Треугольник Паскаля – основной объект теории вероятностей и комбинаторики длинных последовательностей.

Филатов О.В.

Филатов Олег Владимирович - инженер-программист,
ЗАО «Научно технический центр «Модуль», г. Москва.

Аннотация: *Треугольник Паскаля – это один из старейших математических объектов, он связан с биномом Ньютона и с комбинаторными перестановками. Теперь оказалось, что треугольник Паскаля является важным объектом в теории вероятностей, так как по его комбинаторным коэффициентам можно рассчитать численности составных событий, которые образуют случайные бинарные последовательности. ДНК и мтДНК оказались так же «родственниками» треугольника Паскаля по линии составных событий, поэму ДНК и мтДНК хорошо раскладываются в матрицу случайных составных событий. Так же у треугольника Паскаля существует такая же, как и у ДНК, комбинаторная связь со многими разговорными языками мира. В статье даны формулы связывающие треугольник Паскаля со случайными бинарными последовательностями и «Комбинаторикой длинных последовательностей».*

Ключевые слова: *комбинаторика, треугольник Паскаля, случайная бинарная последовательность.*

Pascal's triangle - the main object of the theory of probability and combinatorics of long sequences.

Filatov O.V.

Filatov Oleg Vladimirovich - Software Engineer,
SCIENTIFIC AND TECHNICAL CENTER «МОДУЛЬ», MOSCOW

Abstract: *Pascal's triangle is one of the oldest mathematical objects, it is associated with the Newton binomial and combinatorial permutations. Now it turned out that Pascal's triangle is an important object in the theory of probability, since its combinatorial coefficients can be used to calculate the numbers of*

composite events that form random binary sequences. DNA and mtDNA also turned out to be "relatives" of Pascal's triangle in the line of compound events, the poem of DNA and mtDNA is well decomposed into a matrix of random compound events. Also, Pascal's triangle has the same, like DNA, a combinatorial connection with many spoken languages of the world. The article contains formulas connecting Pascal's triangle with random binary sequences and "Combinatorics of long sequences".
Keywords: *combinatorics, Pascal's triangle, random binary sequence.*

***УДК**: 51*

Введение

Успенский пишет [6] : «По - видимому, одним из первых поставил вопрос о том, что такое отдельно взятая случайная последовательность, замечательный немецкий математик Рихард фон Мизес в начале XX века — в 1919 г. Во всяком случае, именно он первым предложил сравнительно удачное (хотя и нестрогое) определение, послужившее отправной точкой для дальнейшего развития». Дальнейшее математическое развитие свелось к бесконечной игре ума по обсуждению факта динамического равновесия выпадения равновероятных, преимущественно бинарных, событий. В своей работе [7, с.83] Ю.В. Чайковский пишет: «…логик Б.Н. Пятницын с горечью заметил, что вероятность относится к тем понятиям, о которых сказано: "чем больше о них говорят, тем меньше знают, что это такое" [8, с. 88]».

Р. Мизеса критиковали и за то, что он не относил теорию вероятности к математической науке. Мизес утверждал, что теория вероятности возникла из игр и экспериментов и связывал её развитие больше с исследованием фактических (экспериментальных) данных, чем с логическими умозаключениями. Мизес вновь оказался прав. Достаточно было вернуться к постановке экспериментов на новом техническом, компьютерном уровне, над случайными пос-ми, как тут же были открыты их новые свойства, которые были описаны в «Комбинаторике длинных последовательностей» (КДП). Но, экспериментально открытые законы были оторваны от «материковой математики», законы КДП существовали сами по себе, они не следовали ни из базовых математических аксиом и теорем, не были наследниками свойств ни каких математических объектов. Недавно проведённые компьютерные исследования показали, что треугольник Паскаля является прямым «предком» для свойств любых случайных бинарных пос-тей. Таким образом, экспериментальные формулы «Комбинаторики длинных пос-тей» получили своих «родственников» в формулах обычной комбинаторики и в свойствах треугольника Паскаля.

Сокращения: Δ – треугольник; СС – составное событие, КДП – Комбинаторика длинных последовательностей.

Основная часть

При последовательном подбрасывании монеты сериями, по L бросков монеты в каждой серии, по принципу индифферентности Лапласа, каждая из 2^L возможных комбинаций, которые могут образоваться при L бросках монеты, равновероятны. Но какое минимальное количество серий нужно совершить, что бы дать равный шанс реализоваться каждой комбинации?

В [7, с.60] Ю.В. Чайковский пишет: «До Мизеса был известен, кроме принципа индифферентности (*принцип индифферентности Лапласа* – он гласит, что при отсутствии каких - либо сведений о предпочтительности исходов, эти исходы надо полагать равновероятными» и [7, с.59]: «только один (да и то никем явно не сформулированный) прием обоснования ТВ – *принцип исчерпания равновозможностей …,* когда каждое возможное элементарное событие берется ровно один раз».

Следовательно, по принципу исчерпания равновозможностей, каждая из 2^L возможных комбинаций должна иметь один шанс на реализацию. А минимальное количество серий должно быть равно полному числу всех возможных комбинаций, то есть: 2^L. Для изучения вероятностного объекта из равновозможных 2^L серий, по L бросков в каждой серии, необходимо рассмотреть 2^L уникальных состояния, которые исчерпывают априорные *равновозможности* для каждого состояния, а такими задачами занимается комбинаторика.

Одним из старейших математических и комбинаторных инструментов является треугольник Паскаля. Рассмотрим комбинаторные свойства треугольника Паскаля, на примере вероятностного объекта содержащего в себе: $2^{(L=3)} = 8$ – восемь серий из трёх последовательных бросков (L = 3) «цифровой монеты», с равновозможным выпадением сторон: «0» и «1». Для этого в таблице 1, согласно *принципу исчерпания равновозможностей*, распишем все серии (каждую выпишем один раз).

Любой биноминальный коэффициент C_k^L рассчитывается по комбинаторной формуле ф.1.1 [стр.29, 1]:

$$C_k^L = \binom{L}{k} = \frac{L\,!}{k! \cdot (L-k)!}; \quad L \geq k \geq 0 \qquad \text{Ф.1.1}$$

Где: L - номер строки Δ Паскаля, k - номер биноминального коэффициента в строке Δ Паскаля.

Пример расчёта по ф.1.1 строки L = 3 в Δ Паскаля, таблица 1. $C_{k=0}^{L=3} = \frac{3\,!}{0!\cdot(3-0)!} = 1;\ C_{k=1}^{L=3} = \frac{3\,!}{1!\cdot(3-1)!} = 3;\ C_{k=2}^{L=3} = \frac{3\,!}{2!\cdot(3-2)!} = 3;\ C_{k=3}^{L=3} = \frac{3\,!}{3!\cdot(3-3)!} = 1.$

Таблица 1. «Комбинаторное образование строки $n =\ 3$ в Δ Паскаля».

<table>
<tr><td rowspan="2">№</td><td colspan="3">$L = n =\ 3$</td><td rowspan="2">«0»</td><td rowspan="2">«1»</td><td rowspan="2">Треугольник Паскаля – это частоты встреч «0» или «1» в L – разрядных словах</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td rowspan="10">1
1 1
1 2 1
n = 3 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
. . .
Строка «n = L = 3» получена из левой части таблицы</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>$\leftarrow k$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>«0/1»</td></tr>
<tr><td colspan="7">В строке 10 дана частота встреч по k нулей «0» или по k единиц «1».
Число нулей и единиц в периоде Бернулли (восьми выделенных словах) – 24.</td></tr>
</table>

Выше был упомянут «вероятностный объект», опишем его. В объектно-ориентированном программировании свойства исследуемых объектов собираются в одной программной сущности (функции). Оказалось, что удобно собрать в одном объекте полный $S(L)$ набор L - разрядных слов (смотри таблицу 1), число которых рассчитывается по ф.1.2, а общее число бинарных событий было названо «Периодом повторения Бернулли» - ф.1.3.

$S(L)$ – минимально число слов длины L необходимое для выполнения принципа исчерпания равновозможностей:

$$S(L) = 2^L \qquad \text{Ф.1.2}$$

Период повторения Бернулли $T_B(L)$.

Число всех элементарных событий в полном наборе $S(L)$, ф.1.2, назовём периодом повторения Бернулли и обозначим - $T_B(L)$, он рассчитывается по ф.1.3:

$$T_B(L) = L \cdot 2^L = 2 \cdot \sum_{k=0}^{k=L} k \cdot C_k^L; \qquad 0 \le k \le L \qquad \text{Ф. 1.3}$$

Где: $T_B(L)$ – сумма всех бинарных событий в 2^L уникальных, не повторяющихся словах (для таблицы 1: $T_B(L=3) = L \cdot 2^L = 3 \cdot 2^3$ = 24); L - число разрядов в бинарном слове (длина бинарного слова);

Комбинаторный смысл строк Δ *Паскаля* подразумевает, что это набор коэффициентов C_k^L (абсолютных весов), при умножении которых на k получаем число нулей «0»/единиц «1» которые по k раз встречаются в 2^L уникальных, не повторяющихся словах (принадлежащих одному периоду Бернулли). В таблице 1, в столбцах № 1 - 3 дана комбинаторная раскладка строки n=3 в Δ Паскаля: «$1_{k=0}$; $3_{k=1}$; $3_{k=2}$; $1_{k=3}$», относительно встреч нулей «0». Значит: «$1_{k=0}$» - возможна одна комбинация («111») в которой не встречается ни одного нуля; «$3_{k=1}$» - возможны три комбинации («011»;

«101» ; «110») в которых встречается один ноль; «$3_{k=2}$» - три комбинации («001»; «010»; «100») с двумя нулями; «$1_{k=3}$» - одна комбинация «000» с тремя нолями, ф.1.3: $T_B(L=3) = L \cdot 2^L = 2 \cdot \sum_{k=0}^{k=3} k \cdot C_k^L$=24, см. таблицу 1.

В таблице 1, строке № 9 показаны коэффициенты k_n, а в строке № 10 показаны соответствующие им значения.

Коэффициенты составных событий. Рассмотрим иную смысловую интерпретацию Δ Паскаля. В ней Δ Паскаля содержит коэффициенты ***составных событий*** [2 - 5], таблица 2. Эта интерпретация связывает биноминальные коэффициенты Δ Паскаля с численностью составных событий обнаруживаемых в L словах [3, 11], ф.1.4.

В таблице 2, в столбцах «L = 3», даны восемь не повторяющихся трёх разрядных слов. Деление слов на составные события СС дано в столбце «СС(L = 3)». Сумма составных событий в каждом слове дана в столбце «∑ CC». В разделе «Число встреч «∑ CC » в L - словах» (строка 8), посчитаны численности множеств из составных событий СС. Множество из одного СС в восьми словах встречается два раза: «000» (строка 1); «111» (строка 8). Множество из двух СС встречается четыре раза (строки: 2; 4; 5; 7): «00»+«1»; «0»+«11»; «1»+«00»; «11»+«0». Множество из трёх СС встречается два раза: «0»+«1»+«0» (строка 3); «1»+«0»+«1» (строка 6).

Деление каждого значения раздела «Число встреч «∑ CC » в L - словах» пополам даёт значения Δ Паскаля (смотри раздел «СС Δ Паскаля»).

Таблица 2. «Получение Δ Паскаля из Составных Событий L-разрядных слов».

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="3">L = 3</th><th>CC(L = 3)</th><th>∑ CC</th><th colspan="2">L = 2</th><th colspan="3">CC(L = 2)</th><th>∑ CC</th><th>L = 1</th><th colspan="2">CC(L = 1)</th><th>∑ CC</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>«000»</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="3">«00»</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="2">«0»</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>«00»+«1»</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td colspan="3">«0»+«1»</td><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">«1»</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>«0»+«1»+«0»</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="3">«1»+«0»</td><td>2</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>«0»+«11»</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="3">«11»</td><td>1</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>«1»+«00»</td><td>2</td><td colspan="5">Число встреч «∑ CC» в L-словах</td><td colspan="5">CC Δ Паскаля</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>«1»+«0»+«1»</td><td>3</td><td colspan="2">CC(L = 1)</td><td>2_1</td><td></td><td></td><td colspan="2">ряд 1 (L = 1):</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>«11»+«0»</td><td>2</td><td colspan="2">CC(L = 2)</td><td>2_1</td><td>2_2</td><td></td><td colspan="2">ряд 2 (L = 2):</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

8	1	1	1	«111»	1	CC(L = 3)	2_1	4_2	2_3	ряд 3 (L = 3):	1	2	1
				И того SS:	16	k^*:	1*	2*	3*				
В столбцах «CC(L = 3; 2; 1)» даётся деление L – разрядных слов на составные события.													
В столбцах «∑ CC» посчитаны количества составных событий в каждом L – разрядном слове.													
SS(L = 1) = 1*2 =2; SS(L = 2)= 1*2 + 2*2 =6; SS(L = 3) = 1*2 + 2*4 + 3*2 = 16.													

Для расчёта составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$ можно воспользоваться как модификацией комбинаторной формулы ф.1.1 (рассмотрим сейчас), так и формулами комбинаторики длинных последовательностей (рассмотрим позже). Расчёт составных событий численности составных событий модифицированной комбинаторной формулой (ф.1.1), ф.1.4:

$$ {}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L)) \; = \sum_{k=0}^{k=L-1} (k+1) \cdot 2 \cdot C_k^{L-1}; \quad L \geq 1 \qquad \text{(ф.1.4)}$$

В таблице 3 видно, что при равном числе разрядов L - разрядного слова, значения ∆ Паскаля из составных событий «отстают» на одну строку.

Таблица 3. «Разная суть ∆ Паскаля в периоде повторения: $T_B(L) = L \cdot 2^L$».

L	Частоты встреч в словах «0» или «1» образуют ∆ Паскаля.									Частоты встреч Составных Событий: ${}^{CC}_{\Delta}C_k^{L+1}$ образуют ∆ Паскаля.							Σ по строке
0					1	← вершина L = 0							нет				---
1				1		1							$2_{k=1}$	← вершина L = 1			2
2			1		2		1					$2_{k=1}$		$2_{k=2}$			4
3		1		3		3		1			$2_{k=1}$		$4_{k=2}$		$2_{k=3}$		8
4	1		4		6		4		1	$2_{k=1}$		$6_{k=2}$		$6_{k=3}$		$2_{k=4}$	16
В Паскале подобном треугольнике Составных Событий (СС) длина L увеличивается на единицу и удваивается каждое значение: ${}^{CC}_{\Delta}S_{k=i+1}^{L} = 2 \cdot C_i^{L-1}$, ф.3.4																	

Для примера, рассчитаем число составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S$ для периодов T_B длин L таблицы 3, используя для этой цели коэффициенты k.

Число составных событий, которые находятся в T_B периоде слов единичной длины: ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=1))$ = 2*($_{k=}1$) = 2. Число составных событий в T_B периоде слов длины два: ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=2))$ = 2*($_{k=}1$) + 2*($_{k=}2$) = 6. Число СС в периоде: ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=3))$ = 2*($_{k=}1$) + 4*($_{k=}2$) + 2*($_{k=}3$) = 16. СС в периоде: ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=4))$ = 2*($_{k=}1$) + 6*($_{k=}2$) + 6*($_{k=}3$) + 2*($_{k=}4$) = 40.

Из приведённого примера становится ясно, что: ***k* - составных событий образуют уникальные слова длиной L, в множестве из $\mathbf{2^L}$ уникальных слов, $\mathbf{2 \cdot C_k^L}$ раз**: ф1.7; ф.3.2.

Число всех составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$ внутри полного набора слов $T_B(L)$, можно рассчитать не только по ф.1.4 и по коэффициентам k, но и по ф.1.5 [3, 10, 12], смотри таблицу 4:

$$ {}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L)) = (L+1) \cdot 2^{L-1} \qquad \text{(ф.1.5)} $$

Приравняем, друг к другу, ф.1.4 и ф.1.5, и получим ф.1.6:

$$ (L+1) \cdot 2^{L-1} = \sum_{k=0}^{k=L-1} (k+1) \cdot 2 \cdot C_k^{L-1}; \quad L \geq 1 \qquad \text{(ф.1.6)} $$

Число слов (спектров) длины L, в множестве из 2^L слов, которые состоят из k составных событий, рассчитывается по ф.1.7:

$$ {}^{CC}_{\Delta}S_k^L = (k+1) \cdot 2 \cdot C_k^{L-1}; \quad L \geq 1 \qquad \text{(ф.1.7)} $$

Проведём расчёт по ф.1.4 (ф.1.7) первых чисел составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$ из комбинаторных коэффициентов C_k^{L-1} (ф.1.1) Δ Паскаля. При работе с ф.1.4 надо обратить внимание на длину слова L. Так при работе с длиной L, в C_k^{L-1}, подставляется значение на единицу меньшее. Если L = 1 то в C_k^{L-1} ставим нуль: $L-1$ = 0. Если L = 2, то в C_k^{L-1} ставим один: $L-1$ = 1. Если L = 3, то в C_k^{L-1} ставим два: $L-1$ = 2. И т.д.

Расчёт по ф.1.4 число составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S$ в периоде Бернулли $T_B(L=1)$: $\frac{(k+1)\cdot 2\cdot (L-1)!}{k!\cdot(L-1-k)!} = \frac{(0+1)\cdot 2\cdot 0!}{0!\cdot(0-0)!} = 2$; ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=1))$ = ***2*** (таблицы 2 и 4).

Расчёт, по ф.1.4, ${}^{CC}_{\Delta}S$ для периода Бернулли $T_B(L=2)$: $\frac{(0+1)\cdot 2\cdot 1!}{0!\cdot(1-0)!}$ = **2**; $\frac{(1+1)\cdot 2\cdot (2-1)!}{1!\cdot(2-1-1)!} = 4$; ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=2))$ = 2 + 4 = ***6*** (таблицы 2 и 4).

Расчёт, по ф.1.4, ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=3))$: $\frac{(0+1)\cdot 2\cdot 2!}{0!\cdot(2-0)!} = 2$; $\frac{(1+1)\cdot 2\cdot (3-1)!}{1!\cdot(3-1-1)!} = 8$; $\frac{(2+1)\cdot 2\cdot (3-1)!}{2!\cdot(3-1-2)!} = 6$; ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=3))$ = 2 + 8 + 6 = ***16*** (таблицы 2 и 4).

Расчёт ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=4))$: $\frac{(0+1)\cdot 2\cdot 3\,!}{0!\cdot(3-0)!}=2$; $\frac{(1+1)\cdot 2\cdot 3\,!}{1!\cdot(3-1)!}=12$; $\frac{(2+1)\cdot 2\cdot 3\,!}{2!\cdot(3-2)!}=18$; $\frac{(3+1)\cdot 2\cdot 3\,!}{3!\cdot(3-3)!}=8$; ${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L=4))$ = 2 + 12 + 18 + 8 = <u>***40***</u> (смотри таблицу 4).

В строке «L слова (эл)», таблицы 4 даны длины слов. В строке «$T_B(L)$, ф.1.3», даны длины периодов Бернулли $T_B(L)$ (сумма длин уникальных слов длины L), рассчитанных по ф.1.3. В строке «${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$,ф.1.4», даны численности составных событий в периодах Бернулли $T_B(L)$.

Таблица 4. «Распределение Составных Событий (СС) в $T_B(L)$ периодах».

L слова (эл)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_B(L)$, ф.1.3	2	8	24	64	160	384	896	2048	4608	10240	22528	49152
${}^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$,ф.1.4	2	6	16	40	96	224	512	1152	2560	5632	12288	26624
n - длина СС	Теоретическое число составных событий ${}^{n}S(T_B(L))$ по длинам, ф.2.1											
1	0,5	2	6	16	40	96	224	512	1152	2560	5632	12288
2		1	3	8	20	48	112	256	576	1280	2816	6144
3			1,5	4	10	24	56	128	288	640	1408	3072
4				2	5	12	28	64	144	320	704	1536
5					2,5	6	14	32	72	160	352	768
6						3	7	16	36	80	176	384
7							3,5	8	18	40	88	192
8								4	9	20	44	96
9									4,5	10	22	48
10										5	11	24
11											5,5	12
12												6
${}^{CC}_{\text{кдп}}S(T_B)$ ф.2.2	0,5	3	10,5	30	77,5	189	444,5	1020	2299,5	5115	11258,5	24570
$Sum_{EL}^{\text{кдп}}(T_B)$	0,5	4	16,5	52	142,5	360	864,5	2008	4558,5	10180	22456,5	49068
$\Delta(T_L)$ (эл)	1,5	4	7,5	12	17,5	24	31,5	40	49,5	60	71,5	84
L – длина базовой серии бинарных событий; $T_B(L)=L\cdot 2^L$ - период Бернулли;												

<u>*Случайная бинарная последовательность и треугольник Паскаля.*</u> Случайная бинарная последовательность N состоит из составных событий ${}^{n}S(N)$, их численности считают по ф.2.0, [2-5]:

$$ {}^{n}S(N) = \frac{N}{2^{n+1}} \qquad (\text{ф.2.0}) $$

Период Бернулли $T_B(L)$ содержит $L \cdot 2^L$ бинарных событий, приравняем N в ф.2.0 к периоду Бернулли $T_B(L)$, и получим ф.2.1 для расчёта численностей составных событий, дискретно зависящих от L:

$$^{n}S(T_B(L)) = \frac{N}{2^{n+1}} = \frac{T_B(L)}{2^{n+1}} = \frac{L \cdot 2^L}{2^{n+1}} \qquad \text{(ф.2.1)}$$

В таблице 4, в подразделе «Теоретическое число составных событий $^{n}S(T_B(L))$ по длинам, ф.2.1» приведены рассчитанные по ф.2.1 численности $^{n}S(T_B(L))$. Расчёт по ф.2.1, для таблицы 4, был ограничен равенством: $L = n$.

Сумма составных событий $^{CC}_{\text{кдп}}S\big(T_B(L)\big)$, с условием $L \geq n$, ф.2.2:

$$^{CC}_{\text{кдп}}S\big(T_B(L)\big) = \sum_{n=1}^{n=L} {}^{n}S\big(T_B(L)\big) = \frac{2^L - 1}{2} \cdot L \qquad \text{(ф.2.2)}$$

Найдём отношение суммы составных событий $^{CC}_{\text{кдп}}S\big(T_B(L)\big)$, ф.2.2, к числу составных событий $^{CC}_{\Delta}S(T_B(L))$, полученных в ф.1.5 - комбинаторной формулы Δ Паскаля, ф.2.3:

$$\frac{^{CC}_{\text{кдп}}S\big(T_B(L)\big)}{^{CC}_{\Delta}S} = \frac{L}{L+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^L}\right) \to 1; \quad \text{при } L \gg 1 \qquad \text{(ф.2.3)}$$

Например, для L=100: $\frac{^{CC}_{\text{кдп}}S(T_B(L))}{^{CC}_{\Delta}S}$ = 0,990. При больших значениях L, например: $L = N > 10^4$, в счётных устройствах происходит переполнение и применение ф.1.1 невозможно, а применив ф.2.0 при $L = N > 10^4$, получим представление о части комбинаторных пропорций случайной N пос-ти. Чем больше N, тем точнее формулы ф.: 1.5; 2.0; 2.2, комбинаторики длинных пос-тей, воспроизводят структуру внутри периодов Бернулли - $T_B(N)$.

На коротких периодах T_B, при небольших L, наблюдается расхождение между комбинаторной длиной $T_B(L)$ рассчитанной по ф.1.3 и длиной T_B получаемой в виде суммы элементарных событий в составных событиях (составные события теоретически рассчитываются по ф.2.1), ф.2.4:

$$Sum_{EL}^{\text{кдп}}(T_B) = \sum_{n=1}^{n=L} {}^{n}S(T_B(L)) \cdot n = L \cdot \left(2^L - \frac{L+2}{2}\right) \qquad \text{(ф.2.4)}$$

Отметим, что после суммирования составных событий с умножением их на их собственную длину n: ${}^{n}S(T_B(L)) \cdot n$, полученная правая часть ф.2.4 не содержит n (длин составных событий). Пример расчёта по ф.2.4: $Sum_{EL}^{\text{кдп}}\left(T_B(L=10)\right) = 10 \cdot \left(2^{10} - \frac{10+2}{2}\right)$ = 10180 эла (смотри таблицу 4).

Разница $\Delta(T_L)_B^{\text{кдп}}$ между числом бинарных событий полученных по ф.1.3 и числом бинарных событий полученных по ф.2.4 представлена в строке «$\Delta(T_L)$ (эл)», таблицы 4: $\Delta(T_L)_B^{\text{кдп}} = T_B^{EL}\,(L) - Sum_{EL}^{\text{кдп}}\,(T_B) = L \cdot 2^L - \sum_{n=1}^{n=L} {}^{n}S(T_N) \cdot n$; раскрыв сокращения, получим ф.2.5:

$$\Delta(T_L)_B^{\text{кдп}} = \frac{L^2}{2} + L \qquad \text{(ф.2.5)}$$

В работе [9] даны формулы расчёта значений (биноминальных коэффициентов) Δ-ке Паскаля, путём последовательного умножения. Вот ещё одна формула получения коэффициентов C_k^L умножением, ф.3.1:

$$C_k^L = \prod_{k=1}^{k}\left(\frac{L+1}{k} - 1\right); \quad C_{k=0}^L = 1; \quad k <= L \qquad \text{Ф.3.1}$$

Пример расчёта по ф.3.1.

Найдём $C_{k=0}^{L=3}$. В ф.3.1 постулировано, что для любого L значение при $k = 0$ всегда равно единице: $C_{k=0}^{L} = 1$.

Найдём $C_{k=1}^{L=3}$. Умножение всегда начинается с единицы $C_{k=0}^{L} = 1$; $C_{k=1}^{n=3} = 1 \cdot \left(\frac{3+1}{1} - 1\right) = 1 \cdot 3$ = 3, смотри таблицу 2.

Найдём $C_{k=2}^{L=3}$: $C_{k=2}^{n=3} = 1 \cdot \left(\frac{3+1}{1} - 1\right) \cdot \left(\frac{3+1}{2} - 1\right) = 1 \cdot 3 \cdot 1$ = 3, таблица 2.

Найдём $C_{k=3}^{L=3}$: $C_{k=3}^{n=3} = 1 \cdot \left(\frac{3+1}{1} - 1\right) \cdot \left(\frac{3+1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{3+1}{3} - 1\right) = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{4-3}{3}$ = 1.

Коэф-ты Δ Паскаля связаны с числом составных событий в периодах Бернулли T_B, ф.3.2 даёт число составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S_k^L$:

$${}^{CC}_{\Delta}S_k^L = 2 \cdot \binom{L-1}{k} = 2 \cdot \prod_{k=1}^{k}\left(\frac{L}{k} - 1\right); \quad {}^{CC}_{\Delta}S_{k=0}^L = 2; \quad k < L \qquad \text{Ф.3.2}$$

Где: L - число разрядов бинарного слова; k - номер требуемого биноминального коэффициента в строке Δ-ка Паскаля.

Пример расчёта числа составных событий ${}^{CC}_{\Delta}S^{L}_{k}$ по ф.3.2.

Найдём ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=0}$. В ф.3.2 постулировано, что для любого L при $k = 0$ число составных событий равно двум: ${}^{CC}_{\Delta}S^{L}_{k=0} = 2$.

Найдём ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=1}$. ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=1} = 2 \cdot \left(\frac{4}{1} - 1\right) = 2 \cdot 3$ = 6, смотри таблицу 2.

Найдём ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=2}$. ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=2} = 2 \cdot \left(\frac{4}{1} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{2} - 1\right) = 2 \cdot 3 \cdot 1$ = 6, таблица 2.

${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k=3} = 2 \cdot \left(\frac{4}{1} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{4-3}{3}$ = 2, таблица 2.

Сумма одного ряда L значений в треугольнике Составных Событий $Sum({}_{\Delta\text{CC}}^{L}S)$ равна сумме биноминальных коэффициентов этого же ряда L в Δ Паскаля - $Sum({}_{\Delta\Pi}C^{L}_{k})$, за исключением вершины L = 0 (таблица 3), ф.3.3:

$$Sum({}_{\Delta\Pi}^{L}C) = Sum({}_{\Delta\text{CC}}^{L}S) = \sum_{i=0}^{i=L} C^{L}_{i} = \sum_{k=i+1}^{k=L} {}^{CC}_{\Delta}S^{L}_{k} = 2^{L} \qquad \text{Ф.3.3}$$

Пример на ф.3.3. В таблице 3 видно, что сумма четырёх членов ${}^{CC}_{\Delta}S^{L}_{k}$ ряда L = 4, Δ-ка СС равна шестнадцати: $2_{k=1}$ + $6_{k=2}$ + $6_{k=3}$ + $2_{k=4}$ = ***16***. Эту же сумму даёт сложение пяти членов C^{L}_{i} слова L = 4, Δ Паскаля: $1_{i=0}$ + $4_{i=1}$ + $6_{i=2}$ + $4_{i=3}$ + $1_{i=4}$ = ***16***. По количеству членов, строка L = 4 треугольника Составных Событий, соответствует строке L = 3, Δ Паскаля. Каждый из k членов ${}^{CC}_{\Delta}S^{L=4}_{k}$ строки L = 4, Δ-ка СС, в два раза больше -го биноминального коэффициента $C^{L=3}_{i}$ строки L = 3, Δ-ка Паскаля, таблица 3, ф.3.4:

$${}^{CC}_{\Delta}S^{L}_{k=i+1} = 2 \cdot C^{L-1}_{i};\ \text{где}\ 0 \le i \le L-1 \qquad \text{Ф.3.4}$$

В качестве базовой длины для ф.3.3 можно рассматривать как длину слова L_{CC} в Δ-ке СС, так и длину слова L_{Π} в Δ-ке Паскаля. В случае, когда равенство сумм базируется на одной из этих длин: либо на L_{Π} либо на L_{CC} – единица прибавляется или вычитается для длины слова не базового треугольника, ф.3.5 и ф.3.6:

$$2 \cdot Sum\left(\binom{L_\Pi}{\Delta\Pi}C\right) = Sum\left(\binom{L_\Pi+1}{\Delta CC}S\right) = 2^{L_\Pi+1} \qquad \text{Ф.3.5}$$

Пример на ф.3.5 (смотри таблицу 3): сумма $Sum\left(\binom{L_\Pi=3}{\Delta\Pi}C\right) = 8$, а $Sum\left(\binom{L_\Pi+1=4}{\Delta CC}S\right) = 16$, при умножении на два $Sum\left(\binom{L_\Pi=3}{\Delta\Pi}C\right)$ получаем равенство: $2 \cdot Sum\left(\binom{L_\Pi=3}{\Delta\Pi}C\right) = Sum\left(\binom{L_\Pi+1}{\Delta CC}S\right) = 2^{3+1} = 16$.

$$2 \cdot Sum\left(\binom{L_{CC}-1}{\Delta\Pi}C\right) = Sum\left(\binom{L_{CC}}{\Delta CC}S\right) = 2^{L_{CC}} \qquad \text{Ф.3.6}$$

В ф.2.0 и в ф.2.1: ${}^{n}S(N) = \frac{N}{2^{n+1}}$, структура знаменателя равна структуре правой части ф.3.5, поэтому возможна ф.3.7:

$${}^{L_\Pi}S(T_B(L_\Pi)) = \frac{N}{2^{L_\Pi+1}} = \frac{L_\Pi \cdot 2^{L_\Pi}}{Sum\left(\binom{L_\Pi+1}{\Delta CC}S\right)} \qquad (\text{ф.3.7})$$

Так как случайная бинарная последовательность подчиняется закону ф.2.0, то для $N \gg 1$, ф.3.7 может быть заменена на ф.3.8:

$${}^{L_\Pi}S = \frac{N}{2^{L_\Pi+1}} = \frac{N}{Sum\left(\binom{L_\Pi+1}{\Delta CC}S\right)}; \quad \text{где } N \gg 1 \qquad (\text{ф.3.8})$$

Где: L_Π - длина слова в Δ-ке Паскаля.

То есть, ф.3.8 утверждает, что в случайной бинарной пос-ти число составных событий длины L_Π обратно пропорционально сумме коэффициентов $Sum\left(\binom{L_\Pi+1}{\Delta CC}S\right)$ строки длины $L_\Pi + 1$ Паскалеподобного треугольника составных событий.

Отметим, что классический треугольник Паскаля описывает полярные бинарные события [2-5], при переходе от составных событий к полярным составным событиям [2-5] значения обоих рассмотренных треугольников (Паскаля и составных событий) совпадают, за исключением вершины треугольника Паскаля.

Обсуждение

Поставщиком исследовательских задач для комбинаторики и Теории Вероятностей (ТВ) были: игра и выгода [13]: «Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоёв тогдашнего общества большое место занимали азартные игры. Широко были распространены всевозможные лотереи… проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивавшейся одновременно с ней теории вероятностей». В начале прошлого века математика объявила, что ТВ – это её наука. Создатель современной ТВ - Р. Мизес, как мог протестовал, указывая на то, что ТВ является экспериментальной наукой, и ТВ относится к естественным наукам. Прошедший век показал абсолютную правоту Р. Мизеса. За весь прошедший век математика не смогла открыть ничего важного в ТВ, хотя количество трудов было велико.

За последние несколько лет экспериментально открыты законы, описывающие структуру случайных пос-тей с равновероятными исходами, получен алгоритм меняющий вероятность угадывания выпадения сторон монеты. Но, полученные экспериментальные формулы не имели связи с наработанным математическим контентом. В данной статье «переброшен мост» между экспериментальными законами «Комбинаторики длинных последовательностей» (КДП) и математической формалистикой. Этим «мостом» явился треугольник Паскаля. Оказалось, что математическая формалистика для треугольника Паскаля замечательно описывает составные события - базовое понятие экспериментальной КДП [2 – 5].

Выводы

1. В своих строках треугольник Паскаля содержит структуру любой случайной бинарной последовательности.
2. Треугольник Паскаля содержит в себе ещё одну комбинаторную трактовку своих величин, его величины соответствуют распределению коэффициентов составных событий в словах длины L.
3. При переходе от составных событий к полярным составным событиям значения обоих рассмотренных треугольников (Паскаля и составных событий) совпадают, за исключением вершины треугольника Паскаля.

Литература

1. Успенский В.А., «**Популярные лекции по математике**» выпуск № 43, «Треугольник Паскаля» издание второе, дополненное, Москва «Наука», 1979 г.
2. Филатов О. В., Филатов И.О., Макеева Л.Л. и др. «**Потоковая теория: из сайта в книгу**». Москва, «Век информации», 2014, с.200.
3. Филатов О. В., Филатов И.О. «**Закономерность в выпадении монет – закон потоковой последовательности**». Германия, Издательский Дом: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015, с. 268.
4. Филатов О. В., Филатов И.О., статья «**О закономерностях структуры бинарной последовательности**», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», 2014, №5 (95), с. 226 – 233.
5. Филатов О. В., статья «Теорема «**О амплитудно-частотной характеристике идеальной бинарной случайной последовательности**», «Проблемы современной науки и образования», 2015 г., № 1 (31), с. 5 – 11; DOI: 10.20861/2304-2338-2014-31-001.
6. Успенский В.А., «**Четыре алгоритмических лица случайности**», — 2-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2009. — 48с.
7. Чайковский Ю.В. «**О природе случайности**» – М.: Центр системных исследований – Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. – 280 с.
8. Пятницын Б.Н. «**Философские проблемы вероятностных и статистических методов**». М., 1976.
9. Филатов О. В., статья «**Альтернативный способ построения треугольника паскаля и расчёта биноминальных коэффициентов**», «Проблемы современной науки и образования», 2017 г., № 29 (111), с. 5 – 17; DOI: 10.20861/2304-2338-2017-111-001.
10. Филатов О. В., статья «**Краевые уплотнения в сериях подбрасываний монеты. Теорема «О равенстве суммы первых угаданных событий числу серий» , «Проблемы современной науки и образования**», 2017 г., № 3 (85), с. 16 –30; DOI: 10.20861/2304-2338-2017-85-002.
11. Филатов О. В., Статья «**Бинарная потоковая последовательность – не Марковский процесс выпадения монеты. Бинарные слова и треугольник Паскаля**», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», № 11 (101), 2014, с.166 – 173.
12. Филатов О. В., Статья «Эффект Арнольда – Филатова. Золотое, серебряное сечения. Альтернативная запись бесконечно сложной последовательности. Аргументация по фундаментальности «Потоковой теории», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», № 12 (102), 2014, с. 124-130.
13. Н. Я. Виленкин, «**Комбинаторика**», Москва, 1969 г. 328 стр.