ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 2, с. 261–265

УДК 534.221,548.1.022

УГЛЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И НАПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОВ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЛН ТЕ И ТМ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ

С. К. Тлеукенов[1], Ж. Н. Суйеркулова[1, *], В. Г. Можаев[2]

[1] *Евразийский Национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

[2] *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Москва, Россия*

*E-mail: zhamila_kudaibergen@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.
После доработки 13.09.2019 г.
Принята к публикации 28.10.2019 г.

Определены направления векторов фазовых и групповых скоростей волн ТЕ и ТМ поляризации при преломлении на границе "изотропной диэлектрик–одноосный кристалл с магнитоэлектрическим свойствами". В аналитической форме получены значения углов, определяющих направления фазовых и групповых скоростей ТЕ и ТМ волн, в зависимости от направления волнового вектора падающей волны. Рассмотрены следствия полученных результатов для одноосных кристаллов при отсутствии магнитоэлектрических свойств.

DOI: 10.31857/S0367676520020416

ВВЕДЕНИЕ

Магнитоэлектрический эффект описывается соотношениями, приведенными в книге [1]. Интерес к средам с магнитоэлектрическим эффектом связан с возможностями его применения для создания беспроводных источников энергии, использования мультиферроидных структур в логических элементах в постоянных магнитных полях и т.д. [2–6]. Теоретические и экспериментальные исследования ведутся с целью создания гетероструктур композитных материалов, имеющих необходимый для практического применения магнитоэлектрический эффект благодаря сочетанию пьезоэлектрического и магнитострикционного эффектов. Это приводит к необходимости детального излучения волновых процессов в подобных средах и, в частности, в средах с магнитоэлектрическим эффектом.

В данной работе волновые процессы рассматриваются в одноосных кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом: тетрагональной (класс 422), тригональной (класс 32) и гексагональной (622) симметрии [2]. Решение поставленных в данный работе задач основано на использовании метода матриканта. На его основе ранее уже были рассмотрены различные задачи для волновых процессов в анизотропных упругих средах, электромагнитные волны в кристаллах, распространение связанных упругих и электромагнитных волн в пьезоэлектрических и пьезомагнитных средах с магнитоэлектрическим эффектом [7–16].

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И МАТЕРИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Процессы распространения плоских электромагнитных волн в рассматриваемой среде описываются уравнениями Максвелла:

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\vec{E}(g,t) = -\frac{d\vec{B}(g,t)}{dt};\\ \mathrm{rot}\vec{H}(g,t) = \frac{d\vec{D}(g,t)}{dt},\\ \mathrm{div}\vec{D}(g,t) = 0;\quad \mathrm{div}\vec{B}(g,t) = 0.\end{gathered} \qquad (1)$$

и материальными соотношениями

$$\begin{gathered}\vec{D}(g,t) = \vec{\varepsilon}\vec{E}(g,t) - \vec{\alpha}\vec{H}(g,t),\\ \vec{B}(g,t) = \vec{\mu}\vec{H}(g,t) - \vec{\alpha}\vec{E}(g,t)\end{gathered} \qquad (2)$$

здесь $g \in (x,o,z) \in R^2$. Волновой вектор $\vec{\kappa}$ находится в плоскости xz. $\overline{\varepsilon}, \overline{\mu}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, $\overline{\alpha}$ — тензор магнитоэлектрического эффекта,

$$\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}; \quad \overline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix};$$
$$\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{pmatrix}.$$

В методе матрицанта, система уравнении (1), (2) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнении (ОДУ) первого порядка относительно компонент векторов электрического $\vec{E}$ и магнитного полей $\vec{H}$ на основе представления решений:

$$f(g,t) = \overline{f}(z)\exp[i\omega t - ik_x x]$$

и имеет вид
$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W}(z) \tag{3}$$

относительно вектора $\vec{W}(z) = \left(E_y, H_x, H_y, E_x\right)^t$

здесь t — знак транспонирования вектор-строки в вектор-столбец. Матрица $B = (b_i j)^4$ имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Элементы b_{ij} имеет вид: $b_{(12)} = i\omega\mu_x$; $b_{(14)} = -i\omega\alpha_x$; $b_{(21)} = i\omega\left(\varepsilon_x - \frac{k_x^2}{\omega^2\beta}\varepsilon_z\right)$;

$$b_{(23)} = -i\omega\left(\alpha_x - \frac{k_x^2}{\omega^2\beta}\alpha_z\right); \quad b_{(34)} = -i\omega\varepsilon_x;$$
$$b_{(43)} = -i\omega\left(\mu_x - \frac{k_x^2\mu_z}{\omega^2\beta}\right); \quad \beta = \varepsilon_z\mu_z - \alpha_z^2. \tag{5}$$

Поскольку система ОДУ в данном случае рассматривается относительно переменной z, имея в виду поперечность электромагнитных волн, уравнения (1)–(2) позволяют исключить компоненты полей E_z и H_z, направленных вдоль оси z.

УГЛЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЛН ТЕ И ТМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Индикатрисы волновых векторов волн ТЕ и ТМ поляризации в одноосных кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом описываются уравнениями [16]:

$$k_{\text{TE}}^2 = \frac{\omega^2\beta_x}{\cos^2\theta + (A+B)\sin^2\theta}, \tag{6}$$

$$k_{\text{TM}}^2 = \frac{\omega^2\beta_x}{\cos^2\theta + (A-B)\sin^2\theta}. \tag{7}$$

Здесь:

$$\beta_x = \varepsilon_x\mu_x - \alpha_x^2; \quad \beta_z = \varepsilon_z\mu_z - \alpha_z^2,$$
$$A = \frac{1}{2\beta_z}(\mu_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\mu_z - 2\alpha_x\alpha_z);$$
$$B = \frac{1}{2\beta_z} \times$$
$$\times\sqrt{(\varepsilon_z\mu_x - \varepsilon_x\mu_z)^2 - (\alpha_x\mu_z - \mu_x\alpha_z)(\varepsilon_x\alpha_z - \alpha_x\varepsilon_z)}. \tag{8}$$

При преломлении плоских волн на границе сред необходимо выполнение условий

$$k_{x_0} = k_0\sin\theta_0 = k_{\text{TE}}\sin\theta_{\text{TE}}, \tag{9}$$

$$k_{x_0} = k_0\sin\theta_0 = k_{\text{TM}}\sin\theta_{\text{TM}}. \tag{10}$$

Из условия (10) на основе (6) имеем:

$$k_0^2\sin^2\theta_0 = \frac{\omega^2\beta_x\sin^2\theta_{\text{TE}}}{\cos^2\theta_{\text{TE}} + (A+B)\sin^2\theta_{\text{TE}}} = \frac{\omega^2\beta_x\text{tg}^2\theta_{\text{TE}}}{1+(A+B)\text{tg}^2\theta_{\text{TE}}}. \tag{11}$$

Разделив (11) на $\text{tg}^2\theta_{\text{TE}}$ получим

$$\text{tg}^2\theta_{\text{TE}} = \frac{k_0^2\sin^2\theta_0}{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2\sin^2\theta_0}. \tag{12}$$

Формула (12) определяет угол преломления волны ТЕ поляризации на границе контакта сред направление вектора фазовый скорости. Аналогично, в случае волны ТМ поляризации:

$$\text{tg}^2\theta_{\text{TM}} = \frac{k_0^2\sin^2\theta_0}{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2\sin^2\theta_0} \tag{13}$$

на основе (12) и (13) можно определить угол между векторами фазовых скоростей ТЕ и ТМ волн.

Поскольку

$$A + B \succ A - B, \quad A \succ 0, \quad B \succ 0 \quad A \succ B \tag{14}$$

то:

$$\theta_{\text{TE}} \succ \theta_{\text{TM}}. \tag{15}$$

Для разности углов $\Delta\theta = \theta_{\text{TE}} - \theta_{\text{TM}}$ имеем

$$\text{tg}(\theta_{\text{TE}} - \theta_{\text{TM}}) = \frac{\text{tg}\theta_{\text{TE}} - \text{tg}\theta_{\text{TM}}}{1 + \text{tg}\theta_{\text{TE}}\text{tg}\theta_{\text{TM}}}. \tag{16}$$

Подставив (16) формулы на (12) и (13) получим:

$$\mathrm{tg}\Delta\theta = \frac{k_0 \sin\theta_0 \left[\sqrt{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2\sin^2\theta_0} - \sqrt{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2\sin^2\theta_0}\right]}{\sqrt{\left(\omega^2\beta_x - Ak_0\sin\theta_0\right)^2 - B^2k_0^2\sin^2\theta_0 + k_0^2\sin^2\theta_0}}. \quad (17)$$

Угол полного внутреннего отражения можно определить используя формулы (12) и (13) при $\sin\theta_0 = 1$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{tg}^2\theta_{\mathrm{TE}} = \frac{k_0^2}{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2}, \quad \mathrm{tg}^2\theta_{\mathrm{TM}} = \frac{k_0^2}{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2}. \quad (18)$$

Также для $\Delta\theta = \theta_{\mathrm{TE}} - \theta_{\mathrm{TM}}$:

$$\mathrm{tg}\Delta\theta = \frac{k_0\left[\sqrt{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2} - \sqrt{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2}\right]}{\sqrt{\left(\omega^2\beta_x - Ak_0\right)^2 - B^2k_0^2 + k_0^2}} \quad (19)$$

формула (19) позволяет определить угол между векторами фазовых скоростей TE и TM волн при угле полного внутреннего отражения.

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЛН TE И TM ПОЛЯРИЗАЦИИ

В работе [16] из анализа индикатрис фазовых скоростей на основе соотношения Релея для определения групповой скорости было получено:

$$\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TE}} = (A+B)\,\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TE}}, \quad \mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TM}} = (A-B)\,\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TM}}. \quad (20)$$

Угол β_{TE} определяет направление групповой скорости TE волны в одноосных кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом. Аналогично, (20) — для волн TM поляризации. Подстановка (20) формулы (12) и (13) приводит к соотношениям:

$$\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TE}} = (A+B)\frac{k_0\sin\theta_0}{\sqrt{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2\sin^2\theta_0}}, \quad \mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TM}} = (A-B)\frac{k_0\sin\theta_0}{\sqrt{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2\sin^2\theta_0}}. \quad (21.1)$$

Формулы (21.1) определяют зависимости групповых скоростей волн TE и TM поляризации от угла падения волн θ_0. При $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ из (20) и (21.1) можно определить значения углов β_{TE} и β_{TM} при полном внутреннем отражении. Кроме того, можно определить зависимость $\beta_{\mathrm{TE}} - \beta_{\mathrm{TM}} = \Delta\beta$ от угла падения волны θ_0, используя соотношение, аналогичное (16):

$$\left[\mathrm{tg}(\beta_{\mathrm{TE}} - \beta_{\mathrm{TM}}) = \frac{\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TE}} - \mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TM}}}{1 + \mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TE}}\mathrm{tg}\beta_{\mathrm{TM}}}\right],$$

$$\mathrm{tg}\Delta\beta = \frac{k_0\sin\theta_0\left[(A+B)\sqrt{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2\sin^2\theta_0} - (A-B)\sqrt{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2\sin^2\theta_0}\right]}{\sqrt{\left(\omega^2\beta_x - Ak_0\sin\theta_0\right)^2 - B^2k_0^2\sin^2\theta_0 + k_0^2\sin^2\theta_0}}. \quad (21.2)$$

Из (21.2) можно получить значения $\Delta\beta$ при полном внутреннем отражении $\left(\sin\theta_0 = 1,\ \theta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$.

СЛЕДСТВИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

При отсутствии магнитоэлектрического эффекта в величинах β_x, β_z, A, B необходимо положить $\alpha_x = 0$, $\alpha_z = 0$. В этом случае имеем:

$$\beta_x = \varepsilon_x\mu_x, \quad \beta_z = \varepsilon_z\mu_z, \quad A = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_x}{\mu_z} + \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_x}{\mu_z} - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right) \quad (22)$$

формулы (6) и (7) принимают следующий вид:

$$k_{\mathrm{TE}}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_x \mu_x \mu_z}{\mu_z \cos^2\theta + \mu_x \sin^2\theta}, \quad k_{\mathrm{TM}}^2 = \frac{\omega^2 \mu_x \varepsilon_x \varepsilon_z}{\varepsilon_z \cos^2\theta + \varepsilon_x \sin^2\theta}. \tag{23}$$

Учитывая (22), (23) получим:

$$\operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TE}} = \frac{\mu_z k_0^2 \sin^2\theta_0}{\mu_x(\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0)}, \quad \operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_z k_0^2 \sin^2\theta_0}{\varepsilon_x(\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0)}, \tag{24}$$

$$\operatorname{tg}\beta_{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}} \frac{k_0 \sin\theta_0}{\sqrt{\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0}}, \quad \operatorname{tg}\beta_{\mathrm{TM}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}} \frac{k_0 \sin\theta_0}{\sqrt{\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0}}, \tag{25}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\theta = \frac{k_0\sin\theta_0\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}}\sqrt{\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0} - \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}}\sqrt{\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0}\right]}{\sqrt{\frac{\varepsilon_x\mu_x}{\varepsilon_z\mu_z}}\sqrt{\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0}\sqrt{\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0} + k_0^2\sin^2\theta_0}, \tag{26}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\beta = \frac{k_0\sin\theta_0\left[\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}}\sqrt{\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0} - \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}}\sqrt{\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0}\right]}{\sqrt{\left(\omega^2\varepsilon_z\mu_x - k_0^2\sin^2\theta_0\right)\left(\omega^2\varepsilon_x\mu_z - k_0^2\sin^2\theta_0\right)} + \sqrt{\frac{\varepsilon_z\mu_z}{\varepsilon_x\mu_x}}k_0^2\sin^2\theta_0}. \tag{27}$$

Формулы (24)–(27) при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta_0 = 1$ определяют соответствующие величины при полном внутреннем отражении. В частности, формула (24) определяет угол полного внутреннего отражения для одноосных кристаллов.

Кроме того, в случае однородных изотропных сред из (24) следует:

$$\operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TE}} = \frac{k_0^2\sin^2\theta_0}{k^2\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0} = \frac{k_0^2}{k^2} = \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TM}} = \frac{k_0^2\sin^2\theta_0}{k^2\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0} = \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TE}} = \operatorname{tg}^2\theta_{\mathrm{TM}} = \operatorname{tg}^2\beta_{\mathrm{TE}} = \operatorname{tg}^2\beta_{\mathrm{TM}} = \frac{k_0^2\sin^2\theta_0}{k^2\cos^2\theta}, \quad \operatorname{tg}\Delta\theta = 0; \ \operatorname{tg}\Delta\beta = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определены углы преломления волн TE и TM поляризации на границе однородного изотропного диэлектрика и одноосных кристаллов с магнитоэлектрическим эффектом в зависимости от угла падающей волны. Эти зависимости определяют направления фазовых скоростей TE и TM волн. Определены зависимости направлений групповых скоростей этих волн от угла падающей волны θ_0. Получены формулы, определяющие разности углов между фазовой и групповой скоростями для волн TE и TM поляризаций. Рассмотрены следствия полученных результатов для одноосных кристаллов в отсутствие магнитоэлектрического эффекта и следствия при изотропности обеих сред. Получены значения углов полного внутреннего отражения для TE и TM волн. Определены направления групповых скоростей для углов полного внутреннего отражения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. *Rivera. J.-P.* // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 71. P. 299.
3. *Nan C-W.* // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. № 3. Art. № 031101.
4. *Osaretin A., Rojas R.G.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. № 17. Art. № 174415.
5. *Zhang T., Yang X., Ouyang J. et al.* // Appl. Compos. Mater. 2014. V. 21. № 4. P. 579.

6. *Filippov D.A., Galichyan T.A., Laletin V.M.* // Appl. Phys. A. 2014. V. 115. № 3. P. 1087.
7. *Тлеукенов С.К., Оспанов А.Т.* Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. Алматы: Кенже пресс, 2001. 67с.
8. *Тлеукенов С.К., Айтбаев А.Б.* // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 161; *Tleukenov S.K., Aitbaev A.B.* // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 2. P. 144.
9. *Tleukenov S.K.* // Acta Mechan. 2014. V. 225. № 12. P. 3535.
10. *Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Yeltinova L.A.* // 2013 IEEE Int. Ultrason. Symp. (Prague, 2013). P. 1025.
11. *Tleukenov S.K., Assilbekova A.M.* // Telecommun. Radio Engin. 2017. V. 76. № 14. P. 1231.
12. *Тлеукенов С.К.* Электромагнитные волны в анизотропных средах. Алматы: Эпиграф, 2017. 72 с.
13. *Tleukenov S., Bobeev A., Sabitova D.* // Int. J. Appl. Math. Stat. 2018. V. 57. № 1. P. 209.
14. *Тлеукенов С.К., Казбекова А.А. Жанат З.Ж.* Волны в средах с магнитоэлектрическим эффектом. Алматы: Эпиграф, 2017. 96 с.
15. *Tleukenov S.K., Zhalgasbekova Z.K., Sirenk Y.K.* // Telecommun. Radio Engin. 2019. V. 78. № 1. P. 1.
16. *Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N.* // Telecommun. Radio Engin. 2019. V. 78. № 6. P. 465.