

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

УДК 517.977.1

Мокроусов Илья Сергеевич

**О свойствах решений смешанных задач для
волнового и телеграфного уравнений с
нелокальными краевыми условиями**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Ломов Игорь Сергеевич

Москва – 2020

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и граничными условиями общего вида	22
1.1. Постановка задачи и основные определения	22
1.2. Решение задачи для волнового уравнения с условием Дирихле на левом конце и нелокальным условием вида $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ на правом	25
1.3. Решение задачи для волнового уравнения с условием Дирихле на левом конце и нелокальным условием вида $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ на правом	27
1.4. Решение задачи для волнового уравнения с условием Неймана на левом конце и нелокальным условием вида $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ на правом	28
1.5. Решение задачи для волнового уравнения с условием Неймана на левом конце и нелокальным условием вида $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ на правом	29
1.6. Доказательство теорем о существовании и единственности решения задачи для уравнения колебания струны с условием Дирихле на левом конце	30
1.7. Доказательство теорем о существовании и единственности решения задачи для уравнения колебания струны с условием Неймана на левом конце	40
Глава 2. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения	51

2.1. Постановка задачи и известные результаты	51
2.2. Необходимое и достаточное условие принадлежности решения задачи волнового уравнения пространству Соболева	52
Глава 3. О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в пространстве L_p при $p \geq 1$	60
3.1. Постановка задачи и основные определения	60
3.2. Единственность решения из класса L_1 смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока	61
3.3. Существование обобщенного решения из класса L_p смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока	63
Заключение	67
Список литературы	69

Введение

Актуальность темы исследования.

В XVIII веке разгорелась научная дискуссия между знаменитыми математиками Д'Аламбером, Эйлером, Д. Бернулли, Лагранжем, известная истории как «Спор о звучащей струне». Дискуссия началась как диспут об определении понятия функции, а позднее дала толчок развитию различных теорий, таких как дифференциальные уравнения в частных производных, математический анализ, теория функций комплексного и вещественного переменного, теория тригонометрических рядов Фурье, теория обобщенных функций и пространств Соболева.

Одним из итогов этого многолетнего спора было открытие волнового уравнения. Данное уравнение используется в описании таких физических явлений, как механические колебания (например малые продольные или поперечные колебания металлических стержней), процесс распространения электро-магнитных, гравитационных и акустических волн в газах, жидкостях и твердых средах. Многие известные математики рассматривали в своих работах как классические, так и обобщенные решения начально-краевых задач для волнового уравнения.

Одномерное телеграфное уравнение является обобщением волнового уравнения и описывает большое количество физических процессов. В частности, для электродинамической теории телеграфные уравнения, являясь частным случаем уравнений Максвелла, определяют напряжение и силу тока в линиях электрической связи. С помощью телеграфного уравнения можно описать релятивистскую версию уравнения Шредингера; в литературе это уравнение известно под названием уравнение Клейна-Гордона-Фока. Телеграфное уравнение характеризует динамику изменения давления жидкости и газа в трубопроводе.

Среди первопроходцев исследований в области граничного управления распределенными системами стоит выделить Ж.-Л. Лионса. В его работах вопросы

поведения колебательных систем формулировались в терминах смешанных начально-краевых задач. Так в работе [1] для волнового уравнения, пользуясь видом обобщенного решения задачи, было доказано, что задача успокоения колеблющейся струны имеет решение, не являющееся при этом единственным для длительных временных промежутков рассмотрения процесса. Идеи Лионса нашли свое отражение в работах Е. Zuazua [2] для описания управления квазилинейным волновым уравнением. Метод единственности Гильберта, используемый в вышеперечисленных работах, показал себя удобным подходом для изучения свойств решений задачи о граничном управлении.

Большое число технологических процессов, рассмотренных в книге А.Г. Бутковского [3], также приводит к смешанным граничным задачам. Для исследования поведения решений рассматриваемых задач используются различные аналитические методы, такие как метод Фурье, метод моментов, метод гармоник. В рамках численного подхода к решению задач для волнового уравнения стоит отметить работы Ф.П. Васильева [4] и его учеников [5] [6] [7]. В этих статьях были разработаны эффективные численные методы решения задач наблюдения, опирающиеся на концепцию теории двойственности для линейных систем управления.

Важные фундаментальные результаты исследования именно обобщенных решений для смешанных задач для гиперболических уравнений содержатся в книге О.А. Ладыженской [8] и большой статье В.А. Ильина [9].

Начиная с 1999г. в цикле работ, опубликованном В.А. Ильиным [10], Е.И. Моисеевым [11] и их учениками решались различные вариации начально-краевых задач для гиперболических уравнений. В этих работах ключевую роль при решении задач оптимального граничного управления играло решение поставленной задачи, выраженное в явном аналитическом виде и зависящее от граничной функции. Данная диссертация является продолжением начатых исследований и большая ее часть посвящена построению решений для волнового уравнения с некоторыми видами нелокальных граничных условий. Стоит от-

метить, что одними из первых задачи разрешимости дифференциальных уравнений с модельными нелокальными граничными условиями рассмотрели А.В. Бицадзе и А.А. Самарский. Большую роль в развитии этого направления сыграли их статьи [12] и [13], в которых были предложены новые постановки задач для уравнений в частных производных.

Через некоторое время В.А. Ильин в работе [14] предъявил аналитическое решение задачи для волнового уравнения с четырьмя модельными, одноточечными нелокальными условиями типа Бицадзе-Самарского

$$\begin{aligned} u(l, t) &= -u(\dot{x}, t), u(l, t) = u(\dot{x}, t), \\ u_x(l, t) &= -u_x(\dot{x}, t), u_x(l, t) = u_x(\dot{x}, t), \end{aligned}$$

где $\dot{x}$ произвольная точка из интервала $(0, l)$. Позднее он получил результаты [15], [16] в оптимизации граничного управления решением волнового уравнения с этими условиями. Отметим также статью А.А. Кулешова [17], чьи результаты для начально-краевых задач с одноточечными нелокальными граничными условиями обобщаются в данной диссертационной работе. Отметим и статью А.А. Холомеевой [18], где нелокальным рассматривается само управление $\mu(t) = u_x(l, t) - u_x(0, t)$.

Рассмотрение непрерывно дифференцируемых решений накладывает существенные ограничения на задачи для уравнений в частных производных. Но если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений (см. например работы А.П. Хромова и его учеников [19], [20]), то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Для большого класса задач для волнового и телеграфного уравнений получены явные решения методом учета волн. Из вида этих решений легко следует достаточное условие принадлежности тому или иному функциональному классу. Более тонкую работу нужно проделать для установления критерия принадлежности решения различным классам обобщенных функций. Данные результаты позволяют по свойствам граничной функции устанавливать свойства решения,

рассматриваемой задачи.

Исследования свойств решений смешанной задачи для волнового уравнения были проведены в цикле работ В.А. Ильин и Е.И. Моисеева совместно с учениками [21], [22], [23]. Отдельно хотелось бы выделить работу [24], в которой был получен критерий принадлежности классу W_p^1 обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения и отметить, что в рамках данной диссертационной работы этот критерий обобщается на случай W_p^l с целым показателем l .

Также отметим работы И.С. Ломова по многоточечным краевым задачам (см. [25]).

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения задач для волнового и телеграфного уравнений с различными граничными условиями, в рамках аналитического подхода. А также исследование свойств этих решений в зависимости от поставленных граничных условий.

Для достижения намеченной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Задача построения аналитического решения для волнового уравнения с нулевыми начальными условиями и четырьмя вариантами граничных условий, где на правом задается нелокальное условие.
2. Задача получения критерия принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения.
3. Задача построения обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения.
4. Задача установления единственности обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения.

Научная новизна. Степень разработанности диссертации. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

1. Для смешанной задачи для волнового уравнения получены критерии принадлежности решения пространству Соболева W_p^l с целыми индексами l , что обобщает ранее полученный результат с $l = 1$.
2. Для волнового уравнения с двумя видами нелокальных граничных условий на правом конце и условием первого или второго рода на левом конце получены два алгоритма вычисления коэффициентов, используемых для получения явного аналитического решения.
3. Для уравнения колебания струны с двумя видами нелокальных граничных условий получены решения в явном аналитическом виде.
4. Для обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения показана единственность в L_p . Дополнительно установлено, что формулы решений в пространствах W_2^1 и L_p совпадают при $p \geq 1$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для построения решений некоторых задач для волнового и телеграфного уравнений. Эти решения играют важную роль в задачах наблюдения и управления. На практике полученные результаты находят применение в обработке и передаче сигналов, поддержании стабильности колебательных систем.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с нелокальными граничными условиями и методы функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Существование и единственность решений четырех смешанных задач для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого и второго рода;
2. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения ($l \in \mathbb{N}, p \geq 1$);
3. Существование и единственность решения смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока в пространстве L_p при $p \geq 1$;

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов данной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. Е.И. Моисеев и проф. И.С. Ломов) (Москва, ВМК МГУ, 2019) ;
2. Научно-исследовательский семинар «Теория операторов» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель член кор. РАН А.А. Шкаликов) (Москва, Мех-мат МГУ, 2018) ;
3. Международная конференция "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX посвященная 90-летию В.А. Ильина (Москва, ВМК МГУ, 2018);
4. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2017» (Москва, МГУ, 2017);

5. Международная Конференция (Семинар (workshop)): Boundary Value Problem, Functional Equations and Applications 3 (Rzeszow, Польша, 2016);
6. Международная Конференция: ВВМШ "Понтрягинские чтения XXVII" (Воронеж, ВГУ, 2016);
7. Международная Конференция: Ломоносовские чтения - 2016 (Москва, МГУ, 2016);

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [26–28], и 4 тезиса докладов [29–32]. Работа [27] выполнена в соавторстве. В этой работе теорема 2 принадлежит автору диссертации, теорема 1 соавтору А.А. Кулешову. Использованное в работе представление решения задачи для телеграфного уравнения было ранее получено соавтором И.Н. Смирновым в работе [33].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 77 страниц. Библиография включает 68 наименований на 9 страницах.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цели работы и основные положения, выносимые на защиту; обосновываются научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

В **главе 1** рассматриваются четыре смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида.

Параграф 1 содержит в себе постановку и описание рассматриваемых задач. Для этого вводится прямоугольник $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ и на нем рассматривается введенный В. А. Ильиным в работе [34] класс $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ функций двух переменных $u(x, t)$, непрерывных в Q_T и обладающих обобщенными частными производными $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, принадлежащими классу $L_2(Q_T)$, а также классу

$L_2[0 \leq x \leq l]$ при всех $t \in [0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при всех $x \in [0, l]$. В этом параграфе приводятся четыре смешанных задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

и одним из следующих краевых условий

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t); \quad (3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t); \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t); \quad (5)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t); \quad (6)$$

где n – целое неотрицательное число, $0 < x_i < l, i = \overline{0, n}$, α_k – произвольные вещественные постоянные, $k = \overline{0, n}$, $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $L_2[0, T]$ в случае (1.5) и (1.6), а в случае (1.3) и (1.4) $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $W_2^1[0, T]$ удовлетворяющая условию $\mu(0) = 0$. Решение задач (1.1), (1.2), (1.3)–(1.6), также как и в работе [35] понимается в смысле

Определение 1. Обобщенным из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решением смешанной задачи для волнового уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) и с одной из совокупностей граничных и нелокальных условий (1.3)–(1.6) называется функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = \\ & = \begin{cases} - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt, & \text{в случае условия (1.3), (1.5) ;} \\ \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u_x(x_k, t) \Phi(l, t) dt, & \text{в случае условия (1.4), (1.6) ;} \end{cases} + \\ & + \begin{cases} \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt, & \text{в случае условия (1.3), (1.4) ;} \\ - \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt, & \text{в случае условия (1.5), (1.6) ;} \end{cases} \end{aligned}$$

в котором $\Phi(x, t)$ — произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x, T) = 0$, $\Phi_t(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, равенству $\Phi(0, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u(0, t) = \mu(t)$, равенству $\Phi_x(0, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u_x(0, t) = \mu(t)$, равенству $\Phi(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$, равенству $\Phi_x(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$.

В этом параграфе будет введена функция $\underline{\mu}(t)$, совпадающая с $\mu(t)$ при $t \geq 0$ и равная нулю, при $t < 0$. Введена также функция $\widehat{\underline{\mu}}(t) = \int_0^t \underline{\mu}(\tau) d\tau$. В этом параграфе будет введено как основное множество

$$\Omega = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| \left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| + 1 \leq m \leq m_0, \left| \sum_{k=0}^n p_k - 2p_j \right| \leq m, j = \overline{0, n} \right\}, \quad (7)$$

так и вспомогательные производные множества

$$\widehat{\Omega} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| -1 \leq m \leq m_0, 1 - m_0 \leq \sum_{k=0}^n p_k \leq m_0 + 1, i = \overline{0, n} \right. \right\}; \quad (8)$$

$$\widehat{\Omega}^{m+1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m-1, p_0, \dots, p_n) \in \widehat{\Omega} \right. \right\}; \quad (9)$$

$$\widehat{\Omega}^{m-1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m+1, p_0, \dots, p_n) \in \widehat{\Omega} \right. \right\}; \quad (10)$$

$$\widehat{\Omega}^{p_k-1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k+1, \dots, p_n) \in \widehat{\Omega} \right. \right\}; \quad (11)$$

$$\widehat{\Omega}^{p_k+1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k-1, \dots, p_n) \in \widehat{\Omega} \right. \right\}. \quad (12)$$

Решения граничной задачи для волнового уравнения обычно представляются в виде линейной комбинации граничных функций с некоторыми коэффициентами. Дальнейшие параграфы будут содержать алгоритмы поиска вещественных чисел, которые будут использоваться в этих линейных комбинациях. Данные коэффициенты будут использованы для записи решения задач (1.1), (1.2), (1.3)–(1.6).

Для задачи (1.1), (1.2), (1.3) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \setminus \{ \vec{0} \}, \quad a_{\vec{0}} = 1,$$

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (13)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Для задачи (1.1), (1.2), (1.4) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \setminus \{ \vec{0} \}, \quad a_{\vec{0}} = -1.$$

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (14)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Для задачи (1.1), (1.2), (1.5) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \setminus \{\vec{0}\}, \quad a_{\vec{0}} = 1,$$

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (15)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Для задачи (1.1), (1.2), (1.6) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \setminus \{\vec{0}\}, \quad a_{\vec{0}} = -1.$$

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (16)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Подсчет совершается по значениям связанным с первой координатой m . Коэффициенты $a_{\bar{p}}$ при неположительных m известны и равны нулю кроме разве что точки $\bar{p} = \vec{0}$.

Параграф 2 посвящен решению задачи в случае краевого условия первого рода на левом конце и нелокального условия первого рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 1. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0, T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет

единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\underline{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \underline{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (17)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = 1,$$

где множество Ω определено (7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено (8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (18)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Параграф 3 посвящен решению задачи в случае краевого условия первого рода на левом конце и нелокального условия второго рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 2. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0, T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1.1), (1.2), (1.4) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\underline{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \underline{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (19)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = 1,$$

где множество Ω определено (7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено (8) Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (20)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Параграф 4 посвящен решению задачи в случае краевого условия второго рода на левом конце и нелокального условия первого рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 3. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0, T]$, смешанная задача (1.1), (1.2), (1.5) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = -\widehat{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\widehat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \widehat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (21)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = -1,$$

где множество Ω определено (7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено (8) Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (22)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Параграф 5 посвящен решению задачи в случае краевого условия второго рода на левом конце и нелокального условия второго рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 4. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0, T]$, смешанная задача (1.1), (1.2), (1.6) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = -\widehat{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\widehat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \widehat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (23)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = -1,$$

где множество Ω определено (7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено (8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (24)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Параграф 6 посвящен доказательству основной теоремы 1 параграфа 2. Доказательство состоит из четырех подразделов, где первый, касается доказательства единственности решения смешанных задач (1.1), (1.2), (1.3) - (1.4). В рамках этого раздела используется

Теорема 5. (Ильин В.А. [35]) Для любого фиксированного $T > 0$ существует не более одного обобщенного решения каждой из смешанных задач (1.1), (1.2), (1.3) - (1.6) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Второй раздел подтверждает выполнение нелокального граничного условия для задачи (1.1), (1.2), (1.3). Третий раздел завершает доказательство основной теоремы параграфа 2, доказывая, что полученное решение согласуется с определением 1 и принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. В финальном разделе приводится схема доказательства для случая нелокального граничного условия второго

рода на правом конце. В рамках этого параграфа приводятся только те моменты, которые отличаются для случая нелокального граничного условия первого рода.

Параграф 7 посвящен доказательству основной теоремы 3 параграфа 4. Доказательство состоит из четырех подразделов, где первый, касается доказательства единственности решения смешанных задач (1.1), (1.2), (1.5) - (1.6). Второй раздел подтверждает выполнение нелокального граничного условия для задачи (1.1), (1.2), (1.5). Третий раздел завершает доказательство основной теоремы параграфа 3, доказывая, что полученное решение согласуется с определением 1 и принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. В финальном разделе приводится схема доказательства для случая нелокального граничного условия второго рода на правом конце. В рамках этого параграфа приводятся только те части доказательства, которые отличаются для случая нелокального граничного условия первого рода.

Таким образом в первой главе в явном виде получены решения смешанных нелокальных задач (1.1), (1.2), (1.3)-(1.6) для произвольных весовых параметров α_i , произвольных внутренних точек x_i из интервала $(0, l)$, где $i = \overline{0, n}$ и произвольного рассматриваемого времени T . Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [26], [31] [32].

Глава 2 посвящена критерию принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения.

Параграф 1 содержит уже известные результаты о принадлежности решения задачи для волнового уравнения функциональным пространствам. Как и в первой главе рассматривается в прямоугольнике $Q_T = [0 \leq x \leq X] \times [0 \leq t \leq T]$ обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (25)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (26)$$

и на этот раз с граничными условиями первого рода на левом конце и закреплении на правом

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(X, t) = 0. \quad (27)$$

Отметим, что во второй главе используется иное обозначение длинны рассматриваемого участка. Это сделано, чтобы использовать обозначение l для верхнего индекса пространства W_p^l .

Параграф 2 содержит две теоремы. Первая определяет необходимое условие принадлежности пространству Соболева

Теорема 6. *Для того чтобы обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи (2.1) - (2.3) принадлежало классу $W_p^l(Q_T)$ при целых $l \geq 1, p \geq 1$ необходимо, чтобы принадлежащая классу $L_p[0, T]$ граничная функция $\mu(t)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ принадлежала классу $W_p^l[0, T - \varepsilon]$.*

В следующей теореме непосредственно сформулирован критерий принадлежности решения рассматриваемой задачи классу W_p^l .

Теорема 7. *Если при фиксированных $T > 0$ и $p \geq 1$ граничная функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_1[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$, то для принадлежности обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x, t)$ смешанной задачи (2.1) - (2.3) к классу $W_p^l(Q_T)$ при $l \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\mu(t)$ имела на $0 < t < T$ обобщенную производную $\mu^{(l)}(t)$, и чтобы существовал интеграл*

$$\int_0^T (T - t) |\mu^{(l)}(t)|^p dt \quad (28)$$

Стоит отметить, что приведенных две теоремы отличаются от теорем из работы [36] лишь классом, для которого исследуется принадлежность решения. Это и составляет основное содержимое исследования.

Результаты **главы 2** были опубликованы в работе [28], [29].

Глава 3 посвящена вопросам разрешимости смешанных задач в прямоугольнике $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$u_{tt}(x, t) - Lu(x, t) = 0, \quad (29)$$

где

$$Lu := u_{xx} - au, a \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \text{ при } x \in [0, l] \quad (31)$$

и с граничными условиями

$$u(0, t) = \mu(t), u(l, t) = 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad (32)$$

предполагается, что граничная функция μ принадлежит классу $L_p[0, T]$ при $p \geq 1$. С помощью явного аналитического вида решения из класса W_2^1 строится решение из класса L_p . Где решение понимается в смысле

Определение 2. *Обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (3.1)-(3.4) назовем функцию $u \in L_p(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t)] dx dt = \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt \quad (33)$$

для любой функции $\Phi \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Phi(x, T) \equiv 0$, $\Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$ и условиям $\Phi(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Параграф 1 посвящен доказательству теоремы единственности, сформулированной в виде

Теорема 8. *Может существовать не более одного обобщенного из класса $L_1(Q_T)$ решения смешанной задачи (3.1)-(3.4).*

Данная теорема вытекает из полноты собственных функций двух дифференциальных операторов, описывающих телеграфное уравнение. В **параграфе 2** показывается существование решения задачи, что также формулируется в виде

Теорема 9. *Для любых фиксированных $T > 0$, $a \geq 0$ и $p \geq 1$ существует обобщенное решение из класса $L_p(Q_T)$ смешанной задачи (3.1)-(3.4), определяемое равенством*

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n \left[\underline{\mu}(t - x - 2kl) - cx \int_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right] - \\ - \sum_{k=1}^{n+1} \left[\underline{\mu}(t + x - 2kl) - cx \int_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right], \quad (34)$$

где $J_1(x)$ функция Бесселя первого рода, $c := \sqrt{a}$, n - наименьший из номеров, удовлетворяющих неравенству $T \leq 2l(n+1)$, а символ $\underline{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t \geq 0$ и равную нулю при $t < 0$.

Доказательство, приведенное в этом параграфе, опирается на идею о том, что при переходе граничной функции из класса W_2^1 в класс L_p решение так же переходит из класса W_2^1 в класс L_p .

Результаты **главы 3** были опубликованы в работе [27],[30].

В **Заключении 3** приводятся основные полученные результаты, подводятся итоги проведенной работы и описываются возможные направления для дальнейших исследований.

Глава 1

Смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и граничными условиями общего вида

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [26], [31] [32].

1.1. Постановка задачи и основные определения

В начале параграфа введем прямоугольник $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$, на котором будем рассматривать дальнейшие задачи. На этом прямоугольнике определим введенный В. А. Ильиным в [34] класс функций $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ (ниже определение из этой работы).

Определение 3. *Обобщенная функция двух переменных $u(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если у функции $u(x, t)$ существует непрерывный след в замкнутом прямоугольнике Q_T , и существуют в этом прямоугольнике две обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, принадлежащие классу $L_2(Q_T)$, как функции двух переменных, и кроме того, они принадлежат классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при всех $t \in [0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при всех $x \in [0, l]$, как функции одной переменной. [34]*

В рамках этой главы будем искать обобщенные из пространства функций

$\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решения смешанных задач для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.1)$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

И одним из следующих краевых условий

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t) \quad (1.4)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad (1.5)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t) \quad (1.6)$$

где n – целое неотрицательное число, x_k – внутренние точки интервала $(0, l)$ при $k = \overline{0, n}$, α_k – произвольные вещественные постоянные, $k = \overline{0, n}$. Граничная функция $\mu(t)$ – произвольная из класса $L_2[0, T]$ в случае (1.5) и (1.6), а в случае (1.3) и (1.4) $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $W_2^1[0, T]$ с дополнительным условием согласования в начальный момент времени $\mu(0) = 0$.

Определение 4. Обобщенным из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решением смешанной задачи для волнового уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) и с одной из совокупностей граничных и нелокальных условий (1.3)–(1.6) называется функция

$u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = \\ & = \begin{cases} - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt, & \text{в случае условия (1.3), (1.5) ;} \\ \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u_x(x_k, t) \Phi(l, t) dt, & \text{в случае условия (1.4), (1.6) ;} \end{cases} + \\ & \quad + \begin{cases} \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt, & \text{в случае условия (1.3), (1.4) ;} \\ - \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt, & \text{в случае условия (1.5), (1.6)} \end{cases} \end{aligned}$$

в котором $\Phi(x, t)$ — произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x, T) = 0$, $\Phi_t(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, равенству $\Phi(0, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u(0, t) = \mu(t)$, равенству $\Phi_x(0, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u_x(0, t) = \mu(t)$, равенству $\Phi(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$, равенству $\Phi_x(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$ в случае условия $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$.

Из работ В.А. Ильина [37], [15], [16] следует, что каждая из рассматриваемых смешанных задач для уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) и с одной из совокупностей граничных и нелокальных условий (1.3)–(1.6) может иметь только одно обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение в смысле данного определения.

Для того, чтобы расширить область определения граничной функции, обозначим через $\underline{\mu}(t)$ функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при неотрицательных $t \geq 0$ и равную нулю, при всех $t < 0$. Для случая граничных условий (1.5)–(1.6) введем также функцию $\hat{\underline{\mu}}(t) = \int_0^t \underline{\mu}(\tau) d\tau$. Стоит заметить, что $\hat{\underline{\mu}}(t)$ обращается в ноль при отрицательных t .

Из того, как были введены вспомогательные граничные функции можно сделать вывод, что если функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_2[0, T]$, то $\hat{\mu}(t)$, в силу интегрального представления, принадлежит классу $W_2^1(-\infty, T]$. Кроме того, из принадлежности функции $\mu(t)$ пространству $W_2^1[0, T]$ и выполнения равенства $\mu(0) = 0$ вытекает принадлежность расширенной функции $\underline{\mu}(t)$ классу $W_2^1(-\infty, T]$.

Далее для произвольных вещественных $T > 0$ и $l > 0$ выберем натуральное число m_0 такое, что $T < l + (m_0 - 1)(l - x_{max})$ (такое m_0 существует, так как выражение $l - x_{max}$ положительно), введем важное множество, которое потребуется для определения решения

$$\Omega = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| \left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| + 1 \leq m \leq m_0, \left| \sum_{k=0}^n p_k - 2p_j \right| \leq m, j = \overline{0, n} \right. \right\} \quad (1.7)$$

Введем вспомогательные множества, которые потребуются для дальнейшего доказательства

$$\hat{\Omega} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| -1 \leq m \leq m_0, 1 - m_0 \leq \sum_{k=0}^n p_k \leq m_0 + 1, i = \overline{0, n} \right. \right\} \quad (1.8)$$

$$\hat{\Omega}^{m+1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m-1, p_0, \dots, p_n) \in \hat{\Omega} \right. \right\} \quad (1.9)$$

$$\hat{\Omega}^{m-1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m+1, p_0, \dots, p_n) \in \hat{\Omega} \right. \right\} \quad (1.10)$$

$$\hat{\Omega}^{p_k-1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k+1, \dots, p_n) \in \hat{\Omega} \right. \right\} \quad (1.11)$$

$$\hat{\Omega}^{p_k+1} = \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k-1, \dots, p_n) \in \hat{\Omega} \right. \right\}. \quad (1.12)$$

1.2. Решение задачи для волнового уравнения с условием

Дирихле на левом конце и нелокальным условием

вида $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ на правом

Ответ для нелокальной задачи

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.13)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.14)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad (1.15)$$

дает следующая

Теорема 10. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0, T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1.13), (1.14), (1.15) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\underline{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \underline{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (1.16)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = 1,$$

где множество Ω определено в (1.7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено в (1.8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (1.17)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Подробное доказательство этой теоремы, по причине большого объема будет разобрано в параграфе 1.6

1.3. Решение задачи для волнового уравнения с условием Дирихле на левом конце и нелокальным условием вида $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ на правом

Ответ для нелокальной задачи

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.18)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.19)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t) \quad (1.20)$$

дает следующая

Теорема 11. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0, T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1.18), (1.19), (1.20) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\underline{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \underline{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (1.21)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\overline{0}\}, \quad a_{\overline{0}} = 1,$$

где множество Ω определено в (1.7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено в (1.8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (1.22)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Доказательство этой теоремы будет разобрано в параграфе 1.6

1.4. Решение задачи для волнового уравнения с условием Неймана на левом конце и нелокальным условием вида $u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ на правом

Ответ для нелокальной задачи

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.23)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.24)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad (1.25)$$

дает следующая

Теорема 12. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0, T]$, смешанная задача (1.23), (1.24), (1.25) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = -\widehat{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\widehat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \widehat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (1.26)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = -1,$$

где множество Ω определено в (1.7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено в (1.8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}, \quad (1.27)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Доказательство этой теоремы будет подробно разобрано в параграфе 1.7

1.5. Решение задачи для волнового уравнения с условием Неймана на левом конце и нелокальным условием вида $u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ на правом

Ответ для нелокальной задачи

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.28)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.29)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t) \quad (1.30)$$

дает следующая

Теорема 13. Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in (0, l)$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $k = \overline{0, n}$ и произвольной функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0, T]$, смешанная задача (1.28), (1.29), (1.30) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой

$$u(x, t) = -\widehat{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\widehat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \widehat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (1.31)$$

где $a_{\bar{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = -1,$$

где множество Ω определено в (1.7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено в (1.8). Для остальных значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}, \quad (1.32)$$

где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Доказательство этой теоремы будет разобрано в параграфе 1.7

1.6. Доказательство теорем о существовании и единственности решения задачи для уравнения колебания струны с условием Дирихле на левом конце

1.6.1. Единственность

Для начала отметим, что единственность каждой из задач (1.1), (1.2), (1.3) - (1.6) доказывает

Теорема 14. (Ильин В.А. [35]) Для любого фиксированного $T > 0$ существует не более одного обобщенного решения каждой из смешанных задач (1.1), (1.2), (1.3) - (1.6) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Идея доказательства этой теоремы для задачи (1.1), (1.2), (1.3) основана на замене нелокального условия вида

$$u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad \text{на} \quad u(l, t) = \widehat{v}(t),$$

где функция $\widehat{v}(t)$ совпадает с $\sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ при $t \geq 0$, а при $t < 0$ доопределена значением ноль. Таким образом нелокальная задача рассматривается как локальная с закреплением на левом конце и условием первого рода на правом. Решение этой задачи в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ рассматривалось, например, в работе [38] и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{v}(t + x - l - 2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{v}(t - x + l - 2lm)$$

В свою очередь для случая (1.1), (1.2), (1.4) при замене

$$u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad \text{на} \quad u_x(l, t) = \widehat{v}(t),$$

где функция $\widehat{\nu}(t)$ совпадает с $\sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ при $t \geq 0$, а при $t < 0$ доопределена значением ноль. Учитывая, что решение известная функция, которая имеет первую обобщенную производную

$$u_x(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \widehat{\nu}(t + x - l - 2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \widehat{\nu}(t - x + l - 2lm)$$

В финале доказывается, что в таком случае функция $u(x, t)$ для случая (1.1), (1.2), (1.3) и $u_x(x, t)$ для случая (1.1), (1.2), (1.4) обращаются в 0 на $2ln \leq t \leq 2l(n+1)$, где $n \geq 0$. Стоит отметить, что в работе [35] доказана единственность для случая, когда коэффициенты α_k зависят от времени t .

1.6.2. Выполнение нелокального граничного условия

Далее проведем подробное доказательство существования решения задачи из теоремы 10 для смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3), для этого применяется модифицированная схема доказательства работы [17]. Для этого возьмем

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{\bar{0}\}, \quad a_{\bar{0}} = 1.$$

Для определения значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ воспользуемся рекурсивным соотношением

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-} \quad (1.33)$$

Где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Подсчет будем совершать по уровням, связанным с координатой m . Для начала отметим, что коэффициенты $a_{\bar{p}}$ при $m = 0, m = -1$, в силу выбора множества Ω , равны нулю кроме индекса $\bar{p} = \bar{0}$. Отсюда согласно рекуррентному соотношению можно найти коэффициенты $a_{\bar{p}}$ при $m = 1$ и т.д. Осуществить данный подсчет возможно, так как на каждом этапе подсчета известны значения коэффициентов $a_{\bar{p}}$ на двух предыдущих слоях в $\widehat{\Omega}$. Следует сделать замечание,

что соотношение (1.33) выполнено на любом подмножестве $\widehat{\Omega}$, в том числе и на $\Omega_0 = \widehat{\Omega} \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| \left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| \leq m \leq m_0 - 1, \left| \sum_{k=0}^n p_k - 2p_j \right| + 1 \leq m, j = \overline{0, n} \right\} \right\}$

Введем также множества

$$\begin{aligned} \Omega_0^{m+1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m-1, p_0, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{m-1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m+1, p_0, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{p_k-1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k+1, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{p_k+1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k-1, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \end{aligned}$$

.

Далее покажем, что решение задачи, определяемое формулой (1.16), где коэффициенты $a_{\bar{p}}$ найдены по описанному выше алгоритму, удовлетворяет граничным условиям (1.3). Подставляя в (1.16) $x = 0$, легко проверяем обнуление суммы и выполнение левого граничного условия $u(0, t) = \mu(t)$ при всех $t \in [0, T]$.

Далее, имея неравенство $\left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| + 1 \leq m$, легко проверяется выполнение начальных условий $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$ при подстановке в $t = 0$ в формулу (1.16)

Осталось показать, что выполняется нелокальное граничное условие из (1.3). Для этого введем новые обозначения и перепишем формулу (1.16) в удобном виде

$$u(x, t) = \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} a_{\bar{p}} \mu \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}} \mu \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \quad (1.34)$$

где

$$b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}} \quad \text{при} \quad \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \vec{0}, \quad b_{\vec{0}} = 0$$

Далее подставив полученную формулу (1.34) в нелокальное условие из

(1.3), получим соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Из этого тождества видно, что аргументы левой и правой части очень похожи, отличие составляет лишь множитель при параметре l , а также слагаемое $\pm x_j$. Воспользуемся множествами $\widehat{\Omega}^{m\pm 1}$, $\widehat{\Omega}^{p_k\pm 1}$, введенными выше, для того, чтобы сдвинуть мульти-индексы и получить единую вид аргументов функций, входящих в формулу $t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k)$ и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m+1}} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m-1}} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j+1}} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j-1}} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \quad (1.35) \end{aligned}$$

Теперь необходимо показать, что соотношение (1.35) является тождеством при любом вещественном $t \in [0, T]$. Учитывая, что множество $\Omega_0 \subset \widehat{\Omega}^{m+1} \cap \widehat{\Omega}^{m-1} \cap \widehat{\Omega}^{p_k+1} \cap \widehat{\Omega}^{p_k-1}$ можно разбить соотношение (1.35) на две части: когда $\bar{p} \in \Omega_0$ и наоборот

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \\ & + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Далее в силу (1.33), помня, что $b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}}$, а также путем перегруппировки слагаемых мы можем избавиться от случаев, когда $\bar{p} \in \Omega_0$ следующим образом

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}_m^-} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_m^+} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \\
& - \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}_j^-} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_j^+} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] = \\
& = \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} \left[a_{\bar{p}_m^-} + b_{\bar{p}_m^+} - \sum_{j=0}^n \alpha_j (a_{\bar{p}_j^-} + b_{\bar{p}_j^+}) \right] \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем переписать соотношение (1.35) в сокращенном виде, избавившись от сумм по мульти-индексу $\bar{p} \in \Omega_0$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}_m^-} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{m-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}_m^+} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}_j^-} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}^{p_j-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}_j^+} \mu \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

И вновь вернемся к несмещенному множеству $\widehat{\Omega}$, отметив, что при этом вычитаемое множество Ω_0 наоборот станет смещенным для каждой суммы. В итоге получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m-1}} a_{\bar{p}} \mu \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m+1}} b_{\bar{p}} \mu \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega_0^{p_j-1}} a_{\bar{p}} \mu \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega_0^{p_j+1}} b_{\bar{p}} \mu \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Теперь, учитывая определение множества Ω_0 , а также тот факт, что ненулевые значения $a_{\bar{p}}$ опираются на множество Ω , получается, что вторая сумма в левой части тождества пропадает, а в оставшихся суммах коэффициенты $a_{\bar{p}}$ и $b_{\bar{p}}$ не равны нулю только на последних двух уровнях по m координате, обозначим эти слои, как отдельные множества и перепишем равенство в новом виде, с учетом вышесказанного.

$$V = \Omega \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \middle| m = m_0 \right\}$$

$$W = \Omega \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \middle| m = m_0 - 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in V \cup W} a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in V} a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in W} b_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \quad (1.37) \end{aligned}$$

Далее вновь сдвинем множества V и W , таким образом, чтобы аргументы функции $\underline{\mu}(t)$ был одинаковыми в каждой сумме

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in V^{m+1} \cup W^{m+1}} a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in V^{p_j+1}} a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in W^{p_j-1}} b_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right], \quad (1.38) \end{aligned}$$

где сдвиги множеств V и W определены аналогично сдвигам $\hat{\Omega}$. Далее необходимо заметить, что при введенных ограничениях на значение переменной

$$t \leq T < l + (m_0 - 1)(l - x_{\max}) \Rightarrow t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \leq l + (m_0 - 1)(l - x_{\max}) - ml.$$

Раскроем скобки и получим

$$l + (m_0 - 1)(l - x_{\max}) - ml = m_0 l - ml + (1 - m_0)x_{\max} \leq 0,$$

для всех множеств, по которым ведется суммирование (в этих множествах коэффициенты m начинаются со значений больше или равных m_0). Следовательно значения аргументов всех функций $\underline{\mu}(t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k))$ будут неположительными. Отсюда, можно заключить, что значение этих функций будет равно нулю. Таким образом доказано тождество (1.35), а следовательно, доказано выполнение нелокального граничного условия (1.3).

1.6.3. Существование обобщенного решения

Далее покажем, что функция двух переменных $u(x, t)$, определяемая формулой (1.16) непосредственно является решением смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3) и удовлетворяет определению 4, введенному выше. Для этого покажем, что $u(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, а также выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt, - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt, \quad (1.39)$$

в котором $\Phi(x, t)$ — произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x, T) = 0$, $\Phi_t(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, и равенствам $\Phi(0, t) = 0$, $\Phi(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Данное доказательство повторяет идею в работы [17]. Начнем с того, что убедимся в принадлежности функции $u(x, t)$, определенной формулой (1.16) классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Для этого достаточно отметить, что само обобщенное решение $u(x, t)$ является линейно комбинацией функций от аргумента вида $t + x + const$ или $t - x + const$, где сами функции $\underline{\mu}(t)$ принадлежат классу $W_2^1(-\infty, T)$.

Далее докажем равенство интегралов (1.39), но для этого нам потребуется техническое равенство

$$\begin{aligned} & u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] = \\ & = [u(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [u(x, t) \Phi_x(x, t)]_x + u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом соотношение (1.39) может быть представлено в виде

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = I_1 + I_2, \quad (1.40)$$

где в свою очередь интегралы равны

$$I_1 = \int_0^T \int_0^l [u(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [u(x, t) \Phi_x(x, t)]_x dx dt, \quad (1.41)$$

$$I_2 = \int_0^T \int_0^l u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt \quad (1.42)$$

теперь интеграл (1.41) преобразуем в криволинейный интеграл второго рода с помощью формулы Грина

$$\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx dt = \oint_C P dx + Q dt.$$

Обозначив C как границу прямоугольника Q_T и приняв

$$P = -u(x, t) \Phi_t(x, t), \quad Q = -u(x, t) \Phi_x(x, t).$$

Кроме того, необходимо учитывать тот факт, что $\Phi_t(x, T) = 0, u(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, а также $u(0, t) = \mu(t), u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ при $0 \leq t \leq T$. Для интеграла I_1 получаем

$$I_1 = - \int_0^T u(l, t) \Phi_x(l, t) dt - \int_T^0 u(0, t) \Phi_x(0, t) dt = \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt, - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt \quad (1.43)$$

Таким образом получается, что первый интеграл I_1 равен правой части формулы (1.39) и остается доказать, что интеграл I_2 обращается в ноль. Введем вспомогательную функцию

$$v(x, t) = -\underline{\mu}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[\underline{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \underline{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right],$$

которая связана с решением нелокальной задачи (1.1), (1.2), (1.3) следующими тождествами

$$u_x(x, t) = v_t(x, t), \quad u_t(x, t) = v_x(x, t). \quad (1.44)$$

Данные равенства позволяют записать формулу для второго интеграла (1.58) в виде

$$I_2 = \int_0^T \int_0^l v_t(x, t) \Phi_x(x, t) - v_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt. \quad (1.45)$$

Вычислим данный интеграл (1.45) как повторный, причем начнем вычислять по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_0^l v(x, T) \Phi_x(x, T) - v(x, 0) \Phi_x(x, 0) dx - \int_0^T \int_0^l v(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^T v(l, t) \Phi_t(l, t) - v(0, t) \Phi_t(0, t) dt + \int_0^T \int_0^l v(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Далее необходимо заметить, что вторая смешанная производная функции $\Phi(x, t)$ не зависит от порядка и дифференцирования. Следовательно двойные интегралы в данной формуле взаимно уничтожаются, и кроме того, в силу равенств $\Phi_x(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, $\Phi_t(0, t) = 0$, $\Phi_t(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, получаем

$$I_2 = - \int_0^l v(x, 0) \Phi_x(x, 0) dx. \quad (1.47)$$

Теперь вычислим интеграл (1.47) по частям:

$$I_2 = v(0, 0) \Phi(0, 0) - v(l, 0) \Phi(l, 0) + \int_0^l v_x(x, 0) \Phi(x, 0) dx,$$

отсюда в силу равенств $\Phi(l, 0) = 0$, $\Phi(0, 0) = 0$, $v_x(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, получаем то, что и требовалось доказать:

$$I_2 = 0. \quad (1.48)$$

Учитывая ранее полученные формулы (1.40), (1.43), (1.48), получаем справедливость тождества (1.39). Таким образом, доказательство Теоремы 10 для смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3) завершено.

1.6.4. Схема доказательства теорем о существовании и единственности решения для теоремы 11

Начнем приведение схемы доказательства теоремы 11, сформулированной для задачи (1.1),(1.2),(1.4)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t), \end{aligned}$$

Будем отмечать, только те моменты, которые расходятся с доказательством для теоремы 10 .

Для начала отметим, что теорема 14 о единственности сформулирована сразу для четырех нелокальных задач. И потому единственность решения для всех теорем 10 - 11 будем считать доказанной.

Решение для задачи (1.1),(1.2),(1.4) имеет такой же вид, как и для задачи (1.1),(1.2),(1.3), необходимо лишь отметить, что для нахождения коэффициентов $a_{\bar{p}}$. Для данной задачи необходимо использовать следующее соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-}.$$

Итак, при подстановке решения

$$u(x, t) = \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} a_{\bar{p}} \mu \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}} \mu \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right)$$

где

$$b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}} \quad \text{при} \quad \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \vec{0}, \quad b_{\vec{0}} = 0$$

в нелокальное условие

$$u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$$

получается соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} -a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} -a_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + b_{\bar{p}} \underline{\mu} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Иными словами, при коэффициентах $a_{\bar{p}}$ стоят минусы. Что в силу измененной рекуррентной формулы приводит к тому, что когда $\bar{p} \in \Omega_0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} -a_{\bar{p}_m} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_m} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \\ & - \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \Omega_0} -a_{\bar{p}_j} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_j} \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] = \\ & = \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} \left[-a_{\bar{p}_m} + b_{\bar{p}_m} + \sum_{j=0}^n \alpha_j (a_{\bar{p}_j} - b_{\bar{p}_j}) \right] \underline{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для сумм, в которых $\bar{p} \notin \Omega_0$ проверка выполнения нелокального условия теорем 10 и 11 полностью совпадают. Учитывая, что решения имеют одинаковый вид, остальные части доказательства полностью совпадают.

1.7. Доказательство теорем о существовании и единственности решения задачи для уравнения колебания струны с условием Неймана на левом конце

1.7.1. Единственность

Единственность для случаев (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6) все также опирается на теорему 14. Стоит только отметить, что для случая (1.1), (1.2), (1.5) при замене

$$u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t) \quad \text{на} \quad u(l, t) = \widehat{\nu}(t),$$

где функция $\widehat{\nu}(t)$ совпадает с $\sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ при $t \geq 0$, а при $t < 0$ доопределена значением ноль, решение есть известная функция, которая имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \widehat{v}(t + x - l - 2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \widehat{v}(t - x + l - 2lm).$$

Для случая (1.1), (1.2), (1.6), при замене

$$u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t) \quad \text{на} \quad u_x(l, t) = \widehat{v}(t),$$

где функция $\widehat{v}(t)$ совпадает с $\sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$ при $t \geq 0$, а при $t < 0$ доопределена значением ноль, решение есть известная функция, которая имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{v}(t + x - l - 2lm) - \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{v}(t - x + l - 2lm).$$

В финале доказывается, что в таком случае функция $u(x, t)$ для случая (1.1), (1.2), (1.5) и $u_x(x, t)$ для случая (1.1), (1.2), (1.6) обращаются в 0 на $2ln \leq t \leq 2l(n+1)$, где $n \geq 0$.

1.7.2. Выполнение нелокального граничного условия

Далее проведем аналогичное параграфу 1.6 доказательство существования решения задачи из теоремы 12 для смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.5). Для этого ВОЗЬМЕМ

$$a_{\bar{p}} = 0 \text{ при } \bar{p} \in (\widehat{\Omega} \setminus \Omega) \setminus \{0\}, \quad a_{\bar{0}} = -1.$$

Для определения значений $a_{\bar{p}_m^+}$ при $\bar{p}_m^+ \in \Omega$ воспользуемся рекурсивным соотношением

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} + a_{\bar{p}_k^-}) - a_{\bar{p}_m^-} \quad (1.49)$$

Где $a_{\bar{p}_m^\pm} = a_{(m \pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, а $a_{\bar{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots, p_n)}$.

Подсчет все также будем совершать по слоям, связанным с координатой m . Отмечая, что коэффициенты $a_{\bar{p}}$ при $m \in \{-1, 0\}$ известны и равны нулю

кроме индекса $\bar{p} = \bar{0}$. Следует сделать замечание, что соотношение (1.49) выполнено на любом подмножестве $\widehat{\Omega}$, в том числе и на

$$\Omega_0 = \widehat{\Omega} \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| \left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| \leq m \leq m_0 - 1, \left| \sum_{k=0}^n p_k - 2p_j \right| + 1 \leq m, j = \overline{0, n} \right. \right\}.$$

Еще раз определим множества

$$\begin{aligned} \Omega_0^{m+1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m-1, p_0, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{m-1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m+1, p_0, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{p_k-1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k+1, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \\ \Omega_0^{p_k+1} &= \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \left| (m, p_0, \dots, p_k-1, \dots, p_n) \in \Omega_0 \right. \right\} \end{aligned}$$

.

Далее докажем, что решение, определяемое формулой (1.26), где коэффициенты $a_{\bar{p}}$ найдены по описанному выше рекуррентному тождеству, удовлетворяет граничным условиям (1.5). Подставляя в (1.26) $x = 0$, учитывая, что $(-\widehat{\mu}(t-x))'_x = \underline{\mu}(t-x)$ легко проверяем обнуление всех членов входящих в сумму. Таким образом, доказано выполнение левого граничного условия $u_x(0, t) = \mu(t)$ при $t \in [0, T]$.

Выполнение начальных условий $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$ легко проверяется при учете неравенства $\left| \sum_{k=0}^n p_k - 1 \right| + 1 \leq m$ и подстановке в $t = 0$ в формулу (1.26)

Далее покажем, что нелокальное условие из (1.5) обращается в тождество при подстановке решения (1.26). Для этого перепишем формулу (1.26) в удобном виде

$$u(x, t) = \sum_{\bar{p} \in \widehat{\Omega}} a_{\bar{p}} \widehat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \widehat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right), \quad (1.50)$$

где

$$b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}} \quad \text{при} \quad \bar{p} \in \widehat{\Omega} \setminus \vec{0}, \quad b_{\vec{0}} = 0$$

Далее подставив полученную формулу (1.50) в нелокальное условие из (1.5) и получим соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования полностью повторяют действия параграфа 1.6, так как решение, записанное в таком виде отличается лишь тем, что используется интеграл от граничной функции, а также знаком перед коэффициентами $b_{\bar{p}}$.

Снова воспользуемся множествами $\hat{\Omega}^{m \pm 1}$, $\hat{\Omega}^{p_k \pm 1}$, сдвинем мульти-индексы. В результате получим единый вид аргументов функций, входящих в формулу $t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k)$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m+1}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m-1}} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j+1}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j-1}} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \quad (1.51) \end{aligned}$$

Вновь покажем, что полученное равенство (1.51) выполняется при любом $t \in [0, T]$. Воспользуемся тем, что множество Ω_0 входит в пересечение множеств $\hat{\Omega}^{m+1} \cap \hat{\Omega}^{m-1} \cap \hat{\Omega}^{p_k+1} \cap \hat{\Omega}^{p_k-1}$ и разобьем соотношение (1.35) две части: когда $\bar{p} \in \Omega_0$ и наоборот

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \\ & + \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Далее в силу (1.49), помня, что $b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}}$, получим сокращение сумм по множеству Ω_0 .

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}_m^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_m^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \\
& - \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \Omega_0} a_{\bar{p}_j^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_j^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] = \\
& = \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} \left[a_{\bar{p}_m^-} - b_{\bar{p}_m^+} - \sum_{j=0}^n \alpha_j (a_{\bar{p}_j^-} - b_{\bar{p}_j^+}) \right] \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Остается исследовать соотношение (1.51) для оставшихся сумм

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}_m^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{m-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}_m^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j+1} \setminus \Omega_0} a_{\bar{p}_j^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}^{p_j-1} \setminus \Omega_0} b_{\bar{p}_j^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Вновь вернемся к несмещенному множеству $\hat{\Omega}$, отметив, что при этом вычитаемое множество индексов Ω_0 станет смещенным для каждой суммы. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m-1}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m+1}} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{p_j-1}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{p_j+1}} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Далее, учитывая то, как были введены множества $\hat{\Omega}$ и Ω_0 , получаем, что

$$\left(\hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m+1} \right) \cap \Omega = \emptyset \Rightarrow \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m+1}} b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = 0,$$

так как все коэффициенты $b_{\bar{p}} = 0$ при $\bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \Omega_0^{m+1}$. При этом в оставшихся суммах по $\bar{p}$ коэффициенты $a_{\bar{p}}$ и $b_{\bar{p}}$ не равны нулю только на последних двух уровнях по координате m , обозначим эти срезы, как отдельные множества

$$V = \Omega \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \middle| m = m_0 \right\}$$

$$W = \Omega \cap \left\{ \bar{p} = (m, p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+2} \middle| m = m_0 - 1 \right\}$$

и перепишем (1.7.2) в новом виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in V \cup W} a_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in V} a_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \sum_{\bar{p} \in W} b_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Проведем унификацию аргументов модифицированной граничной функции к виду $\hat{\underline{\mu}}(t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k))$ путем сдвигов, где смещения множеств V и W введем подобно сдвигам $\hat{\Omega}$ и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in V^{m+1} \cup W^{m+1}} a_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in V^{p_j+1}} a_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in V^{p_j-1}} b_{\bar{p}} \hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Стоит отметить, что при $t \in [0, T]$, а также специального выбора m_0 такого, что $T < (m_0 - 1)(l - x_{max})$, значения аргументов всех функций

$$\hat{\underline{\mu}} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \int_0^{t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k)} \underline{\mu}(\tau) d\tau = 0,$$

так как величины $t - (ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k)$ будут неположительными на сдвигах множеств V и W . Доказательства этого факта можно найти в предыдущем параграфе. Таким образом доказано равенство (1.51), что влечет за собой выполнение правого нелокального граничного условия (1.5).

1.7.3. Существование обобщенного решения

Теперь покажем, что функция $u(x, t)$ определяемая формулой (1.26) непосредственно является решением смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.5) и согласуется с определением 4, введенным выше. Для этого покажем, что $u(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, а также выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = - \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt, \quad (1.55)$$

в котором $\Phi(x, t)$ — произвольная функция из класса $C^2(Q_T)$, удовлетворяющая нулевым финальным условиям $\Phi(x, T) = 0$, $\Phi_t(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, и равенствам $\Phi_x(0, t) = 0$, $\Phi(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Дальнейшие рассуждения существенно повторяют доказательства параграфа 1.6. Убедимся в принадлежности функции $u(x, t)$, определенной формулой (1.26) классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. В силу построения $u(x, t)$ является конечной суммой интегралов граничных функций от аргумента вида $t + x + const$ или $t - x + const$, где сами функции $\widehat{\mu}(t)$ принадлежат пространству $W_2^1(-\infty, T)$, так как являются интегралами от функции $\underline{\mu}(t) \in L_2[-\infty, T]$.

Вновь воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} & u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] = \\ & = [u(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [u(x, t) \Phi_x(x, t)]_x + u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом соотношение (1.55) может быть разбито на два интеграла

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt = I_1 + I_2, \quad (1.56)$$

где в свою очередь интегралы равны

$$I_1 = \int_0^T \int_0^l [u(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [u(x, t) \Phi_x(x, t)]_x dx dt, \quad (1.57)$$

$$I_2 = \int_0^T \int_0^l u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt. \quad (1.58)$$

С помощью формулы Грина преобразуем (1.57) в криволинейный интеграл по замкнутому контуру

$$\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx dt = \oint_C P dx + Q dt.$$

Обозначив C как границу прямоугольника Q_T и приняв

$$P = -u(x, t) \Phi_t(x, t), \quad Q = -u(x, t) \Phi_x(x, t).$$

Кроме того, необходимо учитывать тот факт, что $\Phi_t(x, T) = 0, u(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, а также $\Phi_x(0, t) = 0, u(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u(x_k, t)$ при $0 \leq t \leq T$. Для интеграла I_1 получаем

$$I_1 = - \int_0^T u(l, t) \Phi_x(l, t) dt - \int_T^0 u(0, t) \Phi_x(0, t) dt = - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^T u(x_k, t) \Phi_x(l, t) dt \quad (1.59)$$

Далее покажем, что интеграл $I_2 = - \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt$, для этого воспользуемся методом, использованным в работе [17] и введем вспомогательную функцию

$$v(x, t) = \hat{\underline{\mu}}(t - x) + \sum_{\bar{p} \in \Omega} a_{\bar{p}} \left[-\hat{\underline{\mu}} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) + \hat{\underline{\mu}} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right].$$

$v(x, t)$ отличается от функции $u(x, t)$ лишь знаками, стоящими при $\hat{\mu}(t)$. При этом их частные производные связаны следующими соотношениями

$$u_x(x, t) = v_t(x, t), \quad u_t(x, t) = v_x(x, t). \quad (1.60)$$

Данные равенства позволяют записать формулу для второго интеграла (1.58) в виде

$$I_2 = \int_0^T \int_0^l v_t(x, t) \Phi_x(x, t) - v_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt. \quad (1.61)$$

Вычислим данный интеграл (1.61) как повторный и получим равенство

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_0^l v(x, T) \Phi_x(x, T) - v(x, 0) \Phi_x(x, 0) dx - \int_0^T \int_0^l v(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^T v(l, t) \Phi_t(l, t) - v(0, t) \Phi_t(0, t) dt + \int_0^T \int_0^l v(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Отметим, что двойные интегралы в данной формуле имеют разные знаки и взаимно уничтожаются, и кроме того, в силу равенств $\Phi_x(x, T) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, $\Phi_x(0, t) = 0$, $\Phi_t(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, получаем

$$I_2 = - \int_0^T v(0, t) \Phi_t(0, t) dt. \quad (1.63)$$

Далее приступим к вычислению интеграла (1.63), для этого вновь применим формулу интегрирования по частям:

$$I_2 = -v(0, 0) \Phi(0, 0) + v(0, T) \Phi(0, T) - \int_0^l v_t(0, t) \Phi(0, t) dx,$$

Сделаем обратную замену $v(x, t)$ на функцию $u(x, t)$ в подынтегральном выражении, воспользовавшись соотношениями для производных (1.60)

$$I_2 = -v(0, 0) \Phi(0, 0) + v(0, T) \Phi(0, T) - \int_0^l u_x(0, t) \Phi(0, t) dx.$$

Отсюда, в силу равенств $\Phi(0, T) = 0$, $\Phi(0, 0) = 0$, получаем то, что и требовалось доказать:

$$I_2 = - \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt. \quad (1.64)$$

Учитывая ранее полученные формулы (1.56), (1.59), (1.64), получаем справедливость тождества (1.39). Таким образом, доказательство Теоремы 12 для смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.5) завершено.

1.7.4. Схема доказательства теорем о существовании и единственности решения для теоремы 11

Приведем схематичное доказательство теоремы 13, сформулированной для задачи (1.1), (1.2), (1.6)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) &= \mu(t), \quad u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t), \end{aligned}$$

Как и в случае параграфа 1.6, будем отмечать только те моменты, которые расходятся с доказательством для теоремы 12.

Для начала отметим, что теорема 14 о единственности сформулирована сразу для четырех нелокальных задач. И потому единственность решения для всех теорем 12 - 13 будем считать доказанной.

Решение для задачи (1.1), (1.2), (1.6) имеет такой же вид, как и для задачи (1.1), (1.2), (1.5), необходимо лишь отметить, что для нахождения коэффициентов $a_{\bar{p}}$. Для данной задачи необходимо использовать следующее соотношение

$$a_{\bar{p}_m^+} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (a_{\bar{p}_k^+} - a_{\bar{p}_k^-}) + a_{\bar{p}_m^-}.$$

Вновь используем замену для коэффициентов $a_{\bar{p}}$, где $\bar{p} \in \widehat{\Omega}$, и перепишем решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}} a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right),$$

где

$$b_{\bar{p}} = -a_{\bar{p}} \quad \text{при} \quad \bar{p} \in \hat{\Omega} \setminus \vec{0}, \quad b_{\vec{0}} = 0.$$

Подставим полученное решение в нелокальное граничное условие

$$u_x(l, t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_x(x_k, t)$$

получается соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}} -a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m+1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left((m-1)l + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \hat{\Omega}} -a_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - b_{\bar{p}} \hat{\mu} \left(t - \left(ml - x_j + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Получается, что при всех коэффициентах стоят знаки минус. Воспользуемся рекуррентной формулой и для $\bar{p} \in \Omega_0$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} -a_{\bar{p}_m^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_m^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \\ & - \sum_{j=0}^n \alpha_j \left[\sum_{\bar{p} \in \Omega_0} -a_{\bar{p}_j^-} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) - \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} b_{\bar{p}_j^+} \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) \right] = \\ & = \sum_{\bar{p} \in \Omega_0} \left[-a_{\bar{p}_m^-} - b_{\bar{p}_m^+} + \sum_{j=0}^n \alpha_j (a_{\bar{p}_j^-} + b_{\bar{p}_j^+}) \right] \hat{\mu} \left(t - \left(ml + \sum_{k=0}^n p_k x_k \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для сумм, в которых $\bar{p} \notin \Omega_0$ проверка выполнения нелокального условия теорем 12 и 13 полностью совпадают. Далее следует учитывать, что решения имеют одинаковый вид, и доказательство соответствия решения определению 4 полностью идентичны.

Глава 2

Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [28], [29].

2.1. Постановка задачи и известные результаты

Как и в работах [9], [36], [39] введем обозначение замкнутого прямоугольника

$$Q_T = [0 \leq x \leq X] \times [0 \leq t \leq T].$$

Стоит сделать замечание, что в отличии от предыдущей главы верхняя граница пространственной переменной x обозначена как X . Это сделано, чтобы избежать путаницы в обозначении верхнего индекса класса Соболева W_p^l . Рассматривается обобщенное из пространства $L_p(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \tag{2.1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \tag{2.2}$$

и граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(X, t) = 0 \tag{2.3}$$

В работе [40] сформулирована и доказана теорема, определяющая единственное обобщенное решение задачи (2.1) - (2.3) классе L_p .

Теорема 15. (Ильин В.А., Кулешов А.А.) Для любых фиксированных $T > 0$ и $p \geq 1$ единственное обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи (2.1) - (2.3) определяется равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2lk), \quad (2.4)$$

в котором n - наименьший из номеров, удовлетворяющих условию $n \geq \frac{T}{2l}$, а символ $\underline{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t \geq 0$ и равную нулю при $t < 0$. [40]

В той же работе был сформулирован и доказан критерий принадлежности это решения пространству W_p^1 . Целью данной главы является обобщение полученного критерия на случай, когда требуется, чтобы решение обладало большей гладкостью и лежало в пространстве W_p^l .

2.2. Необходимое и достаточное условие принадлежности решения задачи волнового уравнения пространству Соболева

Прежде чем предъявить критерий, сформулируем необходимое условие принадлежности решения задачи (2.1) - (2.3) классу $W_p^l(Q_T)$.

Теорема 16. Для того чтобы обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи (2.1) - (2.3) принадлежало классу $W_p^l(Q_T)$ при целых $l \geq 1, p \geq 1$ необходимо, чтобы принадлежащая классу $L_p[0, T]$ граничная функция $\mu(t)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ принадлежала классу $W_p^l[0, T - \varepsilon]$.

Доказательство. Данная теорема является обобщением теоремы 2 работы [40], при этом ход ее доказательства полностью повторяет схему работы [40]. Ниже

приведем лишь те пункты, в которые есть отличия. Для теоремы 16 необходимо доказать, что из принадлежности обобщенного решения $u(x, t)$ задачи (2.1) - (2.3) пространству $W_p^l(Q_t)$ следует существование обобщенной производной граничной функции $\mu^{(l)}(t)$ на сегменте $[0, T - \varepsilon]$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ и ее принадлежность пространству $L_p[0, T - \varepsilon]$. Доказательство работы [40] с легкостью обобщается для этого случая, стоит только предположить существование $\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x, t)$ вместо $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ и подставить формулу (2.4). Остальные рассуждения можно оставить без изменения. $\square$

При этом условия теоремы 16 не являются достаточными достаточно положить $T = 1, X = 1, l = 1, p = 2$, а граничную функцию $\mu(t) = (1 - t)^{-\frac{1}{3}} - 1$. Тогда решение, которое будет иметь вид $u(x, t) = \underline{\mu}(x - t)$, не принадлежит пространству $W_2^1[Q_T]$. Ниже приведем основную теорему данной главы, которая устанавливает критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения задачи (2.1) - (2.3).

Теорема 17. *Если при фиксированных $T > 0$ и $p \geq 1$ граничная функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_1[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$, то для принадлежности обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x, t)$ смешанной задачи (2.1) - (2.3) к классу $W_p^l(Q_T)$ при $l \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\mu(t)$ имела на $0 < t < T$ обобщенную производную $\mu^{(l)}(t)$, и чтобы существовал интеграл*

$$\int_0^T (T - t) |\mu^{(l)}(t)|^p dt \quad (2.5)$$

Доказательство. Необходимость тривиально вытекает из Теоремы 16. Поэтому данное доказательство будет касаться лишь достаточности условий, наложенных на граничную функцию $\mu(t)$. Отметим, что методы, применяемые в рамках этого доказательства были использованы в работе [41]. Вначале заметим, что для любого натурального числа n вещественное число $T > 0$ предста-

вимо либо в виде $T = 2Xn - \Delta$ при $0 \leq \Delta < X$, либо в виде $T = 2Xn + X - \Delta$ при $0 \leq \Delta < X$. Далее будет рассмотрено отдельно два случая:

а) $T = 2Xn - \Delta$ при $0 \leq \Delta < X$;

б) $T = 2Xn + X - \Delta$ при $0 \leq \Delta < X$.

Иными словами, будет учитываться четность числа $\lfloor \frac{T}{X} \rfloor$.

Рассмотрим сначала случай а). При всех Δ из полусегмента $0 \leq \Delta < X$, где $T = 2Xn - \Delta$ обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (2.1) - (2.3) может быть переписано в виде (2.4):

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2Xk).$$

Согласно условиям теоремы, имеем обобщенные производные $\mu^{(l)}(t)$ на полусегменте $[0, T)$. Отсюда можно заключить, что функции $\mu^{(i)}(t)$ для любого $i = 1, 2, \dots, l-1$ могут быть рассмотрены, как непрерывные на данном полусегменте. Далее будем полагать, что $\mu^{(i)}(t) \in C[0, T)$ для любого $i = 1, 2, \dots, l-1$. Значение $\mu(2Xn - X)$ является определяющим для дальнейшего доказательства. Отдельно рассмотрим два подслучая для а):

1) $\mu(2Xn - X) = 0$;

2) $\mu(2Xn - X) \neq 0$.

В первом подслучае $\mu(2Xn - X) = 0$ представим $\mu(t)$ в виде суммы $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$ со слагаемыми

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 2Xn - X \\ \mu(t) & \text{при } 2Xn - X < t < T \end{cases} \quad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 2Xn - X \\ 0 & \text{при } 2Xn - X < t < T \end{cases}$$

Очевидно, что обе функции непрерывны в точке $2Xn - X$. Учитывая новый способ записи граничной функции $\mu(t)$, решение линейной задачи (2.1) - (2.3)

$u(x, t)$, определяемое равенством (2.4), разбивается на сумму двух функций $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - x \leq 2Xn - X \\ \mu_1(t - x) = \mu(t - x) & \text{при } 2Xn - X < t - x < T \end{cases} \quad (2.6)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}_2(t + x - 2Xk). \quad (2.7)$$

Во втором равенстве символ $\underline{\mu}_2(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu_2(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq 2Xn - X$ и равную нулю при $\tau < 0$ и $\tau > 2Xn - X$.

Докажем, что для любого $k = \overline{1, l}$ существуют интегралы

$$\int_0^T (T - t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt,$$

и при этом, функция $u_2(x, t)$ принадлежит пространству $W_p^l(Q_T)$. Имеем, что при $k = \overline{1, l}$ функции $\mu_2^{(k)}(t) \in C[0, 2Xn - X]$, следовательно существуют интегралы $\int_0^{2Xn-X} \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt$. Далее получим цепочку соотношений

$$\int_0^T (T - t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt = \int_0^{2Xn-X} (T - t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt \leq T \int_0^{2Xn-X} \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt.$$

Отсюда можно заключить, что для каждого из $2n$ слагаемых решения (2.7) справедливо неравенство

$$\int_0^X \left[\int_0^T \left| \underline{\mu}_2^{(k)}(t \mp x - 2lk) \right|^p dt \right] dx \leq X \int_0^{2Xn-X} \left| \mu^{(k)}(\tau) \right|^p d\tau. \quad (2.8)$$

Таким образом слагаемое $u_2(x, t)$ принадлежит классу $W_p^l(Q_T)$ и удовлетворяет условиям теоремы.

Перейдем к рассмотрению пары функций $u_1(x, t)$ и $\mu_1(t)$ в силу формулы

(2.6) необходимо убедиться в том, что каждый интеграл

$$\int_0^X \left[\int_0^T |D^\alpha u_1(x, t)|^p dt \right] dx = C \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^T \left| \mu_1^{(|\alpha|)}(t-x) \right|^p dt \right] dx, \quad 0 \leq |\alpha| \leq l, \quad (2.9)$$

где C – некоторая константа и α – двухмерный мультииндекс, по которому берутся частные производные, существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_{2Xn-X}^T (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt. \quad (2.10)$$

Заметим, что при $0 \leq |\alpha| < l$ функции $\mu_1^{(|\alpha|)}(t) \in C[2Xn-X, T]$ и интеграл (2.9) существует. Поэтому далее будем рассматривать только случай, когда мультииндекс $|\alpha|$ равен l .

Воспользуемся свойствами интеграла Лебега для неотрицательных функций и докажем, что

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} \left| \mu_1^{(l)}(t-x) \right|^p dt \right] dx, \quad (2.11)$$

как функция от ε , ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда и только тогда, когда на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничен интеграл

$$\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt. \quad (2.12)$$

Произведя в формуле (2.11) замену переменной $\tau = t - x$ и учитывая, что

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 2Xn - X \\ \mu(t) & \text{при } 2Xn - X < t < T \end{cases} \quad \text{и} \quad T - \varepsilon - x \geq 2Xn - X \Rightarrow x \leq X - \Delta - \varepsilon$$

получим, что

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right] dx = \int_0^{X-\Delta-\varepsilon} \left[\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right] dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям по переменной x к последнему интегралу

$$I(\varepsilon) = \left[x \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} \left| \mu_1^{(l)}(\tau) \right|^p d\tau \right]_{x=0}^{x=X-\Delta-\varepsilon} + \int_0^{X-\Delta-\varepsilon} x \left| \mu_1^{(l)}(T-\varepsilon-x) \right|^p dx.$$

При любом $\varepsilon > 0$ левое слагаемое обращается в ноль. В правом слагаемом сделаем замену $y = x + \varepsilon$ и получим

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{X-\Delta} (y-\varepsilon) \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy. \quad (2.13)$$

Приведем два технических неравенства для переменной y

$$y - \varepsilon \leq y \text{ при всех } \varepsilon \leq y \leq l - \Delta, \quad (2.14)$$

$$y - \varepsilon \geq \frac{1}{2}y \text{ при всех } 2\varepsilon \leq y \leq l - \Delta. \quad (2.15)$$

Из соотношения (2.13) на функцию $I(\varepsilon)$ и из двух неравенств (2.14), (2.15) можно получить:

$$\int_{\varepsilon}^{X-\Delta} y \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{2\varepsilon}^{X-\Delta} y \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy.$$

Осталось сделать финальную замену $t = T - y$

$$\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{2Xn-X}^{T-2\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy. \quad (2.16)$$

Таким образом $I(\varepsilon)$ существует, тогда и только тогда, когда выполнены условия на функцию $\mu(t)$ из критерия. На этом доказательство теоремы для случая а) завершено.

Рассмотрим теперь подслучай 2) $\mu(2Xn - X) \neq 0$ случая а) и сведем его к первому подслучаю. Рассмотрим задачу (2.1), (2.2), (2.3) с граничной функцией $\mu_0(t)$, имеющей вид многочлена второй степени по переменной t

$$\mu_0(t) = \frac{\mu(2Xn - X)}{(2Xn - X)^2} t^2. \quad (2.17)$$

В этом случае решение $u_0(x, t)$ определяется формулой

$$u_0(x, t) = \frac{\mu(2Xn - X)}{(2Xn - X)^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (\underline{t} - x - 2Xk)^2 - \sum_{k=1}^n (\underline{t} + x - 2Xk)^2 \right\}, \quad (2.18)$$

в которой символ $(\underline{\tau})^2$ обозначает функцию, равную τ^2 при $\tau \geq 0$ и равную нулю при $\tau < 0$.

Для функций определенных в (2.17) и (2.18) выполнено:

- $u_0(x, t)$ принадлежит классу $W_p^l(Q_T)$;
- для функции $\mu_0(t)$ существует интеграл $\int_0^T (T - t) |\mu_0^{(l)}(t)|^p dt$.

Далее рассмотрим задачу (2.1), (2.2), (2.3) с новой граничной функцией $\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \mu_0(t)$. Тогда решение, в силу линейности будет определяться как $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$. Поскольку $\hat{\mu}(2Xn - X) = 0$, то мы свели рассматриваемый подслучай $\mu(2Xn - X) \neq 0$ к рассмотренному выше первому подслучаю. Так как решение $\hat{u}(x, t)$ принадлежит W_p^l тогда и только тогда, когда существует интеграл $\int_0^T (T - t) |\hat{\mu}^{(l)}(t)|^p dt$, то и решение $u(x, t)$ принадлежит W_p^l тогда и только тогда, когда существует интеграл $\int_0^T (T - t) |\mu^{(l)}(t)|^p dt$.

Для случая б), когда $T = 2Xn + X - \Delta$ при $0 \leq \Delta < l$, шаги доказательства теоремы повторяют шаги для случая а). Отличие заключается лишь в виде решения, а точнее в индексах суммирования. Тем не менее, это не оказывает влияния на схему доказательства. Ниже приведем моменты, которые отличаются в двух рассматриваемых случаях.

Для всех Δ из полусегмента $0 \leq \Delta < l$ при $T = 2Xn + X - \Delta$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.3) определяется равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n \underline{\mu}(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2Xk)$$

в котором $\underline{\mu}(\tau)$ равно $\mu(\tau)$ при $\tau \geq 0$ и равно нулю при $\tau < 0$. Разбиение полусегмента $[0, T)$ меняется на

- $0 \leq t \leq 2Xn$;
- $2Xn < t < T$.

В случае б) так же, как и в случае а), рассматриваются два подслучая $\mu(2Xn) = 0$ и $\mu(2Xn) \neq 0$, причем второй из этих подслучаев сводится к первому заменой

$$\mu_0(t) = \frac{\mu(2Xn)}{(2Xn)^2} t^2.$$

На этом доказательство теоремы завершено.

□

В заключении главы хотелось отметить, что метод представления граничной функции в виде суммы двух слагаемых, предложенный в работе [41], позволяет получить более тонкие оценки для критерия принадлежности решения волнового уравнения из класса $L_p(Q_T)$ для смешанной задачи (2.1) - (2.3) к классу $W_p^l(Q_T)$.

Глава 3

О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в пространстве L_p при $p \geq 1$

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [27],[30].

3.1. Постановка задачи и основные определения

В прямоугольнике $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим в обобщенной трактовке смешанную задачу для телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x, t) - Lu(x, t) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$Lu := u_{xx} - au, a \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \text{ при } x \in [0, l] \quad (3.3)$$

и с граничными условиями

$$u(0, t) = \mu(t), u(l, t) = 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad (3.4)$$

предполагается, что граничная функция μ принадлежит классу $L_p[0, T]$ при $p \geq 1$.

Определение 5. *Обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (3.1)-(3.4) назовем функцию $u \in L_p(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) \left[\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right] dx dt = \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt \quad (3.5)$$

для любой функции $\Phi \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Phi(x, T) \equiv 0$, $\Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$ и условиям $\Phi(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

3.2. Единственность решения из класса L_1 смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока

Для доказательства единственности так определенного решения при любом $p \geq 1$ воспользуемся схемой, предложенной В.А.Ильиным в §9 главы 2 работы [9]. Отметим также, что в случае $a = 0$ единственность была установлена в работе [22]. В силу того, что любое обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи (3.1)-(3.4) при $p \geq 1$ является также обобщенным из класса $L_1(Q_T)$ решением рассматриваемой задачи, сформулируем теорему единственности решения в классе L_1 .

Теорема 18. *Может существовать не более одного обобщенного из класса $L_1(Q_T)$ решения смешанной задачи (3.1)-(3.4).*

Рассмотрим схему доказательства теоремы 18. Пусть существуют две функции $u_1, u_2 \in L_p(Q_T)$, удовлетворяющие определению 5. Тогда их разность, определенная как $u(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$, удовлетворяет тождеству (3.5) с нулевой правой частью

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t) \left[\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right] dx dt = 0 \quad (3.6)$$

для всех пробных функций Φ , удовлетворяющих условиям определения 5.

В начале рассмотрим классическую задачу на собственные значения оператора (3.1) при $x \in [0, l]$:

$$\begin{cases} Lv(x) + \lambda v(x) = 0, \\ v(0) = v(l) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Известно, что решением этой задачи являются собственные значения $\lambda_n := \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + a$ и отвечающие им собственные функции $v_n(x) := \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$, причем система $\{v_n\}$ является полной в классе $L_1[0, l]$.

Теперь пусть $\{g_m\}$ - произвольная полная в $L_1[0, T]$ счетная система непрерывных на $[0, T]$ функций. При $t \in [0, T]$ рассмотрим классическую задачу

$$\begin{cases} f''_{m,n}(t) + \lambda_n f_{m,n}(t) = g_m(t), \\ f_{m,n}(T) = f'_{m,n}(T) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

имеющую при всех $m, n \in \mathbb{N}$ решение $f_{m,n} \in C^2[0, T]$.

Далее заметим, что пробные функции $\Phi^{m,n}(x, t) := v_n(x)f_{m,n}(t)$ удовлетворяют всем условиям определения 1 и

$$\Phi^{m,n}_{tt}(x, t) - L\Phi^{m,n}(x, t) = v_n(x)g_m(t). \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.6) при всех $m, n \in \mathbb{N}$ получим

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t)v_n(x)g_m(t)dxdt = 0. \quad (3.10)$$

Пользуясь полнотой систем $\{v_n\}$ и $\{g_m\}$ в классах $L_1[0, l]$ и $L_1[0, T]$ соответственно, а также применяя теорему Фубини к тождеству (3.10), получаем, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в Q_T .

Замечание. В процессе доказательства теоремы 1 ключевым моментом являлось наличие системы классических собственных функций оператора L , удовлетворяющей (3.7) и являющейся полной в классе $L_1(Q)$, где $Q := [0, l]$. Таким образом, теорема 1 верна в цилиндре $Q_T := Q \times [0, T]$ для весьма широкого

класса многомерных областей Q и операторов L , допускающих существование полной в $L_1(Q)$ системы классических собственных функций.

3.3. Существование обобщенного решения из класса L_p смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока

Существование решения устанавливает следующая

Теорема 19. Для любых фиксированных $T > 0$, $a \geq 0$ и $p \geq 1$ существует обобщенное решение из класса $L_p(Q_T)$ смешанной задачи (3.1)-(3.4), определяемое равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n \left[\underline{\mu}(t - x - 2kl) - cx \int_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right] - \sum_{k=1}^{n+1} \left[\underline{\mu}(t + x - 2kl) - cx \int_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right], \quad (3.11)$$

где $J_1(x)$ функция Бесселя первого рода, $c := \sqrt{a}$, n - наименьший из номеров, удовлетворяющих неравенству $T \leq 2l(n+1)$, а символ $\underline{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t \geq 0$ и равную нулю при $t < 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 19 воспользуемся схемой, опубликованной в [36], [40]. Прежде всего заметим, что

$$-2l(n+1) \leq t - x - 2kl, k \in \overline{0, n} \quad \text{и} \quad -2l(n+1) \leq t + x - 2kl, k \in \overline{1, n+1}$$

Следовательно все значения аргументов, стоящих в (3.11) функций $\underline{\mu}(t)$ принадлежат сегменту $[-2l(n+1), T]$. Рассмотрим произвольную последовательность функций $\mu_m \in \mathring{C}^\infty(0, T)$, сходящуюся к μ по норме $L_1[0, T]$. При этом будем иметь $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\underline{\mu}_m - \underline{\mu}\|_{L_1[-2l(n+1), T]} = 0$. В работе [33] доказано, что для каждого фиксированного натурального m существует обобщенное из пространства $W_2^1(Q_T)$ решение $u_m(x, t)$ волнового уравнения (3.1) с нулевыми начальными

условиями (3.3) и граничными условиями $u_m(0, t) = \mu_m(t)$, $u_m(l, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, которое удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T \int_0^l u_m(x, t) \left[\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right] dx dt = \int_0^T \mu_m(t) \Phi_x(0, t) dt \quad (3.12)$$

для любой пробной функции $\Phi(x, t)$, удовлетворяющей граничным условиям из определения 5, и представляется в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{k=0}^n \left[\underline{\mu}_m(t - x - 2kl) - cx \int_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right] - \\ - \sum_{k=1}^{n+1} \left[\underline{\mu}_m(t + x - 2kl) - cx \int_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right]. \quad (3.13)$$

Далее докажем, что тождества (3.12) с функциями $u_m(x, t)$ вида (3.13) переходят в тождество (3.5) с функцией $u(x, t)$ вида (3.11), принадлежащей классу $L_p(Q_T)$ при $m \rightarrow \infty$.

Учитывая, что пробные функции $\Phi(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы на прямоугольнике Q_T , функции $\Phi_x(0, t) \in C[0, T]$. Отсюда вытекает, что выражение $\int_0^T \mu_m(t) \Phi_x(0, t) dt$ при $m \rightarrow \infty$ переходит в $\int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt$.

Докажем стремление к нулю при $m \rightarrow \infty$ интеграла

$$\int_0^T \int_0^l (u_m(x, t) - u(x, t)) \left[\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right] dx dt. \quad (3.14)$$

Для этого подставим тождества (3.13) и (3.11) в формулу (3.14) и получим

$$I = \int_0^T \int_0^l \left[\sum_{k=0}^n \left(R_m(t - x - 2kl) - cx \int_0^{t-x-2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n+1} \left(R_m(t + x - 2kl) - cx \int_0^{t+x-2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right) \right] \\ \left[\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right] dx dt,$$

где $R_m(\tau) := \underline{\mu}_m(\tau) - \underline{\mu}(\tau)$.

Далее имеем $|I| \leq I_1 + I_2 + I_3$, где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \int_0^l \left| \sum_{k=0}^n R_m(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1} R_m(t+x-2kl) \right| \\
&\quad \left| \Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right| dx dt, \\
I_2 &= \int_0^T \int_0^l \left| \sum_{k=0}^n cx \int_0^{t-x-2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right| \\
&\quad \left| \Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right| dx dt, \\
I_3 &= \int_0^T \int_0^l \left| \sum_{k=1}^{n+1} cx \int_0^{t+x-2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right| \\
&\quad \left| \Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t) \right| dx dt.
\end{aligned}$$

Сходимость к нулю интеграла I_1 , точно в таком же виде, была показана в работе [21]. Таким образом необходимо рассмотреть выражение вида $I_2 + I_3$. Для этого подробнее рассмотрим каждый элемент из двух сумм и введем

$$\begin{aligned}
A_m^k &:= \int_0^T \int_0^l \left| \int_0^{t \pm x - 2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right| \\
&\quad \left| cx(\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t)) \right| dx dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что сумма двойных интегралов I_2 и I_3 состоит из $2(n+1)$ выражений вида A_m^k . Тогда воспользуемся непрерывности функции $\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t)$ на прямоугольнике Q_T , и докажем стремление к нулю при $m \rightarrow \infty$ чисел A_m^k . Начнем с того, что для любой функции $\Phi(x, t)$ на прямоугольнике Q_T существует такое число M_1 , что

$$\left| cx(\Phi_{tt}(x, t) - L\Phi(x, t)) \right| \leq M_1,$$

но тогда и

$$A_m^k \leq M_1 \int_0^T \int_0^l \left| \int_0^{t \pm x - 2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right| dx dt. \quad (3.15)$$

Учитывая, что сама функция Бесселя $J_1(x)$ бесконечно дифференцируема, подынтегральное выражение может терпеть разрывы только в точках, для которых выполнено соотношение $\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2} = 0$. Также для функции Бесселя первого рода известно представление

$$J_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{1+2k} \quad \text{где } z \in \mathbb{C},$$

отсюда $J_1(x) = \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ при $x \rightarrow 0$. Учитывая тот факт, что в формуле (3.15) аргумент функции Бесселя есть знаменатель, умноженный на константу, получим существование константы M_2^k , для которой выполнена оценка

$$\left| \int_0^{t \pm x - 2kl} R_m(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2}} d\tau \right| \leq M_2^k \int_0^{t \pm x - 2kl} |R_m(\tau)| d\tau. \quad (3.16)$$

Далее расширим пределы интегрирования и получим

$$M_2^k \int_0^{t \pm x - 2kl} |R_m(\tau)| d\tau \leq M_2^k \int_{-2l(n+1)}^T |R_m(\tau)| d\tau \leq M_2^k \|R_m\|_{L_1[-2l(n+1), T]}.$$

Используя неравенство (3.15), получим

$$A_m^k \leq M_1 M_2^k l T \|R_m\|_{L_1[-2l(n+1), T]}.$$

В силу $\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m\|_{L_1[-2l(n+1), T]} = 0$ получим сходимость всех A_m^k к нулю при $m \rightarrow \infty$. Из того, что функция μ принадлежит классу $L_p[0, T]$ и из свойств подынтегральных функций в (3.11) заключаем, что функция u принадлежит классу $L_p(Q_T)$. $\square$

Таким образом показана сходимость решения для телеграфного уравнения из W_p^1 к решению из L_p , и, кроме того предъявлен явный аналитический вид данного решения.

Заключение

В рамках исследования обсуждаются вопросы единственности и существования решения задачи для волнового уравнения с модельными нелокальными граничными условиями типа Бицадзе-Самарского на правом конце. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности решения волнового уравнения из пространства L_p пространству Соболева W_p^l с произвольным целым верхним индексом. Исследуется разрешимость задачи для телеграфного уравнения (известного в литературе, как уравнение Клейна-Гордона-Фока) в пространстве L_p . Кроме того, получены следующие частные результаты:

- Приведены решения четырех смешанных задач для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида;
- Предложен критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения. Критерий связывает между собой условие на граничную функцию $\mu(t)$ и условие принадлежности решения задачи для волнового уравнения;
- Доказана сходимость решения для телеграфного уравнения из W_p^1 к решению из L_p . В явном аналитическом виде получены решения смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в пространстве L_p при $p \geq 1$, показана их единственность;

Полученные теоретические результаты значительно расширяют класс решаемых задач математической физики, а также позволяют существенно повысить точность расчётов. Кроме того, методы, разработанные в настоящей диссертационной работе, позволяют строить аналитические решения задач, ранее решаемых только с помощью численных методов.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры Общей математики

факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору Ломову Игорю Сергеевичу за внимательное руководство процессом исследования. Автор благодарит Кулешова Александра Андреевича и Смирнова Илью Николаевича за ценные советы и обсуждения отдельных вопросов по теме диссертации.

Список литературы

1. *Lion J. L.* Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // *SIAM*. — 1988. — Vol. 30, no. 2. — P. 1–68.
2. *Zuazua E.* Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation // *J. Math. pures et appl.* — 1990. — no. 69. — P. 1–31.
3. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального граничного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
4. *Васильев Ф. П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // *Дифференц. уравнения*. — 1995. — Т. 31, № 1. — С. 1893–1900.
5. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Макс Пресс, 2010.
6. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнений колебаний струны // *Вестник МГУ*. — 1993. — Т. 15, № 3. — С. 8–15.
7. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Разгулин А. В.* О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны // *Вестник МГУ*. — 1993. — Т. 15, № 2. — С. 3–8.
8. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — Москва: Гостехиздат, 1953.
9. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *Успехи математических наук*. — 1960. — Т. 15, № 2. — С. 97–154.
10. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах // *Доклады РАН*. — 1999. — Т. 369, № 5. — С. 592–596.
11. *Ильин В. А., Мусеев Е. И.* О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // *Дифференциальные уравнения*. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 656–661.

12. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // *Доклады Академии наук СССР*. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 793–740.
13. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения*. — 1980. — Т. 16, № 11. — С. 1925–1935.
14. Ильин В. А. Аналитический вид оптимального граничного управления смещением на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // *Доклады Академии наук*. — 2008. — Т. 420, № 3. — С. 309–313.
15. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // *Доклады Академии наук*. — 2008. — Т. 420, № 4. — С. 442–446.
16. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // *Дифференциальные уравнения*. — 2008. — Т. 44, № 11. — С. 1487–1498.
17. Кулешов А. А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с однородными нелокальными условиями // *Дифференциальные уравнения*. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 810–817.
18. Холомеева А. Оптимизация нелокального граничного управления колебаниями струны с закрепленным концом за произвольный кратный $2l$ промежуток времени // *Дифференциальные уравнения*. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 696–700.
19. Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 171–198.
20. Хромов А. П. О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // *Известия Саратовского университета. Новая серия*.

- Серия: Математика. Механика. Информатика.* — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 56—66.
21. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // *Дифференциальные уравнения.* — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1493–1500.
 22. Моисеев Е. И., Холомеева А. А. О разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний струны в пространстве $W_p^1, p \geq 1$ // *Доклады Академии наук.* — 2011. — Т. 441, № 3. — С. 310–312.
 23. Ильин В. А., Кулешов А. А. Об эквивалентности двух определений обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для волнового уравнения // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова.* — 2014. — Т. 284. — С. 163—168.
 24. Ильин В. А., Кулешов А. А. Необходимые и достаточные условия принадлежности классу W_p^1 при $p \geq 1$ обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова.* — 2013. — Т. 283. — С. 115—120.
 25. Ломов И. С. Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. — Москва: МАКС Пресс, 2019.
 26. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с нелокальными условиями общего вида на правом конце и неоднородным условием на левом // *Дифференциальные уравнения.* — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 516–523. — Trans. Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 4. — P. 509–515.
 27. Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н. О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в классе L_p при $p \geq 1$ // *Дифференциальные уравнения.* — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 336–340. — Trans. Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 3. — P. 330–334.
 28. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_l^p обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // *Известия Саратовского универ-*

- ситета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, № 3. — С. 297–304.
29. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXIX. — МАКС Пресс Москва, 2018. — С. 161.
 30. Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н. О разрешимости смешанных задач для телеграфного уравнения в пространстве L_p при $p \geq 1$ // Материалы XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2017» (11-13 апреля 2017 Москва, Россия). — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 146–148.
 31. Mokrousov I. Mixed problems for string wave equation with uniform non-local conditions and first or second type boundary conditions // The 3rd International Workshop Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications. — University of Rzeszow, 2016. — С. 49.
 32. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида // Сборник тезисов XXI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2014», секция «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА». — М., 2014. — С. 120.
 33. Smirnov I. Solution of Mixed Problems with Boundary Displacement control for the Telegraph Equation // Conference: International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development – Special track within SCET2012. — 2012. — 01.
 34. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 11. — С. 1513–1528.
 35. Ильин В. А. Единственность обобщенных решений смешанных задач для

- волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // *Дифференциальные уравнения*. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 672–680.
36. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // *Дифференциальные уравнения*. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1493–1500.
37. Ильин В. А. Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // *Дифференциальные уравнения*. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 672–680.
38. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени t интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень ≥ 1 // *Дифференциальные уравнения*. — 2006. — Т. 42, № 11. — С. 1558–1570.
39. Моисеев Е. И., Тихомиров В. В. О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // *Нелинейная динамика и управление*. — 2007. — Т. 5. — С. 141–148. — Москва: Физматлит.
40. Ильин В. А., Кулешов А. А. Обобщенные решения волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // *Доклады Академии наук*. — 2012. — Т. 446, № 4. — С. 374–377.
41. Ильин В. А., Кулешов А. А. Критерий принадлежности классу W_p^1 обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // *Доклады Академии наук*. — 2012. — Т. 447, № 1. — С. 15–17.
42. Смирнов И. Н. Решение смешанных задач с граничным управлением упругой силой для телеграфного уравнения // *Дифференциальные уравнения*. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 433–441.
43. Никитин А. О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевыми условиями // *Дифференциальные уравнения*. — 2007. — Т. 43, № 12. — С. 1692–1700.

44. Кулешов А. А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с граничными и нелокальными условиями первого и второго родов // *Доклады Академии наук.* — 2009. — Т. 426, № 3. — С. 307—309.
45. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с однородными граничными и неоднородными нелокальными условиями // *Дифференциальные уравнения.* — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 98—104.
46. Ильин В. А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с краевым управлением // *Доклады Академии наук.* — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 137—138.
47. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1981.
48. Садовничий В. А. Теория операторов. — Москва: Дрофа, 2004.
49. Soboleff S. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales // *Матем. сб.* — 1936. — Vol. 43, no. 1. — P. 39—72.
50. Гюнтер Н. М. О действиях над функциями, не имеющими производных, 1 // *Известия АН СССР.* — 1924. — Т. 18, № 6. — С. 353—372.
51. Гюнтер Н. М. О действиях над функциями, не имеющими производных, 2 // *Известия АН СССР.* — 1925. — Т. 19, № 6. — С. 75—96.
52. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. — Москва: Макс-пресс, 2008.
53. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. — Москва: Наука, 1983.
54. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — 2 изд. — Москва: Наука, 1969.
55. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1972.
56. Бесов О. В., Ильин В., С.М. Н. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — Москва: Наука, 1975.
57. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — Москва: Мир, 1965.
58. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. —

Москва: Наука, 1991.

59. *Кашин Б. С., Сааксян А. А.* Ортогональные ряды. — Москва: Наука, 1999.
60. *Никольский С.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — Москва: Наука, 1969.
61. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. — Москва: Издательство Московского университета, 1999.
62. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Москва: Наука, 1983.
63. *Владимиров В.* Обобщённые функции в математической физике. — Москва: Наука, 1976.
64. *Гельфанд И., Шиллов Г.* Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: Добросвет, 2000.
65. *Александров В. А.* Обобщённые функции. — Новосибирск: Учеб. пособие НГУ, 2005.
66. *Бари Н.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. — Москва: Уч. записки Моск. гос. Ун-та, 1951.
67. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — Москва: Наука, 1966.
68. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. — Москва: Мир, 1982.

В заключение еще раз приведем список публикаций автора.

Список публикаций автора

1. *Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н.* О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в классе L_p при $p \geq 1$ //

Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 336–340. — Trans. Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 3. — P. 330–334.

2. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_l^p обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* — 2018. — Т. 18, № 3. — С. 297–304.
3. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXIX. — МАКС Пресс Москва, 2018. — С. 161.
4. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с нелокальными условиями общего вида на правом конце и неоднородным условием на левом // *Дифференциальные уравнения.* — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 516–523. — Trans. Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 4. — P. 509–515.
5. Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н. О разрешимости смешанных задач для телеграфного уравнения в пространстве L_p при $p \geq 1$ // Материалы XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2017» (11-13 апреля 2017 Москва, Россия). — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 146–148.
6. Mokrousov I. Mixed problems for string wave equation with uniform non-local conditions and first or second type boundary conditions // The 3rd International Workshop Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications. — University of Rzeszow, 2016. — С. 49.
7. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебания струны

с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида //

Сборник тезисов XXI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2014», секция «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА». — М., 2014. — С. 120.