МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Зайко Юлия Сергеевна**

# РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКОВ НА СКЛОНАХ

Специальность 01.02.05 — «Механика жидкости, газа и плазмы»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:
**Эглит Маргарита Эрнестовна,** доктор физико–математических наук, профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета, МГУ имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:
**Актершев Сергей Петрович,** доктор физико–математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории Проблем тепломассопереноса, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН.
**Осипцов Андрей Александрович,** доктор физико–математических наук, руководитель лаборатории моделирования многофазных систем, доцент, Сколковский институт науки и технологий.
**Могилевский Евгений Ильич,** кандидат физико–математических наук, доцент кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета, МГУ имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 27 ноября 2020 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.03 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, кинозал.

Email: pelevina.daria@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удалённом интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/287066655/ .

Автореферат разослан 8 октября 2020 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.01.03,
кандидат физико–математических наук Д.А. Пелевина

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Работа посвящена изучению поведения потоков, движущихся по склонам под действием силы тяжести. Примерами таких потоков являются лавины, сели и оползни, а также тонкие плёнки на наклонных плоскостях, которые часто встречаются в различных технических приложениях, например, в теплообменниках, конденсаторах, абсорберах, испарителях, струйно-плёночной аппаратуре и т.д.

Снежные лавины, оползневые и селевые потоки могут представлять значительную опасность для людей и сооружений на склонах гор. Для организации защиты необходимы данные о дальности распространения этих потоков и их динамических параметрах в конкретном месте склона. Эти данные могут быть получены из измерений при наблюдении реального явления, что, однако, является сложной и затратной задачей. Другой источник данных о склоновом потоке — математическое моделирование. Широко применяются для описания склоновых потоков модели, использующие уравнения механики сплошных сред, осреднённые по глубине (уравнения в гидравлическом приближении); более же подробные модели основаны на полных, не осреднённых по глубине, уравнениях МСС, эти модели в настоящее время находятся в процессе разработки.

При моделировании лавин, селей и оползней возникают, в частности, следующие задачи: 1. Учёт сложных реологических свойств движущейся среды, которые проявляются, например, в том, что снежный поток или оползень может останавливаться на наклонном склоне, — данная особенность не может быть описана в рамках линейно-вязкой жидкости. 2. Моделирование процесса захвата и вовлечения в движение материала, лежащего на склоне. Эти задачи являются новыми и актуальными для приложений. Большинство моделей, учитывающих захват и вовлечение в движение материала склона, основаны на осреднённых по глубине уравнениях МСС. В первой части данной работы с использованием полных уравнений МСС изучается влияние на поток сложной реологии движущейся среды (рассмативаются модели Хершеля-Балкли и Кросса) и захвата донного материала. Проведённое численное исследование является необходимым этапом при разработке полной трёхмерной модели, способной описывать поведение природных склоновых потоков.

Актуальным является вопрос устойчивости потоков на склонах с учётом режима течения (ламинарный или турбулентный) и реологии движущейся среды. Неустойчивость может приводить, в частности, к образованию катящихся волн, при наличии которых поток может выходить из берегов или переливаться через стенки канала, что является нежелательным. Также при моделировании важно учитывать возможность неустойчивости потока, которая влияет на выбор численной схемы. Устойчивость открытых потоков на наклонных плоскостях широко исследована с использованием уравнений в гидравлическом приближении относительно одномерных продольных возмущений. Однако, важно знать, могут ли в этих потоках косые возмущения приводить к неустойчивости раньше, чем продольные. В данной работе аналитически выводится критерий устойчивости относительно двумерных возмущений. Он применим к потокам различной реологии при различных режимах течения и показывает, при каких параметрах потока и склона косые возмущения являются более опасными, чем продольные.

Изучение асимптотики при $t \to \infty$ локализованного возмущения в вертикально стекающей плёнке жидкости проводилось для течения, описываемого моделью Шкадова, в работе Демёхина и др., 2008 и течения, описываемого слабонелинейным уравнением Курамото-Сивашинского, в книге Chang, Demekhin, 2002. В работе Актершева, Алексеенко, 2014 эволюция трёхмерного локализованного возмущения вертикальной плёнки изучалась численно с использованием модели, предложенной в их работе 2013 года (Алексеенко, Актершев, 2013). В настоящей работе аналитически, методом перевала, изучается асимптотика локализованного по пространству и времени возмущения потока вязкой жидкости на плоскости, наклонённой к горизонту на угол $0 < \alpha < \pi/2$. Поток описывается уравнениями в гидравлическом приближении.

**Цель и задачи работы.**

1. Исследование влияния процесса вовлечения материала дна и реологических свойств движущейся среды на динамику длинного однородного потока, движущегося под действием силы тяжести по однородному склону.

2. Анализ устойчивости открытых однородных склоновых потоков, описываемых уравнениями в гидравлическом приближении, относительно возмущений, распространяющихся под произвольным углом к направлению скорости потока.

3. Изучение асимптотического поведения локализованного возмуще-

ния потока вязкой жидкости на наклонной плоскости.

**Новизна работы.**

Задача моделирования посредством полных уравнений МСС процесса уноса склоновым потоком донного материала с учётом сложных реологических свойств движущейся среды является новой и актуальной. В данной работе проводится исследование влияния на динамику потока указанных факторов. В качестве реологических моделей рассматриваются среды Хершеля-Балкли и Кросса.

Устойчивость открытых склоновых потоков, описываемых уравнениями в гидравлическом приближении, изучается в данной работе аналитически. Новыми результатами, полученными в работе, являются: критерий на параметры потока и склона, который показывает, что при некоторых параметрах косые возмущения могут приводить к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные (найдены также диапазоны углов распространения растущих возмущений); полученные методом перевала асимптотика локализованного возмущения неустойчивого потока на склоне, геометрия области, занятой растущим возмущением, и поведение волн внутри этой области.

**Теоретическая и практическая значимость работы.**

Результаты работы важны для развития знаний о поведении течений по наклонным плоскостям, в частности, об устойчивости и развитии возмущений в них. Уравнения, свойства решений которых изучены в работе, могут использоваться для описания таких природных явлений, как лавины, сели и оползни. Исследованные в работе свойства склоновых потоков важны при проектировании сооружений и организации защиты в горах, а также при подготовке наблюдений за реальными потоками и их моделировании.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. В ламинарном потоке среды Хершеля-Балкли, а также среды Кросса на склоне постоянного уклона при больших временах с момента начала захвата подстилающего материала а) зависимости глубины и скорости от времени близки к линейным, б) профили скорости имеют расширяющийся со временем близкий к линейному участок в области около дна.

2. Скорость захвата потоком материала дна стремится к константе, которая зависит от угла склона, ускорения свободного падения, предела прочности на сдвиг материала дна и реологических параметров движущейся среды. Асимптотическая (при больших $t$ с момента начала вовлечения) скорость захвата падает при уменьшении предела текучести движущейся среды. Показано, что асимптотическая скорость захвата линейно зависит от синуса угла наклона к горизонту.
3. В рамках гидравлического приближения в однородном потоке на склоне постоянного уклона косые малые возмущения могут приводить к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные. В частности, это выполнено в ламинарных потоках среды Хершеля-Балкли с показателем степени $n > 2$.
4. В неустойчивом однородном слое вязкой жидкости на склоне постоянного уклона при $t \to \infty$ область, занятая растущим возмущением от локализованного точечного воздействия, имеет форму сегмента круга, центр которого движется вдоль оси $x$ с невозмущённой скоростью потока $\vec{u}_0$ (ось $x$ направлена вдоль вектора $\vec{u}_0$). Внутри области, занятой растущим возмущением, скорость его роста постоянна на линиях, перпендикулярных оси $x$, максимальна вблизи передней границы области и стремится к нулю на задней её границе. Фазовая скорость возмущения превышает групповую. Гребни растущих волн представляют собой дуги окружностей с центром в той же точке, что и центр круга, в сегменте которого лежат все растущие возмущения. Длина волны стремится к нулю при приближении к передней границе сегмента.

**Методология и методы исследования**

Для исследования влияния реологических свойств среды и вовлечения в движение материала дна на динамику склонового потока рассмотрено плоское течение по длинному однородному склону, все величины считались зависящими лишь от нормальной ко дну координаты. Сформулирована модель (уравнения и граничные условия), создана программа на основе неявной разностной схемы, проведены расчёты, для результатов которых проверена сходимость по сетке и, когда это возможно, результаты сравнены с аналитическими решениями.

Изучение устойчивости потока на склоне проведено аналитически, выполнен линейный анализ устойчивости. Для исследования дисперсионного уравнения при получении критерия устойчивости использован принцип аргумента, а для получения асимптотики локализованного возмущения при больших $t$ — метод перевала.

**Достоверность и апробация результатов.**

Достоверность результатов диссертации обусловлена использованием классических математических методов механики сплошных сред и теории функций комплексного переменного. Для численных расчётов использованы стандартные методы решения уравнений параболического типа, проверена сеточная сходимость, а также, где это возможно, проведено сравнение расчётных результатов с аналитическими.

Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: семинар по механике сплошных сред под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, профессора А.Н. Осипцова; семинар отдела механики Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук; семинар под руководством В.Ю. Ляпидевского, Н.И. Макаренко, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН; семинар «Физическая гидродинамика» под руководством академика РАН С.В. Алексеенко, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН; семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством академика Р.И. Нигматулина, проф. Н.Н. Смирнова, проф. А.В. Звягина; VII Всероссийская конференция с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020); 10-ая международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2019); конференция-конкурс молодых учёных НИИ механики МГУ (Москва, 2019); всероссийские конференции молодых учёных-механиков «YSM-2018», «YSM-2020» (Сочи, 2018, 2020); XI и XII всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015, Уфа, 2019); Генеральные ассамблеи Европейского союза наук о Земле EGU-2015 и EGU-2018 (Австрия, Вена, 2015, 2018); 18-я, 19-я международные школы-семинары «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2018, 2019); международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвящённая памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со стодесятилетием со дня его рождения (Москва, 2017); III международный симпозиум «Физика, химия и механика снега» (Южно-Сахалинск, 2017); конференция «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017); XVI гляциологический симпозиум «Прошлое, настоящее и будущее криосферы Земли» (Санкт-Петербург, 2016); VIII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 115-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015); конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2013, 2014, 2018 и 2019); конференция «Ломоносов-2013» (Москва, 2013).

**Публикации соискателя по теме диссертации**

Основные результаты диссертации изложены в 22 печатных работах, из них 5 статей опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus.

**Личный вклад**

Представленные в диссертации результаты получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежат постановки задач о склоновом потоке, захватывающем донный материал, и об устойчивости потока на склоне относительно двумерных возмущений, подходы к их исследованию, осуществление общего руководства работой и контроль достоверности полученных результатов. Постановка задачи об асимптотике локализованного возмущения слоя вязкой жидкости на склоне, подход к её решению предложены академиком РАН, проф. А.Г. Куликовским, которым также осуществлён контроль полученных результатов.

**Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 120 страниц, включая 34 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 148 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в работе, формулируются цели, ставятся задачи диссертационной работы, излагается научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Глава 1** представляет собой обзор литературы, состоящий из двух частей. Первая посвящена моделированию природных потоков, вторая —

устойчивости потоков на склонах.

**Глава 2** посвящена моделированию потока на склоне с учётом сложных неньютоновских свойств движущейся среды и вовлечения в движение материала, лежащего на склоне.

В **разделе 2.1** содержится постановка задачи, сформулирована гипотеза, используемая для описания процесса захвата материала дна, приведён вариант обезразмеривания системы с учётом параметров, входящих в реологические соотношения, используемые для описания потока. Приводится расчётная схема и описание программы.

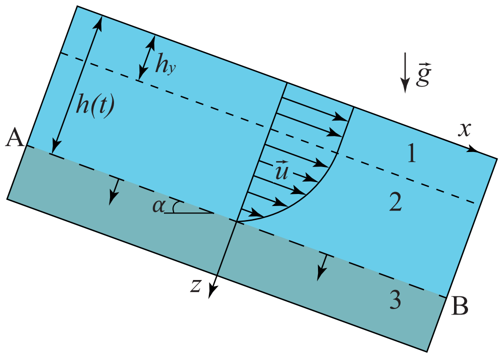


Рис. 1: Схема потока и система координат. $h(t)$ — полная глубина потока, $h_y$ — толщина слоя, движущегося как твёрдое тело при наличии предела текучести в реологической модели (область 1), 2 — сдвиговый слой, 3 — материал, лежащий на дне, который может вовлекаться в движение, пунктирная линия AB — фронт разрушения, то есть нижняя граница потока, движущаяся в сторону увеличения $z$ при наличии захвата.

Изучение влияния сложной реологии и захвата донного материала на динамику склонового потока проводится в следующей постановке: изучается нестационарный ($h = h(t)$) ламинарный длинный однородный поток на однородном склоне, движение считается плоским, все параметры зависят только от координаты $z$, нормальной ко дну (см. рис. 1). Уравнение движения в проекции на ось $x$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},$$

здесь $u = u(t, z)$ — компонента скорости вдоль оси $x$, направленной вниз вдоль склона, $g$ — ускорение силы тяжести, $\alpha$ — угол склона, $\tau_{xz}$ — касательная компонента тензора напряжений на параллельных дну площадках, $\rho$ — плотность движущейся среды. Кроме стандартных граничных условий прилипания на дне и равенства нулю силы трения на свободной границе, ставится дополнительное граничное условие на дне. Оно следует из гипотезы о захвате донного материала (Issler, Pastor Pérez, 2011) и формулируется следующим образом: захват происходит тогда, когда касательное напряжение на дне в потоке $\tau_b = \tau_{xz}|_{z=h(t)}$ равно пределу прочности на сдвиг $\tau_c$ материала дна: $\tau_b = \tau_c$ (заметим, что $\tau_{xz}$ не может превышать $\tau_c$). В качестве реологических моделей рассмотрены модель Хершеля-Балкли[1]

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dz} = 0, & \text{если} \quad |\tau_{xz}| \le \tau_y, \\ |\tau_{xz}| = \tau_y + K\left|\dfrac{du}{dz}\right|^n, & \text{если} \quad |\tau_{xz}| > \tau_y, \end{cases} \tag{1}$$

и модель Кросса[2]

$$|\tau_{xz}| = \frac{\mu_0 + \mu_1 k_c\left|\dfrac{du}{dz}\right|}{1 + k_c\left|\dfrac{du}{dz}\right|}\left|\frac{du}{dz}\right|. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) выполнены для указанных моделей в простом сдвиговом течении.

Обозначения:

- параметры реологической модели Хершеля-Балкли: $\tau_y$ — предел текучести, $K$ (размерность — $\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{n-2}\cdot\mathrm{L}^{-1}$) — индекс консистенции, $n$ — показатель степенного закона;
- параметры реологической модели Кросса: $k_c$ — константа размерности T, $\mu_0$, $\mu_1$ — константы, имеющие размерность динамического коэффициента вязкости ($\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-1}$), причём $\mu_0$ — предельная эффективная вязкость при $du/dz \to 0$, $\mu_1$ — при $du/dz \to \infty$.

[1] Herschel W.H., Bulkley R. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. Am. Soc. Test. Proc. 1926. V. 26. Part II. P. 621 – 633.

[2] Cross M.M. Rheology of non-Newtonian fluids: a new flow equation for pseudoplastic systems. Journal of Colloid Science. 1965. V. 20. P. 417 – 437.

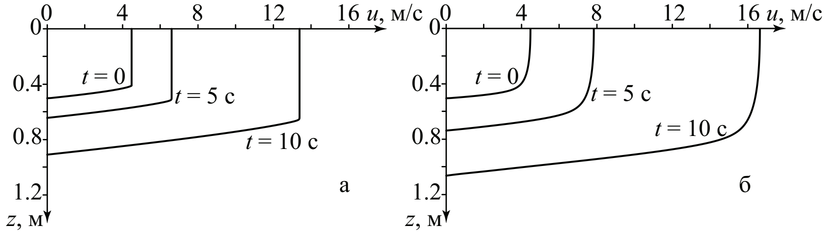


Рис. 2: Профили скорости в различные моменты времени в захватывающих донный материал потоках среды Хершеля-Балкли с параметрами $\rho = 500$ кг/м$^3$, $\tau_y = 1000$ Па, $K = 0.044$ кг/м, $n = 2$ и среды Кросса с параметрами $\mu_0/\rho = 2.52$ м$^2$/с, $\mu_1/\rho = 0.29 \cdot 10^{-2}$ м$^2$/с, $k_c = 1.153$ с. $\tau_c = 1200$ Па, $\alpha = 30°$.

В **разделе 2.2** приводятся результаты расчётов движения потока по склону с захватом донного материала, проверяется сходимость по сетке. Показано, что в рамках принятой постановки задачи для всех рассмотренных реологий движущейся среды

1. Захват начинается, если начальная глубина потока $h|_{t=0}$ больше глубины стационарного потока с трением на дне $|\tau_b|$, равным пределу прочности на сдвиг материала дна $\tau_c$, или если предел прочности на сдвиг материала дна оказывается меньше, чем касательное напряжение на дне в потоке: $\tau_c < |\tau_b|$.
2. В области, прилегающей ко дну, профили скорости имеют участок, близкий к линейному, причём его толщина со временем увеличивается (рис. 2).
3. В потоке, захватывающем донный материал, зависимости глубины и скорости от $t$ близки к линейным при больших временах с момента начала захвата (рис. 3).
4. Скорость захвата стремится к постоянному значению при увеличении $t$ (рис. 3а, 4).

Проведены расчёты при различных значениях предела текучести и угла склона, показано влияние этих величин на скорость вовлечения донного материала.

В **разделе 2.3** получены асимптотические (при больших временах с момента начала захвата) формулы для скорости захвата $q_{as}$. Использу-

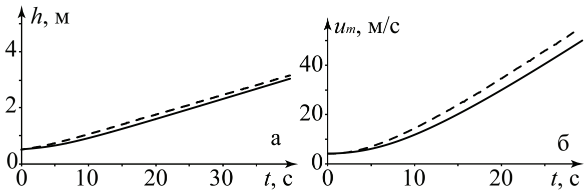


Рис. 3: Зависимости глубины $h$ и средней скорости $u_m$ от времени в захватывающих донный материал потоках сред Хершеля-Балкли (сплошные кривые) и Кросса (пунктирные кривые). Параметры те же, что на рис. 2.

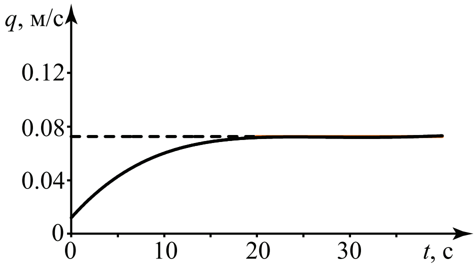


Рис. 4: Скорость захвата, полученная в расчёте (сплошная кривая), и асимптотическое значение (пунктирная линия) при больших временах для модели Хершеля-Балкли с теми же параметрами, что на рис. 2.

ются три предположения, которые основаны на результатах численного моделирования. 1. Нижняя граница потока, или фронт разрушения (линия AB на рис. 1), движется с постоянной скоростью в процессе захвата. 2. В системе координат $x, \zeta$ ($\zeta = h - z$), связанной с фронтом разрушения, течение в области, прилегающей к фронту разрушения, стационарное. 3. Скорость потока линейно зависит от глубины в области, прилегающей ко дну (см. рис. 2). При сделанных предположениях выводятся следующие формулы для асимптотической скорости захвата $q_{as}$:

1. Для модели Хершеля-Балкли

$$q_{as} = g \sin\alpha \left( \frac{K}{\tau_c - \tau_y} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Для модели Кросса

$$q_{as} = \frac{2\mu_1 k_c g \sin\alpha}{\tau_c k_c - \mu_0 + \sqrt{(\mu_0 - \tau_c k_c)^2 + 4\mu_1 \tau_c k_c}}.$$

Из этих формул видно, что при больших $t$ скорость захвата — константа, зависящая от угла склона, силы тяжести, предела прочности на сдвиг материала дна и параметров реологической модели. Показано, что константы, к которым стремятся скорости вовлечения материала дна, полученные в расчётах, близки к значениям, полученным аналитически (см. пример для среды Хершеля-Балкли на рис. 4). Скорости базового захвата (то есть захвата подстилающего слоя вдоль нижней границы потока), полученные численно и аналитически в настоящей работе, по порядку величин близки к значениям в реальных лавинах (Sovilla et al., 2006). Расчетные зависимости глубины и скорости от времени становятся близкими к линейным через 10 – 20 секунд с момента начала захвата. Это свидетельствует о возможности применения предложенной математической модели к реальным склоновым потокам.

Результаты и выводы исследования, проведённого в главе 2, обобщены и кратко сформулированы в **разделе 2.4**.

**Глава 3** посвящена исследованию устойчивости однородного потока на склоне относительно двумерных возмущений. Поток описывается уравнениями в гидравлическом приближении. Реология среды и режим течения (ламинарный или турбулентный) учитываются посредством функции, задающей трение на дне потока. Аналитически проводится линейный анализ устойчивости безграничного однородного потока на склоне постоянного уклона относительно возмущений, направленных под произвольным углом к вектору скорости невозмущенного движения. Для исследования дисперсионного уравнения применяется принцип аргумента.

В **разделе 3.1** приводится постановка задачи, выводится система для малых возмущений и выписывается дисперсионное уравнение.

Рассматривается безграничный однородный поток на склоне постоянного уклона $\alpha$, он описывается системой уравнений в гидравлическом приближении (Эглит, 1986), которая в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h\vec{u} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\tan\alpha\vec{e} - \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\,\mathrm{grad}\,h - \overline{F}(h,u)\vec{u}. \qquad (4)$$

Обозначения: $h$ — глубина потока, $\vec{u} = \{u_x, u_y\}$ — средняя по глубине скорость, $u$ — модуль скорости; в размерном виде функция, задающая трение на дне, определяется как $F(h,u)\vec{u} = \vec{\tau}/(\rho h)$, где $\vec{\tau}$ — сила трения на дне на единицу площади, $\rho$ — плотность (черта над $\overline{F}$ далее будет опущена); $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль линии наибольшего спуска по дну; $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0\cos\alpha}$ — число Фруда, индекс «0» отмечает величины, относящиеся к невозмущённому течению.

На невозмущённое движение накладываются малые возмущения, система уравнений линеаризуется около невозмущённого состояния. Система координат выбирается так, что ось $x$ направлена вдоль волнового вектора $\vec{k}$, который составляет угол $\theta$ с вектором невозмущённой скорости течения. После подстановки в систему для малых возмущений решения в виде бегущих волн $h' = He^{i(kx-\omega t)}$, $u_x' = U_x e^{i(kx-\omega t)}$, $u_y' = U_y e^{i(kx-\omega t)}$ для величин $H$, $U_x$, $U_y$ выписывается система линейных алгебраических уравнений, из условия совместности которой получается дисперсионное уравнение, связывающее частоту $\omega$, волновое число $k$ и угол $\theta$. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$D(C,k,\theta) = k^2(C-\cos\theta)(C-a_+)(C-a_-) - F_0A(C-a_{0x}) +$$
$$+ikF_0(C-a_+)(C-a_-) + ikA(C-\cos\theta)(C-a_{0x}) - ikc_0^2 p\sin^2\theta = 0. \qquad (5)$$

Здесь $C = \omega/k$, $a_\pm = u_{0x} \pm c_0$, $c_0 = 1/\mathrm{Fr}$ – скорость распространения малых мелкомасштабных возмущений по частицам среды, $A = F_0 + p$, $F_0 = F(h_0, u_0)$, $p = (u\partial F/\partial u)|_{u=u_0,h=h_0}$, $a_{0x} = u_{0x} + N_0\cos\theta$, $N_0 = -uh(\partial F/\partial h)/A|_{u=u_0,h=h_0}$ — скорость распространения малых крупномасштабных возмущений по частицам среды.

**Раздел 3.2** посвящён анализу дисперсионного уравнения. Для определения числа корней с положительной мнимой частью (наличие которых говорит о неустойчивости течения) используется принцип аргумента. Рассматривается контур $\Gamma$, состоящий из полуокружности бесконечно большого радиуса и вещественной оси. Функция $D(C,k,\theta)$, задающая дисперсионное уравнение, представляет собой полином третьей степени относительно $C$. Она аналитична внутри области, ограниченной контуром $\Gamma$, не имеет внутри этой области полюсов, непрерывна вместе со

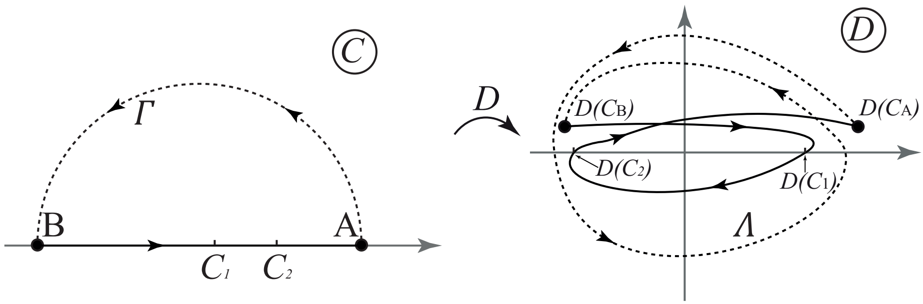


Рис. 5: Отображение $\mathbf{d} = D(\Gamma)$ контура $\Gamma$ функцией, задающей дисперсионное уравнение, в случае, когда в верхней полуплоскости $C \in \mathbb{C}$ (т.е. внутри контура $\Gamma$) нет корней дисперсионного уравнения.

своей производной на $\Gamma$ и не имеет нулей на $\Gamma$[1]. Тогда, согласно принципу аргумента, число корней дисперсионного уравнения, лежащих в верхней полуплоскости, равно числу оборотов вектора $\mathbf{d}$ при обходе кривой $\Lambda$, соответствующей $\Gamma$ при отображении $\mathbf{d} = D(\Gamma)$. Изменение аргумента при обходе кривой $\Lambda$ будет равно нулю лишь в одном случае (рис. 5). Исходя из этого, критерий устойчивости формулируется следующим образом:
**Утверждение.** Поток устойчив (возмущения не растут), тогда и только тогда, когда для всех вещественных волновых чисел $k$ и всех углов $\theta$
1) при вещественных $\omega$ мнимая часть дисперсионного уравнения
$\operatorname{Im} \ D|_{\omega\in\mathbb{R}} \ \equiv \ \operatorname{Im} D_{\mathbb{R}} \ = \ 0$ имеет два различных корня: $\omega_1 < \omega_2$,
2) при $\omega \in \mathbb{R}$ вещественная часть функции $\operatorname{Re} D_{\omega\in\mathbb{R}} \equiv \operatorname{Re} D_{\mathbb{R}}$ положительна в первом корне и отрицательна во втором: $\operatorname{Re} D_{\omega\in\mathbb{R}}(\omega_1) > 0$, $\operatorname{Re} D_{\omega\in\mathbb{R}}(\omega_2) < 0$.

Этот критерий записывается в виде неравенства, куда входят параметры $p$, $A$, $c_0$, $N_0$ и $\theta$. Указанное неравенство решается для нахождения соотношений на $p$, $A$, $c_0$, $N_0$, при которых поток устойчив. Приводятся результаты, которые в графической форме показаны на рис. 6. Ниже используются следующе обозначения: $\xi = c_0/N_0$, $\xi_* = 2\sqrt{(p/A) + (p/A)^2}$, причём для большинства реальных течений выполнено $0 < p/A < 1$. При $p/A \leq 0.5$ условие устойчивости относительно двумерных возмущений

[1] Если нули есть на вещественной оси $C$, в качестве элемента контура берётся не эта ось, но прямая, сдвинутая на малое $\varepsilon$ в положительном направлении вдоль оси $\operatorname{Im} C$. После применения принципа аргумента осуществляется предельный переход к исходному контуру $\Gamma$ при $\varepsilon \to 0$.

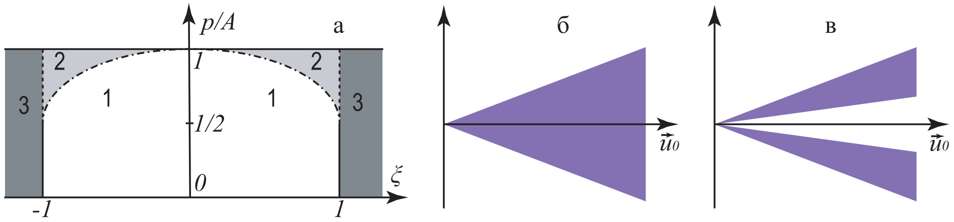


Рис. 6: а — результат линейного анализа устойчивости системы относительно двумерных возмущений, область 1 со сплошными и штрихпунктирными границами — область устойчивости, 2, 3 — области неустойчивости, в области 2 косые возмущения приводят к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные; б — внутри закрашенной области лежат углы, с которыми распространяются растущие возмущения при $|\xi| > 1$ (область 3 на рис. 6а); в — внутри закрашенных областей лежат углы, с которыми распространяются растущие возмущения при $\xi_* < |\xi| < 1$ (область 2 на рис. 6а).

совпадает с известным условием для одномерных возмущений: $|\xi| \leq 1$ (Whitham, 1974). При этом для $|\xi| > 1$ в данной работе найдены углы распространения возмущений, которые не растут:

$$\arccos\left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - \xi_*^2}}{2p/A}\right) + \pi m \leq \theta \leq \pi - \arccos\left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - \xi_*^2}}{2p/A}\right) + \pi m$$

(незакрашенная область на рис. 6б); здесь $m$ — целое число, равное 0 или 1. В случае же $p/A > 0.5$ условие устойчивости есть $|\xi| \leq \xi_*$. Тогда в области 2 на рис. 6а, которая даётся неравенством $\xi_* < |\xi| < 1$, растут косые возмущения (закрашенная область на рис. 6в) с углами распространения

$$\pm\arccos\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - \xi_*^2}}{2p/A}\right) + \pi m < \theta < \pm\arccos\left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - \xi_*^2}}{2p/A}\right) + \pi m$$

($m$ — целое число, равное 0 или 1), тогда как остальные возмущения, в том числе продольные, не растут. Таким образом, в данной работе установлено, что при определённых параметрах потока и склона косые возмущения являются более «опасными» (раньше приводят к неустойчивости), чем продольные.

В **разделе 3.3** приведены примеры применения полученного критерия устойчивости к склоновым потокам различных реологий и режимов течения. В частности, показано, что для ламинарного потока среды Хершеля-Балкли с показателем степени $n > 2$ выполнено условие $p/A > 0.5$, следовательно, для таких сред косые возмущения приводят к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные.

Кратко результаты исследования устойчивости склонового потока относительно двумерных возмущений и выводы приведены в **разделе 3.4**.

**Глава 4** посвящена изучению асимптотического поведения локализованного возмущения однородного неустойчивого потока линейно-вязкой жидкости на склоне. Аналитически найдены асимптотика интеграла Фурье, задающего локализованное возмущение, геометрия области, занятой растущим возмущением, форма гребней и длины растущих волн.

Постановка задачи и метод перевала, используемый для получения асимптотики, приведены в **разделе 4.1**. Требуется найти асимптотику локализованного по пространству и времени возмущения слоя линейно-вязкой жидкости на наклонной плоскости, описываемого системой уравнений (3), (4) (необходимо заметить, что в силу гиперболичности системы (3), (4) все малые возмущения лежат внутри конуса характеристик $(x-u_{0x}t)^2+y^2 \leq c_0^2t^2$). В данном исследовании используется система координат, в которой ось $x$ направлена вдоль невозмущенной скорости, волновой вектор имеет компоненты $k_x,\ k_y$. Решения дисперсионного уравнения (5) в случае линейно-вязкой жидкости имеют вид

$$\omega_1 = k_x - iF_0, \quad \omega_{2,3} = k_x - \frac{i}{2}F_0 + \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}(k_x^2+k_y^2) + 2iF_0k_x - \frac{F_0^2}{4}}, \tag{6}$$

в выражении для $\omega_{2,3}$ стоит комплексный корень. Локализованное возмущение задаётся интегралом Фурье

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(k_x,k_y) e^{i(k_x x + k_y y - \omega_n t)} dk_x dk_y, \tag{7}$$

причём функция $w(x,y,t)$ отличается для возмущений $h$, $u_x$, $u_y$ только предэкспоненциальной функцией $G_n(k_x,k_y)$. Если в начальный момент времени возмущение — дельта-функция $w(x,y,0) = \delta(x)\delta(y)$, то $G_n \equiv 1$. Для поиска асимптотики интеграла (7) применяется метод перевала; поведение возмущения исследуется вдоль всех лучей $x = \hat{U}t$, $y = \hat{V}t$, $\hat{U}, \hat{V} \in \mathbb{R}$.

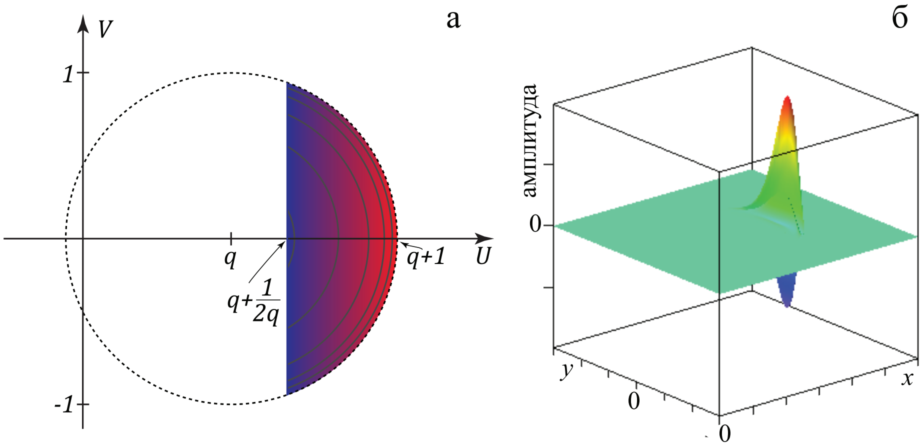


Рис. 7: В силу гиперболичности системы малые возмущения лежат внутри конуса характеристик, на плоскости $U, V$ эта область — внутренность круга $(U - q)^2 + V^2 \leq 1$. (а) Область растущих возмущений выделена цветной заливкой, линия $U = q + 1/(2q)$ — линия нейтрального возмущения. Дуги окружностей, показанные серым, — гребни растущих волн. Введены обозначения $q = u_{0x}\,\mathrm{Fr}$, $U = \hat{U}\,\mathrm{Fr}$, $V = \hat{V}\,\mathrm{Fr}$. (б) Визуализация возмущения в пространстве.

В **разделе 4.2** описывается процедура последовательного (сначала в плоскости $k_y \in \mathbb{C}$, затем — в плоскости $k_x \in \mathbb{C}$) применения метода перевала к дисперсионному соотношению (6). Находятся седловые точки функции $\omega(k_x, k_y)$, строится топология линий уровня функции $\mathrm{Im}\ \omega = \mathrm{const}$ в плоскостях $k_y \in \mathbb{C}$, $k_x \in \mathbb{C}$, исходные вещественные контуры интегрирования по $k_y$, $k_x$ деформируются так, чтобы проходить через седловые точки, окрестности которых дают вклад в асимптотику интеграла (7). В окрестности каждой седловой точки комплексный интеграл сводится к вещественному специального вида, асимптотическое значение которого получается по методу Лапласа. Найдена область, занятая растущим возмущением (рис. 7а): она представляет собой сегмент круга, линейные размеры которого растут пропорционально $t$, и его центр движется со скоростью невозмущенного потока $\vec{u}_0$ (ось $x$ направлена вдоль

$\vec{u}_0$). Показано, что скорость роста постоянна, зависит от $U$, но не зависит от $V$ на линиях, перпендикулярных направлению распространения пятна, занятого растущим возмущением; она максимальна вблизи передней границы и стремится к нулю на задней границе сегмента (рис. 7б). Фазовая скорость возмущения превышает групповую, а длина волны стремится к нулю на передней границе области растущего возмущения. Гребни растущих волн — дуги окружностей с общим центром в точке $x = u_0 t$.

Результаты исследования, проведённого в главе 4, резюмируются в **разделе 4.3**.

## Основные результаты и выводы диссертации

1. Численно исследовано влияние на динамику потока, движущегося под действием силы тяжести по длинному однородному склону постоянного уклона, двух факторов: 1) вовлечения в движение материала склона, 2) реологических свойств движущейся среды. Установлено, что для различных реологических моделей среды зависимости скорости и глубины потока от времени при больших временах с момента начала вовлечения близки к линейным, следовательно, скорость захвата стремится к константе; профили скорости имеют близкий к линейному и расширяющийся со временем участок около фронта разрушения (переменной границы между движущейся средой и покоящимся донным материалом).

2. Гипотеза о захвате, использованная в расчётах, позволила находить положение фронта разрушения, не имея явного закона движения для этой границы.

3. Аналитически при больших $t$ получены формулы для постоянной скорости захвата. Величина этой постоянной зависит от угла склона, ускорения силы тяжести, предела прочности на сдвиг донного материала и реологических параметров движущейся среды.

4. Аналитически проведён линейный анализ устойчивости потока на склоне относительно двумерных возмущений для среды с произвольной реологией и режимом течения (ламинарным или турбулентным), которые учитываются посредством функции, задающей трение на дне. Для описания течения использованы уравнения в гидравлическом приближении. Получен критерий устойчивости в общем виде, найдены диапазоны углов растущих волн.

5. Установлены параметры потока и склона, при которых косые возмущения могут приводить к неустойчивости при меньших числах Фруда,

чем продольные.

6. Аналитически в линейном приближении изучена эволюция локализованного в пространстве и времени возмущения однородного неустойчивого слоя линейно-вязкой жидкости на склоне постонного уклона. С помощью метода перевала найдена асимптотика возмущения при больших $t$, определены границы и размеры области, занятой растущим возмущением, и поведение волн внутри этой области.

## Публикации автора по теме диссертации

**Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus:**

1. *Margarita Eglit, Julia Zayko, Alexander Yakubenko.* A Review of Russian Snow Avalanche Models — From Analytical Solutions to Novel 3D Models // Geosciences. 2020. V. 10(2). 77.
   Impact factor SJR: 0.474. DOI: 10.3390/geosciences10020077.

2. *Julia Zayko, Margarita Eglit.* Stability of downslope flows to two-dimensional perturbations // Physics of Fluids. 2019. V. 31. No. 8. 086601.
   Impact factor JCR (WoS): 3.385. DOI: 10.1063/1.5109314.

3. *Julia Zayko, Margarita Eglit.* Stability criteria for open downslope flows under oblique perturbations // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 1129. 012038.
   Impact factor SJR: 0.23. DOI: 10.1088/1742-6596/1129/1/012038.

4. *Эглит М.Э., Якубенко А.Е., Зайко Ю.С.* Математическое моделирование склоновых потоков с учетом неньютоновских свойств движущейся среды // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН. 2018. Т. 300. С. 229 – 239.
   Impact factor JCR (WoS): 0.506. DOI: 10.1134/S0081543818010194.

5. *Зайко Ю.С.* Численное моделирование склоновых потоков различной реологической природы // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 3 – 11.
   Impact factor JCR (WoS): 0.589. DOI: 10.1134/S0015462816040013.

**Другие научные труды:**


6. *Куликовский А.Г., Зайко Ю.С.* Асимптотика локализованного возмущения слоя вязкой жидкости на склоне // Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения». Красноярск: ИВМ СО РАН, 2020. С. 141.

7. *Зайко Ю.С.* Исследование устойчивости потока на склоне относительно косых возмущений // Тезисы Конференции-конкурса молодых учёных Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2019. С. 11.

8. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Анализ устойчивости потоков на склонах // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 4: Материалы симпозиумов. Уфа, 2019. С. 43 – 45.

9. *Эглит М.Э., Зайко Ю.С., Якубенко А.Е.* Неустойчивость потока на склоне относительно косых возмущений // Модели и методы аэродинамики. Материалы XIX международной школы-семинара. Евпатория, 2019 г. Место издания: ЦАГИ. С. 118 – 119.

10. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Критерий устойчивости неньютоновских склоновых потоков с учетом косых возмущений // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2019. С. 85 – 86.

11. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Об устойчивости потоков на склонах // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2018. Тезисы докладов. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2018. С. 86.

12. *Julia Zayko, Alexander Yakubenko, Margarita Eglit.* Investigation of the influence of rheological properties on laminar and turbulent geophysical flows characteristics // Geophysical Research Abstract, EGU General Assembly 2018. Vienna. V. 20.

13. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Исследование устойчивости склоновых потоков // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конфе-

ренции. Секция механики. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2018. С. 85 – 86.

14. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э., Якубенко А.Е., Якубенко Т.А.* О влиянии предела текучести на динамику ламинарных и турбулентных склоновых потоков // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2018. С. 86 – 87.

15. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Численная модель для описания движения снежных лавин, учитывающая неньютоновскую реологию среды, турбулентность и вовлечение в движение снега со склона // III Международный симпозиум «Физика, химия и механика снега»: сборник докладов, часть II. Г. Южно-Сахалинск: изд-во Сахалинского филиала ФГБУН Дальневосточного геологического института ДВО РАН, 2018. С. 22 – 25.

16. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э., Якубенко А.Е.* Моделирование склоновых потоков с учетом неньютоновских свойств движущейся среды // Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Л.И. Седова в связи со 110-летием со дня его рождения. Тезисы докладов. Г. Москва: изд-во МИАН, 2017. С. 106 – 107.

17. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э., Якубенко А.Е.* Численное исследование природных потоков с неньютоновскими свойствами, движущихся по склонам постоянного уклона // VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Тезисы докладов. Новосибирск, 2015. С. 110.

18. *Зайко Ю.С.* Численное исследование движения склоновых потоков с различными реологическими свойствами // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. Г. Казань: изд-во Казанского университета, 2015. С. 1408 – 1410.

19. *Zayko J., Eglit M.* Mathematical Modeling of Slope Flows With Entrainment as Flows of Non-Newtonian fluids // Geophysical Research Abstract, EGU General Assembly 2015. Vienna. V. 17.

20. *Зайко Ю.С., Эглит М.Э.* Влияние реологических свойств на динамику склоновых потоков // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2014. С. 71 – 72.

21. *Эглит М.Э., Леонтьев Н.Е., Зайко Ю.С.* Численное моделирование движения бингамовской жидкости по наклонному дну с захватом донного материала // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Г. Москва: изд-во Московского университета, 2013. С. 151.

22. *Зайко Ю.С.* Математическое моделирование склоновых потоков с учётом захвата материала дна // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2013». Сборник трудов конференции. Г. Москва: изд-во МАКС Пресс, 2013. С. 1 – 2.