{12} \alpha_j \Delta\tau^2\right) v_j + \left(-1 + \frac{1}{6} \alpha_j \Delta\tau^2\right) v_{j-1} - \frac{1}{12} \alpha_j \Delta\tau^2 v_{j-2} - \frac{1}{12} \beta_j \Delta\tau^2 (13u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}). \end{aligned} \quad (22)$$

Используя первое начальное условие (6), получим

$$u_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_0(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad v_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_0(\varphi) \sin k\varphi d\varphi. \quad (23)$$

Тогда из второго начального условия (6) и аппроксимации первых производных

$$\dot{u}(0) = \frac{u_1 - u_0}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau), \quad \dot{v}(0) = \frac{v_1 - v_0}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau),$$

получим

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \left(1 + \tau \frac{\omega_k^2 \zeta}{2}\right) + \tau \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1(\varphi) \cos k\varphi d\varphi + \Theta_0 \frac{k}{k^2 + 1} v_0 \right), \\ v_1 &= v_0 \left(1 + \tau \frac{\omega_k^2 \zeta}{2}\right) + \tau \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1(\varphi) \sin k\varphi d\varphi - \Theta_0 \frac{k}{k^2 + 1} u_0 \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Theta_0 = \Theta(0)$.

Для схемы второго порядка (22) значения u_2 и v_2 можно вычислить, используя один шаг схемы первого порядка (21).

Численный эксперимент

Пример 1. Рассмотрим динамику свободных затухающих колебаний кольцевого резонатора при постоянной угловой скорости вращения основания, когда $\dot{\Theta} = 0$.

В качестве начальных условий (6) примем исходную деформацию кольца по второй форме колебаний ($k = 2$):

$$w(\varphi, 0) = p(0) \cos 2\varphi + q(0) \sin 2\varphi, \quad \dot{w}(\varphi, 0) = 0. \quad (25)$$

Коэффициенты в (17) имеют следующий вид:

$$C_1 = \frac{1}{4} \left[p(0) + q(0) \frac{\operatorname{Re}(g)}{\operatorname{Im}(g)} \right] + \frac{1}{4} \left[q(0) + p(0) \frac{\operatorname{Re}(g)}{\operatorname{Im}(g)} \right] i,$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left[p(0) - q(0) \frac{\operatorname{Re}(g)}{\operatorname{Im}(g)} \right] + \frac{1}{4} \left[-q(0) - p(0) \frac{\operatorname{Re}(g)}{\operatorname{Im}(g)} \right] i,$$

где $g = -\frac{d_2}{2} + i \sqrt{b_2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$; $d_2 = \zeta \omega_2^2 - \frac{8}{5} \Theta_0 i$; $b_2 = \omega_2^2 + \frac{4}{5} \Theta_0^2$; $\omega_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

На рис. 2 приведены результаты аналитического расчета динамики резонатора на интервале $\tau \in [0, 100]$ в точках $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$ при параметрах $\Theta_0 = 0,1$; $\zeta = 1 \cdot 10^{-3}$; $p(0) = 1$; $q(0) = 0$.

Численно-аналитический расчет по схемам (21) и (22) производился на разных сетках по времени. Чем мельче сетка, тем медленнее нарастает погрешность с течением времени. При шагах $\Delta\tau > 0,7$ терялась устойчивость алгоритма. В табл. 1 и 2 и на рис. 3 приведены результаты расчета погрешности для шага $\Delta\tau = 0,1$. Погрешность между аналитическим, w , и приближенным, \tilde{w} , решениями вычислялась в точке $\varphi = 0$ в следующих метриках:

$$\varepsilon_1 = \frac{\max_j |w(0, \tau_j) - \tilde{w}_j|}{\max_j |w(0, \tau_j)|}; \quad \varepsilon_2^2 = \frac{\sum_j (w(0, \tau_j) - \tilde{w}_j)^2}{\sum_j w^2(0, \tau_j)^2}.$$

Видно, что при небольших временных интервалах схемы первого и второго порядка дают близкие по точности результаты, однако при $\tau > 50$ целесообразно использовать схему более высокого порядка.

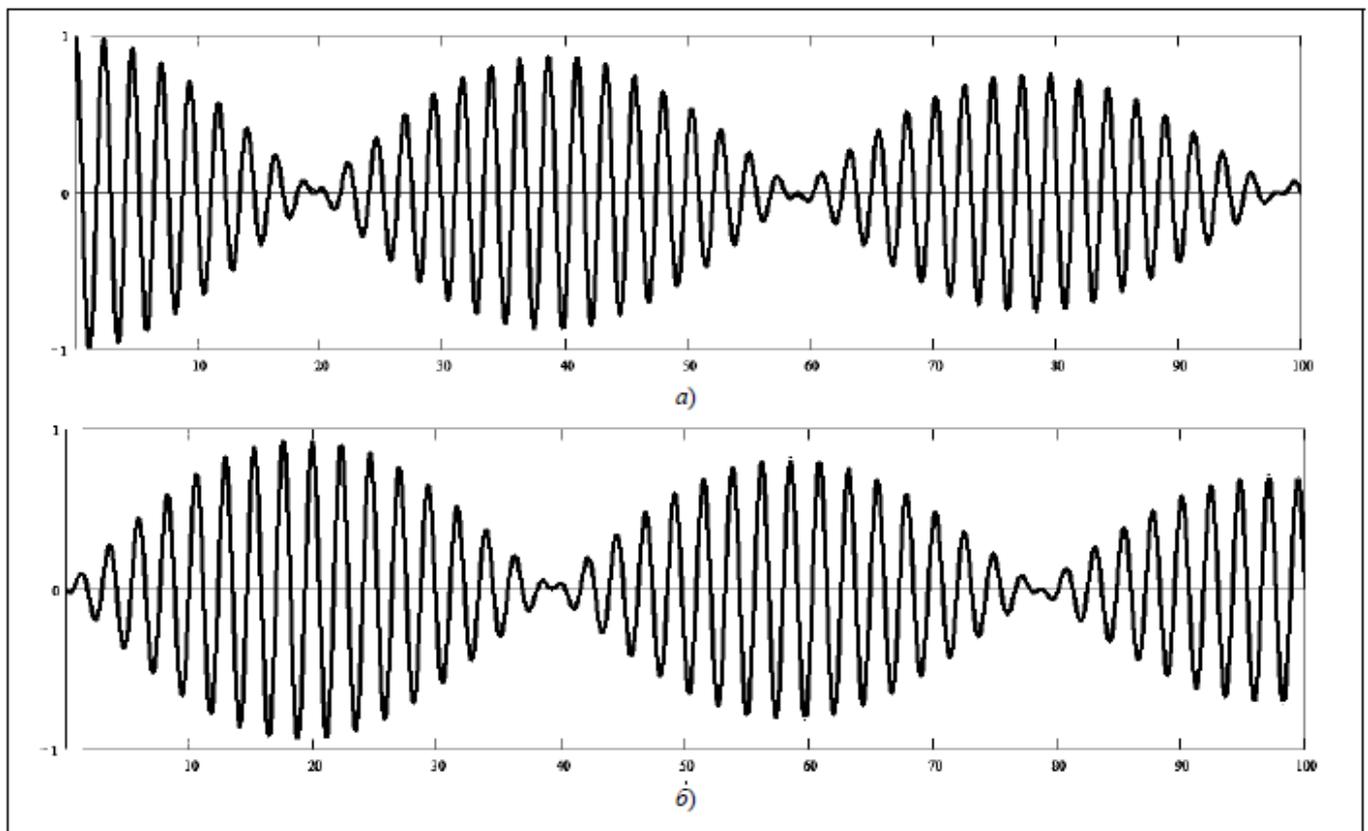


Рис. 2. Графическое представление амплитуды перемещений точек резонатора, соответствующих углам $\varphi = 0$ (а) и $\varphi = \pi/4$ (б)

Fig. 2. Amplitudes the radial movements of the resonator points at angles $\varphi = 0$ (a) and $\varphi = \pi/4$ (b)

Таблица 1. Значения погрешности ε_1 вычисления радиального перемещения в точке $\varphi = 0$

Схема	τ_{\max}				
	10	50	100	200	500
(21)	0,0125	0,0265	0,1176	0,6392	2,2906
(22)	0,0207	0,0200	0,0255	0,0537	0,1825

Таблица 2. Значения погрешности ε_2^2 вычисления радиального перемещения в точке $\varphi = 0$

Схема	τ_{\max}				
	10	50	100	200	500
(21)	0,1320	0,1966	0,5044	1,3426	2,0060
(22)	0,1358	0,1409	0,1813	0,3428	0,6299

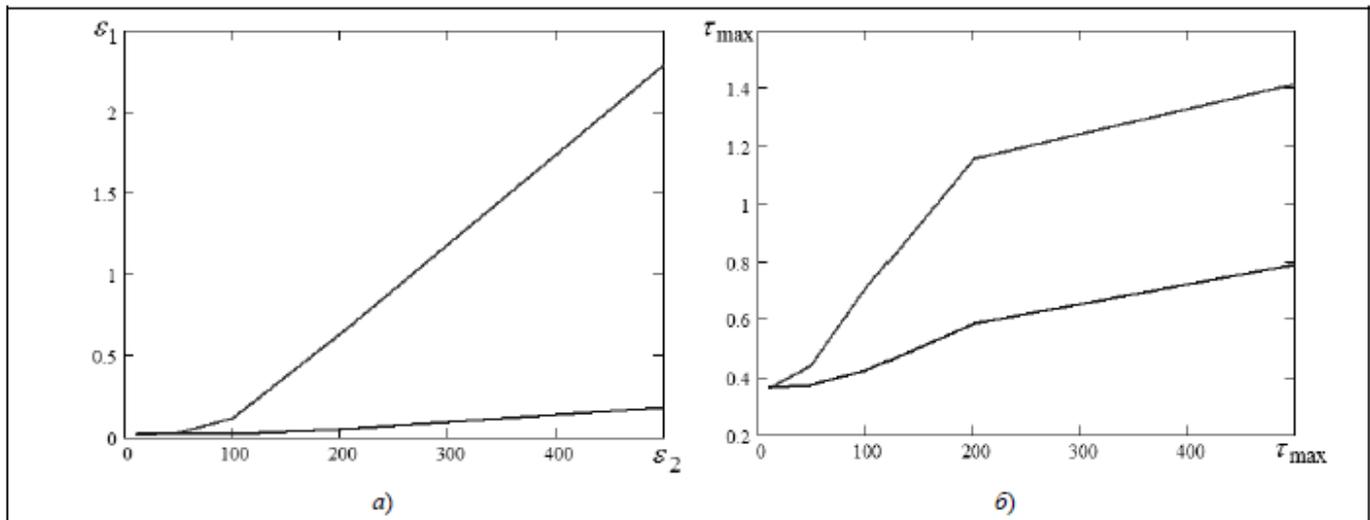


Рис. 3. Графики погрешности ε_1 (а) и ε_2 (б) вычисления радиального перемещения в точке $\varphi = 0$

Fig. 3. Errors ε_1 (a) and ε_2 (b) of evaluating the radial movement of the resonator point at angle $\varphi = 0$

Пример 2. Сравним предложенный численно-аналитический подход с аналитическим решением, выраженным через функции Эйри, Ai , Bi при скорости поворота основания, меняющейся по закону $\Theta(\tau) = \sqrt{5l\tau}$ ($l > 0$) [1]:

$$w(\varphi, \tau) = [C_1 Ai(-\theta) + C_2 Bi(-\theta)] \cos 2 \left(\varphi + \frac{2}{5} \int_0^\tau \Theta(s) ds \right) + [C_3 Ai(-\theta) + C_4 Bi(-\theta)] \sin 2 \left(\varphi + \frac{2}{5} \int_0^\tau \Theta(s) ds \right), \quad (26)$$

где $\theta(\tau) = \gamma + \delta\tau$; $\gamma = \sqrt[3]{\frac{36}{5l^2}}$; $\delta = \sqrt[3]{\frac{36l}{5}}$; C_1, C_2, C_3, C_4 – коэффициенты, определяемые начальными усло-

виями; $\int_0^\tau \Theta(s) ds = \frac{2}{3} \sqrt{5l} \tau^{3/2}$.

В частности, для условий вида (25):

$$C_1 = p(0) \frac{Bi_\theta(-\gamma)}{Ai(-\gamma)Bi_\theta(-\gamma) - Bi(-\gamma)Ai_\theta(-\gamma)}, \quad C_2 = -C_1 \frac{Ai_\theta(-\gamma)}{Bi_\theta(-\gamma)}, \quad C_3 = C_4 = 0.$$

Данное решение требует вычисления значений специальных функций Эйри и их производных [1]. Они выражаются через функции Бесселя дробного индекса следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{3}\sqrt{-x} \left\{ J_{1/3} \left[\frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right] + J_{-1/3} \left[\frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right] \right\}, \\ \text{Bi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-x} \left\{ J_{-1/3} \left[\frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right] - J_{1/3} \left[\frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$

($x < 0$).

В свою очередь последние могут быть найдены из ряда

$$J_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{n+2j},$$

где $n = \pm \frac{1}{3}$; $y = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$.

Последний ряд медленно сходится при небольших значениях аргумента. В этой связи использование такого аналитического разложения в случаях больших угловых скоростей приводит либо к трудоемким вычислениям, либо к большим погрешностям. В случае, когда угловая скорость достаточно велика, вместо (27) можно использовать следующие асимптотические представления:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} \sin \left\{ \frac{2}{3} \left[(-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} \cos \left\{ \frac{2}{3} \left[(-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \right\};$$

($x < 0$).

Именно данный случай использовался в качестве тестового. Аналитические и численно-аналитические расчеты выполнялись на интервале $\tau \in [0, 200]$. Были выбраны параметры: $l = 1 \cdot 10^{-5}$, $\zeta = 0$. График перемещения в точке $\varphi = 0$ показан на рис. 4. Устойчивость конечно-разностной схемы Адамса–Штермера (21) терялась при тех же шагах $\Delta\tau > 0,7$ и была практически нечувствительна к вариациям параметра l , то есть к угловой скорости.

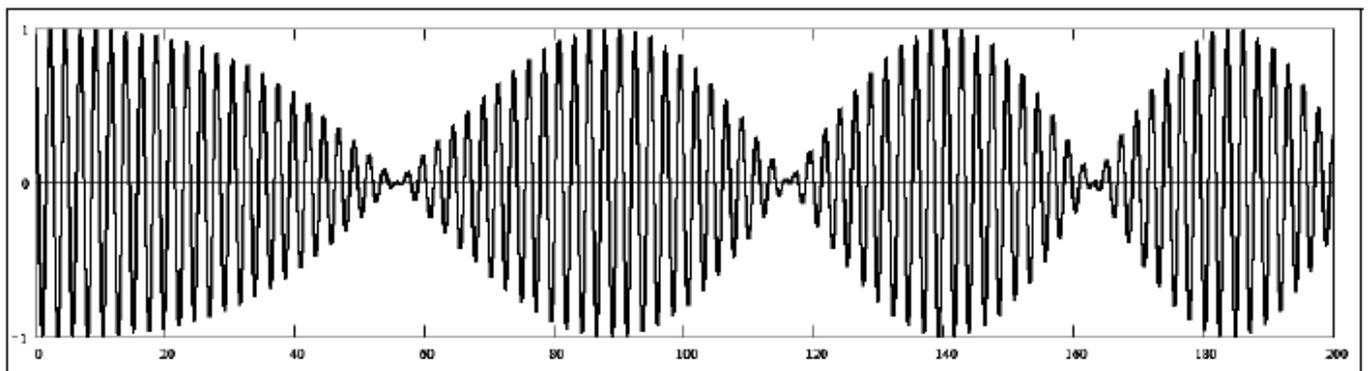


Рис. 4. Графическое представление амплитуды радиального перемещения точки резонатора, соответствующей углу $\varphi = 0$
 Fig. 4. The amplitude of the radial movement of the resonator point at angle $\varphi = 0$

Таким образом, в данном примере, несмотря на возможность получения аналитического решения, предложенное численно-аналитическое решение намного эффективнее по быстродействию при одной и той же точности расчетов.

Заключение

Полученное численно-аналитическое решение позволяет качественно и количественно оценить влияние нестационарной угловой скорости поворота основания на динамику упругого кольцевого резонатора.

По угловой координате предварительно был использован обобщенный метод Бубнова–Галеркина (Канторовича) для перехода от исходного дифференциального уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сравнение с известными аналитическими решениями показало, что независимо от закона изменения угловой скорости на малых шагах по времени (в безразмерной форме до 50) целесообразно использовать схему Адамса–Штермера по времени 1-го порядка, в то время как при больших значениях (>50) более эффективна схема Адамса–Штермера 2-го порядка.

Предложенный подход к решению дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания может быть особенно полезен при сложной циклограмме угловой скорости, включая наложение внешних вибраций и других факторов.

Литературы

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука. 1985.
2. Матвеев В.А., Литатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 1997.
3. Лукин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника. 2014.
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci. 1890. V. 7. P. 101–111.
5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы. 1981.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Лань. 2005.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979.

Поступила 5 мая 2020 г.

Numerical-analytical solution of the differential equation of free oscillations of an elastic ring when an arbitrary law of rotation of the basement

© Authors, 2020

© Radiotekhnika, 2020

M.A. Basarab – Dr.Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University
E-mail: bmic@mail.ru

B.S. Lunin – Dr.Sc. (Eng.), Leading Research Scientist,
Department of Chemistry, Moscow State University named after M.V. Lomonosov

A.V. Kolesnikov – Ph.D. (Eng.), Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University

Abstract

The functioning of Coriolis vibratory gyroscopes (CVGs) is based on the effect of the precession of elastic waves excited in axisymmetric bodies (the Bryan effect). In practice, these bodies (resonators), are usually thin shells of revolution made of elastic materials with high quality factor. The standing wave excited in them moves along a circumferential angle in a plane perpendicular to the axis of symmetry, similarly to a solid body, thus demonstrating its inertial properties. However, it rotates in space by an angle smaller than the angle of rotation of the basement, which allows one to measure the angle of rotation of the latter. The full mathematical description of the SVG dynamics contains systems of partial differential equations of the theory of thin shells. Significant computational power is required for the numerical integration of such systems with sufficient accuracy. In connection with this, given the fact that the main part of the resonator vibrational energy (as well as the maximum amplitude of a standing wave) corresponds to a region adjacent to its edge, a ring model is often considered instead of a shell. The aim of this work is to study the dynamics of free oscillations of a ring resonator mounted on a base rotating at an arbitrary angular velocity. Earlier, for some types of laws of angular velocities, analytical solutions of the equations of dynamics were obtained. However, firstly, the class of possible analytical solutions is rather narrow and does not allow one to study many practically important non-stationary operating modes of the device, including the dynamics of transients, etc. Secondly, analytical solutions are usually presented in the form of infinite series for special functions and require the use of certain asymptotic approximations, depending on the dynamic range of angular velocity. The latter fact practically negates all the advantages of the analytical approach. The proposed numerical-analytical method of solution is based on the combined use of the method of integral transforms in the angle and the method of lines (Rothe) in the time variable. It allows one to take advantage of the exact (analytical) approach, as well as the flexibility of computational finite-difference schemes. Issues related to error estimation and computational complexity of the implemented algorithm are considered. The results are presented that make it possible to evaluate the proposed approach for cases of constant and variable angular velocities when the resonator is excited by the second form of oscillation. As an example of the variable angular velocity, the quadratic law of rotation of the base is chosen, which requires the use of the apparatus of the special Airy functions, as well as their asymptotic approximations through Bessel functions. The method allows one to effectively explore the complex dynamic regimes of operation of a CVG, both of ring type and of common practical designs with resonators in the form of shells of revolution (hemispherical – HRG, cylindrical – CRG, etc.).

Keywords

Solid-state wave gyroscope, HRG, elastic ring, Rothe method.

For citation

Basarab M.A., Lunin B.S., Kolesnikov A.V. Numerical-analytical solution of the differential equation of free oscillations of an elastic ring when an arbitrary law of rotation of the basement. Dynamics of complex systems. 2020. V. 14. № 2. P. 5–15. DOI: 10.18127/j19997493-202002-01.

References

1. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoj tverdotel'nyj giroskop*. M.: Nauka. 1985 (in Russian).
2. Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alehin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa*. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana. 1997 (in Russian).
3. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoj tverdotel'nyj giroskop. Teorija i tehnologija*. M.: Radiotekhnika. 2014 (in Russian).
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 1890. V. 7. R. 101–111 (in Russian).
5. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. *Vvedenie v proekcionno-setochnye metody*. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. literatury. 1981 (in Russian).
6. Samarskij A.A. *Vvedenie v chislennye metody*. M.: Lan'. 2005 (in Russian).
7. Abramovic M., Stigan I. *Spravochnik po special'nym funkcijam*. M.: Nauka. 1979 (in Russian).