УДК 510.25; 510.64

АБСОЛЮТНАЯ L-РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

А. Ю. Коновалов[1]

Для каждого счетного расширения L языка арифметики определяется абсолютная L-реализуемость предикатных формул. Доказывается, что интуиционистская логика не является корректной относительно этих семантик.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, формальная арифметика, интуиционистская логика.

An absolute L-realizability of predicate formulas is introduced for all countable extensions L of the language of arithmetic. It is proved that the intuitionistic logic is not sound with this semantics.

Key words: constructive semantics, realizability, absolute realizability, formal arithmetic, intuitionistic logic.

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно-рекурсивных функций, а также константы для обозначения всех натуральных чисел. Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P_i^n и функциональных символов f_i^n для всех $i \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Валентность символов P_i^n и f_i^n полагается равной n. Формулы языка LA' строятся обычным образом из атомов и логических констант $\top, \bot$ при помощи логических связок $\wedge, \vee, \to$ и кванторов $\exists, \forall$. Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \to \bot$. Будем считать, что фиксирована гёделева нумерация языка LA'. Формулу языка LA' с гёделевым номером z обозначаем через Φ_z. Через $\ulcorner\Phi\urcorner$ обозначаем гёделев номер формулы Φ.

Фиксируем расширение L языка LA и интерпретацию $\mathcal{N}_L$ языка L, такие, что L — подъязык языка LA', а интерпретация $\mathcal{N}_L$ является продолжением стандартной интерпретации языка LA. *Униформизацией* формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка L, не содержащей параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (\forall y_1 < y)\, \neg\Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1),$$

которую обозначим $\Phi^U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, где $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, если и только если $\mathcal{N}_L \models \Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$, т.е. формула $\Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$ истинна в интерпретации $\mathcal{N}_L$. Через I_n^L обозначаем множество гёделевых номеров формул языка L, не содержащих параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$. Если $z \in I_n^L$, то посредством $\varphi_z^{L,n}$ обозначим n-местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_z^U. В выражениях вида $\varphi_z^{L,n}$ обычно будем опускать второй верхний индекс там, где он может быть восстановлен из контекста.

Будем говорить, что частичная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ определима в языке L формулой $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ этого языка, если имеет место $\psi(k_1, \ldots, k_n) = n \iff \mathcal{N}_L \models A(k_1, \ldots, k_n, n)$ для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, n$. Отметим, что n-местная функция ψ определима в языке L тогда и только тогда, когда найдется натуральное число $z \in I_n^L$, для которого выполняется соотношение $\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_z^{L,n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Представляет интерес рассмотрение варианта конструктивной логики, основанного на использовании определимых в языке L функций, как конструктивного способа получения одних реализаций из других. Понятие L-реализуемости для языка LA можно определить по аналогии с рекурсивной реализуемостью Клини [1, §82]. Однако нетрудно убедиться, что возникающая при этом семантика совпадает со стандартной классической семантикой языка LA. Поэтому более уместным представляется рассмотрение L-реализуемости сразу в контексте абсолютной реализуемости предикатных формул [2].

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

[1] *Коновалов Александр Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. лаб. математических проблем искусственного интеллекта каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yrkonoval@gmail.com.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t),\ \mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Следуя [2], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A сопоставляет обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения всех натуральных чисел. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Для каждого натурального числа e, произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e\,\mathbf{r}_f^L\,A$ (число e реализует A при оценке f):

1) неверно, что $e\,\mathbf{r}_f^L\,\bot$;

2) верно, что $e\,\mathbf{r}_f^L\,\top$;

3) $e\,\mathbf{r}_f^L\,P(a_1,\ldots,a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1,\ldots,a_n)$, если P есть n-местная предикатная переменная;

4) $e\,\mathbf{r}_f^L\,(\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons [\mathsf{p}_1 e\,\mathbf{r}_f^L\,\Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}_f^L\,\Psi]$;

5) $e\,\mathbf{r}_f^L\,(\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons [(\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}_f^L\,\Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}_f^L\,\Psi)]$;

6) $e\,\mathbf{r}_f^L\,\exists x\,\Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}_f^L\,\Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

7) $e\,\mathbf{r}_f^L\,\forall x_1,\ldots,x_n\,(\Phi(x_1,\ldots,x_n) \to \Psi(x_1,\ldots,x_n)) \rightleftharpoons [e \in I_{n+1}^L$ и для всех[1] $s,\ a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}$ верно

$$s\,\mathbf{r}_f^L\,\Phi(a_1,\ldots,a_n) \Longrightarrow {!}\varphi_e^L(a_1,\ldots,a_n,s) \text{ и } \varphi_e^L(a_1,\ldots,a_n,s)\,\mathbf{r}_f^L\,\Psi(a_1,\ldots,a_n)],$$

если $n \geqslant 0$;

8) $e\mathbf{r}_f^L\forall x_1,\ldots,x_n\,\Phi \rightleftharpoons [e\mathbf{r}_f^L\forall x_1,\ldots,x_n\,(\top \to \Phi)]$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$ и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f формулы A найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}_f^L\,A$. Понятие абсолютной L-реализуемости распространим на секвенции по аналогии с определением примитивно-рекурсивной реализуемости для секвенций из работы С. Салехи [3]:

$$e\,\mathbf{r}_f^L\,A(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow B(x_1,\ldots,x_n) \rightleftharpoons e\,\mathbf{r}_f^L\,\forall x_1,\ldots,x_n\,(A(x_1,\ldots,x_n) \to B(x_1,\ldots,x_n)).$$

Будем говорить, что секвенция $A \Rightarrow B$ является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f предикатных формул A и B найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}_f^L\,A \Rightarrow B$.

Базисная логика предикатов в виде секвенциального исчисления BQC описана в [4]. В работах [5, 6] доказана корректность исчисления BQC относительно семантик арифметической и гиперарифметической реализуемостей. Арифметическая и гиперарифметическая реализуемости суть варианты L-реализуемости для конкретных языков L. Секвенция $\top \to P(x) \Rightarrow P(x)$ невыводима в исчислении BQC. Докажем, что она не является абсолютно L-реализуемой.

Лемма 1. *Для всякой формулы $A(z)$ языка L найдется такая замкнутая формула Φ языка L, что имеет место*

$$\mathcal{N}_L \models A(\ulcorner \Phi \urcorner) \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models \Phi. \tag{1}$$

Доказательство. Определим общерекурсивную функцию $s(x_1,x_2)$ следующим образом:

$$s(m,n) \rightleftharpoons \begin{cases} \ulcorner [n/z]\Phi_m \urcorner, & \text{если } m \text{ — гёделев номер формулы языка } LA'; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $S(x_1,x_2,y)$ — арифметическая формула, определяющая в языке LA отношение $y = s(x_1,x_2)$. Определим формулу $\Psi(z)$ следующим образом:

$$\Psi(z) \rightleftharpoons \exists y\,(S(z,z,y) \wedge A(y)). \tag{3}$$

[1] Однако если в списке $x_1,\ldots,x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1,\ldots,a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

Из (3) следует, что для всех натуральных чисел k выполняется соотношение

$$\mathcal{N}_L \models \Psi(k) \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models A(s(k,k)). \tag{4}$$

Положив в (4) натуральное число k равным $\ulcorner\Psi\urcorner$, получаем

$$\mathcal{N}_L \models \Psi(\ulcorner\Psi\urcorner) \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models A(s(\ulcorner\Psi\urcorner,\ulcorner\Psi\urcorner)). \tag{5}$$

Согласно определению (2) имеем

$$s(\ulcorner\Psi\urcorner,\ulcorner\Psi\urcorner) = \ulcorner\Psi(\ulcorner\Psi\urcorner)\urcorner. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует, что

$$\mathcal{N}_L \models \Psi(\ulcorner\Psi\urcorner) \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models A(\ulcorner\Psi(\ulcorner\Psi\urcorner)\urcorner). \tag{7}$$

Соотношение (7) влечет (1), если в качестве формулы Φ взять $\Psi(\ulcorner\Psi\urcorner)$. Лемма доказана.

Пусть $GSt(L)$ — множество гёделевых номеров всех замкнутых формул языка L.

Лемма 2. *Всякая частичная функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям*

1) $\psi(n) = 1$, *если* $n \in GSt(L)$ *и* $\mathcal{N}_L \models \Phi_n$;

2) $\psi(n) = 0$, *если* $n \in GSt(L)$ *и* $\mathcal{N}_L \not\models \Phi_n$,

не определима в языке L никакой формулой этого языка.

Доказательство. Предположим противное: функция $\psi(x)$ определима в языке L формулой $A_\psi(x,y)$. Тогда для всех замкнутых формул Φ языка L имеет место эквивалентность

$$\mathcal{N}_L \models A_\psi(\ulcorner\Phi\urcorner, 1) \Longleftrightarrow \psi(\ulcorner\Phi\urcorner) = 1. \tag{8}$$

Применяя лемму 1 к формуле $\neg A_\psi(z,1)$, получаем, что найдется замкнутая формула Φ языка L, для которой выполняется соотношение

$$\mathcal{N}_L \models \neg A_\psi(\ulcorner\Phi\urcorner, 1) \Longleftrightarrow \mathcal{N}_L \models \Phi. \tag{9}$$

Учитывая, что функция ψ удовлетворяет условиям 1, 2, заключаем

$$\mathcal{N}_L \models \Phi \Longleftrightarrow \psi(\ulcorner\Phi\urcorner) = 1. \tag{10}$$

Из соотношений (8)–(10) получаем противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Секвенция $\top \to P(x) \Rightarrow P(x)$ не является абсолютно L-реализуемой.*

Доказательство. Предположим противное: для любой оценки f найдется такое натуральное число c, что имеет место

$$c\,\mathbf{r}_f^L\ \top \to P(x) \Rightarrow P(x). \tag{11}$$

Пусть f — такая оценка, что для всех натуральных чисел n выполняется соотношение

$$f(P)(n) = \{e \mid n \in GSt(L) \wedge [(e = 1 \wedge \mathcal{N}_L \models \Phi_n) \vee (e = 0 \wedge \mathcal{N}_L \not\models \Phi_n)]\}.$$

Тогда для всех $n \in GSt(L)$ имеем

$$e\,\mathbf{r}_f^L\,P(n) \Longleftrightarrow (e = 1 \wedge \mathcal{N}_L \models \Phi_n) \vee (e = 0 \wedge \mathcal{N}_L \not\models \Phi_n). \tag{12}$$

Пусть $GSt(LA')$ — множество гёделевых номеров всех замкнутых формул языка LA'. Следующим образом для каждого $n \in GSt(LA')$ определим формулу A_n языка LA':

$$A_n \rightleftharpoons ((y = 1) \wedge \Phi_n) \vee ((y = 0) \wedge \neg\Phi_n).$$

Пусть g — такая общерекурсивная функция, что $g(n) = \ulcorner A_n\urcorner$ для всех $n \in GSt(LA')$. Отметим, что если $n \in GSt(L)$, то A_n — формула языка L и выполняются соотношения $g(n) \in I_1^L$ и

$$\varphi_{g(n)}^L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{N}_L \models \Phi_n; \\ 0, & \text{если } \mathcal{N}_L \not\models \Phi_n. \end{cases} \tag{13}$$

Для всех натуральных чисел m и $n \in GSt(L)$ из (12), (13) следует отношение $\varphi_{g(n)}^L(m)\,\mathbf{r}_f^L\,P(n)$. Таким образом, если $n \in GSt(L)$, то имеем

$$g(n)\,\mathbf{r}_f^L\,\top \to P(n). \tag{14}$$

Учитывая (14), (11), заключаем, что

$$\varphi_c^L(n, g(n))\,\mathbf{r}_f^L\,P(n). \tag{15}$$

Из (12), (15) получаем

1) $\varphi_c^L(n, g(n)) = 1$, если $n \in GSt(L)$ и $\mathcal{N}_L \models \Phi_n$;

2) $\varphi_c^L(n, g(n)) = 0$, если $n \in GSt(L)$ и $\mathcal{N}_L \not\models \Phi_n$.

Таким образом, функция $\psi(x)$, заданная условным равенством $\psi(x) \simeq \varphi_c^L(x, g(x))$, удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, не определима в языке L никакой формулой этого языка. С другой стороны, нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ определима в языке L формулой $\exists z\,(G(x,z) \wedge \Phi_c^U(x, z, y))$, где $G(x, y)$ — арифметическая формула, выражающая в языке LA отношение $g(x) = y$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Интуиционистская логика не является корректной относительно семантики абсолютной L-реализуемости.*

Доказательство Формула $\forall x\,((\top \to P(x)) \to P(x))$ выводима в интуиционистском исчислении предикатов. Из теоремы 1 следует, что формула $\forall x\,((\top \to P(x)) \to P(x))$ не является абсолютно L-реализуемой. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
2. *Плиско В.Е.* Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, № 2. 315–334.
3. *Salehi S.* Primitive recursive realizability and basic arithmetic // Bull. Symbol. Logic. 2001. **7**, N 1. 147–148.
4. *Ruitenburg W.* Basic predicate calculus // Notre Dame J. Formal Logic. 1998. **39**, N 1. 18–46.
5. *Коновалов А.Ю., Плиско В.Е.* О гиперарифметической реализуемости // Матем. заметки. 2015. **98**, № 5. 725–746.
6. *Коновалов А.Ю.* Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 52–56.

Поступила в редакцию
20.06.2018

УДК 517.926

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, У КОТОРОЙ ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ГЕНЕРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НЕ СОВПАДАЮТ С НИЖНЕПРЕДЕЛЬНЫМИ

В. И. Кокушкин[1]

В работе, с одной стороны, показано, что верхнепредельные аналоги центральных показателей Винограда–Миллионщикова, определенные на пространстве правильных линейных дифференциальных систем, совпадают с нижнепредельными. Аналогичный факт верен и для аналогов генеральных (особых) показателей Боля–Персидского на пространстве почти приводимых систем. С другой стороны, приведен пример двумерной правильной дифференциальной системы с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами и с несовпадающими верхнепредельными и нижнепредельными как центральными, так и генеральными показателями.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейная система, центральные показатели, генеральные показатели, правильные системы.

On the one hand, we show that the upper-limit analogues of Vinograd–Millionschikov central exponents determined on the space of regular linear differential systems are equal to lower-limit ones. A similar fact is also valid for analogues of Bohl–Persidsky general exponents

[1] *Кокушкин Владислав Игоревич* — асп. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vikokushkin@gmail.com.