

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль

3 – 8 июля 2020 года



Владимир 2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА РАН
ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЕКСАНДРА ГРИГОРЬЕВИЧА И НИКОЛАЯ ГРИГОРЬЕВИЧА СТОЛЕТОВЫХ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль

3 – 8 июля 2020 года

Электронное издание



Владимир 2020

ISBN 978-5-9984-1244-8

© ВлГУ, 2020

© Коллектив авторов, 2020

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6

Редакционная коллегия:

В. В. Козлов, доктор физико-математических наук, академик РАН
(ответственный редактор)

Д. В. Трещёв, доктор физико-математических наук, академик РАН

А. А. Давыдов, доктор физико-математических наук, профессор

Мероприятие проведено при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований, проект № 20-01-22009

Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам [Электронный ресурс] : тез. докл. / Суздаль, 3 – 8 июля 2020 г. ; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 163 с. – ISBN 978-5-9984-1244-8. – Электрон. дан. (2,89 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана

В сборник включены тезисы докладов, представленных на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

Издание представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

Организаторы конференции благодарны

Российскому фонду фундаментальных исследований,

ООО НПП «Технофильтр»

за помощь в подготовке и проведении конференции.

Программный комитет

- ◇ **В. В. Козлов** (председатель), Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Давыдов** (зам. председателя), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **Д. В. Трещев** (зам. председателя), Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Шкаликов** (зам. председателя), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Аграчев**, Международная школа высших исследований (SISSA), Триест, Италия.
- ◇ **А. И. Аптекарев**, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
- ◇ **С. М. Асеев**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **В. З. Гринес**, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия.
- ◇ **В. И. Максимов**, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия.
- ◇ **Е. И. Моисеев**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **Г. П. Панасенко**, Университет Жана Монне, Сен Этьен, Франция.
- ◇ **Н. И. Попиванов**, Софийский университет имени святого Климента Охридского, София, Болгария.
- ◇ **Ф. Л. Черноусько**, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
- ◇ **А. А. Чесноков**, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.
- ◇ **А. П. Чупахин**, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.
- ◇ **А. И. Шафаревич**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **С. Янечко**, Центр перспективных исследований, Варшава, Польша.

Организационный комитет

- ◇ **А. А. Давыдов** (сопредседатель), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
- ◇ **А. М. Саралидзе** (сопредседатель), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **Ю. А. Алхутов** (заместитель председателя), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **А. В. Егорова** (заместитель председателя), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **А. Д. Изаак**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **И. А. Петренко**, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **С. А. Поликарпов**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **Л. И. Родина**, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия.
- ◇ **В. А. Тимофеева**, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
- ◇ **Е. В. Шелепова**, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.	14
ЛОКАЛЬНЫЙ ИНФИМУМ И СЕМЕЙСТВО ПРИНЦИПОВ МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ	
Адлай С. Ф.	15
ОБОБЩЁННАЯ ОСЬ СИММЕТРИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА – ОСЬ ГАЛУА	
Алтынбеков Ш. А.	16
ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ОСАДОК ФУНДАМЕНТОВ ТУРБОАГРЕГАТОВ	
Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В., Тихомиров Р. Н. ...	17
О НЕРАВЕНСТВЕ ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО (p, q) -ЛАПЛАСИАНА С ЧАСТИЧНО МАКЕНХАУПТОВЫМ ВЕСОМ	
Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д.	18
ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ МНОГОФАЗНОГО $p(x)$ -ЛАПЛАСИАНА	
Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д.	20
ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ	
Антипов А. А., Бардин Б. С.	21
ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ ЕГО КОНИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ, В СЛУЧАЕ ВНЕШНЕГО РЕЗОНАНСА	
Апушкинская Д. Е.	22
ЛЕММА О НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА	
Артамонов Д. В.	23
АНТИСИММЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМ ГЕЛЬФАНДА-КАПРАНОВА-ЗЕЛЕВИНСКОГО	
Барabanова Л. П.	24
О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ	
Бардин Б. С., Рачков А. А.	25
О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ	
Безяев В. И.	26
О СПЕКТРЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
Богаевский И. А.	27
ВНУТРЕННЕЕ РАССЕЯНИЕ АРНОЛЬДА В ГРАФЕНЕ	
Бойков И. В., Бойкова А. И.	28
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Бойков И. В., Кривулин Н. П.	29
МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ЗАДЕРЖКАМИ	
Бортаковский А. С., Урюпин И. В.	30
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТОВ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ	
Буланов С. Г.	31
КОМПЬЮТЕРНАЯ СХЕМА АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	

Булатов В. В., Владимиров Ю. В.	32
Волновая динамика стратифицированных сред с течениями	
Бут И. И., Гайфуллин А. М., Жвик В. В.	33
Дальнее поле трёхмерной пристенной ламинарной струи	
Бырдин В. М.	35
Дисперсионные уравнения, функции и кривые в общей теории волн и в математической физике	
Быков В. В.	38
Спектры показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами	
Васильев В. Б.	40
Об интегральном представлении решения нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения в конусе	
Васильченкова Д. Г.	41
Вещественные h -суммы в задачах аппроксимации	
Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Тамарова Ю. А.	42
Математическое моделирование одного класса аэрогидроупругих систем	
Ветохин А. Н.	43
О дескриптивном типе множества точек полунепрерывности снизу топологической энтропии семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра	
Власов В. В.	44
Корректная разрешимость и представление решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в наследственной механике	
Воронин С. М.	45
Задача о точке возврата кривой, состоящей из точек возврата	
Гаджиев Д. А., Гайфуллин А. М.	46
Взаимодействие плоской звуковой волны с квазипотенциальным вихрем	
Гладышев Ю. А.	47
О построении некоторых классов решений обобщенной системы Коши-Римана	
Гладышев Ю. А., Калманович В. В.	49
О решении нестационарной задачи теплопроводности в многослойной среде методом Фурье	
Гологуш Т. С., Остапенко В. В., Петренко И. А., Черевко А. А.	50
Задача оптимального управления эмболизацией артериовенозной мальформации	
Гуревич Е. Я.	51
О включении в поток и топологической классификации каскадов Морса-Смейла	
Гусейнов С. Т.	52
Об априорной оценке нормы Гельдера решений равномерно эллиптического уравнения с $p(x)$ -лапласианом	
Данченко В. И.	53
Алгебраический аналог неравенства Фейера	

Денисов В. Н.	54
ТЕОРЕМЫ О РАВНОСТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	
Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.	55
ВАРИАЦИИ V-ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ	
Доброславский А. В.	56
ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ СПУТНИКОВ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ С УЧЁТОМ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ	
Довбыш С. А.	57
ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ	
Евдокимова Е. А.	58
ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ	
Егоров И. Н., Немонтов В. А.	59
УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РОБОТА ПОДАЧИ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ	
Жданов О. Н.	60
РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ	
Зубова С. П., Раецкая Е. В.	61
ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	
Ильина А. В.	62
КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫЕ РЕДУКЦИИ ИЕРАРХИИ ДВУМЕРИЗОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДА	
Иноземцев А. И., Ляхов Л. Н.	63
О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ЛЕБЕГА	
Казаков А. Л.	65
О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ ТИП ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ	
Калитвин В. А.	66
О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД	
Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А., Туртин Д. В.	67
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ	
Кащенко А. А.	68
РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ЦИКЛ В КОЛЬЦЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ	
Кащенко И. С.	69
ДИНАМИКА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	

Кащенко И. С., Маслеников И. Н.	69
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	
Киселев О. М.	70
СТОХАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИГВЕЯ НА МЯГКОЙ ПОВЕРХНОСТИ	
Клово А. Г., Куповых Г. В., Ляпунова И. А.	72
О ВОЗМОЖНОСТИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ	
Кобзев А. А.	73
ПАРИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ	
Козлов В. В.	74
КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	
Коптев А. В.	74
ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА	
Корчемкина Т. А.	76
О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ОБЩЕГО ВИДА	
Кочергин А. В.	78
О СКОРОСТИ РОСТА СУММ БИРКГОФА НАД ПОВОРОТОМ ОКРУЖНОСТИ	
Крайко А. Н.	79
НОВАЯ МОДЕЛЬ БОЛЬШОГО ВЗРЫВА И РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ В ОТО С РАЗЛЕТОМ В ПУСТОТУ ГАЗА, СЖАТОГО В ТОЧКУ	
Круглов Е. В.	81
О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ НА ЗАМКНУТОМ ТРЕХМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ	
Кудрявцева И. А., Рыбаков К. А.	82
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПО МАП-КРИТЕРИЮ В СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ	
Кулагин Н. Е., Лерман Л. М., Малкина А. И.	83
СОЛИТОНЫ И КАВИТОНЫ В НЕЛОКАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА УИЗЕМА	
Куликов А. Н., Куликов Д. А.	84
ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	
Лексин В. П.	85
ФУНКЦИЯ ЛАУРИЧЕЛЛЫ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ВЕСЕЛОВА	
Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.	86
СЛОИ СМЕШЕНИЯ И СТРУИ В МЕЛКОЙ ВОДЕ И ТЕЧЕНИЯХ ХЕЛЕ-ШОУ	
Ляхов Л. Н., Трусова Н. И.	87
ОЦЕНКА СМЕШАННЫХ НОРМ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ	
Максимов В. И.	88
ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧАХ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНФОРМАЦИИ	
Маркеев А. П.	89
О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ	
Матюков М. Ю., Паршин Д. В., Хе А. К., Чупахин А. П. ...	90
ЭНЕРГИЯ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕМОДИНАМИКЕ	

Мирзоев К. А.	91
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ $\zeta(2n + 1)$	
Морозов А. Д., Морозов К. Е.	93
О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С НЕМОНОТОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ	
Николаев В. Г.	94
О ЗАДАЧЕ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ ДЛЯ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫХ МАТРИЦ	
Овсянников В. М.	94
УЧЕТ ЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	
Омонов А. А., Очилов С., Раджабов Ш. Б.	96
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМОЙ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ	
Панов Е. Ю.	98
О НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ	
Постнов С. С.	99
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПО- РЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
Преображенская М. М.	100
ДИСКРЕТНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПИ ГЕНЕРАТОРОВ ТИПА МЭКИ–ГЛАССА С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ	
Раутиан Н. А.	101
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ	
Родина Л. И., Хаммади А. Х.	102
ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕГО ДОХОДА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ	
Рудаков И. А.	103
О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБА- НИЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМИ КОНЦАМИ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА	
Руденко Е. А.	104
ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР БОЛЬ- ШОГО ПОРЯДКА И ЕГО КОВАРИАЦИОННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ	
Рыбаков К. А.	105
К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ	
Савчук А. М.	106
СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА	
Садовнича И. В.	107
РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕН- ТАМИ — РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ	
Сафонова Т. А.	109
ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА О ЗНАЧЕНИЯХ ДИГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА В РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ	

Сачков Ю. Л.	110
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НА ДВУХСТУПЕННЫХ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ Ли	
Седов А. И.	111
ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ	
Семенов М. Е., Соловьев А. М.	111
ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ДЕМПФЕРОМ	
Сивкин В. Н., Шкаликов А. А.	113
БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЛОКАЛЬНО Р-ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ	
Сиражудинов М. М., Тихомирова С. В.	114
ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОВЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ	
Сухов Е. А.	115
ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВ ДОЛГОПЕРИ- ОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ КОНИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ СПУТНИКА В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА	
Тайманов И. А.	116
МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ	
Таташев А. Г., Яшина М. В.	116
О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БУСЛА- ЕВА С МАРКОВСКИМИ СВОЙСТВАМИ	
Таташев А. Г., Яшина М. В.	117
О СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА РЕГУЛЯРНОЙ ЦЕПОЧКЕ С СИММЕТРИЧНЫМИ КОНФЛИКТНЫМИ ТОЧКАМИ	
Толченников А. А.	119
РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИА- ЛОМ И ЛОКАЛИЗОВАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ	
Толстоногов А. А.	119
BV РЕШЕНИЯ В СМЫСЛЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МЕРЫ ВЫПУКЛОГО ПРОЦЕССА ВЫМЕТАНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ	
Усков В. И.	119
ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ В БАНАХОВОМ ПРО- СТРАНСТВЕ	
Филимонов А. М.	121
КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Хачатрян Х. А.	122
О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИ- НЕЙНОСТЬЮ	
Холостова О. В.	122
К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ В СЛУЧАЕ ГЕССА	
Чуркина Т. Е.	123
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ	
Шамолин М. В.	124
ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ	

Шейпак И. А.	125
Точные константы вложения в пространствах Соболева	
Шкаликов А. А.	126
Асимптотика решений по спектральному параметру обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями	
Эгамов А. И.	127
Об одной начально-краевой задаче для квазилинейного интегродифференциального уравнения	
Abdrakhmanova N. T., Astashov E. A.	129
SIMPLE SINGULARITIES OF FUNCTIONS THAT ARE EVEN OR ODD IN EACH VARIABLE	
Ardentov A., Lokutsievskiy L., Sachkov Yu.	130
OPTIMAL CONTROL OF YACHTS	
Arkhipova A. A., Grishina G. V.	131
ON THE REGULARITY OF WEAK SOLUTIONS TO NONDIAGONAL ELLIPTIC SYSTEMS WITH COMPOSITE BOUNDARY CONDITIONS	
Aseev S. M.	132
ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A RISK ZONE	
Astashova I. V.	133
ON UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO SECOND-ORDER EMDEN–FOWLER TYPE EQUATIONS WITH GENERAL POWER-LAW NONLINEARITY	
Belyakov A. O., Seyranian A. P.	134
ON ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF STABILITY BOUNDARIES FOR MEISSNER EQUATION	
Bobkov V., Kolonitskii S.	135
SECOND-ORDER DERIVATIVE OF DOMAIN-DEPENDENT FUNCTIONALS ALONG NEHARI MANIFOLD TRAJECTORIES	
Buchstaber V., Glutsyuk A., Tertychnyi S.	136
DYNAMICAL SYSTEMS ON TORUS WITH MÖBIUS POINCARÉ MAPS AND A MODEL OF JOSEPHSON JUNCTION	
Davydov A. A.	137
EXISTENCE OF OPTIMAL STATIONARY STATE OF EXPLOITED POPULATION WITH DIFFUSION	
Diening L., Kh.Balci A., Surnachev M.	137
NEW EXAMPLES ON LAVRIENTIEVS PHENOMENON USING FRACTAL CONTACT SETS	
Dobrokhotov S. Yu.	138
LAGRANGIAN MANIFOLDS AND A CONSTRUCTIVE “NAIVE” METHOD COMPUTATION OF THE WAVE FIELDS ASYMPTOTICS IN THE NEIGHBORHOOD OF A CAUSTICS	
Dudnikova T. V.	139
LARGE-TIME BEHAVIOR OF AN INFINITE CHAIN OF HARMONIC OSCILLATORS WITH DEFECTS	
Dyshaev M. M., Fedorov V. E.	140
THE ACCOUNTING OF ILLIQUIDITY AND TRANSACTION COSTS DURING THE DELTA HEDGING	
Glutsyuk A.	141
DENSITY OF THIN FILM PLANAR BILLIARD REFLECTION PSEUDOGROUP IN HAMILTONIAN SYMPLECTOMORPHISM PSEUDOGROUP	

Ishikawa G.	142
TANGENTIAL AND NORMAL MAPS TO FRONTS	
Kanygin G. V., Poltinnikova M. S.	143
THE ALGORITHM OF BUILDING THE TERMINOLOGICAL GRAPH OF CO- ONTOLOGY	
Krasil'nikov P. S.	143
COUPLED ORBIT-ATTITUDE MOTIONS OF THE ROD IN SITNIKOV CIRCULAR THREE-BODY PROBLEM	
Kruglov V.	145
THE CONDITION OF MODULI FINITENESS FOR SURFACE MORSE-SMALE FLOWS	
Lerbet J.	146
GEOMETRIC DEGREE OF NONCONSERVATIVITY	
Lokutsievskiy L. V.	147
CONVEX TRIGONOMETRY WITH APPLICATIONS TO PROBLEMS WITH 2-DIM CONTROL	
Malkin M. I., Safonov K. A.	147
CONFORMAL AND MAXIMAL MEASURES FOR PIECEWISE CONTINUOUS MAPS	
Mashtakov A.	148
ON EXTREMAL CONTROLS IN THE SUB-RIEMANNIAN PROBLEM ON THE GROUP OF RIGID BODY MOTIONS	
Mashtakov A., Popov A.	149
ASYMPTOTICS OF EXTREMAL CONTROLS IN THE SUB-RIEMANNIAN PROBLEM ON THE GROUP OF RIGID BODY MOTIONS	
Miller B.	150
GENERALIZED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH LIE ALGEBRA STRUCTURE	
Nazarov A. I.	151
VARIOUS INEQUALITIES FOR FRACTIONAL LAPLACIANS	
Pastukhova S. E.	152
RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION OF HIGH ORDER ELLIPTIC OPERATORS	
Pavlova N. G., Remizov A. O.	153
HYPERBOLIC ROUSSARIE VECTOR FIELDS	
Pechen A.	154
UNCOMPUTABILITY OF SOME CLASS OF QUANTUM CONTROL PROBLEMS	
Piskarev S.	155
APPROXIMATION OF INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL EQUATIONS	
Podobryaev A. V.	156
COADJOINT ORBITS OF THREE-STEP FREE NILPOTENT LIE GROUPS	
Remizov A. O.	157
OSCILLATING SOLUTIONS OF SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER	
Sachkov Yu. L., Sachkova E.	158
SYMMETRIES AND PARAMETERIZATION OF ABNORMAL EXTREMALS IN SUB- RIEMANNIAN PROBLEM WITH THE GROWTH VECTOR $(2; 3; 5; 8)$	
Semenov V. I.	159
THE 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS: INVARIANTS LOCAL AND GLOBAL REGULAR SOLUTIONS	

Shafarevich A.	159
LAGRANGIAN MANIFOLDS AND MODIFICATIONS OF THE MASLOV CANONICAL OPERATOR, CORRESPONDING TO LOCALIZED SOLUTIONS OF HYPERBOLIC SYSTEMS	
Shcheglova A.	160
MULTIPLICITY OF POSITIVE SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED HÉNON EQUATION WITH FRACTIONAL LAPLACIAN	
Treshev D.	160
ENTROPY OF AN OPERATOR	
Tunitsky D. V.	161
ON MULTIVALUED SIMPLE WAVES	
Ustinov N.	162
ON SOLVABILITY OF A CRITICAL PROBLEM WITH THE SPECTRAL NEUMANN FRACTIONAL LAPLACIAN	

ЛОКАЛЬНЫЙ ИНФИМУМ И СЕМЕЙСТВО ПРИНЦИПОВ МАКСИМУМА
В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Аваков Е. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН
erata@math.ru

Магарил-Ильяев Г. Г. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
magaril@mech.math.msu.su

Пусть $U \subset \mathbb{R}^r$, заданы отображение $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ переменных t, x и u , функция $f_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ переменных ζ_1 и ζ_2 .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления в канонической форме

$$f_0(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t)), \quad u(t) \in U \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$g(x(t_0), x(t_1)) = 0. \quad (3)$$

Функция $x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ называется *допустимой траекторией* для управляемой системы (2), (3), если найдется такое управление $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, что выполняются условия (2), (3).

Допустимая траектория $\hat{x}(\cdot)$ называется *оптимальной траекторией* в задаче (1) – (3), если она доставляет локальный минимум функционалу f_0 на множестве всех допустимых траекторий для системы (2), (3), рассматриваемым как подмножество пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ с индуцированной из этого пространства метрикой.

Это определение равносильно тому, что пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ (где $\hat{u}(\cdot)$ — управление, соответствующее $\hat{x}(\cdot)$) доставляет сильный минимум в задаче (1) – (3).

Функция $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ называется *локальным инфимумом* в задаче (1) – (3), если она доставляет локальный минимум функционалу f_0 на замыкании множества допустимых траекторий.

Ясно, что если $\hat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (1) – (3), то $\hat{x}(\cdot)$ — локальный инфимум в данной задаче. С другой стороны, если функция $\hat{x}(\cdot)$ — локальный инфимум в задаче (1) – (3) и допустима, то $\hat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в этой задаче.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $\Sigma^k = \{ \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \}$ и рассмотрим следующую управляемую систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \varphi(t, x, u_i(t)), \quad \bar{\alpha}(t) \in \Sigma^k, \quad \bar{u}(t) \in U^k \text{ п. в. на } [t_0, t_1], \quad (4)$$

$$g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad (5)$$

где $\bar{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$, которая является *выпуклым расширением* управляемой системы (2), (3), и совпадающая с ней при $k = 1$.

Если фиксирована функция $\hat{x}(\cdot)$, то частные производные отображений f_0 и g по ζ_1 и ζ_2 в точке $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ записываем так: $\hat{f}_{0\zeta_i}$ и $\hat{g}_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$, $\hat{g}_{\zeta_i}^*$ — сопряженный оператор к $\hat{g}_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$.

Теорема. Если функция $\hat{x}(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ доставляет локальный инфимум в задаче (1) – (3), то для любых $k \in \mathbb{N}$, $\hat{u}(\cdot) = (\hat{u}_1(\cdot), \dots, \hat{u}_k(\cdot))$ и $\hat{\alpha}(\cdot) = (\hat{\alpha}_1(\cdot), \dots, \hat{\alpha}_k(\cdot))$, для которых тройка $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{\alpha}(\cdot))$ допустима для системы (4), (5), найдутся ненулевой набор $(\lambda_0, \lambda_g) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^m)^*$ и вектор-функция $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)^*$ такие, что выполнены условия:

- 1) $\dot{p}(t) = -p(t) \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t))$,
- 2) $p(t_0) = \lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_1} + \hat{g}_{\zeta_1}^* \lambda_g, \quad p(t_1) = -\lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_2} - \hat{g}_{\zeta_2}^* \lambda_g$,
- 3) $\max_{u \in U} \langle p(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u) \rangle = \langle p(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle$ для п. в. $t \in [t_0, t_1]$.

Если множество U компактно, то локальный инфимум $\hat{x}(\cdot)$ является допустимой траекторией для управляемой системы (4), (5).

Первое утверждение теоремы представляет собой семейство соотношений, каждое из которых имеет форму принципа максимума. При этом, если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — сильный минимум в задаче (1) — (3), то это семейство содержит (при $k = 1$, $\hat{u}_1(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$ и $\hat{\alpha}_1(\cdot) = 1$) классический принцип максимума Понтрягина, а также и другие соотношения, которые дают, вообще говоря, дополнительную информацию об оптимальном процессе (как будет показано на примерах) и тем самым усиливают классические необходимые условия. Если инфимум не достигается, то теорема дает метод нахождения траекторий “подозрительных” на локальный инфимум, во многом аналогичный методу, основанному на принципе максимума Понтрягина.

ОБОБЩЁННАЯ ОСЬ СИММЕТРИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА – ОСЬ ГАЛУА¹

Адлай С. Ф. (Россия, Москва)

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН

SemjonAdlaj@gmail.com

Ещё в 1857 г. Джеймс Максвелл предостерегал [1], что задача о движении свободного твёрдого тела настолько изощрённая, что многие исследователи, освоившие “лунную теорию”, пали её жертвами. Широко известен рассказ Ричарда Фейнмана о мотивировавшей его задаче вычисления отношения прецессии к собственному вращению подброшенной тарелки [2]. И лишь после его смерти, в короткой статье 1989 года [3], Бенжамин Чао обратил внимание на ошибочность изначальной предпосылки (в которой Фейнман не сомневался)! Позже, Уильям Бёрк описал (так называемый) феномен “полукрутки теннисной ракетки” [4], но 22 июля 1996 года его жизнь трагически оборвалась, и ему так и не довелось узнать об “эффекте Джанибекова” [5], который многие годы оставался “засекреченным” после его открытия (на борту космической станции Салют-7) 25 июня 1985 года. Впервые компьютерная анимация точного решения “строго критического движения” трёхосного твёрдого тела была предложена лишь в 2018-м году коллективом по математическому моделированию кафедры теоретической механики УрФУ [6], а описание точного решения предложено в соответствующей статье четырёх авторов [7], и последующих открытых обсуждениях, таких как [8][9][10][11]. Согласно этому описанию, (фиксированная в теле) ось Галуа вращается равномерно и устойчиво! Тем временем, промежуточная ось инерции совершает (в теле) “квадратный корень предельного маятниковое движение”. Двухзначности квадратного корня соответствуют два “противоположно направленных кувырка гайки” для одного и того же “исходного” вращения! Два “других” кувырка соответствуют противоположно направленному исходному вращению. Исследование двойственности критических решений неизбежно переплетается с исследованием “хиральности” псевдовектора угловой скорости и с вопросами ориентации движения, включая зеркальную симметрию и обратимость по времени [12].

Литература

- [1] Maxwell C.J. On a Dynamical Top, for exhibiting the phenomena of the motion of a system of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth’s motion // Transactions of the Royal Society of Edinburgh, XXI (IV), Read on April 20, 1857: 559–570.
- [2] Feynman R. Surely, You’re joking, Mr. Feynman! W.W. Norton edition, 1985.
- [3] Chao B. Feynman’s Dining Hall Dynamics // Physics Today, 42(2), 1989: 15.
- [4] Ashbaugh M.S. Chicone C.C. Cushman R.H. The Twisting Tennis Racket // Journal of Dynamics and Differential Equations, 3(1), 1991: 67–85.
- [5] Джанибеков В. Видеодемонстрация движения гайки “барашка” на борту космической станции. Доступна по ссылке <http://semjonadlaj.com/DzhanibekovFlippingWingnut.mp4>
- [6] Misura N.E. Mityushov E.A. An animation of the critical motion of Dzhanibekov’s wingnut (Анимация критического движения гайки Джанибекова). Доступна по ссылке <https://www.youtube.com/playlist?list=PLvKkSzWgY7KUUSYDqHVdV0mst4nBnLe64>

¹Работа частично поддержана грантом РФФИ № 19-29-14141.

- [7] Адлай С.Ф. Берестова С.А. Мисюра Н.Е. Митюшов Е.А. Иллюстрации движения твёрдого тела по сепаратрисе в случае Эйлера-Пуансо // Компьютерные инструменты в науке и образовании, 2018, № 2: 05–13.
- [8] Адлай С.Ф. Ось Галуа // Тезисы докладов Международной научной конференции “Бесконечномерный анализ и математическая физика”. Москва, 28 января – 1 февраля 2019: 9 – 11.
- [9] Всеобщий словарь ремёсел и наук. Ось Галуа. Статья доступна по ссылке http://cyclowiki.org/wiki/Ось_Галуа
- [10] Адлай С.Ф. Открытое письмо Сазонову В.В. от 26 апреля 2019 года в ответ на его новую методическую разработку для студентов пятого курса Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, отправленную им в приложении к его электронному письму от 7 апреля 2019 года. Доступ по ссылке <http://semjonadlaj.com/Clarification.pdf>
- [11] Селиверстов А.В. Замечание о круговых сечениях // Препринт доступен по ссылке <http://iitp.ru/upload/publications/8014/PlaneSection11.pdf>
- [12] Ламарше Ф. Адлай С.Ф. (Francois Lamarche & Semjon Adlaj). Комплексные периоды, обратимость по времени и двойственность в классической механике. Заседание Российского междисциплинарного семинара по темпорологии имени А.П. Левича 26 ноября 2019 года. Доступ по ссылке <http://www.chronos.msu.ru/ru/mediatek/video-sem/2019/zasedanie-seminara-26-noyabrya-2019-g>

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ОСАДОК ФУНДАМЕНТОВ ТУРБОАГРЕГАТОВ

Алтынбеков Ш. А. (Казахстан)

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет
sh.altynbekov@mail.ru

Как известно вибрационных воздействий приводит к дополнительным остаточным осадкам. Грунт испытывает вибрационный эффект и со временем в зависимости от физико-механических свойств, амплитуды и частотой колебаний могут плотно уплотняться. Влияние вибрации на деформации плотных уплотненных грунтов изучено недостаточно полно. Поэтому изучение свойств ползучести и вибрационной ползучести и их использование при прогнозировании НДС оснований сооружений является актуальной задачей прикладной механики грунтов.

Фундаменты турбоагрегатов атомной электростанции представляет собой сложную конструкцию, включающую нижнюю фундаментную плиту, систему опор и систему верхних ригелей. Жесткие крепления вала турбогенераторной системы в подшипниках допускают очень небольшое смещение опор подшипника и, таким образом, накладывают жесткие ограничения на прогибы нижних фундаментных плит. Современные технические условия ограничивают эти отклонения до $1/10000$ длины фундаментной плиты для турбоагрегатов мощностью до 300 мВт. В случае строительства атомных электростанций на водо-насыщенных глинистых грунтовых основаниях, в результате уплотнения и ползучести скелета почвы происходит увеличение прогиба фундаментов во времени, что необходимо прогнозировать для оценки надежности турбоагрегатов. Надежность турбоагрегатов во многом определяется их вибрационным состоянием и характером уплотнения грунтовых оснований. В случае неравномерного осадка грунтовых оснований возникает неуравновешенная центробежная сила, что не желательно на практике. При таких малых значениях допускаемых отклонений возникает необходимость в разработке совершенных методов расчета, при которых реальные свойства глинистых грунтов будут учитываться наиболее полно. До настоящего времени во всех существующих исследованиях начальный коэффициент пористости считался постоянной величиной. В действительности он не является постоянной величиной, он зависит от пространственных координат. Это утверждение особенно верно, когда изучаемые объекты являются неоднородной пористой средой. В расчетах недостаточно изучены влияния параметров неоднородности, степени физической нелинейности, граничных условий, изменчивости коэффициентов фильтрации, бокового давления, начального коэффициента

пористости и мгновенного уплотнения, на характер вибрационной консолидации грунтов. При учете вибрационной ползучести скелета грунта, функция, характеризующая деформации ползучести, представлена как произведение статической меры ползучести и функции амплитуды колебаний. Возможность такой постановки вопроса ограничено. Взаимодействие фаз грунта и распределение вибрационных волн в грунтовых основаниях остается в тени. В работе все эти вопросы находят свои ответы.

Вибрационное влияние на характер деформации плотно уплотненных грунтов зависит от вибрационного состояния турбоагрегата и от вяжущих веществ в почве. В зависимости от них вибрационное воздействие на характер деформации плотно уплотненных грунтов может быть незначительным, существенным, разрушительным. Всеми этими процессами можно управлять.

Работа посвящена одному из недостаточно изученных вопросов вибрационной консолидации неоднородных грунтов. Приводится новая математическая постановка задачи. Исследованы вопросы существования и единственности для нее. Обоснованы методы решения. Обоснованные методы аппроксимации и итерации являются новым вкладом в прикладную механику грунтов. Применение их позволяет изучить более сложные проблемы теории консолидации неоднородных грунтов.

О НЕРАВЕНСТВЕ ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО (p, q) -ЛАПЛАСИАНА С ЧАСТИЧНО МАКЕНХАУПТОВЫМ ВЕСОМ²

Алхутов Ю. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yurij-alkhutov@yandex.ru

Крашенинникова О. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
krashola2012@yandex.ru

Тихомиров Р. Н. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
romat81@bk.ru

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1)$$

с двухфазным кусочно-постоянным показателем $p(x)$ и частично макенхауптовым весом ω , которые определим ниже. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$, где $p(x) = q = \text{const}$ в $D^{(1)}$ и $p(x) = p = \text{const}$ в $D^{(2)}$. Здесь $1 < q < p$, а вес ω таков, что $\omega(x) = \omega_1(x)$ в $D^{(1)}$, $\omega(x) = \omega_2(x)$ в $D^{(2)}$, причём каждая из весовых функций ω_i четна относительно гиперплоскости Σ . При этом вес ω_1 принадлежит A_q -классу Макенхаупта, а вес ω_2 – A_p -классу Макенхаупта. Кроме этого, для открытых шаров B_r радиуса r с центрами на $\Sigma \cap D$ для почти всех $x \in B_r$ при $r \leq r_0$ предполагается выполненным неравенство

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(B_r)} \leq c \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(B_r)}, \text{ где } \omega_i(B_r) = \int_{B_r} \omega_i dx,$$

с постоянной c , не зависящей от r и x . Напомним, что вес ω , определенный в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет A_s -условию Макенхаупта, если

$$\sup \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{-\frac{1}{s-1}}(x) dx \right)^{s-1} < \infty, \quad 1 < s < \infty,$$

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00184-а.

где супремум берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$, а $|B|$ означает n -мерную лебегову меру шара B .

Решение уравнения (1) определяется с помощью класса функций

$$W_{loc}(D, \omega) = \{u : u \in W_{loc}^{1,1}(D), |\nabla u|^{p(x)} \omega \in L_{loc}^1(D)\},$$

где $W^{1,1}(D)$ – классическое соболевское пространство. Под решением понимается функция $u \in W_{loc}(D, \omega)$, для которой интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_D \omega(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx = 0$$

выполнено на финитных пробных функциях $\xi \in W_{loc}(D, \omega)$.

Для формулировки результата положим $B_R^- = B_R \cap \{x : -R < x_n < -R/2\}$, где B_R – открытый шар радиуса R с центром на Σ .

Теорема 1. Если $B_{4R} \subset D$, то для любого неотрицательного решения u уравнения (1) в B_{4R} выполнено неравенство $\inf_{B_R} u \geq \gamma \sup_{B_R^-} u$, в котором положительная постоянная $\gamma < 1$

не зависит от u и R .

Из данного утверждения вытекает гёльдеровская непрерывность решений в области D . В случае, когда $p = q = 2$, приведенный результат установлен в работе [1], а при $1 < q < p$ и $\omega \equiv 1$ – в работе [2]. Результаты об отсутствии классического неравенства Харнака в шарах с центром на Σ для класса рассматриваемых уравнений содержатся в статьях [2] и [3].

Литература

- [1] Алхутов Ю. А., Хренова Е. А. Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Труды МИАН. 2012. Т. 278. С. 7–15.
- [2] Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. О неравенстве Харнака для эллиптического (p, q) -лапласиана // Доклады Академии Наук. 2016. Т. 470. № 6. С. 623–627.
- [3] Алхутов Ю. А., Жиков В. В. О классе вырождающихся эллиптических уравнений // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 16–27.

ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ МНОГОФАЗНОГО $p(x)$ -ЛАПЛАСИАНА³

Алхутов Ю. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yurij-alkhutov@yandex.ru

Сурначёв М. Д. (Россия)

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
peitsche@yandex.ru

В единичном круге $D \subset \mathbb{R}^2$ с центром в начале координат рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что этот круг разделён лучами, выходящими из начала координат, на N упорядоченных против часовой стрелки угловых секторов $A_1, \dots, A_N$, в каждом из которых показатель p принимает постоянное значение:

$$p(x) = p_k, \quad x \in A_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

причём

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_N < \infty. \quad (3)$$

³Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00184-а.

Целью данной работы является доказательство гёльдеровской непрерывности решений уравнения (1), которая устанавливается с помощью подходящего неравенства Харнака для неотрицательных решений данного уравнения.

Для определения решения уравнения (1) введём класс функций

$$W(D) = \{u \in W^{1,1}(D) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\},$$

где $W^{1,1}(D)$ – соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \rightarrow u$ в $L^1(D)$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)} dx = 0.$$

Известно [1], что для показателя, заданного соотношениями (2) и (3), гладкие функции плотны в $W(D)$ — для любой функции $u \in W(D)$ найдётся последовательность $u_j \in C^\infty(D) \cap W(D)$ такая, что $u_j \rightarrow u$ в $W(D)$.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W(D)$, для которой интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad (4)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Для формулировки результата обозначим через B_R открытый круг радиуса R с центром в начале координат, а через A_0 — угловой сектор с вершиной в начале координат, с той же биссектрисой, что и угол A_N , и в два раза меньшего раствора. Ниже Q_R обозначает пересечение сектора A_0 с кольцом $B_R \setminus B_{R/2}$.

Установлен следующий результат.

Теорема 1. *Если показатель $p(x)$ определён соотношениями (2) и (3), то при $R < 1/4$ для неотрицательного решения уравнения (1) в D имеет место неравенство*

$$\sup_{Q_R} u \leq C \inf_{B_R} (u + R),$$

где постоянная C зависит только от $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Из теоремы 1 вытекает гёльдеровская непрерывность решений рассматриваемого уравнения.

Теорема 2. *Если показатель $p(x)$ определён соотношениями (2) и (3), то решения уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру в D .*

Отметим, что до настоящего времени исследовался в основном случай регулярного показателя $p(x)$, удовлетворяющего логарифмическому условию В.В. Жикова [2]. Рассматривался и случай двухфазного показателя (см. [4], [5], [6]), когда границей раздела двух фаз, в каждой из которых показатель регулярен, служит гиперплоскость.

Обратимся к ситуации классического примера В.В. Жикова [3], когда единичный с центром в начале координат разделён на четыре сектора A_1 – A_4 пересечением с квадрантами. В первом и третьем квадрантах показатель p принимает постоянное значение меньше 2, а во втором и третьем квадрантах — больше 2. В обозначениях настоящей работы $N = 4$,

$$A_k = \{0 < r < 1, \pi(k-1)/2 < \varphi < \pi k/2\}, \quad (5)$$

$$p_3 = p_1 < 2, \quad p_4 = p_2 > 2.$$

В этом случае множество гладких функций не является плотным в $W(D)$ и ниже $H(D)$ означает замыкание множества гладких функций в смысле сходимости в $W(D)$. При этом возникает два типа решений (см. [2], [3]) — W -решения, принадлежащие пространству $W(D)$, для которых интегральное тождество (4) выполнено для всех пробных функций $\varphi \in W(D)$ с компактным носителем в D , и H -решения, принадлежащие пространству $H(D)$, для которых

интегральное тождество (4) выполнено для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Известно ([2], [3]), что для показателя p , определённого (5) все W -решения, не являющиеся H -решениями, разрывны в начале координат.

Теорема 3. *Для показателя, определённого (5), все H -решения уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру в D .*

Литература

- [1] Fan X., Wang S., Zhao D. Density of $C^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p(x)}(\Omega)$ with discontinuous exponent $p(x)$ // Math. Nachr. 2006. V. 279. № 1–2. P. 142–149.
- [2] Zhikov V. V. On Lavrentiev’s Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 3. № 2. P. 249–269.
- [3] Жиков В.В. Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4, С. 675–711.
- [4] Acerbi E., Fusco N. A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1994. V. 2. № 1. P. 1–16.
- [5] Алхутов Ю.А. О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ -гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 2. С. 3–28.
- [6] Алхутов Ю.А., Сурначёв М.Д. О неравенстве Харнака для $p(x)$ -лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$ // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 8–56.

ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Алхутов Ю. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yurij-alkhutov@yandex.ru

Сурначёв М. Д. (Россия, Москва)

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
peitsche@yandex.ru

В n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, рассмотрим уравнение

$$Lu = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = 0 \quad (1)$$

с измеримой ограниченной матрицей $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, удовлетворяющей условию равномерной эллиптичности

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leq a\xi \cdot \xi \leq \alpha|\xi|^2, \quad (2)$$

и измеримым сносом $b = (b_1(x), \dots, b_n(x))$. Целью настоящей работы является нахождение условий на снос b , которые гарантируют, что фундаментальное решение $\Gamma(x, y)$ уравнения (1) имеет глобальную двустороннюю оценку

$$C_1|x - y|^{2-n} \leq \Gamma(x, y) \leq C_2|x - y|^{2-n} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Для $b = 0$ эта оценка содержится в [1]. Для уравнений с младшими членами из подходящих классов Лебега локальные оценки типа (3) были установлены в [2]. В работах [3], [4] в предположении гёльдеровской непрерывности коэффициентов a_{ij} было показано, что малость величины $\sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |b(y)| \cdot |x - y|^{1-n} dy$ даёт глобальные оценки типа Нэша-Аронсона для фундаментального решения соответствующего параболического уравнения, откуда оценки фундаментального решения уравнения (1) получаются интегрированием. В настоящей работе оценки (3) получены без дополнительных предположений о гладкости a_{ij} .

Через B_r^x обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x . Пусть $B_r = B_r^0$, $Q_r = B_r \setminus B_{r/2}$. Предположим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 1$ и $t \in (0, 1/8)$ выполняется

$$\int_{B_{tr}^x \cap Q_r} \frac{|b(y)|^2}{|x - y|^{n-2}} dy \leq \omega^2(r)\psi^2(t), \quad \int_{B_t^x \cap B_1} \frac{|b(y)|^2}{|x - y|^{n-2}} dy \leq \omega^2(1)\psi^2(t), \quad (4)$$

где ψ — неотрицательная неубывающая функция, вогнутая на отрезке $[0, 1/8]$, удовлетворяющая условию Дини в нуле

$$N[\psi] := \int_0^{1/8} \psi(\tau) \tau^{-1} d\tau < \infty, \quad (5)$$

а ω — невозрастающая на $[1, \infty)$ функция, удовлетворяющая условию Дини на бесконечности

$$\tilde{N}[\omega] := \int_1^\infty \omega(\rho) \rho^{-1} d\rho < \infty. \quad (6)$$

Пусть также

$$\int_{B_r} |b|^2 dx \leq K \omega^2(r) r^{n-2}, \quad r \geq 1. \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты a_{ij} , b удовлетворяют (2) и (4)–(7). Тогда существует фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее оценке (3), где константы C_1 , C_2 зависят только от n , α , ψ and ω .

В теореме 1 зависимость констант C_1 и C_2 от ψ и ω определяется величинами $N[\psi]$, $\tilde{N}[\omega]$, K , и скоростью сходимости интеграла в (6) на бесконечности (нижним пределом интегрирования, при котором получающийся интеграл достаточно мал). Простые примеры с $b_i = x_i f(|x|)|x|^{-2}$ показывают точность условий теоремы.

Литература

- [1] Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1963. V. 17. P. 45–79.
- [2] Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier. 1965. V. 15. № 1. P. 189–257.
- [3] Zhang Q. A Harnack inequality for the equation $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$, when $|b| \in K_{n+1}$ // Manuscripta Math. 1995. V. 89. P. 61–77.
- [4] Zhang Q. Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u_t = 0$ // Manuscripta Math. 1997. V. 93. P. 381–390.

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ ЕГО КОНИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ, В СЛУЧАЕ ВНЕШНЕГО РЕЗОНАНСА⁴

Антипов А. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
antipant@mail.ru

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
bsbardin@yandex.ru

Рассматривается движение спутника, моделируемого динамически симметричным твердым телом, в центральной ньютоновском гравитационном поле сил. Предполагается, что центр масс спутника движется по некоторой заданной кеплеровской орбите. Если орбита центра масс круговая, то существуют частные стационарные движения спутника, представляющие собой регулярные прецессии. Возможны три типа регулярных прецессий: коническая, цилиндрическая и гиперболоидальная [1]. В случае конической прецессии ось динамической симметрии спутника во все время движения перпендикулярна скорости его

⁴Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.

центра масс и составляет фиксированный угол с нормалью к плоскости орбиты, при этом сам спутник равномерно вращается вокруг своей оси динамической симметрии. На эллиптической орбите коническая прецессия невозможна, но представляет интерес задача о периодических движениях спутника, близких к его конической прецессии [2]. На слабоэллиптической орбите эти движения можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра – эксцентриситета орбиты e .

В настоящей работе выполняется аналитическое построение указанных периодических движений и исследуется вопрос об их бифуркации. Рассматривается случай внешнего резонанса, когда частота собственных колебаний в окрестности конической прецессии равна удвоенной частоте внешнего возмущения, вызванного эллиптичностью орбиты. Применяются методы и алгоритмы работ [3,4,5], позволяющие построить периодические движения в виде рядов по дробным степеням эксцентриситета. С точностью до $e^{2/3}$ получены приближенные аналитические выражения описывающие движения спутника, близкие к его конической прецессии. Аналитически построена поверхность ветвления, которая делит пространство параметров задачи на две области, на одной из которых существует три указанных периодических движения, а на другой – одно.

Литература

- [1] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле // М.:МГУ 1975. 308с.
- [2] Чеховская Т.Н. Резонансные периодические движения осесимметричного спутника на эллиптической орбите //Космические исследования.1986. Т. 24. №1. С. 15–23.
- [3] Бардин Б.С. О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова // ПММ. 1999. Т. 63. № 4. С.538–547.
- [4] Б.С. Бардин Периодические решения систем близких к системам Ляпунова // М: Изд-во МАИ 2005. 60с.
- [5] Bardin B. S. Periodic solutions of nearly Lyapunov system in the external resonance case // Reports on Mathematical Physics, 2000, Vol. 46 No. 1/2, 27–34.

ЛЕММА О НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА⁵

Апушкинская Д. Е. (Россия, Москва)
Российский университет дружбы народов
darya@math.uni-sb.de

Лемма о нормальной производной, известная также как принцип граничной точки или лемма Хопфа-Олейник, является важным инструментом качественного анализа уравнений в частных производных.

В общем виде утверждение леммы состоит в том, что *в достаточно гладкой области суперрешение уравнения в частных производных, принимающее наименьшее значение в некоторой граничной точке и отличное от константы, растет линейно в направлении внешней нормали.*

Большинство известных результатов, связанных с леммой о нормальной производной, относятся к сильным решениям уравнений недивергентного вида (см. [1], [2] и приведенные в них исторические обзоры). Случай дивергентных уравнений мало изучен. Известно, что лемма о нормальной производной неверна для равномерно-эллиптических дивергентных уравнений с ограниченными (и даже с непрерывными) старшими коэффициентами. Поэтому понятно, что необходимо потребовать от старших коэффициентов большей гладкости.

Впервые принцип граничной точки для эллиптических уравнений дивергентного вида был установлен Р. Финном и Д. Гилбаргом (1957), которые рассмотрели двумерные области с $C^{1,\alpha}$ -гладкой границей и уравнения с непрерывными по Гельдеру старшими коэффициентами и непрерывными младшими коэффициентами. Насколько нам известно, лучший результат,

⁵Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100” и гранта РФФИ 18-01-00472.

предшествующий нашему, был установлен В. Козловым и Н. Кузнецовым (2018), которые исследовали случай n -мерных ограниченных $C^{1,\alpha}$ -областей ($n \geq 3$) и уравнения с младшими коэффициентами из пространства L^q , $q > n$, и гельдеровскими старшими коэффициентами.

Аналогичные результаты для параболических уравнений дивергентного вида нам не известны. Однако лемма о нормальной производной для параболического уравнения может быть получена с помощью оценок снизу для функции Грина соответствующего оператора.

В докладе будут продемонстрированы несколько вариантов леммы о нормальной производной для эллиптических и параболических уравнений дивергентного типа. Наши предположения на коэффициенты уравнений и границы областей значительно ослаблены по сравнению с работами предшественников. Фактически наши требования близки к необходимым.

Доклад основан на результатах работы [3], полученных совместно с А.И. Назаровым.

Литература

- [1] Nazarov A. I. A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma // SIAM J. Math. Anal. 2012. V. 44. №1. P. 437–453.
- [2] Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. A counterexample to the Hopf-Oleinik lemma (elliptic case) // Anal. PDE. 2016. V. 9. №9. P. 439–458.
- [3] Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. On the Boundary Point Principle for divergence-type equations // Rend. Lincei Mat. Appl. 2019. V. 30. P. 677–699.

АНТИСИММЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМ ГЕЛЬФАНДА-КАПРАНОВА-ЗЕЛЕВИНСКОГО

Артамонов Д. В. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова, РАНХиГС
artamonov.dmitri@gmail.com

Пусть имеется комплексное пространство $\mathbb{C}^N$ размерности $N = 2^n$. Рассмотрим в нем целочисленную решетку $B \subset \mathbb{Z}^N$. Зафиксируем также элемент $\gamma \in \mathbb{Z}^N$, тогда мы можем построить систему дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида. Пусть $a \in \mathbb{Z}$ - произвольный вектор, ортогональный B . Кроме того, для произвольного $b \in B$ напомним $b = b^+ - b^-$, где $b^\pm \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$.

Гипергеометрическая система Гельфанда-Капранова-Зелевинского имеет вид

$$\sum_i a_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} F = \langle \gamma, a \rangle F,$$

$$\prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{b_i^+} F = \prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{b_i^-} F$$

Пространство решений этой системы имеет явный базис, который состоит из функций, задаваемых как суммы некоторых весьма замечательных рядов - обобщенных гипергеометрических Г-рядов

В рассматриваемом случае $N = 2n$ можно считать, что координаты индексированы произвольными подмножествами $X \subset \{1, \dots, n\}$. Обозначим как e_X соответствующий координатный вектор. В связи с задачами теории представлений нас будет интересовать система, связанная с концентратором решетки

$$B = \mathbb{Z} \langle e_{i,X} - e_{j,X} - e_{i,y,X} + e_{j,i,X} \rangle, \quad i < j < y < X.$$

В этом случае уравнения второго типа системы ГКЗ имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{i,X} \partial z_{j,y,X}} F = \frac{\partial^2}{\partial z_{j,X} \partial z_{i,y,X}} F$$

В докладе будет обсуждаться система из уравнений, получаемых "антисимметризацией" данных уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{i,X} \partial z_{j,Y,X}} F - \frac{\partial^2}{\partial z_{j,X} \partial z_{i,Y,X}} F + \frac{\partial^2}{\partial z_{Y,X} \partial z_{i,j,X}} F = 0$$

Будет построен явный базис в пространстве решений. При этом окажется, что в некотором смысле решения системы ГКЗ выступают как "начальные данные" для решений антисимметризованной системы. Построения базиса будет вестись путем рассмотрения разложения решений в ряды.

Исследование данной системы мотивировано задачами теории представлений. Именно, явная конструкция решений позволяет сделать важный шаг в задаче явного нахождения базиса Гельфанда-Цетлина при регулярной реализации представлений GL_N .

Литература

- [1] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа. УМН, 47:4(286) (1992), 3–82

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Барабанова Л. П. (Россия, Ковров)
ФГБОУ ВО КГТА им. В.А. Дегтярева
lpbarabanova@yandex.ru

Следуя GPS можно наметить некоторые типовые фрагменты математического обеспечения современного статического измерительного комплекса (ИК).

Фрагмент 1. Решение системы условных уравнений

$$F(Z) = t, \quad C_t = \sigma_t^2 \cdot \mathbb{I}_N, \quad Z = ? \quad (1)$$

где $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ – гладкое отображение, $N \geq n$, $Z \in \mathbb{R}^n$ – искомый столбец, σ_t – среднеквадратическая ошибка каждой компоненты измеренного столбца $t \in \mathbb{R}^n$ (измерения равноточны), C_t – ковариационная матрица для t , $\mathbb{I}_N$ – единичная матрица. При $N = n$ к системе (1) применяется метод Ньютона, а при $N > n$ метод наименьших квадратов и соответствующий алгоритм Гаусса-Ньютона [1, с.239-241]. Вместо аналитической матрицы Якоби $J = F'(Z)$ удобно использовать её разностное приближение, получаемое унифицированной процедурой.

Фрагмент 2. Вычисление ошибки. В качестве ошибки измерения в GPS предпочтение было отдано следу ковариационной матрицы C_Z для случайной в силу (1) величины Z : $\sigma_Z = \sqrt{\text{tr}(C_Z)}$. Это позволило ввести в [1, 2] коэффициент чувствительности ИК: $K = \sqrt{\text{tr}((J^T \cdot J)^{-1})}$, связывающий точность прямого измерения на входе и точность на выходе: $\sigma_Z = K \sigma_t$. Мы сохраняем этот подход.

Сам процесс разработки математического и программного обеспечения современного ИК также содержит в себе некоторые унифицируемые части.

Часть 1. Создание прототипа математического обеспечения измерительного комплекса на подходящем алгоритмическом языке габаритных программных операций.

Часть 2. Трансляция кода из габаритных операций в рабочую программу на быстром языке для встроеного микропроцессора.

Для демонстрации предложенной методики разработано математическое обеспечение для комплекса магнитометрического дипольного позиционирования с $m \geq 2$ диполями. В этом случае согласно [3, с.207; 4] будем иметь в (1) следующие атрибуты: $Z = \text{stack}(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^3$ – местоположение приемника (объекта), $y \in \mathbb{R}^3$ – столбец углов для ортогональной матрицы ориентации $O(y)$ объекта в $\mathbb{R}^3$,

$$F = \text{stack}(F_1, \dots, F_m), \quad t = \text{stack}(H_1, \dots, H_m), \quad N = 3m,$$

$$F_j(Z) = O(y) \cdot \Omega(x - a_j) \cdot M_j, \quad j = 1..m, \quad (2)$$

где

$$\Omega(x) = |x|^{-3}(3e(x)e(x)^T - \mathbb{I}_3), \quad e(x) = x/|x|.$$

Здесь $M_j \in \mathbb{R}^3$ – момент (известный) диполя с номером j в точке a_j , $H_j \in \mathbb{R}^3$ – соответствующий (измеряемый) вектор-столбец, т.е. напряженность поля в точке x .

В работах [4, 5] рассматривался случай в (2) трех совмещенных диполей (система уравнений (9×6)). Численные эксперименты показывают, что достаточно двух не обязательно совмещенных диполей (система уравнений (6×6)).

Литература

- [1] Барабанов О.О., Барабанова Л.П. Математические задачи дальномерной навигации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 272 с.
- [2] Барабанова Л.П. О коэффициенте чувствительности спутниковой навигационной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 144-151.
- [3] Тамм И. Е. Основы теории электричества. — 10-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 504 с.
- [4] Волковицкий А. К., Каршаков Е. В., Павлов Б. В. Позиционирование подвижных объектов в низкочастотном электромагнитном поле. Ч. 1. Базовый алгоритм относительного позиционирования // Проблемы управления. 2013. № 1. С. 57–62.
- [5] Тхоренко М. Ю., Каршаков Е. В., Павлов Б. В., Козлов А. В. Алгоритм позиционирования подвижного объекта в низкочастотном электромагнитном поле // Автомат. и телемех., 2015. вып. 11. С.160–173.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ⁶

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
bsbardin@yandex.ru

Рачков А. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
alexey-rachkov@yandex.ru

Рассматривается движение механической системы, состоящей из твердого тела (корпуса) и материальной точки, движущейся внутри него по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела, причем угловая скорость кругового движения точки постоянна. Предполагается, что тело находится на наклонной плоскости, трение между корпусом и плоскостью описывается моделью сухого кулоновского трения. В [1-3] было выполнено полное качественное исследование движения указанной механической системы по горизонтальной плоскости. В [4] аналогично исследовалось движение данной системы с учетом сил сухого кулоновского и вязкого трения. Вопросы численного моделирования движения корпуса по наклонной плоскости рассматривались в [5].

В данной работе исследуются движения корпуса с периодически меняющейся скоростью. Исследование выполнено для всех возможных значений параметров системы и углов наклона опорной плоскости к горизонтали. Установлено, что в зависимости от значений параметров задачи возможны несколько различных периодических режимов движения: корпус соскальзывает вниз по наклонной плоскости без остановок, корпус движется вниз с остановками, корпус может двигаться как вниз, так и вверх, останавливаясь и изменяя направление скорости на противоположное. В пространстве параметров задачи были построены области, в которых реализуется тот или иной периодический режим

⁶Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00116).

движения. Показано, что движения корпуса с периодически меняющейся скоростью являются асимптотически устойчивыми движениями. Оказалось, что всегда существует единственный периодический режим, на который в зависимости от значений параметров задачи движение корпуса выходит за конечный или бесконечный промежуток времени. Были также определены области значений параметров задачи, в которых перемещение корпуса за период обращения точки по окружности будет положительным, отрицательным и нулевым.

Литература

- [1] Bardin B. S., Panev A. S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, Vol. 8. pp 135–141.
- [2] Бардин Б. С., Панёв А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // *Труды МАИ*, 2015, Выпуск № 84.
- [3] Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 519–542.
- [4] Бардин Б. С., Панёв А. С. О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2019, Т. 65, № 4, С. 557–592.
- [5] Сорокин К. С. Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счет движения внутренних осциллирующих масс // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009, № 6, С. 150–158.

О СПЕКТРЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Безяев В. И. (Россия, Москва)

Российский университет дружбы народов

vbezyaev@mail.ru

Для линейных эллиптических дифференциальных операторов $P(x, D)$ с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами, рассматриваемых в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеющих непрерывный спектр, в работе [1] с помощью алгебр фон Неймана была введена функция распределения $N(\lambda)$. Эту функцию можно интерпретировать так же, как обычную функцию распределения дискретного спектра, но с использованием обобщенной размерности и обобщенного следа. В [1] доказано, что множество точек роста этой функции совпадает с непрерывным спектром исходного оператора $P(x, D)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что позволяет, в частности, оценивать лакуны по асимптотике функции $N(\lambda)$.

Для скалярных п.-п. гипоеллиптических операторов асимптотика функции распределения $N(\lambda)$ приведена, например, в [2]. В данной работе находится асимптотика с оценкой остаточного члена функции $N(\lambda)$ для гипоеллиптических систем с п.-п. коэффициентами. Для нахождения указанной асимптотики применяется метод приближенного спектрального проектора для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр ([3]).

Пусть $P(x, D)$ — квадратная матрица порядка N скалярных линейных дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x, \xi)$ — ее матричный символ. Тогда оператор P можно представить в виде

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int d\xi \int e^{i(x-y)\cdot\xi} \hat{p}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где функция

$$\hat{p}(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{(-2i)^{|\alpha|} \alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} p(x, \xi)$$

— символ Вейля оператора P . Последняя сумма конечна, так как $p(x, \xi)$ — многочлен по ξ .

Будем предполагать, что P — матричный дифференциальный оператор с $N \times N$ -матричным символом Вейля $\hat{p}(x, \xi)$, элементы матрицы $\hat{p}(x, \xi)$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ и являются п.-п. функциями по x . Кроме того предполагаем, что P — дифференциальный оператор

с гипоеллиптическим символом Вейля $\hat{p}(x, \xi)$ (см., например, [4]) и $\hat{p}(x, \xi)$ положительно определенная эрмитова матрица при всех $(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$.

Обозначим через $\lambda_i(x, \xi)$ ($i = 1, \dots, N$) собственные числа матрицы $\hat{p}(x, \xi)$, где $\lambda_1(x, \xi) \leq \lambda_2(x, \xi) \leq \dots \leq \lambda_N(x, \xi)$ при фиксированных $(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$. Из непрерывной зависимости собственных чисел от элементов матрицы следует п.п. по x и непрерывность по $\xi \in \mathbb{R}^n$ функций $\lambda_i(x, \xi)$, а из теоремы Коши о вычетах непосредственно получаем, что функции $\lambda_i(x, \xi)$ являются C^∞ -гладкими по (x, ξ) во всех точках, кроме тех, где $\lambda_i(x, \xi) = \lambda_k(x, \xi)$, $i \neq k$ ($i, k = 1, \dots, N$). Будем предполагать, что собственное значение $\lambda_1(x, \xi)$ матрицы $\hat{p}(x, \xi)$ удовлетворяет условию $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \inf_x \lambda_1(x, \xi) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены приведенные выше условия на оператор P . Тогда существует такая положительная постоянная K , что если интервал (a, b) не содержит спектра оператора P в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то выполняется оценка

$$|b - a| \leq K a^{1-\nu},$$

где ν - положительная постоянная, определяемая по символу $\hat{p}(x, \xi)$.

Литература

- [1] Шубин М. А. Плотность состояний для самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1978. С. 243–275.
- [2] Розенблум Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. Т. 64, 1988.
- [3] Безяев В. И. Об асимптотике плотности состояний гипоеллиптических почти-периодических систем // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65, выпуск 4. С. 593–604.
- [4] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 3. // М., 1987.

ВНУТРЕННЕЕ РАССЕЯНИЕ АРНОЛЬДА В ГРАФЕНЕ⁷

Богаевский И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН

bogaevsk@mccme.ru

Мы изучаем решение стационарного безмассового уравнения Дирака на плоскости

$$\hat{H}\psi(x, y) = w\delta(x + a, y), \quad \hat{H} = \sigma_0 x + \sigma_x \hat{p}_x + \sigma_y \hat{p}_y, \quad (1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка плоскости, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — неизвестное спинорное поле, $w \in \mathbb{C}^2$ — известный спинор, $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$ — матрицы Паули, δ — дельта-функция Дирака, $U(x, y) = x$ — потенциальная энергия частицы в постоянном электрическом поле, $\hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$, $\hat{p}_y = -i\hbar \partial_y$ — операторы импульса, $0 < \hbar \ll 1$ — малый вещественный параметр. Решение рассматриваемого уравнения единственно при выполнении условия предельного поглощения, которое означает, что квазичастицы не прилетают из бесконечности.

С физической точки зрения уравнение (1) описывает стационарный поток квазичастиц в графене с нулевой энергией из источника, расположенного в точке $x = -a$, $y = 0$. Эти квазичастицы (электроны при $x < 0$ и дырки при $x > 0$) являются фермионами с нулевой эффективной массой и скоростью Ферми $v_F \approx 10^6$ м/с — эффективной скоростью света в графене.

⁷Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ЯОПН в рамках научного проекта №19-51-50005 «Теория особенностей и ее приложения к дифференциальным уравнениям и дифференциальной геометрии».

В настоящей работе вычислена асимптотика решения уравнения (1) при $h \rightarrow +0$ и $x, a > 0$. С физической точки зрения это асимптотика дырок, образовавшихся из электронов, испускаемых источником, т.е. асимптотика превращения электронов в дырки (частиц в античастицы). Это пример внутреннего рассеяния волн — явления, встречающегося в системах линейных дифференциальных уравнений математической физики достаточно общего вида и описанного В. И. Арнольдом на уровне геометрической оптики.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ⁸

Бойков И. В. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет

i.v.boykov@gmail.com

Бойкова А. И. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет

allaboikova@mail.ru

Методы конечных и граничных элементов являются двумя из наиболее часто используемых численных методов для решения задач в механике разрушения и в механике композитных материалов. Альтернативным подходом является метод гиперсингулярных интегральных уравнений. Он сводит двумерное дифференциальное уравнение в частных производных к одномерному гиперсингулярному интегральному уравнению и, в целом, является более точным, чем вышеупомянутые методы.

Задачи механики разрушения приводят к трем типам гиперсингулярных интегральных уравнений (ГПУ):

в случае трещины в бесконечной полосе однородного материала -

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t); \quad (1)$$

в случае трещины в бесконечной полосе неоднородного материала -

$$\frac{a(t)}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{(\tau - t)^2} + \frac{\alpha}{\tau - t} + h(t, \tau) \right] x(\tau) d\tau = f(t); \quad (2)$$

в случае задачи на сдвиг в плоскости из неоднородного материала -

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{a}{(\tau - t)^3} + \frac{b}{\tau - t} + h(t, \tau) \right] x(\tau) d\tau + cx'(t) = f(t), \quad \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 0. \quad (3)$$

Уравнения вида (1), (2) также находят широкое применение при исследовании композитных материалов.

Наряду с уравнениями первого рода в задачах механики сплошных сред широко применяются и ГПУ второго рода.

Так как аналитические методы решения ГПУ известны только для очень узкого класса уравнений, при решении прикладных задач используются численные методы.

Подробный обзор приближенных методов решения ГИУ представлен в [1].

Данная работа посвящена приближенным методам вычисления гиперсингулярных интегралов и решения ГИУ.

Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов, полученных до 2008 г. представлен в [2]. В работе будут освещены основные результаты, полученные в период 2009 - 2020 г.г.

⁸Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

В разделе, посвященным приближенным методам решения ГИУ, особое внимание предполагается уделить классам уравнений, для которых к настоящему времени не построены и не обоснованы численные методы, В частности, граничной задаче (3).

В отличие от большинства работ по приближенным методам решения ГИУ, в которых применяются алгоритмы, позволяющие нивелировать сингулярности, в подходе, используемом в данной работе, наоборот, используются свойства сингулярности. Для решения ГИУ применяется непрерывный метод решения операторных уравнений [3], который зарекомендовал себя при решении нелинейных некорректных задач [4].

Литература

- [1] Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9(37). №3. С. 244–272.
- [2] Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета, 2009.
- [3] Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1308–1314.
- [4] Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. May 2018. V. 127. P. 280–305.

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ЗАДЕРЖКАМИ

Бойков И. В. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет

i.v.boykov@gmail.com

Кривулин Н. П. (Россия, Пенза)

Пензенский государственный университет

krivulin@bk.ru

Одно из центральных направлений в теории автоматического управления — исследование стабилизации динамических систем. Вопросы стабилизации динамических систем активно изучаются в последние десятилетия и им посвящено большое число работ. Импульсом, стимулирующим возросший интерес к этой проблематике, была публикация в 1999 г. статьи Р. Брокетта [1], в которой была сформулирована следующая проблема.

Проблема Брокетта. Дана тройка матриц (A, B, C) . При каких условиях существует матрица $K(t)$ такая, что система $\frac{dx}{dt} = Ax + BK(t)Cx$, $x \in R^n$, асимптотически устойчива.

Решению этой проблемы посвящено большое число работ. В книге [2] содержится библиография работ, посвященных методам стабилизации линейных систем.

В работах [3],[4],[5] проблема Брокетта была распространена на нестационарные системы уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)K(t)C(t)x(t)$, $x \in R^n$,

на нелинейные системы $\frac{dx(t)}{dt} = A(t, x(t - \eta)) + B(t)K(t)C(t)x(t)$, $x \in R_n$,

на системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} = A(t) \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + B(t) \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + C(t) \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + L(t)K(t)M(t)u(t, x_1, x_2).$$

Рассматривались также разностные аналоги этих систем.

В этих работах предложены необходимые и достаточные условия стабилизации перечисленных выше систем нестационарными матрицами $K(t)$.

В конце прошлого столетия начало активно развиваться новое направление в теории управления - стабилизация хаоса обратной связью с запаздыванием. Этому направлению посвящено большое число публикаций, достаточно полный обзор которых содержится в статье [6].

В данной работе исследуется поведение динамической системы при введении обратной связи в модель стабилизации Брокетта.

Рассмотрим непрерывную систему $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $y(t) = C(t)x(t)$, где $x \in R_n$ – состояние, $y \in R_l$ – выход, а $u \in R_m$ – управление, которое ищется в форме обратной связи по выходу $u(t) = K(t)(y(t) - y(t - \eta))$. Здесь $\eta, \eta \geq 0$, – запаздывание.

Тогда замкнутая система приобретает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)K(t)C(t)x(t) - B(t)K(t)C(t - \eta)x(t - \eta). \quad (6)$$

В случае, если матрица C стационарная, система (6) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)K(t)C(t)(x(t) - x(t - \eta)). \quad (7)$$

В работе находятся семейства матриц $K(t)$ и границы запаздываний η , при которых системы (6) и (7) будут асимптотически устойчивы.

Литература

- [1] Brockett R. A. Stabilization Problems // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer. 1999. P. 75–78.
- [2] Леонов Г. А., Шумафов М. М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. - С.-Петербург: Издательство С.-Петербургского государственного университета. 2002.
- [3] Бойков И. В. К стабилизационной проблеме Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С 76–82.
- [4] Бойков И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. - Пенза: Издательство Пензенского государственного университета. 2008.
- [5] Бойков И. В. Проблема Брокетта для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 4 (20). С. 3–13.
- [6] Леонов Г. А., Шумафов М. М. Стабилизируемость неустойчивых состояний равновесия систем по Пирагасу нестационарной обратной связью с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 6. С. 87–98.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТОВ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ⁹

Бортаковский А. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
asbortakov@mail.ru

Урюпин И. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
uryupin@yandex.ru

Рассматриваются задачи оптимизации маршрутов плоского движения разных объектов управления. На первом этапе исследуется модель переключаемой системы (ПС), описывающая плоское движение объекта по прямоугольной сетке. Часть узлов сетки недопустима для передвижения – в них находятся препятствия. Прямолинейное движение происходит с постоянной скоростью. В каждом допустимом узле сетки объект может мгновенно изменять направление движения на 90 градусов относительно текущего направления. Такой поворот считается переключением. Не исключаются мгновенные многократные переключения, в частности, разворот. Координаты начального и конечного положений объекта, а также начальное направление движения, заданы. Допустимыми считаются траектории, соединяющие начальную и конечную позиции и проходящие только по допустимым узлам.

⁹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00128-а).

Количество переключений, последовательность узлов, в которых происходят повороты, а также направление каждого поворота – все эти параметры определяют траекторию движения объекта, т.е. являются управлением. Точнее, они составляют "управляющий комплекс" в рассматриваемой модели движения. Качество управления оценивается двумя функционалами. Первый функционал – количество переключений, второй – время движения (быстродействие). Требуется найти множество управлений, минимизирующих количество переключений, а на этом множестве – управление, оптимальное по быстродействию.

Для решения поставленной задачи был разработан алгоритм, основанный на достаточных условиях оптимальности [1]. Методика построения функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана) состоит в нахождении вспомогательных функций – так называемых образующих функций цены. Существенную роль при этом играет еще одна вспомогательная функция – двухпозиционная функция цены [2]. В результате работы алгоритма находится оптимальная по быстродействию траектория с наименьшим количеством поворотов.

Исследуемая на первом этапе задача управления (ПС), представляет самостоятельный интерес. Однако, для полученной оптимальной траектории возможно и другое применение. Она может служить опорным маршрутом для движения другого объекта управления, а именно беспилотного летательного аппарата (БЛА). Заметим, что оптимальная траектория представляет собой ломаную, соседние звенья которой взаимно перпендикулярны. Такие траектории естественны в городе с регулярной квартальной застройкой. Однако движение БЛА точно по этому маршруту невозможно. Поэтому предлагается использовать только опорные пункты – вершины оптимальной траектории, а саму ломаную заменить траекторией Дубинса [3].

Таким образом, на втором этапе решается задача оптимизации траектории Дубинса, проходящей через заданные промежуточные точки. Так как решение задачи Дубинса для траектории, связывающей начальную и конечную позиции (без промежуточных точек), известно, то задача с промежуточными точками сводится к отысканию оптимальных направлений движения в опорных пунктах. Это задача конечномерной минимизации может быть решена различными методами.

Литература

- [1] Бортакровский А.С., Урюпин И.В. Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. №4. С. 29-46.
- [2] Бортакровский А.С., Немыченков Г.И. Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 52-77.
- [3] Dubins L.E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents. // Amer. J. Math. 1957. vol. 79. no. 3. pp. 497-516.

КОМПЬЮТЕРНАЯ СХЕМА АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Буланов С. Г. (Россия, Таганрог)

Ростовский государственный экономический университет

bulanovtspi@mail.ru

Представлена схема анализа устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), ориентированная на компьютерную реализацию.

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором выполнены все условия существования и единственности для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_0$; в области $R : \{ t_0 \leq t < \infty; \forall Y(t), \tilde{Y}(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_0 \}$ функция $F(t, Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t , компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$|f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})| \leq L |y_k - \tilde{y}_k|,$$

$$L = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty), \forall (t, Y), (t, \tilde{Y}) \in R, \forall k = 1, \dots, n.$$

Пусть система (1) преобразована к виду, при котором анализ устойчивости ее решения сводится к анализу устойчивости нулевого решения

$$\frac{dV}{dt} = U(t, V), \quad V(0) = \bar{O}. \quad (2)$$

Покомпонентное сопоставление знаков решения, первой и второй производных решения приводит к достаточным условиям устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости задачи (2) [1].

Теорема 1. Если $\exists \Delta > 0$, такое, что $\forall V(0) : 0 < \|V(0)\| \leq \Delta, \forall k \in \overline{1, n}$ верны неравенства $v_k(t) \geq 0, u_k(t, V) \leq 0, u'_k(t, V) \geq 0$ или $v_k(t) \leq 0, u_k(t, V) \geq 0, u'_k(t, V) \leq 0 \forall t \in [0, \infty)$, то решение задачи (2) устойчиво.

Теорема 2. Если $\exists \Delta_1 > 0, \Delta_1 \leq \Delta$, такое, что $\forall V(0) : 0 < \|V(0)\| \leq \Delta_1, \forall k \in \overline{1, n}$ верны неравенства $v_k(t) \geq 0, u_k(t, V) < 0, u'_k(t, V) \geq 0$ или $v_k(t) \leq 0, u_k(t, V) > 0, u'_k(t, V) \leq 0 \forall t \in [0, \infty)$, то решение задачи (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Если для задачи (2) $\forall \Delta_1 > 0 \exists V(t) : 0 < \|V(t)\| \leq \Delta_1, \exists k \in \overline{1, n}, \exists t_0 > 0$, такие, что неравенства $v_k(t) \geq 0, u_k(t, V) > 0$ или $v_k(t) \leq 0, u_k(t, V) < 0$ верны $\forall t \in [t_0, \infty)$, то решение задачи (2) неустойчиво.

Замечание 1. В случае знакопостоянства на полуоси соответственных компонентов $v_k(t), u_k(t, V), u'_k(t, V)$ достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости теорем 1-3 являются также необходимыми.

В общем случае аналитически определить асимптотическое поведение знака решения, его первой и второй производной не всегда возможно. Однако это всегда можно сделать с помощью компьютера: достаточно по ходу приближенного решения выводить $v_k(t), u_k(t, V), u'_k(t, V)$.

Литература

- [1] Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости по Ляпунову // Деп. в ВИНТИ. 20.08.2019. № 69. 35 с.

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД С ТЕЧЕНИЯМИ¹⁰

Булатов В. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН

internalwave@mail.ru

Владимиров Ю. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН

vladimyura@yandex.ru

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место вызывает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками. В современных научных исследованиях при анализе

¹⁰Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 20-01-00111А

динамики внутренних гравитационных волн в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе. В реальных океанических условиях необходимо рассматривать внутренние гравитационные волны, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем вариация скорости по вертикали составляет десятки см/сек и м/сек, то есть имеет тот же порядок, что и максимальные скорости внутренних гравитационных волн. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин внутренних гравитационных волн, а масштаб временной изменчивости много больше периодов внутренних волн, то естественной математической моделью является случай стационарных и горизонтальных однородных сдвиговых течений. На больших расстояниях реальные источники возмущений (тайфун, возмущения атмосферного давления, циклон) допускают физически обоснованную аппроксимацию некоторой системой точечных локализованных источников, взятых с определенными весами. Точечным нестационарным источником генерации в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, который обтекается сдвиговым течением и периодическим приливным течением. Такой подход является физически обоснованным для решения многих задач моделирования генерации внутренних гравитационных волн в океане с учетом сдвиговых течений. Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной среде с учетом сдвиговых течений. Для решения задачи использовано постоянное распределение частоты плавучести и линейная зависимость сдвигового течения от глубины. Используя модельную гидрологию, получены аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Подробно изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические свойства дисперсионных кривых. В приближении стационарной фазы построены интегральные представления решений для дальних волновых полей. Численно рассчитаны фазовые картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн для данной модели волновой генерации. Полученные результаты показывают значительную зависимость фазовой структуры возбуждаемых волновых полей от соотношения амплитуд придонного и приповерхностного течений для различных гидрологических моделей.

Литература

- [1] Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015.
- [2] Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Аналитические решения уравнения внутренних волн в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. №7. С. 1174–1183.

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ТРЁХМЕРНОЙ ПРИСТЕННОЙ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ¹¹

Бут И. И. (Россия, Жуковский)

Московский физико-технический институт

but.ii@phystech.edu

Гайфуллин А. М. (Россия, Жуковский)

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского

gaifullin@tsagi.ru

¹¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 19-01-00163.

Рассматривается затопленная стационарная ламинарная струя вязкой несжимаемой жидкости, вытекающая из трубы и распространяющаяся вдоль твёрдой плоскости. Основы математической модели данного течения заложены в [1]. При достаточно малой вязкости струя занимает узкую область в пространстве и описывается параболизированными уравнениями Навье–Стокса, у которых существует однопараметрический класс автомодельных по продольной координате решений.

В настоящей работе для данной струи получено численное решение уравнений Навье–Стокса в трёхмерной стационарной постановке. Подтверждена гипотеза [1], что поле течения на большом расстоянии от выходного сечения трубы описывается автомодельным решением параболизированных уравнений Навье–Стокса.

Приведём вид автомодельного решения в цилиндрических координатах:

$$u(x, r, \varphi) = \xi^{-(2k-1)} U(\eta, \varphi)$$

$$v(x, r, \varphi) = \varepsilon \xi^{-k} V(\eta, \varphi)$$

$$w(x, r, \varphi) = \varepsilon \xi^{-k} W(\eta, \varphi)$$

$$p(x, r, \varphi) = \varepsilon^2 \xi^{-2k} P(\eta, \varphi)$$

$$\xi = \varepsilon \cdot x, \quad \eta = r/\xi^k$$

Здесь x – продольная координата, совпадающая с направлением распространения струи; r – радиальная координата; φ – азимутальный угол; u, v, w – проекции вектора скорости на орты цилиндрической системы координат (x, r, φ) ; p – давление; ε – обратное число Рейнольдса, равное отношению кинематического коэффициента вязкости к произведению диаметра трубы на среднерасходную скорость в трубе; k – показатель автомодельности.

Наблюдается хорошее согласование данной асимптотики с численным решением в дальнем поле струи при числе Рейнольдса $\varepsilon^{-1} \geq 100$. Показатель автомодельности найден из численного решения: $k \approx 1.33 \approx 4/3$. Численно установлен красивый факт: геометрическое место точек нулевой радиальной скорости в поперечном сечении струи имеет вид полуокружности. По зависимости радиуса полуокружности от числа Рейнольдса и продольной координаты определён закон расширения струи, учтённый при выборе автомодельной переменной η .

В [1] предложен интегральный инвариант трёхмерной пристенной струи, основанный на законе сохранения момента импульса. Данный инвариант приводит к показателю автомодельности $k = 2$, который не реализуется в численном решении. Поэтому проблема установления закона сохранения в трёхмерной пристенной струе остаётся открытой.

В [2],[3] получено автомодельное решение уравнений пограничного слоя для плоской пристенной струи, вытекающей из бесконечно тонкой щели. Показатель автомодельности в этом решении определён аналитически с помощью интегрального инварианта течения, который имеет размерность произведения потока импульса на расход.

Литература

- [1] Krechetnikov R., Lipatov I. Hidden Invariances in Problems of Two-dimensional and Three-dimensional Wall Jets for Newtonian and non-Newtonian Fluids // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2002. Vol. 62. №6. P. 1837–1855.
- [2] Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твёрдой стенки // Труды Ленинградского политехнического института. 1953. №5. С. 24–31.
- [3] Glauert M. B. The wall jet // Journal of Fluid Mechanics. 1956. Vol. 1. P. 625–643.

ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ФУНКЦИИ И КРИВЫЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОЛН И В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Бырдin В. М. (Россия, Москва)

Институт Машиноведения им. А.А. Благодного РАН

V_M_Byrdin@mail.ru

Анализируются дисперсионные уравнения общей междисциплинарной теории волн, как новый цельный креативный раздел механики и электродинамики, теоретической и математической физики. В основе моего, эффективного метода лежат теоремы о неявных функциях, положения комплексного анализа и геометрии кривых. Достижима редукция (и упрощение) произвольной, трансцендентной или виртуальной, сколь угодно сложной функции $D(u; z)$ к простым полиномам. Изучаются кресты и звёзды (пересечения), извилины и петли, пики (заострения) и овалы и др. сингулярные точки, элементы и фигуры. Дана классификация дисперсионных уравнений, функций и кривых. Определяется общая структура произвольных, трансцендентных и виртуальных кривых и функций, а также высших алгебраических (степени $n \geq 3$) и, прежде всего, дисперсионных.

1. Ведение. О дисперсионных уравнениях и диспергирующих волнах. В антитезу дифференциальным уравнениям, стоящим в центре нашей Конференции и всего матанализа со времён Эйлера и Ньютона и весьма развитых в математической физике и в ряде физико-технических отраслей, выделяем дисперсионные уравнения общей многопрофильной междисциплинарной теории волн в современной механике и электродинамике и шире, в теоретической и математической физике. Волны – наиболее широкий и универсальный объект физической науки, они «пронизывают всё здание современной и классической физики» (акад. Кикоин И.К. [1]), и все частицы – суть волны де Бройля, по квантовому дуализму. Большинство волновых процессов диспергирующие (в отл. от дисперсии математической). Дисперсионные уравнения (в узком, собственном смысле $D(\sigma; \nu) = 0$, σ – волновое число, ν – частота, D – аналитическая функция), как и дисперсионные функции и кривые $\sigma(\nu)$ и подкласс анизотропных систем $\nu(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, описывают законы дисперсии волны $\exp(i(\sigma r - \nu t))$, волнового фактора или ядра интеграл-преобразования, как узловых элементов теории и технологий. Дисперсионные уравнения (ДУ) непосредственно определяют волновую кинематику, целый спектр явлений и свойств, многие важные параметры и характеристики волны любой физической природы. Это фазовая и групповая (энергетическая) скорости, длина-волны, задержка и другие азбучные атрибуты. А в анзаце (в формуле, анализе и в матем. расчёте) ещё и показатель преломления, угол отражения, доплеровский сдвиг, диссипативное затухание, условия излучения (матем., в краевых задачах) и другое. По сути, около половины количественных данных и качественных характеристик волны детерминированы и рассчитываются по ДУ-ям непосредственно. А опосредованно – и амплитудные, и энергетические данные, т.е. волна в целом.

2. Классы, типы и подтипы дисперсионных уравнений, функций и кривых.

Определение 1а. Соответственно математическим типам числовых функций, различаем три основных класса дисперсионных функций, уравнений и кривых. Это алгебраические, трансцендентные и виртуальные ДУ, дисперсионные функции и дисперсионные кривые. **1б.** Виртуальные – полученные численно или экспериментально. **1в.** Трансцендентный класс делится на элементарные и специальные дисперсионные объекты (т.е. ДУ, функции и кривые). **1г.** Трансцендентный и алгебраический классы – на явные и неявные типы, с преобладанием второго. **1д.** Наиболее представительны (наглядны и образны) дисперсионные плоские кривые и 3D-поверхности. Наиболее аналитически развиты неявные трансцендентные уравнения, которые, в своём большинстве, чётны по σ и ν . Им соответствует, как правило, бесконечный модовый спектр, бесконечное счётное множество $u_n(\nu)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и $u = \sigma + i\alpha$. **1е.** Вещественный спектр $\sigma_n(\nu)$ – физически и технологически наиболее важный спектр бегущих волн, несущих мощность и сигнал.

Виртуальный класс функций и кривых [3, 5], и не только дисперсионных, а произвольных, наиболее широкий и всё более растущий в силу прогресса вычислительных методов и экспериментальных работ в механике и электродинамике [2-4 и мн. др.]. Наиболее

информативны и познавательны асимптотики, алгебраические и элементарные функции, а весьма эффективна алгебраическая редукция [5].

Типичные элементы и компоненты гладких плоских кривых и функций.

Пример 1.а. Дисперсионные уравнения упругих волн Лэмба в однородной пластине весьма типичный пример неявного трансцендентного уравнения, крайне востребованного [3, 6 и мн. др.] и обманчиво элементарного: $D(\sigma, \nu, g) = 4\sigma^2 \beta_1 \tan \beta_1 + (2\sigma^2 \nu^2)^2 \tan \beta_2 / \beta_2$, $\beta_K^2 = \nu^2 P_K^2 \sigma^2$, $K = t, l$, $P_T = 1$, $P_L = g = C_T / C_L$ (здесь C_T и C_L – скорости поперечных и продольных плоских волн в среде; два ДУ – по $P_K = P_L$, $K = 1, 2$).

Пример 1.б. Весьма, наиболее типична следующая, выделенная из бесконечного спектра дисперсионная кривая – рис. 1.

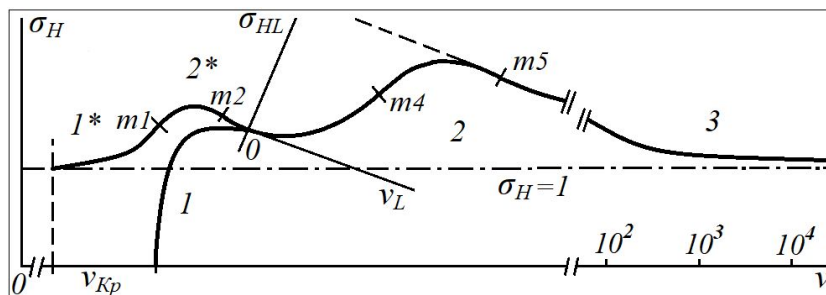


Рис. 1: Три характерных участка типичной дисперсионной кривой: 1 – критическая область; 2 – извилины; 3 – квазипрямая асимптота на ∞ -ть в ∂B . Локальные оси σ_L и ν_L для отдельной извилины; m_k – точки перегиба. 1^* и 2^* – элементы поверхностной волны, с обрывом на ν_{KP} . Нормировка для компактности риска: $\sigma_H = \sigma / \sigma_0$, $\sigma_0 = \nu / C_\infty$.

3. Метод редукции, экспликация фигур и структура плоских кривых.

3.1. Простые корни, голоморфные функции и гладкие кривые. Центром анализа являются неявные дисперсионные уравнения $D(\sigma; \nu) = 0$. Виртуальные сводятся к ним после постулата или доказательства теоремы существования функции D или $f(\nu)$. Т.о, по теореме о неявных функциях имеем, как правило, простые корни, голоморфные функции и гладкие кривые $f(\nu, p)$ на всём, $m + 1$ мерном множестве переменных, частоты ν и др. параметров $\{p_j\}^m$ волноводной системы, за искл. счётного множества сингулярных областей.

3.2. Сингулярные области. Анализ на базе изящной Подготовительной теоремы Вейерштрасса, ПТВ, и двойной, последовательной редукции к полиномам произвольной трансцендентной функции $D(u; z)$, в общем, сколь угодно сложной (и не только $F(f(\varphi(\dots)))$). Откуда сведение (редукция) общего анализа к алгебраистике низших полиномов по $u = \sigma + i\alpha$ и по $z = \nu + i\gamma$. Например, 4-ёхкратная сингула в нуле $\sigma = (\nu(1 + a_2\nu + a_3\nu^2 + \dots))^{1/4} \sim \nu^{1/4} + d_2\nu^{3/4} + 0(\nu^{5/4})$. Также крест простой (пересечение двух гладких линий) или бидвукратная сингула по нашей формуле: $\sigma \sim \sigma_0 + a_1\nu + b_2\nu(1 + b_3\nu + 0^2)^{1/2} + 0^2$; $0^2 = 0(\nu^2)$. И так далее, другие *сингулы* (особенности), области и элементы. Исторически первый крест, по-видимому, описал Никомед (до н.э.), хотя и косвенно, в своей Конхоиде; термин же из [7, с. 7].

3.3. Сингулярные фигуры. Извилины, перегибы и дуги. Кресты и звёзды. Овалы и пики (заострения). Петли и спирали, узлы и косы. Обрывы и сгущения, сингулы в нуле и на ∞ -ти и другое. Синг-фигуры – суть локальные и характерные компоненты плоских кривых и гладких функций. В целом возможна экспликация (выявление) синг-фигур и общей структуры трансцендентных и виртуальных функций и кривых. Эти вопросы весьма актуальны в геометрии кривых, где преобладает алгебраистика, а трансцендентная теория в застое, что признаётся и самими математиками, и характерно, что наш, *мировой* журнал назван «Алгебра и анализ», см. в [7]. Мы исходили из физической теории волн, в которой исследование (теория, расчёт и опытные измерения [2-6]) дисперсионных и других, крайне сложных кривых составляют значительную проблему.

Дуга, вечный образ и новый анзац. Простейший и самый бытующий *элемент* дисперсионных функций, как и произвольных плоских кривых и гладких функций это дуга – *ветвление*, описываемая именно *квазипараболой*: $\sigma(\nu) \sim \nu^{1/2}$, $K = 1$, много реже $K = 2, 3, \dots$

(Наше следствие из теоремы ПТВ). Так, на рис. 2 две дуги, на рис. 1 семь.

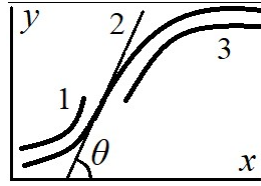


Рис. 2: Извилина и три её элемента, две дуги и квазипрямая перегиба.

Извилина (наше, матем. новое понятие). Наиболее существенный и имманентный компонент всякой, достаточно сложной кривой, рис. 2. Простейшая из алгебраических – классическая кубика x^3 .

Теорема 1. Любая гладкая извилина строго описывается тремя локальными квазиполиномами.левой дугой, квазипараболой $f \sim \sim a \sim x^{2N}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, развёрнутой в первой локальной системе координат (в 1ом локусе). Перегибом, квазипрямой $x + a_3 x^3 + 0^{2m+1}$ во втором локусе. И правой дугой, псевдопараболой в 3ем локусе $a + x^{2N}$. (значок локуса L опускаем; $0^{2m+1} = 0(x^{2m+1})$, $m = 2, 3, \dots$).

Координаты, локальные (сдвигом и поворотом) $y_L 0 x_L$ и базовые $y 0 x$ – например, на рис. 1. Извилина $\sigma(\nu)$ обратной волны имеет отрицательный наклон [2,3,5,6].

О звёздах, многолучевых пересечениях (новое понятие, в отл. от известных узлов, как особых точек дифференциальных уравнений с многолучевыми кривыми). На сегодня моё, неаналитическое (в смысле комплексного анализа) решение: $f \sim x|(1+ax+\dots)^{1/n}| \cos(2\pi m/n)$, $n = 2, 3, 4, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$. При $n = 2$ – простой крест (п. 3.2).

Петли и спирали, пики и кресты. В отл. от классических, точечных – закрученных вокруг точки, мною введены спирали осевые, тоже плоские, но закрученные вокруг прямой оси, ([5], ср., например, [8, 9]). Они имеют петли, пики и кресты. *Пика* – мой термин, т.е. заострение 1-го рода.

Предложение 1. Спираль осевая – периодическая регулярная кривая, содержащая на своём шаге петли и кресты. Петля может вырождаться в пик и порождать самокасания. (само-прикосновения – в матем.)

Поворотом тривиальной синусоиды, $y_L(x_L) = \sin x_L$, и её производной $\partial x/\partial y$ я получил новую спираль с петлями – рис. 3. Таковы же, но более сложные элементы и петля групповой скорости $U = \partial \nu/\partial \sigma$; откуда и сама идея спирали от извилистой кривой $\sigma(\nu)$.

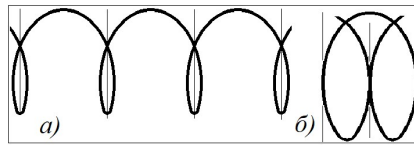


Рис. 3: Спираль осевая, определяемая синусоидой (а); со сдвоенной петлёй и самокасанием (б).

Определение 2. Петля плоская $\varphi(x)$ – это самопересекающаяся кривая, ограничивающая и замыкающая конечную область D в области своего определения на плоскости $y 0 x$: $D + \partial D \subset E$ (или $D \in E$); $\varphi \equiv \partial D$. Её сингулы: ветвления и простой крест (бидукратность [5]).

3.4. Структура плоских кривых. Все плоские регулярные кривые $y(x)$ локально сингулярны. Они содержат, по крайней мере, в одном из поворотов координат (локальных, L), хотя бы одну сингулу, ветвление, перегиб или др. Тоже о гладких функциях $y = f(x)$. Причём угол поворотов θ будет трансцендентным параметром для $F(x, y, \theta) = y_L \sim f(x_L) = 0$.

Определение 3. Для дисперсионной вещественной кривой типично: дуга в нуле (в критической зоне, с $U(\nu) = 0$), несколько различных, последовательно идущих извилин и прямая асимптота на бесконечности, по ν . (Например, на рис. 1).

Замечание 1. Отсюда весьма актуальная ZGV–тематика и технологии, нулей групповой скорости – Zeros of Group Velocity. Для обратных волн – двух нулей. См. в [3, 5] и др.

Определение 4. *Спектр дисперсионных кривых произвольного волновода – это, как правило, много-, бесконечно-значная аналитическая функция. Алгебраическая, но чаще, трансцендентная или виртуальная, чётная, комплексная (и при $\Im \nu = 0$) и квазипериодическая $(u_n(\nu))^\infty$, $u = \sigma + i\alpha$). С точками сгущения на ∞ -ти: $(\sigma, \nu) = (1, \infty)$ и $(\alpha, \nu) = (\infty, 0)$.*

Интересные, важные для теории волн результаты получены в [10].

4. Заключение. В работе развивается эффективный метод анализа дисперсионных уравнений, функций и кривых. Определены сингулярные элементы, отдельные фигуры и общая структура сложных (трудно обозримых) плоских кривых и аналитических функций. Высших алгебраических объектов (степени $n \geq 3$), но прежде всего, трансцендентных и виртуальных и, в частности, дисперсионных. Эти вопросы составляют значительную, весьма актуальную проблему в геометрии, в теории волн и в др. приложениях и могут вылиться в отдельный креативный раздел современной математической физики.

Литература

- [1] Асламазов А. Г., Кикоин И. К. Что такое волна? // Квант. 1982. № 6. С. 2–7.
- [2] Анненков А. Ю., Герус С. В., Локк Э. Г. Сверхнаправленное распространение луча поверхностной спиновой волны в касательно намагниченной ферритовой пленке // Электроника и микроэл. СВЧ. 2016. Т. 2. № 1. С. 20–24.
- [3] Бырдин В. М. Дифракция нормальных волн в слоистых структурах: модель уровнемера, модификация метода факторизации, волноводные квазирезонансы // Известия РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 83–99.
- [4] Ганиев О. Р., Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е. Резонансная макро- и микромеханика нефтяного пласта. Интенсификация добычи нефти и повышение нефтеотдачи. Наука и практика. Ижевск: Иж. ИКИ, 2014. 256 с.
- [5] Бырдин В. М. Извилины, петли и спирали трансцендентных функций и виртуальных кривых: сингулярный анализ, простая асимптотика, волновое приложение // Математика, ее прилож. и матем. образование / Материалы VI Междунар. конф. Улан-Удэ: ВСТУТУ, 2017. С. 121–126.
- [6] Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., van Heijst G. J. F. Elastic waveguides: history and the state of the art. I // J. of Mathem. Sciences. 2009. №1. P. 99–120.
- [7] Виро О. Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1–73.
- [8] Inoguchi J., Ziatdinov R., Miura K. T. Generalization of log-aesthetic curves via similarity geometry // Japan J. Indust. Appl. Math. 2019. V. 36. P. 239–259.
- [9] Курносенко А. И. Общие свойства плоских спиральных кривых // Геометрия и топология. 10, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 353. С. 93–115.
- [10] Зильбергейт А. С., Копилевич Ю. И. Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ФТИ, 1983. 302 с.

СПЕКТРЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА НЕПРЕРЫВНЫХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Быков В. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

vbykov@gmail.com

Для заданных метрического пространства M и числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M. \quad (1)$$

Показатели Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda_1(\mu, A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu, A)$, а её спектр показателей Ляпунова – через $\Lambda(\mu, A) \equiv (\lambda_1(\mu, A), \dots, \lambda_n(\mu, A))$. Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$.

Напомним, что функция $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(*, G_\delta)$ [1, с. 224], если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}([r, \infty)) \subset M$ луча $[r, \infty)$ является G_δ -множеством.

В.М. Миллионщиков установил [2], что для любых $n \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1, n}$ и непрерывного отображения $A : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ функция, ставящая в соответствие точке $\mu \in M$ значение i -го показателя Ляпунова $\lambda_i(\mu, A)$ системы (1), принадлежит классу $(*, G_\delta)$, а в работе [3] (см. также [4]) для каждого n и M получено полное описание спектров показателей Ляпунова семейств (1) с непрерывной функцией A .

Через $\tilde{\mathcal{U}}^n(M)$ обозначим класс семейств (1) с функцией A , непрерывной в следующем смысле

$$A \in C(\mathbb{R}_+ \times M), \quad \lim_{\nu \rightarrow \mu} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|A(t, \nu) - A(t, \mu)\| = 0, \quad \mu \in M, \quad (2)$$

а через $\mathcal{U}^n(M)$ – его подкласс семейств (1), состоящих из ограниченных систем.

В работе [5] для любых метрического пространства M и числа $n \in \mathbb{N}$ описан класс вектор-функций $\{\Lambda(\cdot, A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$. Цель настоящего доклада – для каждого M и $n \geq 2$ дать полное описание класса $\{\Lambda(\cdot, A) : A \in \tilde{\mathcal{U}}^n(M)\}$ спектров показателей Ляпунова семейств систем (1), коэффициенты которых непрерывны в том же смысле (2), но не обязательно ограничены.

Теорема 1. *Для каждого метрического пространства M и числа $n > 1$ вектор-функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{U}}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) для любого $\mu \in M$ справедливы неравенства $f_1(\mu) \leq \dots \leq f_n(\mu)$;
- 2) все компоненты $f_1, \dots, f_n$ вектор-функции f принадлежат классу $(*, G_\delta)$.

Отметим, что необходимость условия 1) теоремы 1 вытекает непосредственно из определений, а необходимость условия 2) – из результата [2]. Достаточность же указанных условий выводится из следующего утверждения.

Теорема 2. *Для каждого $n \geq 2$ существует такая гладкая матричнозначная функция $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, что для любых метрического пространства M и вектор-функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям 1) и 2) теоремы 1, найдётся матричнозначная функция $Q : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющая равенствам*

$$\Lambda(\cdot, A + Q) = f, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{\mu \in M} \ln \|Q(t, \mu)\| = -\infty.$$

Литература

- [1] Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
- [2] Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сборник. 1988. Т. 137. №3. С. 364–380.
- [3] Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр.Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. №2. С. 55–71.
- [4] Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №10. С. 1332–1138.
- [5] Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. №12. С. 1579–1588.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КОНУСЕ

Васильев В. Б. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
vv57@inbox.ru

Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ \int_0^{+\infty} u(x', x_m) dx_m = g(x'), \end{cases} \quad (1)$$

о нахождении решения в пространстве $H^s(C_+^a)$, где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

Основываясь на концепции волновой факторизации эллиптического символа [1], можно выписать явный вид решения этой краевой задачи в образах Фурье. Так, в частности, если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^a [1]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом $\mathfrak{a}$, то справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{a} - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Тогда для любой правой части $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{m-1})$ краевая задача (1) имеет единственное решение в пространстве $H^s(C_+^a)$, которое дается формулой

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{c_m i a z_m A_{\neq}(\eta', 0) \tilde{g}(\eta') d\eta'}{(|\xi' - \eta'|^2 - a^2 z_m^2)^{m/2}},$$

где $A_{\neq}(\xi)$ – элемент волновой факторизации символа, c_m – постоянная, равная

$$c_m = 2^{m-1} \pi^{\frac{m-2}{2}} \Gamma(m/2).$$

Для общих конусов в многомерном пространстве результаты автора описаны в [2], двумерный случай детально рассмотрен в [3].

Литература

- [1] Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010
- [2] Vasilyev V.B. On some distributions associated to boundary value problems. Complex Var. Ell. Equ. 2019. V. 64, No 5. P. 888–898
- [3] Vasilyev V.B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opusc. Math. 2019. V. 39, No 1. P. 109–124.

Васильченко Д. Г. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

darya.vasilchenkova@mail.ru

Рассматривается задача аппроксимации операторов вещественными h -суммами порядка $n = 2q + 1$, $q \in \mathbb{N}$, вида:

$$H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^n h(\lambda_k z), \quad (1)$$

где $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{2k+1} z^{2k+1}$ — нечетная аналитическая в окрестности начала функция. Аппроксимация производится за счет подбора *вещественных* параметров λ_k , не зависящих от h . Такого рода задачи без условия вещественности параметров λ_k впервые рассматривались в работах [1],[2].

В качестве примера рассмотрим задачу Паде-интерполяции оператора дифференцирования:

$$(zh(z))' = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) + O(z^n). \quad (2)$$

В этом случае

$$(zh(z))' = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)h_{2k+1}z^{2k+1}, \quad H_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{2k+1}h_{2k+1}z^{2k+1}, \quad (3)$$

где $S_m = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m$ — степенные суммы. Таким образом, нечетные степенные суммы известны, а четные являются свободными параметрами. Задача состоит в выборе четных сумм S_{2k} с тем, чтобы обеспечить равенство (2) и вещественность параметров λ_k .

По теореме Виета неизвестные λ_k являются корнями *производящего* многочлена

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n p_{n-k} \lambda^{n-k} = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n, \quad (4)$$

где σ_m — элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \dots, n,$$

которые определяются по степенным суммам известными рекуррентным формулами Ньютона:

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_m = (-1)^{m+1} \left(S_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j S_{m-j} \sigma_j \right) / m, \quad m = 2, \dots, n.$$

Коэффициенты производящего многочлена являются весьма сложными нелинейными алгебраическими функциями от сумм S_{2k} и непосредственный их подбор для вещественности корней λ_k не представляется возможным. Для решения задачи предлагается достаточно надежный численный метод пробных многочленов. Его суть состоит в том, что подбирается специальный многочлен $T_n(z)$ с вещественными корнями и с помощью свободных параметров S_{2k} аппроксимируются его коэффициенты. Такая аппроксимация упрощается благодаря тому, что в каждую пару соседних коэффициентов производящего многочлена один из свободных параметров S_{2k} входит линейно.

Удачный выбор T_n позволяет достигнуть вещественности λ_k . Различные способы определения пробных многочленов в классе четных функций h были рассмотрены в [3]. В настоящей работе в классах нечетных и четных h предлагается новый вид пробного многочлена:

$$T_n(z) := 2^{1-n} (q+2)^n \cos \left(n \arccos \frac{nz + p_{n-1}}{n(q+2)} \right).$$

¹²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект No 18-01-00744)

Литература

- [1] Данченко В.И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 643–649.
- [2] Данченко В.И., Чунаев П.В. Об аппроксимации на простейшими дробями и их обобщениями // Проблемы матем. анализа. 2011. Т. 58. С. 121–134.
- [3] Nigmatyanova Yu. M. Numerical analysis of the method of differentiation by means of real h-sums // J.Math. Sci. 2017. Vol. 224 (5). P. 735–743.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА АЭРОГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ¹³

Вельмисов П. А. (Россия, Ульяновск)

Ульяновский государственный технический университет
velmisov@ulstu.ru

Покладова Ю. В. (Россия, Ульяновск)

Ульяновский государственный технический университет
pokladovau@inbox.ru

Тамарова Ю. А. (Россия, Ульяновск)

Ульяновский государственный технический университет
kazakova.ua@mail.ru

Рассмотрены математические модели механических систем «трубопровод - датчик давления», предназначенных для контроля давления рабочей среды в двигателе [1],[2]. На основе предложенных моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики чувствительных элементов используются как линейные, так и нелинейные модели (в т.ч. модели твердого деформируемого тела), динамика рабочей среды в трубопроводе описывается уравнениями линейной теории движения жидкостей или газов при различных предположениях о физической модели рабочей среды: несжимаемая идеальная, сжимаемая идеальная, несжимаемая вязкая. Разработаны аналитические и численные методы решения соответствующих начально-краевых задач.

В качестве примера приведем математическую постановку, соответствующую одномерной модели динамической системы «трубопровод - датчик давления».

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, t) = P(t), \quad (2)$$

$$\varphi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (3)$$

$$m\ddot{w}(t) + f(\dot{w}(t), w(t)) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, t) - P_*. \quad (4)$$

Уравнения (1), (4) и граничные условия (2), (3) должны быть дополнены начальными условиями для $\varphi(x, t)$ и $w(t)$. В (1)-(4) $\varphi(x, t)$ - потенциал скорости, удовлетворяющий волновому уравнению и описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(t)$ - закон движения чувствительного (упруго закрепленного) элемента; ρ_0 , P_0 , a_0 - плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(t)$ - закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя); $P_*(t)$ - некоторое внешнее (например, управляющее) воздействие; m - масса элемента; индексы x, t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху - производную по t .

Один из методов решения задачи (1)-(4) состоит в сведении её к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего величину

¹³Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научных проектов №18-41-730015, №19-41-730006.

перемещения чувствительного элемента $w(t)$ с законом изменения давления рабочей среды в двигателе $P(t)$

$$\begin{aligned} & m \left[\ddot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \ddot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + f \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right), w \left(t - \frac{l}{a_0} \right) \right] + \\ & + f \left[\dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right), w \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] - \rho_0 a_0 \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) - \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] = \\ & = 2P(t) + 2(P_0 - P_*). \end{aligned} \quad (5)$$

Исследование уравнения (5) проводилось в случае конкретных заданий видов функции $f(\dot{w}, w)$, например: $f(\dot{w}(t), w(t)) = \alpha w(t) + \gamma_1 w(t) + \gamma_3 w^3(t) + \xi w^2(t) \dot{w}(t)$.

Разработан также численный метод решения начально-краевых задач, соответствующих математической модели (1)-(4), и обобщениям этой модели на двумерный случай.

Литература

- [1] Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2018.
- [2] Velmisov P. A., Pokladova Yu. A., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system «pipeline – pressure sensor» // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019); doi: 10.1063/1.5133495.

О ДЕСКРИПТИВНОМ ТИПЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СНИЗУ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ СЕМЕЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Ветохин А. Н. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
anveto27@yandex.ru

Следуя монографии [1, с. 122], приведем определение топологической энтропии. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f^i, i \in \mathbb{N}$, — i -я итерация отображения f , $f^0 \equiv \text{id}_X$. Для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше, чем ε . Такой набор точек называется (f, ε, n) -отделённым. Тогда *топологической энтропией* динамической системы, порожденной непрерывным отображением f , называется величина

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Отметим, что топологическая энтропия не зависит от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому определение (1) корректно.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \rightarrow X \quad (2)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \quad (3)$$

В работе [2] установлено, что в случае, когда $\mathcal{M}$ полно, множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $\mathcal{M}$ множеством типа G_δ . Напомним, что метрическое пространство имеет размерность нуль, если любая точка имеет сколь угодно малую

окрестность, являющуюся одновременно замкнутой и открытой, что равносильно пустоте границы этой окрестности [2, с. 286]. Одним из примеров такого пространства является совершенное множество Кантора K (множество бесконечных троичных дробей $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где $a_i \in \{0, 2\}$) на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. В статье [4] для всякого всюду плотного подмножества G типа G_δ в полном метрическом сепарабельном нульмерном пространстве M построено такое семейство динамических систем (2), что множество значений функции (3) неограниченно сверху, а множество точек полунепрерывности снизу этой функции совпадает с данным подмножеством G . Последний результат усиливает

Теорема. Пусть $X = K$, M — полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство, $G \subset M$ — всюду плотное подмножество типа G_δ , тогда найдется такое отображение (2), что множество значений функции (3) ограничено, а множество точек полунепрерывности снизу этой функции совпадает с G .

Литература

- [1] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
- [2] Ветохин А. Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 69–72.
- [3] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир. 1966.
- [4] Ветохин А. Н. О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1319–1327.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКЕ¹⁴

Власов В. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
vikmont@yandex.ru

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1] и имеют ряд других важных приложений.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см. [1]–[4]).

На этой основе установлены результаты о существовании сильных и обобщенных решений этих уравнений, а также получены результаты о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и не вещественной частям спектра упомянутых оператор-функций (см. [1]–[4]).

Литература

- [1] Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016. 488с.

¹⁴Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ № 20-01-00288.

- [2] Vlasov V. V., Rautian N. A. Well-posedness and spectral analysis of integrodifferential equations arising in viscoelasticity theory // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 233. no.4. P. 555–577.
- [3] Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и представление решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости. // Дифференциальные уравнения. 2019. Т.55. № 4. С. 574–587.
- [4] Vlasov V. V., Rautian N. A. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). 2020. V. 244. no.2. P.

ЗАДАЧА О ТОЧКЕ ВОЗВРАТА КРИВОЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТОЧЕК ВОЗВРАТА¹⁵

Воронин С.М. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
voron@csu.ru

Неявное дифференциальное уравнение

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (1)$$

определенное в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^3$, задает в пространстве 1-струй $\{(x, y, p)\}$ гладкую (вообще говоря) поверхность $S = \{F = 0\}$. Пусть $\Pi : (x, y, p) \mapsto (x, y)$ - естественное проектирование; мы будем рассматривать случай, когда проекция $\pi = \Pi|_S$ имеет в точке 0 особенность типа «сборка Уитни».

Контактные плоскости $\{dy = p dx\}$ высекают на поверхности S поле направлений; в простейшем случае это поле направлений является гладким и интегрируемым. Пусть g - первый интеграл этого поля, нормированный условием $g(0) = 0$.

Таким образом, при выполнении указанных выше условий, неявному дифференциальному уравнению (1) соответствует так называемая *расходящаяся диаграмма* [1]

$$(\mathbf{R}, 0) \xleftarrow{g} (\mathbf{R}^2, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{R}^2, 0). \quad (2)$$

Отметим, что (локально) эквивалентным [2] неявным дифференциальным уравнениям соответствуют эквивалентные [1] расходящиеся диаграммы.

Пусть Σ_π - линия складки проекции π . Так как ядро касательного отображения Π_* лежит в контактной плоскости, то для соответствующей диаграммы (2) выполняется следующее *условие касания* : в каждой точке линии складки Σ_π ядро касательного отображения π_* касается линии уровня первого интеграла g .

Пусть *CUSP* - класс диаграмм вида (2), для которых проекция π является сборкой, и выполняется сформулированное выше условие касания. Для типичных диаграмм класса *CUSP* проекции линий уровня функции g являются полукубическими параболой; вершины их (точки возврата) лежат на кривой $\pi(\Sigma_\pi)$, которая также является полукубической параболой, с точкой возврата в нуле.

Теорема. *Аналитическая классификация типичных диаграмм класса CUSP имеет функциональные модули.*

Эта теорема является основным результатом работы, а описание соответствующего пространства модулей составляет ее основное содержание.

Литература

- [1] Dufour J.P. Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentielles // Ann. scient. Ecole Norm. Super. - 1977. -10. №2 - p. 153-174.
- [2] A.A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya, W.-Z. Sun // Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, Japanese Journal of Mathematics, vol. 3–1(2008) 93–119.

¹⁵Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-51-5000 ЯФ_а)

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ВИХРЕМ¹⁶

Гаджиев Д. А. (Россия, Жуковский)

Центральный аэрогидродинамический институт, Московский физико-технический институт
gadzhiev@phystech.edu

Гайфуллин А. М. (Россия, Жуковский)

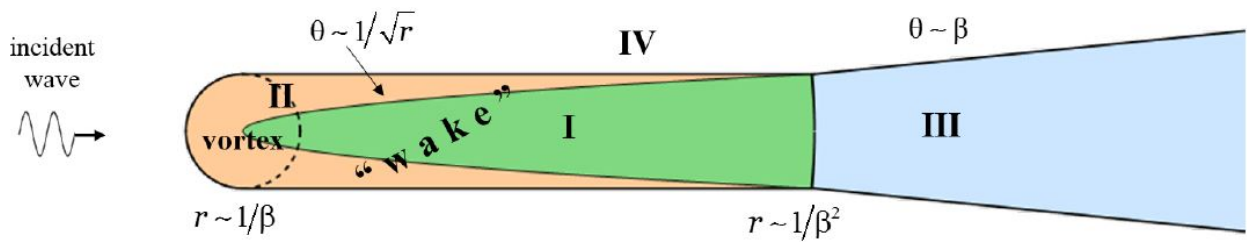
Центральный аэрогидродинамический институт, Московский физико-технический институт
gaifullin@tsagi.ru

Задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны цилиндрическим потенциальным вихрем с ненулевой циркуляцией скорости является одной из классических проблем гидродинамики и аэроакустики, изучаемой с 1950-х гг. Основной вопрос связан с рассеянием звука на малые углы $\theta \ll 1$. Вместо ожидаемого в двумерных задачах затухания амплитуды рассеянной волны на бесконечности пропорционально $1/\sqrt{r}$, существующие решения демонстрируют нефизичное поведение: либо амплитуда имеет особенность при $\theta \rightarrow 0$ [1], либо её угловой максимум остаётся постоянным при $r \rightarrow \infty$ [2], [3], [4]. Причиной является медленное ($\sim 1/r$) убывание на бесконечности поля скорости вихря (которое обладает неограниченной кинетической энергией и потому не может быть создано физически). Взаимодействие падающей волны с таким течением существенно во всём пространстве, и попытка представить рассеянную волну в виде суперпозиции волн от всех элементарных вторичных источников наталкивается на расходимость интегралов.

В данной работе вместо потенциального вихря берётся вихрь с распределением циркуляции $\Gamma(r) = \Gamma_0(r/\delta)^2$ при $r \leq \delta$ и $\Gamma(r) = \Gamma_0\beta^2(\delta^2 - r^2)$ при $r > \delta$, который может быть создан вращением в вязкой среде бесконечно протяжённого полого кругового цилиндра радиуса δ . Это позволяет моделировать исходную проблему как предельный случай $\delta \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, решая корректно поставленную задачу.

Асимптотическое решение ищется при условии, что как падающая волна, так и вихрь являются малыми возмущениями на фоне покоящегося газа. Тогда в главном приближении решением будет их суперпозиция, а амплитуда рассеянной волны будет иметь порядок $O(M_0')$, где $M_0 \ll 1$ и $M' \ll 1$ – числа Маха, характерные соответственно для вихря и для падающей волны.

Решение показывает, что область, в котором амплитуда рассеянной волны сохраняет максимальный порядок, включает, помимо самого вихря $r \sim \beta^{-2}$, протяжённый «след» за ним с продольным размером $r \sim \beta^{-2}$ и поперечным размером $r \sim \beta^{-1}$. Эта область делится на две подобласти (см. рисунок), в которых решение имеет различную структуру.



За пределами этой области рассеянная волна представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну с амплитудой, имеющей угловой максимум при $\theta \sim \beta$ и затухающей при $r \rightarrow \infty$:

$$P_{11} \sim \frac{e^{ir}}{\sqrt{r}} \cot \frac{\theta}{2} \left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{4\beta^2}} \right) \quad (1)$$

Решение содержит в себе решения для случая потенциального вихря в качестве предельных случаев при $\beta \rightarrow 0$: при $r \gg \beta^{-1}$ на больших углах оно переходит в [1], а в

¹⁶Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-31-90057.

области $r \ll \beta^{-1}$, где квазипотенциальный вихрь близок к потенциальному – в [2], [3], [4], подтверждая справедливость последних.

Литература

- [1] Питаевский Л. П. Вычисление фононной части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 5. С. 1271–1275.
- [2] Саков П. В. К задаче о рассеянии звука вихрем // Акуст. журнал. 1993. Т. 39. № 3. С. 280–282.
- [3] Ford R., Llewellyn Smith. S. Scattering of acoustic waves by a vortex // J. Fluid Mech. 1999. V. 386. P. 305–328.
- [4] Беляев И. В., Копьев В. Ф. К постановке задачи о рассеянии звука цилиндрическим вихрем // Акуст. журнал. 2008. Т. 54. № 5. С. 699–711.

О ПОСТРОЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Гладышев Ю. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
v572264@yandex.ru

В работе [1] для функций, определенных в четырехмерном комплексном пространстве C^4 и принимающих значения в теле кватернионов [2], было дано обобщение системы дифференциальных уравнений Коши-Римана теории функций комплексного переменного вида

$$\begin{cases} D_1 X - \Psi D_2 = 0, \\ X \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \Psi = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь D_1, D_2 — кватернионные операторы, записанные в форме

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = e_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \vec{\nabla}_x, \\ D_2 &= \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial}{\partial y_i} = e_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \vec{\nabla}_y. \end{aligned} \quad (2)$$

В данном случае $x_i, y_i, i = \overline{0,3}$ — действительные переменные, а e_i — кватернионные единицы [2]. Если наборы переменных x_i, y_i обозначать просто как x, y , то можно записать

$$X = X(x, y), \quad \Psi = \Psi(x, y), \quad (3)$$

где X, Ψ принимают значения в теле кватернионов

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^3 e_i X_i = X_0 + \vec{X}, \quad \Psi = \Psi_0 + \sum_{i=1}^3 e_i \Psi_i = \Psi_0 + \vec{\Psi}. \quad (4)$$

Были исследованы общие свойства решений системы (1) и дана их частная физическая интерпретация как системы уравнений электромагнитного поля Максвелла [1].

В настоящем сообщении рассмотрен еще один частный случай системы уравнений, входящий в (1), когда функции X, Ψ зависят только от переменных $x_i, y_i, i = \overline{1,3}$ и $x_0 \equiv 0, y_0 \equiv 0$, т.е. являются векторными кватернионами.

Следовательно, система (1) может быть согласно (2), (4) записана в форме

$$\begin{cases} \nabla_x \vec{X} - \vec{\Psi} \nabla_y = 0, \\ \vec{X} \nabla_y + \nabla_x \vec{\Psi} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если функции X_i, Ψ_i дважды непрерывно дифференцируемые по всем переменным x_i, y_i , то, согласно [1], $\vec{X}, \vec{\Psi}$ — гармонические кватернионы

$$\nabla_x^2 \vec{X} + \nabla_y^2 \vec{X} = \nabla_x^2 \vec{\Psi} + \nabla_y^2 \vec{\Psi} = 0 \quad (6)$$

Из (5) следует, что в обозначениях векторного анализа система (3) запишется

$$\begin{cases} \operatorname{div}(x)\vec{X} - \operatorname{div}(y)\vec{\Psi} = 0, & \operatorname{rot}(x)\vec{X} - \operatorname{rot}(y)\vec{\Psi} = 0, \\ \operatorname{div}(y)\vec{X} + \operatorname{div}(x)\vec{\Psi} = 0, & \operatorname{rot}(y)\vec{X} + \operatorname{rot}(x)\vec{\Psi} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

что показывает высокую степень симметрии этой системы.

Оправдано использование комплексных переменных

$$z_i = x_i + iy_i, \quad \bar{z}_i = x_i - iy_i, \quad (8)$$

в которых формулу (6) запишем

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 X_k}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = 0. \quad (9)$$

Первоначально рассмотрено решение (6) методом разделения переменных. Например, если в пространстве x и y введены сферические системы координат и X, Ψ не зависят от угловых координат, то для X_k, Ψ_k имеем

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial X_k}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial X_k}{\partial r_2} \right) = 0. \quad (10)$$

И аналогично для Ψ_k .

Решение (10) может быть представлено как

$$X_k = \frac{f_k(r_1 + ir_2)}{r_1 r_2}. \quad (11)$$

Решение (6) методом разделения переменных показывает близость системы (1) к системе Коши-Римана. Применение метода разделения переменных по парам $(z_i, \bar{z}_i)$ приводит к решению в виде произведения функций Бесселя различных модификаций.

Уравнения (9) имеет решение в классе функций трех комплексных переменных z_1, z_2, z_3 . Теория функций нескольких комплексных переменных изложена в ряде монографий, например, в [3].

Для построения решений системы (5) можно использовать метод обобщенных степеней Берса, что предполагается провести в следующем сообщении.

Для физической интерпретации уравнений (5) надо положить, что y_i чисто мнимые, т.е. $y = it$, тогда уравнения (9) при большом времени $t \rightarrow \infty$ переходят в волновые уравнения.

Литература

- [1] Гладышев Ю.А. Об одном обобщении условий Коши-Римана теории функции комплексного переменного в область кватернионных функций. // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сборник трудов XI международной конференции. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018. С.94–96.
- [2] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
- [3] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ¹⁷

Гладышев Ю. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
v572264@yandex.ru

Калманович В. В. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
v572264@yandex.ru

Рассмотрим многослойную среду из n слоев различных материалов. Ось x направим по потоку тепла $J(x)$, перпендикулярно слоям. Координаты границ слоев обозначим $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Номер (i) слоя (x_i, x_{i+1}) для соответствующих физических величин будем отмечать в верхнем индексе в скобках. Процесс переноса в каждом слое определен температурой $T^{(i)}(x, t)$ и потоком $J^{(i)} = -a_1^{(i)}(x) \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$a_2^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1^{(i)}(x) \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

условиям согласования третьего типа на границах слоев

$$T^{(i+1)}(x_{i+1}, t) - T^{(i)}(x_{i+1}, t) = -r^{(i+1)} J^{(i)}(x_{i+1}, t), \quad J^{(i)}(x_{i+1}, t) = J^{(i+1)}(x_{i+1}, t) \quad (2)$$

и краевым условиям третьего типа

$$T^{(1)}(x_1, t) - T_1 = -r^{(1)} J^{(1)}(x_1, t), \quad T_2 - T^{(n)}(x_{n+1}, t) = -r^{(n+1)} J^{(n)}(x_{n+1}, t). \quad (3)$$

где $r^{(1)}, r^{(n+1)}$ — коэффициенты внешнего теплообмена, $r^{(i+1)}$ — контактное тепловое сопротивление слоев в точке x_{i+1} , T_1, T_2 — внешние температуры. Коэффициенты $a_1^{(i)}(x), a_2^{(i)}(x)$ учитывают возможную неоднородность слоёв и геометрию всей среды. Например, слои могут быть плоскими, иметь осевую или центральную симметрию.

Начальное распределение температуры задано

$$T^{(i)}(x, 0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Функция $g(x)$, вообще говоря, может быть разрывной.

Ранее нами был предложен метод решения задачи тепломассопереноса в многослойной среде с идеальным контактом слоев [1], [2], [3], [4], основанный на совместном использовании матричного метода и метода обобщенных степеней Берса [5], а также метода Фурье разделения переменных для нестационарной задачи.

В настоящей работе показана возможность использования такого подхода для решения поставленной задачи (1) – (4) за счет введения для каждой границы слоев матрицы теплового сопротивления контакта.

Литература

- [1] Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса тепломассопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. 2018. №3. С. 158–167.
- [2] Gladyshev Y. A. 1, Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the possibility of applying the Bers apparatus to modeling the processes of heat and mass transfer caused by electrons in a planar multilayer medium // Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2017. Vol.11. №5. Pp. 1096–1100.

¹⁷Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

- [3] Калманович В. В., Степович М. А. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. М.: ИПИМ РАН, 2018. №3. С. 194–201.
- [4] Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде // Вестник Калужского университета. 2015. №3. С. 5–10.
- [5] Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. Pp. 67–93.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭМБОЛИЗАЦИЕЙ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ¹⁸

Гологуш Т. С. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
tatiana_06.08@mail.ru

Остапенко В. В. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
ostapenko@hydro.nsc.ru

Петренко И. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
petrenko_irina@bk.ru

Черевко А. А. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
cherevko@mail.ru

Артериовенозная церебральная мальформация (АВМ) является врожденной патологией развития сосудов головного мозга, при которой артериальное и венозное кровеносные русла соединены клубком беспорядочно переплетенных вырожденных сосудов. Наиболее предпочтительным методом лечения данных патологий является эмболизация - это малоинвазивное хирургическое вмешательство, представляющее собой внутрисосудистое заполнение клубка патологических сосудов АВМ специальной эмболизирующей композицией с целью блокирования кровотока через них. Данный способ хирургического вмешательства широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов мальформации. Необходимо математически смоделировать данный процесс и построить оптимизационный алгоритм эмболизации артериовенозной мальформации.

В данной работе для описания процесса эмболизации предлагается комбинированная модель, в которой наряду с течением крови и эмболизирующего вещества в АВМ учитывается переток крови в окружающие здоровые сосуды. Процесс эмболизации моделируется как процесс двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей, где вытесняемой фазой является кровь, а вытесняющей эмболизирующее вещество, и используется уравнение Баклея-Леверетта, которое решается численно с помощью монотонной модификации схемы Кабаре [1]. Поток крови, поступающий в АВМ, меняется во время операции за счет перераспределения крови в соседние здоровые сосуды, в модели этот эффект учитывается путем введения дополнительных соотношений.

Основная цель работы заключается в отыскании оптимального с точки зрения безопасности и эффективности сценария эмболизации артериовенозной мальформации. Целевой функционал и ограничения, возникающие в такой задаче оптимального управления, выбираются в соответствии с медицинскими показаниями. Управлением является зависящая от времени функция, определяющая объёмный расход эмболизирующего вещества на входе в АВМ. Сформулирована и для специального закона подачи эмболизирующего вещества решена задача оптимального управления эмболизацией.

¹⁸Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (№ 14.W03.31.0002).

При изучении задачи оптимальной эмболизации использовались функции Баклея-Леверетта, построенные с помощью приближения клинических данных, полученных во время мониторинга гемодинамических параметров во время нейрохирургических операций в НМИЦ им. Мешалкина [2].

Литература

- [1] Ostapenko V. V., Cherevko A. A. Application of the CABARET scheme for calculation of discontinuous solutions of the scalar conservation law with nonconvex flux // Dokl. Phys., Pleiades Publishing Ltd. 2017. Vol. 62. P. 470–474.
- [2] Khe A. K. et al. Monitoring of hemodynamics of brain vessels // J. App. Mech. Tech. Phys. 2017. Vol. 58. P. 763–770.

О ВКЛЮЧЕНИИ В ПОТОК И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КАСКАДОВ МОРСА-СМЕЙЛА¹⁹

Гуревич Е. Я. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
egurevich@hse.ru

Один из показателей адекватности численного моделирования состоит в том, что полученный в результате каскад топологически сопряжен сдвигу на единицу времени вдоль траекторий исходного потока, то есть включается в некоторый топологический поток.

Так как поток определяет изотопию, соединяющую сдвиг на единицу времени вдоль траекторий и тождественное отображение, то неизотопные тождественному диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки. Таким образом, множество каскадов значительно богаче, чем множество сдвигов на единицу времени вдоль траекторий потоков. В то же время, для любого многообразия M^n существует открытое в $Diff^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Это множество содержит окрестности структурно-устойчивых сдвигов вдоль траекторий потоков Морса-Смейла без замкнутых траекторий.

В работе Дж. Палиса [1] сформулированы необходимые условия включения диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$ в топологический поток, показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными и поставлена задача об обобщении этих результатов на случай более высокой размерности (проблема Палиса).

В размерности три и выше возникают дополнительные препятствия к включению диффеоморфизмов Морса-Смейла в топологический поток, связанные с возможностью дикого вложения замыканий инвариантных многообразий седловых периодических точек. Относительно недавний прогресс в решении задачи топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях, в частности, введение новых инвариантов, описывающих вложение сепаратрис седловых периодических точек (см. обзор [2]), позволил исчерпывающим образом решить проблему Палиса в размерности 3 (см. [3]).

Для более высокой размерности эта проблема решена для класса диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере, см. [4]. Оказалось, что в выделенном классе диффеоморфизмов достаточные условия включения в топологический поток совпадают с условиями Палиса. Этот результат позволил получить их полную топологическую классификацию в комбинаторных терминах в работе [5].

Литература

- [1] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems// Topology. 1969. V. 8. № 4. P. 385–404.
- [2] Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Duke Mathematical Journal. 2019. V. 168. № 13. P. 2507 – 2558.

¹⁹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 17-11-01041 и при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

- [3] Починка О.В., Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. О включении диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Математический сборник. 2012. V. 203. № 12. С. 81 – 104.
- [4] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. On embedding of multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms in topological flows // Moscow Mathematical Journal. 2019. V. 19. № 4. P. 739 – 760.
- [5] Grines V., Gurevich E., Pochinka O., Malyshev D. On Topological Classification of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Sphere S^n // <https://arxiv.org/abs/1911.10234>.

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ГЕЛЬДЕРА РЕШЕНИЙ РАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $p(x)$ -ЛАПЛАСИАНОМ

Гусейнов С. Т. (Азербайджан, Баку)
Бакинский Государственный Университет
sarvanhuseynov@rambler.ru

Рассмотрим в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = \operatorname{div}(\omega_\varepsilon(x)a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0 \quad (1)$$

с положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$ и показателем $p(x)$, которые сейчас определим. Здесь $a(x) = a_{ij}(x)$, действительная симметрическая матрица с измеримым элементами. Предположим, что относительно коэффициентов оператора L выполнены условия

$$\mu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu^{-1}|\xi|^2, \quad \mu \in (0, 1]. \quad (2)$$

Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{если } x \in D^{(1)} \\ 1 & \text{если } x \in D^{(2)}, \end{cases} \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad (3)$$

$$p(x) = \begin{cases} q & \text{если } x \in D^{(1)} \\ p & \text{если } x \in D^{(2)}, \end{cases} \quad 1 < q < p, \quad (4)$$

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{loc}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D \omega_\varepsilon(x)a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad (5)$$

на пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Для показателя $p(\cdot)$, заданного равенством (4), гладкие функции плотны в (см. [1]), вследствие чего в интегральном тождестве (5) в качестве пробных функций можно брать финитные функции из $W_{loc}(D)$.

Здесь рассмотрен модельный случай плоского стыка двух различных фаз. При этом ситуация осложняется наличием равномерного по ε вырождением в области $D^{(1)}$. В каждой из областей $D^{(i)}$, где $i = 1, 2$, регулярность решения описывается хорошо развитой теорией [1]. В работе [3] доказано, что для показателя p , заданного равенством (4), любое решение уравнения (1) при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0, 1]$ в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гельдеровых в D' функций. Нас интересует вопрос о независимости показателя α от ε .

Рассмотрим семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ решений уравнений $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, ограниченное в L^∞ равномерно по ε на компактных подмножествах D . Основной целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема. Существует постоянная $\alpha \in (0, 1)$, зависящая только от размерности пространства n и констант μ, p, q из условия (3), такая, что семейство $\{u^\varepsilon(x)\}$ компактно в $C^\alpha(D')$ в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$.

Попутно в ходе доказательства сформулированной теоремы установлено, что любое решение уравнения (1) непрерывно по Гельдеру в области D с показателем, зависящем только от n, μ, p и q . Отметим что в случае $p = q$ аналогичный результат установлен в работе [2]. Выбор веса вида (3) и показателя p из (4) делает ситуацию не симметричной по отношению к областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, и использование известных нам методов не позволяет доказать заявленное утверждение. Мы исходим из модификации техники Мозера, разработанной в [4] и [5], где областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ отводится разная роль в доказательстве теоремы.

Литература

- [1] Жиков В.В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Москва: Известия АН СССР, Сер. Матем. 1986. Т. 50. Вып. 4, С.675-710.
- [2] Алхутов Ю. А., Гусейнов С. Т. Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения // Москва: Дифференциальные уравнения. 2009. Т.45. No 1. С.54-59.
- [3] Acerbi E., Fusco N. A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1991. Vol.2. No. 1. P.1-16.
- [4] Алхутов Ю.А. О гёльдеровой непрерывности $(\cdot)$ -гармонических функций // Москва: Математический сборник. 2005. Т. 196. No 2. С. 3-28.
- [5] Алхутов Ю.А., Жиков В.В. О гёльдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений// Москва: Доклады РАН. 2001. Т. 378. No 5. С.583-588.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВА ФЕЙЕРА²⁰

Данченко В. И. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
vdanch2012@yandex.ru

Под тригонометрическими неравенствами типа Фейера мы понимаем оценки отдельных гармоник $a_\mu \cos \mu t + b_\mu \sin \mu t$ многочлена $T_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt$ через значения всего многочлена. Например, классическое неравенство Фейера для вещественного тригонометрического многочлена можно записать в виде

$$a_0 - \omega^{-1} \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \geq \min_x T_n(x), \quad \omega = 2 \cos \frac{\pi}{s+1}, \quad (1)$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $n = s\mu - 1$, $s = 2, 3, \dots$. Это неравенство и ряд других неравенств для вещественных и комплексных тригонометрических многочленов получены методом *амплитудно-фазовых преобразований* в работах [1-3].

Для алгебраических многочленов $P_n(z) = \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, метод амплитудно-фазовых преобразований дает представление отдельных степеней в виде

$$\omega p_0 + z^\mu p_\mu = \sum_{j=1}^m X_j P_n \left(z e^{-i\lambda_j} \right), \quad n = s\mu - 1, \quad \omega = 2 \cos \frac{\pi}{s+1}, \quad (2)$$

где $m \leq n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $X_j > 0$, причем все эти параметры вычисляются явно и зависят только от s и μ [1,2]. Из (2) получаются следующие утверждения.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\omega |p_0| + r^\mu |p_\mu| \leq \omega \cdot \max_{|z|=r} |P_n(z)|, \quad \omega = 2 \cos \frac{\pi}{s+1}.$$

²⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

Теорема 2. Пусть значения многочлена $w = P_n(z)$ на окружности $|z| = r$ лежат в некотором угле $0 < \alpha \leq \arg w \leq \beta < 2\pi$. Тогда и значения бинома $\omega p_0 + z^\mu p_\mu$ на окружности $|z| = r$ лежат в том же угле.

Следствие. Если значения многочлена $P_n(z)$ на окружности $|z| = r$ лежат в правой полуплоскости, то имеем (алгебраический аналог неравенства (1))

$$\omega \operatorname{Re} p_0 \geq r^\mu |p_\mu|, \quad \omega = 2 \cos \frac{\pi}{s+1}.$$

Литература

- [1] Danchenko V. I., Danchenko D. Ya. Extraction of pairs of harmonics from trigonometric polynomials by phase-amplitude operators // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 232. No.3. P. 322-337.
- [2] Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. Выделение гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами // Алгебра и анализ, 2020. Т.32. №2. С. 21-44
- [3] Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. Выделение нескольких гармоник из тригонометрических многочленов. Неравенства типа Фейера. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. М.: МИАН, 2020, С. 101-115.

ТЕОРЕМЫ О РАВНОСТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ²¹

Денисов В. Н. (Россия, Москва)

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

vdenisov2008@yandex.ru

Рассмотрим в полупространстве $R_+^{N+1} = R^N \times (0, \infty)$, $N \geq 2$ параболические уравнения

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i, k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_i^N b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$c(x, t) \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i, k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x, t) \frac{\partial V}{\partial x_k} \right), \quad (2)$$

с измеримыми коэффициентами.

Далее предполагается равномерная параболическость

$$\frac{1}{\lambda} \leq c(x, t) \leq \lambda, |a_{kl}(x, t)| \leq l, a_{ik}(x, t) \geq \frac{1}{\lambda} |\xi|^2,$$

где $\lambda > 0$. Будем изучать поведение решений задачи Коши для уравнений (1), (2) с начальной функцией $u_0(x) \in L^\infty(R^N)$.

Будем говорить, что решения u и V являются близкими (равномерно близкими), если для любого $x \in R^N$ (равномерно по $x \in R^N$) существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(x, t) - V(x, t)) = 0$$

при любой ограниченной функции $u_0(x) \in L^\infty(R^0)$.

Близость решений параболических уравнений впервые изучена в работах [1], [2].

Из теорем о близости решений следуют теоремы о стабилизации решений (см. [1], [2]).

В настоящем докладе мы приводим обзор известных результатов о близости и о стабилизации решений параболических уравнений [1]-[4].

Литература

- [1] Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д. Двусторонние оценки фундаментального решения параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения. // Успехи мат. наук, 1984. Т. 39, №3, С. 107-150

²¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

- [2] Жиков В. В. Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения с младшими членами. // Труды ММО, 1983. Т. 46. С. 69–98.
- [3] Валиков К. В. Об одном обобщении понятий равномерной стабилизации и равномерной близости решений задачи Коши. // Дифф. уравнен., 1990. Т. 26. №2. С. 279–297.
- [4] Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени. // Успехи мат. наук, 2005. Т. 60. №4. С. 145–212.

ВАРИАЦИИ v -ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ²²

Дмитрук А. В. (Россия, Москва)

Центральный экономико-математический институт РАН,
Московский государственный университет, ф-т ВМК,
optcon@mail.ru

Осмоловский Н. П. (Польша, Варшава)

Институт системных исследований ПАН
Nikolai.Osmolovskii@ibspan.waw.pl

Как хорошо известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений неравенства, а необходимые условия экстремума в них содержат меру. Известные способы доказательства принципа максимума (ПМ) технически довольно сложны и доступны лишь узкому кругу специалистов. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

Стандартный аппарат игольчатых вариаций вряд ли возможно использовать, ибо уже производная соответствующей траектории $x(t)$ по ширине иголки будет разрывной функцией. Более удобным, но нетривиальным аналогом игольчатых вариаций являются т.н. *вариации типа v -замены времени*, предложенные А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным. Идея v -замены состоит в переходе от исходного времени t к новому времени τ , при котором исходное время $t = t(\tau)$ становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, где $v(\tau) \geq 0$ есть произвольная измеримая ограниченная функция, которая трактуется как еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена *не взаимно-однозначна* (там, где $v(\tau) = 0$), и по этой причине малые вариации управления $v(\tau)$ порождают немалые (т.н. *понтрягинские*) вариации исходного управления $u(t)$. Использование этого приема в общем случае требует, однако, привлечения глубоких фактов теории функций действительного переменного, поэтому А.А. Милютин предложил рассматривать кусочно-постоянные функции v -замены. В этом случае вариации функции $v(\tau)$ порождают по сути дела те же игольчатые вариации исходного управления $u(t)$, но с некоторым отличием от последних. Оно состоит в том, что мы *не заменяем* оптимальное управление на малом отрезке около базовых точек пакета, а *расшиваем* эти точки, вставляя в эти места малые отрезки с произвольными наперед заданными значениями управления. В итоге получаем пакет игольчатых вариаций. Такие "вставные" иголки имеют существенные преимущества по сравнению с обычными.

Кусочно-постоянная v -замена позволяет перейти к вспомогательной (*присоединенной*) задаче в конечномерном пространстве, аргументами которой служат произвольно выбранные значения управления на участках постоянства функции $v(\tau)$. Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений неравенства, т.е. это не есть обычная гладкая конечномерная задача. Однако условия локального минимума в ней известны. Применяя эти условия к присоединенной v -задаче и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в слабой-* топологии

²²Работа частично поддержана грантами РФФИ 16-01-00585 и 17-01-00805.

некоторого сопряженного пространства. Каждый элемент этого компакта (т.е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве выбранных значений управления и времени, соответствующем данной v -замене. Компакты, порожденные всевозможными v -заменами, естественным образом частично упорядочены по включению, и поэтому в силу их непустоты образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого принцип максимума выполнен при всех значениях управления и времени.

Литература

- [1] А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский. Вариации типа v -замены времени в задачах с фазовыми ограничениями // Труды ИММ УрО РАН, 2018, т. 24, № 1.
- [2] A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii. Proof of the maximum principle for a problem with state constraints by the v -change of time variable // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B, 2019, v. 24, no. 5, p. 2189-2204.

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ СПУТНИКОВ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ С УЧЁТОМ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ²³

Доброславский А. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
a.dobroslavskiy@gmail.com

Рассматривается ограниченная пространственная задача трёх тел, в которой спутник-баллон, являющийся пассивно гравитирующим телом, обращается по эллиптической орбите вокруг центрального тела в геоцентрической неинерциальной системе координат. На орбиту спутника оказывает влияние гравитационная возмущающая сила со стороны третьего тела (Солнца) и световое давление, из предположения большой парусности объекта. Также предполагается, что Солнце обращается вокруг Земли по круговой орбите, при этом рассматриваются только высокие невозмущенные орбиты спутника, позволяющие пренебречь его временем нахождения в зоне земной тени.

Получена силовая функция задачи, учитывающая возмущение от гравитационных сил и светового давления, проведено усреднение возмущающей функции по средней аномалии орбиты спутника и долготе Солнца. Для усреднённых уравнений движения, записанных в кеплеровских оскулирующих элементах, найдены первые интегралы: интеграл энергии, интеграл, связывающий наклонение орбиты спутника и его эксцентриситет, и тривиальный интеграл, описывающий сохранение большой полуоси орбиты спутника.

Был проведен качественный анализ усреднённой системы уравнений Лагранжа. На основе анализа интеграла энергии была получена область значений параметров, при которых эволюция эксцентриситета орбиты спутника сохраняет его действительные значения. Определены стационарные точки интеграла энергии, исследована их устойчивость в первом приближении метода усреднения. Построен фазовый портрет усредненных эволюционных уравнений движения.

Анализ фазовых портретов выявил три типа возможных орбит спутника: орбиты с либрационным колебанием оскулирующего перицентра, орбиты с вековым уходом оскулирующего перицентра и вырожденные орбиты, приводящие к падению на центральное тело. Для значений параметров, приблизительно соответствующих спутнику «Эхо-1», было проведено численное интегрирование каждого из типов орбит и построены траектории движения.

²³Исследования выполнены в Московском авиационном институте при поддержке гранта РФФИ No 18-01-00820 А.

Литература

- [1] Аксенов Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
- [2] Лидов М. Л. Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления // Космические исследования, т. 7, вып. 4, 1969. с. 467–484.
- [3] Доброславский А. В., Красильников П. С. Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления // Письма в Астрономический журнал, т. 44, вып. 8-9, 2018, с. 618–630.
- [4] Доброславский А. В., Красильников П. С. Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом светового давления // Прикладная математика и механика, т. 84, вып. 1, 2020, с. 26–43.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Довбыш С. А. (Россия, Москва)

МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана

sdovbysh@yandex.ru

Ветвление решений аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, t)$$

в комплексной области изменения независимой переменной t и фазовых переменных x исследовалось в ряде работ и оказалось тесно связанным с явлением неинтегрируемости, т.е. отсутствием аналитических или мероморфных первых интегралов. Строгие результаты в этом направлении получили, в частности, В. В. Козлов, С. Л. Зиглин и Н. Yoshida.

Автор предложил рассматривать ветвление решений с точки зрения методов символической динамики, что представляет и самостоятельный интерес, поскольку позволяет строить *бесконечно-листные* решения. Несколько ранее автором были получены удобные, устойчивые относительно малых возмущений и конструктивно проверяемые условия, связанные с пересечением многомерных сепаратрис и гарантирующие неинтегрируемость многомерных систем в наиболее сильном аналитическом смысле, т.е. несуществование ни одного непостоянного мероморфного первого интеграла (на уровне априорных первых интегралов), а также отсутствие нетривиальных аналитических симметрий системы, достаточно близких к тождественному отображению. Доказательства были основаны на исследовании структуры инвариантного множества, описываемого методами символической динамики. Это обстоятельство позволило перенести результаты на рассматриваемую здесь ситуацию и получить условия, гарантирующих наиболее сильную аналитическую неинтегрируемость (в указанном выше смысле) вблизи некоторого букета замкнутых контуров в комплексном расширенном фазовом пространстве $\{x, t\}$. Впрочем, даже в маломерном случае (когда не требуются упомянутые результаты для многомерных систем) получаются условия неинтегрируемости, которые проще и удобнее известных ранее, поскольку формулируются в терминах возмущения на невозмущённом периодическом решении и не требуют знания формул для асимптотических решений. Найденные условия неинтегрируемости сохраняются при малых возмущениях и легко применимы к широкому классу систем, возникающих в механике и физике, в том числе таких систем, где другие методы доказательства неинтегрируемости неприменимы или их применение связано со значительными аналитическими сложностями.

Для удобства применения метода и ввиду практической пользы предполагается, что система аналитически зависит от малого параметра ε , причём невозмущённая система не обязана предполагаться интегрируемой, но при $\varepsilon = 0$ имеется решение $x = z_0(t)$, аналитически продолжающееся и однозначное вдоль некоторых контуров $\Gamma_i \subset \mathbb{C}\{t\}$. Устанавливаются результаты о неинтегрируемости вблизи невозмущённого решения $x = z_0(t)$ при фиксированных малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Соответствующие теоремы были сформулированы в [1], [2], см. также пояснения к доказательствам в [3].

Литература

- [1] Довбыш С. А. Ветвление решений в комплексной области с точки зрения символической динамики и неинтегрируемость многомерных систем // Докл. РАН. 1998. Т. 361, Вып. 3. С. 303–306.
- [2] Dovbysh S. A. Branching of solutions as obstructions to the existence of a meromorphic integral in many-dimensional systems // Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. (NATO ASI Series. Series C: Math. and Phys. Sci., V. 533.) Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1999. P. 324–329.
- [3] Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 3. С. 23–90.

ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ²⁴

Евдокимова Е. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
evdokimovaekan@mail.ru

Рассматривается модель гибридной системы переменной размерности (ГСПР), описывающая плоское движение составного объекта (носителя) и группы простых (несоставных) объектов. Движение начинает один объект управления – носитель. Его непрерывное движение сопровождается переключениями, при каждом из которых от носителя отделяется один или несколько простых объектов. Таким образом, количество управляемых объектов, и, следовательно, размерность управляемой системы, увеличивается. Качество управления оценивается максимальным временем достижения простыми объектами всех заданных терминальных положений (целей), т.е. решается задача группового быстрогодействия.

Пусть на заданном промежутке времени $[t_0, t_F]$ система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \dots, t_N$: $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$. Непрерывное прямолинейное движение носителя описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = V \sin \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = 0,$$

где x, y – координаты положения носителя на плоскости, V – величина скорости движения, а угол γ определяет направление движения (это угол наклона вектора скорости к оси абсцисс). В момент переключения t_i положение носителя сохраняется, а направление его движения меняется:

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad y(t_i) = y(t_i - 0), \quad \gamma(t_i) = \gamma(t_{i-1}) + \Delta\gamma_i. \quad (1)$$

В этот момент от носителя отделяется n_i простых объектов, согласно рекуррентным уравнениям:

$$x_j(t_i) = x(t_i), \quad y_j(t_i) = y(t_i), \quad \gamma_j(t_i) = \gamma(t_i) + \Delta\gamma_i^j, \quad j = M_{i-1} + 1, \dots, M_i, \quad (2)$$

а состояние ранее отделившихся объектов сохраняется

$$x_j(t_i) = x_j(t_i - 0), \quad y_j(t_i) = y_j(t_i - 0), \quad \gamma_j(t_i) = \gamma_j(t_i - 0), \quad j = 1, \dots, M_{i-1}. \quad (3)$$

В уравнениях (2),(3): (x_j, y_j, γ_j) – состояние j -го простого объекта; $M_i = n_1 + \dots + n_i$ – количество простых объектов, отделившихся от носителя до момента t_{i+1} . Изменение направления движения определяется приращениями углов $\Delta\gamma$ и $\Delta\gamma_j$, которые играют в этой модели роль управления. Считаем, что время поворота носителя и простого объекта пропорционально изменению углов: $\Lambda|\Delta\gamma|$ и $\lambda|\Delta\gamma_j|$ соответственно.

²⁴Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00128-а).

После отделения от носителя простой объект движется равномерно

$$\dot{x}_j(t) = v \sin \gamma_j(t), \quad \dot{y}_j(t) = v \cos \gamma_j(t), \quad \dot{\gamma}_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, M,$$

где v – скорость объекта, $M = M_N = n_1 + \dots + n_N$ – общее число простых объектов, участвующих в процессе управления.

Начальное состояние носителя $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $\gamma(t_0) = 0$ и конечные положения простых объектов $x_j(t_F^j) = x_{jF}$, $y_j(t_F^j) = y_{jF}$, $j = 1, \dots, M$, заданы. Направление движения $\gamma_j(t_F^j)$ объекта в момент достижения цели безразлично.

Качество управления группой оценивается максимальным временем достижения объектами всех целей:

$$T = \max_{j=1, \dots, M} t_F^j.$$

Требуется найти наименьшее значение функционала T и управление, при котором это значение достигается.

Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, применение которого демонстрируется на академических примерах.

Литература

- [1] Бортакоский А.С. Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН, 2020. Т. 308.

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РОБОТА ПОДАЧИ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Егоров И. Н. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
egorovmtf@mail.ru

Немонтов В. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
n_v_a@list.ru

Аннотация. Рассматривается математическое описание системы управления многофункциональным монтажно-сборочным робототехническим комплексом на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в условиях нестационарности расположения тепловыделяющих сборок и неполнозаданности ориентации их ячеек транспортного контейнера.

Эффективность алгоритмов ориентации и перемещения платформы робота при монтажно-сборочных операциях обеспечивается применением нелинейных законов управления в процессе позиционно-силового взаимодействия сборки с контейнером.

Ключевые слова: динамическая система, разрывное управление, логико-динамическое управление, позиционно-силовое управление.

Выполнение монтажно-сборочных операций автоматическими манипуляторами в условиях неопределенности координатного положения сопрягаемых деталей и возможного искажения их формы занимает особое место.

Задача управления состоит в следующем. В системе координат контейнера XYZ , в горизонтальной плоскости имеется семейство конструктивных отверстий $\sum_{i=1}^n X_{i0}Y_{i0}$. Из-за погрешностей установки фактические координаты центров ячеек контейнера не совпадают с конструктивными, т.е. имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n X_{i0}Y_{i0} \neq \sum_{i=1}^n X_{i\phi}Y_{i\phi}. \quad (1)$$

Очевидно, что система управления должна реализовывать разрывное управление по координатам в классе систем с переменной структурой. Общий вектор управления $\vec{U} \in$

$\{g_Z, g_X, g_Y, g_\alpha\}$ определяется переключательными функциями g_Z, g_X, g_Y, g_α для каждого из приводов робота:

$$\vec{U} = \begin{cases} g_Z & \forall C1 \vee C2 \vee C3; \\ g_Z \wedge g_X \wedge g_Y & \forall C1 \wedge C4 \vee C2 \wedge C4 \vee C3 \wedge C4; \\ g_Z \wedge g_\alpha & \forall C5; \\ g_\alpha \wedge g_X \wedge g_Y & \forall C5 \wedge C4, \end{cases} \quad (2)$$

где $1, \dots, 5$ – ситуации процесса извлечения сборки.

Управление $g_Z(Z_0, P_Z, P_D, P_{max})$ для обеспечения движения по координате Z описывается следующим логическим алгоритмом:

$$g_Z = \begin{cases} Z_0 \wedge V_Z \wedge \Phi_{G_Z}(p) & \forall P_Z = G_C; \\ Z_0 \cdot k_{P\Pi}(P_Z) \wedge V_{Z1}(P_Z) \wedge \Phi_{G_Z}(p) & \forall G_C < P_Z \leq P_D; \\ k_{PC}(P_{max} - P_Z) \wedge V_{Z2}(P_Z) \wedge \Phi_{V_Z}(p) & \forall P_D < P_Z < P_{max}; \\ -\Delta Z \wedge -V_Z \wedge \Phi_{G_Z}(p) & \forall P_D = P_{max}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\Phi_{G_Z}(p)$, $\Phi_{V_Z}(p)$ – операторные уравнения привода Z , замкнутого по положению и по скорости соответственно; V_Z – скорость извлечения сборки; G_C – сила тяжести сборки; $k_{P\Pi}$ и k_{PC} – коэффициенты передачи регуляторов положения и силы привода Z .

Управление $g_Z(Z_0, P_Z)$ при установке сборки, определяется системой уравнений с логическими условиями:

$$g_Z = \begin{cases} Z_0 \wedge \Phi_{G_Z}(p) & \forall P_Z = G_C; \\ U_Z k_{PC_k}(G_C - P_Z) \wedge \Phi_{V_Z}(p) & \forall (G_C - P_Z) \leq P_{Z_0}; \\ k_{PC} P_{Z_0} \wedge \Phi_{P_Z}(p) & \forall (G_C - P_Z) \geq P_{Z_0}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Phi_{G_Z}(p)$, $\Phi_{V_Z}(p)$, $\Phi_{P_Z}(p)$ – операторные уравнения привода Z , замкнутого по положению, по скорости и по силе соответственно; U_Z – сигнал задания по скорости установки сборки; P_{Z_0} – порог уменьшения P_Z , условие переключения; k_{PC_k} и k_{PC} – коэффициенты передачи регуляторов скорости и силы привода Z .

Применение математического аппарата на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для построения систем управления, позволяющих выполнять сопряжение деталей без точных вычислений сил и моментов, обеспечивает сопряжение специальных объектов при не полной определённости их взаимного расположения. Формирования законов движения степеней подвижности манипулятора робота осуществляется по специальной программе.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ

Жданов О. Н. (Россия, Красноярск)

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева
onzhdanov@mail.ru

Исследуется система уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) = 0, \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta + \theta_y \cos 2\theta) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где σ – гидростатическое давление, θ – угол между осью Ox и первым главным направлением тензора напряжений, k – постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Характеристики системы (1) следующие: $dy = tg \theta dx$, $dy = -ctg \theta dx$.

Введем в рассмотрение новые переменные $\xi = \frac{\sigma}{2k} - \theta$, $\eta = \frac{\sigma}{2k} + \theta$ и новые неизвестные функции $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$, $-C = \varphi \sin \theta + \psi \cos \theta$, $D = \varphi \cos \theta - \psi \sin \theta$.

Мы используем законы сохранения следующего вида: $\int_L -C dy + D dx = 0$, L – замкнутый контур в односвязной области.

Задача Коши. Функции σ , θ заданы на нехарактеристической гладкой кривой MN . И каждая характеристическая кривая пересекает MN только в одной точке. Пусть K – точка пересечения характеристик разных семейств. Интегрируя по частям вдоль характеристик ($\xi|_{KM} = const$, $\eta|_{NK} = const$), мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} \int_{MN} -C dy + D dx = m_1(-Ctg \theta + D) \Big|_M - k_1(-Ctg \theta + D) \Big|_K + \\ + k_1(Ctg \theta + D) \Big|_K - n_1(Ctg \theta + D) \Big|_N = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где M , K , N – точки с координатами (m_1, m_2) , (k_1, k_2) , (n_1, n_2) .

При этом функция $\varphi(\xi, \eta)$ находится как решение задачи:

$$\begin{cases} \varphi_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\varphi, \\ \partial_\eta \left(\frac{\varphi}{\cos \theta} \Big|_{\xi=\xi_i} \right), \\ \partial_\xi \left(\frac{\varphi}{\sin \theta} \Big|_{\eta=\eta_i} \right). \end{cases}$$

и $\varphi = I_0(\sqrt{(\xi - \xi_i) \cdot (\eta - \eta_i)}) \cdot \cos \left(\frac{\eta_i - \xi_i}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta} I_0(\sqrt{(\xi - \xi_i) \cdot (\eta - \eta_i)}) \cdot \sin \left(\frac{\tau - \eta_i}{2} \right) d\tau$, I_0 – функция Бесселя. Знание функции ψ позволяет найти функцию ψ .

Уравнение (2) дает координату k_1 точки пересечения характеристик. Координата k_2 определяется аналогично. Используя уравнения характеристик, мы находим значения функций в криволинейном треугольнике KMN .

Смешанная задача. Мы рассматриваем систему (1), функция θ определена на нехарактеристической кривой MN , функция задана на характеристике MP .

Замечание. Смешанная задача важна для исследования процессов давления, изучения плоских напряженных состояний.

Мы не можем сразу применить описанный алгоритм, потому что функция σ не известна на кривой MN . Однако мы можем свести смешанную задачу к задаче Коши, если сможем найти значения функции σ на MN .

Для этого мы используем множество законов сохранения, что позволяет построить систему алгебраических уравнений относительно значений функции σ в точках кривой MN .

Полученные значения используются для нахождения функций σ и θ в криволинейном треугольнике по схеме решения задачи Коши. На каждом этапе проводится оценка погрешности. И значения функций можно вычислить с любой наперед заданной точностью.

Литература

- [1] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Сиб. отдния Рос. АН. 2001. 192 с.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Зубова С. П. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

spzubova@mail.ru

Раецкая Е. В. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф.Морозова
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система в частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + Du, \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$; $x(t, s) \in R^n$; $u(t, s) \in R^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Устанавливаются свойства матричных коэффициентов, влекущие полную управляемость системы (1), то есть существование такого управления $u(t, s)$, под воздействием которого система переводится из произвольного состояния $x(0, s)$ в произвольное состояние $x(T, s)$. Исследование ведется методом каскадной декомпозиции [1], заключающемся в поэтапном переходе от исходной системы к системам в подпространствах, так что на последнем p -ом шаге реализуется переход к системе в подпространствах. Доказывается

Теорема 1. Система (1) полностью управляема в том и только том случае, когда D_p - сюръективен.

В случае сюръективного D_p строится управление $u(t, s)$; кроме того предъявляется формула для построения функции $x(t, s)$ (обе функции любой степени гладкости).

Литература

- [1] Zubova C. П., Raetskaya E. V. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System // Automation and Remote Control. 2018 .Vol.79, No. 5, p. 774–791.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫЕ РЕДУКЦИИ ИЕРАРХИИ ДВУМЕРИЗОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДА²⁵

Ильина А. В. (Россия, Москва)

Skoltech
ekrez@yandex.ru

Хорошо известно определение иерархии двумеризованной цепочки Тода в виде уравнений Захарова–Шабата — системы коммутирующих потоков $\partial_{t_m}^\pm - L_m^\pm$, где

$$L_m^- = T^{-m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,m}^{j,-} T^{-j}, \quad L_m^+ = \sum_{j=1}^m a_{i,m}^{m,-} T^j \quad (1)$$

нижнетреугольный и строго верхнетреугольный разностные операторы. Мы доказываем, что данную иерархию можно получить другим образом, а именно, как систему на пространстве коэффициентов $\{\psi_\pm(i)\}$ набора формальных рядов вида

$$\psi_-(i) = z_-^i (1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^-(i) z_-^s), \quad \psi_+(i) = z_+^{-i} e^{\varphi_i} (1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) z_+^s).$$

Для этого определим операторы вида (1) уравнениями

$$L_m^- \psi_-(i) = z_-^m \psi_-(i) + O(z) \psi_-(i), \quad L_m^+ \psi_+(i) = z_+^{-m} \psi_+(i) + O(1) \psi_+(i)$$

и динамику на коэффициенты $\xi_s^\pm(i)$ как

$$\begin{cases} (\partial_{t_m}^- - L_m^-) \psi_- = -z_-^m \psi_-, & (\partial_{t_m}^- - L_m^-) \psi_+ = 0 \\ (\partial_{t_m}^+ - L_m^+) \psi_+ = -z_+^{-m} \psi_+, & (\partial_{t_m}^+ - L_m^+) \psi_- = 0, \end{cases}$$

²⁵Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00273 а

из которой очевидным образом следуют уравнения Захарова–Шабата. Если ограничиться случаем периодических операторов, зафиксировать оператор $L = L_{k+1}^-$ и предположить, что $\psi_{\pm}$ будут собственными для L :

$$L\psi_- = z_-^{-k-1}\psi_-, L\psi_+ = z_+\psi_+,$$

то будет иметь место уравнение Лакса

$$\partial_{t_m^{\pm}} L = [L, L_m^{\pm}], \quad (2)$$

причем L становится строго нижнетреугольным. В том случае, когда период n и порядок $k+1$ оператора L взаимнопросты, доказывается, что уравнение (2) есть корректно определенная конечномерная динамическая система на пространстве строго нижнетреугольных n -периодических разностных операторов $\mathcal{L}_{k+1}$ порядка $k+1$. Из работы Кричевера, Фонга 1998 года на пространстве $\mathcal{L}_{k+1}$ существует семейство 2-форм, причем две из них $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ становятся невырожденными при ограничении на некоторые подмногообразия Λ_0^c и Λ_1^c соответственно.

Теорема 1. Векторное поле $\partial_{t_m^{\pm}}$, определенное уравнением Лакса (2), ограниченное на подмногообразии Λ_i^c является гамильтоновым для $i = 0, 1$ по отношению к формам $\omega^{(i)}$ с гамильтонианами

$$H_{t_m^-}^{(0)} = \text{res}_{p_-} z^{-m} E(z) d \ln z = e_{m+k+1}, \quad H_{t_m^-}^{(1)} = \text{res}_{p_-} z^{-m} \ln E(z) d \ln z$$

$$\text{где } E(z) = z_-^{-k-1} (1 + \sum_{s=1}^{\infty} e_s z^s), \text{ и } H_{t_m^+}^{(i)} = \frac{1}{n} \text{res}_{p_+} E^{-m-i} \ln w(E) dE, \quad i = 0, 1$$

Для простейших уравнений вида (2) в подходящих локальных координатах будут подсчитаны $H_{t_m^{\pm}}^{(i)}$ и $\omega^{(i)}$, $i = 0, 1$. К примеру, уравнение

$$\partial_{t_1^-} \varphi_{i-1} - \partial_{t_1^-} \varphi_{i+1} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1} - \varphi_i},$$

эквивалентное $\partial_{t_1^-} L = [L, L_1^-]$, здесь $L = a_i T^{-1} + T^{-2}$ с $a_i = a_{i+n} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$ и $L_1^- = \partial_{t_1^-} \varphi_i + T^{-1}$, является би-гамильтоновым по отношению к формам 1) $\omega^{(0)} = \langle dx_i \wedge dx_{i-1} \rangle$, $a_i = x_i - x_{i-2} + e_1$, которая становится симплектической при условии $e_1 = \text{const}$, с гамильтонианом $H_{\partial_{t_1^-}}^{(0)} = \frac{1}{n} \langle x_i^2 (x_{i-1} - x_{i+1}) \rangle + \frac{e_1}{n} \langle x_i (x_{i+1} - x_i) \rangle$, и 2) $\omega^{(1)} = \langle d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1} \rangle$, с соответствующим гамильтонианом $H_{\partial_{t_1^-}}^{(1)} = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \rangle$.

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ЛЕБЕГА²⁶

Иноземцев А. И. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
inozemcev.a.i@gmail.com

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
levnlya@mail.ru

В работе приведена оценка нормы оператора $K = K_0 + \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(m)}$ с многомерными частными интегралами действующего в анизотропных пространствах Лебега, где $K_0 u = k_0(x)u(x)$, $(K_{\alpha}^{(m)} u)(x) = \int_{D_{\alpha}^{(m)}} k_{\alpha}(x, t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha}$ — частный интеграл, $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, $D_{\alpha}^{(m)} = \prod (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$ — m -мерный параллелепипед в евклидовом пространстве точек

²⁶Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

$\mathbb{R}_m$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — целочисленный мультииндекс из номеров координат точки $x \in \mathbb{R}_n$ ($1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \leq n$), α и $\bar{\alpha}$ составлены из несовпадающих номеров всех координат. В случае $m = n$ получим интегральный оператор, в котором все переменные функции u являются переменными интегрирования $(K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u)(x) = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x, t) u(t) dt$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ($p_i > 1$). Анизотропные классы Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ [2] состоят из функций, определенных в конечном параллелепипеде D , для которых конечна норма

$$\|f(t)\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Введем классы $L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha^{(m)})$ -функций со значениями в $L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}} D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)}$:
 $f \in L_{\mathbf{p}_\alpha} \left(D_\alpha^{(m)}; L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)}) \right) : \left\| \|f(t)\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)})} \right\|_{L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha^{(m)})} < \infty$.

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — сопряженные для $\mathbf{p}$ показатели, тогда из определения нормы в анизотропном пространстве Лебега и неравенства Гельдера получим следующие оценки норм функций [3, 4]:

$$\|K_0 u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_0\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(D)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D)},$$

$$\|K_\alpha^{(m)} u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{q}_\alpha}(D_\alpha^{(m)}; L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}}(D))} \|u\|_{L_{\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2}(D_\alpha^{(m)} \times D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)})},$$

$$\|K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_{1,2,\dots,n}\|_{L_{\mathbf{q}}(D; L_{\mathbf{p}}(D))} \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)},$$

где показатели $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}}$ расставлены по порядку возрастания мультииндексов, а $\mathbf{p}\mathbf{q} = (p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_n q_n)$.

Из оценок норм функций $K_0 u$, $K_\alpha^{(m)} u$, $K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u$ вытекает, что функция u должна принадлежать одновременно разным лебеговым классам: $u \in L_{(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)} \cap \dots \cap L_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2} \cap \dots \cap L_{(p_1, p_2, \dots, p_n)}$. Введем мультииндекс $\mathbf{r}$, который может принимать одно из значений $(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$, $\dots$, $(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)$, $\dots$, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Обозначим через $L_{\mathbf{r}}(D^{(n)})$ класс функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathbf{r}} = \max_{\mathbf{r}} \|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D^{(n)})}.$$

Теорема. Пусть функция $u \in L_{\mathbf{r}}(D^{(n)})$ и для всех мультииндексов α ядра операторов K_0 , $K_\alpha^{(m)}$, $K_{1,2,\dots,n}^{(n)}$ имеют конечные нормы. Тогда линейный оператор с частными интегралами K непрерывен как оператор из $L_{\mathbf{r}}(D^{(n)})$ в $L_{\mathbf{p}}(D^{(n)})$, т.е.

$$\|Kx\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq C \|u\|_{\mathbf{r}},$$

где $C = \|k_0\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(D)} + \sum_{\alpha} \|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{q}_\alpha}(D_\alpha^{(m)}; L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}}(D))} + \|k_{1,2,\dots,n}\|_{L_{\mathbf{q}}(D; L_{\mathbf{p}}(D))}$.

Литература

- [1] Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.
- [2] Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. П. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [3] Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. I: Двумерный случай // Пробл. мат. анализ. **102** 2020.
- [4] Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. II: Многомерный случай // Пробл. мат. анализ. **102** 2020.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ ТИП ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ²⁷

Казаков А. Л. (Россия, Иркутск)

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

kazakov@icc.ru

Рассматривается проблема нахождения и исследования точных решений нелинейных параболических уравнений и систем, возникающих при описании процессов диффузии, фильтрации, конвекции. Наиболее известным объектом такого рода является уравнение нелинейной теплопроводности со степенной нелинейностью [1] (нелинейной фильтрации [2], porous medium equation [3])

$$T_t = \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T). \quad (1)$$

Уравнение (1) обладает интересным классом решений, которые передают возмущения, распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону. Решения такого вида иногда в литературе именуются "тепловыми волнами" [1]. Они являются кусочно-гладкими и состоят из двух интегральных поверхностей: $T \geq 0$ и $T \equiv 0$, которые непрерывно (но, вообще говоря, негладко) состыкованы вдоль некоторого многообразия, именуемого фронтом тепловой волны.

Пусть для определенности фронт тепловой волны задается алгебраическим уравнением $a(t, \mathbf{x}) = 0$, где $\mathbf{x}$ – вектор пространственных переменных. Функция $a(t, \mathbf{x})$ при этом может быть как известной, так и подлежащей определению. Тогда можно искать решения уравнения (1), имеющие тип тепловой волны, как решения задачи с краевым условием

$$T|_{a(t, \mathbf{x})=0} = 0. \quad (2)$$

Для задачи (1), (2) в научной школе А.Ф. Сидорова [2] ранее были доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций (см, например, [4]), которые носят локальный характер и справедливы в малой окрестности фронта тепловой волны.

Для понимания качественных свойств физических процессов за пределами малой окрестности, в частности, при изучении режимов с обострением [1], а также для верификации результатов расчетов [5] полезным инструментом оказываются точные решения, построение которых приводит к интегрированию задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующих особенность перед старшей производной от исходной задачи [6].

В докладе, помимо уже опубликованных результатов автора для уравнения (1), включая уравнение с источником [7], будут представлены новые результаты по построению и исследованию точных решений, имеющих тип тепловой волны, для нелинейного параболического уравнения диффузии-конвекции и параболической системы типа реакция-диффузия.

Литература

- [1] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [2] Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
- [3] Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
- [4] Казаков А. Л., Лемперт А. А. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. мех. и техн. физика. 2013. Т. 54. №2. С. 97–105.
- [5] Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф. Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59. №6. С. 1047–1062.
- [6] Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. №3. С. 544–560.

²⁷ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 20-07-00407, 20-51-S52003.

- [7] Казаков А.Л. Построение и исследование точных решений со свободной границей нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Матем. труды. 2019. Т. 22. №2. С. 54–75.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД²⁸

Калитвин В. А. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет

имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

kalitvin@gmail.com

К линейным интегральным уравнениям с частными интегралами вида

$$\begin{aligned} x(t, s) = & \int_a^t l(t, s, \tau) x(\tau, s) d\tau + \int_c^d m(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma + \\ & + \int_a^t \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + f(t, s) \equiv (Kx)(t, s) + f(t, s), \end{aligned} \quad (1)$$

приводятся различные задачи теории упругости, вязкоупругости и гидромеханики [1].

Уравнение (1) рассматривается в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций, где l, m, n и f - заданные непрерывные функции, $t \in [0; a]$, $s \in [a; b]$.

Найти решение этого уравнения удастся в достаточно редких случаях, поэтому актуальной задачей является разработка приближенных и численных методов их решения. Одним из наиболее распространенных методов решения уравнений является метод механических квадратур. Применение этого метода требует обоснования, так как оператор K , стоящий в правой части равенства, не компактен при ненулевой функции l или m .

При численном решении отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разобьем на части точками $t_p = a + ph$ ($p = 0, 1, \dots, P$; $a + Ph \leq b < (P+1)h$), $s_q = c + qg$ ($q = 0, 1, \dots, Q$; $c + Qg \leq d < (Q+1)g$). Заменяя в (1) $t = t_p$, $s = s_q$ и заменяя первый интеграл по квадратурной формуле $\int_a^{t_p} l(t_p, s_q, \tau) x(\tau, s_q) d\tau = h \sum_{i=0}^Q \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i, s_q) + u_{pq}$ с узлами в точках $t = t_p$ и $s = s_q$, второй интеграл - по квадратурной формуле $\int_c^d m(t_p, s_q, \sigma) x(t_p, \sigma) d\sigma = g \sum_{j=0}^Q \beta_{qj} m_{pqj} x(t_p, s_j) + v_{pq}$, а последний интеграл - по кубатурной формуле $\int_a^{t_p} \int_c^d n(t_p, s_q, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma = hg \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + w_{pq}$, где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а u_{pq} , v_{pq} и w_{pq} - остатки этих формул, получим систему уравнений относительно неизвестных $x(t_i, s_j)$ ($i = 0, 1, \dots, P$; $j = 0, 1, \dots, Q$). Отбрасывая остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q)

$$x_{pq} = h \sum_{i=0}^P \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g \sum_{j=0}^Q \beta_{qj} m_{pqj} x_{qj} + hg \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq} \quad (2)$$

($p = 0, 1, \dots, P$; $q = 0, 1, \dots, Q$), где $f_{pq} = f(t_p, s_q)$, а δ_{pq} - погрешности вычислений для уравнений системы (2) с x_{pq} .

Теорема. Пусть в квадратурных и кубатурной формулах остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$, $|\alpha_{pi}| \leq A < \infty$, $|\beta_{qj}| \leq B < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \leq C < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} ($p = 0, 1, \dots, P$; $q = 0, 1, \dots, Q$) может быть найдено по формулам (2), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0 , что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ ($p = 0, 1, \dots, P$; $q = 0, 1, \dots, Q$). Применяется схема доказательства, аналогичная [4, с. 258-261]. Другой алгоритм численного решения основан на использовании метода Ньютона-Канторовича.

С использованием данных алгоритмов разработаны программы на языке python и проведены численные эксперименты.

²⁸Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19-41-480002).

Литература

- [1] Александров В. М., Коваленко Е. В. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред. Докл. АН СССР, 1980. Т. 252. С. 324–328.
- [2] Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ. 2000. 248 с.
- [3] Калитвин А. С., Калитвин В. А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. 177 с.
- [4] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука (1977).
- [5] Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000. 560 p.p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ²⁹

Калманович В. В. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
v572264@yandex.ru

Серегина Е. В. (Россия, Калуга)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал
evfs@yandex.ru

Степович М. А. (Россия, Калуга)

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
m.stepovich@rambler.ru

Туртин Д. В. (Россия, Иваново)

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал
turtin@mail.ru

При облучения поверхности твёрдого тела ускоренными заряженными частицами или электромагнитным излучением экспериментальное определение локальной температуры нагрева мишени осложнено малым размером области генерации тепла: в начальный момент времени — порядка десятых или даже сотых долей микрометра [1, 2], — а при импульсном воздействии ещё и необходимостью учёта зависимости процесса теплопередачи от времени, вследствие чего полученные результаты имеют невысокую точность и могут рассматриваться лишь как качественные. Поэтому особую ценность в практике воздействия заряженными частицами или импульсами электромагнитного излучения на твёрдые тела приобретают расчетные оценки величины нагрева, основанные на решении уравнения теплопроводности [3].

Ранее нами изучены некоторые возможности использования матричного метода для моделирования процессов диффузии [4, 5] и процесса остывания [6] в многослойных планарных структурах с произвольным числом слоёв. В настоящей работе проведено сравнение этого подхода с результатами решения такой задачи методом интегральных представлений. Показано, что метод интегральных представлений для данной задачи также позволяет получить решение, которое может быть использовано для дальнейшего изучения рассматриваемой математической модели.

Литература

- [1] Кузин А. Ю., Степович М. А., Митюхляев В. Б., Тодуа П. А., Филиппов М. Н. Тепловые эффекты при низковольтном электронно-зондовом рентгеноспектральном микроанализе с нанометровой локальностью // Измерительная техника. 2016. № 10. С. 27–29. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27201242>
- [2] Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V. and Filippov M. N. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 955. 012040 (6 pp.) <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/955/1/012040/pdf>

²⁹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

- [3] Амрастанов А.Н., Серегина Е.В., Степович М.А. Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82, № 9. С. 1304–1309. <https://elibrary.ru/item.asp?id=35462843>
- [4] Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1163. 012012. (6 pp.). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1163/1/012012/pdf>
- [5] Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 172. С. 108–116. <http://mi.mathnet.ru/into549>
- [6] Гладышев Ю.А., Калманович В.В., Степович М.А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международ. Саратовской зимней школы (Саратов, 2020). Саратов: Научная книга, 2020. С. 118–121. <http://school-20.sgu.ru/sbornik.pdf>

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ЦИКЛ В КОЛЬЦЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ³⁰

Кащенко А. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

sa-ahr@yandex.ru

В докладе рассматривается система из N ($N \geq 2$) скалярных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{u}_j + u_j &= \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \quad (j = 1, \dots, N) \\ u_0 &= u_N, \quad u_{N+1} = u_1, \end{aligned} \quad (1)$$

моделирующая кольцо из осцилляторов с запаздывающей обратной связью. Здесь u_j — действительные функции, F — гладкая финитная функция (то есть $F(x) \equiv 0$ при $|x| \geq p$, где p — некоторая положительная константа), γ и T — положительные константы, положительный параметр λ является достаточно большим ($\lambda \gg 1$).

Мы строим асимптотику всех решений системы (1) с начальными условиями из некоторого подмножества фазового пространства $C([-T, 0]; \mathbb{R}^N)$ и с помощью специального метода большого параметра [1] получаем следующий результат.

Теорема. *У системы (1) (при некоторых условиях типа невырожденности) при всех достаточно больших значениях $\lambda > 0$ существует экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл периода $(1 + o(1)) \ln \lambda$ (при $\lambda \rightarrow +\infty$).*

Литература

- [1] Kashchenko A. A. Multistability in a system of two coupled oscillators with delayed feedback // Journal of Differential Equations. 2019. V. 266. No 1. С. 562–579.

³⁰Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ № МК-1028.2020.1.

ДИНАМИКА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ³¹

Кащенко И. С. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим систему двух дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\dot{x} + x &= x(t-T)(a + d_1y + d_2y^2), \\ \dot{y} &= by + cx^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Эта задача представляет собой несколько упрощенную модель FDML-лазера (см. [1]). Поставим задачу исследовать динамику (1) в окрестности состояния равновесия в фазовом пространстве $C_{[-T;0]} \times \mathbb{R}$.

Главное предположение состоит в том, что значение γT достаточно велико, т.е. $0 < \varepsilon = (\gamma T)^{-1} \ll 1$. Таким образом система (1) является сингулярно возмущенной. Это может быть выполнено в одном из трех основных случаев:

- 1) γ велико, а T фиксировано;
- 2) T велико, а γ фиксировано;
- 3) оба параметра γ и T велики (при этом, возможно, различно по порядку).

В ситуации, когда состояние равновесия теряет устойчивость, асимптотически большое количество корней соответствующего характеристического уравнения (точек спектра) лежит сколь угодно близко к мнимой оси. Таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность.

В случаях близких к критическим построены специальные нелинейные уравнения–квазинормальные формы, – которые не зависят от малого параметра либо зависят от него регулярно. Решения квазинормальных форм определяют главные части асимптотического разложения решений (1).

Литература

- [1] Vladimirov, A and Turaev, D., Model for passive mode locking in semiconductor lasers // Physical Review A, 2005. Vol. 72. P. 033808.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ³²

Кащенко И. С. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

iliyask@uniyar.ac.ru

Маслеников И. Н. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

igor.maslениkov16@yandex.ru

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \delta y = F\left(\frac{dy}{dt}(t-\tau)\right).\tag{1}$$

Здесь $\tau > 0$, функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия.

³¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

³²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

Главным предположением является то, что параметры ε и δ малы ($0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$), таким образом уравнение (1) является сингулярно возмущенным. Будем считать, что параметры ε и δ пропорциональны:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \delta = k\varepsilon.$$

Поставим задачу исследовать поведение решений (1) в некоторой малой (но фиксированной) окрестности нуля в фазовом пространстве $C^1_{[-\tau, 0]}$ при достаточно малых ε и построить асимптотику его решений.

Характеристический квазиполином линеаризованной в нуле задачи (1) имеет вид

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta e^{-\lambda}, \quad \beta = F'(0).$$

Показано, что при $|\beta| < 1$ все его корни имеют отрицательные вещественные части, следовательно нулевое состояние равновесия устойчиво, все решения из некоторой его окрестности (малой, но не зависящей от ε) стремятся к нулю; при $|\beta| > 1$ у характеристического уравнения есть корень с положительной вещественной частью, т.е. нулевое решение неустойчиво, в его окрестности нет устойчивых режимов. В оставшихся случаях $\beta = \pm 1$ характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, таким образом, критические случаи имеют бесконечную размерность.

В критических случаях уравнение (1) сведено к квазинормальным формам – специальным нелинейным эволюционным уравнениям, не содержащие малых параметров, решения которых дают главную часть асимптотических по невязке равномерно по $t \geq 0$ решений уравнения (2).

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИГВЕЯ НА МЯГКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Киселев О. М. (Россия, Уфа)

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

ok@ufanet.ru

Будем рассматривать уравнения движения для механической конструкции перевернутого маятника на колесе с управляющим моментом на колесе u . Примем, что движение происходит по мягкой поверхности с углом наклона, который зависит от пройденного расстояния – угла поворота колеса $z = z(\beta)$ [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \sin(\alpha) - (\cos(\alpha - z)\ddot{\beta} + \sin(\alpha - z)\dot{\beta}^2)\rho - 2\frac{\rho}{\zeta}u, \\ (\zeta + 2)\rho\ddot{\beta} &\in F(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dot{\beta}). \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим

$$f = -\sin(z) - (\ddot{\alpha}\cos(\alpha - z) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha - z))\zeta + \frac{2}{\rho}u.$$

В (1) отображение $F(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dot{\beta})$ устроено следующим образом:

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dot{\beta}) = \begin{cases} f - \nu \operatorname{sgn}(\dot{\beta}), & \{\forall \dot{\beta} \neq 0\}; \\ (-\nu, \nu), & \{\dot{\beta} = 0\} \cup \{|f| \leq \nu\}; \\ f, & \{\dot{\beta} = 0\} \cup \{|\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}| \in \{|f| > \nu\}\}. \end{cases}$$

Здесь параметры модели: α – угол поворота маятника, β – угол поворота колеса, z – текущий угол подъёма мягкой поверхности, ν – момент трения качения по мягкой поверхности, $\rho = r/l$ – отношение радиусу окружности колеса к длине рычага маятника, ζ – отношение массы маятника к массе обода колеса.

Управление построенное, например, на основе ПИД-регулятора имеет вид:

$$u = k_1\alpha + k_2\dot{\alpha} + k_3A, \quad \text{где,} \quad A \equiv \int^t \alpha(t)dt.$$

В этом случае система (1) имеет частное решение:

$$\alpha \equiv 0, \quad A = \frac{\text{sgn}(\dot{\beta})\zeta\nu\rho}{(2k_3\zeta + 4k_3)\rho^2 + 2k_3\zeta},$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1(t - t_0) + \frac{\zeta\nu\rho \text{sgn}(\dot{\beta})}{(2k_3\zeta + 4k_3)\rho^2 + 2k_3\zeta} \frac{(t - t_0)^2}{2}, & (t - t_0) < T; \\ \beta_0 + \beta_1T + \frac{\zeta\nu\rho \text{sgn}(\dot{\beta})}{(2k_3\zeta + 4k_3)\rho^2 + 2k_3\zeta} \frac{T^2}{2}, & (t - t_0) \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$T = -\frac{1}{\beta_1} \frac{\zeta\nu\rho \text{sgn}(\dot{\beta})}{(2k_3\zeta + 4k_3)\rho^2 + 2k_3\zeta}, \quad \{t_0, \beta_0, \beta_1\} \in \mathbb{R}.$$

Существует набор параметров системы $\zeta, \rho, k_1, k_2, k_3$ при которых решение (2) является притягивающим множеством при $(t - t_0)$. Для управления положением маятника примем, что конструкция оснащена датчиком угловой скорости и датчиками линейного ускорения для маятника, а также датчиком угла поворота для колеса.

Теорема 1. Пусть известны значения компонент вектора ускорения $(\ddot{x}, \ddot{y})$, угловая скорость движения маятника $\dot{\alpha}$ и колеса $\dot{\beta}$, тогда наблюдаемая динамическая система для маятника на колесе определяется решением системы из тригонометрического уравнения и включения.

Дискретное управление, основанное на данных датчиков, приводит к появлению стохастичности в динамической системе. Из результатов [2] следует:

Оказывается, что в малой окрестности $\dot{\beta} = 0$ система (1) неустойчива.

Время между последовательными измерениями равно Δt . Пусть траектория находится в окрестности $\Delta_{\pm}$ неустойчивой прямой. Вероятность того, что $\text{sgn}(\delta^{(3)}) = \pm 1$ в главном порядке по $\Delta_{\pm} \rightarrow 0$ такова, что $p_{\pm} = 1/2$.

Теорема 2. Прямая $(A_{\pm}, 0, 0, 0, \dot{\beta})$ при $\text{sgn}(\dot{\beta}) = \pm 1$ является притягивающим множеством для стохастической системы (1).

Оказывается, что в малой окрестности $\dot{\beta} = 0$ система (1) неустойчива.

Время между последовательными измерениями равно Δt . Пусть траектория находится в окрестности $\Delta_{\pm}$ неустойчивой прямой. Вероятность того, что $\text{sgn}(\delta^{(3)}) = \pm 1$ в главном порядке по $\Delta_{\pm} \rightarrow 0$ такова, что $p_{\pm} = 1/2$.

Теорема 3. Среднее время нахождения стохастической системы (1) в Δ -окрестности неустойчивых прямых $(A_{\pm}, 0, 0, 0, \dot{\beta})$ в фазовом пространстве равно $2\Delta t$, где Δt -время между последовательными измерениями состояния системы.

Литература

- [1] Kiselev O. M. A stabilization of the wheeled inverted pendulum on a soft surface.// Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2020, V.3, (принята к публикации).
- [2] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физ. Мат. Лит., 1959.

Клово А. Г. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
agklovo@sfedu.ru

Куповых Г. В. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
kupovykh@sfedu.ru

Ляпунова И. А. (Россия)
Южный федеральный университет
ialyapunova@sfedu.ru

Задача приведения положения струны в заданное состояние в силу возможности обратимости задач гиперболических уравнений равносильна проблеме приведения возмущенной струны в состояние покоя. Выявлены условия, при которых краевые задачи имеют классические решения и рассмотрены функциональные пространства для построения их обобщенных решений [1]. Установлена специфика изучения оптимального управления колебаниями струны [2]. В работах [3]-[5] приведена серия задач, в которых оптимальное управление гиперболическими уравнениями может быть найдено в явном виде. Показано, что использование стандартного минимизируемого функционала не обеспечивает возможность построения оптимального управления на отдельных временных промежутках [6]. Построение минимизируемого функционала для синтеза оптимального управления колебаниями струны является целью настоящей работы.

Постановка краевой задачи. При значениях переменных

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$$

рассмотрим задачу свободных колебаний струны. Во внутренних точках области

$$D = [0; T] \times [0; l]$$

отклонение точек струны $u(t; x)$ от положения равновесия удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = p(t), u|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Первое из граничных условий (3) означает, что левый конец струны движется под воздействием управляющей функции, а второе – то, что правый конец струны закреплен. Исследована роль выбора минимизируемого функционала в возможности синтеза оптимального управления и его построения. Доказаны достаточные условия существования и единственности всюду оптимального управления. При этом такое управление может быть построено в явном виде.

Литература

- [1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [2] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. Москва, «Мир», 1970.
- [3] Ильин В.А., Моисеев Е.И., Оптимизация граничных управлений колебаниями струны, УМН, 60: 6(366) (2005), С. 89–114.
- [4] Моисеев Е.И., Фролов А.А. Граничное управление процессом колебаний струны при условии сопротивления среды на правом конце за время, меньшее критического // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 555–566.

- [5] Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Попиванов Н.И., Холмеева А.А. Разрешимость нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с различными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 10. С. 541-552.
- [6] Клово А.Г., Гончаров А.В. Условия всюду-оптимальности управления одной системой с распределенными параметрами // Материалы IV Международной научной конференции «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, 2019). Т.1 Физико-математические и технические науки. Ч. 1. Донецк: ДонНУ. 2019. С. 27-30.

ПАРИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Кобзев А. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
kobzev42@mail.ru

Возрастающие требования по точности управления технологическими процессами и оборудованием влекут в свою очередь и расширение методов и средств повышения точности систем автоматического управления (САУ). Наряду с различными методами адаптивного управления здесь эффективно применение комплементарного управления. Характерные области применения – управление траекторными перемещениями технологических и мобильных роботов. Решаемые задачи: парирование нерасчетных возмущений на объекте; изменение программной траектории при возникновении возмущений; парирование внутренних возмущений. В большей степени это характерно для мобильных технологических роботов. Они представляют две последовательно соединенные системы: мобильный (транспортный) робот (МР) и расположенный на нем технологический робот (ТР). В конечном итоге на точность выполнения технологического процесса при движении по технологической траектории оказывают влияние многие факторы. Особенности внешней среды: неопределенность в малом рельефа местности и расположения объекта (технологической поверхности). В первом случае при движении МР генерируются возмущающие воздействия как на МР, так и ТР. Во втором случае необходима корректировка программной траектории при выполнении технологического процесса. Кроме того, в ряде случаев требуется парирование изменений внутренних параметров САУ (температурные возмущения, изменение моментов инерции, усилий взаимодействия исполнительных органов ТР с технологическим объектом и др.).

В докладе рассматриваются вопросы построения САУ с комплементарной коррекцией управляющего воздействия с целью парирования внешних и внутренних возмущений. Основные подходы при построении структуры САУ основаны на положениях четвертой формы инвариантности [1]. Ошибка замкнутой системы при управляющем воздействии $g(p)$ и возмущении $f(p)$ определяется

$$\delta(p) = \frac{1}{1 + W(p)}g(p) + \frac{V(p)}{1 + W(p)}f(p), \quad (1)$$

где: $W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, $V(p) = \frac{C(p)}{D(p)}$, передаточные функции разомкнутой системы по управляющему и возмущающему воздействиям. Запишем (1) в строчной форме

$$H(p)\delta(p) = B(p)g(p) + L(p)f(p), \quad (2)$$

где: $H(p) = A(p) + B(p)$; $L(p) = B(p) + C(p)$.

В работе [1] показаны условия парирования внешних возмущений, здесь отметим компенсацию только внутренних возмущений. Тогда с учетом принципа суперпозиции, опустив составляющую от возмущения, выражение (2) примет вид

$$H(p)\delta(p) = B(p)g(p). \quad (3)$$

Вводим дополнительное управление, тогда выражение (3) принимает вид

$$H(p)\delta(p) = B_0(p)g_0(p) + B_1(p)g_1(p). \quad (4)$$

Выполнение условий модифицированной четвертой формы инвариантности для компенсации $\Delta h_1(p)$ возможно формированием дополнительных составляющих:

- 1) в полиноме $B_1(p)$ при выбранном $g_1(p)$;
- 2) управление $g_1(p)$ при выбранном $B_1(p)$;
- 3) управление $\Delta g_0(p)$ при выбранном $B_0(p)$.

При реализации этого способа парирования внутренних возмущений используется текущая ошибка или ее функции. Здесь следует учитывать или оценивать следующие вопросы: 1) допустимый диапазон дрейфа параметров, не приводящий к потере устойчивости; 2) выделение физических параметров САУ, приводящий к изменению показателей качества (в переходном процессе, ошибки слежения); 3) физическую реализацию дополнительной составляющей; 4) место и способ ее введения (на стадии формирования управления, как автономная составляющая, дополнительная составляющая в замкнутом контуре и др.). Реализация контуров адаптации управляющего воздействия возможна на нейросетевых регуляторах [2].

Литература

- [1] Кобзев А.А., Мишулин Ю.Е., Новикова Н.А., Лекарева А.В. Системы автоматического управления с параллельной прогнозирующей моделью. Владимир: ВлГУ. 2014.
- [2] Кобзев А.А., Лекарева А.В., Новикова Н.А., Сидорова О.С. Динамическая коррекция управляющего воздействия в робототехнических системах на базе нейросетевой технологии с онлайн-обучением // Современные наукоемкие технологии. 2018. Т. 2. №12. С. 282–288.

КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Козлов В. В. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

vvkozlov@mi.ras.ru

В докладе изучаются линейные системы дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, которые допускают первый интеграл в виде положительно определённой квадратичной формы. Основное внимание уделено трём взаимосвязанным вопросам: существованию других квадратичных интегралов, свойству гамильтоновости линейной системы, а также её полной интегрируемости. Для невырожденных линейных систем в конечномерном пространстве на все эти вопросы известны практический исчерпывающие ответы. Результаты общего характера применяются к линейным эволюционным уравнениям математической физики: волновому уравнению, уравнению Лиувилля, уравнениям Максвелла и Шрёдингера.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Коптев А. В. (Россия, Санкт-Петербург)

Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова

Alex.Koptev@mail.ru

Рассматриваются 3D уравнения Навье – Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости. Предлагаются к рассмотрению потенциальные движения, то есть такие, для которых существует потенциал скоростей. Анализ основан на первом интеграле уравнений Навье – Стокса, ранее полученном автором. Показано, что при условии потенциальности движения существуют точные решения. Для их нахождения достаточно разрешить систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати.

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса, движение, вязкая несжимаемая жидкость, потенциал, уравнение Риккати, точное решение.

1. Введение.

Простейший вариант уравнений Навье — Стокса соответствует случаю движения несжимаемой жидкости. Для этого случая плотность и все другие физические характеристики жидкости постоянны, а основными неизвестными являются компоненты вектора скорости u , v , w и давление p [1-2]. Для этого случая уравнения Навье — Стокса в безразмерных переменных и при наличии потенциала внешних сил можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Где Δ обозначает трехмерный оператор Лапласа по пространственным координатам,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

Φ — заданная функция, представляющая потенциал внешних сил; Re — число Рейнольдса — безразмерный неотрицательный параметр.

Изучение уравнений (1)-(4) представляет одно из направлений современной математической физики [3]. Однако на сегодняшний день многие вопросы прояснены не до конца и требуют дополнительного исследования. Одной их главных проблем является отсутствие общего конструктивного метода решения. Важным звеном на этом пути является вопрос о построении точных решений. Однако точных решений 3D уравнений по-прежнему не достаточно и это направление исследований остается актуальным. Причем, особый интерес вызывают не отдельные решения, а достаточно широкие классы решений. В данной работе предлагаются к рассмотрению потенциальные решения, то есть такие для которых существует потенциал скоростей. Данный класс решений является не достаточно изученным и на это есть причины. Действительно, если существует потенциал скоростей тогда выполнено

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta w = 0$$

и правые части первых трех уравнений Навье — Стокса обращаются в нуль. А вместе с этим выпадает из дальнейшего рассмотрения такая важная характеристика, как число Рейнольдса Re . И дальнейшее исследование приводит к решению более простых уравнений Эйлера. Большинство исследователей на этом и сходятся: всякое потенциальное решение уравнений Навье — Стокса соответствует некоторому решению уравнений Эйлера. Но при этом остается открытым вопрос: есть ли потенциальные решения уравнений Навье — Стокса, отличные от решений уравнений Эйлера. Исследования автора позволяют положительно ответить на обозначенный вопрос. Среди потенциальных решений уравнений Навье — Стокса есть решения, отличные от решений уравнений Эйлера. Причем, эти решения обладают очень интересными свойствами.

2. Потенциальные решения.

Для изучения таких решений предлагается исходить не из уравнений (1)-(4) непосредственно, а из первого интеграла этих уравнений, ранее полученным автором [4]. Кроме

того, предлагается использовать аппарат теории функций комплексного переменного, введя в рассмотрение комплексные скорости

$$F(z_1) = u - iv, \quad G(z_2) = v - iw, \quad H(z_3) = w - iu$$

, где i представляет мнимую единицу, и

$$z_1 = x + iy, \quad z_2 = y + iz, \quad z_3 = z + ix$$

. В результате задача определения скоростей приводится к решению трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{4}{Re} \cdot \frac{dR}{dz_k} + R^2 = r_k(z_k), \quad (5)$$

где функции $r_k(z_k)$ при $k = 1, 2, 3$ представляют заданные функции переменных z_k .

Уравнения типа (5) есть уравнение известного вида, а именно уравнение Риккати. Уравнения данного вида имеют точные решения при многих различных вариантах правых частей r_k . После вычисления скоростей u, v, w нахождение давления осуществляется с помощью известного интеграла Лагранжа – Коши

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{U^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t), \quad (6)$$

где φ есть потенциал скорости, а U модуль вектора скорости.

3. Заключение.

Указанный подход позволяет найти класс новых точных решений уравнений Навье – Стокса. Каждое из них будет потенциальным, но при этом не будет являться решением уравнения Эйлера, поскольку параметр Re произволен и в общем отличен от нуля. Данные решения обладают интересными свойствами. В частности они аннулируются при $Re \rightarrow 0$. Некоторые из данных решений аннулируются при $t \rightarrow t_*$, то есть имеют конечное время жизни. Последние обстоятельства особенно интересны в связи с известной проблемой ламинарно-турбулентного перехода.

Литература

- [1] Л. И. Седов, МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ТОМ 2. М.: Наука, 1970 г., 568 стр.
- [2] Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский // М.: Наука. – 1987.
- [3] О. А. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows. Gordon and Breach, New York. 1969.
- [4] A. V. Koptev, Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern / A. V. Koptev // Handbook in Navier–Stokes Equations: Theory and Applied Analysis. – Nova Sciences Publishers. Inc., NY, USA. – 2017, P. 443-459.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ОБЩЕГО ВИДА³³

Корчемкина Т. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

krtaalex@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$y''' = p(x, y, y', y'')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2} \operatorname{sgn}(y y' y''), \quad k_0, k_1, k_2 > 0, \quad (1)$$

³³Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90168.

с положительной непрерывной функцией $p(x, u, v, w)$, липшицевой по u, v, w .

В случае $k_0 > 0, k_0 \neq 1, k_1 = k_2 = 0$ поведение решений уравнения (1) изучалось И. В. Астаховой в [1, главы 5–7], [2]. Для уравнений высокого порядка, нелинейных относительно производных, асимптотическое поведение некоторых типов решений рассматривалось В. М. Евтуховым и А. М. Клопотом в работах [3], [4]. Асимптотические свойства решений уравнений высокого порядка, нелинейных относительно y , исследовались И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [5, глава 4].

В работе [6] для решений уравнения (1) было доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $k_0 + k_1 + k_2 \neq 1, k_2 \neq 1, k_2 \neq 2$, функция $p(x, u, v, w)$ непрерывна, липшицева по u, v, w и $0 < m \leq p(x, u, v, w) \leq M < +\infty$. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0, y'(x_0) \geq 0, y''(x_0) > 0$. Тогда

1. если $k_0 + k_1 + k_2 < 1$, то $y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$
или $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$;
2. если $k_0 + k_1 + k_2 > 1, k_1 \leq 1, k_2 < 1$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$;
3. если $k_1 > 1, k_2 < 1$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$
или $y \rightarrow \text{const}, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$;
4. если $1 < k_2 < 2$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow \text{const}, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$;
5. если $k_2 > 2$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow \text{const}, y' \rightarrow \text{const}, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$.

В случаях 1 и 3 теорема 1 не утверждает существования решений с поведением каждого из возможных типов. Однако, в случае постоянного потенциала $p(x, u, v, w)$ классификацию можно уточнить:

Теорема 2. Пусть $k_0 + k_1 + k_2 \neq 1, k_2 < 1$ и $p(x, u, v, w) \equiv p_0 > 0$. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0, y'(x_0) \geq 0, y''(x_0) > 0$. Тогда

1. если $k_0 + k_1 + k_2 < 1$, то $y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$;
2. если $k_0 + k_1 + k_2 > 1, 2k_1 + k_2 < 3$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow +\infty, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$;
3. если $2k_1 + k_2 > 3$, то $\exists \tilde{x} < \infty: y \rightarrow \text{const}, y' \rightarrow +\infty, y'' \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \tilde{x}$.

Литература

- [1] Астахова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Астаховой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.
- [2] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. — Vol. 164 of Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — Springer International Publishing, 2016. — P. 191–204.
- [3] Евтухов В. М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n -го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии, 145(2), 1992. С. 269–273.
- [4] Евтухов В. М., Клопот А. М., Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн., 65(3), 2013, с. 354–380.
- [5] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
- [6] Korchemkina T. On the behavior of solutions with positive initial data to third order differential equations with general power-law // International workshop on the qualitative theory of differential equations, QUALITDE-2019, December 7–9. — Tbilisi, Georgia, 2019. — P. 112–117.

О скорости роста сумм Биркгофа над поворотом окружности

Кочергин А. В. (Россия, Москва)

МГУ им. М.В. Ломоносов

a.kochergin@gmail.com

Пусть $T_\rho: x \mapsto x + \rho \pmod{1}$ — поворот окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ длины 1 на иррациональный угол ρ , $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на окружности функция с нулевым средним, r -ую сумму Биркгофа будем обозначать f^r .

В 1951 году А.С. Безикович обнаружил, что существуют непрерывные топологически транзитивные цилиндрические отображения с убегающими в бесконечность (дискретными) орбитами, т.е. существуют пары «иррациональный поворот окружности — непрерывная функция с нулевым средним», для которых биркгофовы суммы в некоторых точках стремятся к бесконечности. Цилиндрическое отображение, имеющее дискретные орбиты, мы называем отображением Безиковича, а множество $B \subset \mathbb{T}$ точек окружности, имеющих дискретные орбиты, — множеством Безиковича.

Имеется ряд работ, в которых обсуждается взаимосвязь свойств угла поворота, функции и множества дискретных орбит. Очевидно, что множество Безиковича имеет лебеговскую меру ноль. Однако это множество может иметь положительную размерность Хаусдорфа. При этом функция f не может удовлетворять условию Липшица, но может быть гёльдеровой. В имеющихся примерах [1] прослеживается связь между возможной размерностью Хаусдорфа множества B и показателем Гёльдера для f .

Вопрос о скорости роста сумм Биркгофа возник, в частности, в связи с изучением свойств резольвенты оператора взвешенного сдвига над поворотом окружности, а точнее, возможной скорости роста нормы резольвенты $\|R(\lambda)\|$ при приближении λ к спектру (см., например, см. [2]).

В силу строгой эргодичности иррационального поворота окружности, биркгофовы средние $\frac{1}{r}f^r(x)$ сходятся к нулю при $r \rightarrow \infty$ в каждой точке окружности, поэтому средняя скорость убегания орбиты стремится к нулю. Оказывается, что эта скорость может стремиться к нулю сколь угодно медленно.

Теорема 1. *Для любого иррационального поворота окружности T_ρ и любой строго убывающей бесконечно малой последовательности $\{\sigma_r\}$ найдется непрерывная на $\mathbb{T}$ функция f с единичной нормой и нулевым средним, несчетное множество B , а также номер r_0 такие, что для любого $x \in B$ и для любого $r \in \mathbb{N}: r \geq r_0$ справедливо неравенство*

$$\frac{|f^{\pm r}(x)|}{r} > \sigma_r.$$

Вопрос. Какова может быть размерность Хаусдорфа множества B ? Зависит ли максимально достижимая размерность от угла ρ и последовательности $\{\sigma_r\}$?

Литература

- [1] Кочергин А.В. Новые примеры транзитивных цилиндрических каскадов со свойством Безиковича // Матем. сборник. 2018. Т. 209, № 9, С. 3–18
- [2] Антонец А. Б., А. Шукур Али А. Оценки норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом // Доклады НАН Беларуси. 2017. Т. 61, №1, С. 30–35.

НОВАЯ МОДЕЛЬ БОЛЬШОГО ВЗРЫВА И РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ В ОТО С РАЗЛЁТОМ В ПУСТОТУ ГАЗА, СЖАТОГО В ТОЧКУ³⁴

Крайко А. Н. (Россия, Москва)
ФГУП ЦИАМ им. П.И. Баранова
akraiko@ciam.ru

Построена новая модель Большого взрыва и расширения Вселенной. В ее основе – описание в рамках ОТО и СТО задачи о разлёте газа из точки в пустоту, т.е. о разлёте, начавшемся внутри сферы гравитационного радиуса Вселенной.

А. Эйнштейн, пытаясь описать в рамках ОТО стационарную Вселенную, после создания ОТО ввёл в неё космологическую постоянную Λ . В 1922 г. А. Фридман нашёл нестационарное решение ОТО с $\Lambda = 0$. В нём скалярные параметры – функции только времени t . В 1929 г. Э. Хаббл по доплеровскому смещению света установил, что далёкие галактики удаляются от нас со скоростью u , пропорциональной радиусу-вектору r до них: $u = H(t)r$ с функцией $H(t)$, названной постоянной Хаббла. Если галактики разлетаются, то, имея "подходящее" решение, можно определить, когда газ, из которого они потом сформировались, "разлетелся из точки". После открытия Хаббла в качестве "подходящего" было взято решение Фридмана. В нём за начало расширения всегда безграничной Вселенной взят момент сингулярности её скалярных параметров. Время t_0 , отсчитываемое от этого момента, – время "жизни" Вселенной. Возможность описания расширения Вселенной решением Фридмана не вызывала сомнений до 1998 г., когда две группы американских астрономов обнаружили его несоответствие наблюдательным данным. Для устранения этого несоответствия решение Фридмана было обобщено на $\Lambda \neq 0$, выбор которых позволил согласовать наблюдения с этим решением. Найденные значения Λ приводят к эффекту антигравитации и к сопутствующему ему ускоренному расширению Вселенной. Гипотетического носителя антигравитации называли тёмной энергией.

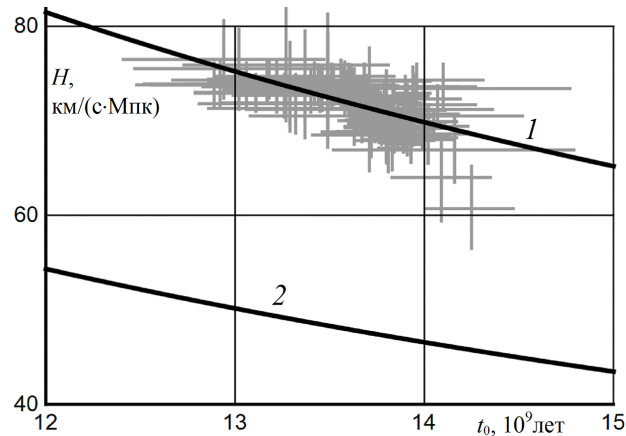


Рис. 1: Кривые: 1 – формула: $H = 978/t_0$, 2 – следствие решения Фридмана с $\Lambda \neq 0$

В 2015 г. в [1] в рамках СТО решена задача о разлёте газа из точки в пустоту. Сравнения найденного на удивление простого решения: $u = r/t$, т.е. $H(t) = 1/t$ с наблюдательными данными показали, что оно без эмпирических постоянных описывает наблюдения не хуже любой современной космологической теории с тёмной энергией. Сказанное подтверждает рис. 1 с более чем двумястами вариантами обработки наиболее надёжных наблюдательных данных современными космологическими теориями [2], образующих область серых крестов (каждый крест даёт погрешности определения H и t_0). Через неё проходит кривая 1, определённая следствием решения [1] – формулой: $H = 978/t_0$ с H в км/(с · Мпк) и t_0 в миллиардах лет. Сравнение области серых крестов с кривой 1, полученной без единой эмпирической постоянной, – свидетельство того, что тёмная энергия излишня.

³⁴Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00100).

Всё, однако, много сложнее, ибо начавшийся из точки разлёт долгое время (может, вечно) будет идти под гравитационным радиусом $r < r_g = 2MG/c^2$ с массой Вселенной M , гравитационной постоянной G и скоростью света c . Поэтому решение надо начинать в рамках ОТО с метрикой $ds^2 = e^{2\varphi} dt^2 - (e^{2\psi} dr^2 + r^2 d\Omega^2) c^{-2}$ и уравнениями

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2\psi}(2r\varphi_r + 1) &= -r^2 \kappa c^{-2} (w\beta u^2/c^2 + p), \quad \kappa = 8\pi G/c^4, \quad \beta = (1 - u^2/c^2)^{-1}, \\ e^{-2\varphi} r(\psi_{tt} + \psi_t^2 - \psi_t \varphi_t) - c^2 e^{-2\psi} (r\varphi_{rr} + r\varphi_r^2 + \varphi_r - \psi_r - r\psi_r \varphi_r) &= -r\kappa p, \\ 1 - e^{-2\psi}(1 - 2r\psi_r) &= r^2 \kappa c^{-2} (w\beta - p), \quad 2e^{-2\psi} \psi_t = -r\kappa c^{-2} w\beta u, \\ \left(e^\varphi e^\psi r^2 n / \sqrt{e^{2\varphi} c^2 - e^{2\psi} u^2} \right)_t + \left(e^\varphi e^\psi r^2 n u / \sqrt{e^{2\varphi} c^2 - e^{2\psi} u^2} \right)_r &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w – энтальпия единицы объёма, а n – число барионов в единице объёма. Почти с начала разлёта, вызванного в данной модели, в первую очередь, запредельной энергией излучения, а затем электронов и равного числа позитронов (при пренебрежимом вкладе барионов), плотность в центре "взрыва" сразу становится конечной, убывая с ростом t . Из-за этого $\varphi = \psi = 0$ при $r = 0$ и $t > 0$, и область малых φ и ψ вблизи центра быстро растёт со временем. Вне разлетающегося газа всё, как в чёрной дыре такой же остающейся в центре массы. При малых φ и ψ последнее уравнение (1) в главном по φ и ψ порядке становится уравнением неразрывности СТО для n . Первые 4 из них станут

$$\begin{aligned} 2r\varphi_r - 2\psi &= r^2 \kappa c^{-2} (w\beta u^2/c^2 + p), \quad r c^{-2} \psi_{tt} - r\varphi_{rr} - \varphi_r + \psi_r = -r\kappa c^{-2} p, \\ 2\psi + 2r\psi_r &= r^2 \kappa c^{-2} (w\beta - p), \quad 2\psi_t = -r\kappa c^{-2} w\beta u. \end{aligned}$$

Исключение ψ дифференцированием 3-го и 4-го уравнений и чуть более сложное исключение φ и ψ из 1-го, 2-го и 4-го приводят к уравнениям энергии-импульса СТО. Как и в [1], их автомодельное решение ищется в форме: $u = cU$, $p = E_0 P/(ct)^3$, $w = E_0 W/(ct)^3$ и $n = N_0 N/(ct)^3$, где N_0 – общее число барионов, E_0 – их энергия покоя, а U, P, W и N – функции $\xi = r/(ct)$. Подстановка этих выражений в уравнение неразрывности для n даёт $U = \xi$, т.е. $u = r/t$ и $\mathbf{u} = \mathbf{r}/t$. Затем их подстановка с $U = \xi$ в уравнения энергии-импульса приводит к двум равенствам $\xi(dP/d\xi) + 3P = 0$ и $dP/d\xi = 0$. Их следствие, исправляющее ошибку [1], – одно равенство $p = 0$, а не два: $p = 0$ и $w = 0$. То, что $p = 0$ получилось без использования условия $p = 0$ на границе с пустотой, принципиально, поскольку уравнения СТО несправедливы вне примыкающей к центру области малых φ и ψ , отделённой от вакуума сферическим слоем, эволюцию которого определяет ОТО. Какой будет эта эволюция – сложнейшая проблема, причём при схожести с чёрной дырой в ней, отнюдь, совсем не обязателен "запрет" на разлёт газа за гравитационный радиус. Принципиально и $w \neq 0$, а также то, что, вопреки [1], в рамках модели с реальным центром плотность частиц n не обязана быть лоренц-инвариантной.

Литература

- [1] Валиев Х. Ф., Крайко А. Н. Разлет идеального газа из точки в пустоту. Новая модель Большого взрыва и расширения Вселенной // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 793–807. = Valiyev Kh. F., Kraiko A. N. The dispersion of an ideal gas from a point into a void. A new model of the Big Bang and the expansion of the Universe // J. of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 79. No. 6. P. 556–565.
- [2] WMAP Cosmological parameters Model/Data Set Matrix. NASA; <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm>.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ
С РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ
НА ЗАМКНУТОМ ТРЕХМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Круглов Е. В. (Россия, Нижний Новгород)

Научно-исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
НИУ Высшая школа экономики - Нижний Новгород
kruglov19@mail.ru

Представленные результаты получены в сотрудничестве с В.З. Гринесом и О.В. Починкой. В докладе рассматриваются А-дiffeоморфизмы, неблуждающие множества которых содержат двумерный растягивающийся аттрактор, на замкнутом трехмерном многообразии $\mathbb{M}^3$. В 1979 году В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой были получены условия существования гомеоморфизма, сопрягающие ограничения таких диффеоморфизмов на базисные множества, а в 2002 году теми же авторами было показано, что для таких диффеоморфизмов $\mathbb{M}^3$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^3$ и анонсирована их топологическая классификация на всём несущем многообразии [1]. В том же году Е.В. Жужомой и В.С. Медведевым получен результат, заключающийся в том, что среди рассматриваемых отображений не существует грубых диффеоморфизмов с неориентируемыми растягивающимися двумерными аттракторами.

Пусть $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество $NW(f)$ содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ . Класс таких диффеоморфизмов обозначим G . Через $W^u(y)$ ($W^s(y)$) будем обозначать неустойчивое (устойчивое) многообразие точки y . Так как для произвольной точки $x \in \Lambda$ $\dim W^s(x) = 1$, то множество $W^s(x) \setminus x$ состоит из двух компонент связности, причем не менее, чем одна из них имеет непустое пересечение с множеством Λ . Точка $x \in \Lambda$ называется граничной, если у неё имеется компонента связности $W^{s\emptyset}(x) \subset W^s(x) \setminus x$, не пересекающаяся с Λ . Множество всех граничных точек аттрактора Λ не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на ассоциированные пары (p, q) точек одинакового периода таким образом, что 2-связка $W^u(p) \cup W^u(q)$ является достижимой изнутри границей некоторой компоненты связности V_{pq} множества $\mathbb{T}^3 \setminus \Lambda$. Пусть $T(f) = NW(f)$ и $T_{pq} = T(f) \cap V_{pq}$. В [1] показано, что существует натуральное число k_{pq} такое, что множество T_{pq} состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq} - 1$ периодических седловых точек $p_1, \dots, p_{k_{pq}-1}$, причём дуга $l_{pq} = W^{s\emptyset}(p) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(p_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}} \alpha_i \cup W^{s\emptyset}(q)$ простая.

Особенностью дискретных динамических систем на трехмерных многообразиях является возможность нетривиального вложения сепаратрис. Оказалось, что замыкания двумерной сепаратрисы и одной из одномерных сепаратрис седловой неподвижной точки могут быть инвариантными дико вложенной двумерной сферой и дугой соответственно. Следствием этого, в частности, явилось доказанное Х. Бонатти и В.З. Гринесом существование на трехмерном ориентируемом многообразии счетного числа топологически несопряженных диффеоморфизмов Морса-Смейла, неблуждающее множество каждого из которых состоит из одной седловой, одной источниковой и двух стоковых неподвижных точек. Таким образом, для завершения топологической классификации диффеоморфизмов из класса G на всём несущем многообразии не хватало доказательства ручности сепаратрис сёдел p_i и множеств $W^{s\emptyset}(p)$, $W^{s\emptyset}(q)$, которое было недавно получено в работе [2]. Это позволило доказать, что если диффеоморфизмы $f, f' \in G$ и существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что $h(\Lambda) = \Lambda'$ и $f|_{\Lambda} = h^{-1}f'|_{\Lambda'}h$, где Λ' — растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f' , то отображение h может быть продолжено на множество $\mathbb{T}^3 \setminus \Lambda$.

Литература

- [1] Гринес В.З., Жужома Е.В.. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, серия математическая. 2002. 66(2). 3–66.
- [2] Grines V. Z., Kruglov E. V., Medvedev T. V., Pochinka O. V. On embedding of arcs and circles in 3-manifolds and its application to dynamics of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional expanding attractors // Topology and its Applications. Vol.271. 2020. Pap.106989.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПО МАП-КРИТЕРИЮ В СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Кудрявцева И. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт

kudryavtseva.irina.a@gmail.com

Рыбаков К. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт

rkoffice@mail.ru

Задача оптимальной фильтрации сигналов в динамических системах, подверженных случайным возмущениям, как правило, решается при задании критерия качества, минимизирующего среднеквадратическое отклонение ошибки оценивания. Реже применяется критерий качества, при котором максимизируется апостериорная плотность вероятности (МАП-критерий) [1]. Аналитическое решение задачи оптимальной фильтрации если и возможно, то только в простых случаях, например, широко применяемый фильтр Калмана для линейных систем с дискретным временем. Поэтому актуальным является развитие приближенных методов фильтрации, к которым в частности относится фильтр частиц [2, 3].

Фильтр частиц основан на совместном моделировании пучка траекторий системы с дискретным временем по известной математической модели, задаваемой разностным уравнением или системой разностных уравнений, и весовых коэффициентов, которые для каждой отдельной траектории определяют ее значимость с учетом модели измерителя и имеющихся измерений. По результатам моделирования можно решить задачу оптимальной фильтрации как по критерию качества, минимизирующего среднеквадратическое отклонение ошибки оценивания, так и по МАП-критерию. Однако в последнем случае требуется увеличивать количество моделируемых траекторий, пропорционально увеличивая и время расчетов, что может служить препятствием при статистической обработке результатов моделирования в реальном масштабе времени. В такой ситуации предлагается перейти к приближенному нахождению моды апостериорного распределения, которая и является решением задачи оптимальной фильтрации по МАП-критерию, на основе представления апостериорной плотности вероятности в виде частичной суммы ряда Эджворта [4].

Если в частичной сумме ряда Эджворта ограничиться учетом апостериорных центральных моментов третьего порядка, то можно воспользоваться либо асимметрией Шарлье [4], либо применить необходимые условия экстремума для нахождения элемента, на котором частичная сумма достигает максимума, при этом задача сводится к решению алгебраического уравнения четвертой степени [5, 6]. При учете апостериорных центральных моментов более высокого порядка необходимые условия экстремума для соответствующей частичной суммы ряда Эджворта приводят к решению алгебраического уравнения, степень которого выше четырех. Для поиска его корней можно воспользоваться приближенными методами [7].

Литература

- [1] Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons, 2001.
- [2] Ristic B., Arulampalam S., Gordon N. Beyond the Kalman filter: Particle filters for tracking applications. Artech House, 2004.
- [3] Волков В. А., Кудрявцева И. А. Численное решение задач нелинейной фильтрации на основе алгоритмов фильтра частиц // Труды МАИ. 2016. № 89.
- [4] Cramér H. Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, 1999.
- [5] Косачев И. М., Чугай К. Н., Рыбаков К. А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 1 // Труды МАИ. 2019. № 105.
- [6] Косачев И. М., Чугай К. Н., Рыбаков К. А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 2 // Труды МАИ. 2019. № 106.

- [7] Pan V. Y. Solving a polynomial equation: some history and recent progress // SIAM Review. 1997. V. 39. № 2. P. 187–220.

СОЛИТОНЫ И КАВИТОНЫ В НЕЛОКАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА УИЗЕМА³⁵

Кулагин Н. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Высшая школа экономики, Нижний Новгород
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

Лерман Л. М. (Россия, Нижний Новгород)

Высшая школа экономики
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
lermanl@mm.unn.ru

Малкина А. И. (Россия, Нижний Новгород)

Высшая школа экономики, Нижний Новгород
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

В работе изучаются солитоны и кавитоны (локализованные решения уравнения с особенностями) нелокального уравнения типа Уизема. Уравнение для бегущих волн является нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка, зависящим от двух параметров, которое после введения новых переменных сводится к системе четырех уравнений первого порядка, являющейся обратимой и гамильтоновой, определенной на двулистном накрытии 4-мерного полупространства. В случае малости одного из параметров система становится быстро-медленной гамильтоновой. Основной задачей работы является поиск и классификация гомоклинических траекторий системы для состояния равновесия в начале координат, лежащего на одном из листов, которое, в зависимости от значений параметров, может иметь различный тип, в интересующем нас случае – либо седло-центром, либо седло-фокусом. Траектории системы, остающиеся при движении целиком на одном листе, являются гладкими, а траектории, которые пересекают плоскость ветвления, являются разрывными аналитическими кривыми, которые в точках разрыва продолжаются с помощью перехода через симметричную точку и далее по другому листу. Соответствующие им разрывные гомоклинические траектории называются кавитонами. Для их построения используется обратимость системы. Для исходного уравнения четвертого порядка соответствующее решение непрерывно, но имеет разрывы первой и третьей производной. Для обнаружения гомоклинических решений и классификации их типов используются как аналитические методы (нормальные формы, усреднение, теория бифуркаций, теория поведения траекторий гамильтоновой системы вблизи гомоклинических траекторий к седло-центру (Лерман, Гротта Рагаццо, Мильке-Холмс-О’Рейли и др.) и седло-фокусу (Шильников, Девани, Лерман, Тураев-Джайлс и др.)), так и численные методы для продолжения решений, найденных бифуркационными методами. Наличие гомоклинических решений к седло-центру и седло-фокусу, в силу результатов Лермана, Шильникова, Девани и др. гарантирует сложную динамику системы. Задача о поиске таких локализованных решений для уравнения четвертого порядка может рассматриваться как нелинейная краевая задача относительно второго параметра. Показано, что спектр решений может быть как дискретным (в случае седло-центра), так и сплошным (для седло-фокуса).

³⁵Работа поддержана грантами РФФИ 18-29-10081, 19-01-00607.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ³⁶

Куликов А. Н. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова

anat_kulikov@mail.ru

Куликов Д. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова

kulikov_d_a@mail.ru

Уравнение, которое принято называть "уравнением Кана-Хиллиарда" было предложено в работе [1] в связи с задачами химической кинетики. Оно используется также и в различных разделах физики и в том числе гидродинамике [2]. Обычно, его принято рассматривать в случае одной пространственной переменной (см., например, работы [3,4], а также работы из списка литературы из этих статей).

В докладе речь пойдет об этом уравнении в случае двух пространственных переменных и для обобщенного его варианта, который называют конвективным (см., например, [5]). После перенормировок независимых и зависимой переменных можно считать, что периодическая краевая задача будет записана в следующей форме

$$u_t = -\Delta_\mu^2 u - b_1 \Delta_\mu u - b_2 \Delta_\mu(u^2) + \Delta_\mu(u^3) + a_1(u^2)_x + a_2 \mu(u^2)_y, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y). \quad (2)$$

Здесь $\Delta_\mu u = u_{xx} + \mu u_{yy}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Следует различать два основных случая:

$$1) \mu > 1; \quad 2) \mu = 1 \quad (|\mu - 1| \ll 1).$$

Во обоих случаях краевая задача (1),(2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $S_\alpha : u(t, x, y) = \alpha \in \mathbb{R}$. Остановимся только на частном случае $b_2 = 0$.

Состояние равновесия S_α устойчиво, если $\alpha^2 > (b_1 - 1)/3$ и неустойчиво, если $\alpha^2 < (b_1 - 1)/3$. Если $\alpha^2(\varepsilon) = (b_1 - 1 - \gamma\varepsilon)/3$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\gamma = \pm 1$ (знак "управляющего" параметра γ выбирается в процессе анализа), то при $\mu > 1$ реализуется случай близкий к критическому пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma$, $\sigma = 2\alpha a_1$, если $a_1 \neq 0$ и $\alpha \neq 0$. При $\sigma = 0$ имеем двукратное нулевое собственное значение.

Если же $\mu = 1$ ($\mu \approx 1$), то реализуется случай близкий к критическому двух пар чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2$, $\sigma_1 = 2a_1\alpha$, $\sigma_2 = 2a_2\alpha$.

В первом варианте задачи ($\mu > 1$) краевая задача (1),(2) имеет двухпараметрическое притягивающее инвариантное многообразие $V_2(\alpha)$ ($\dim V_2(\alpha) = 2$), все решения на котором периодические функции времени (переменной t) и неустойчивы в смысле определения Ляпунова. Во втором варианте постановки задачи ($\mu \approx 1$) краевая задача (1), (2) имеет трехпараметрическое семейство решений, формирующих трехмерное инвариантное многообразие $V_3(\alpha)$. Все решения на нем квазипериодические или периодические функции переменного t и все они неустойчивы в смысле определения Ляпунова. В обоих случаях эти многообразия ($V_2(\alpha)$ или $V_3(\alpha)$) принадлежат шару $Q(\rho, \alpha)$ фазового пространства решений краевой задачи (1), (2) с центром в точке α . Радиус этого шара $\rho = \rho_0 \sqrt{\varepsilon}$, $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$.

Литература

- [1] Cahn J. W., Hilliard J. E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy // The Journal of Chemical Physics. 1958. V. 28. P. 258-267.
- [2] Frolovskaya O. A., Pukhnachev V. V. Stationary solutions of quadratic Cahn–Hilliard equation and their stability // AIP. Conference Proceedings. 2013. V. 1561. P. 47-52.
- [3] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations in the Cahn–Hilliard and Kuramoto–Sivashinsky equations and in their generalizations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. V. 59. P. 630-643.

³⁶Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (грант № 18-01-00672)

- [4] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous solutions in two boundary value problems for the Cahn–Hilliard equations // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 2019. V. 51. P. 21-32.
- [5] Choi Y. Dynamical bifurcation of the one-dimensional convective Cahn-Hilliard equation // The Korean Journal of Mathematics. Physics. 2014. V. 22. №4. P. 621-632.

ФУНКЦИЯ ЛАУРИЧЕЛЛЫ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ВЕСЕЛОВА

Лексин В. П. (Россия, Коломна)

Государственный социально-гуманитарный университет

lexin_vp@mail.ru

Аналитическую функцию Лауричеллы $F_D^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b, c, z_1, \dots, z_n)$ от n комплексных переменных можно определить интегралом гипергеометрического типа [1, 2, 3]

$$F_D^{(n)}(z, a, b, c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \prod_{i=1}^n (1-tz_i)^{-a_i} dt, \quad (1).$$

Эта функция является формальным многомерным аналогом гипергеометрической функции Гаусса, определяемой эйлеровым интегралом

$$F(z, a, b, c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt.$$

Функция $F(z, a, b, c)$ является решением гипергеометрического уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dy}{dz} - aby = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) явно приводится к линейной фуксовой системе

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) \psi(z), \quad (3)$$

где матрицы второго порядка A_0 и A_1 являются постоянными матрицами. Компоненты всех решений системы (3), возможно с использованием элементарных функций и рациональных замен независимой переменной, выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса $F(z, a, b, c)$.

Для любого конечноного набора ковекторов $R \subset V^*$, порождающего двойственное пространство V^* к векторному пространству V можно определить фуксову систему на V (V -систему Веселова [7]) следующего вида

$$d\Psi(v) = \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{\alpha^\vee \otimes \alpha d\alpha(v)}{\alpha(v)} \right) \Psi(v),$$

где $\alpha^\vee$ вектор двойственный ковектору α относительно канонической билинейной формы на V

$$B_R(u, v) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(u) \alpha(v), \quad u, v \in V.$$

Системы Веселова являются интегрируемыми в смысле Фробениуса, когда набор векторов R является системой положительных корней некоторой коксетеровской системы корней [7]. Веселовым были найдены деформации $A_n^+(c)$ и $B_n^+(c)$ корневых систем A_n и B_n , для которых V -система интегрируема [5]. Для этих систем Веселова, используя их связь с системами Жордана-Похгаммера [4], [6], дано описание выражений всех компонент базиса решений систем Веселова через функцию Лауричеллы, аналогичные выражениям решений системы (3) через гипергеометрическую функцию Гаусса.

Литература

- [1] K. Aomoto On the structure of integrals of power product of linear functions// Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo. 1977. V.27. P. 49–61.
- [2] Безродных С. И., Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана-Гидьберта и приложения// УМН. 2018. Т. 73, вып. 6(444). С. 3-94.
- [3] Appell P. and Kampé de Fériet M. J. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite// Gauthier-Villars. 1926.
- [4] Kapovich M. and Millson J. Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation// Canad. Math. Bull. 2001. V. 44. P.36-60.
- [5] Feigin M. V. and Veselov A. P. $\vee$ -systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields// arxiv: 2409.2424v3 [math.RT] 13 Apr 2017.
- [6] Лексин В. П. Линейные пфаффовы системы и классические решения треугольных уравнений Шлезингера// Труды МИАН. 2020. Т.308. С. 141-153.
- [7] Veselov A. P., Deformations of root systems and new solutions to generalized WDVV equations//, Phys. Lett. A. 1999. V.261. С. 297.

СЛОИ СМЕШЕНИЯ И СТРУИ В МЕЛКОЙ ВОДЕ И ТЕЧЕНИЯХ ХЕЛЕ-ШОУ³⁷

Ляпидевский В. Ю. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

liapid@hydro.nsc.ru

Чесноков А. А. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

chesnokov@hydro.nsc.ru

Взаимодействие быстрых и медленных потоков при их слиянии приводит к формированию слоя смешения и возникновению вихревых структур. Как правило, для течений такого класса развитие сдвиговой неустойчивости может быть описано в рамках теории мелкой воды. При этом характер течения и интенсивность перемешивания определяются взаимодействием вихрей, возникающих вследствие развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, и донного трения, оказывающего стабилизирующее влияние при малой толщине слоя жидкости.

Для сдвиговых движений жидкости в открытых и закрытых каналах на основе трехслойного представления течения предложены осредненные одномерные модели формирования и эволюции слоя смешения. Построены и исследованы стационарные решения. Показано, что учет трения приводит к замедлению процесса перемешивания и прекращению увеличения ширины промежуточного слоя смешения. Для течений под крышкой границы области интенсивного перемешивания немного шире, чем для аналогичных течений со свободной границей, но на начальном этапе отличий практически нет. С использованием решения осредненных уравнений движения выполнено восстановление профиля скорости и турбулентных характеристик потока поперек слоя смешения. Полученные осредненные параметры течения, а также напряжения Рейнольдса и профиль скорости верифицированы сравнением с экспериментальными данными. Отметим, что движение жидкости под крышкой можно интерпретировать как течение Хеле-Шоу с законом трения о стенки канала, соответствующим турбулентному режиму. Такой класс задач представляет интерес в области подземной гидродинамики при моделировании гидроразрыва пласта.

³⁷Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00498).

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж, Липецк)
Воронежский государственный университет,
Липецкий государственный педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
levnlya@mail.ru

Трусова Н. И. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
trusova.nat@gmail.com

Через $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ обозначим конечный параллелепипед в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}^n$. Линейным оператором с частными интегралами (ЛЧИ-оператором) является оператор (для $n = 2$ такого рода операторы изучены в [1], [2], [3])

$$(Ku)(x) = \sum_{\alpha} (K_{\alpha}^{(m)}u)(x), \quad (K_{\alpha}^{(m)}u)(x) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}^{(m)}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha}, \quad (1)$$

где $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$, m — размерность области интегрирования. Координаты точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ разобьем на части $x = (x_{\gamma}, x_{\beta})$. Оценки получены для непрерывных функций по x_{γ} со значениями в лебеговом классе функций L_p по переменным x_{β} :

$$\|f\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_p(D_{\beta}^{(n_2)}))} = \sup_{x_{\gamma} \in D_{\gamma}^{(n_1)}} \left(\int_{D_{\beta}^{(n_2)}} |f(x_{\gamma}, x_{\beta})|^p dx_{\beta} \right)^{\frac{1}{p}},$$

Соответствующий класс функций обозначен $C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_p(D_{\beta}^{(n_2)}))$. Мультииндексы γ (размерности n_1) и β (размерности n_2) не совпадают и выполнено условие $n_1 + n_2 = n$.

При $\alpha = 0$ ($\Rightarrow m = 0$) в (1) оператор $K_0^{(0)} = K_0$ — оператор умножения на функцию. Для этого оператора получена оценка

$$\|K_0 u\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_p(D_{\beta}^{(n_2)}))} \leq C_0 \|u\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_{p,2}(D_{\beta}^{(n_2)}))}, \quad C_0 = \|k_0\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_{pq}(D_{\beta}^{(n_2)}))}. \quad (2)$$

Для частных интегралов (сокращая, далее пишем ЧИ) $K_{\alpha}^{(m)}$ будем предполагать, что часть элементов мультииндекса β совпадает с элементами мультииндекса α . Оставшиеся элементы β обозначим β^* ; размерность мультииндекса β^* равна l . И пусть γ^* — элементы мультииндекса γ , не совпадающие с элементами α и β^* . Тогда $x_{\bar{\alpha}} = (x_{\gamma^*}, x_{\beta^*})$. Получена оценка

$$\|K_{\alpha}^{(m)} u\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_p(D_{\beta}^{(n_2)}))} \leq C_{\alpha} \|u\|_{C(D_{\gamma^*}^{(n-l-m)}; L_{p,p^2}(D_{\alpha, \beta^*}^{(m+l)}))}, \quad (3)$$

$$C_{\alpha} = \prod_{\beta} (b_{\beta} - a_{\beta})^{1/p^2} \|k_{\alpha}\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_{q;pq}(D_{\alpha, \beta}^{(m+n_2)}))}.$$

При $\alpha = (1, 2, \dots, n)$ (т.е. $\bar{\alpha}$ пусто и $m = n$) в (1) оператор $K_{1, \dots, n}^{(n)}$ — интегральный оператор. Для него, другими средствами, получена оценка

$$\|K_{1, \dots, n}^{(n)} u\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_p(D_{\beta}^{(n_2)}))} \leq C_{1, \dots, n} \|u\|_{L_p(D^{(n)})}, \quad (4)$$

$$C_{1, \dots, n} = \prod_{\beta} (b_{\beta} - a_{\beta})^{1/p^2} \|k\|_{C(D_{\gamma}^{(n_1)}; L_{q;pq}(D_{1, \dots, n; \beta}^{(n+n_2)}))}.$$

³⁸Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19-41-480002).

В оценках (2), (3), (4) использованы анизотропные классы функций $L_{\mathbf{r}}(D_1 \times \dots \times D_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, см. [4].

Теорема 1. Пусть $p \in (1, \infty)$ и ядра $k_0, k_\alpha, k_{1,\dots,n}$ ЧИ, составляющих оператор (1), имеют конечные смешанные нормы

$$\|k_0\|_{C(D_\gamma^{(n_1)}; L_{pq}(D_\beta^{(n_2)}))}, \|k_\alpha\|_{C(D_\gamma^{(n_1)}; L_{q;pq}(D_{\alpha;\beta}^{(m+n_2)}))}, \|k\|_{C(D_\gamma^{(n_1)}; L_{q;pq}(D_{1,\dots,n;\beta}^{(n+n_2)}))}.$$

И пусть $\|u\|_{CL_p} = \max \left\{ \|u\|_{C(D_\gamma^{(n_1)}; L_{p^2}(D_\beta^{(n_2)}))}, \|u\|_{C(D_{\gamma^*}^{(n-l-m)}; L_{p,p^2}(D_{\alpha,\beta^*}^{(m+l)}))}, \|u\|_{L_p(D^{(n)})} \right\}.$

Оператор K непрерывен из CL_p в $C(D_\gamma^{(n_1)}; L_p(D_\beta^{(n_2)}))$.

Литература

- [1] Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000.
- [2] Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. I: Двумерный случай. Проблемы математического анализа. 2020.
- [3] Ляхов Л. Н., Трусова Н. И. Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой. I. Челябинский физико-математический журнал. Челябинск: ЧелГУ, 2020. — Т. 5, вып. 1. С. 22–31.
- [4] Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧАХ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНФОРМАЦИИ

Максимов В. И. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики УрО РАН

maksimov@imm.uran.ru

Обсуждается задача слежения для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также уравнениями с распределенными параметрами. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы заданное качество управляемого процесса, а именно отслеживание траекторией заданной системы траектории другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Указываются устойчивые к информационным помехам алгоритмы ее решения, основанные на конструкциях теории гарантированного управления.

Простейшим примером обсуждаемой задачи является следующая. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) + f_1(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= Cx(t) + Dy(t) + Eu(t) + f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $0 \leq \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f_1(\cdot) \in W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^n) = \{p(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : \dot{p}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)\}$ и $f(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$ — заданные функции, u — управление, A, B, C, D и E — стационарные матрицы соответствующих размерностей.

Наряду с системой (1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + By_1(t) + f_1(t), \quad t \in T, \\ \dot{y}_1(t) &= Cx_1(t) + Dy_1(t) + Ev(t) + f(t) \end{aligned} \quad (2)$$

с начальным состоянием $x_1(0) = x_{10}$, $y_1(0) = y_{10}$. Эта система подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Как само это возмущение $v(\cdot)$, так и отвечающее ему решение системы (2) $z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)) = \{x_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)), y_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))\}$, где $z_{10} = \{x_{10}, y_{10}\}$, неизвестны. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0$,

$\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряется часть фазовых состояний системы (2), а именно состояния $x_1(\tau_i) = x_1(\tau_i; z_{10}, v(\cdot))$, а также состояния $z(\tau_i) = z(\tau_i; z_0, u(\cdot)) = \{x(\tau_i; z_0, u(\cdot)), y(\tau_i; z_0, u(\cdot))\}$ ($z_0 = \{x_0, y_0\}$) системы (1). Состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m - 1]$, — удовлетворяют неравенствам

$$|x_1(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h.$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что

$$|x_0 - x_{10}|_n \leq h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \leq h.$$

Необходимо сконструировать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в системе (1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решение $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (2).

Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x_1(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$ формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ такое, что отклонение решения $z^h(\cdot) = z(\cdot; z_0, u^h(\cdot))$ этой системы от решения системы (2) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T; \mathbb{R}^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h .

Аналогичные задачи обсуждаются для нелинейных систем с распределенными параметрами.

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ³⁹

Маркеев А. П. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
anat-markeev@mail.ru

Изучается движение маятника в однородном поле тяжести. Маятник представляет собой материальную точку весом mg , закрепленную на одном из концов невесомого стержня длиной ℓ . Другой конец стержня шарнирно соединен с вертикальным валом, установленным на подвижной платформе. Платформа вращается вокруг вертикали, на которой расположен вал, с постоянной угловой скоростью ω и при этом еще совершает гармонические колебания вдоль вертикали с частотой Ω и амплитудой A . Пусть q — угол между стержнем маятника и нисходящей вертикалью, а $\xi = \omega t$ — независимая переменная. Уравнения движения можно записать в канонической форме с функцией Гамильтона вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}p^2 - (\alpha + \varepsilon b^2 \cos \tau) \cos q + \frac{1}{4} \cos 2q,$$

$$\alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}, \quad \varepsilon = \frac{A}{\ell}, \quad b = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \tau = \Omega t.$$

При $\varepsilon = 0$ приходим к хорошо известной [1] задаче о движении маятника на вращающейся платформе. Здесь значение параметра $\alpha = 1$ является бифуркационным: при переходе α через единицу происходит изменение числа положений относительного равновесия маятника и характера их устойчивости. При $\varepsilon \neq 0$ представляют интерес периодические движения маятника относительно платформы. Они исследованы довольно подробно (см., например, статьи [2,3] и приведенную в них библиографию).

В докладе исследована нелинейная задача о существовании и устойчивости по Ляпунову периодических движений маятника с периодом, кратным $2\pi/\Omega$. Амплитуда вертикальных

³⁹ Доклад подготовлен в рамках государственного задания (№ регистрации АААА-А17-117021310382-5) в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук и в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

колебаний платформы предполагается малой по сравнению с длиной маятника ($0 < \varepsilon \ll 1$), частота колебаний Ω произвольна, а параметр α считается близким его бифуркационному значению ($\alpha = 1 + \varepsilon\delta$, где δ — величина порядка единицы). Рассмотрен также вопрос о расщеплении сепаратрис невозмущенной системы. Исследование проводится при помощи классических и современных методов нелинейной динамики [4-7].

Литература

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Маркеев А. П., К динамике регулятора Уатта // Доклады Академии наук. 2017. Т.477. №4. С.415–420.
- [3] Маркеев А. П., Сухоручкин Д. А. К динамике маятника, установленного на подвижной платформе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2018 Т.28, Вып. 2. С.240–251.
- [4] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. В кн.: Избранные труды. Т.1. М: Наука, 1971.
- [5] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [6] Козлов В. В., Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.
- [7] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.

ЭНЕРГИЯ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕМОДИНАМИКЕ⁴⁰

Матюков М. Ю. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Паршин Д. В. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Хе А. К. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Чупахин А. П. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирский государственный университет

alexander190513@gmail.com

Система кровеносных сосудов головного мозга человека представляет собой сложную, геометрически разветвленную сеть сосудов различного калибра. Стенки артерий, имеющие многослойную структуру, являются упругими. Движение крови в них, инициируемое сокращениями сердца, является нестационарным. Описание движения крови в такой гидроупругой системе как в норме, так и при наличии сосудистых аномалий, является сложной задачей гидродинамики многофазных систем и математического моделирования. Эта задача актуальна для практической медицины в связи с большой распространенностью и опасностью сосудистых заболеваний.

В докладе ставится и исследуется задача о представлении энергии и ее вычисления для гидроупругих систем, моделирующих течение крови в сосудах головного мозга при наличии аномалий типа церебральных аневризм (ЦА). Такая аномалия представляет собой локальное раздутие стенки артерии, что снижает ее прочность и нарушает нормальный гемодинамический режим. Такое раздутие вызывает образование вихревого течения в сосуде, что влечет опасность образования тромба и закупорки сосуда. Образовавшаяся аномальная

⁴⁰При математическом моделировании были использованы результаты, полученные при реализации проектов РФФИ №№ 14-01-00036, 14-31-50956, 19-48-540010.

конфигурация гидроупругой системы, образованной кровеносным сосудом, аневризмой и потоком крови, требует повышенной, по сравнению со здоровой, энергии для обеспечения кровотока. Для медицины является очень актуальным вопрос прогноза риска разрыва аневризмы. На сегодняшний день не существует каких-либо доказательных признаков разрыва. Представляется, что адекватная оценка полной энергии такой гидроупругой системы может служить полезным параметром при определении риска разрыва аневризмы.

В докладе представлены результаты 3D математического моделирования с использованием промышленного пакета ANSYS CFX различных параметров модельной конфигурации и сравнения расчетов с реальными клиническими данными. Рассмотрены конфигурации кровеносного сосуда с фузиформной аневризмой, представляющей собой расширение (балдж) сосуда на его изгибе. Рассмотрены конфигурации сосуда, различающиеся углом поворота сосуда, а также наличием вторичной аномалии (дивертикула), представляющей собой своеобразную вторичную аневризму меньших размеров, растущую из купола большей. Анализируется полная энергия такой системы, складывающаяся из энергии потока крови, упругой энергии стенки сосуда и энергии ее изгибания. Последняя вычисляется как интеграл по поверхности оболочки от квадрата средней кривизны этой поверхности, называется функционалом Уиллмора и интенсивно исследуется сегодня применительно к биологическим мембранам. В докладе представлены диаграммы, связывающие давление и скорость в потоке в гидроупругой системе. Впервые при численном моделировании получены диаграммы, совпадающие с наблюдаемыми в ходе внутрисосудистого мониторинга кровотока, проводимого авторами совместно с нейрохирургами Национального медицинского исследовательского центра им. ак. Е. Н. Мешалкина.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ $\zeta(2n+1)$ ⁴¹

Мирзоев К. А. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
mirzoev.karahan@mail.ru

Символом $\zeta(s)$, как обычно, обозначим дзета-функцию Римана, а символами $\beta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ - родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \quad \lambda(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s}, \quad \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

соответственно. Хорошо известно, что

$$\lambda(s) = (1 - 2^{-s})\zeta(s), \quad \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Функцию $\beta(s)$ называют бета-функцией Дирихле, а числа $\beta(2)$ и $\zeta(3)$ принято называть постоянными Каталана и Апери соответственно.

Доклад посвящён различным представлениям значений функций $\beta(s)$, $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\zeta(s)$ при натуральных значениях аргумента. Формулы для вычисления значений $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\zeta(s)$ в случае, когда $s = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$), так и формула для $\beta(s)$ при $s = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots$), являются классическими и хорошо известны. Из них немедленно следует, что числа $\beta(2n+1)$, $\lambda(2n)$, $\eta(2n)$ и $\zeta(2n)$ являются трансцендентными. С другой стороны, известные интегральные представления для $\zeta(2n+1)$ и $\beta(2n)$ не позволяют судить об арифметической природе этих чисел, и об этом мало что известно. В частности, по этой причине отыскание различных представлений этих чисел в виде интегралов или быстро сходящихся рядов представляет особый интерес, а литература, посвящённая этой тематике, весьма обширна.

Метод, предложенный мной совместно с Т.А. Сафоновой, позволяет получить новые интегральные представления производящих функций для чисел $\beta(2n)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n-1)$ и $\zeta(2n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$), а именно, доказать справедливость следующей теоремы.

⁴¹ Автор поддержан РНФ, грант № 20-11-20261.

Теорема 1. Пусть $-1 < a < 1$. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a \cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \left(\operatorname{tg}(a\pi/2) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin x} dx \right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x} \right)^2 dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2ax)}{2a} - x \right) \frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg}(a\pi)}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x} \right)^2 dx \right).$$

Из теоремы 1 можно извлечь следующее:

1. Точка $a = 0$ является устранимой особой точкой правых частей равенств теоремы 1, и если их значения в этой точке трактовать как соответствующие пределы при $a \rightarrow 0$, то они становятся регулярными аналитическими функциями внутри единичного круга. Таким образом, раскладывая правые и левые части этих равенств в ряды Тейлора по степеням a и приравнивая соответствующие коэффициенты, можно получить ряд интересных результатов.

2. Представление для чисел $\beta(2n)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n-1)$ и $\zeta(2n+1)$ при $n = 1, 2, \dots$ в виде рядов $\pi^{\sigma(n)} \sum_{k=0}^{+\infty} A_{nk} \zeta(2k)$, где $\sigma(n) = n$ или $\sigma(n) = n-1$ в зависимости от ситуации, а A_{nk} - последовательности рациональных чисел.

3. Интегралы из теоремы 1 можно вычислить в терминах элементарных функций, предполагая, что a является правильной положительной рациональной дробью.

4. Интегралы из теоремы 1 можно вычислить, используя теорию гипергеометрических функций, и тем самым получить новые производящие функции для перечисленных выше чисел в виде гипергеометрических рядов, содержащих a в качестве параметра.

5. Интегралы вида

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^m}{\sin^\sigma x} dx, \quad \sigma = 1, 2; \quad m = \sigma, \sigma + 1, \sigma + 2, \dots$$

можно представить как в виде рядов из п.1, так и в виде конечной линейной комбинации последовательностей $\beta(2k)$, $\lambda(2k+1)$ и $\eta(2k-1)$.

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С НЕМОНОТОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ⁴²

Морозов А. Д. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
morozov@mm.unn.ru

Морозов К. Е. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
kirwamath@gmail.com

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, t) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, t),\end{aligned}\tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, функция Гамильтона H , а также функции g, f достаточно гладкие (аналитические); кроме этого функции g, f непрерывны и квазипериодичны по t равномерно относительно $(x, y) \in G$ с независимыми частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ над кольцом целых чисел и удовлетворяют условию $g'_x + f'_y \neq 0$.

Предполагаем, что система (1) при $\varepsilon = 0$ имеет ячейку $D \subset G$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. Система (1) в области D после перехода к переменным действие I – угол θ принимает вид

$$\dot{I} = \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \quad \dot{\theta}_k = \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,\tag{2}$$

Эта система была рассмотрена в [1] при условии монотонности функции $\omega(I)$. Здесь мы откажемся от этого условия. Если выполнено условие

$$b_k = \omega^{(k)}(I_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j-1; \quad \omega^{(j)}(I_0) \neq 0, \quad j > 1,\tag{1}$$

тогда уровень $I = I_0$ называем **вырожденным**. Уровень $I = I_0$ называем **невырожденным**, если $\omega^{(1)}(I_0) \neq 0$ ($j = 1$).

Рассмотрено поведение решений в окрестностях $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\varepsilon^s < I < I_{n\mathbf{k}} + C\varepsilon^s, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, s = 1/(1+j)\}$ индивидуальных вырожденных резонансных уровней $I = I_{n\mathbf{k}}$, где $I_{n\mathbf{k}}$ – вещественный корень уравнения

$$n\omega(I) = (k, \Omega), \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m), \quad \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m).$$

Получены усредненные системы, определяющие поведение решений в окрестностях вырожденных резонансных уровней $I = I_{n\mathbf{k}}$ ($H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$). Установлены условия существования j асимптотически устойчивых m -мерных инвариантных торов.

Литература

- [1] Морозов А.Д., Морозов К.Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения, 2017. Т. 33, № 12, с. 1607-1615.

⁴²Работа поддержана РФФИ, грант 18-01-00306 и РНФ, грант 19-11-00280.

О ЗАДАЧЕ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ ДЛЯ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫХ МАТРИЦ

Николаев В. Г. (Россия, Великий Новгород)

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

vg14@inbox.ru

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $\det J \neq 0$ не имеет вещественных собственных чисел. Назовем комплексную l -вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$ аналитической по Дуглису [1] в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если выполнено уравнение $\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$.

Рассмотрим следующую задачу Шварца [1]. Требуется найти аналитическую по Дуглису в области D функцию $\phi(z)$ по граничному условию $\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = \psi(\xi)$, где вещественная l -вектор-функция $\psi(\xi) \in C(\Gamma)$ задана.

Пусть область D — произвольный эллипс, и пусть контур $\Gamma = \partial D$. Обозначим через $m_{sk} = m'_{sk} + im''_{sk}$, где $m'_{sk}, m''_{sk} \in \mathbb{R}$, $1 \leq s, k \leq l$ коэффициенты матрицы Q , столбцы которой — собственные векторы диагонализируемой матрицы J . Пусть числа $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, l$ определены матрицей J и эллипсом Γ . Обозначим:

$$h'_{sk}(n) = m'_{sk} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{b_k^n}{a_k^n} \right] - m''_{sk} \cdot \operatorname{Im} \left[\frac{b_k^n}{a_k^n} \right], \quad h''_{sk}(n) = -m'_{sk} \cdot \operatorname{Im} \left[\frac{b_k^n}{a_k^n} \right] - m''_{sk} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{b_k^n}{a_k^n} \right],$$

и рассмотрим вещественную $2l \times 2l$ -матрицу

$$Q_n = \begin{pmatrix} m'_{11} + h'_{11}(n) & -m''_{11} + h''_{11}(n) & \dots & m'_{1l} + h'_{1l}(n) & -m''_{1l} + h''_{1l}(n) \\ m''_{11} + h''_{11}(n) & m'_{11} - h'_{11}(n) & \dots & m''_{1l} + h''_{1l}(n) & m'_{1l} - h'_{1l}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m'_{l1} + h'_{l1}(n) & -m''_{l1} + h''_{l1}(n) & \dots & m'_{ll} + h'_{ll}(n) & -m''_{ll} + h''_{ll}(n) \\ m''_{l1} + h''_{l1}(n) & m'_{l1} - h'_{l1}(n) & \dots & m''_{ll} + h''_{ll}(n) & m'_{ll} - h'_{ll}(n) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Теорема 1 (см. [1]). Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ диагонализируема, причем все ее собственные числа лежат выше вещественной оси. Тогда выполнение всех соотношений $\det Q_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы задача Шварца в эллипсе D была однозначно разрешима при любой правой части $\psi(\xi) \in H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ в классе функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$.

Литература

- [1] Nikolaev V. G. Solutions to the Schwarz Problem with Diagonalizable Matrices in Ellipse // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 244. No 4. P. 655–671.

УЧЕТ ЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Овсянников В. М. (Россия, Москва)

Московская государственная академия водного транспорта

OvsyannikovVM@yandex.ru

Эйлер, выводя в 1752 г. уравнение неразрывности [1], [2] и сравнивая объем наклонного параллелепипеда, вычисляемый смешанным произведением векторов, с объемом единичного куба, получил уравнение неразрывности и выражение дивергенции из 15 слагаемых

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0) \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} \right] + (t - t_0)^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Здесь u — скорость жидкости вдоль координаты x , v — скорость жидкости вдоль координаты y , w — скорость жидкости вдоль координаты z , $t - t_0$ — интервал времени деформации контрольной фигуры, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ и $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ — якобианы второго и третьего порядков вектора скорости.

Если бы Эйлер не сделал сильного упрощения уравнения неразрывности, сведя дивергенцию к 3 слагаемым или к 2 в плоском течении

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

то не появилось бы ТФКП, как дисциплины. Однако следует помнить, что у нас поэтому имеется резерв сделать в ТФКП дополнительный учет откинутых членов, входящих в якобиан

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + (t - t_0) \cdot \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = 0$$

методом последовательных приближений и получить оценку идущих на фоне стационарного потенциального течения слабых волновых процессов.

В качестве первого приближения будет использоваться потенциальное течение для несжимаемой жидкости, полученное по теории функций комплексного переменного, а второе приближение будет вычисляться по волновому уравнению второго порядка по времени. Поскольку волны давления и плотности могут возникать только в сжимаемых средах, то было использовано уравнение неразрывности с членами второго порядка малости для сжимаемого газа, выведенное в 2006 г. по аналогии с выводом Н.Е. Жуковского эллипсоида деформации.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + (t - t_0) \rho \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} \right] + (t - t_0)^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Здесь ρ – плотность газа, $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ – якобиан третьего порядка.

Для плоского двухмерного течения оно имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + (t - t_0) \rho \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Используя метод акустической аналогии Лайтхилла для этого уравнения неразрывности и уравнения движения сжимаемого газа, можно вывести неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

решение которого дает интенсивность возникающих автоколебаний, вибраций, гармонических звуковых колебаний при малом отклонении режима течения от потенциального за счет слабого проявления сжимаемости газа.

В волновом уравнении p – звуковое давление, ρ_0 – термодинамическая плотность, c – скорость распространения звука. Малосжимаемыми могут рассматриваться и жидкости.

Отметим, что якобиан второго порядка малости из члена второго порядка малости уравнения неразрывности переместился в неоднородную часть волнового уравнения и определяет оценку интенсивности возникающих колебаний. Решение неоднородного волнового уравнения методом запаздывающего потенциала дает оценку интенсивности генерируемых потоком колебаний [3]. Гармонические колебания не нарушают выполнения интегрального закона сохранения количества вещества, постулируемого физиками. Поэтому учет членов второго порядка малости уравнения неразрывности Леонарда Эйлера не приводит к осложнениям. Учет слабых автоколебаний может быть нужен в новых разделах нанотехнологий и вирусологии.

Изложенным выше методом можно получить решение трехмерного течения для частного случая не постоянного значения производной $\frac{\partial w}{\partial z}$, а изменяющегося во времени по линейному закону с уравнением неразрывности для малосжимаемой жидкости вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + (t - t_0) \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = 0,$$

где $\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = const$. Для трехмерного течения можно вывести методом Лайтхилла акустической аналогии неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}.$$

Его решение показывает, что бывшее стационарным плоское двухмерное течение жидкости при линейном нарастании его трехмерности за счет члена $\frac{\partial w}{\partial z}$ будет сопровождаться гармоническими колебаниями потока. Интенсивность колебаний можно оценить по формуле

$$I = \frac{p^2}{c\rho_0} = \left[\frac{\rho_0 W^2}{16\pi^2 c^2} \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right)^2.$$

Здесь W – объем, в котором происходит отклонение течения от двухмерного.

Литература

- [1] Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commintarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756 – 1757). P.271–311 = Opera omnia, ser. II.V. 13. P. 1–369.
- [2] Euleri Leonhardi. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Edidit C.A.Truesdell. Lousanne. 1954.
- [3] Овсянников В.М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики. ЖВМ и МФ. 2017. № 5. С. 876–880. DOI 10.1134/S0965542517050098.
- [4] Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Эйлера 1752 г. с членами высокого порядка малости, дающими генерацию волн и автоколебаний. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. Т. 2. С.652–653. DOI:10.22226/2410-3535-2019-congress-v2.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМОЙ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ

Омонов А. А. (Узбекистан, Самарканд)

Самаркандский государственный университет
aomonov@mail.ru

Очилов С. (Узбекистан, Самарканд)

Самаркандский государственный университет
s-ochilov56@mail.ru

Раджабов Ш. Б. (Узбекистан, Чирчик)

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта
mr.sherzod.uz@mail.ru

Развитие методов управления, наблюдения и оптимизации в условиях информационных и фазовых ограничений составляет одну из фундаментальных проблем теории оптимальных процессов. В прикладных задачах управления и оптимизации в условиях информационных и фазовых ограничений возникают негладкие системы и появляются негладкие критерии качества. Учет дополнительных ограничений и параметров в процессе моделирования приводит к специальным задачам оптимального управления.

Одной из таких задач является задача управления в смысле быстрогодействия, в предположении, что между начальными и конечными состояниями объекта управления имеется некоторая область, время движения через которую должна быть минимальным [1 - 6].

Такая постановка задачи возникает в проблемах управления, связанных с экологией, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая за минимальное время проходит через зараженную область, причем эта область может перемещаться со временем.

Пусть заданы множества $M_0 \subseteq R^n$, $M_1 \subseteq R^n$ и многозначное отображение $M(t)$ отрезка времени $[t_0, t_1]$ в множество всех подмножеств из R^n . Требуется выбрать управление $u(t)$ из заданного класса и начальную точку $x(t_0) \in M_0$ так, чтобы имелось место соотношение $x(t_1) \in M_1$, а время, в течении которого выполняется включение $x(t) \in M(t)$, было минимальным. В качестве математических моделей объектов управления рассматриваются системы зависящие от параметров

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), w), t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

где $u(t) \in R^n$ — управляющая функция, w — дополнительный параметр из $W \subset R^k$.

Если ввести характеристическую функцию множества $M(t)$, связывающую класс допустимых траекторий с заданной областью $M(t)$

$$\delta(t, x, u) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M(t) \\ 0, & \text{если } x \notin M(t), \end{cases} \quad (2)$$

то время нахождения траектории $x(t)$ в заданной возможно перемещающейся области $M(t)$, выражается интегралом (в смысле интеграла Лебега)

$$I \equiv T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \delta(t, x(t), u(t)) dt. \quad (3)$$

Для рассматриваемой задачи получены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина и изучены дифференциальные свойства выбранного критерия.

Следует отметить некоторые особенности и актуальность поставленной задачи. В функционале (3), подинтегральная функция разрывная (т.е. возник негладкий критерий качества управления) и поэтому задача не укладывается в рамки сформировавшейся теории оптимального управления, что не позволяет прямое использование классических результатов теории оптимальных процессов. Поэтому существенную роль играют модельные примеры, которые, может быть, не абсолютно точно, но в главном описывают правильно физическую суть задачи.

Системы управления вида (1) нуждаются в разработке качественных методов исследования, учитывающие специфику воздействия структурного параметра $w \in W$ [7 – 8].

Для этой модели системы управления большой интерес представляет изучение задачи оптимального прохождения области, для которой критерием качества управления является функционал вида (3). Следует также отметить, что функционал (3) не является единственным критерием качества управления в задачах оптимального прохождения области. Здесь могут возникнуть другие негладкие (разрывные) критерии, учитывающие ситуацию появления области, попадание на которую нежелательно с точки зрения конечной цели управления.

Остается актуальным вопрос развития методов получения условий оптимальности в задаче оптимального прохождения области с учетом воздействия дополнительных параметров системы, структур начального и терминального множеств, а также структуры и динамики возможно перемещающейся области. Следует также подчеркнуть, что получение новых, более удобных к практическому применению, условий оптимальности (в том числе достаточных условий) позволяет разработать вычислительные алгоритмы построения оптимального управления и оптимальной траектории.

Литература

- [1] Пшеничный Б. Н., Очиллов С. Оптимизация времени прохождения через область. // Кибернетика и системный анализ.- Киев: 1993.-N 3. с.167–171.
- [2] Пшеничный Б. Н., Очиллов С. Об одной специальной задаче оптимального быстрогодействия. // Кибернетика и вычислительная техника. Киев, 1994. No.101.с.24–35.
- [3] Очиллов С. Об одном примере оптимального прохождения объекта через заданную область.// Автоматика - Киев: 1993.-No. 2 -с. 88-90.
- [4] Асеев С.М., Смирнов А.И. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Доклады Академии наук, 395:5 (2004), 583–585.

- [5] Очилов С. задаче оптимизации времени прохождения через область нелинейной системой.// Вестник ТУИТ, TUIT Bulletin, 2008, No.2 с. 48–55.
- [6] Смирнов А.И. Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом.// Труды математического института им. В.А.Стеклова РАН, 262 (2008), 222–239.
- [7] Shaxidze A.N., Ochilov S. The necessary conditions in special task speedy passage of area.// European applied sciences. No. 12, 2013. p. 22–27.
- [8] Очилов С., Ибрагимова Д.А. Задача оптимального прохождения области с разрывным интегралом.// Самарканд, Научный Вестник СамГУ, 2019. No. 5 (117) - 68–73.

О НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ⁴³

Панов Е. Ю. (Россия, Великий Новгород)
Новгородский государственный университет
eugeniy.panov@novsu.ru

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \quad (1)$$

с лишь непрерывным вектором потока $\varphi(u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и ограниченной измеримой матрицей диффузии $a(u)$, которая предполагается симметричной и неотрицательно определенной. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Нам понадобится оператор $T_g : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, который определяется по функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ в соответствии с равенствами: $T_g(f)'(u) = g(u)f'(u)$, $T_g(f)(0) = 0$ при $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, а затем продолжается на все пространство $C(\mathbb{R})$ по непрерывности. Фиксируем представление матрицы диффузии в виде $a(u) = b(u)^\top b(u)$, где матрица $b(u) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ не обязательно симметрична. Пусть $A(u)$, $B(u)$ – первообразные матриц $a(u)$, $b(u)$.

Определение 1 (см. [1]). Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (э.р.) задачи (1), (2), если:

(i) распределения $\operatorname{div}_x B_r(u(t, x)) \in L^2_{loc}(\Pi)$, где $B_r(u) = (B_{r1}(u), \dots, B_{rn}(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $r = 1, \dots, n$;

(ii) для любой функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $r = 1, \dots, n$

$$\operatorname{div}_x T_g(B_r)(u(t, x)) = g(u(t, x)) \operatorname{div}_x B_r(u(t, x)) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x(T_{\eta'}(\varphi)(u)) - D^2 \cdot T_{\eta'}(A(u)) + \eta''(u) \sum_{r=1}^n (\operatorname{div}_x B_r(u))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

(iv) $\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

В гиперболическом случае $a \equiv 0$ Определение 1 сводится к классическому определению обобщенного энтропийного решения в смысле С. Н. Кружкова [2]. Известно, что э.р. задачи (1), (2) всегда существует, но в рассматриваемом общем случае лишь непрерывных нелинейностей, может быть неединственным. Приспособив методы работы [3] к параболическому случаю, мы можем установить, как и в [3], существование единственных наибольшего и наименьшего э.р.

Теорема 1. *Существует наибольшее э.р. u^+ и наименьшее э.р. u^- задачи (1), (2).*

⁴³Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 1.445.2016/1.4) и РФФИ (грант № 18-01-00258-а).

Предположим теперь, что начальная функция u_0 периодична. Легко показать, что э.р. $u^\pm$ также являются пространственно-периодическими функциями (с той же решеткой периодов, что и начальная функция). Интегрируя равенство

$$(u^+ - u^-)_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u^+) - \varphi(u^-)) - D^2 \cdot (A(u^+) - A(u^-)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

по ячейке периодичности, нетрудно вывести тождество $u^+ = u^-$. Ясно, что это тождество означает единственность э.р. с периодическими начальными данными. Оказывается, верен следующий более общий *принцип сравнения*.

Теорема 2. Пусть $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ – э.р. задачи (1), (2) с начальными функциями $u_0(x)$, $v_0(x)$, по крайней мере одна из которых – периодическая. Допустим, что $u_0(x) \leq v_0(x)$. Тогда $u(t, x) \leq v(t, x)$ п.в. на Π .

Литература

- [1] Chen G.-Q., Perthame B. Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20. P. 645–668.
- [2] Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Математ. сборник. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
- [3] Панов Е. Ю. О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Математ. сборник. 2002. Т. 193, № 5. С.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Постнов С. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

postnov.sergey@inbox.ru

В работе исследуются вопросы оптимального управления линейными системами дробного порядка с сосредоточенными и распределёнными параметрами. В качестве системы с сосредоточенными параметрами рассматривается система вида:

$${}_0D_t^\sigma q(t) = aq(t) + bu(t), \quad (1)$$

где $q(t)$ и $u(t)$ – соответственно состояние системы и управление; ${}_0D_t^\sigma$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования, который понимается в смысле Капуто, Капуто-Фабрицио или Атанганы-Балеану; $\sigma \in (0, 1)$; $t \in (0, T]$; a и b – некоторые известные коэффициенты.

В качестве системы с распределёнными параметрами рассматривается система, описываемая диффузионно-волновым уравнением:

$$r(x) {}^C D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x)Q(x, t) + f(x, t) + u(x, t), \quad (2)$$

где $Q(x, t)$ – состояние системы, $\alpha \in (1, 2)$, $t \geq 0$, $x \in [0, L]$, $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Функция $Q(x, t)$ считается дифференцируемой на положительной полуоси по временной переменной и дважды дифференцируемой на отрезке $[0, L]$ по пространственной переменной. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ будем считать непрерывными на отрезке $[0, L]$. Возмущение $f(x, t)$ будем считать суммируемым по обоим переменным на области Ω . Положим, что распределённое управление $u(x, t)$ является элементом пространства $L_{p_1, p_2}(\Omega)$, $1 < p_{1,2} \leq \infty$, функций, интегрируемых со степенью p_1 по временной переменной и со степенью p_2 по пространственной, или пространства $L_\infty(\Omega)$ существенно ограниченных (по обоим переменным) функций. Для диффузионно-волнового уравнения будем рассматривать также граничное управление, входящее в граничные условия:

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + a_i Q(x, t) \right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geq 0, i = 1, 2,$$

где a_i и b_i — постоянные коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $h_i(t)$ — некоторые известные вполне регулярные (дифференцируемые) функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$, как и распределённое управление $u(x, t)$, будут считаться элементами пространства $L_p[0, T]$, $1 < p \leq \infty$.

Для вышеуказанных систем рассматриваются две задачи оптимального управления: поиск управления с минимальной нормой при заданном значении времени управления и поиск управления, переводящего систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Обе эти задачи сводятся к l -проблеме моментов, которая в случае системы (1) является конечномерной, а в случае системы (2) — бесконечномерной. В последнем случае используется приближение, позволяющее перейти также к конечномерной проблеме моментов.

В работе получены условия, при которых исследуемая l -проблема моментов является корректной и разрешимой, и решения этой проблемы, представляющие собой оптимальные управления. Исследован вопрос о влиянии типа оператора дробного дифференцирования на свойства получаемых решений.

ДИСКРЕТНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПИ ГЕНЕРАТОРОВ ТИПА МЭКИ–ГЛАССА С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)

ЯрГУ им. П. Г. Демидова

rita.preo@gmail.com

Рассмотрим кольцевую цепочку из m генераторов, каждый из которых одновременно является вещательным и принимающим:

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = \frac{a_j c_j (V_j(t - \tau_1) + V_{j-1}(t - \tau_2))}{1 + (c_j (V_j(t - \tau_1) + V_{j-1}(t - \tau_2)))^{n_j}} - b_j V_j(t), \quad V_0 \equiv V_m, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь $V_j(t)$ — напряжение j -го генератора, $a_j > 0$ — уровень насыщения нелинейной функции, $b_j > 0$ — RC -постоянная, $\tau_j > 0$ — запаздывания по времени, параметры $n_j > 0$ определяют форму нелинейной функции, $c_j > 0$ — сила обратной связи, $j = 1, \dots, m$. При этом функционирование каждого отдельного генератора описывается уравнением Мэки-Гласса [1]

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = \frac{a_j c_j V_j(t - \tau_1)}{1 + c_j V_j^{n_j}(t - \tau_1)} - b_j V_j(t). \quad (2)$$

Предположим также, что для всех уравнений системы (1) значения параметров совпадают: $a_j = a$, $b_j = b$, $c_j = c$, $n_j = n$, $j = 1, \dots, m$. Предположим, что $n \gg 1$ — большой параметр. Будем искать устойчивое периодическое релаксационное решение системы (1) в виде дискретной бегущей волны [2], полагая, что

$$V_j(t) = V(t + j\Delta), \quad (3)$$

где Δ — пока неизвестный параметр. Подставляя (3) в (1) получим, что функция $V(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{ac(V(t - \tau_1) + V(t - \Delta - \tau_2))}{1 + (c(V(t - \tau_1) + V(t - \Delta - \tau_2)))^n} - bV(t). \quad (4)$$

Обозначим период функции $V(t)$ через $T = T(\Delta)$. Из условия $V_0 \equiv V_m$ получаем, что при некотором натуральном p параметр Δ удовлетворяет уравнению периодов

$$mT(\Delta) = p\Delta. \quad (5)$$

Вопрос о существовании периодического решения системы (1) в виде бегущей волны (3) сводится к существованию периодического решения уравнения (4) и разрешимости (5) относительно Δ . В настоящей работе получены результаты о существовании и устойчивости релаксационных циклов уравнения (4).

Литература

- [1] Mackey M. C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Т. 197. №4300. Р. 287–289.
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Дискретные автоволны в нейронных системах // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. №5. С. 840–858.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ⁴⁴

Раутиан Н. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
nrautian@mail.ru

Исследуются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. Будут представлены результаты, базирующиеся на классическом подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Представленный подход может быть также использован для исследования других интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегральное слагаемое вида вольтеррой свертки.

Приводится схема сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой полугруппы, с известными предположениями для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов доказывается теорема о существовании и единственности сильного решения исходной задачи. Приводятся примеры для экспоненциальных и дробно-экспоненциальных ядер (функций Работнова) интегральных операторов (см. [1]–[3]).

Литература

- [1] Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016. 488с.
- [2] Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ вольтерровых интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами // Доклады Академии наук. 2018. Т. 482. № 6. С. 635–638.
- [3] Vlasov V. V., Rautian N. A. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). 2020. V. 244. no.2. P. 170–182.

⁴⁴Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ № 20-01-00288.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕГО ДОХОДА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ⁴⁵

Родина Л. И. (Россия, г. Москва, г. Владимир)

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

LRodina67@mail.ru

Хаммади А. Х. (Ирак, г. Аль-Дивания)

Аль-Кадисия университет

alaa.hammadi@qu.edu.iq

Задачам оптимальной эксплуатации популяций, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции, посвящено множество работ (см. обзор литературы в [1]).

Рассмотрим популяцию, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$; длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1$ между моментами изъятий τ_k являются случайными величинами и в моменты времени τ_k из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что имеется возможность остановить заготовку, если ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), тогда часть ресурса сохранится для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k) = v_k$, если $v_k < u_k$ и $\ell_k = u_k$, если $v_k \geq u_k$.

Пусть X_k — количество ресурса до сбора в момент τ_k , x_0 — начальное количество ресурса, $\bar{\theta} \doteq (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$. Для любого $x_0 \geq 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_\alpha(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha \tau_k},$$

равную *доходу от извлечения ресурса* на бесконечном промежутке времени. Показатель дисконтирования $\alpha > 0$ указывает здесь на то, что ценность позднее получаемого дохода снижается.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, описанное в работе [2]. Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$. Положим $u(\theta, x) = 1 - \frac{x}{\varphi(\theta, x)}$, где $\theta \in \Omega_1$. Рассмотрим функцию $\ell(\omega, x) = \ell(\theta, v, x) \doteq v$, если $v < u(\theta, x)$ и $\ell(\omega) \doteq u(\theta, x)$, если $v \geq u(\theta, x)$; здесь $\omega = (\theta, v) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Предполагаем, что уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$ и интервал (K_1, K_2) является областью притяжения этого решения ($0 \leq K_1 < K < K_2$).

Лемма 1. Для любых $x \in (K_1, K)$, $x_0 \in [x, K]$ существует управление $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)$ такое, что для всех $\sigma \in \Sigma$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\theta_k, x) \ell(\omega_k, x) e^{-\alpha \tau_k} \leq H_\alpha(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \leq K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\omega_k, x) e^{-\alpha \tau_k}.$$

Обозначим $\bar{\theta}^p \doteq (\theta_1^p, \dots, \theta_k^p, \dots)$, $\bar{\ell}^p \doteq (\ell_1^p, \dots, \ell_k^p, \dots)$, $p = 1, 2, \dots$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. Для любых $x \in (K_1, K)$, $x_0 \in (x, K)$ найдется управление $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\frac{M(\varphi(\theta, x) \ell(\omega, x) e^{-\alpha \theta})}{1 - M e^{-\alpha \theta}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n H_\alpha(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0) \leq \frac{K \cdot M(\ell(\omega, x) e^{-\alpha \theta})}{1 - M e^{-\alpha \theta}}.$$

⁴⁵Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект № 20-01-00293.

Рассматривается также задача выбора управления, при котором оценка снизу для среднего дохода от извлечения ресурса максимальная.

Литература

- [1] Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. V. 21. P. 167–178.
- [2] Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 48–58.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМИ КОНЦАМИ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА⁴⁶

Рудаков И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
rudakov_ia@mail.ru

Рассмотрим следующую задачу

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x, t, u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (2)$$

$$u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (3)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t) = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

С задачей (1)-(4) связана следующая задача на собственные значения:

$$X'''' - aX'' = \lambda X, \quad x \in (0, \pi); \quad X(0) = X'(0) = 0 = X(\pi) = X'(\pi) = 0. \quad (5)$$

Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ задачи (5) удовлетворяют уравнению:

$$\begin{aligned} \cos \left(\pi \sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)/2} \right) &= \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\pi \sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a)/2} \right)} + \\ &+ a \frac{\operatorname{th} \left(\pi \sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a)/2} \right)}{\sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a)/2}} \cdot \frac{\sin \left(\pi \sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)/2} \right)}{\sqrt{(\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a)/2}}. \end{aligned}$$

Существуют $n_0, k \in \mathbf{N}$, $b_0, b_1 \in (0, \infty)$ такие, что при $n \geq n_0$ имеем

$$\lambda_n = (n + k - \frac{1}{2} - \theta_n)^4 + a \cdot (n + k - \frac{1}{2} - \theta_n)^2; \quad 0 < b_0 \cdot \frac{1}{n^2} < \theta_n < b_1 \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$T = 2\pi \frac{b}{c}, \quad b, c \in \mathbf{N}, \quad \operatorname{gcd}(b, c) = 1; \quad a > 0, \quad \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) b \notin \mathbf{N}. \quad (6)$$

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$, $\mu_{nm} = \lambda_n - \frac{b}{c}m$, $\sigma = \{\mu_{nm} \mid n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$

Теорема 1 (Нерезонансный случай). Предположим выполнены условия (6), $g \in C^1(\Omega \times \mathbf{R})$, T — периодична по t и существуют константы $\alpha, \beta, u_0 > 0$, такие, что $\alpha \leq \frac{g(x, t, u)}{u} \leq \beta$ при

⁴⁶Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/ПЧ)

всех $(x, t) \in \Omega, u \in (-\infty; -u_0] \cup [u_0, +\infty)$ и $[\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset$. Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in H_1(\Omega)$ задача (1)-(4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$.

Перепишем уравнение (1) в следующей форме:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (7)$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$g(u) = \lambda u + p(u), \quad \lambda \in \sigma, \quad |p(u)| \leq M \quad \forall u \in \mathbf{R} \quad (M > 0). \quad (8)$$

Обозначим $N_2 = \ker(L - \lambda I)$, $N_1 = N_2^\perp$ в $L_2(\Omega)$ ($L = \partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ с (2)-(4)). Из (6) вытекает конечномерность N_2 . Представим функцию $f \in L_2(\Omega)$ в виде суммы

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 \in N_1, \quad f_2 \in N_2. \quad (9)$$

Теорема 2 (Случай резонанса). Пусть выполнены условия (6), (8), (9), функция $p(u) \in C^1(\mathbf{R})$ и не убывает, или не возрастает по u . Предположим, что функция $f(x, t) \in H_1(\Omega)$, имеет представление (9), в котором слагаемое f_2 удовлетворяет либо неравенству $p(-\infty) + \delta \leq -f_2(x, t) \leq p(+\infty) - \delta \quad \forall (x, t) \in \Omega$ в случае неубывания p , либо неравенству $p(+\infty) + \delta \leq -f_2(x, t) \leq p(-\infty) - \delta \quad \forall (x, t) \in \Omega$ в случае невозрастания p с константой $\delta > 0$ ($p(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(u)$). Тогда задача (7), (2)-(4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$.

Литература

- [1] Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity // J. Differential Equations. 2018. V. 264. No 9. P. 5527-5540.
- [2] Рудаков И. А. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения. 2018 г. Т. 54, № 5, С. 691-700.
- [3] Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера–Бернулли // Дифференциальные уравнения // 2019. Т. 55. № 11. С. 1581-1583.

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР БОЛЬШОГО ПОРЯДКА И ЕГО КОВАРИАЦИОННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ⁴⁷

Руденко Е. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

rudenkoevg@yandex.ru

Рассматривается задача логического распознавания режима работы и динамического оценивания внутрирежимного вектора состояния дискретной стохастической системы случайной структуры. Она должна решаться оперативно, в реальном времени. Однако абсолютно-оптимальный фильтр Стратоновича-Бухалёва для этого слишком сложен из-за своей бесконечной размерности, а конечномерный условно-оптимальный фильтр Пугачёва-Панкова требует эвристического задания структуры, причём малая размерность его вектора состояния препятствует получению им значительной точности. Проблема может быть решена применением конечномерных фильтров оптимальной структуры (ФОС) различных типов и порядков [1-3].

В настоящей работе демонстрируется новый, наиболее перспективный из ФОС, фильтр большого порядка (ФБП) [4]. Демонстрируется процедура выполняемого заранее его синтеза, которая сводится к нахождению методом Монте-Карло гистограмм искомых структурных функций фильтра.

Из-за технической сложности этой процедуры здесь обсуждается и построение двух численно-аналитических приближений к ФБП, которые строятся аналогично [1-3]. Они

⁴⁷Работа финансово поддержана РФФИ (грант 18-08-00128-а).

учитывают лишь вероятности случайных номеров структур, а также соответствующие им условные средние и ковариации континуальных случайных переменных состояния и измерения. Их структурные функции содержат числовые параметры, которые вычисляются методом Монте-Карло уже просто.

Так аналитическая часть построения гауссовского ФБП сводится к двум интегральным операциям. Сначала по уравнениям исходной логико-динамической системы и законам распределения её белых шумов следует определить усредняемые далее нелинейности. Это условные вероятности косвенной индикации её логической структуры и уточнённого континуальным измерением переключения этой структуры, а также первые и вторые условные средние внутривидовой динамики системы. Затем нужно получить выражения для параметрических интегралов от произведений гауссовской плотности вероятности на эти нелинейности. Последнее эквивалентно операции статистической линеаризации нелинейностей по Казакову и здесь иногда могут быть использованы известные таблицы.

Сложную процедуру статистической линеаризации можно упростить, используя с некоторой потерей точности численные квадратурные или кубатурные формулы интегрирования Гаусса. Также возможно и применение их параметрической версии, которая известна как нечувствительное (unscented) или сигма-точечное преобразование и отличается дополнительной возможностью эмпирической настройки на негауссовость апостериорного закона распределения.

Наконец, избежать выполнения непростых интегральных операций гауссовского приближения позволяет построение линеаризованного ФБП. При этом применяется дифференциальная операция линеаризации по Тейлору функций динамической части исходной системы наблюдения в окрестностях модифицированных значений текущих оценки и одношагового прогноза, а также средних значений белых шумов.

Литература

- [1] Руденко Е.А. Численно-аналитические приближения к оптимальному рекуррентному логико-динамическому фильтру-предиктору малого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 24-47.
- [2] Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной нелинейной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 43-65.
- [3] Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический фильтр-предиктор с конечной памятью // Тр. XI Межд. Четаевской конф. "Аналит. механика, устойчивость и управление". Т. 3. Ч. III. - Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 221-231.
- [4] Руденко Е.А. Оптимальный рекуррентный логико-динамический фильтр большого порядка, кратного размерности вектора оценки // Тр. XIII Всеросс. совещ. по пробл. управления. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 880-885.

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ

Рыбаков К. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт

rkoffice@mail.ru

С помощью принципа расширения В. Ф. Кротова [2] ранее были доказаны достаточные условия ε -оптимальности управления для стохастических систем диффузионного типа (математические модели таких систем задаются стохастическими дифференциальными уравнениями; системы с непрерывными траекториями) [3], диффузионно-скачкообразного типа (математические модели задаются стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей; системы с разрывными траекториями) [4], со случайной структурой (математические модели задаются стохастическими дифференциальными уравнениями с правой частью, которая изменяется случайным образом с помощью марковского или условно-марковского случайного процесса с конечным множеством состояний; системы как с непрерывными, так и с разрывными траекториями) [5].

В этой работе перечисленные выше результаты применяются для стохастических систем со случайным периодом квантования [1]. Они являются частным случаем стохастических систем со случайной структурой и разрывными траекториями, где формальное изменение структуры не меняет правой части уравнений, но оно необходимо для формирования разных законов распределения для промежутков времени между последовательными разрывами траекторий. В результате можно не ограничиваться экспоненциальным законом распределения, как это происходит при формировании математической модели посредством стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей, а расширить класс возможных распределений на гиперэкспоненциальные и гиперэрланговские [6].

Достаточные условия ε -оптимальности управления и полученные из них соотношения позволяют приближенно находить оптимальное управление для стохастических систем со случайным периодом квантования, минимизируя отклонение от оптимального решения по значению функционала качества. Эти результаты могут служить обоснованием процедур применения различных приближенных методов для синтеза оптимального управления.

Литература

- [1] Артемьев В.М., Ивановский А.В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [2] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
- [3] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 130–146.
- [4] Рыбаков К.А. Об условиях ε -оптимальности для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF-2018), Суздаль, 6–11 июля 2018 г.: Материалы конф. Владимир: ООО «Аркаим», 2018. С. 182–183.
- [5] Рыбаков К.А. Достаточные условия ε -оптимальности для стохастических систем с переключениями // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация (DSSCO-2018). Международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина, Минск, 24–29 сентября 2018 г.: Материалы конф. Минск: БГУ, 2018. С. 189–191.
- [6] Рыбаков К.А. Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 1 (25). С. 145–165.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА⁴⁸

Савчук А.М. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
artem_savchuk@mail.ru

Пусть

$$\mathcal{L}y = By' + P(x)y, \quad (1)$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$x \in [0, \pi]$, — дифференциальное выражение, порождающее вместе с краевыми условиями U в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ одномерный оператор Дирака.

$P(x)$ — комплекснозначная матрица, $p_j \in L_1[0, \pi]$. Рассматриваются краевые условия вида

$$Uy = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

регулярные по Биркгофу: $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$.

⁴⁸Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00240.

Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ определен на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] : \mathcal{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U\mathbf{y} = 0\}. \quad (3)$$

Результаты можно эквивалентным образом сформулировать на языке параболических уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_t &= \mathbf{B}\mathbf{u}'_x + P(x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \quad p_j(\cdot) \in L_1[0, \pi], \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \quad U(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}(\cdot, t) \in C(\mathbb{R}, X), \end{aligned}$$

где краевые условия U регулярны по Биркгофу. В качестве пространства X мы будем рассматривать $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_U^\theta$, $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in [1, \infty]$.

Теорема 1. Для любой функции $\mathbf{u}_0 \in X$ решение $\mathbf{u}(x, t)$ существует и единственно в пространстве $C(\mathbb{R}, X)$; кроме того, для случая $X = \mathbb{H}_U^\theta$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_X \leq C(1 + |t|^p)e^{\beta|t|}\|\mathbf{u}_0\|_X,$$

где

$$\beta = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{P,U})} |\Im \lambda|,$$

а оценки неумлучшаемы; для случая $X = (L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in [1, 2) \cup (2, \infty]$, в качестве β можно взять

$$\sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{P,U})} |\Im \lambda| + 16M \ln 4,$$

где

$$M = \inf\{\|P_\infty\|_{L_\infty} : P_\infty \in L_\infty, \|P - P_\infty\|_{L_1} < 1/8\}.$$

Литература

- [1] Савчук А. М., Сдовничая И. В. О существовании операторной группы, порожденной одномерным оператором Дирака // Труды ММО. 2019. Т. 80. № 2. С. 275–294.

РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ — РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ⁴⁹

Садовничая И. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
ivsad@yandex.ru

Рассматривается оператор $\mathcal{L}$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(z) = -(\tau_1 z')' + i(\sigma z)' + i\sigma z' + \tau_0 z,$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{z \mid z, z^{[1]} \in W_1^1[a, b], l(z) \in L_2[a, b], U_1(z) = U_2(z) = 0\}.$$

Здесь $\tau_1 \in H^1[a, b]$, $\sigma \in L_2[a, b] = H[a, b]$, $\tau_0 \in H^{-1}[a, b]$, $\tau_1(x) > 0$, где $H^1[a, b]$ — классическое пространство Соболева функций с квадратично суммируемой производной, а $H^{-1}[a, b]$ симметричное к $H^1[a, b]$ относительно $L_2[a, b]$ пространство.

⁴⁹Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00240.

Удобнее переписать дифференциальное выражение в виде

$$l(z) = -(z^{[1]})' + \frac{i\sigma - \mathcal{T}}{\tau_1} z^{[1]} - \frac{\sigma^2 + T^2}{\tau_1} z,$$

где $\mathcal{T} \in L_2[a, b]$. $z^{[1]} = \tau_1 z' - (\mathcal{T} + i\sigma)z$ — первая квазипроизводная, $\tau_0 = \mathcal{T}'$.

$$U_j(z) = a_{j1}z(a) + a_{j2}z^{[1]}(a) + b_{j1}z(b) + b_{j2}z^{[1]}(b), \quad j = 1, 2.$$

Утверждение 1. Оператор $\mathcal{L}$, определенный выше, подобен оператору $\tilde{\mathcal{L}}$, порожденному в пространстве $L_2[0, c]$ дифференциальным выражением

$$\tilde{l}(y) = -y''(x) + q(x)y(x) := -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x)$$

и краевыми условиями $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{A}, \tilde{B})$. Здесь x — новая независимая переменная, связанная с ξ заменой $x = \omega(\xi) = \int_a^\xi \tau_1^{-1/2}(t) dt$, $c = \omega(b)$, $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$,

$$q(x) = u'(x) = \frac{\frac{d^2}{d\xi^2}\tau_1(\xi)}{4} - \frac{(\frac{d}{d\xi}\tau_1(\xi))^2}{16\tau_1(\xi)} - \frac{\sigma^2(\xi)}{\tau_1(\xi)} + \tau_0(\xi).$$

При этом условия $\tau_1 \in H^1[a, b]$, $\tau_1(\xi) > 0$, $\sigma \in L_2[a, b]$, $\tau_0 \in H^{-1}[a, b]$ влекут $q \in H^{-1}[0, c]$. Матрица новых краевых условий равна

$$\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{A}, \tilde{B}), \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \kappa_{00}a_{11} + \varkappa_0\kappa_{00}a_{12} & \kappa_{10}a_{12} \\ \kappa_{00}a_{21} + \varkappa_0\kappa_{00}a_{22} & \kappa_{10}a_{21} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \kappa_{01}b_{11} + \varkappa_1\kappa_{01}b_{12} & \kappa_{11}a_{12} \\ \kappa_{01}b_{21} + \varkappa_1\kappa_{01}b_{22} & \kappa_{11}a_{21} \end{pmatrix},$$

где $\kappa_{00} = \tau_1^{1/4}(a)$, $\kappa_{10} = \tau_1^{-1/4}(a)$, $\kappa_{01} = \tau_1^{1/4}(b)e^{-is(b)}$, $\kappa_{11} = \tau_1^{-1/4}(b)e^{-is(b)}$, а числа $\varkappa_j$ однозначно определяются функциями τ_1 и σ . При этом новые краевые условия $\tilde{\mathcal{U}}$ регулярны тогда и только тогда, когда регулярны условия $\mathcal{U}$. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ имеет область определения

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{L}}) = W^{-1}\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{y \mid y, y^{[1]} \in W_1^1[0, c], \tilde{l}(y) \in L_2[0, \pi], \tilde{U}_1(y) = \tilde{U}_2(y) = 0\}.$$

Подобие $\tilde{\mathcal{L}} = W^{-1}\mathcal{L}W$ осуществляется ограниченным и ограниченно обратимым оператором $z = Wy$, $W : L_2[0, c] \rightarrow L_2[a, b]$,

$$z(\xi) = y(\omega(\xi)) \cdot \frac{e^{is(\xi)}}{\sqrt[4]{\tau_1(\xi)}}, \quad s(\xi) = \int_a^\xi \frac{\sigma(t)}{\tau_1(t)} dt.$$

Теорема 1. Обозначим через $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями $\mathcal{U}$, через $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ — биортонормальную к ней систему. Далее, пусть $\{y_n^0\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0$, порожденного в пространстве $L_2[0, c]$ дифференциальным выражением $\tilde{l}(y) = -y''(x)$ и краевыми условиями $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, выписанными в утверждении 1, $\{u_n^0\}_{n=1}^\infty$ — биортонормальная к ней система. Тогда для произвольной функции $f \in L_2[a, b]$ имеет место равномерная на всем отрезке $[a, b]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системам $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{z_n^0\}_{n=1}^\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m c_n z_n - \sum_{n=1}^m c_n^0 z_n^0 \right\|_{C[a, b]} = 0.$$

Здесь $z_n^0 = Wy_n^0$, $c_n = (f, z_n)$, $c_n^0 = (f, (W^*)^{-1}u_n^0)$.

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА О ЗНАЧЕНИЯХ ДИГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА
В РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ⁵⁰

Сафонова Т. А. (Россия, Архангельск)
САФУ имени М.В. Ломоносова
t.Safonova@narfu.ru

В работах [1]-[3] нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление некоторых степенных рядов и специальных функций. Приведём формулировку одной из теорем, справедливость которой можно установить этим методом.

Теорема 1. *При $-1 < a < 1$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a \cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2 \cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ax) - \cos(a\pi/2)}{\cos x} dx, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2 \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \sin(2ax) \operatorname{ctg} x dx, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2 \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} (\sin(2ax) - \sin(a\pi)) \operatorname{tg} x dx. \quad (4)$$

Напомним, что дигамма-функция Эйлера $\psi(a)$ определяется как логарифмическая производная Γ -функции. Для неё справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *При $0 < a < 1$ для функции $\psi(a)$ справедливо тождество*

$$\psi(a) = -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}(a\pi) - \frac{1}{\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} (\sin(2ax) - \sin(a\pi)) \operatorname{tg} x dx,$$

где γ - постоянная Эйлера.

Если a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$, то интегралы, стоящие в правых частях равенств (1) - (5), являются интегралами вида $\int_0^{\pi/(2q)} R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ - дробно-рациональная функция двух переменных, и явно вычисляются в терминах элементарных функций. Используя это, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $a = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} &= \frac{q}{p} \sum_{k=1}^q (-1)^k \sin(k-1/2) \frac{p\pi}{q} \ln \sin(k-1/2) \frac{\pi}{2q}, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} &= 2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 \sum_{k=1}^q (-1)^k \sin^2 \frac{pk\pi}{2q} \ln \sin \frac{k\pi}{2q}, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2 - a^2)} &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left\{ \ln 2 - \frac{q}{2p} - 2 \sum_{k=1}^q \cos(2k-1) \frac{p\pi}{q} \ln \sin(k-1/2) \frac{\pi}{2q} \right\}, \end{aligned}$$

⁵⁰ Автор поддержан РФФИ, грант № 18-01-00250.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \left\{ \ln 4q - \frac{q}{2p} - 2 \sum_{k=1}^q \cos \frac{2pk\pi}{q} \ln \sin \frac{k\pi}{2q} \right\}.$$

Представление функции $\psi(a)$ из следствия 1, позволяет этим же способом получить ещё одно доказательство известной теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках (см., напр., [4, п.1.7.3]). Кроме того, положив $a = a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и переходя к пределу в обеих частях равенств из теоремы 2, можно получить новые аппроксимации для постоянных Каталана, Апери и $\ln 2$.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с проф. К.А. Мирзоевым.

Литература

- [1] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // ДАН. 2018. Vol. 3. №1. Р. 329–354.
- [2] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Матем. заметки. 2019. Т. 106. №3. С. 470–475.
- [3] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО. 2019. Т. 80. №2. Р. 157–177.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции I. М.: Наука, 1973.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НА ДВУХСТУПЕННЫХ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ Ли⁵¹

Сачков Ю. Л. (Россия, Переславль-Залесский)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

yusachkov@gmail.com

Для двухступенных свободных нильпотентных групп Ли описаны симплектические слоения и функции Казимира. Доказано, что симплектические листы разделяются:

- 1) линейными функциями Казимира, соответствующими второму слою алгебры Ли, и
- 2) функциями, линейными на совместных поверхностях уровня Казимиров из п. 1).

Рассмотрена левоинвариантная задача быстрогодействия, для которой множество допустимых скоростей есть строго выпуклый компакт в первом слое алгебры Ли, содержащий начало координат внутри себя. Для вертикальной подсистемы гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина описаны интегралы. Описаны свойства решений этой подсистемы для малых рангов бивектора Пуассона. Доказано, что решения этой подсистемы, принадлежащие двумерным симплектическим листам, постоянны или периодичны.

Литература

- [1] Sachkov Yu. L. Periodic controls in step 2 strictly convex sub-Finsler problems // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Т. 25. №1. С. 33–39.
- [2] Сачков Ю. Л. Периодические оптимальные по быстрдействию управления на двухступенных свободных нильпотентных группах Ли // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. В печати.

⁵¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-31-51023.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Седов А. И. (Россия, Магнитогорск)

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

sedov-ai@yandex.ru

Пусть Π — прямоугольник со сторонами a и b , $\frac{a^2}{b^2}$ — иррациональное. В пространстве $H = L_2(\Pi)$ рассмотрим самосопряженный неотрицательный оператор T_0 , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\beta > 3/2$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Известно, что собственным числам $\lambda_{kl} = \left(\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^\beta$ оператора T соответствуют ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции $v_{kl}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ly}{b}\right)$; $k, l \in \mathbb{N}$.

Поскольку a^2/b^2 иррациональное число, то спектр $\sigma(T)$ оператора T однократный. Для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа и связанные с ними спектральные объекты одним натуральным индексом.

Пусть дана последовательность чисел μ_n „мало“ отличающаяся от чисел λ_n . Рассмотрим следующую задачу управления: найти P — оператор умножения на функцию p , действующий в H , такой, что собственные числа оператора $T + P$ совпадали бы с последовательностью μ_n .

Решение данной задачи опирается на результаты полученные в работах [1],[2]. В [3] был рассмотрен случай одномерной последовательности λ_n . В данной работе приводится обоснование метода построения функции p в виде ряда Фурье, строится алгоритм и приводятся результаты вычислений.

Литература

- [1] Седов А. И. О существовании и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для самосопряженного дискретного оператора // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. № 27 (127). С. 100-103.
- [2] Седов А. И. Об обратной задаче спектрального анализа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 4 (221). С. 91-99.
- [3] Sedov A. I. The Use of the Inverse Problem of Spectral Analysis to Forecast Time Series // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2019. Т. 6. № 1. С. 74-78.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ДЕМПФЕРОМ⁵²

Семенов М. Е. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

mkl150@mail.ru

Соловьев А. М. (Россия, Воронеж)

АО "Концерн "Созвездие"

darkzite@yandex.ru

В работе рассматриваются динамические свойства осциллятора Дуффинга с демпфирующим звеном, находящимся под воздействием внешней гармонической силы. Выполняется сравнительный анализ эффективности демпфирования в случае использования вязкоупругого

⁵²Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №19-08-00158)

и гистерезисного демпферов. Основное внимание уделяется сравнительному анализу влияния вязкоупругого демпфера дробного порядка [1,2] и гистерезисного демпфера (построенного на основе материала Ишлинского) [3-5] на динамику системы.

Осциллятор Дуффинга, находящийся под воздействием внешних колебаний с частотой Ω и демпфирующим звеном с дробным порядком демпфирования p , описывается следующим уравнением:

$$\ddot{z}_\tau + \alpha \cdot \text{sign}(\dot{z}_\tau) |\dot{z}_\tau|^p + z_\tau + \beta z_\tau^3 = A\Omega^2 \sin(\Omega\tau), \quad (1)$$

где τ – переменная времени, а α, β и A – постоянные коэффициенты.

Гистерезисный демпфер моделируется посредством преобразователя Ишлинского, являющегося одним из видов континуальных систем гистерезиса и представляющий собой систему параллельно соединенных нелинейных звеньев типа «упор» (детальное описание этого преобразователя содержится в [3]). Динамика осциллятора Дуффинга с гистерезисным звеном на основе материала Ишлинского описывается следующим уравнением:

$$\ddot{z}_\tau + \sum_{j=1}^N \gamma_j \Gamma[\tau, h^j, \xi^j, E, z_0] \dot{z}_\tau + z_\tau + \beta z_\tau^3 = A\Omega^2 \sin(\Omega\tau), \quad (2)$$

где N – количество гистерезисов (упоров) в модели материала Ишлинского, h^j – пределы текучести j -го упора, ξ – весовой коэффициент j -го упора, E – модуль упругости всех упоров, γ_j – коэффициенты демпфирования.

Сравнительный анализ эффективности указанных выше демпферов основывается на изучении передаточных функций [2]:

$$\begin{cases} T_{ff} = \frac{\varsigma \max_{\tau} |A\Omega^2 \sin(\Omega\tau) - \ddot{z}_\tau|}{A\Omega^2}, \\ T_{fd} = \frac{\varsigma \max_{\tau} |A \cdot \sin(\Omega\tau) + \dot{z}_\tau|}{A\Omega^2}, \end{cases} \quad (3)$$

где ς – коэффициент, характеризующий резонансные свойства осциллятора.

В работе было установлено, что вязкоупругий дробный демпфер имеет высокую эффективность за областью резонанса системы и низкую вблизи резонанса. Однако следует заметить, что варьируя коэффициенты α и p можно добиться улучшения эффективности демпфера в области резонанса, но в этом случае его характеристики за пределами этой области ухудшаются. В случае использования демпфера на основе материала Ишлинского возможно добиться еще большей эффективности демпфирования. Подбрав параметры материала можно добиться значительного увеличения эффективности в области резонанса при незначительном ухудшении параметров за ее пределами.

Литература

- [1] Borowiec M., Litak G., Syta A. Vibration of the Duffing oscillator: Effect of fractional damping // Shock and Vibration 14 (2007) 29–36.
- [2] Qibao Lv, Zhiyuan Yao. Analysis of the effects of nonlinear viscous damping on vibration isolator // Nonlinear Dynamics, November 2014.
- [3] Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
- [4] Семёнов М. Е., Матвеев М. Г., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. №2. С. 106–113.
- [5] Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A. and Balthazar J. M. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers // Proceedings in Physics 199. 2018.

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ
ЛОКАЛЬНО p -ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ⁵³

Сивкин В. Н. (Россия, Москва)

МГУ им. Ломоносова

sivkin96@yandex.ru

Шкалик А. А. (Россия, Москва)

МГУ им. Ломоносова

ashkaliko@yandex.ru

Пусть T полуограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с дискретным спектром. Обозначим через $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ систему его собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, занумерованным по возрастанию с учетом кратности. Говорим, что оператор T имеет порядок α , если существует постоянная $c > 0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$, такие, что $\mu_k \geq ck^\alpha$ при $k \geq k_0$.

Наша цель — найти условия, при которых система корневых векторов возмущенного оператора $A = T + B$ сохраняет свойство базисности в пространстве H .

Определение 1. Назовем оператор B локально p -подчиненным оператору T , если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(B)$ — области определения оператора B и $\exists$ постоянная b , такая, что $\|B\varphi_k\| \leq b\mu_k^p$, $\forall k \geq 1$.

Теорема 1. Пусть оператор T самосопряжен, полуограничен и имеет порядок $\alpha \geq 1$, а оператор B локально p -подчинен оператору T при некотором $p \geq 0$.

1. Если $p \leq 1 - \alpha^{-1}$, то система корневых векторов возмущенного оператора $T + B$ образует базис со скобками.

2. Если $p \leq 1 - \alpha^{-1}/2$, то система корневых векторов оператора $T + B$ образует базис для суммирования методом Абеля-Лидского порядка β при любом значении параметра $\beta > \max(2(\alpha^{-1} + p - 1), 0)$.

Первое утверждение этой теоремы обобщает результат работы [1], в которой утверждение получено при $p = 0$ и дополнительном условии несгущаемости (отсутствии кластеров) у последовательности собственных значений $\{\mu_k\}$ невозмущенного оператора, а второе утверждение теоремы усиливает на случай локальных p -подчиненных возмущений результаты Мацаева-Кацнельсона о суммировании рядов по корневым векторам возмущенных операторов, когда p -возмущения рассматриваются в глобальном смысле (см. определения в работе [2, гл.5]).

Доказательство сформулированной теоремы проводится по лекалам работ [1], [2]. Новый момент — поиск вертикальных прямых, удаленных от областей сгущения последовательности $\{\mu_k\}$.

Определение 2. Говорим, что последовательность лакун $\Delta_k = (\mu_{m_k}, \mu_{m_{k+1}})$ между соседними собственными значениями μ_{m_k} и $\mu_{m_{k+1}}$ невозмущенного оператора T является α -допустимой, если выполнены неравенства

$$|\mu_{m_k+l} - t_k| \geq \tau |l| k^{\alpha-1}, \quad \forall l \in [-m_k + 1, +\infty), \quad k \geq 1, \quad \text{где } t_k = (\mu_{m_{k+1}} + \mu_{m_k})/2,$$

а постоянная τ не зависит ни от l , ни от k .

Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение.

Лемма 1. Если оператор T имеет порядок α , то существует α -допустимая последовательность его лакун.

Основной момент новизны полученного результата заключается в том, что его справедливость установлена при условии локальной p -подчиненности, а не глобальной (см. определения в [2]). Показательным является следующий пример. Пусть $T = -\Delta$ — оператор Лапласа на прямоугольной области Ω , а $B = q(x)$ — оператор умножения на комплекснозначную функцию $q \in L_2(\Omega)$. Тогда корневые функции оператора $T + B$ образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$. Условия сформулированной теоремы в этом случае выполняются при $\alpha = 1$ и $p = 0$. Ранее этот результат был известен при условии, когда $q \in L_\infty(\Omega)$. В

⁵³Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00240.

этом случае выполнены условия теоремы Маркуса-Мацаева, так как оператор умножения на функцию q является глобально 0-подчиненным (ограниченным) оператором.

Литература

- [1] Шкалик А. А. О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Тр. Миан. 2010. Т. 269. С. 290–303.
- [2] Шкалик А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // УМН. 2016, Т. 71, №5, С. 113–174.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Сиражудинов М. М. (Россия, Махачкала)

Дагестанский государственный университет

sirazhmagomed@yandex.ru

Тихомирова С. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

tiho.mirno.svetlo@mail.ru

Операторные оценки усреднения дивергентных эллиптических операторов получены в [1]. Термин «операторные оценки усреднения» ввел В. В. Жиков [2]. Здесь приведены оценки погрешности усреднения периодической задачи для обобщенных уравнений Бельтрами. Эти уравнения не дивергентные, поэтому полученные оценки погрешности усреднения отличаются от оценок для дивергентных операторов.

Пусть $L_p(\square_T; \mathbb{C})$, $W_p^1(\square_T; \mathbb{C})$, $p \geq 1$, — пространства Лебега и Соболева периодических функций, $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — 1-периодические функции, удовлетворяющие условию эллиптичности $\text{vraisup}_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1$, $k_0 > 0$ — постоянная эллиптичности на всей плоскости. Положим $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, где $\varepsilon = \mathfrak{I}/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{I} \geq 1$. Очевидно, что $\mathfrak{I}$ — период функции $a(\varepsilon^{-1}x)$, если $a(x)$ — 1-периодическая функция, в частности, $\mathfrak{I}$ — период функций μ^ε , ν^ε .

Рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon \partial_{\bar{z}} \bar{u}_\varepsilon = f - \text{Re} \langle f \bar{p}_1^\varepsilon \rangle_{\mathfrak{I}} - i \text{Re} \langle f \bar{p}_2^\varepsilon \rangle_{\mathfrak{I}}, f \in L_2(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C}), \quad \langle u_\varepsilon \rangle_{\mathfrak{I}} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_1^\varepsilon = p_1(\varepsilon^{-1}x)$, $p_2^\varepsilon = p_2(\varepsilon^{-1}x)$, причем $p_1(x)$, $p_2(x)$ — базисные векторы ядра оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператору периодической задачи $\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu(x) \partial_z u + \nu(x) \partial_{\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(\square_T; \mathbb{C})$, $u \in W_2^1(\square_T; \mathbb{C})$, $T = 1$.

Теорема 1. *Периодическая задача (1) однозначно разрешима и имеют место априорные оценки $(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle_{\mathfrak{I}} \leq \text{Re} \langle \mathcal{A}_\varepsilon u \cdot \bar{\partial_{\bar{z}} u} \rangle_{\mathfrak{I}}$, $u \in W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})$; $c_0 \|u\|_{W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})} \leq \|\mathcal{A}_\varepsilon u\|_{L_2(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})} \leq c_1 \|u\|_{W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})}$, $u \in W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})$, $\langle u \rangle_{\mathfrak{I}} = 0$, $c_0, c_1 > 0$ — положительные постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности k_0 и периода $\mathfrak{I}$.*

Теорема 2. (Об усреднении периодической задачи). Семейство $u_\varepsilon \in W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})$, $\langle u_\varepsilon \rangle_{\mathfrak{I}} = 0$, решений периодической задачи (1) сходится в $L_2(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению u^0 усредненной периодической задачи

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u^0 \equiv \partial_{\bar{z}} u^0 + \mu^0 \partial_z u^0 + \nu^0 \partial_{\bar{z}} \bar{u}^0 = f - \langle f \rangle_{\mathfrak{I}}, \\ u^0 \in W_2^1(\square_{\mathfrak{I}}; \mathbb{C}), \quad \langle u^0 \rangle_{\mathfrak{I}} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где коэффициенты μ^0 , ν^0 — постоянные, определяемые формулами $\mu^0 = \langle \mu \mathcal{Q} + \bar{\nu} \mathcal{P} \rangle$, $\nu^0 = \langle \bar{\mu} \mathcal{P} + \nu \mathcal{Q} \rangle$, $\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2)$, $\mathcal{Q} = 2^{-1}(\bar{p}_1 + i\bar{p}_2)$, (p_1, p_2) — базисные векторы, $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ — комплексно сопряженные p_1, p_2 функции).

Первое приближение к решению u_ε периодической задачи (1), по аналогии с первым приближением к решению задачи Римана-Гильберта ([3]), имеет вид $u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \left((N_1(y) - iN_2(y)) \partial_z u^0(x) + (N_1(y) + iN_2(y)) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)} \right)$, $y = \varepsilon^{-1}x$, где N_1 и N_2 решения задачи на ячейке, u^0 — решение усредненной периодической задачи (2).

Главным результатом по оценкам погрешности усреднения периодической задачи для обобщенного уравнения Бельтрами является следующая

Теорема 3. Пусть функция f в правой части периодической задачи (1) принадлежит пространству $W_2^1(\square_{\mathfrak{J}}; \mathbb{C})$, тогда имеют место следующие оценки

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(\square_{\mathfrak{J}}; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|f\|_{W_2^1(\square_{\mathfrak{J}}; \mathbb{C})}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(\square_{\mathfrak{J}}; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|f\|_{W_2^1(\square_{\mathfrak{J}}; \mathbb{C})},$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и периода $\mathfrak{J}$.

Литература

- [1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойств и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 5. С. 1–108.
- [2] Жиков В. В. Об операторных оценках в теории усреднения // Доклады РАН. 2005. Т. 403. № 3. С. 305–308.
- [3] Сиражудинов М. М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сборник. 2017. Т. 208. № 4. С. 87–110; англ. пер.: Sirazhudinov M. M. An asymptotic method for homogenization for generalized Beltrami operators // Sb. Math. 2017. V. 208. № 4. P. 546–567.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ КОНИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ СПУТНИКА В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА⁵⁴

Сухов Е. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
sukhov.george@gmail.com

Изучается движение спутника - твёрдого тела относительно центра масс на круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. В случае динамической симметрии спутника уравнения его движения имеют частное решение, называемое конической прецессией [1]. При конической прецессии спутник находится в состоянии стационарного вращения вокруг оси динамической симметрии, которая равномерно вращается вокруг нормали к плоскости орбиты и описывает в абсолютном пространстве конус. В окрестности устойчивой конической прецессии существуют периодические движения двух типов: короткопериодические с периодом, близким к $\frac{2\pi}{\omega_2}$ и долгопериодические с периодом, близким к $\frac{2\pi}{\omega_1}$, где ω_1 и ω_2 - частоты линейной системы ($\omega_2 > \omega_1$). Указанные движения описывают колебания оси динамической симметрии спутника вблизи конической прецессии и могут быть получены в виде рядов по степеням малого параметра - амплитуды колебаний [2].

Семейство короткопериодических движений, рождающихся из конической прецессии спутника, изучалось ранее в работах [3, 4]. В указанных работах были получены асимптотические выражения, описывающие короткопериодические движения вблизи конической прецессии, а также численно построены области существования указанных движений в трёхмерном пространстве параметров задачи. Также для произвольных значений параметров была решена линейная задача об орбитальной устойчивости данных периодических движений и исследована их бифуркация.

В настоящей работе изучались семейства долгопериодических движений, рождающихся из конической прецессии симметричного спутника в случае резонанса третьего порядка ($\omega_2 =$

⁵⁴Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00637).

$2\omega_1$). Для произвольных значений параметров задачи были построены области существования указанных семейств, а также решена задача об их орбитальной устойчивости в линейном приближении. Вблизи конической прецессии при значениях параметров задачи, близких к резонансным, долгопериодические движения были построены аналитически при помощи методики работы [5]. Для построения областей существования рассматриваемых семейств при произвольных значениях параметров был применён метод численного продолжения, изложенный в [6, 7].

Литература

- [1] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
- [2] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" Институт компьютерных исследований, 2009.
- [3] Sukhov E. A. Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precessions of a dynamically symmetric satellite // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 4.
- [4] Сухов Е. А. Исследование орбитальной устойчивости и бифуркации периодических движений симметричного спутника на круговой орбите: диссертация к. ф.-м. н. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). Москва. 2019.
- [5] Маркеев А. П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.
- [6] Каримов С. Р., Сокольский А. Г. Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновой системы. Препринт ИТА АН СССР. 1990. №9. 32 С.
- [7] Бардин Б. С., Сухов Е. А. Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Тез. докл. LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2018. С.

МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ

Тайманов И. А. (Россия, Новосибирск)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

taimanov@math.nsc.ru

В докладе будут обсуждаться задачи интегрирования магнитных геодезических потоков и их квантования в случае, когда магнитное поле не является точным (например, в ситуации монополя Дирака).

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БУСЛАЕВА С МАРКОВСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Таташев А. Г. (Россия, Москва)

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет МАДИ

a-tatashev@yandex.ru

Яшина М. В. (Россия, Москва)

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет МАДИ

mv.yashina@madi.ru

Класс динамических систем, получивший впоследствии название контурных сетей Буслаева, введен в [1] с целью разработать математические модели трафика с сетевой структурой, для которых можно получить аналитические результаты. Контурные сети могут иметь и другие приложения, в частности, при моделировании работы инфокоммуникационных систем. Сети Буслаева рассматриваются в дискретном и непрерывном вариантах. Анализ

поведения таких динамических систем сводится к поиску спектральных циклов. Характер асимптотического поведения динамических систем исследовался, например, в [2].

В дискретном варианте исследуются контурные сети с индивидуальным движением частиц, при котором частица перемещается в дискретный момент времени, если ячейка впереди свободна, или с кластерным движением. Понятие кластерного движения было введено [3]. Каждая частица (кластер) перемещается по заданному замкнутому контуру, разбитому на ячейки. Контуры имеют общие точки (узлы), при прохождении которых возникают задержки из-за того, что частицы не могут проходить через узел одновременно. Движение детерминированное, но правило прохождения узлов может быть стохастическим. Контурная сеть может рассматриваться как цепь Маркова. Динамика контурной сети с дискретным временем может быть задана оператором, отображающим текущее состояние системы в следующее. Для детерминированной контурной сети множество предельных циклов и соответствующих им значений средних скоростей частиц называется спектром контурной сети. Основной задачей является исследование спектра. Аналитические результаты получены для сетей, содержащих два контура с одним или двумя узлами, [4], и для сетей с регулярными периодическими структурами, [1], [5].

Инвариантные множества как для дискретных, так и непрерывных контурных сетей имеют вид предельных циклов. Для таких видов контурных сетей, как открытая цепочка контуров или двухконтурная система с двумя узлами, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Предельное распределение состояний дискретной контурной сети совпадает с предельным распределением соответствующей непрерывной сети, если состояния непрерывной сети фиксировать через промежутки времени длительностью α , если отношение α/T , где T — период предельного цикла, является рациональным числом. Если же число α/T иррационально, то предельное распределение непрерывного варианта контурной сети, состояния которой фиксируются через интервалы длительностью α , непрерывно.*

Литература

- [1] Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G. On synergy of totally connected flows on chainmails // Proc. of Int. Conf. of CMMSE-2013. 2013. V.3., 861–874.
- [2] Козлов В.В. Первые интегралы и динамические траектории // Матем. сб. 2020. Т.211. №2. С. 32–59.
- [3] Bugaev A. S., Kozlov V. V., Buslaev A. P., Kozlov V. V., Yashina M. V. Distributed Problems of Monitoring and Modern Approaches to Traffic Modeling // Proc. of 14th Int. IEEE Conf. on Intelligent Transportation Systems, part 6, 2011. p.477–481.
- [4] Yashina M. V., Tatashev A. G. Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. V. 43. No 7. P. 4303–4316.
- [5] Tatashev A. G., Yashina M. V. Spectrum of Elementary Cellular Automata and Closed Chains of Contours. Machines. 2019. V.7. No 2. 28.

О СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА РЕГУЛЯРНОЙ ЦЕПОЧКЕ С СИММЕТРИЧНЫМИ КОНФЛИКТНЫМИ ТОЧКАМИ

Таташев А. Г. (Россия, Москва)

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет МАДИ
a-tatashev@yandex.ru

Яшина М. В. (Россия, Москва)

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет МАДИ
mv.yashina@madi.ru

В известных математических моделях автомобильного трафика, относимых к классу микроскопических моделей, автотранспортные средства представляются частицами, перемещающимися по одномерному или двумерному клеточному полю. Такие модели относят

к клеточным автоматам или к синхронным случайным процессам с запретами, причем в качестве носителя рассматривались только перегоны в открытом или замкнутом (окружность) вариантах, или решетка на торе. Для сетевых конфигураций в силу многофакторности применялись, в основном, имитационные подходы. Тем не менее, в силу тенденций к урбанизации сетевые модели трафика являются актуальными и особый интерес представляет исследование предельных режимов в постановках теории динамических систем, [1].

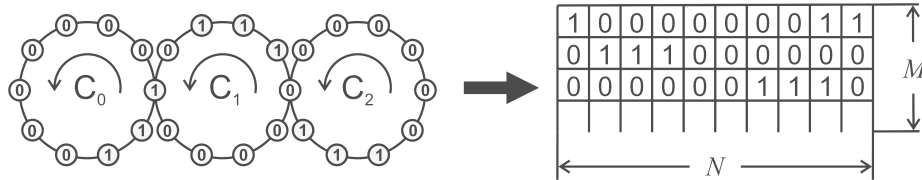


Рис. 1: Цепочка с симметричными узлами

В группе под руководством академика В.В. Козлова развиваются приложения теории динамических систем для описания поведения трафика на сложных сетях. Основой подхода к описанию таких систем составляют понятия кластерного движения и контурные сети, [3], названные сетями Буслаева. Сеть Буслаева представляет собой динамическую систему, содержащую замкнутые контуры с общими узлами. Топология сети определяется направлением движения по контурам и правилам разрешения конфликтов при одновременном приближении частиц к общему узлу, [4], [5]. Анализ сводится к поиску спектральных циклов, на которых достигаются предельные значения скоростей.

В данной работе исследуется сеть Буслаева типа открытой цепочки, рис.1. В отличие от динамических систем в [2], имеющих орбиты, относящиеся к типу аттракторов, инвариантные множества цепочки представляют собой предельные циклы. Справедлива теорема:

Теорема 1. Пусть состояние сети с n контурами характеризуется вектором $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, где x_i — координата передней точки кластера. Пусть A — некоторая область в X , содержащая такие состояния, что при нахождении системы в этих состояниях перемещается ровно $k > 0$ кластеров, с номерами, принадлежащему множеству K . Тогда инвариантная мера области $A \subset X$ описывается интегралом по A от обобщенной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, представляющей собой произведение константы и $n - 1$ множителей вида $\delta(l_i)$, где δ — дельта-функция Дирака, $l_i(\vec{x})$ — линейные функции, причем для $(n - k)$ значений индекса i функция l_i является функцией только от одного аргумента x_i , а для $(k - 1)$ значений из тех, которые принадлежат множеству K , функция l_1 представляет собой функцию двух аргументов.

Литература

- [1] Козлов В.В. Весовые средние, равномерное распределение и строгая эргодичность. УМН, 2005, 60(6) (366, 115–138).
- [2] Kozlov V. V., Trescev M. V. Instability, asymptotic trajectories and dimension of the phase space // Mosc. Math. J., 2018, 18(3). 681–692.
- [3] А.С. Бугаев, А.П. Буслаев, В.В. Козлов, А.Г. Таташев, М.В. Яшина. Обобщенная транспортно-логистическая модель как класс динамических систем. Математическое моделирование, 2015, 7(12), 65–87.
- [4] Buslaev A. P., Tatashev A. G., Yashina M. V. Flows spectrum on closed trio of contours // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2018. 11(1) 260–283.
- [5] Tatashev A. G., Yashina M. V. Behavior of continuous two-contours system // WSEAS Transactions on Mathematics. 2019. 18(5). 37–45.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ЛОКАЛИЗОВАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ⁵⁵

Толченников А. А. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
tolchennikovaa@gmail.com

Рассматривается задача Коши с локализованным начальным условием для двумерного безмассового уравнения Дирака с линейным потенциалом $U(x) = x_1$. Решение этой задачи можно выразить в виде интеграла от специальных функций (выражающихся через функции параболического цилиндра). В некоторых областях для точного решения можно сделать асимптотическое упрощение.

Литература

- [1] Tudorovskiy T., Reijnders K., Katsnelson M. Chiral Tunneling in Single-Layer and Bilayer Graphene // Phys. Scr. 2012. No. 146.
- [2] Dobrokhotov S. Yu., Tolchennikov A. A., Solution of the Two-Dimensional Dirac Equation with a Linear Potential and a Localized Initial Condition // Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. No 26.

BV РЕШЕНИЯ В СМЫСЛЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МЕРЫ ВЫПУКЛОГО ПРОЦЕССА ВЫМЕТАНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ⁵⁶

Толстоногов А. А. (Россия, Иркутск)
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук
aatol@icc.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве изучается выпуклый процесс выметания. В большинстве исследований для описания движения выпуклого множества, порождающего процесс выметания, используется расстояние по Хаусдорфу между множествами. Однако для неограниченных множеств использование расстояния по Хаусдорфу не всегда обеспечивает выполнение тех или иных условий, при которых решение существует. В данной работе вместо расстояния по Хаусдорфу мы используем ρ -полуотклонения множеств. Эти полуотклонения подчинены зависящим от ρ положительным мерам Радона. Доказаны теоремы существования непрерывных справа BV решений и установлена их зависимость от однозначных, зависящих только от времени возмущений. Полученные результаты используются для доказательства теорем существования и релаксации экстремальных непрерывных справа BV решений процесса выметания с многозначными возмущениями. Как следствия получены результаты, относящиеся к абсолютно непрерывным решениям.

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Усков В. И. (Россия, Воронеж)
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
vum1@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} = (B + \varepsilon C)u(x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

⁵⁵Работа поддержана грантом РНФ 16-11-10282.

⁵⁶Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-01-00026 а.

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x, \varepsilon), \quad u(0, t, \varepsilon) = u(2\pi, t, \varepsilon), \quad (2)$$

где оператор

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3)$$

с областью определения

$$\text{dom } A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_k(x) \in C^2[0, 2\pi], \quad y_k(0) = y_k(2\pi), \quad k = 1, 2 \right\}$$

действует в банаховом пространстве

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_k(x) \in C[0, 2\pi], \quad k = 1, 2 \right\},$$

$B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$; $u^0(x, \varepsilon)$ — достаточно гладкая и голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $(x, t) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, T]$.

Уравнение вида (1) с произвольными линейными операторами A , B , C , где оператор A фредгольмов (далее, Φ -оператор), исследовано в работах [1]-[2].

В задаче (1), (2) имеет место явление погранслоя, если $u(x, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, t) + v(x, t, \varepsilon)$, где $\bar{u}(x, t)$ — решение предельной задачи, $v(x, t, \varepsilon)$ — функция погранслоя по выделенной переменной t вблизи точки $t = 0$ [3].

В работе [4] доказано, что (3) является Φ -оператором; для него построены подпространства, проекторы $P(x)$, $Q(x)$ на $\text{Ker } A$, $\text{Coker } A$ соответственно, полуобратный оператор $A^-(x)$; вычислен спектр.

Вводятся обозначения: K^* — присоединенная матрица к некоторой матрице K [5]; $\tilde{B} = B + B^*$, $\tilde{C} = C + C^*$, $\Delta_B = \det \tilde{B}$, $\Delta_C = \det \tilde{C}$.

Рассматривается случай обратимости оператора $A_1(x, \varepsilon) = Q(x)(B + \varepsilon C)P(x)$ в $\text{Ker } A$ при каждом ε . Вычисления показывают, что $A_1(x, \varepsilon) = \frac{1}{2}D(\varepsilon)P(x)$, где $D(\varepsilon) = \tilde{B} + \varepsilon\tilde{C}$. Обратный к нему оператор существует (в подпространстве $\text{Ker } A$) при выполнении условия: $\det D(\varepsilon) \neq 0$ при каждом ε .

Определим оператор $G(x) = -2A^-(x)(B\tilde{B}^*Q(x)C + (B\tilde{C}^* + C\tilde{B}^*)Q(x)B)$.

С применением результатов, полученных в монографии [6] и статье [7], получена следующая теорема.

Теорема. Пусть $G(x)$ — производящий оператор полугруппы отрицательного типа при каждом x , и выполнены условия $\Delta_B = 0$, $\Delta_C > 0$. Тогда в задаче (1), (2) имеет место явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменную t/ε .

Литература

- [1] Зубова С.П., Раецкая Е.В. Исследование жесткости дескрипторной динамической системы в банаховом пространстве // Проблемы математического анализа. 2015. вып. 79. С. 127-132.
- [2] Зубова С.П., Усков В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 3. С. 393-404.
- [3] Зубова С.П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной. Доклады РАН. 2014. Т. 454, № 4. С. 383-386.
- [4] Зубова С.П., Усков В.И. Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных. Итоги науки. Выпуск 31. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М.: РАН, 2017. 253 с.
- [5] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
- [6] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967. 464 с.

- [7] Баев А. Д., Зубова С. П., Усков В. И. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции. Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134-140.

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Филимонов А. М. (Россия, Москва)

Российский университет транспорта (МИИТ)

amfilimonov@yandex.ru

Как известно (см., например, [1]), произвольную гиперболическую систему квазилинейных уравнений с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + B(x, t, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} = \bar{p}(x, t, \bar{u}), \quad (1)$$

где $B(x, t, \bar{u})$ - квадратная матрица m -го порядка, можно записать в так называемой характеристической форме (иногда называемой так же формой Шаудера):

$$\bar{h}^i(x, t, \bar{u}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \lambda_i(x, t, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \right) = \bar{h}^i(x, t, \bar{u}) \bar{p}(x, t, \bar{u}) := f_i(x, t, \bar{u}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $\bar{h}^i$ - левый собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному значению λ_i .

Системы такого вида изучались в работах Чинквини-Чибрарио [3], Чезари [4] и многих других авторов. При этом, однако, как правило, в этих работах рассматривалась задача Коши, или ее модификации.

Иногда такая система может быть записана в канонической форме Римана

$$\frac{\partial}{\partial t} r_i + \lambda_i(x, t, \bar{r}) \frac{\partial}{\partial x} r_i = f_i(x, t, \bar{r}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где r_i - так называемые римановы инварианты. В случае $m \leq 2$, или в полулинейном случае (т.е. когда $B = B(x, t)$, а m - произвольно) такое приведение к виду (3) вообще говоря, возможно. Для систем, изначально записанных в канонической форме Римана и некоторых их обобщений (см, например [4], а так же обширную библиографию в работе [5]), к настоящему времени построена достаточно глубокая теория, включающая, в частности, и смешанные задачи.

В квазилинейном случае, при $m \geq 3$, такое приведение общей системы к виду (3), вообще говоря, невозможно. Например, это относится к системе уравнений газовой динамики.

Корректность постановки краевых условий для системы (3) состоит в предположении о возможности разрешимости краевых условий относительно инвариантов, *соответствующих* "уходящим" (см., например, [5]) характеристикам. Однако, для систем, не приводящихся к виду (3), например, для системы уравнений газовой динамики, такой связи между неизвестными функциями и соответствующими собственными значениями, вообще говоря, нет.

В докладе описывается достаточно широкий класс краевых условий для систем общего вида (2), позволяющий получить локальную разрешимость (в обобщенном смысле) смешанной задачи.

Литература

- [1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978, 688 с.
- [2] Cinquini-Cibrario M. Sistemi di equazioni alle derivate parziali in piu variabili indipendenti. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 44, 1957, p. 357-417.
- [3] Cesari I. A boundary value problem for quazilinear hyperbolic systems. Riv. Mat. Univ. Parma, (3), 3, 1974, p. 107-131.

- [4] Кирилич В.М., Филимонов А.М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений. Математичні Студії -2008.-30, №1.- с.42-60.
- [5] Мышкис А.Д., Филимонов А.М. Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения, М., 2003 с.337-351.

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ⁵⁷

Хачатрян Х. А. (Армения, Ереван)
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Институт Математики НАН Армении
Khach82@rambler.ru

Рассматривается граничная задача для нелинейного интегрального уравнения типа свертки. Различные частные случаи данной задачи имеют применение в динамической теории p -адических открыто - замкнутых струн, в математической теории географического (пространственно - временного) распространения эпидемии и в кинетической теории газов [1],[2],[3]. В докладе будут обсуждены вопросы существования и единственности нетривиальных ограниченных решений, а также вопросы качественного анализа построенных решений [4],[5]. В конце доклада полученные результаты будут применены на конкретных граничных задачах прикладного характера.

Литература

- [1] Владимиров В.С., Волович Я. И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // ТМФ. 2004. Т.138. №3. С.355–368.
- [2] Diekmann O. Thresholds and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection // Journal of Math. Biology. 1978. V.6, pp. 109–130.
- [3] Cercignani C. The Boltzmann Equation and its Applications. Springer. New York, 1988.
- [4] Хачатрян Х. А. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. математическая. 2020. Т. 84. № 4.
- [5] Хачатрян Х. А., Петросян А.С. Об одном классе интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на полуоси // Изв. НАН Армении, математика. 2020. Т. 55, № 1. С. 55–71.

К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ В СЛУЧАЕ ГЕССА⁵⁸

Холостова О. В. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
kholostova_o@mail.ru

Исследуется динамика твердого тела с геометрией масс Гесса в поле тяжести в предположении, что точка подвеса тела совершает заданные высокочастотные вибрации малой амплитуды в трехмерном пространстве. Ранее [1] были получены приближенные автономные уравнения движения тела с произвольной геометрией масс при наличии вибраций точки подвеса указанного вида. Эти уравнения имеют форму модифицированных уравнений Эйлера-Пуассона или гамильтоновых уравнений при учете вектора вибрационного момента или отвечающего ему вибрационного потенциала.

⁵⁷Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223)

⁵⁸Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

В данной работе доказано, что вибрационный момент, действующий на тело с геометрией масс Гесса, всегда ортогонален радиус-вектору его центра масс относительно точки подвеса. Отсюда сразу следует, что приближенная система уравнений движения тела допускает инвариантное соотношение, совпадающее с классическим интегралом Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Это означает, что в приближенной задаче динамики тела с вибрирующим подвесом в случае Гесса (как и для тела с неподвижной точкой) имеется симметрия относительно вращений и может быть введена циклическая координата (на нулевом уровне интеграла), что приводит к рассмотрению редуцированной системы с двумя степенями свободы.

При наличии в данной системе еще одной циклической координаты (в случае вибрационной симметрии относительно вертикали) редуцированная система может быть проинтегрирована. В докладе подробно исследуется соответствующая модельная система с одной степенью свободы. Дается геометрическая интерпретация движения оси тела, содержащей его центр масс. При отсутствии второй циклической координаты редуцированная система, повидимому, не является интегрируемой.

Отметим, что гамильтониан редуцированной системы совпадает с гамильтонианом, получаемым в приближенной задаче динамики волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса, при нулевой угловой скорости собственного вращения волчка; эта аналогия известна для тел в случаях Лагранжа и Гесса с неподвижными точками подвеса. Задача о движении волчка с вибрирующим подвесом исследована в различных постановках в работах [2]–[5]. С учетом аналогии двух задач, некоторые результаты, полученные ранее в динамике волчка, перенесены на изучаемый случай Гесса.

Обсуждаются также некоторые особенности исследования частных движений (стационарных вращений вокруг вертикальных осей) тела в случае Гесса при наличии вибрационной симметрии относительно вертикали в предположении, что инвариантное соотношение Гесса не выполняется.

Литература

- [1] Маркеев А. П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. №2. С. 193–203.
- [2] Kholostova O. V. On a case of periodic motions of the Lagrangian top with vibrating fixed point // RCD. 1999. Vol. 4. No. 4. Pp. 81–93.
- [3] Холостова О. В. Об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2000. Т. 64. №5. С. 858–868.
- [4] Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН.МТТ. 2012. №4. С. 3–10.
- [5] Беличенко М. В., Холостова О. В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелин. динамика. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ⁵⁹

Чуркина Т. Е. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
tatiana802@mail.ru

Рассматривается задача об устойчивости частного случая движения трехосного спутника — твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите [1]. Предполагается, что ориентация спутника в орбитальной системе координат задается при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ , а состояние системы описывается

⁵⁹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

переменными Гамильтона, в которых за обобщенные координаты взяты углы Эйлера. За независимую переменную принята истинная аномалия ν . За параметры задачи выбраны два инерционных параметра (отношения главных центральных моментов инерции спутника) и эксцентриситет орбиты центра масс.

При некоторых частных соотношениях на параметры задачи канонические уравнения Гамильтона, отвечающие рассматриваемому типу движения, допускают аналитические частные решения [1]. Устойчивость по отношению одновременно и к плоским, и к пространственным возмущениям решения, для которого $\psi = \nu/2$, рассмотрена в [2]. В данной работе рассматривается случай движения, при котором $\psi = -\nu/2$ и при этом главная центральная ось инерции спутника Oy направлена по нормали к плоскости орбиты. Рассматриваемое плоское движение спутника, принимаемое за невозмущенное, является резонансным: спутник за два оборота центра масс по орбите овершает один оборот в абсолютном пространстве.

Решена нелинейная задача об устойчивости данного движения при наличии одновременно и плоских, и пространственных возмущений.

В плоскости параметров задачи в областях устойчивости в первом приближении [3], [4] выявлены и построены кривые резонансов третьего и четвертого порядков. Для значений параметров, им принадлежащих, функция Гамильтона приводится к соответствующей нормальной форме и при помощи известных критериев [5] на коэффициенты этих нормальных форм делаются выводы об устойчивости движения. Решение задачи проводится численно.

Литература

- [1] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
- [2] Чуркина Т. Е. Об устойчивости одного плоского резонансного движения спутника при наличии пространственных возмущений // Известия РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 14–25.
- [3] Бардин Б. С., Чекина Е. А. Об устойчивости резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. Вып. 4. С. 619–632.
- [4] Bardin B. S., Chekina E. A., Chekin A. M. On the Stability of a Planar Resonant Rotation of a Satellite in an Elliptic Orbit // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20. No. 1. Pp. 63–73.
- [5] Маркеев А. П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 355–371.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М. В. (Россия, Москва)

МГУ имени М. В. Ломоносов

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов [1, 2].

При исследовании систем с диссипацией если и удастся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Данная тематика уже затрагивалась в ряде работ автора (см., например, [3, 4, 5]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

- [1] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.
- [2] Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2013. Т. 125. С. 5–254.
- [3] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
- [4] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.
- [5] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА⁶⁰

Шейпак И. А. (Россия, Москва)

МГУ имени М. В. Ломоносова

iasheip@mail.ru

Целью данной работы является вычисление норм операторов вложения пространства Соболева $\mathcal{H} := \dot{W}_2^n[-1; 1]$ в пространство $\dot{W}_\infty^k[-1; 1]$. В качестве вспомогательного инструмента в пространстве $\mathcal{H}$ рассматриваются функционалы $f \mapsto f^{(k)}(x)$ ($0 \leq k \leq n-1$). Определим величины $A_{n,k}(x)$ как нормы этих функционалов

$$A_{n,k}(x) := \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=1} |f^{(k)}(x)|.$$

Норма оператора вложения $J : \dot{W}_2^n[-1; 1] \hookrightarrow \dot{W}_\infty^k[-1; 1]$ равна

$$\Lambda_{n,k} := \sup_{x \in [-1; 1]} A_{n,k}(x).$$

В работе [1] были получены формулы для констант $\Lambda_{n,0}^2$, $\Lambda_{n,1}^2$ и $\Lambda_{n,2}^2$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномами Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A_{n,k}^2(x)$ и предъявлены формулы для $\Lambda_{n,4}^2$ и $\Lambda_{n,6}^2$.

Некоторые вычисления удобнее проводить для на отрезке $[0; 1]$. Несложно установить формулы пересчета констант вложения, определенных для разных отрезков:

$$A_{n,k}^2(x) = A_{n,k,[-1;1]}^2(x) = 2^{2n-2k-1} A_{n,k,[0;1]}^2(x), \quad \Lambda_{n,k}^2 = \Lambda_{n,k,[-1;1]}^2 = 2^{2n-2k-1} \Lambda_{n,k,[0;1]}^2.$$

В соответствии с теоремой Рисса функционал $f \mapsto f^{(k)}(x)$ в пространстве $\dot{W}_2^n[0; 1]$ задается с помощью функции $g_{n,k}$: $f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) g_{n,k}^{(n)}(x, a) dx$, при этом

$$A_{n,k}(a) = \|g_{n,k}\|_{\dot{W}_2^n[0;1]}. \quad (1)$$

Теорема 1. *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами:*

$$g_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!} (1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a) & x \in [0; a] \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!} a^{n-k} (1-x)^n h_{n,k}(x, a), & x \in [a; 1]. \end{cases},$$

⁶⁰Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

где $h_{n,k}(x, a) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} C_{2n-1-k}^{n-1-l} x^{n-1-l} a^l \sum_{m=0}^l C_{n-1+m}^m x^m$.

Однако при больших n и k из-за растущей сложности вычислений формулы (1) оказываются малополезными для практического применения. Далее мы применяем модификацию метода предложенного в [1].

Рассматриваются ортогональная в $L_2[-1; 1]$ система полиномов Лежандра, определяемая формулой Родрига $P_n(x) := \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$. Первообразная порядка $m > 0$ полинома P_n определяется формулой $P_n^{(-m)} := \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n-m)}$.

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A_{n,k}^2(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A_{n,k}^2(x) = A_{n-2,k-2}^2(x) - (P_{n-2}^{(k-n)}(x))^2 \left(n - \frac{3}{2}\right) - (P_{n-1}^{(k-n)}(x))^2 \left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Для величин $A_{n,k}^2(x)$ справедливо соотношение*

$$\frac{dA_{n,k}^2(x)}{dx} = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(x) \cdot P_n^{(k-n+1)}(x).$$

Теорема 2. *Точка $x = 0$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,k}^2(x)$ на отрезке $[-1; 1]$.*

С помощью лемм 1, 2 и теоремы 2 доказывается следующий основной результат.

Теорема 3. *Точные значения констант вложения на отрезке $[-1; 1]$ при $k = 2l$, $l = 0, 1, \dots$ имеют вид*

$$\Lambda_{n,k}^2 := A_{n,k}^2(0) = \frac{((k-1)!!)^2}{2^{2n-k-1}((n-(k/2)-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

Литература

- [1] Калябин Г.А. Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\dot{W}_2^n[0; 1]$ // Труды МИАН, 2010, Т.269, 143–149.
- [2] Мукосеева Е.В., Назаров А.И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, т.425, 35–45.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Шкаликов А. А. (Россия, Москва)

МГУ им. Ломоносова

ashkaliko@yandex.ru

Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами в секторах комплексной плоскости при больших значениях спектрального параметра получены еще в начале 20-го столетия Дж.Биркгофом. Эти результаты явились одним из основных инструментов исследования спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов. На протяжении более века эти результаты обобщались и уточнялись в работах многих математиков. До недавнего времени нужные асимптотики были получены только для уравнений с суммируемыми коэффициентами. В 2003-2015 годах они были получены для уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом $q \in W_2^{-1}(a, b)$, где (a, b) — конечный интервал на прямой.

В недавней (еще не опубликованной) работе автора и А.М.Савчука нужные асимптотики были получены для дифференциальных уравнений следующего вида

$$\tau(y) - \lambda^{2m} \varrho(x)y = 0, \quad \tau(y) = \sum_{k,s=0}^m (\tau_{k,s}(x)y^{(m-k)}(x))^{(m-s)}, \quad x \in [a, b],$$

где $n = 2m \geq 2$, λ — спектральный параметр, функции ϱ and $\tau_{0,0}$ положительны и принадлежат пространству $W_1^1[a, b]$ (то есть являются абсолютно непрерывными), а комплекснозначные коэффициенты-распределения $\tau_{k,s}$ таковы, что их первообразные в смысле обобщенных функций до порядка $l = \min\{k, s\}$ принадлежат пространству $L_2[0, 1]$.

Теорема 1. Уравнение

$$\tau(y) - \lambda^{2m} \varrho(x)y = 0, \quad x \in [a, b],$$

в секторе $0 \leq \arg \lambda \leq \pi/m$ имеет систему фундаментальных решений $y_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 2m$, для каждого из которых справедливо асимптотическое представление

$$y_k(x) = e^{\omega_{k-1}\lambda p(x)} \left[\varrho^{\frac{1-n}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{2n}}(x) \exp \left\{ \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt \right\} + \zeta_{1k}(x, \lambda) \right]. \quad (1)$$

Здесь $p(x) := \int_0^x \varrho(t) dt$, функция σ_0 допускает явное выражение через функции $\tau_{0,1}$ и $\tau_{1,0}$, а $\tau_0 := \tau_{0,0}$. Остаточные члены $\zeta_{jk}(x, \lambda)$ в этих представлениях равномерно по x стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, $\arg \lambda \in [0, \pi/m]$.

Здесь мы сформулировали результат в упрощенной форме. В действительности, асимптотики получены не только для решений указанного уравнения, но и для так называемых квазипроизводных, которые естественно возникают при изучении дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями. Кроме того, для функций-остатков $\zeta_{jk}(x, \lambda)$ получены формулы, которые позволяют дать качественную оценку убывания этих остатков, при условии, что имеется дополнительная информация о коэффициентах уравнения.

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Эгамов А. И. (Россия, Нижний Новгород)

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

albert810@yandex.ru

Задача о существовании и единственности решения начально-краевой задачи для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений решена в [1]. Там же приведены примеры, входящих в него, интегро-дифференциальных уравнений. Ниже рассматривается не менее интересный пример, не вошедший в статью.

Ставится начально-краевая задача: на множестве $Q = [0, l] \times [0, T]$, $l > 0$, $T > 0$ с границей Σ , состоящей из точек $\{(x, t) : t = 0 \text{ или } (l - x)x = 0\}$, найти функцию $y(x, t)$ — координаты поперечных колебаний струны — дважды непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x в области $Q \setminus \Sigma$ — решение уравнения:

$$y''_{tt}(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + u(x, t) \quad (1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2)$$

Начальные функции $\varphi(x) \in C^3[0, l]$, $\psi(x) \in C^2[0, l]$, удовлетворяют условиям связи (2) и интегральным тождествам

$$\int_0^l (\psi^2(x) + a^2 \varphi'^2_x(x)) dx = 1; \quad \int_0^l b(x) \varphi^2(x) dx = 1; \quad \int_0^l b(x) \varphi(x) \psi(x) dx = 0. \quad (3)$$

Управление $u(x, t)$ является управлением с обратной связью и имеет вид:

$$u(x, t) = b(x)y(x, t) - 2q(t)y'_t(x, t) - R[y]y(x, t), \quad (4)$$

где функция $b(x) \in C^1[0, l]$, функция $q(t) \in C^1[0, T]$ – решение задачи Коши

$$q'_t(t) + q^2(t) = R[y], \quad q(0) = 0, \quad (5)$$

(функция $q(t)$ существует в некоторой окрестности нуля для любой непрерывной функции $R[y] \equiv R_y(t)$). $R[y]$ – интегральный оператор:

$$R[y] = \int_0^l (b^2(x)y^2(x, t) - a^2b(x)y_x'^2(x, t) - a^2b'_x(x)y(x, t)y'_x(x, t) + b(x)y_t'^2(x, t)) dx, \quad (6)$$

где функция $y(x, t)$ – решение (1)–(4).

Это решение связано с решением стандартной линейной вспомогательной задачи: найти функцию $z(x, t)$ – дважды непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x в области $Q \setminus \Sigma$ – решение гиперболического уравнения 2-го порядка со вторыми краевыми и начальными условиями

$$z''_{tt}(x, t) = a^2 z''_{xx}(x, t) + b(x)z(x, t), \quad (7)$$

$$z'_x(0, t) = z'_x(l, t) = 0, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (8)$$

Решение вспомогательной задачи существует, единственно и может быть найдено методом разделения переменных [2].

В [1] доказывается теорема о связи решений исходной поставленной задачи (1)–(4) и вспомогательной линейной задачи (7)–(8), которая в данной интерпретации постановки задачи формулируется так:

ТЕОРЕМА. Если $z(x, t) \not\equiv 0$ при $\forall t \in [0, T]$, то на множестве Q существует единственное решение задачи (1)–(4), представимое в виде

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l (z_t'^2(x, t) + a^2 z_x'^2(x, t)) dx \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l b(x) z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}},$$

где $z(x, t)$ является решением задачи (7)–(8).

Литература

- [1] Бураго П.Н., Эгамов А.И. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429. DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429
- [2] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-ое издание. стереотип. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

SIMPLE SINGULARITIES OF FUNCTIONS
THAT ARE EVEN OR ODD IN EACH VARIABLE⁶¹

Abdrakhmanova N. T. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University

abd.nelly@yandex.ru

Astashov E. A. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University

ast-ea@yandex.ru

A map of G -manifolds $f: M \rightarrow N$ is called equivariant if for all $x \in M$, $\sigma \in G$ the condition $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$ is satisfied.

Two equivariant maps of G -manifolds $f, g: M \rightarrow N$ are called equivariant right-equivalent (or $\mathcal{R}^G$ -equivalent) if there exists an equivariant diffeomorphism $\Phi: M \rightarrow M$ such that $g = f \circ \Phi$.

An equivariant map of G -manifolds $f: M \rightarrow N$ is called equivariant simple (or G -simple) if for all sufficiently big $r \in \mathbb{N}$ its sufficiently small neighborhood in the space of r -jets of equivariant functions $M \rightarrow N$ intersects only a finite number of $\mathcal{R}^G$ -equivalence classes, and the number of these classes remains bounded as $r \rightarrow \infty$.

There exists a general problem to classify analytic function germs of several real or complex variables that are equivariant simple with respect to an action of a finite group on the source and target. Special cases of this problem are considered in papers [1]–[3] and [6]; similar problems are addressed in papers [4] and [5]. In this talk we classify simple singularities of analytic function germs that are even or odd in each variable.

Suppose that $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. The functions $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ that are odd in each of the variables $x_1, \dots, x_p$ and are even in each of the variables $x_{p+1}, \dots, x_n$ can be characterised as equivariant functions with respect to the following actions of the group $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ with generators $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ on $\mathbb{K}_{(x_1, \dots, x_n)}^n$ and $\mathbb{K}_{(y)}$:

$$\sigma_j \cdot (x_1, \dots, x_n; y) = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n; \varepsilon_j y), \quad (1)$$

where $\varepsilon_j = -1$ for $1 \leq j \leq p$ and $\varepsilon_j = 1$ for $p+1 \leq j \leq n$.

Denote by $\mathcal{O}_{n,p}^G$ the ring of G -equivariant analytic function germs $(\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$. We also use the (depending on p) notions of $\mathcal{R}_p^G$ -equivalence and G_p -simplicity.

The main results of the talk are given by the following two theorems.

Theorem 1. *Suppose that the group $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ acts on $\mathbb{K}^n$ and $\mathbb{K}$ as in (1) with $p = 0$, and $f \in \mathcal{O}_{n,0}^G$ is an equivariant germ with a critical point at the origin. The germ f is G_0 -simple iff it becomes $\mathcal{R}_0^G$ -equivalent to one of the germs $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \pm x_1^{2k} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$, $k \in \mathbb{N}$, after a suitable permutation of variables. The signs $\pm$ are independent of each other and in the case $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ can be replaced by pluses.*

Theorem 2. *Suppose that the group $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ acts on $\mathbb{K}^n$ and $\mathbb{K}$ as in (1) with $p > 0$, and $f \in \mathcal{O}_{n,p}^G$ is an equivariant germ with a critical point at the origin. The germ f is G_0 -simple iff it becomes $\mathcal{R}_p^G$ -equivalent to one of the germs*

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 \dots x_p \cdot (\pm x_1^{2k} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2), \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 \dots x_p \cdot (\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_p^2 \pm x_{p+1}^{2k} \pm x_{p+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2), \end{aligned}$$

where $k \in \mathbb{N}$, after a suitable permutation of variables $x_1, \dots, x_p$ and $x_{p+1}, \dots, x_n$. The signs $\pm$ are independent of each other and in the case $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ can be replaced by pluses.

References

- [1] Arnold V. I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Functional Anal. Appl. 1972. Vol. 6. No. 4. P. 254–272.
- [2] Arnold V. I. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Russian Math. Surveys. 1979. Vol. 34. No. 1. P. 1–42.

⁶¹The work of the second author was supported by RFBR grant no. 19-51-50005.

- [3] Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. J. of Geometry and Physics. 2013. Vol. 71. P. 58–72.
- [4] Siersma D. Singularities of functions on boundaries, corners, etc. The Quarterly Journal of Mathematics. 1981. Vol. 32. No. 1. P. 119–127.
- [5] Baines C. E., Goryunov V. V. Cyclically equivariant function singularities and unitary reflection groups $G(2m, 2, n)$, G_9 , G_{31} . St-Petersburg Mathematical Journal. 2000. Vol. 11. No. 5. P. 761–774.
- [6] Astashov E. A. Classification of $\mathbb{Z}_3$ -equivariant simple function germs. Mathematical notes. 2019. Vol. 105. No. 1–2. P. 161–172.

OPTIMAL CONTROL OF YACHTS⁶²

Ardentov A. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
aaa@pereslavl.ru

Lokutsievskiy L. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
lion.lokut@gmail.com

Sachkov Yu. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
yusachkov@gmail.com

We consider [1] a series of optimal control “yacht problems” generalizing Euler’s elastic problem [2], Markov-Dubins problem [3,4], Reeds-Shepp problem [5] and sub-Riemannian problem on $SE(2)$ [6].

Theorem 1. *Consider an optimal control problem whose differential system is defined by the trigonometric functions $\cos, \sin$. An Ω -modification of the optimal control problem is the same problem with $\cos$ changed to $\cos_\Omega$ and $\sin$ to $\sin_\Omega$, where a convex compact set Ω with $0 \in \text{int } \Omega$ defines the modification of the differential system [7].*

Let us state the following control system:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in G = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times (\mathbb{R}_\theta / (2S\mathbb{Z})),$$

with the modified vector fields $X_1 = (\cos_\Omega \theta, \sin_\Omega \theta, 0)$, $X_2 = (0, 0, 1)$, we fix the boundary conditions $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$, and integral cost functional in the general form $J = \int_0^T f(u_1, u_2) dt \rightarrow \min$. Also, we assume a possible restriction on the control $(u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Ω -modifications of the following four classical optimal control problems appear as specifications of the considered problem:

1. Euler’s elastic problem [2] with

$$U = U_E = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1\}, \quad f = f_E = \frac{u_2^2}{2}.$$

2. Markov-Dubins car [3,4] with

$$U = U_{MD} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1, |u_2| \leq 1\}, \quad f = 1.$$

3. Reeds-Shepp car [5] with

$$U = U_{RS} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}, \quad f = 1.$$

4. sub-Riemannian problem on the group of Euclidean motions of 2-dimensional plane [6] with

$$U = \mathbb{R}^2, \quad f = f_{SR} = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}.$$

⁶²This work was supported by the RFBR grants No 19-31-51023.

References

- [1] A.A. Ardentov, L.V. Lokutsievskiy, Yu.L. Sachkov, Explicit solutions for a series of classical optimization problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, <http://arxiv.org/abs/2004.10194>.
- [2] Euler, L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausanne: Bousquet, 1744.
- [3] Markov, A.A., Some examples of the solution of a special kind of problem on greatest and least quantities, *Soobshch. Kharkovsk. Mat. Obshch.*, 1887, vol. 1, pp. 250–276 (in Russian).
- [4] Dubins L.E., On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents, *American Journal of Mathematics*, 1957, Vol. 79, No. 3, pp. 497–516.
- [5] Reeds, J.A. and Shepp, L.A., Optimal Paths for a Car That Goes Both Forwards and Backwards, *Pacific J. Math.*, 1990, Vol. 145, No. 2, pp. 367–393.
- [6] Sachkov Yu.L., Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2011, 17, 293–321.
- [7] L.V. Lokutsievskiy, Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry. *SB MATH*, 210:8, 2019, p. 120–148, <http://dx.doi.org/10.1070/SM9134>, <http://arxiv.org/abs/1807.08155>

ON THE REGULARITY OF WEAK SOLUTIONS TO NONDIAGONAL ELLIPTIC SYSTEMS WITH COMPOSITE BOUNDARY CONDITIONS⁶³

Arkhipova A. A. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
arinaark@gmail.com

Grishina G. V. (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
galinavg@yandex.ru, ggrishina@bmstu.ru

We consider a model problem in a half-ball for linear and quasilinear elliptic systems of equations with nondiagonal principal matrices. It is assumed that the components of a solution $u(x) = \{u^k(x)\}^{k \leq N}$, $N > 1$, are interconnected by Dirichlet and Neumann type boundary conditions through some matrix on the planar boundary Γ_1 of the half-ball $B_1^+ = B_1 \cap \{x_n > 0\} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) &= -\operatorname{div} F(x) + f(x), \quad x \in B_1^+, \\ u'(x) - b(x)u''(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1; \\ b^*(x)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a}\right)' + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a}\right)'' &= -(b^*(x)F'(x) + F''(x)), \quad x \in \Gamma_1. \end{aligned}$$

Here, $u' = \{u^k\}^{1 \leq k \leq m}$, $u'' = \{u^k\}^{m+1 \leq k \leq N}$, where $0 \leq m \leq N$ is a fixed number; the elliptic operator of the system is defined by

$$\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u(x)) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta \leq n; l \leq N} (a_{kl}^{\alpha\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l)_{x_\alpha} \right\}_{k \leq N},$$

the conormal derivative vector has the form $\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a} = \left(\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)', \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' \right)$, where

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)' &= - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{k \leq m}, \\ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' &= - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{m+1 \leq k \leq N}; \end{aligned}$$

⁶³The work of both authors is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-01-00630 a).

$b(x)$ is the $[m \times (N - m)]$ -matrix, $b^*(x)$ is the transpose of $b(x)$.

The classical Dirichlet and Neumann conditions are particular cases of this problem. We prove the Hölder continuity of weak solutions for the *linear* systems in a neighborhood of Γ_1 . For the *quasilinear* systems we prove the partial regularity of weak solutions. More exactly, we show that in this case a weak solution is Hölder continuous on the set $(B_1^+ \cup \Gamma_1) \setminus \Sigma$, where the admissible closed singular set Σ has zero Hausdorff measure $\mathcal{H}_{n-p}(\Sigma) = 0$, $p > 2$. We emphasize that the C^α -regularity of weak solutions is proved under optimal requirements on the smoothness of the matrix a and functions F, f . The result is valid for all constant $[m \times (N - m)]$ matrices b , and we assume some smallness of $\|\nabla b\|_{\infty, B_1^+}$ if $b = b(x)$.

We use our modification of the known method of A -harmonic approximations and call it "the method of (A, b) -harmonic approximations".

The difficulty arising in the proof of the main results is that the set of admissible functions for the integral identity depends on the matrix $b(x)$. However, all considerations are simplified if the matrix b is the constant one. The method developed in this work can be applied to the boundary value problem for more general linear and quasilinear systems with composite boundary conditions.

References

- [1] Arkhipova A. A., Grishina G. V. *Regularity of weak solutions to nondiagonal elliptic systems with composite boundary conditions*. Journal of Math. Sci. (NY) 2020. Vol. 247, No. 6.

ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A RISK ZONE

Aseev S. M. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

aseev@mi-ras.ru

We consider an optimal control problem with a mixed functional and free stopping time. Dynamics of the system is given by means of a differential inclusion. The integral term of the functional involves the characteristic function of a given open set $M \subset R^n$ which can be interpreted as a "risk" or "dangerous" zone. The presence of such unfavorable set M is usually modeled in optimal control via introducing an additional state constraint $Z = R^n \setminus M$ ("safety zone") in the problem. Substantially, the state constraint implies the ban on the presence of admissible trajectories in the risk zone M . In our set up of the problem the presence of admissible trajectories in the set M is not prohibited but penalized with extra costs. This fact results in a discontinuity in the state variable in the integral term of the functional.

We study relationships between our problem and the problem with state constraints. Then we discuss the recently developed necessary conditions for optimality for the problem under consideration (see [1,2]). An illustrative example is presented as well.

References

- [1] Aseev S.M. On an optimal control problem with discontinuous integrand. // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2018. Vol. 24. No. 1. P. 15–26.
- [2] Aseev S.M. An optimal control problem with a risk zone // Large-Scale Scientific Computing, 11th International Conference, LSSC 2017, Sozopol, Bulgari, June 5-9, 2017. Lecture Notes in Comput. Sci., 10665, Springer, Cham, 2018. P. 185-192.

ON UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO
SECOND-ORDER EMDEN–FOWLER TYPE EQUATIONS
WITH GENERAL POWER-LAW NONLINEARITY⁶⁴

Astashova I. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
Plekhanov Russian University of Economics
ast.diffiety@gmail.com

Consider the equation

$$y'' = p(x, y, y') |y|_{\pm}^{k_0} |y'|_{\pm}^{k_1}, \quad (1)$$

where $|a|_{\pm}^b$ denotes $|a|^b \operatorname{sgn} a$ and a positive continuous function p is locally Lipschitz continuous in the last two parameters. The real constants k_0 and k_1 are supposed positive.

Our purpose is to know whether or not equation (1) has a unique solution defined in a neighborhood of 0 and satisfying the initial conditions

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (2)$$

Theorem 1. *Suppose $k_0 \in (0; 1)$, $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$. Then in a neighborhood of 0 equation (1) has a unique solution satisfying (2).*

Theorem 2. *Suppose $k_1 \in (0; 1)$, $y_0 \neq 0$, $y_1 = 0$. Then equation (1) has at least two solutions satisfying (2) and differing at points arbitrarily close to 0.*

Theorem 3. *Suppose $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 > 1$, $y_0 = y_1 = 0$. Then in a neighborhood of 0 equation (1) has a unique solution satisfying (2).*

Theorem 4. *Suppose $k_0, k_1, k_0 + k_1 \in (0; 1)$, $y_0 = y_1 = 0$. Then in a neighborhood of 0 equation (1) has at least two solutions satisfying (2) and differing at points arbitrarily close to 0.*

The above results can be summarized in the following table.

	00	Y0	0Y	YY
$k_0 \geq 1, k_1 \geq 1$	U	U	U	U
$k_0 < 1, k_1 \geq 1$	U:Th3	U	U:Th1	U
$k_0 \geq 1, k_1 < 1$	U:Th3	N:Th2	U	U
$k_0 < 1, k_1 < 1$ $k_0 + k_1 \geq 1$	U:Th3	N:Th2	U:Th1	U
$k_0 + k_1 < 1$	N:Th4	N:Th2	U:Th1	U

The first column of the table contains conditions on k_j , $j = 0, 1$.

The first row contains initial data, $y(0), y'(0)$, with Y denoting any non-zero value. Two or more letters Y do not mean that the related non-zero values must be equal.

In the main part of the table, "U" denotes the uniqueness of solutions to (1), (2) under the related conditions. "N" denotes non-uniqueness. These labels are followed by references to the theorems describing the case. If not, then the classical existence and uniqueness theorem is implied.

Remark. Asymptotic behavior of unbounded solutions to equation (1) with additional conditions

$$0 < p_* \leq p(x, u, v) \leq p^* < \infty, \quad \text{for some } p_*, p^* \in \mathbb{R} \text{ and all } (x, u, v) \in \mathbb{R}^3,$$

is obtained in [1]. Asymptotic behavior of the first derivatives of bounded solutions is described in [2].

References

- [1] Korchemkina T.A. Asymptotic behavior of unbounded solutions of second-order differential equations with general nonlinearities // Journal of Mathematical Sciences, 2019. Vol. 244, no. 2, P. 267–277.

⁶⁴This work was partially supported by RSF, grant 20-11-20272.

- [2] Korchemkina T.A. On asymptotic behavior of bounded solutions to second order differential equation with general power-law nonlinearity. // Differential equations. 2019. V. 55, no 11, P. 1583–1584.[In Russian]

ON ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF STABILITY BOUNDARIES
FOR MEISSNER EQUATION⁶⁵

Belyakov A. O. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
belyakov@mse-msu.ru

Seyranian A. P. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
seyran@imec.msu.ru

We compare approximate expressions for stability boundaries obtained by the algorithm in [1] with the exact stability domains of the Meissner equation with dissipation

$$\ddot{\varphi} + g\dot{\varphi} + (\nu + a \operatorname{sign}(\cos(2\pi t))) \varphi = 0, \quad (1)$$

where $a \geq 0$ is the excitation amplitude and g is the dissipation coefficient. To study stability of (1) we write the standard form system $\dot{x}(t) = \mathbf{J}(t)x(t)$, with vector $x(t)$ corresponding to the perturbation of vector $(\varphi(t), s(t))'$ and $\mathbf{J}(t)$ being the piece-wise constant matrix of the original system: $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}^-$ if $t \in [0, 1/2)$ and $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}^+$ if $t \in [1/2, 1)$, where $\mathbf{J}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu + a & -g \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu - a & -g \end{pmatrix}$. Solution of the matrix differential equation $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$ with the initial value being the identity matrix $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ yields the *monodromy matrix* as $\mathbf{F} = \mathbf{X}(1)$. The eigenvalues of the monodromy matrix, *Floquet multipliers*, determine the stability of the solution of the linear system. We have the following explicit expression of the monodromy matrix via matrix exponents $\mathbf{F} = \exp(\frac{1}{2} \mathbf{J}^-) \cdot \exp(\frac{1}{2} \mathbf{J}^+)$. Since $\mathbf{F}$ is the 2×2 matrix its eigenvalues can be found analytically as roots ρ_1 and ρ_2 of the characteristic polynomial $\rho^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{F})\rho + \det(\mathbf{F}) = 0$. Stability conditions ($|\rho_1| \leq 1$ and $|\rho_2| \leq 1$) for simple ($\rho_1 \neq \rho_2$) eigenvalues written in the case of real roots as $\rho \in [-1, 1]$ and in the case of complex conjugate roots as $\rho_1 \rho_2 \leq 1$ take the form $|\operatorname{tr}(\mathbf{F})| - 1 \leq \det(\mathbf{F})$ and $\det(\mathbf{F}) \leq 1$, where for asymptotic stability all inequalities should be strict. For instability, it is sufficient that at least one of the conditions in is violated. So with constant positive damping coefficient, $\det(\mathbf{F}) = e^{-g} < 1$, asymptotic stability can only be lost when $|\operatorname{tr}(\mathbf{F})| - 1 > e^{-g}$. Exact stability borders in the space of parameters (ν, a, g) are defined by the following equality

$$\left| \operatorname{tr} \left(\exp \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu - a & -g \end{pmatrix} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu + a & -g \end{pmatrix} \right] \right) \right| - 1 = e^{-g},$$

see gray areas in (ν, a) for $g = 0$ in the Figure. To find approximate boundaries (see lines in the

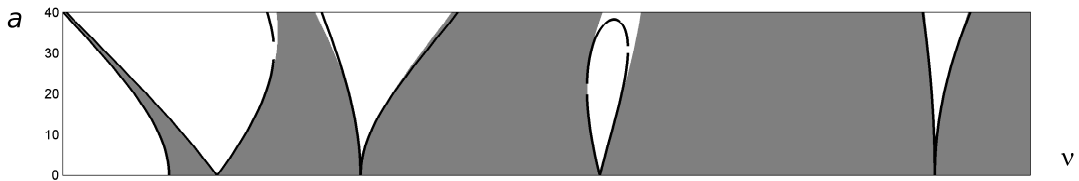


Figure) of the forth order we assume that there exists a constant matrix $\mathbf{J}_0$ such that the difference $\mathbf{J}(t) - \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_1(t) + \mathbf{J}_2(t)$ is small, where lower index denotes the order of smallness. We expand matrix $\mathbf{J}^\pm = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1^\pm + \mathbf{J}_2$ about zones $k = 0, 1, 2, 3, 4$, where

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\pi k)^2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_1^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\pi k)^2 - \nu \pm a & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}, \quad (2)$$

⁶⁵This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant number 18-010-01169).

assuming that a^2 , $((\pi k)^2 - \nu)^2$, and g have the same order of smallness. The change of variables $\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{J}_0 t) \cdot \mathbf{Y}(t)$ converts matrix differential equation $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$ into the form: $\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{Y}(t)$, where matrix $\mathbf{H}(t) := \exp(-\mathbf{J}_0 t) \cdot (\mathbf{J}(t) - \mathbf{J}_0) \cdot \exp(\mathbf{J}_0 t)$ is small. Approximate solution $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{U}_1(t) + \mathbf{U}_2(t) + \dots) \cdot \exp(\mathbf{A} t)$, where $\mathbf{U}_j(t)$ are 1-periodic matrix-functions, such that $\mathbf{U}_j(0) = \mathbf{U}_j(1) = 0$, yields approximate expression for monodromy matrix $\mathbf{F} = \mathbf{X}(1) = \exp(\mathbf{J}_0) \cdot \mathbf{Y}(1) = \exp(\mathbf{J}_0) \cdot \exp(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots)$. Constant matrices $\mathbf{A}_j$ and matrix-functions $\mathbf{U}_j(t)$ can be found one by one via the following standard procedure of averaging. In the first order we have $\mathbf{A}_1 = \int_0^1 \mathbf{H}_1(t) dt = \int_0^1 \exp(-\mathbf{J}_0 t) \cdot \mathbf{J}_1(t) \cdot \exp(\mathbf{J}_0 t) dt$. For the second order approximation we have to calculate first $\mathbf{U}_1(t) = \int_0^t (\mathbf{H}_1(\tau) - \mathbf{A}_1) d\tau$, and then $\mathbf{A}_2 = \int_0^1 (\mathbf{H}_2(t) + \mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{U}_1(t) - \mathbf{U}_1(t) \cdot \mathbf{A}_1) dt$. For the $n+1$ -th order $\mathbf{U}_n(t) = \int_0^t (\mathbf{H}_n(\tau) - \mathbf{A}_n + [\mathbf{H}_{n-1}(\tau) \cdot \mathbf{U}_1(\tau) - \mathbf{U}_1(\tau) \cdot \mathbf{A}_{n-1}] + \dots + [\mathbf{H}_1(\tau) \cdot \mathbf{U}_{n-1}(\tau) - \mathbf{U}_{n-1}(\tau) \cdot \mathbf{A}_1]) d\tau$, and $\mathbf{A}_{n+1} = \int_0^1 (\mathbf{H}_{n+1}(t) + [\mathbf{H}_n(t) \cdot \mathbf{U}_1(t) - \mathbf{U}_1(t) \cdot \mathbf{A}_n] + \dots + [\mathbf{H}_1(t) \cdot \mathbf{U}_n(t) - \mathbf{U}_n(t) \cdot \mathbf{A}_1]) dt$.

References

- [1] Belyakov A. O., Seyranian A. P. Stability boundary approximation of periodic dynamics. In *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*, pages 13–23. Springer International Publishing Cham, 2020.

SECOND-ORDER DERIVATIVE OF DOMAIN-DEPENDENT FUNCTIONALS ALONG NEHARI MANIFOLD TRAJECTORIES⁶⁶

Bobkov V. (Czech Republic, Plzen)

University of West Bohemia

bobkov@kma.zcu.cz

Kolonitskii S. (Russia, Saint-Petersburg)

Saint-Petersburg State Electrotechnical University “LETI”

sergey.kolonitskii@gmail.com

Assume that a family of domain-dependent functionals E_{Ω_t} possesses a corresponding family of least energy critical points u_t which can be found as (possibly nonunique) minimizers of E_{Ω_t} over the associated Nehari manifold $\mathcal{N}(\Omega_t)$. We obtain a formula for the second-order derivative of E_{Ω_t} with respect to t along Nehari manifold trajectories of the form $\alpha_t(u_0(\Phi_t^{-1}(y)) + tv(\Phi_t^{-1}(y)))$, $y \in \Omega_t$, where Φ_t is a diffeomorphism such that $\Phi_t(\Omega_0) = \Omega_t$, $\alpha_t \in \mathbb{R}$ is a $\mathcal{N}(\Omega_t)$ -normalization coefficient, and v is a corrector function whose choice is fairly general. Since $E_{\Omega_t}[u_t]$ is not necessarily twice differentiable with respect to t due to the possible nonuniqueness of u_t , the obtained formula represents an upper bound for corresponding finite differences, thereby providing a convenient way to study various domain optimization problems related to E_{Ω_t} . An analogous formula is also obtained for the first eigenvalue of the p -Laplacian. As an application of our results, we investigate the behaviour of the first eigenvalue of the Laplacian with respect to particular perturbations of rectangles.

⁶⁶The research was supported by RFBR (RFFI) Project 20-01-00630.

DYNAMICAL SYSTEMS ON TORUS WITH MÖBIUS POINCARÉ MAPS
AND A MODEL OF JOSEPHSON FUNCTION⁶⁷

Buchstaber V. (Russia, Moscow and Mendeleevo)

Steklov Mathematical Institute. All-Russian Scientific Research Institute
for Physical and Radio-Technical Measurements (VNIIFTRI)

buchstab@mi.ras.ru

Glutsyuk A. (France, Lyon)

Ecole Normale Supérieure de Lyon and Interdisciplinary Center J.-V.Poncelet,
National Research University Higher School of Economics, (Russian, Moscow)

aglutsyu@ens-lyon.fr

Tertychnyi S. (Russia, Mendeleevo)

All-Russian Scientific Research Institute
for Physical and Radio-Technical Measurements (VNIIFTRI)

bpt97bpt97@gmail.com

In 1973 B. Josephson received Nobel Prize for discovering a new fundamental effect in superconductivity concerning a system of two superconductors separated by a very narrow dielectric (this system is called the *Josephson junction*): there could exist a supercurrent tunneling through this junction. We will discuss the reduction of the overdamped Josephson junction to a family of first order non-linear ordinary differential equation that defines a family of dynamical systems on two-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}_{\phi, \tau}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{1}{\omega}(-\sin \phi + B + A \cos \tau) \\ \dot{\tau} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Physical problems of the Josephson junction led to studying the rotation number of system (1) as a function of the parameters (B, A) with fixed ω and to the problem on the geometric description of the *phase-lock areas*: the level sets of the rotation number function ρ with non-empty interiors. The rotation number has interpretation as average voltage over a long time interval (up to known constant) at the Josephson junction. In our case the phase-lock areas exist only for integer rotation numbers (quantization effect [1]). Each phase-lock area is a connected garland of a countable number of components going to infinity in the direction parallel to the A -axis [7]. Any two neighbor components are separated by one point, which is called *constriction* (provided it does not lie in the abscissa axis). On the complement to the phase-lock areas, which is an open set, the rotation number function ρ is an *analytic submersion* that induces its fibration by analytic curves [4]. There is a conjecture (confirmed numerically, with partial theoretic results [5, 6]) stating that in each phase-lock area with rotation number r all the constrictions lie on the same vertical line $\{B = r\omega\}$.

It appears that the dynamical systems (1) on torus can be complexified to Riccati equations and thus, have *Möbius Poincaré maps*. These Riccati equations are projectivizations of linear systems on the Riemann sphere with two irregular nonresonant singular points $0, \infty$ of Poincaré rank 1. The latter linear systems are equivalent to a subfamily of the well-known class of *double confluent Heun equations* [1, 2, 3].

In the present talk we discuss the above-mentioned results and a new approach to problems on constrictions. It consists of studying a larger family of dynamical systems on torus, which includes (1), with Möbius Poincaré maps and with an $SU(1, 1)$ action, and studying deformations of constrictions in this larger family.

References

- [1] Buchstaber V.M.; Karpov O.V.; Tertychnyi S.I. // TMP, 2010, Vol. 162, No. 2, P. 211–221.
- [2] Buchstaber V.M.; Tertychnyi S.I. // TMP, 2013, Vol. 176, No. 2, P. 965–986.
- [3] Buchstaber V.M.; Tertychnyi S.I. // TMP, 2015, Vol. 182, No. 3, P. 329–355.

⁶⁷Research of Victor Buchstaber and Sergei Tertychnyi is supported by RFBR grant No 17-01-0019. Research of Alexey Glutsyuk is supported by RSF grant No 18-41-05003.

- [4] Buchstaber V.M; Glutsyuk A.A. // Pr. Stekl. Inst. Math., 2017, Vol. 297, P. 50–89.
- [5] Glutsyuk A.A.; Kleptsyn V.A.; Filimonov D.A.; Schurov, I.V. // Funct. Analysis and Appl., 2014, Vol. 48, No. 4, P. 272–285.
- [6] Glutsyuk A. // J. Dyn. Control Syst., 2019, Vol. 25, No. 3, P. 323–349.
- [7] Klimenko A.V.; Romaskevich O.L. // Mosc. Math. J., 2014, Vol. 14, No. 2, P. 367–384.

EXISTENCE OF OPTIMAL STATIONARY STATE OF EXPLOITED POPULATION WITH DIFFUSION⁶⁸

Davydov A. A. (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University and
National University of Science and Technology "MISiS"
davydov@mi-ras.ru

We study the dynamics of a population with diffusion, delivered by an analog of the Kolmogorov-Piskunov-Petrovsky-Fisher equation [1] in the presence of exploitation. The population is distributed on the circle and its exploitation is in permanent subtraction of a part of its density.

Under natural restrictions on the model parameters, the existence of a stable stationary state of the population that provides the better time averaged profit has been proved. That generalizes in some sense the respective results for the case without diffusion, which were obtained in [2].

References

- [1] Berestycki H., Francois H., Roques L., Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence//Journal of Mathematical Biology, 2005, 51(1):75-113.
- [2] Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M., Optimal cyclic exploitation of renewable resources// J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494.

NEW EXAMPLES ON LAVRIENTIEVS PHENOMENON USING FRACTAL CONTACT SETS⁶⁹

Diening L. (Germany, Bielefeld)

Bielefeld Unievrstity
diening@uni-bielefeld.de

Kh.Balci A. (Russia, Valdimir)

Valdimir State University, Bielefeld University
anngremlin@gmail.com

Surnachev M. (Russia, Moscow)

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
peitsche@yandex.ru

We construct new examples on Lavrentiev phenomenon using fractal contact sets. Comparing to the well-known examples of Zhikov it is not important that at the saddle point the variable exponent crosses the threshold dimension. As a consequence we give the negative answer to the well-known conjecture that the dimension plays a critical role for the Lavrentiev gap to appear. We apply our method to the setting of variable exponents, the double phase potential and weighted p -energy. The talk is based on joint work with Lars Diening and Mikhail Surnachev.

⁶⁸The research was supported by the Russian Science Foundation grant 19-11-00223.

⁶⁹The research of Anna Kh.Balci was partly supported by RFBR (RFFI) Project 19-01-00184.

LAGRANGIAN MANIFOLDS AND A CONSTRUCTIVE “NAIVE” METHOD COMPUTATION OF THE WAVE FIELDS ASYMPTOTICS IN THE NEIGHBORHOOD OF A CAUSTICS⁷⁰

Dobrokhoto S. Yu. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for problems in Mechanics RAS

Moscow Institute of Physics and Technology

s.dobrokhoto@gmail.com

Lagrangian manifolds Λ are n -dimensional geometric objects in a $2n$ -dimensional phase spaces $R_{p,x}^{2n}$ with coordinates $p = (p_1, \dots, p_n), x = (x_1, \dots, x_n)$, which serve as the basis for constructing asymptotics of fast-changing solutions of many linear differential and pseudodifferential equations. The corresponding asymptotic solution (wave field or wave function) is reconstructed using the canonical Maslov operator on Λ and the amplitude on Λ . Singularities of projection of Λ the configuration space R_x^n are called caustics (a set of focal points) and, in the most general case, Lagrangian singularities. From a physical point of view, the behavior of the solution is most interesting in the vicinity of caustics, since the amplitude increases sharply here. Until recently, the Lagrangian manifolds used in various problems (for example, in scattering problems, about the asymptotic Green function, about asymptotic eigenfunctions) were generally assumed to be smooth, although, perhaps not compact. Recently S.Dobrokhoto, V. Nazaykinskii, A.Shafarevich and their co-authors showed that non-smooth (“singular”) Lagrangian manifolds appear in many “non-exotic problems and they can have a boundary. Such problems include, for example, evolutionary problems with spatially localized initial conditions, problems with coefficients that degenerate on the boundary of the domain, etc. Asymptotic solutions associated with such manifolds are constructed using the canonical Maslov operator, but in a modified form. It is natural to call the singularities and boundaries of such manifolds “non-standard” caustics (or Lagrangian singularities). The canonical Maslov operator and its modifications represent the wave field asymptotics in the vicinity of Lagrangian singularities in the form of fast oscillating integrals, which are sometimes implemented as special functions of a complex argument.

In the “general position Lagrangian singularities have dimension $n - 1$ and their sufficiently complete classification in the smooth case with an indication of the order of amplitude for a small parameter that characterizes the frequency of wave field oscillations is given by V.Arnold, A.Varchenko, and S.Gusein-Zade. Situations with Lagrangian manifolds of "nongeneral position" also often occur in real physical problems. Conventionally, they can be divided into two groups: the first, when the projection Λ on the configuration space R_x^n has a dimension strictly smaller than n (this situation - “with strong non-standard caustics” - occurs in problems about localized solutions) and the second one, when the projection of Λ on R_x^n has dimension n , but the dimension of Lagrangian singularities strictly less than $n - 1$ (for example, this situation is realized in the case of cylindrical functions). The structure of asymptotic solutions in such cases belongs to the first set of questions discussed in the talk.

The second set of questions is how to construct effective formulas in the vicinity of standard and non-standard caustics of the "general position" in the form of special functions of a complex argument. Our main observation can be formulated as the following "principle". 1) *in the caustic neighborhood, with rare exceptions, asymptotic formulas are written in parametric form, and the appropriate parameters in such a representation are the coordinates on the Lagrangian manifold.* 2) *the "Normal forms" of Lagrangian singularities define a special function that specifies an ansatz for the wave field in the vicinity of caustics, and the complex arguments and amplitudes of this ansatz are expressed in terms of (multi-valued) phases, amplitudes, and Jacobians of the projection on Λ and are determined using just asymptotics of special functions and algebraic calculations.* The above is illustrated by examples for the Schrödinger type equations and equation of the water waves theory.

The talk is prepared on the basis of joint work with A. Anikin, V. Nazaykinsky, and A. Tolchennikov.

⁷⁰This work was supported by the state programm AAAA-A20-120011690131-7, the RNF grant (16-11-10282) and the RFBR grants (17-01-00644, 17-51-150006).

LARGE-TIME BEHAVIOR OF AN INFINITE CHAIN OF HARMONIC OSCILLATORS WITH DEFECTS⁷¹

Dudnikova T. V. (Russia, Moscow)
Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
tdudnikov@mail.ru

We consider a Hamiltonian infinite system of particles having harmonic nearest-neighbor interactions with the Hamiltonian functional of a form

$$\mathbf{H}(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{v_n^2}{m_n} + \gamma_n (u_{n+1} - u_n)^2 + \mu_n u_n^2 \right), \quad \text{where } m_n, \gamma_n > 0, \mu_n \geq 0.$$

We assume that some particles (so-called “defects”) in the chain have masses (m_n) and force constants of interaction (γ_n) different from the masses and the interaction constants of the other particles. Namely, we fix some $N \geq 0$ and assume that particles located at points $n \geq N+1$ and $n \leq -1$ have the same mass $m_n = m_+ > 0$ and $m_n = m_- > 0$, respectively. Furthermore, particles are affected by the same external harmonic forces with constants $\mu_n = \mu_+ \geq 0$ for $n \geq N+1$ and $\mu_n = \mu_- \geq 0$ for $n \leq -1$. The force constants of interaction are of a form $\gamma_n = \gamma_-$ for $n \leq -1$, $\gamma_n = \gamma_+$ for $n \geq N$. The particles (“defects”) located at the points $n = 0, 1, \dots, N$ have constants m_n, μ_n, γ_n , generally speaking, different from $m_{\pm}, \mu_{\pm}, \gamma_{\pm}$. Then, the displacement of the n -th particle ($u_n(t)$) from its equilibrium position obeys the following equations:

$$\left. \begin{aligned} m_- \ddot{u}_n(t) &= (\gamma_- \Delta_L - \mu_-) u_n(t), & n \leq -1, \quad t \in \mathbb{R} \\ m_n \ddot{u}_n(t) &= \gamma_n \nabla_L u_n(t) - \gamma_{n-1} \nabla_L u_{n-1}(t) - \mu_n u_n(t), & n = 0, 1, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R} \\ m_+ \ddot{u}_n(t) &= (\gamma_+ \Delta_L - \mu_+) u_n(t), & n \geq N+1, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \right| \quad (1)$$

Here $u_n(t) \in \mathbb{R}$, $\nabla_L u_n := u_{n+1} - u_n$, $\Delta_L u_n := u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. For system (1), we study the Cauchy problem with the initial data

$$u_n(0) = u_n^0, \quad v_n(0) = m_n \dot{u}_n(0) = v_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

We assume that the initial data $Y^0 = (u^0, v^0)$ belong to the Hilbert space $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definition. $\mathcal{H}_\alpha = \ell_\alpha^2 \otimes \ell_\alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, is the Hilbert space of pairs $Y = (u, v)$ of sequences equipped with norm $\|Y\|_\alpha^2 = \|u\|_\alpha^2 + \|v\|_\alpha^2 < \infty$. Here $\ell_\alpha^2 \equiv \ell_\alpha^2(\mathbb{Z})$ is the Hilbert space of sequences $u = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ with norm $\|u\|_\alpha^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2\alpha} |u_n|^2 < \infty$, $\langle n \rangle := (1 + n^2)^{1/2}$.

On the coefficients of the system we impose some conditions, in particular, we assume that if $\mu_- = \mu_+ = 0$, then $\mu_n \neq 0$ for some $n \in \{0, 1, \dots, N\}$. Denote $Y(t) = (u(t), v(t))$ with $u(t) = \{u_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$, $v(t) = \{m_n \dot{u}_n(t)\}$. The main result is the following theorem.

Theorem (see [1]). *Let $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 3/2$. Then the solution $Y(t)$ to the Cauchy problem (1), (2) obeys the bound $\|Y(t)\|_{-\alpha} \leq C \langle t \rangle^{-3/2} \|Y_0\|_\alpha$, $t \in \mathbb{R}$. There is a linear operator $\Omega : \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{-\alpha}$ such that $Y(t) = \Omega(Y_0(t)) + r(t)$, where $Y_0(t)$ is a solution to system (1) for $n \leq -1$ and $n \geq N+1$ and $Y_0(t) = 0$ otherwise, $\|r(t)\|_{-\alpha} \leq C \langle t \rangle^{-3/2} \|Y^0\|_\alpha$.*

For the solutions of the linear discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations, the dispersive estimates were obtained by Shaban and Vainberg [2], by Komech, Kopylova and Kunze [3] and by Pelinovsky and Stefanov [4]. In [5], the model similar to (1) was studied on the half-line and the long time asymptotics of the solutions are constructed. In [6], the results were obtained in the particular case when $N = 0$.

References

- [1] Dudnikova T. V. Behavior for large time of an infinite chain of harmonic oscillators with defects // Arxiv:1909.06764 [math-ph] 15 Sep. 2019.
- [2] Shaban W., Vainberg B. R. Radiation conditions for the difference Schrödinger operators // Applicable Anal. 2001. Vol. 80. P. 525–556.

⁷¹This work was supported partly by the research grant of RFBR (grant no.18-01-00524)

- [3] Komech A. I., Kopylova E. A., Kunze M. Dispersive estimates for 1D discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations // *Applicable Anal.* 2006. Vol. 85. No 12. P. 1487–1508.
- [4] Pelinosky D. E., Stefanov A. On the spectral theory and dispersive estimates for a discrete Schrödinger equation in one dimension // *J. Math. Phys.* 2008. Vol. 49. No 11. P. 113501.
- [5] Dudnikova T. V. Large-time behavior of the infinite system of harmonic oscillators on the half-line // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2018. Vol. 301. P. 82–97.
- [6] Dudnikova T. V. Behavior for large time of a two-component chain of harmonic oscillators // *Russian J. Math. Phys.* 2018. Vol. 25. No 4. P. 470–491.

THE ACCOUNTING OF ILLIQUIDITY AND TRANSACTION COSTS DURING THE DELTA HEDGING⁷²

Dyshaev M. M. (Russia, Chelyabinsk)

Research Laboratory of Financial Modeling, Chelyabinsk State University

Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Fedorov V. E. (Russia, Chelyabinsk)

Department of Mathematical Analysis, Chelyabinsk State University

kar@csu.ru

The classical model of F. Black and M. Scholes [1]

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad (1)$$

for the option price u does not include accounting for the transactional cost and the cost of illiquidity in the limit order book. Here the price of the underlying asset $x \geq 0$ varies in the time interval $t \in [0, T]$, $r \geq 0$ is the risk-free interest rate, and σ is the historical volatility (the standard deviation) of the price of the underlying asset.

Using the approach of L. C. G. Rogers and S. Singh [2] for the estimation of the illiquidity, we added accounting the cost of illiquidity to the model with the risk adjusted pricing methodology (RAPM), generalized by M. Jandačka and D. Ševčovič [3]. This model minimizes the risk of the transaction costs growth from the frequent delta hedging, and reduces the risk of the portfolio value changes (the hedging error) due to rare rebalances.

After this, Black — Scholes equation (1) has the form

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(u - xu_x) = 0, \quad (2)$$

where $q = 3((k + \varepsilon)^2 R / 2\pi)^{1/3}$, $R \geq 0$ is the risk premium coefficient. The transaction cost is $k = \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x} = 2 \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x_{\text{ask}} + x_{\text{bid}}}$, and x_{ask} and x_{bid} are the best prices in the limit order book. ε is a small parameter of the cost of illiquidity in the limit order book.

Figure 1 present difference between the price of the options combination "long butterfly" in the Black — Scholes model (BSM, equation (1)) and in the Jandačka — Ševčovič model with accounting the illiquidity as in the model of Rogers — Singh (JSRS, equation (2)). This result was obtained by numerical methods presented in [4] with following parameters: $q = 0.2$, $k = 0.01$, $r = 0$ and $\varepsilon = 0.006$.

References

- [1] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *J. of Political Economy.* 1973. Vol. 81, no. 3. P. 637–654.
- [2] Rogers L. C. G., Singh S. The cost of illiquidity and its effects on hedging // *Math. Finance.* 2010. Vol. 20, no. 4. P. 597–615.
- [3] Jandačka M., Ševčovič D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile // *J. of Appl. Math.* 2005. Vol. 2005, no. 3. P. 235–258.
- [4] Dyshaev M. M., Fedorov V. E. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity // *Math. notes of NEFU.* 2019. Vol. 26, no. 2. P. 94–108.

⁷²The reported study was funded by RFBR according to the research project № 19-01-00244

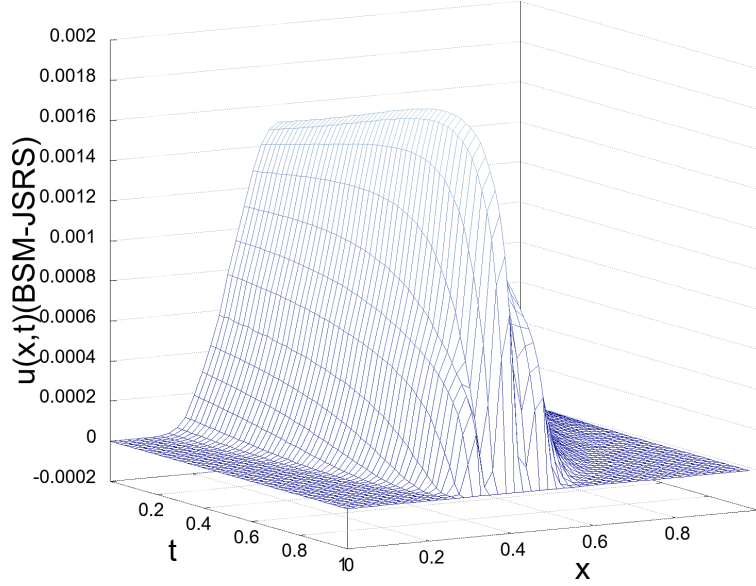


Fig. 1: The difference between the price of the options combination "long butterfly" in the Black — Scholes model (BSM) and in the model with accounting the transaction cost and the illiquidity (JSRS)

DENSITY OF THIN FILM PLANAR BILLIARD REFLECTION PSEUDOGROUP IN HAMILTONIAN SYMPLECTOMORPHISM PSEUDOGROUP⁷³

Glutsyuk A. (France, Russia)

CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon and Interdisciplinary Center J.-V.Poncelet (Lyon, France)

National Research University Higher School of Economics, Russian Federation (Moscow, Russia)

aglutsyuens-lyon.fr

Reflections from planar curves act by symplectomorphisms on the space of oriented lines with respect to the canonical symplectic form. This is a general statement, which holds for billiards in Riemannian manifolds with reflection acting on the space of oriented geodesics. However only a tiny part of symplectomorphisms can be realized by reflections. There is an important open question stated in [3]: which symplectomorphisms can be realized by compositions of reflections?

We consider an arbitrary planar curve γ that is either a germ, or a strictly convex closed curve. In the case of a germ we show that reflections from its small deformations and their inverse transformations generate a pseudogroup that is dense in the pseudogroup of symplectomorphisms between simply connected subdomains of an appropriate domain in the space of oriented lines. In the case of a global strictly convex closed curve we prove a similar density statement in the pseudogroup of Hamiltonian diffeomorphisms between subdomains of the phase cylinder: the space of oriented lines intersecting the given curve transversally.

Earlier Ron Perline [2] studied compositional difference of reflections from the curve γ and from its deformation, which is defined by a function h on γ . He had shown that the derivative of the compositional difference in the deformation parameter is a Hamiltonian vector field. He found an explicit formula for its Hamiltonian function in terms of the curve γ and the function h . Our work is based on the latter Perline's formula and on studying the Lie algebra generated by the above Hamiltonian functions.

References

- [1] Glutsyuk A. Density of thin film planar billiard reflection pseudogroup in Hamiltonian symplectomorphism pseudogroup // <https://arxiv.org/abs/2005.02657>
- [2] Perline R. Geometry of Thin Films // J. Nonlin. Science. 2019. Vol. 29. P.621–642.

⁷³The author is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No 075-15-2019-1931. He is also partially supported by RFBR and JSPS (research project 19-51-50005).

- [3] Plakhov A.; Tabachnikov S.; Treschev D. Billiard transformations of parallel flows: A periscope theorem
// J. Geom. Phys. 2017. Vol. 115. No 5. P.157–166.

TANGENTIAL AND NORMAL MAPS TO FRONTS

Ishikawa G. (Japan, Sapporo)

Faculty of Science, Department of Mathematics, Hokkaido University

ishikawa@math.sci.hokudai.ac.jp

A smooth map-germ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ is called a (generalized) *frontal* if there exists a smooth n -plane field $(\mathbb{R}^n, 0) \ni u \mapsto \tilde{f}(u) \subset T_{f(u)}\mathbb{R}^{n+p}$ along f such that $f_*(T_u\mathbb{R}^n) \subseteq \tilde{f}(u)$, i.e., if the « tangent spaces » along f is well-defined even on singular (non-immersive) points of f ([1]). Then the pull-back bundle $f^*(T\mathbb{R}^{n+p})$ is decomposed into the sum $T_f \oplus N_f$ of the *tangent bundle* T_f (of rank n) and the *normal bundle* N_f (of rank p) of f over $(\mathbb{R}^n, 0)$. Then the *tangential map* $\text{Tan}(f) : T_f \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ to f (resp. the *normal map* $\text{Nor}(f) : N_f \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ to f) is defined by $(u, \tau) \mapsto f(u) + \tau$ (resp. $(u, \nu) \mapsto f(u) + \nu$).

Let $\tau_1, \dots, \tau_n$ be a local frame of T_f (resp. $\nu_1, \dots, \nu_p$ of N_f). Then $\text{Tan}(f)$ and $\text{Nor}(f)$ are written as

$$\text{Tan}(f)(u, t_1, \dots, t_n) = f(u) + \sum_{i=1}^n t_i \tau_i, \quad \text{Nor}(f)(u, n_1, \dots, n_p) = f(u) + \sum_{j=1}^p n_j \nu_j,$$

up to the right equivalence.

Normal maps naturally appear in geometric optics and extrinsic differential geometry and so on. Their singularities are called *caustics*. Singularities of normal maps are regarded as «Lagrangian singularities», and they are studied well in Lagrangian singularity theory. Moreover singularities of *parallels* of hypersurfaces and curves are studied via the (restrictions of) normal maps by Legendrian singularity theory as singularities of *wavefronts* ([2]-[4]).

Contrary to normal maps, tangential maps of submanifolds, which are natural subjects as well, have not necessarily Lagrangian singularities, and tangential maps have very degenerate singularities even in generic cases ([5]). For instance, the tangent developables of curves in $\mathbb{R}^3$ are regarded as tangent maps of the curves and there are classification results of singularities appearing on them ([6]).

In this talk, after a brief review of the basic properties of tangential and normal maps to fronts, we provide a report on, in particular, the relation of singularities of parallels of the tangential map to a frontal and those of the tangent maps of parallels to the frontal.

A frontal map-germ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ is called *normally flat* if there exists a parallel orthonormal frame $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ of normal vector fields along f . If f is a hypersurface ($p = 1$) or a curve ($n = 1$) then f is normally flat always. Such a frame is called a *Bishop frame* of f . Then, for $t \in \mathbb{R}^p$, the fronts $\text{Para}_t f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ defined by $\text{Para}_t f(u) := \text{Nor}(f)(u, t)$ are called a *parallels* of f , which have the same normal frame $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$.

Then we answer, at least in the case that f is a curve, the several related basic questions:

1. Is the tangential map $\text{Tan}(f)$ a frontal if f is a frontal ?
2. Is $\text{Tan}(f)$ normally flat if f is normally flat ?
3. Is any parallel $\text{Para}_t f$ of f the normal map for a parallel of f ?

References

- [1] Goo Ishikawa, *Singularities of fronts*, in “Singularities in Generic Geometry Advanced Studies in Pure Mathematics, **78**, Math. Soc. Japan, pp.55-106, (2018).
- [2] V. I. Arnol’d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I*, Birkhäuser (1986),
- [3] V. I. Arnol’d, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Mathematics and its Applications, **62**, Kluwer Academic Publishers (1990).

- [4] S. Izumiya, M.C.R. Fuster, M.A.S. Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. (2015).
- [5] Goo Ishikawa, *Singularities of tangent varieties to curves and surfaces*, Journal of Singularities, **6** (2012), 54–83.
- [6] Goo Ishikawa, *Singularities of developable surfaces*, in “Singularity Theory London Math. Soc. Lecture Notes Series, **263**, pp. 403–418, (1999).

THE ALGORITHM OF BUILDING THE TERMINOLOGICAL GRAPH OF CO-ONTOLOGY

Kanygin G. V. (Russia, St. Petersburg)

Sociological Institute RAS

g.kanygin@gmail.com

Poltinnikova M. S. (Russia, St. Petersburg)

Sociological Institute RAS

maria.poltinnikova@gmail.com

Ontological methods of knowledge management are widely used in information technology. However, there exists a problem of algorithmic linking of concepts. If we are dealing with a context-oriented ontology, description of objects we realize by ordered pairs of concepts (term, context). To define a new concept in a certain context, the author must explain through which he reveals meaning of this new concept. Such explanations generate two-level oriented trees.

A graph E is called *branching* if it is either a separate vertex $p_0 \in P$ (a degenerate case), or a two-level oriented tree with a root vertex $p_0 = (t_x, t_y) \in P$ and leaves $p_1 = (t_{x_1}, t_{y_1}), \dots, p_s = (t_{x_s}, t_{y_s}) \in P$. Consider the set of all concepts $\mathcal{P}$ and the set of all branchings $\mathcal{E}$ defined by the author of ontology. A digraph whose vertices are vertices of the set $\mathcal{P}$, and edges are the edges from the branches of the set $\mathcal{E}$, is called *context-oriented thesaurus* abbreviated *CO-thesaurus*. The CO-thesaurus in conjunction with the algorithms for constructing its various subgraphs is called *CO-ontology*.

We describe the main algorithm of the CO-ontology, namely, the algorithm of constructing *terminological graph* or *T-graph*. The terminological graph is a subgraph of an ontology that begins with some branching. According to the contexts associating rule, other branchings are attached to it, as long as there is something to add. This process is finite if there are no cycles in the terminological graph. The contexts associating rules allow to build different T-graphs from one concept in different contexts.

References

- [1] Kanygin G. V., Poltinnikova M. S. The graph context-oriented ontological methods // Cloud of science 2019. vol. 6. No 2. P. 246-264.

COUPLED ORBIT-ATTITUDE MOTIONS OF THE ROD IN SITNIKOV CIRCULAR THREE-BODY PROBLEM⁷⁴

Krasil'nikov P. S. (Russia, Moscow)

Moscow Aviation Institute (National Research University)

krasil06@rambler.ru

The orbit-attitude dynamics in three body problem have been studied in last time [1],[2]. A review of earlier studies is provided in the article [3]. We are studying the coupled orbit-attitude dynamics of the spacecraft considered as a uniform rod in the gravitational field of a central pair with equal masses orbiting the common barycenter.

⁷⁴This research was financed by the grant 18-01-00820 from the Russian Foundation for Basic Research.

Let m be the mass of the rod, $2l$ be it's length, M be the mass of each primary bodies which orbits are given Keplerian circles with radius a and mean motion ω_0 . Denote by $C_{\xi\eta\zeta}$ a non-moving inertial reference frame, where C is a barycenter of primary bodies, by C_{xyz} a synodic frame. Denote by $O_{\xi'\eta'\zeta'}$ the coordinate system whose origin O is at the center of mass of rod and axes are parallel to those of the $C_{\xi\eta\zeta}$, by $O_{x'y'z'}$ the coordinate system coinciding with the rod's principal axes (we direct the axis $O_{z'}$ along the rod).

Then the equations of motion of the rod's barycenter can be expressed as

$$m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (1)$$

Here ξ, η, ζ are the coordinates of O , $U = U_1 + U_2$ is the force function where

$$U_1 = -fM\rho \ln \left| \frac{\gamma - l + \sqrt{l^2 - 2l\gamma + (\xi - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - a \cos \omega_0 t)^2 + \zeta^2}}{\gamma + l + \sqrt{l^2 - 2l\gamma + (\xi - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - a \cos \omega_0 t)^2 + \zeta^2}} \right| \quad (2)$$

$$\gamma = -a \sin \theta \sin(\psi - \omega_0 t) = \zeta \cos \theta + \sin \theta (\xi \sin \psi - \eta \cos \psi).$$

Here U_2 represent U_1 under the reflection $a \rightarrow -a$, $\{\psi, \varphi, \theta\}$ are Euler angles.

The equations of attitude motions take the form

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{A \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \frac{1}{A} + \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad A = \frac{ml^3}{3}. \quad (3)$$

Main manifold. The equations (1) – (3) have a two-integral manifold

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \delta(t), \quad (4)$$

$$m\ddot{z} = -Dz \left[\sqrt{\Delta_1}(l + a \sin \delta) + \sqrt{\Delta_2}(l - a \sin \delta) \right],$$

$$A\ddot{\delta} = Da \cos \delta \sqrt{\Delta_1}(a^1 + z^1 + la \sin \delta) - \sqrt{\Delta_2}(a^1 + z^1 - la \sin \delta) \Big], \quad (5)$$

$$D = \frac{2fM\rho}{(a^2 \cos^2 \delta + z^2) \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}, \quad \Delta_1 = l^2 - 2la \sin \delta + a^2 + z^2, \quad \Delta_2 = l^2 + 2la \sin \delta + a^2 + z^2.$$

A manifold (4) – (5) is a particular type of orbit-attitude motions when the rod rotates around C_z continuously provided that it's barycenter moves along axis C_z .

Sub-manifold A:

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \quad \left(\psi = \omega_0 + \frac{3\pi}{2} \right),$$

$$m\ddot{z} = \frac{2M\rho f}{z} \left[\frac{a-l}{\sqrt{(a-l)^2 + z^2}} - \frac{a+l}{\sqrt{(a+l)^2 + z^2}} \right].$$

Here the rod is oriented along the axis C_x .

Sub-manifold B.

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t \quad \left(\psi = \omega_0 + \pi \right),$$

$$m\ddot{z} = \frac{4Mlf\rho z}{\sqrt{l^2 + a^2 + z^2}(a^2 + z^2)}.$$

The rod is oriented perpendicular to the axis C_x .

Sub-manifold C.

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = 0,$$

$$m\ddot{z} = 2fM\rho \left(\frac{1}{\sqrt{(l+z)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}} \right).$$

The rod is oriented along the axis C_z .

References

- [1] Guzzetti D., Howell K. C. Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits // *Acta Astronautica*. 2017. V. 130, P. 97–113.
- [2] Boué G., Laskar J. Precession of a planet with a satellite // *Icarus*, Elsevier. 2006. V. 185. P.312–330.
- [3] Zhuravlev S. G., Petrutskii A. A. Current state of the problem of translational-rotational motion of three-body problem // *Astron.Zh.* 1990. V. 67, P. 602–611.

THE CONDITION OF MODULI FINITENESS FOR SURFACE MORSE-SMALE FLOWS⁷⁵

Kruglov V. (Russia, Nizhnij Novgorod)

National Research University Higher School of Economics, Russian Federation

kruglovslava21@mail.ru

The results have been obtained in collaboration with Olga Pochinka.

Two flows f^t and f'^t are called topologically equivalent if there exists a homeomorphism h sending trajectories of f^t into trajectories of f'^t preserving orientations of trajectories. Two flows are called topologically conjugate if such homeomorphism additionally preserves the time of moving along the trajectories, i.e. there is the property $hf^t = f'^th$ for $t \in \mathbb{R}$.

There are several well-known topological invariants for subclasses of Morse-Smale flows on surfaces in sense of equivalence, i.e. invariants by Leontovich-Mayer [1], [2], Peixoto [3], Oshemkov-Sharko [4]. Besides, the Ω -stable flows on surfaces have been classified in such sense too by Neumann-O'Brien [5] and Kruglov-Malyshev-Pochinka [6]. Attempts were also made to classify such flows in sense of topological conjugacy, in particular, V. Kruglov [7] proved that the classes of topological equivalence and topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces coincide. J. Palis [8] considered a flow in a neighbourhood of a separatrix connecting two saddle points. He showed that in each topological equivalence class there is continuum of topological conjugacy classes, that is, a flow with a separatrix-connection has *moduli of stability* or *moduli of conjugacy*. Each limit cycle likewise generates at least one modulus associated with its period. In this report there is considered the subclass of Morse-Smale flows with the finite number of moduli of topological conjugacy and the question of its topological classification in sense of conjugacy is solved. The invariant is the equipped graph.

References

- [1] Leontovich E. A., Mayer A. G. On the trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories (in Russian) // *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1937. Vol. 14. No 5. P.251–257.
- [2] Leontovich E. A., Mayer A. G. On the scheme determining topological structure of partition into trajectories (in Russian) // *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1955. Vol. 103. No 4. P.557–560.
- [3] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil. 1971.
- [4] Oshemkov A. A., Sharko V. V. On the classification of Morse-Smale flows on 2-manifolds (in Russian) // *Matematicheskiiy sbornik*. 1998. Vol. 189. No 8. P.93–140.
- [5] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds // *J. Diff. Eq.* 1976. Vol. 22. P.89–110.
- [6] Kruglov V. E., Malyshev D. S., Pochinka O. V. Topological classification of Ω -stable flows by means of effectively distinguishable multigraphs // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2018. Vol. 38. No 9. P.4305–4327.
- [7] Kruglov V. E. (2018). Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // *Dinamicheskie sistemy*. Vol. 8(36). No 1. P.15–21.
- [8] Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // *Astérisque*. 1978. Vol. 51. P.335–346.

⁷⁵The reported study was funded by RFBR according to the research project No 18-31-00022 mol_a.

Lerbet J. (France, Paris)

Université Paris-Saclay, CNRS, Univ Evry, Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
jlerbet@gmail.com

1 Position of the problem

Beyond the hamiltonian framework where external actions (like gravity) and internal actions (like in elasticity) can be described by a potential function, we are concerned here with mechanical systems with positional actions without potential. The main characteristic of these systems is the loss of the symmetry of the stiffness matrix K in a linear investigation of equilibrium configurations (see [1], [2] for example). In the present work, we are concerned with the following question: for such a non conservative system Σ , what is the minimal number of additional kinematic constraints that transform this non conservative system into a conservative one? This minimal number d of constraints is called the geometric degree of nonconservativeness (GDNC). The second issue consists in finding the set of all appropriate constraints. The last question is to extend the framework to the nonlinear one.

2 Solution

In the linear framework, the existence of an appropriate basis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ of $\mathbb{R}^n$. allows one to write $\phi = e_1^* \wedge e_2^* + \dots + e_{2s-1}^* \wedge e_{2s}^*$ with $(u, v) \mapsto \phi(u, v) = u^T K_a v$ where K_a is the skew-symmetric part of the stiffness matrix K of the mechanical system. This decomposition provides the GDNC: $d = s$. It also provides the set of all solutions as the set of Lagrangian planes of an appropriate symplectic vector space whose explicit parametrization is possible (see [3], [4]).

In the nonlinear framework, we consider the configuration set as a n -dimensional manifold $\mathbb{M}$. The mechanical actions are described by a section ω of $T^*\mathbb{M}$. Because Σ is nonconservative, ω is non-closed. We are then looking for embedded submanifolds $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}$ of the greatest possible dimension $n - d$ so that $j^*(\omega)$ is closed in $\mathbb{N}$. Assuming ω is regular, Darboux's theorem of structure of regular two forms then provides (local) solutions of the problem (see [4]).

3 Open issue

The major open issue deals with the extension to continuum mechanics and infinite dimensional spaces. Regarding the dual Kinematic Structural Stability issue, it has been already performed [5]. Regarding the GDNC issue, it remains an interesting challenge because the tools, involved for the finite dimensional solution, are not directly extendable to the case of infinite dimensional (Hilbert) vector spaces.

References

- [1] Bolotin V.V. Nonconservative problems of the theory of elastic stability, Pergamon Press, 1963.
- [2] Lerbet J., Challamel N., Nicot F., Darve F. Kinematical Structural Stability, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S) of AIMS, DCDS-S 9-2 June 2016 special issue.
- [3] Souriau J.M., Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications. Lecture Notes in Phys., Vol. 50, pp 117-148, Springer, Berlin, 1976
- [4] Lerbet J., Challamel N., Nicot F., Darve F., Geometric Degree of Nonconservativity: set of solutions for the linear case and extension to the differentiable non linear case, Appl. Math. Modell., doi: 10.1016/j.apm.2016.01.030, 2016
- [5] Lerbet J., Challamel N., Nicot F., Darve F., On the stability of nonconservative continuous systems under kinematic constraints, ZAMM, Vol. 97 , Issue 9, pp 1100-1119, April 2017

Lokutsievskiy L. V. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Moscow Lomonosov State University

lion.lokut@gmail.com

In the talk, I will speak about a new convenient method for describing plane convex compact sets and their polars that generalizes the classical trigonometric functions $\cos$ and $\sin$. The properties of this pair of functions in the case of the unit circle are inherited by two pairs of functions $\cos_\Omega$, $\sin_\Omega$ and $\cos_{\Omega^\circ}$, $\sin_{\Omega^\circ}$ for the set Ω itself and its polar Ω° . This method turned out to be very useful for describing solutions of optimal control problems with two-dimensional control in explicit form. With its help, in 2018, I managed to explicitly find geodesics in a series of sub-Finsler problems for the cases of Heisenberg, Grushin, Martinet, Engel, and Cartan. In 2019, together with Yu.L. Sachkov and A.A. Ardentov, we solved more than 10 classical problems with 2D control including Finsler geodesics on the Lobachevsky hyperbolic plane. On the talk I will show some of these examples.

References

- [1] Lokutsievskiy L. V., “Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry”, Sb. Math., 210:8 (2019), 1179–1205, arXiv:1807.08155

CONFORMAL AND MAXIMAL MEASURES FOR PIECEWISE CONTINUOUS MAPS⁷⁷

Malkin M. I. (Russia, Nizhniy Novgorod)

Lobachevsky State University

National Research University Higher School of Economics

malkin@unn.ru

Safonov K. A. (Russia, Nizhniy Novgorod)

Lobachevsky State University

National Research University Higher School of Economics

safonov.klim@yandex.ru

We consider one-dimensional piecewise monotone piecewise continuous maps and apply the technique of kneading invariants and kneading series in order to construct conformal measures which are responsible for semiconjugacy to model maps with constant (in absolute value) slope.

The kneading technique was introduced first by J. Milnor and W. Thurston for continuous piecewise monotone one-dimensional maps and was applied before to maps with positive topological entropy. In [1], [2], by using the kneading technique we studied properties of one-dimensional maps with positive entropy and also for their multidimensional perturbations. In the present talk we consider more complicated case in a neighborhood of a map with zero topological entropy, i.e., near the boundary of the convergence disk for kneading series in the complex plane.

For generalized interval exchange transformations (without periodic points) our construction of 1-conformal measures allows to prove semiconjugacy to the usual (rigid) interval exchange transformation with unit slope, and moreover, the constructed semiconjugacy is in fact, conjugacy in the transitivity case. Concerning Lorenz maps in a neighborhood of a map with zero entropy, note that the entropy function may have jumps in C^0 -topology. Nevertheless, if one considers Lorenz maps with zero one-sided derivatives at the discontinuity point and with respect to C^1 -topology, the topological entropy still depends continuously on the map. More precisely, the result is as follows.

Theorem. The function $f \rightarrow h_{top}(f)$ in the class of Lorenz maps with C^0 -topology is continuous at f_0 , except for the case when $h_{top}(f_0) = 0$ and the kneading invariants $K_{f_0}^+$, $K_{f_0}^-$

⁷⁶The talk is financially supported by Russian Foundation for Basic Research under project 20-01-00469.

⁷⁷This work was partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No. 075-15-2019-1931 and by RFBR grant No. 18-29-10081.

of f_0 are periodic with the same period; in the latter case, the jump of topological entropy is precisely $\frac{\log 2}{p}$, where p is the common period of the kneading invariants.

Moreover, for the class of Lorenz maps having zero one-sided derivatives at the discontinuity point and with C^1 -topology, such an exceptional case is impossible, and thus, the topological entropy depends continuously on the map. For maps with positive topological entropy we discuss relationship between maximal and conformal measures and also with multiplicity of the principle zeros of the kneading series.

References

- [1] M. Malkin, On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval, *Selecta Mathematica Sovietica*, (1989), 131–139.
- [2] Juang J., Li M.-C., Malkin M.I. Chaotic difference equations in two variables and their multidimensional perturbations. *Nonlinearity*, 21 (2008), 1019-1040.
- [3] M. Malkin. Kneading decomposition and maximal measures of Lorenz-type maps. *J.Tech.Phys.*, 37, v.3-4, 383-386 (1996).
- [4] M. Malkin, K. Safonov. Constructions of conformal measures for generalized interval exchange transformations. *Journal of Physics: Conference Series*. 990 (2018) 012007.

ON EXTREMAL CONTROLS IN THE SUB-RIEMANNIAN PROBLEM ON THE GROUP OF RIGID BODY MOTIONS⁷⁸

Mashtakov A. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences

alexey.mashtakov@gmail.com

We consider the sub-Riemannian problem on the Lie group $SE(3)$ of rigid body motions in $\mathbb{R}^3$. The problem is to find a Lipschitzian curve $\gamma : [0, t_1] \rightarrow SE(3)$, such that

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= u_3 \mathcal{A}_3 + u_4 \mathcal{A}_4 + u_5 \mathcal{A}_5, \\ \gamma(0) &= \text{Id}, \quad \gamma(t_1) = g, \quad (u_3, u_4, u_5) \in \mathbb{R}^3, \\ l(\gamma) &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathcal{A}_i$ are left-invariant vector fields in $SE(3)$, and terminal time $t_1 > 0$ is free.

Such a problem is encountered in the analysis of 3D images as well as in describing the motion of a solid body in a fluid. The necessary condition of optimality is given by the Pontryagin maximum principle (PMP). Application of PMP leads to a Hamiltonian system, the horizontal part of which is given by system (1), and the vertical part (on extremal controls) has the following form:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_3 u_5, \\ \dot{u}_2 = u_3 u_4, \\ \dot{u}_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4, \\ \dot{u}_4 = u_2 u_3 - u_5 u_6, \\ \dot{u}_5 = u_4 u_6 - u_1 u_3, \\ \dot{u}_6 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

In this talk we examine system (1). Based on knowledge of the first integrals we derive an ordinary differential equation for the “main” extremal control u_3 . An exact solution to the obtained equation is expressed in elliptic functions. The remaining functions u_1, u_2, u_4, u_5 admit expression in the operator form via u_3 and the initial values.

The talk is based on joint works with R. Duits, A. Ghosh, T. Dela Haije and A. Popov.

⁷⁸This work was supported by the RFBR grants No 19-31-51023.

References

- [1] Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A. On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // Journal of dynamical and control systems, 2016, Vol. 22, No. 4, P. 771–805.
- [2] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, No. 8, P. 952–957.
- [3] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Asymptotics of Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2020, Vol. 16, No. 1, P. 197–210.

ASYMPTOTICS OF EXTREMAL CONTROLS IN THE SUB-RIEMANNIAN PROBLEM ON THE GROUP OF RIGID BODY MOTIONS⁷⁹

Mashtakov A. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
alexey.mashtakov@gmail.com

Popov A. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences

We consider the sub-Riemannian problem on the group of motions of three-dimensional space [1]. Such a problem is encountered in the analysis of 3D images as well as in describing the motion of a solid body in fluid. Mathematically, this problem reduces to solving a Hamiltonian system, the vertical part of which is a system of six differential equations with unknown functions $u_1, \dots, u_6$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_3 u_5, \\ \dot{u}_2 = u_3 u_4, \\ \dot{u}_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4, \\ \dot{u}_4 = u_2 u_3 - u_5 u_6, \\ \dot{u}_5 = u_4 u_6 - u_1 u_3, \\ \dot{u}_6 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

The most important for applications and at the same time the simplest case ($u_6 = 0$) was rigorously studied by the authors in [2]. There a solution to the system was found in explicit form. Namely, the extremal controls $u_1, \dots, u_5$ were expressed via elliptic functions. Now, we consider the general case: u_6 is an arbitrary constant. In this case, we obtain a solution to the system in an operator form. Although the explicit form of the extremal controls does not follow directly from these formulas (their calculation requires the inversion of some nontrivial operator), it allows us to construct an approximate analytical solution for a small parameter u_6 . Computer simulation shows a good agreement between the constructed analytical approximations and the solutions computed via numerical integration of the system.

The talk is based on work [3].

References

- [1] Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A. On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // Journal of dynamical and control systems, 2016, Vol. 22, No. 4, P. 771–805.
- [2] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, No. 8, P. 952–957.
- [3] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Asymptotics of Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2020, Vol. 16, No. 1, P. 197–210.

⁷⁹This work was supported by the RFBR grants No 19-31-51023.

GENERALIZED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION
WITH LIE ALGEBRA STRUCTURE⁸⁰

Miller B. (Russia, Moscow)

Institute for Infomation Transmission Problems, Russian Academy of Sciences

Kazan Federal University

bmler@iitp.ru

Consider the system described by the differential equation, which is affine in an unbounded control

$$\dot{X}(t) = B(X(t), t)w(t), \quad (1)$$

with control $w \in K$, where $K \in R^m$ is a convex cone. The control $w(t)$ corresponds to the controls which are unbounded in the norm but restricted in the integral sense so that $w(t)$ satisfies the constraint

$$\int_0^T \|w(t)\| dt \leq M < \infty, \quad (2)$$

with some positive constant M

The equation (1) is affine in a control variable $w(t)$. This type of controls admits the generalized inputs such as δ - functions which could produce the jumps of phase variable $X(t)$ [1].

Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are two smooth vector-fields in R^n .

Definition 1 *The product or the Lie bracket $[f, g]$ of two smooth vector-fields in R^n will be defined as*

$$[f, g](x) = f'_x(x)g(x) - g'_x(x)f(x),$$

where $f'_x(x), g'_x(x)$ are $(n \times n)$ matrices of partial derivatives of the vector-field components.

If $[f, g] = 0$, then the pair of the vector-fields f, g will be called commutative.

Theorem 1 *In the commutative case that is if the columns of matrix function $B(x, t)$ satisfies $[B_i, B_j] = 0$ for all i, j the general solution of the system*

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^N B_i(X(t))w_i(t), \quad (3)$$

with the initial condition $X(0) = x_0$, admits the representation

$$X(t) = \Phi_N(\xi_N(t), \Phi_{N-1}(\xi_{N-1}(t), \dots, \Phi(\xi_1(t), x_0) \dots)), \quad (4)$$

where

$$\xi_k = \int_0^t w_k(s) ds,$$

and $\Phi_k(t, y)$ is the solution of the differential equation

$$\dot{y}(t) = B_k(y(t)), \quad y(0) = y. \quad (5)$$

The same representation one can be obtained if the columns of matrix function $B(x, t)$ are in involution. The general representation of solution is given by Theorem 4.8 [1].

Definition 2 *The set of the vector-fields $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$ will be called involutive if the Lie brackets of any f_i, f_j are the linear combinations of $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$, i.e. there exists the set of constants $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$ such that*

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^N c_{i,j}^k f_k. \quad (6)$$

⁸⁰The work is partially supported by the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

The set $\{c_{i,j}^k, i, j, k = 1, \dots, N\}$ will be called the set of structural constants of the Lie algebra $\mathcal{L}\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ generated by vector-fields $\{f_i(x), i = 1, \dots, N\}$.

Theorem 2 If the columns of matrix function $B(x, t)$ are in involution the general solution of (3) admits representation (4), where functions $\vec{\xi}(t) = \{\xi_i(t)\}$ corresponding to controls $\vec{w}(t) = \{w_i(t)\}$ are the solution of the system

$$L(\vec{\xi})\dot{\vec{\xi}}(t) = \vec{w}(t), \quad \vec{\xi}(0) = 0, \quad (7)$$

where analytical functions $L^{i,j}$ depend on the structural constants of the Lie algebra $\mathcal{L}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ only.

References

- [1] Miller B. M. and Rubanovich E. Ya. Optimization of Dynamical Systems with Impulse Controls and Shocks [in Russian]. M: LENAND, 2019.

VARIOUS INEQUALITIES FOR FRACTIONAL LAPLACIANS⁸¹

Nazarov A. I. (Russia, St. Petersburg)
PDMI RAS and St. Petersburg University
al.il.nazarov@gmail.com

Let Ω be a bounded domain with smooth boundary. We compare two natural types of fractional Laplacians $(-\Delta)^s$, namely, the “Navier” and the “Dirichlet” ones. We denote their quadratic forms by $Q_{s,\Omega}^N$ and $Q_{s,\Omega}^D$, respectively.

Theorem 1. Let $s > -1$, $s \notin \mathbb{N}_0$. Then for $u \in \text{Dom}(Q_{s,\Omega}^D)$, $u \neq 0$, the following relations hold:

$$\begin{aligned} Q_{s,\Omega}^N[u] &> Q_{s,\Omega}^D[u], \quad \text{if } 2k < s < 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ Q_{s,\Omega}^N[u] &< Q_{s,\Omega}^D[u], \quad \text{if } 2k-1 < s < 2k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Theorem 2. Let $0 < |s| < 1$, and let $u \in \text{Dom}(Q_{s,\Omega}^D)$, $u \geq 0$, $u \neq 0$. Then the following relations hold (all inequalities are understood in the sense of distributions):

$$\begin{aligned} (-\Delta_\Omega)^s_N u &> (-\Delta_\Omega)^s_D u, \quad \text{if } 0 < s < 1; \\ (-\Delta_\Omega)^s_N u &< (-\Delta_\Omega)^s_D u, \quad \text{if } -1 < s < 0. \end{aligned}$$

Theorem 3. For sign-changing $u \in \text{Dom}(Q_{s,\Omega}^D)$, the following relations hold:

$$\begin{aligned} Q_{s,\Omega}^N[u] &> Q_{s,\Omega}^N[|u|]; \quad Q_{s,\Omega}^D[u] > Q_{s,\Omega}^D[|u|], \quad \text{if } 0 < s < 1; \\ Q_{s,\Omega}^D[u] &< Q_{s,\Omega}^D[|u|], \quad \text{if } 1 < s < 3/2. \end{aligned}$$

This talk is based on joint papers with Roberta Musina, see [1]–[3].

References

- [1] R. Musina, A.I. Nazarov, On fractional Laplacians // Comm. in PDEs, **39** (2014), N9, 1780–1790.
[2] R. Musina, A.I. Nazarov, On fractional Laplacians–2 // AIHP–AN. **33** (2016), N6, 1667–1673.
[3] R. Musina, A.I. Nazarov, A note on truncations in fractional Sobolev spaces // Bull. Math. Sci. **9** (2019), N1, 1–7.

⁸¹ Author was supported by RFBR grant 20-01-00630a.

RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION OF HIGH ORDER ELLIPTIC OPERATORS

Pastukhova S. E. (Russia, Moscow)
MIREA – Russian Technological University
pas-se@yandex.ru

We study homogenization of an elliptic differential operator

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} a(x/\varepsilon) \nabla, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

acting in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, with ε -periodic perforation, say "space with holes", when the Neumann boundary condition is specified on a boundary of holes and the size of holes is assumed of order ε . Coefficients of the operator A_ε are measurable ε -periodic functions. The simplest case where coefficients of the operator are constant is also interesting for us. We find an approximation for the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ with remainder term of order ε^2 , as $\varepsilon \rightarrow 0$, in operator L^2 -norm on the perforated space. This approximation turns to be the sum of the resolvent $(A_0 + 1)^{-1}$ of the homogenized operator $A_0 = -\operatorname{div} a^0 \nabla$ with a constant matrix $a^0 > 0$ and some correcting operator $\varepsilon \mathcal{C}_\varepsilon$.

Both selfadjoint and non-selfadjoint cases are considered, where the original 1-periodic coefficients matrix $a(\cdot)$ is symmetric or nonsymmetric, respectively. In the selfadjoint case, we have $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon + (\mathcal{K}_\varepsilon)^*$. Here $\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon$ is a correcting operator known for resolvent approximations with order ε in operator $(L^2 \rightarrow H^1)$ -norm (see [4]) and $(\mathcal{K}_\varepsilon)^*$ is adjoint of $\mathcal{K}_\varepsilon$.

In the non-selfadjoint case, the correcting operator $\varepsilon \mathcal{C}_\varepsilon$ is more complicated, namely, $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon + (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* + \mathcal{L}$. Here $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ is defined via homogenization attributes of the operator A_ε^* (that is adjoint of A_ε) in a similar way, as $\mathcal{K}_\varepsilon$. Both $\mathcal{K}_\varepsilon$ and $(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*$ contain ε -periodic multipliers formed of solutions to auxiliary 1-periodic problems on the unit cube $[-1/2, 1/2]^d$ (so called cell problems). By contrast to this, the operator $\mathcal{L}$ does not depend on ε at all.

For the first time such kind resolvent approximations with remainder term of order ε^2 were obtained for second order elliptic operators with periodic coefficients in [2] and [3], where the case of operators acting in the whole space $\mathbb{R}^d$ was treated by spectral approach based on Floquet–Bloch transformation both in [2] and [3].

We prove the error estimate for constructed approximations by the modified method of the first approximation with the usage of shifting. This method was proposed by Zhikov firstly in [1]. We apply here the version of this method developed in [4] and [5], in which Steklov's averaging (or smoothing) is taken as a form of a generalised shift. To achieve more accuracy in approximation of the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$, in comparison with the result of [4] concerning homogenization in perforated domains, some new properties of the Steklov averaging operator, together with those known from [4], are exploited. These new properties are proved in [6] and [7].

References

- [1] Zhikov V.V. On operator estimates in homogenization theory // Dokl. Math. 2005. Vol. 72. P.535–538.
- [2] Zhikov V.V. Spectral method in homogenization theory // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Vol. 250. P. 85–94.
- [3] Birman M. Sh., Suslina T. A. Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators // St. Petersburg. Math. J. 2006. Vol. 17. P. 897–973.
- [4] Zhikov V.V., Pastukhova S.E. On operator estimates for some problems in homogenization theory // Russian Journal of Math. Physics. 2005. Vol. 12. No 4. P.515–524.
- [5] Zhikov V.V., Pastukhova S.E. Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients // Russian Journal of Math. Physics. 2006. Vol. 13. P.224–237.
- [6] Pastukhova S. E. L^2 -estimates for homogenization of elliptic operators // Journal of Math. Sciences. 2020. Vol. 244. No 4. P.671–685.
- [7] Pastukhova S.E. On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients. arXiv:2001.01701 [math.AP]. 2020. P.1–21.

Pavlova N. G. (Moscow, Russia)

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

natasharussia@mail.ru

Remizov A. O. (Moscow, Russia)

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

alexei-remizov@yandex.ru

In 1975, Roussarie studied vector fields

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{z}_i = \alpha_i v + \beta_i w, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

whose singular points fill a submanifold of codimension two ($v = w = 0$) and the spectrum of the linear part contains two non-zero eigenvalues $\lambda_{1,2}$. Here v, w, α_i, β_i are arbitrary smooth functions on x, y, z_i , $i = 1, \dots, n$. Roussarie was mainly interested in the case that $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$ at all singular points of (1). Then there are two main cases: $\lambda_{1,2}$ are real (hyperbolic R -fields, the letter R is used for Roussarie) or $\lambda_{1,2}$ are pure imaginary (elliptic R -fields).

Roussarie proved [1] that the germ of any hyperbolic R -field whose quadratic part satisfies a certain genericity condition is C^∞ -smoothly orbitally equivalent to

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z}_1 = xy, \quad \dot{z}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2)$$

The study of elliptic R -fields is drastically more complicated (even in the C^0 category, since the reduction principle is useless); the only formal normal form is obtained.

We consider a natural generalization of hyperbolic R -fields: vector fields (1) such that at all singular points $\lambda_{1,2}$ are non-zero reals and $\lambda_1 : \lambda_2 = -p : q$ ($p, q \geq 1$ are relatively prime integers). Such functions appear in various problems arising in analysis, geometry, dynamical systems theory, etc. We denote them by $R_{p,q}$. So, in this notation R -field = $R_{1,1}$ -field.

First, we establish a smooth normal form similar to (2): the germ of any $R_{p,q}$ -field whose $(p+q)$ -jet satisfies a certain genericity condition is C^∞ -smoothly orbitally equivalent to

$$\dot{x} = px, \quad \dot{y} = -qy, \quad \dot{z}_1 = x^q y^p, \quad \dot{z}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3)$$

Moreover, the field (3) is C^{k-1} -smoothly (but not C^k) orbitally equivalent to

$$\dot{x} = px, \quad \dot{y} = -qy, \quad \dot{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

where $k = \max\{p, q\}$.

The main result concerns the germs of $R_{p,q}$ -fields at points where the above genericity condition fails (singularity of codimension $n+2$). We prove that the germ of a generic $R_{p,q}$ -field whose $(p+q)$ -jet does not satisfy this condition is C^∞ -smoothly orbitally equivalent to

$$\dot{x} = px(1 + \alpha r), \quad \dot{y} = -qy(1 + \beta r), \quad \dot{z}_i = r\Psi_i(z), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

where $r = x^q y^p$ (the resonant monomial) and $z = (z_1, \dots, z_n)$. Here α, β are real parameters ($\alpha : \beta$ is an invariant), and $\Psi_i(z) = \mu_i z_i$ or $\alpha_i z_i + \beta_i z_{i+1}$ with some reals α_i, β_i, μ_i .

The results are presented in the papers [2, 3].

References

- [1] Roussarie R. Modèles locaux de champs et de formes // Asterisque 1975, vol. 30. P. 1–181.
- [2] Pavlova N. G., Remizov A. O. Hyperbolic Roussarie fields with degenerate quadratic part // Russian Math. Surveys. To appear.
- [3] Pavlova N. G., Remizov A. O. Smooth local normal forms of hyperbolic Roussarie vector fields // www.researchgate.net/publication/336983313

⁸²This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-51-50005 and 20-01-00610)

Pechen A. (Russia, Moscow)

Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies
 of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
 National University of Science and Technology "MISIS"
apechen@gmail.com

Uncomputable (in the sense of Turing machine) problems are known to sometime appear in mathematics and quantum physics. In mathematics, famous examples include Halting problem and Hilbert's 10 problem about existence of solutions of Diophantine equations. In quantum physics, examples of uncomputable problems include undecidability of the spectral gap and ground state of a boson Hamiltonian [1,2,3].

In this talk, we present a recently obtained with D. I. Bondar result about uncomputability of determining the existence of globally optimal solutions for discrete quantum control [4]. Consider a controlled open quantum system with Hilbert space $\mathcal{H}$. Most general state of the system is described by density matrix ρ , which is a positive operator in $\mathcal{H}$ with unit trace, $\rho \geq 0$ and $\text{Tr}\rho = 1$. The system can be controlled using coherent (e.g., a laser field) [5] or incoherent (e.g., spectral density of the environment) [6,7] controls. Most general controlled evolution of density matrix of the system is represented by a Kraus map, i.e., a completely positive trace preserving linear map [8].

Suppose we have access to N elementary controls (e.g., N laser pulses of different intensities) which we can combine in arbitrary sequence or in some set of accessible sequences. These N elementary controls induce N Kraus maps $\Phi_i, i = 1, \dots, N$. Control pulse consisting of L elementary controls is defined by a sequence $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_L)$. It determines the map $\Phi_{\mathbf{p}} = \Phi_{p_L} \dots \Phi_{p_1}$ which acts on system's initial state ρ_0 . Any observable of the system is represented by a Hermitian operator $\hat{O}$ in $\mathcal{H}$. Its experimentally measurable value is expectation $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{O})$. Without loss of generality one can assume that $\max_{\rho} \text{Tr}(\rho \hat{O}) = 0$ (otherwise by adding to the observable a physically irrelevant constant). Then the control objective for maximizing the expectation value (which is a common control objective for quantum control problems) is

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) := \text{Tr}[\hat{O} \Phi_{p_L} \dots \Phi_{p_1}(\rho_0)]$$

The problem which we consider is the following: Is there an algorithm which, given as input $\rho_0, \hat{O}, \{\Phi_i\}$ (they all can be defined by rational numbers), which allows to answer whether there exists a control sequence $\mathbf{p}^*$ such that $\mathcal{F}(\mathbf{p}^*) = 0$. We establish a connection between discrete quantum control problems and Diophantine equations based on which we prove that there is no such algorithm [4]. Moreover, our method allows to transfer to quantum control known results on complexity of solving various Diophantine equations thereby establishing discrete quantum control problems of various complexity (e.g., constructing NP-hard quantum control problems) [4].

References

- [1] Lloyd S. Quantum-mechanical computers and uncomputability // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 943.
- [2] Cubitt T. S., Perez-Garcia D., Wolf M. M. Undecidability of the spectral gap // Nature. 2015. Vol. 528. P. 207–211.
- [3] Smith W. D. Three Counterexamples Refuting Kieu's Plan for Quantum Adiabatic Hypercomputation; and Some Uncomputable Quantum Mechanical Tasks // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. 178. P. 184–193.
- [4] Bondar D. I., Pechen A. N. Uncomputability and complexity of quantum control // Scientific Reports. 2020. Vol. 10. P. 1195.
- [5] Glaser S. J. et al. Training Schrödinger's cat: quantum optimal control // Eur. Phys. J. D. 2015. Vol. 69. P. 279.

⁸³This research for open quantum systems was supported by the Russian Science Foundations Project 17-11-01388 and for closed quantum systems by the project 1.669.2016/1.4 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

- [6] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. P. 062102.
- [7] Pechen A. Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84. P. 042106.
- [8] Wu R., Pechen A., Brif C., Rabitz H. Controllability of open quantum systems with Kraus-map dynamics // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40. P. 5681–5693.

APPROXIMATION OF INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL EQUATIONS⁸⁴

Piskarev S. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
piskarev@gmail.com

Let us consider the inverse problem with overdetermination: find the function $u(\cdot)$ with values in E and the element $f \in E$ from the system of equations

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + F(t)f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u^0, \quad u(T) = u^T,$$

where $F(\cdot) \in C^1([0, T])$, the operator A is closed, generates analytic α -times resolvent family $S_\alpha(\cdot)$, densely defined and $\mathbf{D}_t^\alpha$ is the Caputo-Dzhrbashyan derivative. One can rewrite this problem in the form of equation

$$\begin{aligned} & \left(F(T)I - S_\alpha(T, A)F(0) \right) f - \int_0^T \left(\lambda P_\alpha(T-s, A)F(s) - S_\alpha(T-s, A)F'(s) \right) f ds = \\ & = (\lambda I - A)(u^T - S_\alpha(T, A)u^0). \end{aligned}$$

If we suppose that the operator $F(T)I - S_\alpha(T, A)F(0)$ has bounded inverse, then we can reduce our problem to Fredholm equation of the second kind

$$If - \int_0^T K(s) ds f = h(T), \quad (2)$$

We will use for approximation

Theorem 1. [1] Assume that $A \in C(E)$, $A_n \in C(E_n)$ and they generate analytic C_0 -semigroups. The following conditions (A) and (B'_1) are equivalent to condition (C).

(A) Consistency. There exists $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$ such that the resolvents converge

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1};$$

(B'_1) Stability. There exist constants $M \geq 1$ and ω independent of n such that for any $\operatorname{Re} \lambda > \omega$,

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \text{ for all } n \in \mathbb{N};$$

(C) Convergence. For any finite $\mu > 0$ and some $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ one has

$\max_{\eta \in \Sigma(\theta, \mu)} \|\exp(\eta A_n)u_n^0 - p_n \exp(\eta A)u^0\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ whenever $u_n^0 \rightarrow u^0$. Here we denote $\Sigma(\theta, \mu) = \{z \in \Sigma(\theta) : |z| \leq \mu\}$ and $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$.

Let A_n be a generators of analytic and compact C_0 -semigroups $\exp(\cdot A_n)$. Consider in a Banach spaces E_n the problems

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t) + F_n(t)f_n, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$u_n(0) = u_n^0 \in D(A_n), \quad u_n(T) = u_n^T \in D(A_n).$$

⁸⁴The support of grant from Russian Science Foundation (RSF) N20-11-20085 are gratefully acknowledged.

The solution of these problems can be reduced to corresponding Fredholm equation of second kind the same way as (2) and can be written in the form:

$$I_n f_n - K_{n,T} f_n = h_n(T). \quad (4)$$

Thus, we manage to reduce the approximation of problem (1) to the approximation of problem (2) by problems (4). Following [2] the semidiscrete approximation theorem for (1) is obtained:

Theorem 2. *Assume that functions $F_n(\cdot), F(\cdot) \in C^1([0, T])$ converge $F_n(t) \rightarrow F(t)$, $F_n(t)' \rightarrow F(t)'$ uniformly in $t \in [0, T]$ and $F(0) = 0, F(T) \neq 0$. Let conditions (A), (B₁') be satisfied and $u_n^0 \rightarrow u^0, u_n^T \rightarrow u^T$ in a such way that $h_n(T) \rightarrow h(T)$. Assume also that $N(I - K_T) = \{0\}$, operator $(\lambda I - A)^{-1}$ is compact and $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ compactly. Then the mild solutions of the problems (3) exist and converge to the mild solution of the problem (1), i.e. $u_n(t) \rightarrow u(t)$ uniformly in $t \in [0, T]$ and $f_n \rightarrow f$.*

References

- [1] Guidetti D., Karasozen B., and Piskarev S. Approximation of abstract differential equations // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). 2004. vol. 122, No. 2. P. 3013–3054.
- [2] Dmitry Orlovsky, Sergey Piskarev. On Approximation of Coefficient Inverse Problems for Differential Equations in Functional Spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. No 6. P. 823–906.

COADJOINT ORBITS OF THREE-STEP FREE NILPOTENT LIE GROUPS

Podobryaev A. V. (Russia, Pereslavl-Zalesskiy)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences

alex@alex.botik.ru

Our goal is a description of Casimir functions and coadjoint orbits for some class of nilpotent Lie groups. This knowledge is important for the theory of left-invariant optimal control problems on Lie groups. Casimir functions are integrals of the Hamiltonian system of Pontryagin maximum principle. Moreover, coadjoint orbits are invariant under the flow of the vertical part of this Hamiltonian system.

Note that left-invariant sub-Riemannian problems, sub-Finsler problems on Lie groups and in general problem of finding the shortest arcs for intrinsic left-invariant metrics on Lie groups can be also viewed as optimal control problems.

Nilpotent Lie groups play a key role in the theory of left-invariant optimal control problems in view of existence of nilpotent approximation. Any nilpotent Lie group is a quotient of a free nilpotent Lie group. A connected and simply connected free nilpotent Lie group is determined by its rank and step. Sub-Riemannian and sub-Finsler problems on such groups were investigated only for step 2, 3 and ranks 2, 3.

It is known that the Hamiltonian system of Pontryagin maximum principle is integrated in trigonometric functions for step 2 and in elliptic functions for step 3 and rank 2, but for bigger ranks the normal Hamiltonian system is not Liouville integrable [1]. For sub-Riemannian structures of step more than 3 the geodesic flow is also not Liouville integrable [2].

We extend the results of Yu. L. Sachkov [3] for step 2 to step 3 and provide an algorithm for constructing of Casimir functions and coadjoint orbits.

Theorem 1. *For three-step free nilpotent Lie groups of rank $r \geq 3$ there are $(r^3 - r)/3$ linear Casimir functions and $(r^2 - 3r)/2$ Casimir functions that are linear on the joint level sets of the first ones. This is a complete system of Casimir functions.*

The exception is the three-step free nilpotent Lie group of rank 2 called *the Cartan group* [4]. The corresponding Lie algebra is generated by ξ_1, ξ_2 and has the following structure:

$$\xi_{12} = [\xi_1, \xi_2], \quad \xi_{112} = [\xi_1, \xi_{12}], \quad \xi_{212} = [\xi_2, \xi_{12}],$$

In addition to linear Casimir functions ξ_{112}, ξ_{212} we have the quadratic Casimir function

$$\xi_{12}^2 + 2\xi_1 \xi_{212} - 2\xi_2 \xi_{112}.$$

Theorem 2. *For three-step free nilpotent Lie groups of rank $r \geq 3$ general coadjoint orbits are $2r$ -dimensional affine subspaces. Special coadjoint orbits are affine subspaces or non-singular quadrics. These orbits are distinguished by functions constructed by two-step free nilpotent Lie groups of lower rank.*

There is some generalization of Theorem 2 to free nilpotent groups of step 4.

Theorem 3. *For free nilpotent Lie group of step 4 general coadjoint orbits are affine subspaces or non-singular quadrics.*

References

- [1] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21. No 6. P.759–774.
- [2] Lokutsievskii L., Sachkov Yu. Liouville nonintegrability of sub-Riemannian problems on free Carnot groups of step 4 // Sb. Math. 2018. Vol. 209. No 5. P.74–119.
- [3] Sachkov Yu. L. Co-adjoint orbits and time-optimal problems for two-step free-nilpotent Lie groups // arXiv:2002.07149.
- [4] Sachkov Yu. L. Exponential mapping in the generalized Dido problem // Sb. Math. 2003. Vol. 194. No 9. P.1331–1360.

OSCILLATING SOLUTIONS OF SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER⁸⁵

Remizov A. O. (Moscow, Russia)

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

alexey-remizov@yandex.ru

A. F. Filippov (1923–2006) showed that systems of implicit differential equations (IDEs) may have solutions that enter a point of the phase space without a definite tangential direction (we shall call them oscillating solutions). He also proved that a generic system of IDEs does not have oscillating solutions: a very general sufficient condition for the non-existence of oscillating solutions is established in [1].

However, this result is not effective for systems of IDEs linearly depending on the derivatives, for instance, second-order singular equations

$$\Delta(x, y) \frac{dp}{dx} = M(x, y, p), \quad p = dy/dx, \quad (1)$$

where Δ vanishes on a curve Γ . We especially interested in the case that M is a cubic polynomial in p with coefficients smoothly depending on x, y :

$$M(x, y, p) = \sum_{i=0}^3 \mu_i(x, y) p^i. \quad (2)$$

Equations (1), (2) play an important role for describing geometric structures, including the affine/projective connection (Sophus Lie, Arthur Tresse, Joseph Liouville, Elie Cartan, etc.).

Example 1. The equation $x^2 dp/dx = xp - 2y$ has the family of solutions

$$y = x(\alpha \cos \ln |x| + \beta \sin \ln |x|), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (3)$$

which enter the origin without definite tangential directions. Using (3), one can construct more interesting examples. For instance, we remark that the function (1) with $\alpha = \beta = 1$ satisfies the first-order IDEs $F_i(x, y, p) = 0$, $i = 2, 3$, with the functions

$$F_2 = (xp)^2 - 2xyp + 2(y^2 - x^2), \quad F_3 = (xp)^3 + y(xp)^2 - 2xp(x^2 + 2y^2) + 6y(y^2 - x^2).$$

⁸⁵This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-51-50005 and 20-01-00610)

Therefore, it is a solution of the second-order equations $x^2 dp/dx = xp - 2y + F_i(x, y, p)$.

Example 2. The equation $x^4 dp/dx = 2x^3 p - (2x^2 + 1)y$ has the family of solutions

$$y = x^2(\alpha \cos x^{-1} + \beta \sin x^{-1}), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (4)$$

which enter the origin without definite tangential directions. In contrast to the previous example, solutions (4) are differentiable at the origin itself.

Obviously, oscillating solutions of equation (1) can enter only its singular points: $q_0 \in \Gamma = \{\Delta(x, y) = 0\}$. The following theorem shows that even for singular points, the existing of oscillating solutions requires a very special condition, which generically does not hold true.

Theorem 1. Consider equation (1) with smooth functions Δ, M assuming in addition that M is analytic in p and the curve Γ is regular. Let $q_0 \in \Gamma$ be a singular point such that $M(q_0, p) \not\equiv 0$. Then equation (1) does not have oscillating solutions entering q_0 .

Generically, the condition $M(q_0, p) \not\equiv 0$ holds true at all points of Γ . In particular, if M is a cubic polynomial in p (see formula (2)), it means that the coefficients $\mu_i(x, y)$ vanish at the point q_0 simultaneously.

Despite this result, the research in this direction is not finished yet. It is very interesting to obtain a multidimensional analogue of Theorem 1. In particular, it is interesting to study the existence of oscillating solutions for Euler–Lagrange equations

$$\frac{d}{dx} L_{p_i} = L_{y_i}, \quad p_i = dy_i/dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

with degenerate Lagrangians $L(x, y_i, p_i)$.

References

- [1] Filippov A.F. Uniqueness of the solution of a system of differential equations unsolved for the derivatives // Differ. Equ. 2005, vol. 41:1. P. 90–95.

SYMMETRIES AND PARAMETERIZATION OF ABNORMAL EXTREMALS IN SUB-RIEMANNIAN PROBLEM WITH THE GROWTH VECTOR $(2; 3; 5; 8)$ ⁸⁶

Sachkov Yu. L. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
yusachkov@gmail.com

Sachkova E. (Russia, Pereslavl-Zalessky)

Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
efsachkova@mail.ru

The left-invariant sub-Riemannian problem with the growth vector $(2, 3, 5, 8)$ is considered. A two-parameter group of infinitesimal symmetries consisting of rotations and dilations is described. The abnormal geodesic flow is factorized modulo the group of symmetries. On this basis, a parameterization of the vertical part of abnormal geodesic flow is obtained.

⁸⁶This work was supported by the RFBR grants No 19-31-51023.

THE 3D NAVIER–STOKES EQUATIONS:
INVARIANTS LOCAL AND GLOBAL REGULAR SOLUTIONS

Semenov V. I. (Russia, Kaliningrad)
Baltic Federal University
visemenov@rambler.ru

For the studying of the Cauchy problem of these equations in space there are introduced some classes and parameters which are invariant with respect to the scaling procedure. The first invariant is connected with the Cauchy problem provided an initial data which belongs to a special class $C_{6/5, 3/2}^\infty$ of solenoidal vector fields vanishing at infinity. Here outer forces are trivial. Then the class $C_{6/5, 3/2}^\infty$ is invariant.

The second invariant is a special parameter λ which is connected with a velocity changing of E^2 where E is a kinetic energy of a fluid flow. If $\lambda \geq 1$ (i.e. changing of E^2 at moment $t = 0$ is negligible) or kinetic energy at a special moment is not less any mean depending on λ for $\lambda < 1$ then an ideal, global and smooth motion is determined. In other words a global regular solution exists. This is an essential and qualitative improvement of the classical result together with a new a priori estimate.

Finally, the other parameters $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, and $\mu, 1 < \mu < \lambda^{-4}$, or $\mu = \infty$ may be also very useful. The first of them is a dissipation coefficient of kinetic energy. The last parameter holds time interval of a solution regularity. These three numerical characteristics $\lambda, \varepsilon, \mu$ are invariant with respect to the scaling procedure.

As illustration, it follows no phenomena blow up on the time interval $[0, T)$ if kinetic energy satisfies inequality:

$$\|u(t, \cdot)\|_2^2 \geq \|\varphi\|_2^2 \left(1 - \lambda^2 \sqrt{\frac{t}{T_0}}\right)$$

with condition $\lambda < 1$ (by symbol $\|u(t, \cdot)\|_2$ it is denoted a norm in L_2 , $[0, T_0)$ – is an universal time interval of an existence of the global regular solution, φ is an initial data).

Also, it is fulfilled comparison of dimensions $n = 2$ and $n = 3$.

LAGRANGIAN MANIFOLDS AND MODIFICATIONS OF THE MASLOV CANONICAL
OPERATOR, CORRESPONDING TO LOCALIZED SOLUTIONS OF HYPERBOLIC SYSTEMS

Shafarevich A. (Moscow, Russia)
Moscow State University
shafarev@yahoo.com

Maslov Canonical Operator is a standard tool for the description of rapidly oscillating solutions for a wide class of pseudo-differential equations. As applied to localized solutions of hyperbolic systems, this construction cannot be applied directly due to the unsmoothness of corresponding classical Hamiltonians. We discuss needs certain modifications of the Maslov canonical operator (changing as the corresponding Lagrangian manifolds, as the construction of the operator itself), which make it possible to describe such solutions. The talk is based on the joint work with S.Yu. Dobrokhoto and V.E. Nazaikinskii.

MULTIPLICITY OF POSITIVE SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED HÉNON EQUATION WITH FRACTIONAL LAPLACIAN⁸⁷

Shcheglova A. (Russia, Saint Petersburg)
Saint Petersburg Electrotechnical University
apshcheglova@etu.ru

Let B be a unit ball in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $s \in (0, 1)$, $q > 2$ and $\alpha > 0$. We consider the problem

$$(-\Delta)^s u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u \quad \text{in } B, \quad u \in \tilde{H}^s(B). \quad (1)$$

The space $\tilde{H}^s(B)$ is defined by

$$\tilde{H}^s(B) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n), \text{ supp } u \subset B \right\}.$$

There are two types of fractional Laplacians to deal with, namely Navier and Dirichlet.

For $s = 1$, the operator in the equation (1) is a Laplacian, and such problem is known as the Hénon equation. For the Hénon equation, the effect of multiplicity of positive solutions for α large enough was obtained in [1].

Theorem 1. *Let $n \geq 2$ and $2 < q < \frac{2}{(1-2s)_+}$. There exists $\hat{\alpha}(n, q, s) > 0$ such that for all $\alpha > \hat{\alpha}$ the problem (1) has a positive radial solution.*

Theorem 2. *Let $n \neq 3$ and $2 < q < \frac{2n}{n-2s}$. For any $N \in \mathbb{N}$ there exists $\alpha_N(n, q, s, N) > 0$ such that for all $\alpha > \alpha_N$ the problem (1) has at least N different (not equivalent with respect to rotation) positive solutions.*

Proofs of these theorems are published in [2].

References

- [1] Smets D., Willem M., Su J. Non-radial ground states for the Hénon equation // Commun. Contemp. Math. 2002. Vol. 4. No 3. P. 467–480.
- [2] Shcheglova A. P. Multiplicity of positive solutions for the generalized Hénon equation with fractional Laplacian // accepted for publication in Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI

ENTROPY OF AN OPERATOR⁸⁸

Treschev D. (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
treschev@mi.ras.ru

We extend the concept of the measure entropy from the group of automorphisms of a measure space to the group of unitary operators on a Hilbert space. Our main motivations concern formalization of the idea of quantum chaos. The key ingredient of our construction is a (probably) new concept from functional analysis, the mu-norm of a (bounded) operator on a Hilbert space.

⁸⁷Author's work was supported by RFBR grant 20-01-00630a.

⁸⁸This research was financed by the grant 18-01-00887 from the Russian Foundation for Basic Research.

Tunitsky D. V. (Moscow, Russia)

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

dtunitsky@yahoo.com

A one-dimensional quasilinear wave equation is considered. Explicit expressions in quadratures are derived for its solutions in case when they are simple waves.

A number of models in continuum mechanics concern the quasilinear wave equation

$$z_{xx} - g^2(z_y)z_{yy} = 0, \quad (1)$$

where $g = g(q)$ is a given positive coefficient,

$$g(q) > 0, \quad (2)$$

cf. [1], [2], [3]. Here the Monge notations

$$p = z_x(x, y), \quad q = z_y(x, y)$$

are used. The independent variable x designates time, y is the spatial coordinate, and solution $z = z(x, y)$ is the continuum displacement. Condition (2) is equivalent to hyperbolicity of the equation (1). A solution is said to be a *simple wave*, if the equality $dp \wedge dq = 0$ holds on it, cf. [4].

Define initial values

$$z(0, y) = z_0(y), \quad z_x(0, y) = p_0(y), \quad -\infty < y < +\infty. \quad (3)$$

It is possible to show that a solution of the initial value problem (1), (3) is a simple wave iff either

$$p_0(y) = -G(z'_0(y)), \quad (4)$$

or

$$p_0(y) = G(z'_0(y)), \quad (5)$$

where $G = G(q)$ is a primitive function of $g = g(q)$. The following statement is through.

Proposition. *For any definite multivalued solution of the initial value problem (1), (3) that is a simple wave the equalities*

$$x(u, v) = \frac{h(u, v)}{2\sqrt{g_0(v)}}, \quad y(u, v) = v + \frac{\sqrt{g_0(v)}}{2}h(u, v),$$

$$z(u, v) = z_0(v) + \frac{p_0(v) + g_0(v)z'_0(v)}{2\sqrt{g_0(v)}}h(u, v),$$

$$p(u, v) = p_0(v), \quad q(u, v) = z'_0(v)$$

hold in case (4), and

$$x(u, v) = \frac{h(u, v)}{2\sqrt{g_0(u)}}, \quad y(u, v) = u - \frac{\sqrt{g_0(u)}}{2}h(u, v),$$

$$z(u, v) = z_0(u) + \frac{p_0(u) + g_0(u)z'_0(u)}{2\sqrt{g_0(u)}}h(u, v),$$

$$p(u, v) = p_0(u), \quad q(u, v) = z'_0(u)$$

hold in case (5). Here $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$g_0(t) = g(z'_0(t)), \quad h(u, v) = \int_v^u \frac{d\tau}{\sqrt{g_0(\tau)}}.$$

⁸⁹This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-51-50005 and 20-01-00610).

References

- [1] Zabusky N.J. Exact Solution for the Vibrations of a Nonlinear Continuous Model String // J. Math. Phys. 1962, vol. 3:5. P. 1028–1039.
- [2] Lax P.D. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // J. Math. Phys. 1964, vol. 5:5. P. 611–613.
- [3] Taylor M. Partial differential equations. Vol. 1, Basic Theory. New York: Springer-Verlag. 1996.
- [4] Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic flows and shock waves. New York: Interscience Publishers, Inc. 1948.

ON SOLVABILITY OF A CRITICAL PROBLEM WITH THE SPECTRAL NEUMANN FRACTIONAL LAPLACIAN⁹⁰

Ustinov N. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
ustinns@yandex.ru

We study the existence of solutions for the problem generated by the fractional Sobolev inequality in a C^1 -smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$:

$$(-\Delta)_{Sp}^s u(x) + u(x) = u^{2^s-1}(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H^s(\Omega) \quad (1)$$

where $0 < s < 1$, $2_s^* \equiv \frac{2n}{n-2s}$ and $H^s(\Omega)$ is the standard Sobolev-Slobodetskii space.

We denote by $(-\Delta)_{Sp}^s$ the spectral Neumann fractional Laplacian in Ω , that is the s -th power of the conventional Laplace operator with Neumann boundary condition (Neumann Laplacian) in the sense of spectral theory. For the bounded Ω this gives the representation

$$\langle (-\Delta)_{Sp}^s u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \langle u, \phi_j \rangle^2$$

with λ_j as eigenvalues and ϕ_j as orthonormal eigenfunctions of the Neumann Laplacian.

In this talk we provide the sufficient conditions for the existence of the ground-state solution in (1). For the local case $s = 1$ the existence result is well-known: see [1, 2] for the Neumann Laplacian and [3] for the Neumann p -Laplacian.

References

- [1] Adimurthi A., Mancini G.I. The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity // Nonlin. Anal. Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9-25.
- [2] Wang X. J. Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // J. Differential Equations, 93(2) (1991), 283-310.
- [3] Demyanov A. V., Nazarov A. I. On the existence of an external function in Sobolev embedding theorems with critical exponents // Algebra i Analiz 17(5) (2005), 105-140 (in Russian); St. Petersburg Math. J. 17(5) (2006), 108-142 (in English).

⁹⁰Supported by RFBR grant 20-01-00630A

Научное электронное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль

3 – 8 июля 2020 года

На первой полосе обложки рисунок Грамотовой Анастасии

Издаются в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;
дисковод CD-ROM.

Тираж 20 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт
diff@vlsu.ru