Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

Николаева Ольга Александровна

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С ВНУТРЕННИМИ ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.03 Математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Профессор Н.Н.Нефедов

Москва, 2020 г.

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Диссертационная работа представляется к защите по специальности 01.01.03 «Математическая физика». Одной из целей данной специальности является разработка и усовершенствование математического аппарата для решения математических проблем, возникающих в различных областях и задачах теоретической физики. Одной из таких задач является исследование решений уравнений типа реакция-диффузия-перенос в средах с разрывными характеристиками. Особый интерес представляет случай, когда в следствие разрыва функций, описывающих параметры среды, на границе раздела возникает область с большим градиентом решения модельной задачи. Эта область называется внутренним переходным слоем. Ширина переходного слоя, как правило, мала по сравнению с шириной рассматриваемой области и может быть принята за малый параметр в задаче. Наличие малого параметра делает уравнение сингулярно возмущенным.

В данной работе рассматриваются задачи типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция с малым параметром при старшей пространственной производной. Подобные задачи успешно применяются в задачах моделирования различных физических явлений, происходящих вблизи границы раздела сред. Стационарные решения задач реакция-диффузия-адвекция с внутренними переходными слоями возникают при математическом моделировании распределения плотностей жидкостей или газов или температуры при наличии пространственных неоднородностей [2, 3] или в нелинейной акустике [4–6]. К таким задачам относятся, например, исследования поведения температуры в приповерхностном слое океана [7–9], описание волновых функций носителей в гетероструктурах Si/Ge [10], распространение автоволнового фронта в средах с барьерами [11–13]. Скачки реактивных и адвективных слагаемых в этих моделях обусловлены границами разделов сред. Определение условий существования и устойчивости стационарных решений с большими градиентами является важным аспектом для создания адекватных моделей процессов со стационарным распределением полей физических величин. Аналитические исследования также позволяют создавать эффективные численные методы решения уравнений с внутренними переходными слоями [14–22].

Цель

Целью работы является получение условий существования устойчивых стационарных решений сингулярно возмущенных уравнений типа реакция-диффузия и реакция- диффузия -адвекция, обладающих областью с большим градиентом. В работе рассматриваются стационарные решения двух типов: решение с переходным слоем, то есть имеющее большой градиент вблизи некоторой заданной кривой, в следствие того, что функции правой части претерпевают разрыв на этой кривой, и решение погранслойного типа, имеющее большой градиент вблизи одной из границ рассматриваемой области.

Задачи

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- Исследование новых классов сингулярно возмущенных задач типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция с разрывными коэффициентами.

- Строгое математическое обоснование результатов. Построение асимптотики указанных выше решений, получение условий и доказательство существования решений с построенной асимптотикой.

- Доказательство локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову построенных стационарных решений.

Основные положения, выносимые на защиту

Для следующих задач:

- одномерная задача типа реакция-диффузия в случае разрыва реактивного и диффузионного членов в некоторой заранее заданной точке внутри области определения;

- двумерная задача типа реакция-диффузия-адвекция в случае построения решения погранслойного типа;

- одномерная задача типа реакция-диффузия-адвекция в случае разрыва реактивного и адвективного членов в некоторой заранее заданной точке внутри области определения;

- двумерная задача типа реакция-диффузия-адвекция в случае разрыва реактивного и адвективного слагаемого на некоторой заранее заданной кривой внутри области определения

1. существуют решения в виде контрастных структур;

2. предложенные в работе алгоритмы, разработанные на основе алгоритма Васильевой, позволяют построить асимптотические приближения решений, а также верхние и нижние решения в виде модификаций формальных асимптотик;

3. справедливы теоремы локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову, доказанные с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Научная новизна

Исследование, проведенное в диссертационной работе, продолжает цикл работ, касающихся асимптотического исследования существования, локальной единственности и устойчивости краевых задач типа реакция - диффузия и реакция-диффузия-адвекция. Новизна работы заключается в получении достаточных условий существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости, проведении модификации алгоритма Васильевой и метода дифференциальных неравенств и получении важных оценок для решения задач с разрывными коэффициентами и его производных.

Теоретическая и практическая ценность

Практическая значимость диссертационной работы состоит в получении достаточных условий существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решений с пограничными и внутренними переходными слоями уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с разрывными коэффициентами. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых математических моделей процессов, происходящих на границе раздела сред. Полученные в работе условия устойчивости крайне важны для создания адекватных моделей, описывающих стационарные процессы. К таким моделям относится разработанная при участии автора модель распределения температуры на границе вода-воздух. Описание модели приведено в конце следующей главы.

Теоретическая значимость работы состоит в распространении асимптотического метода дифференциальных неравенств на случай уравнений с разрывными коэффициентами, а также в получении важных оценок для решения и его производных, которые в дальнейшем могут быть использованы для решения задач стационирования и разработки численных методов для эффективного решения жестких задач с разрывными коэффициентами.

Личный вклад

Результаты диссертации, выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно. Личный вклад автора состоит в модификации известных алгоритмов построения асимптотических разложений, получении условий и доказательстве существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарных решений сингулярно возмущенных задач типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция с разрывными коэффициентами.

Апробация

Результаты работы были доложены на следующих конференциях: Ломоносов-2012 (2012, Москва); Ломоносов-2014 (2014, Москва); Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования (2014, Москва); Путь в науку (2015, Ярославль); Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015 (2015, Новосибирск); Тихоновские Чтения-2015 (2015, Москва); Современные проблемы математической физики и вычислительной математики (2016, Москва); International Conference On Mathematical Modelling In Applied Sciences (2017, Санкт-Петербург); Тихоновские Чтения-2017 (2017, Москва); Ломоносовские чтения-2018 (2018, Москва); Динамика. 2019. Ярославль (2019, Ярославль).

Публикации

Статьи в журналах

1. *Левашова Н.Т., Николаева О.А., Пашкин А.Д.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с исполь-

зованием теории контрастных структур // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2015. №5, С. 12-16.

2. *Пан Я.Фэй, Мин Кан Ни, Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Внутренние слои для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №12. С. 1616-1626.

3. *Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24. №3. С. 339-352.

4. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A.* The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. №18. C. 9203-9217.

5. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А.* Существование и асимптотическая устойчивость стационарного погранслойного решения двумерной задачи реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. №2. С. 204-216.

6. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А.* Асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56 №5. С. 615-631.

Тезисы докладов

1. *Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с помощью теории контрастных структур // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тезисы и тексты докладов международной конференции. Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014 г. Издательство РУДН Москва. С. 215-216.

2. *Левашова Н.Т., Орлов А.О., Николаева О.А.* Стационарная задача реакция-диффузия в средах с разрывными характеристиками // Научная конференция «Тихоновские чтения». 26 октября - 2 ноября 2015 года. МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс Москва. С. 69-69.

3. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А., Орлов А.О.* Внутренние переходные слои в решениях краевых задач с разрывными неоднородностями // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. Новосибирск. С. 11-11.

4. *Николаева О.А.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с помощью теории контрастных структур // Путь в науку IV. Международная молодежная научно-практическая конференция. ЯрГУ Ярославль. С. 36-39.

5. *Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Уравнение реакция-диффузия в средах с разрывными характеристиками // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики, международная конференция, приуроченная к 110-летию со дня рож-

дения академика А.Н. Тихонова, Москва, 31 октября - 3 ноября 2016 г., Тезисы докладов. МГУ. С. 225-225.

6. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А., Орлов А.О.* Устойчивость решения вида контрастной структуры уравнения реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.). МАКС Пресс Москва. С. 76-76.

7. *Levashova N., Nikolaeva O., Nefedov N., Orlov A.* The contrast structure type solution of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // International conference on mathematical modelling in applied sciences. Saint Petersburg-Russia. July 24-28 2017. Saint Petersburg-Russia. C. 241-242.

8. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А., Орлов А.О.* Существование решения и устойчивость решений с внутренними слоями в задачах типа реакция - диффузия - адвекция с разрывными коэффициентами // Научная конференция «Ломоносовские чтения. Секция физики. 16-25 апреля 2018 года». Москва, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. С. 92-94.

9. *Николаева О.А., Левашова Н.Т.* Асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения реакция-диффузия-адвекция // Международная конференция «Динамика. 2019. Ярославль». Сборник тезисов докладов. ЯрГУ. С. 82-82.

Структура и объем

Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы, трех содержательных глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 150 страниц. Список использованной литературы содержит 93 наименования.

Глава 1

Обзор литературы

Основателем теории сингулярных возмущений является академик А.Н. Тихонов. Начиная с его основополагающих работ сингулярно возмущенные уравнения привлекают внимание многих исследователей. К настоящему времени развит ряд асимптотических и численных методов, позволяющих строить приближенное решение в тех или иных сингулярно возмущенных задачах. Основным методом построения асимптотических решений является метод пограничных функций, он изложен вместе с классической теорией в работе [1]. Особое внимание уделяется решениям краевых задач с внутренним переходным слоем.

Существование решения с внутренним переходным слоем для сингулярно возмущенной задачи с т.н. малой адвекцией рассматривается в работах [23–32]. Исследуются задачи вида:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon(\mathbf{A}(u,x), \nabla u) - B(u,x) = 0, \ x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \\ u(x,\varepsilon) = g(x), \ x \in \partial D, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}(u,x) = \{A_1(u,x), A_2(u,x)\}$ и $\varepsilon > 0$. Доказательство существования проводится методом сращивания [33, 34].

В работах [35–40] доказывается существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость решения с внутренним переходным слоем для параболических задач следующего типа:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \varepsilon^2 A(u,x,t,\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x} - F(u,x,t,\varepsilon) = 0, \\ (x,t) \in D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = u^0(t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = u^1(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+T,\varepsilon),\ (x,t) \in \bar{D}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Существование решения с внутренним переходным слоем для сингулярно возмущенной задачи в случае «большой» адвекции, т.е. в случае, когда адвективное слагаемое по порядку величины сопоставимо с реактивным, исследуется в работах [41–45]. Постановка задачи выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta_{xy} v - \dfrac{\partial v}{\partial t} = (\mathbf{A}(v,x,y,\varepsilon), \nabla)\, v + B(v,x,y,\varepsilon),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,a),\ t > 0 \\ v(x,0,t,\varepsilon) = u^0(x);\ v(x,a,t,\varepsilon) = u^a(x)\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,\infty) \\ v(x,y,t,\varepsilon) = v(x+L,y,t,\varepsilon)\ x \in \mathbb{R},\ y \in [0,a],\ t \in [0,\infty) \\ v(x,y,0,\varepsilon) = v_{init}(x,y,\varepsilon),\ x \in \mathbb{R},\ y \in [0,a]; \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\mathbf{A}(v,x,y,\varepsilon) = \{A_1(v,x,y,\varepsilon), A_2(v,x,y,\varepsilon)\},$$

а $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ - малый параметр. Функции $A_i(v,x,y,\varepsilon),\ i = 1,2$ и $B(v,x,y,\varepsilon)$ – L-периодические по переменной x, достаточно гладкие в области $I_v \times$

$\bar{D} \times [0, \infty)$, где I_v – допустимый интервал изменения значений v, $\bar{D} = \{(x, y) : \mathbb{R} \times [0, a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^a(x)$ – L-периодические, непрерывные при $x \in \mathbb{R}$; $v_{init}(x, y, \varepsilon)$ – непрерывная функция в $\bar{D}$, L-периодическая по переменной x.

Задачи с разрывными коэффициентами рассматриваются в работах [46–50]. Исследуются задачи следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, y, \varepsilon), \ (x, y) \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial D} = u^0(x, y), \ (x, y) \in \partial D; \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь D – односвязная область на плоскости (x, y) с гладкой границей ∂D, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к кривой ∂D.

C_0 – простая гладкая замкнутая кривая, целиком лежащая в области D, и делящая область на две части: $D^{(-)}$, ограниченную кривой C_0, и $D^{(+)}$, ограниченную кривыми C_0 и ∂D. Функция $f(u, x, y, \varepsilon)$ определена на множестве $I_u \times \bar{D} \times (0, \varepsilon_0]$ и претерпевает разрыв I рода на поверхности

$$S(u, x, y) : \{u \in I_u; (x, y) \in C_0\} :$$

$$f(u, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, y, \varepsilon), \ u \in I_u, \ (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, x, y, \varepsilon), \ u \in I_u, \ (x, y) \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где функции $f^{(\mp)}(u, x, y, \varepsilon)$ – достаточно гладкие в области определения, и выполняется условие

$$f^{(-)}(u, x, y, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, x, y, \varepsilon)$$

при $(x, y) \in C_0,\ u \in I_u$.

Для доказательства существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решений вида контрастной структуры для сингулярно возмущенных параболических и эллиптических задач используется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Описание метода дифференциальных неравенств в случае гладких и разрывных коэффициентов приведено в работах [51–56]. Он основан на построении верхнего и нижнего решений рассматриваемой задачи. Так, например, для краевых задач

$$\begin{cases} Lu = f(u, M), \quad M \in D, \\ u(s) = h(s), \quad s \in \partial D, \end{cases} \tag{1.6}$$

где L – эллиптический оператор общего вида в замкнутой области $\bar{D}$, требуется построить функции $\alpha(M)$, $\beta(M)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Упорядоченность: $\alpha(M) \leq \beta(M),\ M \in \bar{D}$
2. Действие оператора: $L[\beta] - f(\beta, M) \leq 0 \leq L[\alpha] - f(\alpha, M),\ M \in D$
3. Условия на границе: $\alpha(s) \leq h(s) \leq \beta(s),\ s \in \partial D$

В этом случае $\beta(M)$ будет являться верхним решением, а $\alpha(M)$ – нижним. При обосновании метода дифференциальных неравенств используются теоремы о принципе максимума, которые для рассматриваемого класса задач доказаны в [40, 46, 56, 57].

Асимптотический метод дифференциальных неравенств является распространением метода дифференциальных неравенств на сингулярно возмущенные задачи. Он представлен в работах [58–61]. Основным его принципом является построение верхнего и нижнего решений в виде модификаций асимптотических приближений исходных задач.

Исследования, близкие к тематике настоящей диссертации можно также найти в работах [77–80]. Помимо рассмотренных существуют и альтернативные подходы к решению сингулярно возмущенных задач, например [81–87].

Применение асимптотического анализа в прикладных задачах с внутренними переходными слоями можно найти в работах [88–93].

Глава 2

Уравнение реакция-диффузия с разрывными реактивным и диффузионным слагаемыми

2.1 Постановка задачи

В данной главе исследуется вопрос о существовании, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения с внутренним переходным слоем сингулярно возмущенной задачи типа реакция-диффузия с разрывными реактивным и диффузионным слагаемыми. Исследования, проведенные в этой главе позволили создать модель распределения температуры на границе вода-воздух. В конце глвы приведены результаты, полученные согласно этой модели.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в области $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, \infty)$

$$
\begin{cases}
\varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial v}{\partial t} = f(v, x, \varepsilon),\ x \in (-1, 1),\ t > 0; \\
v(-1, t) = u^{(-)};\ v(1, t) = u^{(+)},\ t > 0; \\
v(x, 0) = v_{init}(x, \varepsilon),\ x \in [-1, 1],
\end{cases} \tag{2.1}
$$

здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр.

Пусть выполнены следующие условия:

Условие А1. Пусть функция $f(v, x, \varepsilon)$ определена всюду в области $v \in I_v \times [-1, 1] \times (0, \varepsilon_0]$, где I_v возможный интервал изменения v, и претерпевает разрыв первого рода вдоль прямой $\{v \in I_v,\ x = x_0\}$:

$$
f(v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(v, x, \varepsilon), & v \in I_v,\ -1 \le x \le x_0; \\ f^{(+)}(v, x, \varepsilon), & v \in I_v, \quad x_0 \le x \le 1, \end{cases}
$$

$$
f^{(-)}(v, x_0, \varepsilon) \neq f^{(+)}(v, x_0, \varepsilon),
$$

функции $f^{(\mp)}(v, x, \varepsilon)$ достаточно гладкие в областях $I_v \times [-1, x_0] \times (0; \varepsilon_0]$ и $I_v \times [x_0, 1] \times (0; \varepsilon_0]$ соответственно.

Пусть функция $k(x)$ строго положительна при $x \in [-1, 1]$, и претерпевает разрыв первого рода в точке $x_0 \in (-1, 1)$, достаточно удаленной от граничных точек отрезка $x = \mp 1$:

$$
k(x) = \begin{cases} k^{(-)}(x), & -1 \le x \le x_0, \\ k^{(+)}(x), & x_0 \le x \le 1, \end{cases} \quad k^{(-)}(x_0) \neq k^{(+)}(x_0),
$$

функции $k^{(\mp)}(x)$ – достаточно гладкие на отрезках $[-1, x_0]$ и $[x_0, 1]$ соответственно.

Условие A2. Пусть уравнение $f^{(-)}(u,x,0)=0$ имеет изолированное решение $u=\varphi^{(-)}(x)$, на отрезке $[-1,x_0]$, уравнение $f^{(+)}(u,x,0)=0$ имеет изолированное решение $u=\varphi^{(+)}(x)$, на отрезке $[x_0,1]$, и выполнено следующее неравенство:

$$\varphi^{(-)}(x_0)<\varphi^{(+)}(x_0).$$

Кроме того, пусть выполняются следующие неравенства

$$f_u\left(\varphi^{(-)}(x),x,0\right)>0,\ -1\le x\le x_0;\ f_u\left(\varphi^{(+)}(x),x,0\right)>0,\ x_0\le x\le 1$$

Будем искать стационарное решение задачи (2.1), которое близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$ слева от точки x_0, близко к функции $\varphi^{(+)}(x)$ справа от точки x_0 и резко изменяется от $\varphi^{(-)}(x)$ до $\varphi^{(+)}(x)$ в окрестности точки x_0.

Определение 2.1. *Функция* $v_\varepsilon(x,t)\in C\left([-1;1]\times[0,\infty)\right)\cap$
$\cap C^{2,1}\left(((-1;1)\setminus x_0)\ \times[0,\infty)\right)$ *называется решением задачи* (2.1), *если она удовлетворяет уравнению* (2.1) *на* $(x,t)\in((-1;x_0)\cup(x_0;1))\times(0,\infty)$, *граничным и начальному условиям, и выполняется следующее условие для производных:*

$$k^{(-)}(x_0)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x_0-0,t)=k^{(+)}(x_0)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x_0+0,t). \tag{2.2}$$

Стационарное решение начально-краевой задачи (2.1) по определению является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=f(u,x,\varepsilon),\ \ x\in(-1;1),\quad u(-1,\varepsilon)=u^{(-)},\ u(1,\varepsilon)=u^{(+)}, \tag{2.3}$$

которое определяется аналогично

Определение 2.2. *Функция $u_\varepsilon(x) \in C\left([-1;1]\right) \cap C^2\left((-1;1) \setminus x_0\right)$ называется решением задачи (2.3), если она удовлетворяет уравнению (2.3) на $x \in (-1;x_0) \cup (x_0;1)$, граничным условиям, и выполняется следующее условие для производных:*

$$k^{(-)}(x_0)\frac{du_\varepsilon}{dx}(x_0-0) = k^{(+)}(x_0)\frac{du_\varepsilon}{dx}(x_0+0). \tag{2.4}$$

2.2 Присоединенные системы

Введем растянутую переменную $\xi = \dfrac{x-x_0}{\varepsilon}$ для описания решения в окрестности точки x_0, и запишем так называемые присоединенные уравнения задачи (2.3):

$$\begin{cases} k^{(-)}(x_0)\dfrac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi < 0; \\ k^{(+)}(x_0)\dfrac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, x_0, 0), \ \xi > 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Каждое из присоединенных уравнений эквивалентно присоединенной системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi; \\ \dfrac{d\Phi}{d\xi} = \left(k^{(\mp)}(x_0)\right)^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0). \end{cases} \tag{2.6}$$

Из **A2** следует, что точки $(\varphi^{(\mp)}, 0)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ являются точками покоя типа седла систем (2.6). Разделим в каждой системе второе уравнение на первое и домножим каждое получившееся уравнение на Φ, таким образом получим следующие уравнения, определяющие фазовые траектории $\Phi(\tilde{u})$:

$$\Phi\frac{d\Phi}{d\tilde{u}} = \Big(k^{(\mp)}(x_0)\Big)^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0). \tag{2.7}$$

Условие A3. Пусть неравенство

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} f^{(-)}(u, x_0, 0)du > 0 \text{ выполняется всюду в } \varphi^{(-)}(x_0) < p \le \varphi^{(+)}(x_0)$$

а неравенство

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} f^{(+)}(u, x_0, 0)du > 0 \text{ выполняется всюду в } \varphi^{(-)}(x_0) \le p < \varphi^{(+)}(x_0).$$

Из **A3** и **A1** следует, что существует сепаратриса

$$\Phi^{(-)}(\tilde{u}) = \sqrt{2\left(k^{(-)}(x_0)\right)^{-1} \int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0)du}, \tag{2.8}$$

входящая в точку покоя $\left(\varphi^{(-)}, 0\right)$ при $\xi \to -\infty$ и сепаратриса

$$\Phi^{(+)}(\tilde{u}) = \sqrt{2\left(k^{(+)}(x_0)\right)^{-1} \int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0)du}, \tag{2.9}$$

входящая в точку покоя $\left(\varphi^{(+)}, 0\right)$ при $\xi \to +\infty$.

Определим функцию

$$H(\tilde{u}) := k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(\tilde{u}) - k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(\tilde{u}) =$$
$$= \sqrt{2k^{(-)}(x_0)\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0)du} - \sqrt{2k^{(+)}(x_0)\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0)du}.$$

Условие А4. Пусть существует p_0 - решение уравнения $H(\tilde{u}) = 0$, лежащее в интервале $\left(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\right)$, и выполняется следующее условие

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) = \frac{f^{(-)}(p_0, x_0, 0)}{\Phi^{(-)}(p_0)} - \frac{f^{(+)}(p_0, x_0, 0)}{\Phi^{(+)}(p_0)} > 0 \qquad (2.10)$$

2.3 Асимптотическое приближение решения

Будем строить асимптотическое приближение решения задачи (2.3) отдельно слева и справа от точки x_0:

$$U(x, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x, \varepsilon), x \in [-1, x_0], \\ U^{(+)}(x, \varepsilon), x \in [x_0, 1]. \end{cases} \qquad (2.11)$$

в точке x_0 будем производить непрерывное сшивание построенных частей. Значение функции $U(x, \varepsilon)$ в точке x_0 неизвестно, обозначим его p:

$$U^{(-)}(x, \varepsilon) = U^{(+)}(x, \varepsilon) = p, \qquad (2.12)$$

и будем искать из условия сшивания производных:

$$k^{(-)}(x_0)\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0) = k^{(+)}(x_0)\frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0). \qquad (2.13)$$

Каждую функцию $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем искать в виде суммы трех слагаемых:

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) + R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right), \tag{2.14}$$

здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярная часть, $Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon)$ – функции переходного слоя, описывающие поведение решения в окрестности точки x_0, а $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)$ – погранслойные функции, описывающие решение вблизи граничных точек отрезка $[-1,1]$, $\eta^{(\mp)} = \dfrac{x \pm 1}{\varepsilon}$ – растянутые переменные, определенные вблизи граничных точек.
Каждое слагаемое функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем искать в виде суммы по степеням ε:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + ...; \tag{2.15}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi) + ...; \tag{2.16}$$

$$R^{(\mp)}(\eta^{(\mp)},\varepsilon) = R_0^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}) + \varepsilon R_1^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}) + ... \tag{2.17}$$

2.3.1 Регулярная часть асимптотического приближения

Регулярная часть асимптотического приближения определяется как решение уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k^{(\mp)}(x)\frac{d\bar{u}^{(\mp)}}{dx}\right) = f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)},x,\varepsilon). \tag{2.18}$$

Подставляя в (2.18) суммы (2.15), раскладывая функции $k^{(\mp)}(x)$ и $f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)},x,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}$, $i = 0,1,....$

Приравнивая коэффициенты при ε^0 получим уравнения для определения функций регулярной части нулевого порядка: $f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0$. Согласно условию **A2** $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(x)$.
Функции $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ определяются из уравнений

$$f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \cdot \bar{u}_1^{(\mp)} = f_\varepsilon^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)$$

которые в следствие **A2** имеют единственное решение.
$m-$тый порядок разложения будет определяться следующим образом:

$$\bar{u}_m^{(\mp)} = (f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0))^{-1} \cdot h_m^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, ..., \bar{u}_{m-1}^{(\mp)}, x)$$

где $h_m^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, ..., \bar{u}_{m-1}^{(\mp)}, x)$ – известные функции. Эти уравнения разрешимы в сиду условия **A2**.

2.3.2 Функции переходного слоя

Согласно методу пограничных функций [1], общие задачи для функций переходного слоя будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} k^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi)\dfrac{d^2Q^{(\mp)}}{d\xi^2} + \varepsilon\dfrac{dk^{(\mp)}}{dx}(x_0 + \varepsilon\xi)\dfrac{dQ^{(\mp)}}{d\xi} = Qf^{(\mp)}, \\ Q^{(\mp)}(0) = p - \bar{u}^{(\mp)}, \\ Q^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} Qf^{(\mp)} = f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi), x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon), x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.20}$$

и в качестве второго дополнительного условия добавлено условие убывания функции при удалении от точки x_0.
Подставим суммы (2.16) в (2.19) и приравняем коэффициенты при ε^0. Тогда получим следующие задачи для определения функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$\begin{cases} k^{(\mp)}(x_0)\dfrac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}, x_0, 0\right), \\ Q_0^{(\mp)}(0) + \varphi^{(\mp)}(x_0) = p, \\ Q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Задачи для функций $Q_0^{(-)}(\xi)$ определены при $\xi \in (-\infty, 0)$, а для функций $Q_0^{(+)}(\xi)$ – при $\xi \in (0, +\infty)$.
Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \le 0; \\ \varphi^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi^{(-)}(\xi) = \dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \le 0; \\ \Phi^{(+)}(\xi) = \dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \ge 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

и перепишем задачи (2.19) в новых обозначениях:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}\left(\tilde{u}, x_0, 0\right); \quad \tilde{u}(0) = p; \quad \tilde{u}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(x_0). \tag{2.23}$$

Задачи (2.23) эквивалентны присоединенным системам (2.6). Из условий **A2** и **A3** следует, что существуют решения задач:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2\left(k^{(-)}(x_0)\right)^{-1} \int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0)du}, \quad \xi \le 0, \quad \tilde{u}(0) = p \tag{2.24}$$

и

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2\left(k^{(+)}(x_0)\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0)du}, \;\; \xi \geq 0, \quad \tilde{u}(0) = p. \quad (2.25)$$

Можно доказать ([1, 62]), что для функции $\tilde{u}$ выполняется оценка

$$\left|\tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0)\right| \leq Ce^{-|\kappa|\xi},$$

где C и κ – положительные постоянные. Таким образом, функции $Q_0^{(\mp)}(\xi)$ имеют следующие экспоненциальные оценки:

$$\left|Q_0^{(\mp)}(\xi)\right| \leq Ce^{-|\kappa|\xi} \quad (2.26)$$

Введем обозначения

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\xi) := f^{(\mp)}\left(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi), x_0, 0\right), \quad \bar{f}^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0\right) \quad (2.27)$$

а аналогичные обозначения для производных функции f.

Приравнивая коэффициенты при ε^1 в (2.19) получим следующие задачи для функций $Q_1^{(-)}(\xi)$ при $\xi \in (-\infty, 0)$ и функций $Q_1^{(+)}(\xi)$ при $\xi \in (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} k^{(\mp)}(x_0)\dfrac{d^2Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)} = Qf_1^{(\mp)}(\xi); \\ Q_1^{(\mp)}(0) + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0) = 0; \;\; Q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

где

$$Qf_1^{(\mp)}(\xi) = \left(\bar{u}_1^{(\mp)} + \xi \frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(x_0)\right)\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right) +$$

$$+\xi\left(\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_0)\right) + \left(\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x_0)\right) - \frac{dk^{(\mp)}}{dx}(x_0)\left(\xi\frac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} + \frac{dQ_0^{(\mp)}}{d\xi}\right).$$

Решения задач (2.28) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)}\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)Qf_1^{(\mp)}(\sigma)d\sigma.$$

Функции $Qf_1^{(\mp)}(\xi)$ и $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам, аналогичным (2.26).

Аналогичным образом получим задачи для определения функций $m-$того порядка

$$\begin{cases} k^{(\mp)}(x_0)\dfrac{d^2Q_m^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_m^{(\mp)} = Qf_m^{(\mp)}(\xi); \\ Q_m^{(\mp)}(0) + \bar{u}_m^{(\mp)}(x_0) = 0; \;\; Q_m^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{2.29}$$

где $Qf_m^{(\mp)}(\xi)$ – известные функции, зависящие от $\bar{u}_j^{(\mp)}(x_0)$, $j \le m$ и $Q_k^{(\mp)}(\xi)$, $k \le m-1$. Решения задач также можно выписать в явном виде:

$$Q_m^{(\mp)}(\xi) = -\bar{u}_m^{(\mp)}(x_0)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)}\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)Qf_m^{(\mp)}(\sigma)d\sigma.$$

2.3.3 Погранслойные функции

Погранслойные функции $R^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}, \varepsilon)$ строятся в полной аналогии с работой [1].

2.3.4 Сшивание производных асимптотических представлений слева и справа от точки разрыва

Введем функцию

$$H(p, \varepsilon) := k^{(-)}(x_0)\frac{dU^{(-)}}{dx}(p, x_0, \varepsilon) - k^{(+)}(x_0)\frac{dU^{(+)}}{dx}(p, x_0, \varepsilon). \qquad (2.30)$$

С учетом равенств (2.14) – (2.16) функцию $H(p, \varepsilon)$ можно представить в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} H(p, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p) + ... = k^{(-)}(x_0)\frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) - k^{(+)}(x_0)\frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) + \\ + \varepsilon \left[k^{(-)}(x_0) \left(\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) \right) - \right. \\ \left. - k^{(+)}(x_0) \left(\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) - \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0) \right) \right] + ... \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Выполнение условия (2.13) эквивалентно выполнению равенства

$$H(p, \varepsilon) = 0. \qquad (2.32)$$

Представим p в виде разложения по степеням малого параметра:

$$p := p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + ... \qquad (2.33)$$

Подставим разложение (2.33) в (2.32), будем объединять коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравнивать их к нулю.

В нулевом порядке с учетом введенных обозначений (2.22) условие сшивания приводит к равенству

$$k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(p_0) - k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(p_0) = 0.$$

Величина p_0, для которой это равенство справедливо, существует согласно условию **A4**.

Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^i,\ i \geq 1$ в левой части (2.32), получим уравнения для определения коэффициентов p_i :

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0) \cdot p_i = G_i,$$

где G_i – известные величины, в частности, $G_1 = -H_1(p_0)$.

Эти уравнения разрешимы в силу неравенства (2.10).

2.3.5 Асимптотическое представление решения

Если потребовать достаточной гладкости функций $k^{(\mp)}(x)$ и $f^{(\mp)}(u, x, \varepsilon)$, то с помощью описанного алгоритма можно найти коэффициенты разложений (2.15) – (2.17) до произвольного порядка n. Составим суммы

$$U_n^{(-)}(p(\varepsilon), x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}(\xi)\right),\ x \in [-1, x_0],\ \xi \leq 0;$$
$$U_n^{(+)}(p(\varepsilon), x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\xi)\right),\ x \in [x_0, 1],\ \xi \geq 0$$

Асимптотическим представлением порядка n решения задачи (2.3) будем называть функцию

$$U_n(p(\varepsilon), x, \varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(p(\varepsilon), x, \varepsilon), \ x \in [-1, x_0]; \\ U_n^{(+)}(p(\varepsilon), x, \varepsilon), \ x \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

Функции $U_n^{(\mp)}(p(\varepsilon), x, \varepsilon)$ по своему построению удовлетворяют уравнению (2.3) и граничным условиям с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

2.4 Верхнее и нижнее решения

Доказывать существование стационарного решения будем при помощи метода дифференциальных неравенств, использующего метод верхних и нижних решений.

Определение 2.3. *Функции* $\beta(x, \varepsilon),\ \alpha(x, \varepsilon) \in C\left([-1, 1]\right) \cap C^2\left([-1, 1] \setminus x_0\right)$ *называются верхним и нижним решениями задачи* (2.3) *соответственно, если при достаточно малом* ε *выполняются следующие условия:*

1. Упорядоченность: $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \ \ x \in [-1, 1]$.

2. Действие оператора в уравнении (2.3):

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\beta}{dx}\right) - f(\beta, x, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\alpha}{dx}\right) - f(\beta, x, \varepsilon),$$
$$x \in ([-1, 1] \setminus x_0).$$

3. Условия на границе: $\alpha(\mp 1, \varepsilon) \leq u^{(\mp)} \leq \beta(\mp 1, \varepsilon)$

4. Неравенства для производных:

$$k^{(-)}(x_0)\frac{d\beta}{dx}(x_0-0,\varepsilon) \geq k^{(+)}(x_0)\frac{d\beta}{dx}(x_0+0,\varepsilon);$$
$$k^{(-)}(x_0)\frac{d\alpha}{dx}(x_0-0,\varepsilon) \leq k^{(+)}(x_0)\frac{d\alpha}{dx}(x_0+0,\varepsilon)$$

2.4.1 Построение верхнего и нижнего решений

Будем строить верхнее решение $\beta(x,\varepsilon)$ отдельно на каждом из отрезков $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$ в виде модификации формальной асимптотики n-го порядка:

$$\beta_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \beta_n^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)} + \varepsilon^n\left(\mu + q^{(-)}(\xi)\right), \ x\in[-1,x_0], \ \xi \leq 0; \\ \beta_n^{(+)}(x,\varepsilon) = U_n^{(+)} + \varepsilon^n\left(\mu + q^{(+)}(\xi)\right), \ x\in[x_0,1], \ \xi \geq 0; \end{cases} \tag{2.34}$$

Здесь положительная константа μ подбирается таким образом, чтобы выполнялось условие 3., и неравенства 1. и 2. выполнялись вдали от точки x_0. Функции $q^{(\mp)}(\xi)$ вводятся для устранения невязок в окрестности точки x_0 в неравенстве 2., возникающих в результате добавления величины μ. Эти функции определяются как решения следующих краевых задач

$$\begin{cases} k^{(\mp)}(x_0)\dfrac{d^2q^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)q^{(\mp)} = \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\mu - de^{-\lambda|\xi|}; \\ q^{(\mp)}(0) + \mu = \delta; \ \ q^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Здесь мы использовали обозначения (2.27). Задача для $q^{(-)}(\xi)$ определена при $\xi \leq 0$, а задача для $q^{(+)}(\xi)$ – при $\xi \geq 0$. Значения δ, d, λ выбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства 1. и 4.

Решения задач (2.35) можно выписать в явном виде

$$q^{(\mp)}(\xi) = (\delta-\mu)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)}+$$
$$+\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)}\int_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)(\xi')}\right)^2}\int_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)\left(\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\sigma)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\mu - de^{-\lambda|\sigma|}\right)d\sigma. \tag{2.36}$$

Заметим, что выполняются следующие оценки

$$\left|\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right| < Ce^{-\kappa|\xi|},$$

где C и κ – положительные постоянные.
Выберем положительные константы δ, d и λ достаточно большими, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$\delta-\mu>0;\ \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\mu - de^{-\lambda|\xi|}<0$$

тогда функция $q^{(-)}(\xi)$ будет строго положительной при $\xi \le 0$, а функция $q^{(+)}(\xi)$ – строго положительной при $\xi \ge 0$.
Нижнее решение определим следующим выражением:

$$\alpha_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \alpha_n^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)} - \varepsilon^n\left(\mu + q^{(-)}(\xi)\right),\ x\in[-1,x_0],\ \xi\le 0; \\ \alpha_n^{(+)}(x,\varepsilon) = U_n^{(+)} - \varepsilon^n\left(\mu + q^{(+)}(\xi)\right),\ x\in[x_0,1],\ \xi\ge 0; \end{cases} \tag{2.37}$$

Лемма 2.1. *Функции $\alpha_n(x,\varepsilon)$ и $\beta_n(x,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям 1. – 4.*

Рассмотрим разность $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$ на отрезках $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$:

$$\beta_n(x,\varepsilon)-\alpha_n(x,\varepsilon)=\varepsilon^n\left(2\mu+2q^{(\mp)}(\xi)\right).$$

Выражение в правой части строго положительно в следствие положительности μ и $q^{(\mp)}(\xi)$. Таким образом, условие 1. выполнено всюду на отрезке $[-1,1]$.

Теперь покажем выполнение условия 2. на примере верхнего решения

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k^{(\mp)}(x)\frac{d\beta_n^{(\mp)}}{dx}\right)-f^{(\mp)}\left(\beta_n^{(\mp)},x,\varepsilon\right)=$$
$$-\varepsilon^n\left(\mu\cdot\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)+d\cdot e^{-\lambda|\xi|}\right)+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\quad(2.38)$$

Функции $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ положительны при $x\in[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$ соответственно в следствие условия **A2**. Таким образом, выражение в правой части отрицательно при достаточно малом ε, и неравенство 2. выполняется для верхнего решения. Выполнение условия 2. для нижнего решения доказывается аналогично.

Проверим теперь для верхнего решения выполнение условия 4.

$$k(x_0-0)\frac{d\beta_n}{dx}(x_0-0,\varepsilon)-k(x_0+0)\frac{d\beta_n}{dx}(x_0+0,\varepsilon)=k^{(-)}(x_0)\frac{d\beta_n^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon)-$$
$$-k^{(+)}(x_0)\frac{d\beta_n^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon)=\varepsilon^{n-1}\left(k^{(-)}(x_0)\frac{dq^{(-)}}{d\xi}(0)-k^{(+)}(x_0)\frac{dq^{(+)}}{d\xi}(0)\right)+O\left(\varepsilon^n\right).\quad(2.39)$$

здесь были учтены условия сшивания (2.13).

Используя явный вид функций (2.36), запишем выражения для их производных при $\xi = 0$:

$$\frac{dq^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \delta \cdot \frac{f^{(\mp)}(p_0, x_0, 0)}{k^{(\mp)}(x_0)\Phi^{(\mp)}(0)} - \frac{\mu}{\Phi^{(\mp)}(0)} \cdot \frac{\bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)}{k^{(\mp)}(x_0)} \Big(p_0 - \varphi^{(\mp)}(x_0)\Big) - \\ - \frac{d}{k^{(\mp)}(x_0)\Phi^{(\mp)}(0)} \int_{\mp\infty}^{0} \Phi^{(\mp)}(\xi) \cdot e^{-\lambda|\xi|} d\xi \quad (2.40)$$

Здесь было учтено второе уравнение системы (2.6), обозначение (2.22) и граничные условия для $Q_0^{(\mp)}(\xi)$. Таким образом, выражение (2.39) принимает вид

$$k(x_0 - 0)\frac{d\beta_n}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) - k(x_0 + 0)\frac{d\beta_n}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon) = \\ = \varepsilon^{n-1}\delta \cdot \frac{dH}{dp}(p_0) - \frac{\varepsilon^{n-1}\mu \cdot \bar{f}_u^{(-)}(x_0)}{\Phi^{(-)}(0)} \Big(p_0 - \varphi^{(-)}(x_0)\Big) + \\ + \frac{\varepsilon^{n-1}\mu \cdot \bar{f}_u^{(+)}(x_0)}{\Phi^{(+)}(0)} \Big(p_0 - \varphi^{(+)}(x_0)\Big) - \frac{\varepsilon^{n-1}d}{\Phi^{(-)}(0)} \int_{-\infty}^{0} \Phi^{(-)}(\xi) \cdot e^{\lambda\xi} d\xi + \\ + \frac{\varepsilon^{n-1}d}{\Phi^{(+)}(0)} \int_{+\infty}^{0} \Phi^{(+)}(\xi) \cdot e^{-\lambda\xi} d\xi$$

Согласно условию **A4** $dH/dp(p_0) > 0$, поэтому, если положительная константа δ достаточно велика, выражение в правой части положительно. Выполнение условия 4. для нижнего решения проверяется аналогичным образом.

2.5 Существование решения

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* ***A1*** *–* ***A4****, тогда для достаточно малого* ε *существует решение* $u_\varepsilon(x)$ *задачи* (2.3)*, для которого функция* $U_n(x, \varepsilon)$ *является равномерным асимптотическим прибли-*

жением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть выполняется неравенство

$$|u_\varepsilon(x) - U_n(x,\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1} \tag{2.41}$$

где C – положительная постоянная, не зависящая от ε

Для доказательства теоремы будем использовать результаты, представленные в [54].

2.5.1 Слабое решение

На основании работы [54] введем понятие слабого решения задачи (2.3) и понятия слабых верхнего и нижнего решений.

Определение 2.4. *Функция $u_\varepsilon(x)$ называется слабым решением задачи (2.3), если $u_\varepsilon(x) \in W^{1,2}$, $u_\varepsilon(-1) = u^{(-)}$, $u_\varepsilon(1) = u^{(+)}$ и равенство*

$$\int_{-1}^{1} \left(-\varepsilon^2 k(x) \frac{du_\varepsilon}{dx}\frac{d\phi}{dx} - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\phi(x) \right) dx = 0 \tag{2.42}$$

выполняется для любой функции $\phi(x) \in W^{1,2}$, строго положительной при $x \in (-1,1)$, у которой $\phi(-1) = \phi(1) = 0$.

Определение 2.5. *Пара функций $\beta(x,\varepsilon), \alpha(x,\varepsilon) \in W^{1,2}$ называются слабыми верхним и нижним решениями задачи (2.3), если они упорядочены, то есть $\forall x \in [-1,1]$ $\alpha(x,\varepsilon) \leq \beta(x,\varepsilon)$, выполняются условия на границе $\alpha(\mp1,\varepsilon) \leq u^{(\mp)} \leq \beta(\mp1,\varepsilon)$, и следующие неравенства*

$$\int_{-1}^{1} \left(-\varepsilon^2 k(x) \frac{d\beta}{dx}\frac{d\phi}{dx} - f(\beta, x, \varepsilon)\phi(x) \right) dx \leq 0 \leq$$
$$\leq \int_{-1}^{1} \left(-\varepsilon^2 k(x) \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\phi}{dx} - f(\alpha, x, \varepsilon)\phi(x) \right) dx \tag{2.43}$$

выполняются для любой функции $\phi(x) \in W^{1,2}$, строго положительной при $x \in (-1,1)$, у которой $\phi(-1) = \phi(1) = 0$.

Согласно [54] можно утверждать, что если существует упорядоченная пара функций $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$, которая является верхним и нижним решениями краевой задачи (2.3), то существует слабое решение задачи (2.3), лежащее внутри отрезка $[\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon)]$.

2.5.2 Доказательство теоремы 2.1

Для доказательства теоремы 2.1 необходимо проверить два утверждения:

1. Функции $\beta_n(x,\varepsilon)$, $\alpha_n(x,\varepsilon)$, заданные выражениями (2.34) и (2.37) соответственно, являются верхним и нижним решениями в смысле определения 2.5, в следствие чего слабое решение задачи (2.3) существует.

2. Из существования слабого решения задачи (2.3) следует существование решения в смысле определения 2.2.

Лемма 2.2. *Функции $\beta_n(x,\varepsilon)$, $\alpha_n(x,\varepsilon)$, заданные выражениями* (2.34) *и* (2.37) *соответственно, являются верхним и нижним решениями в смысле определения 2.5.*

Поскольку для функций $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$ условия 1. и 3. выполнены, остается проверить, что выполняется неравенство (2.43). Поскольку функция принадлежит классу $C([-1,1]) \cap C^2([-1,1] \setminus x_0)$ (см определение 2.3), интеграл в левой часть (2.43) можно представить в следующем виде:

$$\int_{-1}^{x_0} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k^{(-)}(x) \frac{d\beta_n^{(-)}}{dx} \right) - f^{(-)}(\beta_n^{(-)}, x, \varepsilon) \right) \phi(x) dx +$$
$$+ \int_{x_0}^{1} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k^{(+)}(x) \frac{d\beta_n^{(+)}}{dx} \right) - f^{(+)}(\beta_n^{(+)}, x, \varepsilon) \right) \phi(x) dx -$$
$$- \varepsilon^2 \left(k^{(-)}(x_0) \frac{d\beta_n^{(-)}}{dx}(x_0, \varepsilon) - k^{(+)}(x_0) \frac{d\beta_n^{(+)}}{dx}(x_0, \varepsilon) \right) \phi(x_0)$$

В следствие выполнения условий 2. и 4. приведенное выражение принимает неположительные значения на отрезке $x \in [-1, 1]$ для достаточно малых ε. Аналогично можно доказать, что правая часть неравенства (2.43) выполнена. Таким образом, функции $\beta_n(x, \varepsilon)$ и $\alpha_n(x, \varepsilon)$ являются верхним и нижним решениями в смысле определения 2.5.
Таким образом, согласно [54], слабое решение задачи (2.3) существует.

Лемма 2.3. *Слабое решение задачи* (2.3) *– это решение задачи в смысле определения 2.2.*

Из постановки задачи (2.3) и Условия **A1** следуют два равенства:

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k^{(-)}(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f^{(-)}(u_\varepsilon, x, \varepsilon),\ x \in (-1, x_0);$$
$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k^{(+)}(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f^{(+)}(u_\varepsilon, x, \varepsilon),\ x \in (x_0, 1).$$

Интегрируя левую часть равенства (2.42) по частям, получим следующее выражение

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon^2 \left(k^{(-)}(x_0)\frac{du_\varepsilon}{dx}(x_0-0) - k^{(+)}(x_0)\frac{du_\varepsilon}{dx}(x_0+0) \right)\phi(x_0)+ \\
+\int_{-1}^{x_0} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k^{(-)}(x)\frac{du_\varepsilon}{dx} \right) - f^{(-)}(u_\varepsilon, x, \varepsilon) \right)\phi(x)dx+ \\
+\int_{x_0}^{1} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k^{(+)}(x)\frac{du_\varepsilon}{dx} \right) - f^{(+)}(u_\varepsilon, x, \varepsilon) \right)\phi(x)dx = 0 \quad (2.44)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим следующую функцию

$$
\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\nu^2}{\nu^2-(x-x_0)^2}\right), \; x \in (x_0-\nu, x_0+\nu), \\ 0; \; x \in [-1, x_0-\nu] \cup [x_0+\nu, 1]. \end{cases}
$$

Эта функция является гладкой, неотрицательной при $x \in (-1,1)$ и удовлетворяет условиям $\phi(-1) = \phi(1) = 0$. При уменьшении параметра ν уменьшается интервал, на котором функция отлична от нуля, из-за чего интегральные слагаемые становятся произвольного порядка малости. Если $k^{(-)}(x)\dfrac{du_\varepsilon}{dx}(x_0-0) - k^{(+)}(x)\dfrac{du_\varepsilon}{dx}(x_0+0) = a \neq 0$, тогда правая часть выражения (2.44) не равна нулю, в следствие чего приходим к противоречию. Отсюда следует выполнение равенства (2.4).

Мы показали, что первое слагаемое в выражении (2.44) равно нулю. Отсюда следует, что сумма двух интегралов в (2.44) равна нулю. А значит каждый из интегралов равен нулю. Таким образом, можно заключить, что решение задачи (2.3) в смысле определения 2.4 является решением в смысле определения 2.2. Поскольку существуют верхнее и нижнее решения, заданные выражениями (2.34) и (2.37) согласно работе [54] можно заключить, что существует решение краевой задачи в смысле определения (2.2) и выполняются неравенства (см. [63])

$$\alpha_n(x,\varepsilon) \le u_\varepsilon(x) \le \beta_n(x,\varepsilon). \tag{2.45}$$

Если построить верхнее и нижнее решения на основании асимптотического приближения порядка $n+1$, то из построения асимптотического представления решения, а также структуры верхнего и нижнего решений будет следовать оценка теоремы 2.1.

2.6 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость решения

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия **A1** – **A4**, тогда решение $u_\varepsilon(x)$ задачи* (2.3) *в смысле определения 2.2, для которого функция $U_n(x,\varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением, является локально единственным и асимптотически устойчивым по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x,\varepsilon), \beta_1(x,\varepsilon)]$*

Для доказательства теоремы 2.2 необходимо доказать существование решения $v_\varepsilon(x,t)$ начально-краевой задачи (2.1) при любой функции $v_{init}(x,\varepsilon)$, удовлетворяющей условию на производные (2.2) на отрезке $\alpha_1(x,\varepsilon) \le v_{init}(x,\varepsilon) \le \beta_1(x,\varepsilon)$, а также доказать выполнение следующего предельного равенства:

$$\lim_{t\to\infty} |v_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon| = 0. \tag{2.46}$$

2.6.1 Верхнее и нижнее решения начально-краевой задачи

Доказательство существования решения начально-краевой задачи будем также проводить с помощью метода верхних и нижних решений.

Определение 2.6. *Функции* $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ *и* $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ *из класса* $C\left([-1;1]\times\right.$ $\left.\times\, [0,\infty)\right)\cap C^{2,1}\left(((-1;1)\setminus x_0)\times[0,\infty)\right)$ *называются верхним и нижним решениями задачи* (2.1) *соответственно, если при достаточно малом* ε *выполняются следующие условия:*

1^0 Упорядоченность: $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)\leq\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$, $(x,t)\in[-1,1]\times[0,\infty)$.

2^0 Действие оператора в уравнении (2.1):

$$\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial t}-f(\hat{\beta},x,\varepsilon)\leq 0\leq$$
$$\leq\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial t}-f(\hat{\alpha},x,\varepsilon),\quad (x,t)\in([-1,1]\backslash x_0)\times[0,\infty).$$

3^0 Условия на границе: $\hat{\alpha}(\mp1,t,\varepsilon)\leq u^{(\mp)}\leq\hat{\beta}(\mp1,t,\varepsilon)$, $t>0$

4^0 Неравенства для производных:

$$k^{(-)}(x_0)\frac{\partial\beta}{\partial x}(x_0-0,t,\varepsilon)\geq k^{(+)}(x_0)\frac{\partial\beta}{\partial x}(x_0+0,t,\varepsilon),\ t>0;$$
$$k^{(-)}(x_0)\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x_0-0,t,\varepsilon)\leq k^{(+)}(x_0)\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x_0+0,t,\varepsilon),\ t>0.$$

Имеет место следующее утверждение: для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x,0,\varepsilon)\leq v_{init}(x,\varepsilon)\leq\hat{\beta}(x,0,\varepsilon),$$

решение $v_\varepsilon(x,t)$ задачи (2.1) существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями, то есть имеет место двойное неравенство

$$\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon) \le v_\varepsilon(x,t) \le \hat{\beta}(x,t,\varepsilon), \ x \in [-1,1], \ t > 0. \tag{2.47}$$

Теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи типа реакция-диффузия рассматриваемого класса доказана в [64] с помощью метода монотонных итераций.

Рассмотрим следующий вид верхнего и нижнего решений:

$$\hat{\beta}(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\beta_n^{(-)}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\varepsilon\gamma t}, \\ (x,t) \in [-1,x_0] \times [0,\infty); \\ \hat{\beta}^{(+)}(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\beta_n^{(+)}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\varepsilon\gamma t}, \\ (x,t) \in [x_0,1] \times [0,\infty). \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \hat{\alpha}^{(-)}(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\alpha_n^{(-)}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\varepsilon\gamma t}, \\ (x,t) \in [-1,x_0] \times [0,\infty); \\ \hat{\alpha}^{(+)}(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\alpha_n^{(+)}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\varepsilon\gamma t}, \\ (x,t) \in [x_0,1] \times [0,\infty). \end{cases} \tag{2.49}$$

здесь $u_\varepsilon(x)$ – любое решение задачи (2.3), $\beta_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения, определенные в (2.34) и (2.37) соответственно, γ – некоторая положительная константа.

Необходимо доказать, что функции $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$, определяемые выражениями (2.48) – (2.49), удовлетворяют определению 2.6. Тогда из неравенств (2.47) и выражения $\alpha_n(x,\varepsilon) \le v_{init}(x,\varepsilon) \le \beta_n(x,\varepsilon)$ будет следовать предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |v_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon(x)| = 0. \tag{2.50}$$

Из этого предельного равенства и единственности решения параболической задачи будет вытекать единственность решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (2.3) [56]. Положив $t = 0$, а $n = 1$ в неравенствах (2.47) получим, что областью устойчивости стационарного решения является по крайней мере сегмент $\alpha_1(x,\varepsilon) \le v_{init}(x,\varepsilon) \le \beta_1(x,\varepsilon)$.

Осталось доказать, что для функций $\hat\beta(x,t,\varepsilon)$ и $\hat\alpha(x,t,\varepsilon)$ выполняются условия 1^0 – 4^0.

Справедливость неравенств 1^0, 3^0 и 4^0 вытекает непосредственно из аналогичных неравенств для функций $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$. Докажем, что для верхнего решения выполняется неравенство 2^0. Подставим явный вид функции $\hat\beta(x,t,\varepsilon)$ (2.48) в неравенство 2^0:

$$\varepsilon^2\left(\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\beta_n}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)\right)e^{-\varepsilon\gamma t}\right) + \\ + \varepsilon\gamma(\beta_n - u_\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t} - f(\hat\beta, x, \varepsilon) \tag{2.51}$$

Добавим в полученное выражение слагаемые $f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)$, $f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t}$ и $f(\beta_n, x, \varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t}$ и вычтем их, чтобы выражение осталось неизменным.

$$\varepsilon\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon) - \left(\varepsilon\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}\right) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t} + \\ + \left(\varepsilon\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\beta_n}{dx}\right) - f(\beta_n, x, \varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t} + \varepsilon\gamma(\beta_n - u_\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t} + \\ + \left(f(\beta_n, x, \varepsilon) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\right)e^{-\varepsilon\gamma t} - \left(f(\hat\beta, x, \varepsilon) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\right). \tag{2.52}$$

Учтем, что $u_\varepsilon(x)$ является решением задачи (2.3). Кроме того, учтем следующую оценку:

$$\left(f(\beta_n, x, \varepsilon) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\right) e^{-\varepsilon\gamma t} - \Big(f(\hat{\beta}, x, \varepsilon) - f(u_\varepsilon, x, \varepsilon)\Big) = \\ f^*_{uu}\left(\theta_2 e^{-\varepsilon\gamma t} - \theta_1\right)(\beta_n - u_\varepsilon)^2 e^{-\varepsilon\gamma t} \quad (2.53)$$

где $f^*_{uu} = f_{uu}\left(u_\varepsilon + \theta_2(\beta_n - u_\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t} + \theta_3(\theta_2 e^{-\varepsilon\gamma t} - \theta_1)(\beta_n - u_\varepsilon), x, \varepsilon\right)$, $-1 < \theta_{1,2,3} < 1$.
Теперь, используя оценку (2.38), запишем выражение в следующем виде:

$$L_t[\hat{\beta}] = -\varepsilon^n \left(\mu \cdot \bar{f}_u^{(\mp)} + d \cdot e^{-\kappa|\xi|}\right) e^{-\varepsilon\gamma t} + \varepsilon\gamma(\beta_n - u_\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma t} + \\ + f^*_{uu}\left(\theta_2 e^{-\varepsilon\gamma t} - \theta_1\right)(\beta_n - u_\varepsilon)^2 e^{-\varepsilon\gamma t} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) \cdot e^{-\varepsilon\gamma t} \quad (2.54)$$

Из неравенства (2.45) следует оценка $\beta_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^n)$, таким образом, при положительной константе γ и достаточно малом ε выражение (2.54) принимает отрицательные значения, а значит условие 2^0 выполнено для верхнего решения. Выполнение условия для нижнего решения проверяется аналогично.
Теорема 2.2 доказана.

2.7 Пример: Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с помощью теории контрастных структур

На основании уравнения реакция-диффузия с разрывными реактивным и диффузионным слагаемыми была разработана модель для описания распределения температуры в приповерхностном слое океана.

Изучение параметров среды в приповерхностном слое океана представляет большой интерес для современной науки. Его состояние играет ключевую роль в тепло- и массообмене между океаном и атмосферой и является одним из основных факторов, определяющих климатическую систему Земли.

Представленная модель служит для описания распределения температуры в приводном слое порядка 10 см.

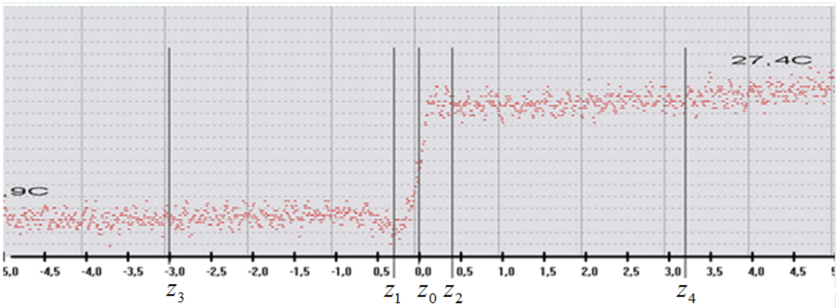

Рис. 2.1: Экспериментальный график

На рисунке 2.1 представлен экспериментальный график изменения температуры [65]. На нем отчетливо видно, что зависимость не является монотонной, вблизи границы раздела наблюдаются области с инверсным распределением температуры.

Рассмотрим отрезок прямой $z \in [-a; a], a \sim 5$, перпендикулярной плоскости границы раздела вода-воздух. Поставим на этом отрезке начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, которую в безразмерных величинах [76] можно записать как

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(k(z)\dfrac{dT}{dz}\right) = f(T, z),\ z \in (-a, a), \\ \dfrac{dT}{dz}(-a) = 0;\ \dfrac{dT}{dz}(a) = 0. \end{cases} \tag{2.55}$$

здесь $k(z)$- коэффициент теплообмена, T-температура среды. Граничные условия Неймана означают, что тепловой поток на границе области равен нулю.

В различных слоях стратифицированной среды теплообмен обусловлен различными причинами. На расстоянии нескольких миллиметров от границы вода-воздух обмен является молекулярным, а при удалении от границы становится турбулентным. Коэффициент теплообмена при молекулярном взаимодействии на два порядка меньше, чем при турбулентном. Кроме того, турбулентный обмен в воздухе происходит интенсивнее, чем в воде. Также из экспериментальных данных известно, что при переходе через границу раздела коэффициент теплообмена скачкообразно изменяется в несколько раз. В безразмерном виде его можно записать следующим образом:

$$k(z) = \begin{cases} 100 \cdot \kappa, & z \leq z_1; \\ \kappa, & z_1 < z \leq z_0; \\ m \cdot \kappa, & z_0 < z \leq z_2; \\ 1000 \cdot \kappa & z > z_2. \end{cases} \tag{2.56}$$

где $\kappa = 3,1 \cdot 10^{-4}, m$ – константа, показывающая, во сколько раз изменился коэффициент теплообмена при переходе через границу раздела, z_0 - граница раздела вода-воздух, z_1, z_2 - границы области резкого изменения температуры (см. рис. 2.1).

При построении модели использовался неклассический подход к уравнению теплового баланса, вся система рассматривалась как некая активная среда. Активная среда может продолжительное время находится в одном из возможных при данных условиях состоянии, а при наличии внешнего возбуждения переходить от одного состояния к другому. Активные среды хорошо описываются при помощи контрастных структур.

В настоящей работе для описания активной среды использовалось уравнение теплопроводности (2.55) с разрывной правой частью следующего вида:

$$f(u,z) = \begin{cases} u - (u_w + \delta W), & z < z_0; \\ u - (u_a + \delta A), & z \geq z_0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Здесь u_a и u_w - известные значения температуры в воздухе и воде соответственно. В лабораторных условиях эти величины имеют порядок 300K. Небольшие по величине (порядка нескольких Кельвин) слагаемые δA и δW отличны от нуля только на участках $z_3 \leq z \leq z_1$ и $z_2 \leq z \leq z_4$ немонотонного изменения температуры (см. рис. 2.1).

Далее приведены результаты численного моделирования. Красными точками на графике показаны значения, полученные экспериментально, черная кривая получена с помощью численного расчета согласно представленной модели.

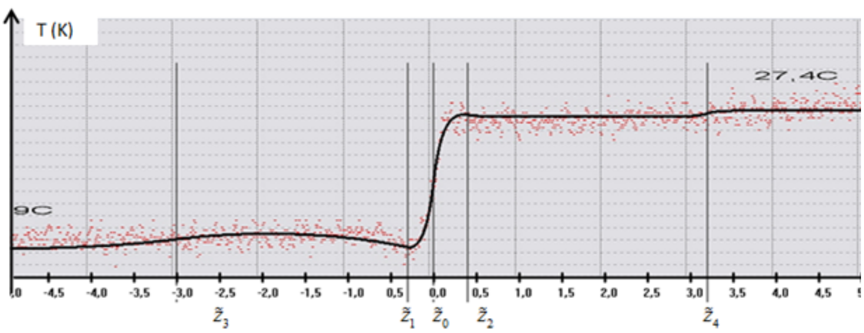

Рис. 2.2: Наложение результатов численного моделирования на экспериментальный график

Построенная модель позволяет, рассматривая переходный слой в целом, учитывать каждый из слоев стратифицированной среды. Результаты численных расчетов, проведенных на основании этой модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Глава 3

Погранслойное решение двумерной задачи типа реакция-диффузия-адвекция

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в области $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times [0; a] \times (0, \infty)$ с периодическими условиями по переменной x :

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} = (\mathbf{A}(v, x, y, \varepsilon), \nabla)\, v + B(v, x, y, \varepsilon),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, a),\ t > 0, \\ v(x, 0, t, \varepsilon) = u^0(x),\ \ v(x, a, t, \varepsilon) = u^a(x),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x, y, t, \varepsilon) = v(x + L, y, t, \varepsilon),\ x \in \mathbb{R},\ y \in [0, a],\ t > 0, \\ v(x, y, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, y, \varepsilon),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, a). \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр, L – некоторое положительное число, $\mathbf{A}(v, x, y, \varepsilon) = \{A_1(v, x, y, \varepsilon), A_2(v, x, y, \varepsilon)\}$. Функции $A_i(v, x, y, \varepsilon), i = 1, 2$ и $B(v, x, y, \varepsilon)$ являются L-периодическими по переменной x, достаточно гладкими в области $I \times \overline{D} \times [0, \infty) \times (0; \varepsilon_0]$, где I – возможный интервал изменения величины v, $\overline{D} = \{(x, y) : \mathbb{R} \times [0, a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^a(x)$ являются L-периодическими, непрерывными при $x \in \mathbb{R}$. Начальные и граничные условия предполагаются согласованными до непрерывности.

Целью работы является исследование асимптотической устойчивости стационарного решения $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (3.1), то есть решения краевой задачи

$$\begin{cases} \varepsilon\Delta u = (\mathbf{A}(u,x,y,\varepsilon),\nabla)\,u + B(u,x,y,\varepsilon),\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0,a), \\ u(x,0,\varepsilon) = u^0(x),\ \ u(x,a,\varepsilon) = u^a(x),\ x\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,\varepsilon) = u(x+L,y,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ y\in[0,a]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Будем считать,что выполнены следующие условия.

Условие B1. Дифференциальное уравнение в частных производных

$$(\mathbf{A}(u,x,y,0),\nabla)\,u + B(u,x,y,0) = 0 \tag{3.3}$$

с дополнительным условием $u(x,0) = u^0(x)$ имеет решение $\varphi(x,y)$, причем функция $\varphi(x,y)$ достаточно гладкая в $\overline{D}$ и L-периодическая по переменной x.

Условие B2. Всюду в $\overline{D}$ выполняется неравенство:

$$A_2(\varphi(x,y),x,y,0) > 0.$$

Замечание. Очевидно, что если функция $A_i(v,x,y,\varepsilon)\in C^1(\bar{D}), i = 1,2$, то функция $F(x,y) := \dfrac{A_1(\varphi(x,y),x,y,0)}{A_2(\varphi(x,y),x,y,0)}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x в области $\overline{D}$.

3.1.1 Присоединенное уравнение

Функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет граничному условию при $y = 0$. Для описания поведения решения в окрестности прямой $y = a$ введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{y - a}{\varepsilon}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим так называемое присоединенное уравнение для задачи (3.2)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = A_2(u, x, a, 0)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \leq 0, \tag{3.5}$$

считая переменную x параметром. Это уравнение эквивалентно системе двух уравнений первого порядка (присоединенной системе):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = A_2(\tilde{u}, x, a, 0)\Phi. \tag{3.6}$$

От присоединенной системы перейдем к уравнению для функции $\Phi(\tilde{u}, x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}} = A_2\left(\tilde{u}, x, a, 0\right),$$

определяющему фазовые траектории на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

Точка $(\varphi(x, a), 0)$ фазовой плоскости является точкой покоя системы (3.6). Поскольку функция $A_2(\tilde{u}, x, a, 0)$ непрерывна, то существует фазовая траектория, входящая в эту точку покоя при $\xi \to -\infty$. Эта фазовая траектория определяется выражением

$$\Phi(\tilde{u}, x) = \int\limits_{\varphi(x,a)}^{\tilde{u}} A_2(u, x, a, 0)du. \tag{3.7}$$

Условие B3. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется одно из неравенств:

$$\int_{\varphi(x,a)}^{\tilde{u}} A_2(u, x, a, 0) du > 0, \text{ при } \varphi(x, a) < \tilde{u} \leq u^a; \text{ или}$$
$$\int_{\varphi(x,a)}^{\tilde{u}} A_2(u, x, a, 0) du < 0, \text{ при } u^a \leq \tilde{u} < \varphi(x, a).$$

Из условия **B3** следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ уравнение (3.5) с дополнительнными условиями $\tilde{u}(x, a) = u^a(x)$, $\tilde{u}(x, \infty) = \varphi(x, a)$ имеет решение, т.е. граничное значение $u^a(x)$ принадлежит области влияния решения вырожденного уравнения $\varphi(x, y)$.

3.2 Асимптотическое приближение решения

Построим асимптотическое приближение $U(x, y, \varepsilon)$ решения задачи (3.2) в виде суммы двух слагаемых:

$$U(x, y, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, \varepsilon) + \Pi(\xi, x, \varepsilon). \tag{3.8}$$

Здесь $\bar{u}(x, y, \varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического представления, $\Pi(\xi, x, \varepsilon)$ – погранслойная функция, описывающая решение в окрестности прямой $y = a$, переменная ξ определена выражением (3.4). Каждое слагаемое в (3.8) представим в виде разложения по малому параметру ε:

$$\bar{u}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1(x, y) + \dots, \quad \Pi(\xi, x, \varepsilon) = \Pi_0(\xi, x) + \varepsilon \Pi_1(\xi, x) + \dots. \tag{3.9}$$

3.2.1 Регулярная часть

Подставляя в равенство

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)=A_1(\bar{u},x,y,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+A_2(\bar{u},x,y,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+B(\bar{u},x,y,\varepsilon), \quad (3.10)$$

сумму (3.9) для $\bar{u}$, раскладывая функцию в правой части равенства в ряд Тейлора по малому параметру и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения в частных производных первого порядка для функций $\bar{u}_i(x,y), i=0,1\ldots$. Будем искать L-периодические по x решения этих уравнений в области D. Дополнительные условия для $\bar{u}_i(x,y)$ при $y=0$ получим из соответствующего граничного условия задачи (3.2).

Для функций регулярной части нулевого порядка получим задачу

$$\begin{cases}A_1(\bar{u}_0,x,y,0)\dfrac{\partial\bar{u}_0}{\partial x}+A_2(\bar{u}_0,x,y,0)\dfrac{\partial\bar{u}_0}{\partial y}+B(\bar{u}_0,x,y,0)=0,\ (x,y)\in D,\\ \bar{u}_0(x,y)=\bar{u}_0(x+L,y),\ (x,y)\in\overline{D},\ \ \bar{u}_0(x,0)=u^0(x),\ x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Согласно условию **B1**, L-периодическим по x решением этой задачи является функция $\varphi(x,y)$. Таким образом, $\bar{u}_0=\varphi(x,y)$.

Далее для краткости будем использовать следующие обозначения

$$\bar{A}_i(x,y):=A_i(\varphi(x,y),x,y,0),\ \ i=1,2,\ \ \bar{B}(x,y):=B(\varphi(x,y),x,y,0) \quad (3.11)$$

и сходные обозначения для производных функций $A_i(\varphi(x,y),x,y)$ и $B(\varphi(x,y),x,y)$.

Функции $\bar{u}_i(x,y), i=1,2\ldots$ определим как решения задач

$$\begin{cases} \bar{A}_1(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} + \bar{A}_2(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} + W(x,y)\bar{u}_i = \bar{f}_i(x,y),\ (x,y) \in D, \\ \bar{u}_i(x,y) = \bar{u}_i(x+L,y),\ (x,y) \in \overline{D}\ \ \bar{u}_i(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.12}$$

где

$$W(x,y) = \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial u}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial u}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \bar{B}}{\partial u}(x,y), \tag{3.13}$$

$\bar{f}_i(x,y)$ – известные функции, в частности $\bar{f}_1(x,y) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

Уравнения (3.12) являются уравнениями в частных производных первого порядка. Запишем для них уравнения характеристик:

$$\bar{A}_2(x,y)dx = \bar{A}_1(x,y)dy, \quad \left(\bar{f}_i(x,y) - W(x,y)\bar{u}_i\right)dy = \bar{A}_2(x,y)d\bar{u}_i. \tag{3.14}$$

В силу непрерывности функций $\bar{A}_i(x,y)$ существует первый интеграл

$$\Psi(x,y) = C_1 \tag{3.15}$$

первого уравнения (3.14), и на отрезке $y \in [0,a]$ можно определить функцию $x = X(y, C_1)$.

Решая уравнения

$$\frac{d\bar{u}_i}{dy} = \frac{\bar{f}_i(X(y,C_1),y) - W(X(y,C_1),y)\bar{u}_i}{\bar{A}_2(X(y,C_1),y)}$$

с дополнительными условиями $\bar{u}_i(x,0) = 0$, получим выражения для $\bar{u}_i$:

$$\bar{u}_i = \int_0^y \exp\left(-\int_{y_1}^y \frac{W(X(y_2,C_1),y_2)}{\bar{A}_2(X(y_2,C_1),y_2)}dy_2\right)\frac{\bar{f}_i(X(y_1,C_1),y_1)}{\bar{A}_2(X(y_1,C_1),y_1)}dy_1. \quad (3.16)$$

Заменяя в этих выражениях C_1 на $\Psi(x,y)$, получим решения $\bar{u}_i(x,y)$ задач (3.12).

3.2.2 Погранслойные функции

Уравнения для погранслойных функций $\Pi_i(\xi,x)$, $i = 0,1,...$, $\xi \le 0$ можно получить из равенств

$$\varepsilon\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2} = A_1(\xi,x,\varepsilon)\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}A_2(\xi,x,\varepsilon)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}+\Pi A_1(\xi,x,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}(x,a+\varepsilon\xi)+$$
$$+\Pi A_2(\xi,x,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}(x,a+\varepsilon\xi)+\Pi B(\xi,x,\varepsilon). \quad (3.17)$$

где введены обозначения

$$A_i(\xi,x,\varepsilon) = A_i(\bar{u}(x,a+\varepsilon\xi)+\Pi(\xi,x,\varepsilon),x,a+\varepsilon\xi,\varepsilon),\ i=1,2,$$
$$\Pi A_i(\xi,x,\varepsilon) = A_i(\xi,x,\varepsilon) - A_i(\bar{u}(x,a+\varepsilon\xi),x,a+\varepsilon\xi,\varepsilon), \quad (3.18)$$
$$\Pi B(\xi,x,\varepsilon) = B(\bar{u}(x,a+\varepsilon\xi)+\Pi(\xi,x,\varepsilon),x,a+\varepsilon\xi,\varepsilon) - \quad (3.19)$$
$$-B(\bar{u}(x,a+\varepsilon\xi),x,a+\varepsilon\xi,\varepsilon).$$

Подставляя суммы (3.9) в уравнение (3.17), раскладывая функции в правой части (3.17) в ряд Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для функций $\Pi_i(\xi,x)$, $i=0,1,\ldots$ $\xi \le 0$, $x \in \mathbb{R}$.

В качестве дополнительного условия потребуем убывания погранслойных функций на бесконечности

$$\Pi_i(-\infty, x) = 0. \tag{3.20}$$

Условие при $\xi = 0$ для функций $\Pi_i(\xi, x)$ следует из граничного условия при $y = a$ задачи (3.2):

$$\bar{u}_0(x, a) + \varepsilon\bar{u}_1(x, a) + \ldots + \Pi_0(0, x) + \varepsilon\Pi_1(0, x) + \ldots = u^a(x). \tag{3.21}$$

Приравнивая коэффициенты при ε^{-1} в равенствах (3.17) и при ε^0 в равенствах (3.21), с учетом условия (3.20) получим следующую задачу для функции $\Pi_0(\xi, x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Pi_0}{\partial\xi^2} = A_2\left(\varphi(x, a) + \Pi_0(\xi, x), x, a, 0\right)\dfrac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}, \ \xi < 0, \\ \varphi(x, a) + \Pi_0(0, x) = u^a(x), \ \ \Pi_0(-\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi, x) = \varphi(x, a) + \Pi_0(\xi, x), \ \ \tilde{A}_i(\xi, x) := A_i(\tilde{u}(\xi, x), x, a, 0), \ i = 1, 2,$$
$$\tilde{B}(\xi, x) := B(\tilde{u}(\xi, x), x, a, 0). \tag{3.23}$$

аналогичные обозначения будем использовать для производных функций $A_i(\tilde{u}(\xi, x), x, a, 0)$ и $B(\tilde{u}(\xi, x), x, a, 0)$.

С учетом введенных обозначений уравнение (3.22) примет вид (3.5) и может быть сведено к системе (3.6), рассмотренной в разделе 3.1.1.

Согласно выводам, сделанным в этом разделе, существует функция

$$\Phi(\xi, x) := \Phi(\tilde{u}(\xi, x), x) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi},$$

заданная выражением (3.7), а значит функция $\tilde{u}(\xi, x)$ может быть определена из задачи

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \int\limits_{\varphi(x,a)}^{\tilde{u}} A_2(u, x, a)du, \quad \tilde{u}(0, x) = u^a(x).$$

и для нее выполняется следующая оценка:

$$|\tilde{u}(\xi, x) - \varphi(x, a)| < Ce^{-\kappa|\xi|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где κ, C - положительные константы, не зависящие от ε. Учитывая первое обозначение в (3.23) получим следующую оценку для функции $\Pi_0(\xi, x)$:

$$|\Pi_0(\xi, x)| < Ce^{-\kappa|\xi|}. \tag{3.24}$$

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в уравнении (3.17), учитывая граничные условия (3.21) и условие убывания на бесконечности, получим следующие задачи для функций $\Pi_1(\xi, x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2(\xi, x)\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u}(\xi, x)\Phi(\xi, x)\Pi_1 = f_1(\xi, x), \ \xi < 0, \\ \Pi_1(0, x) + \bar{u}_1(x, a) = 0, \ \ \Pi_1(-\infty, x) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

где

$$f_1(\xi,x) = \left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\left(\bar{u}_1(x,a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a)\xi\right) + \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial y}(\xi,x)\xi\right)\Phi(\xi,x)+$$

$$+\tilde{A}_1(\xi,x)\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}+\Pi_0 A_1(\xi,x,0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,a)+\Pi_0 A_2(\xi,x,0)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a)+\Pi_0 B(\xi,x,0).$$

Здесь функции $\Pi_0 A_i,\ i=1,2$ и $\Pi_0 B$ являются нулевыми приближениями разложений Тейлора по степеням ε функций ΠA_i и ΠB, определенных выражениями (3.18).

Решение задачи (3.25) имеет вид:

$$\Pi_1(\xi,x) = -\bar{u}_1(x,a)\frac{\Phi(\xi,x)}{\Phi(0,x)} + \Phi(\xi,0)\int_0^{\xi}\frac{ds}{\Phi(s,x)}\int_{-\infty}^{s} f_1(\eta,x)d\eta.$$

Для функций $\Pi_1(\xi,x)$ справедлива экспоненциальная оценка, аналогичная (3.24).

Погранслойные функции порядка $k=2,3,\ldots$ определяются как решения уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi_k}{\partial \xi^2} - \tilde{A}_2(\xi,x)\dfrac{\partial \Pi_k}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\Phi(\xi,x)\Pi_k = f_k(\xi,x),\ \xi<0, \\ \Pi_k(0,x) + \bar{u}_k(x,a) = 0,\ \ \Pi_k(-\infty,x) = 0. \end{cases}$$

где функции $f_k(\xi,x)$ известны. Для этих функций справедливы экспоненциальные оценки, аналогичные (3.24).

3.2.3 Асимптотическое приближение решения

Определим в (3.9) все слагаемые до порядка n и составим сумму

$$U_n(x,y,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i(x,y) + \Pi_i(\xi,x)\right), \quad (x,y) \in \overline{D},\ \xi \leq 0. \tag{3.26}$$

Построенная функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (3.2) с точностью $O(\varepsilon^n)$, точно удовлетворяет граничному условию при $y = a$ задачи (3.2), кроме того, эта функция удовлетворяет граничному условию при $y = 0$ с точностью до экспоненциально малых членов. Стандартная процедура умножения погранслойных членов на срезающую функцию позволяет добиться того, что граничное условие при $y = 0$ удовлетворяется точно.

3.3 Существование стационарного решения

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* ***B1-B3****. Тогда при достаточно малых ε существует решение $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (3.2), для которого функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ является равномерным в $\overline{D}$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$, то есть всюду в $\overline{D}$ выполняется неравенство*

$$|u_\varepsilon(x,y) - U_n(x,y,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \tag{3.27}$$

где $C > 0$.

Для доказательства теоремы будем использовать метод верхних и нижних решений [66].

Определение 3.1. *Пара L-периодических по x функций $\beta(x, y, \varepsilon)$, $\alpha(x, y, \varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, называется соответственно верхним и нижним решениями задачи (3.2), если при достаточно малом ε для них выполняются следующие неравенства*

1) Упорядоченность верхнего и нижнего решений: $\alpha(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, \varepsilon)$, $(x, y) \in \overline{D}$.

2) Действие дифференциального оператора в уравнении (3.2) на верхнее и нижнее решения:

$$L_\varepsilon[\beta] := \varepsilon\Delta\beta - (\mathbf{A}(\beta, x, y, \varepsilon), \nabla)\,\beta - B(\beta, x, y, \varepsilon) \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha], (x, y) \in \overline{D}.$$

3) Условия на границе: $\alpha(x, 0, \varepsilon) \leq u^0 \leq \beta(x, 0, \varepsilon)$, $\alpha(x, a, \varepsilon) \leq u^a \leq \beta(x, a, \varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$.

Согласно доказанному в [66], если существуют верхнее и нижнее решения задачи (3.2), то существует решение $u_\varepsilon(x, y)$ этой задачи, заключенное между верхним и нижним решениями:

$$\alpha(x, y, \varepsilon) \leq u_\varepsilon(x, y) \leq \beta(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \overline{D}. \tag{3.28}$$

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [58, 59, 67] будем строить верхнее и нижнее решения задачи (3.2) как модификации асимптотического приближения (3.26) $n-$го порядка:

$$\beta_n(x, y, \varepsilon) = \\ = U_n(x, y, \varepsilon) + \varepsilon^n \left(\mu(x, y) + \pi_0(\xi, x) + \varepsilon\pi_1(\xi, x)\right), (x, y) \in \overline{D}, \xi \leq 0, \tag{3.29}$$

$\alpha_n(x, y, \varepsilon) =$
$$= U_n(x, y, \varepsilon) - \varepsilon^n \left(\mu(x, y) + \pi_0(\xi, x) + \varepsilon \pi_1(\xi, x)\right), (x, y) \in \overline{D}, \xi \le 0.$$

Функции $\mu(x, y)$ и $\pi_i(\xi, x)$, $i = 0, 1$ определяются таким образом, чтобы были выполнены неравенства 1) – 3) из определения 3.1.

Функцию $\mu(x, y)$ определим как решение следующей задачи

$$\begin{cases} \bar{A}_1(x, y)\dfrac{\partial \mu}{\partial x} + \bar{A}_2(x, y)\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + W(x, y)\mu = R, \ \ (x, y) \in D, \\ \mu(x, y) = \mu(x + L, y), \ (x, y) \in \overline{D}, \ \ \mu(x, 0) = R^0; \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Здесь R, R^0 – достаточно большие положительные константы; функции $\bar{A}_i(x, y), i = 1, 2$ и $W(x, y)$ определяются соответственно выражениями (3.11) и (3.13).

Ранее в разделе 3.2.1 мы рассмотрели похожую задачу для функций $\bar{u}_i(x, t)$. Повторяя приведенные там рассуждения, можно выписать решение задачи (3.30) в явном виде:

$$\mu(x, y) = R^0 \exp\left(-\int_0^y \frac{W\left(X(y_1, C_1), y_1\right)}{\bar{A}_2\left(X(y_1, C_1), y_1\right)} dy_1\right) +$$
$$\int_0^y \exp\left(-\int_{y_1}^y \frac{W\left(X(y_2, C_1), y_2\right)}{\bar{A}_2\left(X(y_2, C_1), y_2\right)} dy_2\right) \frac{R}{\bar{A}_2\left(X(y_1, C_1), y_1\right)} dy_1,$$

где C_1 левая часть первого интеграла (3.15).

Поскольку R и R_0 – положительные константы, а из условия **B2** следует, что $\bar{A}_2(x, y) > 0$ при всех $(x, y) \in \overline{D}$, то функция $\mu(x, y)$ принимает в $\overline{D}$ положительные значения.

Определим функцию $\pi_0(\xi,x)$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\xi^2}-\tilde{A}_2(\xi,x)\frac{\partial\pi_0}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\Phi(\xi,x)\pi_0=\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\Phi(\xi,x)\mu(x,a)-d\cdot\mathrm{e}^{-\gamma\xi}, \tag{3.31}$$

$$\pi_0(0,x)=0,\ \ \pi_0(-\infty,x)=0,$$

где d и γ положительные константы, которые выбираются таким образом, чтобы функция $\pi_0(\xi,x)$ принимала положительные значения для всех $\xi\le 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Решение задачи (3.31) может быть записано в явном виде:

$$\pi_0(\xi,x)=-\Phi(\xi,x)\int_0^{\xi}\frac{ds}{\Phi(s,x)}\int_{-\infty}^{s}\left(\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial u}(\eta,x)\Phi(\eta,x)\mu(x,a)-d\cdot\mathrm{e}^{-\gamma\eta}\right)d\eta.$$

Выберем константы d и γ таким образом, чтобы неравенство

$$\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\Phi(\xi,x)\mu(x,a)-d\cdot\mathrm{e}^{-\gamma\xi}<0$$

выполнялось при $\xi\le 0,\ x\in\mathbb{R}$. Тогда функция $\pi_0(\xi,x)$ будет неотрицательной.

Определим функцию $\pi_1(\xi,x)$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2\pi_1}{\partial\xi^2}-\tilde{A}_2(\xi,x)\frac{\partial\pi_1}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\Phi(\xi,x)\pi_1=\pi f_1(\xi,x),\ \xi<0,$$
$$\pi_1(0,x)=0,\ \ \pi_1(-\infty,x)=0,$$

где $\pi f_1(\xi,x)$ – слагаемые порядка ε^{n+1}, возникающие за счет добавления функций $\mu(x,y)$ и $\pi_0(\xi,x)$ в выражении $L_\varepsilon[\beta_n]$:

$$\pi f_1(\xi,x) = \left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,a)\xi + \frac{\partial^2 \tilde{A}_2}{\partial u^2}(\xi,x)(\mu(x,a)+\right.$$

$$\pi_0(\xi,x))\left(\bar{u}_1(x,a) + \Pi_1(\xi,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a)\xi\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \tilde{A}_2}{\partial u \partial y}(\xi,x)(\mu(x,a)+\pi_0(\xi,x))\cdot\xi\right)\Phi(\xi,x) - \tilde{A}_1(\xi,x)\frac{\partial \pi_0}{\partial x}(\xi,x)+$$

$$+ \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u}(\xi,x)\left(\pi_0(\xi,x)\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi}(\xi,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a)\right) + \mu(x,a)\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi}(\xi,x)+\right.$$

$$\left. +\frac{\partial \pi_0}{\partial \xi}(\xi,x)\left(\bar{u}_1(x,a) + \Pi_1(\xi,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a)\cdot\xi\right)\right) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial y}(\xi,x)\frac{\partial \pi_0}{\partial \xi}(\xi,x)\cdot\xi + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial u}(\xi,x)\pi_0(\xi,x) + \Pi_0 A(\xi,x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,a)+$$

$$+ \left(\frac{\partial \Pi_0 A}{\partial u}(\xi,t)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,a) + \frac{\partial \Pi_0 B}{\partial u}(\xi,x)\right)\mu(x,a)-$$

$$- \left(\bar{A}_1(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) + \bar{A}_2(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) + W\mu(x,y)\right).$$

Нетрудно заметить, что такие же слагаемые, только с противоположным знаком, присутствуют в выражении $L_\varepsilon[\alpha_n]$. Как и все погранслойные функции, $\pi_0(\xi,x)$, $\pi_1(\xi,x)$ экспоненциально убывают при $\xi \to -\infty$.

Лемма 3.1. *Для функций $\beta_n(x,y,\varepsilon)$, $\alpha_n(x,y,\varepsilon)$ выполняются неравенства 1)–3).*

1) Для доказательства упорядоченности функций $\beta_n(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,y,\varepsilon)$ рассмотрим разность этих функций:

$$\beta_n(x,y,\varepsilon) - \alpha_n(x,y,\varepsilon) = 2\varepsilon^n(\mu(x,y)+\pi_0(\xi,x)) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \qquad (3.32)$$

Функция $\mu(x,y)$ принимает положительные значения для всех $(x,y) \in \overline{D}$, а функция $\pi_0(\xi,x)$ неотрицательна для всех $\xi \le 0,\ x \in \mathbb{R}$, поэтому правая часть последнего выражения положительна.

2) Из определения функций $\mu(x,y)$, $\pi_0(\xi,x)$ и $\pi_1(\xi,x)$ следует, что

$$L_\varepsilon[\beta_n] = -\varepsilon^{n-1} d\cdot e^{\gamma\xi} - \varepsilon^n R + O(\varepsilon^{n+1}), \quad L_\varepsilon[\alpha_n] = \varepsilon^{n-1} d\cdot e^{\gamma\xi} + \varepsilon^n R + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{3.33}$$

где $R > 0$ – константа в правой части уравнения (3.30). Дифференциальные неравенства 2) выполняются при достаточно малых ε.

Неравенство 3) выполняется в силу граничных условий задачи (3.30) и положительности $\mu(x,y)$.

Лемма доказана.

Если построить верхнее и нижнее решения на основании асимптотического приближения порядка $n+1$, то из двойного неравенства (3.28) и структуры верхнего и нижнего решений следует оценка (3.27). Теорема 3.1 доказана.

3.4 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* ***B1-B3***. *Тогда при достаточно малых ε решение $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (3.2), для которого функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением, локально единственно и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_2; \beta_2]$.*

Доказательство локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (3.1), существование которого доказано в предыдущем разделе, основано на использовании метода верхних и нижних решений. Напомним их определение.

Определение 3.2. *Пара L-периодических по переменной x функций $\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon)$, $\hat{\beta}(x,y,t,\varepsilon) \in C(\overline{D} \times [0;T]) \cap C^{2,1}(D \times (0;T))$ называются верхним и нижним решениями задачи (3.1), если выполняются следующие условия:*

1^0. $\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon) \le \hat{\beta}(x,t,y,\varepsilon), \quad (x,y) \in \overline{D}, \ \ t > 0.$

2^0. $L_t[\hat{\beta}] := \varepsilon\Delta\hat{\beta} - \dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial t} - \Big(\boldsymbol{A}(\hat{\beta},x,y,\varepsilon),\nabla\Big)\hat{\beta} - B(\hat{\beta},x,y,\varepsilon) \ \le \ 0 \ \le L_t[\hat{\alpha}], \ \ (x,y) \in D, \ \ t > 0.$

3^0. $\hat{\alpha}(x,0,t,\varepsilon) \le u^0 \le \hat{\beta}(x,0,t,\varepsilon), \ \hat{\alpha}(x,a,t,\varepsilon) \le u^a \le \hat{\beta}(x,a,t,\varepsilon), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$

Имеет место следующее утверждение (см., например, [68]): для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x,y,0,\varepsilon) \le v_{init}(x,y,\varepsilon) \le \hat{\beta}(x,y,0,\varepsilon), \ \ (x,y) \in \overline{D}.$$

решение $v_\varepsilon(x,y,t)$ задачи (3.1) существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями, т.е. имеет место двойное неравенство:

$$\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon) \le v_\varepsilon(x,y,t) \le \hat{\beta}(x,y,t,\varepsilon), \ (x,y) \in \overline{D}, \ t \ge 0. \qquad (3.34)$$

Верхнее и нижнее решения задачи (3.1) мы будем строить аналогично [59, 67] в следующем виде:

$$\hat{\beta}(x,y,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x,y) + (\beta_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))\mathrm{e}^{-\lambda t},$$
$$\hat{\alpha}(x,y,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x,y) + (\alpha_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad (3.35)$$

где $u_\varepsilon(x,y)$ – решение задачи (3.2), существующее согласно теореме 3.1, функции $\beta_n(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,y,\varepsilon)$ определены выражениями (3.29), а λ – положительная константа.

Заметим, что эти функции удовлетворяют условиям 1^0 и 3^0 из определения 3.2, поскольку для функций α_n и β_n выполняются условия 1) и 3) из определения 3.1. Условие 4^0 выполняется, если $\hat{\alpha}(x,y,0,\varepsilon) = \alpha_n(x,y,\varepsilon) \le v_{init}(x,y,\varepsilon) \le \hat{\beta}(x,y,0,\varepsilon) = \beta_n(x,y,\varepsilon)$. Для того, чтобы показать выполнение неравенства 2^0 из определения 3.2, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если $\alpha_n(x,y,\varepsilon)$, $\beta_n(x,y,\varepsilon)$ – нижнее и верхнее решения задачи* (3.2), *определенные выражениями* (3.29), *а $u_\varepsilon(x,y)$ – решение задачи* (3.2), *существующее согласно теореме 3.1, то всюду в области $\overline{D}$ справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial(\beta_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^{n-1}), \ \left|\frac{\partial(\beta_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}\right| = O(\varepsilon^{n-1}),$$
$$\left|\frac{\partial(\alpha_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^{n-1}), \ \left|\frac{\partial(\alpha_n(x,y,\varepsilon) - u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}\right| = O(\varepsilon^{n-1}). \qquad (3.36)$$

Для доказательства леммы используем равенства

$$\frac{\partial(\beta_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}=\frac{\partial(U_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}+O(\varepsilon^n),$$
$$\frac{\partial(\beta_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(U_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}+O(\varepsilon^n), \qquad (3.37)$$

которые можно получить так же, как это сделано в [37], и аналогичные равенства для нижнего решения.

Нам необходимо получить оценки

$$\left|\frac{\partial(U_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial x}\right|\le C\varepsilon^{n-1},\ \left|\frac{\partial(U_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y))}{\partial y}\right|\le C\varepsilon^{n-1}. \qquad (3.38)$$

Введем обозначение $z_n(x,y,\varepsilon)=U_n(x,y,\varepsilon)-u_\varepsilon(x,y)$. Согласно построению, функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в задаче (3.2) с точностью $O(\varepsilon^n)$, и удовлетворяет точно граничным условиям при $y=0$ и $y=a$. Поэтому функцию z_n можно представить как решение задачи

$$\varepsilon\Delta z_n-\left(A_1(U_n,x,y,\varepsilon)\frac{\partial U_n}{\partial x}+A_2(U_n,x,y,\varepsilon)\frac{\partial U_n}{\partial y}-A_1(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-A_2(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)-(B(U_n,x,y,\varepsilon)-B(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon))=\varepsilon^n\psi(x,y),\ (x,y)\in D,$$
$$z_n(x,0,\varepsilon)=z_n(x,a,\varepsilon)=0,\ x\in\mathbb{R},\ \ z_n(x,y,\varepsilon)=z_n(x+L,y,\varepsilon),\ (x,y)\in\overline{D}, \qquad (3.39)$$

где $|\psi(x,y)|<c$, c – положительная константа.

Используя равенства

$$A_1(U_n,x,y,\varepsilon)\frac{\partial U_n}{\partial x}-A_1(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}A_1(s,x,y,\varepsilon)ds-$$
$$-\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}\frac{\partial}{\partial x}A_1(s,x,y,\varepsilon)ds$$

$$A_2(U_n,x,y,\varepsilon)\frac{\partial U_n}{\partial y}-A_2(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}A_2(s,x,y,\varepsilon)ds-$$
$$-\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}\frac{\partial}{\partial y}A_2(s,x,y,\varepsilon)ds,$$

уравнение (3.39) можно привести к виду

$$\Delta z_n=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}A_1(s,x,y,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{u_\varepsilon}^{U_n}A_2(s,x,y,\varepsilon)ds+p(x,y,\varepsilon),$$

где

$$p(x,y,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_\varepsilon}^{U_n}\frac{\partial}{\partial x}A_1(s,x,y,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_\varepsilon}^{U_n}\frac{\partial}{\partial y}A_2(s,x,y,\varepsilon)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(B(U_n,x,y,\varepsilon)-B(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\right)+\varepsilon^{n-1}\psi(x,y)$$

С учетом (3.27) получим оценку

$$|p(x,y,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n-1},\ C > 0. \tag{3.40}$$

Используя представление решения задачи (3.39) через функцию Грина (см., например, [69] с.26), получим следующее равенство:

$$z_n(x,y) = \int\limits_0^L \int\limits_0^a G(x,y;\xi,\eta)p(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^L \int\limits_0^a G(x,y;\xi,\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_1(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right)d\xi d\eta +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^L \int\limits_0^a G(x,y;\xi,\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_2(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right)d\xi d\eta.$$

Интегрируя по частям и учитывая граничные условия для функции Грина задачи (3.39), сделаем следующее преобразование:

$$\int\limits_0^L\int\limits_0^a G(x,y,\xi,\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_1(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_2(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right)d\xi d\eta=$$

$$=-\int\limits_0^L\int\limits_0^a\left[G_\xi(x,y;\xi,\eta)\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_1(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right]d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_0^L\int\limits_0^a\left[G_\eta(x,y;\xi,\eta)\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_2(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right]d\xi d\eta. \quad (3.41)$$

В силу оценки (3.27) и гладкости функций $A_i(u,x,y,\varepsilon)$, $i=1,2$, справедливы равенства

$$\left|\int\limits_{u_\varepsilon(\xi,\eta)}^{U_n(\xi,\eta,\varepsilon)} A_i(s,\xi,\eta,\varepsilon)ds\right|=c_i(\xi,\eta,\varepsilon),\quad i=1,2, \quad (3.42)$$

где $c_i(\xi,\eta,\varepsilon)\leq c\varepsilon^{n+1}$, $i=1,2$ – гладкие функции.

Учитывая равенства (3.42) и преобразования (3.41), а также оценку

(3.40), получим следующие оценки для производных $\partial z_n/\partial x$ и $\partial z_n/\partial y$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}(x,y)\right| \le C\varepsilon^{n-1}\left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_x(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right| + \\ + \left(\left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_{x\xi}(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta\right| + \\ \left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_{x\eta}(x,y;\xi,\eta)c_2(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta\right|\right), \quad (3.43)$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}(x,y)\right| \le C\varepsilon^{n-1}\left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_y(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right| + \\ + \left(\left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_{y\xi}(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta\right| + \\ \left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_{y\eta}(x,y;\xi,\eta,\varepsilon)c_2(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta\right|\right).$$

Используя оценки производных функции Грина (см. [70]), можно получить следующие оценки интегралов:

$$\left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_x(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right| < c, \quad \left|\int\limits_0^L\int\limits_0^a G_y(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right| < c,$$

где c – константа.

Как известно, функцию Грина оператора Лапласа можно представить в виде суммы двух слагаемых [71] с. 423-426

$$G(x,y;\xi,\eta) = \mathcal{E}(r) + g(x,y;\xi,\eta),$$

где $\mathcal{E}(r)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, $r = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}$, а $g(x,y;\xi,\eta)$ – гармоническая функция переменных (x,y) и (ξ,η). Используя это представление, проведем следующее преобразование

$$\int\limits_0^L \int\limits_0^a G_{x\xi}(x,y;\xi,\eta) c_1(\xi,\eta,\varepsilon) d\xi d\eta =$$
$$= \int\limits_0^L \int\limits_0^a \mathcal{E}_{x\xi}(r) c_1(\xi,\eta,\varepsilon) d\xi d\eta + \int\limits_0^L \int\limits_0^a g_{x\xi}(x,y;\xi,\eta) c_1(\xi,\eta,\varepsilon) d\xi d\eta.$$

Второе слагаемое в правой части последнего выражения представляет собой двойной интеграл от гладкой функции, ограниченный по абсолютной величине. Первое слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_0^L \int_0^a \mathcal{E}_{x\xi}(r) c_1(\xi,\eta,\varepsilon) d\xi d\eta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^a \mathcal{E}(r) c_1(\xi,\eta,\varepsilon) d\xi d\eta.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой вторую производную ньютонова потенциала и является непрерывной в прямоугольнике $\{(x,y) : 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le a\}$ [72] с. 171.

Тем самым, справедлива оценка

$$\left|\int_0^L\int_0^a G_{x\xi}(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta,\varepsilon)d\xi d\eta\right| < c\varepsilon^{n+1}.$$

Аналогично доказывается оценка всех остальных двойных интегралов в правых частях неравенств (3.43), содержащих вторые производные функции Грина.

Из оценок производных $\partial z_n/\partial x$ и $\partial z_n/\partial y$ следует выполнение неравенств (3.38), откуда с учетом (3.37), следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 3.2 доказана.

Перейдем к доказательству основного результата этого раздела. Действуя оператором L_t на функцию $\hat\beta$, придем к равенству

$$L_t[\hat\beta] = \varepsilon\Delta\hat\beta - \Big(\mathbf{A}(\hat\beta,x,y,\varepsilon),\nabla\Big)\,\hat\beta - B(\hat\beta,x,y,\varepsilon) + \lambda\,(\beta_n - u_\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

К правой части последнего равенства добавим слагаемые $(\mathbf{A}(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon),\nabla)u_\varepsilon$, $\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathbf{A}(\beta_n,x,y,\varepsilon),\nabla)\beta_n$, $\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathbf{A}(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon),\nabla)u_\varepsilon$, $\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathbf{A}(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon),\nabla)\beta_n$, $(\mathbf{A}(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon),\nabla)\beta_n$, $(\mathbf{A}(\hat\beta,x,y,\varepsilon),\nabla)\beta_n$, $B(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)$, $B(u_\varepsilon,x,y,\varepsilon)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $B(\beta_n,x,y,\varepsilon)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, и затем вычтем их для того, чтобы выражение осталось неизменным. После некоторых преобразований получим равенство:

$$
\begin{gathered}
L_t[\hat{\beta}] = L_\varepsilon[u_\varepsilon] + \mathrm{e}^{-\lambda t}(L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(\beta_n - u_\varepsilon) + \\
+ \left(\mathrm{e}^{-\lambda t} - 1\right) \Big(\mathbf{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - \mathbf{A}(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon), \nabla\Big) (\beta_n - u_\varepsilon) + \\
+ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(\mathbf{A}(\beta_n, x, y, \varepsilon) - \mathbf{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon), \nabla\right) \beta_n + \\
\Big(\mathbf{A}(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - \mathbf{A}(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon), \nabla\Big) \beta_n + \\
+ \mathrm{e}^{-\lambda t}(B(\beta_n, x, y, \varepsilon) - B(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon)) + (B(u_\varepsilon, x, y, \varepsilon) - B(\hat{\beta}, x, y, \varepsilon)),
\end{gathered}
$$

где оператор L_ε определен в условии 2) определения 3.1.

Учтем, что согласно уравнению (3.2), $L_\varepsilon[u_\varepsilon] = 0$, первое равенство в (3.33) и некоторые следствия формулы Лагранжа. Тогда равенство принимает следующий вид:

$$
\begin{gathered}
L_t[\hat{\beta}] = \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(-\varepsilon^{n-1} d \cdot \mathrm{e}^{\gamma\xi} - \varepsilon^n R + \lambda(\beta_n - u_\varepsilon) - \right. \\
- \left(\mathrm{e}^{-\lambda t} - 1\right) (\beta_n - u_\varepsilon)(\mathbf{A}_u^*, \nabla)(\beta_n - u_\varepsilon) + (\beta_n - u_\varepsilon)^2 \left(\theta_1 - \theta_2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \left.(\mathbf{A}_{uu}^*, \nabla)\beta_n\right) + \\
+ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left((\beta_n - u_\varepsilon)^2 \left(\theta_4 - \theta_5 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) B_{uu}^* + O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\right), \quad (3.44)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}_u^* = \mathbf{A}_u \left(u_\varepsilon + \theta_0(\beta_{n+1} - u_\varepsilon)\mathrm{e}^{-\lambda t}, x, y, \varepsilon\right), \\
\mathbf{A}_{uu}^* = \mathbf{A}_{uu} \left(u_\varepsilon + \theta_1(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) + \theta_3(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) \left(\theta_1 - \theta_2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right), x, y, \varepsilon\right), \\
B_{uu}^* = B_{uu} \left(u_\varepsilon + \theta_4(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) + \theta_6(\beta_{n+1} - u_\varepsilon) \left(\theta_4 - \theta_5 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right), x, y, \varepsilon\right), \\
0 < \theta_i < 1, \ i = \overline{0, 6}.
\end{gathered}
$$

В силу неравенств (3.28) и (3.27) для всех $(x, y) \in \overline{D}$ справедлива оценка $\beta_n(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y) = O(\varepsilon^n)$, Кроме того, из (3.36) следует что $(\mathbf{A}_u^*, \nabla)(\beta_n(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y)) = O(\varepsilon^{n-1})$, $(x, y) \in D$, поэтому при $n \geq$

1 и достаточно малых ε выражение в правой части (3.44) принимает отрицательные значения при достаточно большом положительном R, и условие 2^0 для функции $\hat{\beta}$ выполняется. Таким образом, $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ является верхним решением задачи (3.1). Аналогично доказывается, что функция $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ является нижним решением задачи (3.1).

Из вида (3.35) верхнего и нижнего решений при $n = 1$ задачи (3.1), а также из неравенств (3.34) следует, что для любой начальной функции $v_{init}(x, y)$ задачи (3.1), для которой при всех $(x, y) \in \overline{D}$ выполняются неравенства $\alpha_2(x, y, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y) \leq \beta_2(x, y, \varepsilon)$, справедливо предельное равенство:

$$\lim_{t \to +\infty} |v_\varepsilon(x, y, t) - u_\varepsilon(x, y)| = 0, \qquad (3.45)$$

где $v_\varepsilon(x, y, t)$ – решение задачи (3.1). Выполнение этого предельного равенства означает асимптотическую устойчивость (по Ляпунову) решения $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (3.2) как стационарного решения задачи (3.1). Кроме того, из единственности решения $v_\varepsilon(x, y, t)$ задачи (3.1) и равенства (3.45) следует единственность стационарного решения $u_\varepsilon(x, y)$ в интервале $[\alpha_2(x, y, \varepsilon); \beta_2(x, y, \varepsilon)]$.

Теорема 3.2 доказана.

Глава 4

Уравнение реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми в одномерном случае

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в области $(x,t) \in [-1,1] \times [0,\infty)$:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial t} = A(v,x,\varepsilon)\dfrac{\partial v}{\partial x} + f(v,x,\varepsilon), \quad x \in (-1,1), \quad t \in (0,\infty); \\ v(-1,t) = u^{(-)};\ v(1,t) = u^{(+)}, \quad t \in (0,\infty); \\ v(x,0) = v_{init}(x,\varepsilon), \quad x \in [-1,1], \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функции $A(v,x,\varepsilon)$ и $f(v,x,\varepsilon)$ определены всюду в области $\bar{D} \times (0,\varepsilon_0] = \{(v,x)|\ I_v \times [-1,1]\} \times (0,\varepsilon_0]$, где I_v – допустимый интервал изменения аргумента v, и являются достаточно гладкими в $\bar{D}$ за исключением части прямой $v \in I_v,\ x = x_0$, где x_0 – внутренняя точка отрезка $[-1, 1]$, делящей область $\bar{D}$ на две части:

$$\bar{D}^{(-)} = \{(v, x)|\, v \in I_v,\, -1 \le x \le x_0\} \quad \text{и} \quad \bar{D}^{(+)} = \{(v, x)|\, v \in I_v,\, x_0 \le x \le 1\}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие C1. Пусть функции $A(v, x, \varepsilon)$ и $f(v, x, \varepsilon)$ имеют вид

$$A(v, x, \varepsilon) = \begin{cases} A^{(-)}(v, x, \varepsilon),\ (v, x) \in \bar{D}^{(-)}, \\ A^{(+)}(v, x, \varepsilon),\ (v, x) \in \bar{D}^{(+)}; \end{cases}$$

$$f(v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(v, x, \varepsilon),\ (v, x) \in \bar{D}^{(-)}, \\ f^{(+)}(v, x, \varepsilon),\ (v, x) \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases}$$

причем $A^{(\mp)}(v, x, \varepsilon)$ и $f^{(\mp)}(v, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими, и выполняются неравенства

$$A^{(-)}(v, x_0, \varepsilon) \neq A^{(+)}(v, x_0, \varepsilon), \;\; f^{(-)}(v, x_0, \varepsilon) \neq f^{(+)}(v, x_0, \varepsilon), \;\; v \in I_v.$$

Условие C2. Пусть на отрезке $x \in [-1, x_0]$ существует решение $u = \varphi^{(-)}(x)$ задачи Коши

$$A^{(-)}(u, x, 0)\frac{du}{dx} + f^{(-)}(u, x, 0) = 0, \quad u(-1) = u^{(-)},$$

а на отрезке $x \in [x_0, 1]$ существует решение $u = \varphi^{(+)}(x)$ задачи Коши

$$A^{(+)}(u, x, 0)\frac{du}{dx} + f^{(+)}(u, x, 0) = 0, \quad u(1) = u^{(+)}.$$

Для определенности будем считать, что $\varphi^{(-)}(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0)$.

Будем проводить исследование асимптотической устойчивости стационарного решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (4.1), обладающего большим градиентом в окрестности точки x_0; близкого к функции $\varphi^{(-)}(x)$ слева от этой окрестности и к функции $\varphi^{(+)}(x)$ справа от нее.

Определение 4.1. *Решением задачи* (4.1) *будем называть функцию* $v(x,t)$ *из класса* $C([-1,1]\times[0,\infty))\cap C^{1,1}((-1,1)\times[0,\infty))\cap\big(C^{2,1}((-1,x_0)\times\times[0,\infty))\cup C^{2,1}((x_0,1)\times[0,\infty))\big)$, *удовлетворяющую уравнению* (4.1) *на каждом из интервалов* $(-1,x_0)$ *и* $(x_0,1)$ *и граничным и начальным условиям задачи* (4.1).

Стационарное решение начально-краевой задачи (4.1) по определению является решением краевой задачи

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} = A(u,x,\varepsilon)\frac{du}{dx}+f(u,x,\varepsilon), \quad x\in(-1,1), \quad u(-1)=u^{(-)};\ u(1)=u^{(+)}, \tag{4.2}$$

которое определяется аналогично.

Определение 4.2. *Решением задачи* (4.2) *будем называть функцию из класса* $C[-1,1]\cap C^1(-1,1)\cap\big(C^2(-1,x_0)\cup C^2(x_0,1)\big)$, *удовлетворяющую уравнению* (4.2) *на каждом из интервалов* $(-1,x_0)$ *и* $(x_0,1)$ *и граничным условиям задачи* (4.2).

Для доказательства существования и устойчивости решения задачи (4.2) как стационарного решения задачи (4.1) мы будем использовать метод верхних и нижних решений [51, 53], для построения которых применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [58, 61]).

Для доказательства теорем существования и устойчивости нам потребуются еще некоторые условия.

Условие C3. Пусть выполняются неравенства

$$A^{(-)}(\varphi^{(-)}(x), x, 0) > 0,\ x \in [-1, x_0];\ \ A^{(+)}(\varphi^{(+)}(x), x, 0) < 0,\ \ x \in [x_0, 1].$$

4.1.1 Присоединенная система

Для описания поведения решения в окрестности точки x_0 введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon} \tag{4.3}$$

Рассмотрим так называемые присоединенные уравнения для задачи (4.2)

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = A^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0)\frac{d\tilde{u}}{d\xi}. \tag{4.4}$$

Уравнение, содержащее функцию с верхним индексом «$-$», будем рассматривать при $\xi \le 0$, а с верхним индексом «$+$» – при $\xi \ge 0$.

Уравнения (4.4) эквивалентны системам двух уравнений первого порядка (присоединенным системам)

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi,\ \frac{d\Phi}{d\xi} = A^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0)\Phi. \tag{4.5}$$

Разделим каждое из вторых уравнений систем (4.5) на первое и получим дифференциальные уравнения первого порядка относительно функций $\Phi(\tilde{u})$, которые определяют фазовые траектории этих систем на плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$:

$$\frac{d\Phi}{d\tilde{u}} = A^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0). \tag{4.6}$$

Каждая из точек $\big(\varphi^{(\mp)}(x_0), 0\big)$ фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ является точкой покоя соответствующей системы (4.5), а, так как функции $A^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0)$ непрерывны при $\varphi^{(-)}(x_0) \le \tilde{u} \le \varphi^{(+)}(x_0)$, то существуют фазовые траектории

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) = \int_{\varphi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{u}} A^{(\mp)}(s, x_0, 0)ds,\ \varphi^{(-)}(x_0) < \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x_0). \tag{4.7}$$

Потребуем выполнения следующего условия. **Условие C4.** Пусть

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} A^{(-)}(s, x_0, 0)ds > 0,\ \ \varphi^{(-)}(x_0) < \tilde{u} \le \varphi^{(+)}(x_0),$$
$$\int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} A^{(+)}(s, x_0, 0)ds > 0,\ \ \varphi^{(-)}(x_0) \le \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x_0),$$

В силу условия **C4** функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u})$ принимают положительные значения и лежат в верхней части фазовой плоскости, причем фазовая траектория $\Phi^{(-)}(\tilde{u})$ входит в точку покоя $\big(\varphi^{(-)}(x_0), 0\big)$ при $\xi \to -\infty$, а фазовая траектория $\Phi^{(+)}(\tilde{u})$ входит в точку покоя $\big(\varphi^{(+)}(x_0), 0\big)$ при $\xi \to +\infty$, и в силу условия **C3** эти точки покоя являются асимптотически устойчивыми.

Введем функцию

$$H_0(p) = \Phi^{(-)}(p) - \Phi^{(+)}(p) = \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} A^{(-)}(s, x_0, 0)ds - \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} A^{(+)}(s, x_0, 0)ds, \tag{4.8}$$

определенную на отрезке $p \in \big[\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\big]$.

Если выполнены условия **C1**–**C4**, то функция $H_0(p)$ является непрерывной при $p \in \big[\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\big]$, кроме того, в силу условия **C4** выполняются неравенства $H_0\left(\varphi^{(-)}(x_0)\right) < 0$, $H_0\left(\varphi^{(+)}(x_0)\right) > 0$, поэтому существует хотя бы одно значение $p_0 \in \left(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\right)$, такое что $H_0(p_0) = 0$. Это значит, что при $\tilde{u} = p_0$ фазовые траектории $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$ пересекаются.

Условие C5. Пусть существует единственная точка $p_0 \in \big(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\big)$, являющаяся решением уравнения $H_0(p) = 0$, и пусть выполнено неравенство

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0) > 0. \tag{4.9}$$

Замечание. Из вида (4.8) функции $H_0(p)$ следует, что

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0) = A^{(-)}(p_0, x_0, 0) - A^{(+)}(p_0, x_0, 0) \tag{4.10}$$

и неравенство (4.9) можно переписать в виде $A^{(-)}(p_0, x_0, 0) - A^{(+)}(p_0, x_0, 0) > 0$.

Подставляя каждое из выражений (4.7) для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u})$ в первые уравнения систем (4.5), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\tilde{u}^{(\mp)}$:

$$\frac{d\tilde{u}^{(-)}}{d\xi} = \Phi^{(-)}(\tilde{u}^{(-)}) = \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}^{(-)}} A^{(-)}(s, x_0, 0)ds, \ \xi < 0; \tag{4.11}$$

$$\frac{d\tilde{u}^{(+)}}{d\xi} = \Phi^{(+)}(\tilde{u}^{(+)}) = \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}^{(+)}} A^{(+)}(s, x_0, 0)ds, \ \xi > 0. \tag{4.12}$$

Из выражений (4.6) и условия **C3** следует выполнение неравенств

$$\frac{d\Phi^{(-)}}{d\tilde{u}^{(-)}}(\varphi^{(-)}(x_0)) > 0, \quad \frac{d\Phi^{(+)}}{d\tilde{u}^{(+)}}(\varphi^{(+)}(x_0)) < 0,$$

и, согласно теореме Ляпунова, точка $(\varphi^{(-)}(x_0), 0)$ является асимптотически устойчивой точкой покоя для уравнения (4.11) при $\xi \to -\infty$, а точка

$(\varphi^{(+)}(x_0), 0)$ – асимптотически устойчивой точкой покоя для уравнения (4.12) при $\xi \to +\infty$.

Пересечение при $\tilde{u} = p_0$ фазовых траекторий $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$, выходящих соответственно из точек покоя $(\varphi^{(-)}(x_0), 0)$ и $(\varphi^{(+)}(x_0), 0)$, означает, что значение $\tilde{u} = p_0$ лежит в области влияния каждой из точек покоя, поэтому существуют решения задач Коши для уравнений (4.11)–(4.12) с условиями $\tilde{u}^{(\mp)}(0) = p_0$, для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\xi \to \mp\infty} \left| \tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right| = 0.$$

Покажем, что, кроме того, верны следующие экспоненциальные оценки:

$$\left| \tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right| < c \exp(-\kappa |\xi|), \tag{4.13}$$

где c и κ – некоторые положительные числа.

Заметим, что вблизи точек покоя $(\varphi^{(-)}(x_0), 0)$ и $(\varphi^{(+)}(x_0), 0)$, функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)})$ можно представить в виде

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}) = \Phi^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0)) + \frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\tilde{u}^{(\mp)}}(\varphi^{(\mp)}(x_0)) \left(\tilde{u}^{(\mp)} - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right) + \\ + o\left(\tilde{u}^{(\mp)} - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right).$$

Поскольку $\Phi^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0)) = 0$, $\dfrac{d\Phi^{(\mp)}}{d\tilde{u}^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0))} = A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0), x_0, 0)$, то уравнения касательных к фазовым траекториям в соответствующих точках покоя имеют вид

$$z^{(\mp)} = \bar{A}^{(\mp)}(x_0) \left(\tilde{u}^{(\mp)} - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right),$$

где введены обозначения $\bar{A}^{(-)}(x_0) := A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0), x_0, 0)$.

Функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)})$ непрерывны на сегменте $\varphi^{(-)}(x_0) \leq \varphi^{(+)}(x_0)$, кроме того, выполняется условие **C4**, поэтому найдутся такие положительные константы $\sigma_1^{(-)} < \bar{A}^{(-)}(x_0)$, $\sigma_1^{(+)} < \left|\bar{A}^{(+)}(x_0)\right|$, а также положительные константы $\sigma_2^{(\mp)}$, что справедливы следующие неравенства:

$$\left(\bar{A}^{(-)}(x_0) - \sigma_1^{(-)}\right)\left(\tilde{u}^{(-)} - \varphi^{(-)}(x_0)\right) < \Phi^{(-)} <$$
$$< \left(\bar{A}^{(-)}(x_0) + \sigma_2^{(-)}\right)\left(\tilde{u}^{(-)} - \varphi^{(-)}(x_0)\right),$$
$$\left(\bar{A}^{(+)}(x_0) + \sigma_1^{(+)}\right)\left(\tilde{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(x_0)\right) < \Phi^{(+)} <$$
$$< \left(\bar{A}^{(+)}(x_0) - \sigma_2^{(+)}\right)\left(\tilde{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(x_0)\right).$$

Разделим переменные в каждом из неравенств, учитывая, что $\Phi^{(\mp)} = \dfrac{d\tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi}$, а также то, что на сегменте $\varphi^{(-)}(x_0) \leq \varphi^{+}(x_0)$, выполняются неравенства $\tilde{u}^{(-)} - \varphi^{(-)}(x_0) > 0$ и $\tilde{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(x_0) < 0$, а затем проинтегрируем:

$$\int\limits_{\xi}^{0}\left(\bar{A}^{(-)}(x_0) - \sigma_1^{(-)}\right)d\xi < \int\limits_{\tilde{u}^{(-)}}^{p_0}\frac{\tilde{u}^{(-)}}{\tilde{u}^{(-)} - \varphi^{(-)}(x_0)} <$$
$$< \int\limits_{\xi}^{0}\left(\bar{A}^{(-)}(x_0) + \sigma_2^{(-)}\right)d\xi,\ \xi < 0;$$
$$\int\limits_{0}^{\xi}\left(\bar{A}^{(+)}(x_0) + \sigma_1^{(+)}\right)d\xi > \int\limits_{p_0}^{\tilde{u}^{(+)}}\frac{d\tilde{u}^{(+)}}{\tilde{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(x_0)} >$$
$$> \int\limits_{0}^{\xi}\left(\bar{A}^{(+)}(x_0) - \sigma_2^{(+)}\right)d\xi,\ \xi > 0.$$

После вычисления интегралов эти неравенства нетрудно привести к следующему виду:

$$c_1 \exp\left(\left(\bar{A}^{(-)}(x_0) + \sigma_2^{(-)}\right)\xi\right) < \left|\tilde{u}^{(-)} - \varphi^{(-)}(x_0)\right| <$$
$$< c_1 \exp\left(\left(\bar{A}^{(-)}(x_0) - \sigma_1^{(-)}\right)\xi\right), \ \xi < 0;$$

$$c_2 \exp\left(\left(\bar{A}^{(+)}(x_0) - \sigma_2^{(+)}\right)\xi\right) < \left|\tilde{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(x_0)\right| <$$
$$< c_2 \exp\left(\left(\bar{A}^{(+)}(x_0) + \sigma_1^{(+)}\right)\xi\right), \ \xi > 0,$$

где $c_{1,2} = \left|p_0 - \varphi^{(\mp)}(x_0)\right|$. Отсюда непосредственно вытекают оценки (4.13).

4.2 Построение асимптотического приближения решения

Асимптотическое приближение решения задачи (4.2) будем строить согласно методу Васильевой [1, 73] отдельно слева и справа от точки x_0. Для этого рассмотрим две следующие задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} = A^{(-)}(u,x,\varepsilon)\frac{du}{dx} + f^{(-)}(u,x,\varepsilon), \ \ x \in (-1, x_0), \\ u(-1) = u^{(-)}; \ u(x_0) = p \end{cases} \tag{4.14}$$

и

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} = A^{(+)}(u,x,\varepsilon)\frac{du}{dx} + f^{(+)}(u,x,\varepsilon), \ \ x \in (x_0, 1), \\ u(x_0) = p, \ u(1) = u^{(+)}, \end{cases} \tag{4.15}$$

где $p \in \left(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\right)$.

Для каждой из этих задач будем строить асимптотические приближения, соответственно функции $U^{(\mp)}(p, x, \varepsilon)$, каждую из которых будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$U^{(\mp)}(p, x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, \varepsilon), \tag{4.16}$$

где $\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического представления, $Q^{(\mp)}(\xi, \varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, ξ – растянутая переменная, определенная в (4.3).

Каждую из функций в представлении (4.16) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x) + ...; \tag{4.17}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi) + ... \tag{4.18}$$

Функции $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ будем непрерывно сшивать в точке x_0, считая, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\bar{u}_0^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(0) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(x_0) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0) + ... = \\ &\qquad = \bar{u}_0^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(0) + \varepsilon \bar{u}_1^{(+)}(x_0) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0) + ... = p. \end{aligned}$$

Значение $p \in \big(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\big)$ неизвестно. Будем искать его из условия гладкого сшивания производных в точке x_0.

$$\frac{dU^{(-)}}{dx}(p, x_0, \varepsilon) = \frac{dU^{(+)}}{dx}(p, x_0, \varepsilon). \tag{4.19}$$

4.2.1 Регулярная часть асимптотического представления

Регулярная часть асимптотического приближения определяется как решение задач

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2 \bar{u}^{(\mp)}}{dx^2} = A^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, \varepsilon) \dfrac{du^{(\mp)}}{dx} + f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, \varepsilon), \\ \bar{u}^{(\mp)}(\mp 1, \varepsilon) = u^{(\mp)}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Подставляя в эти уравнения суммы (4.17), раскладывая функции в правой части в ряд Тейлора по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}$, $i = 0, 1, ...$

Функции $u_0^{(\mp)}(x)$ определяются из задач

$$\begin{cases} A^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) \dfrac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx} + f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0, \\ \bar{u}_0^{(\mp)}(\mp 1) = u^{(\mp)}. \end{cases}$$

Согласно условию **C2**, положим

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(x).$$

Для функций $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ уравнения будут выглядеть следующим образом

$$\frac{d^2\varphi^{(\mp)}}{dx^2} - \left[A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \frac{d\bar{u}_1^{(\mp)}}{dx} + A_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \cdot \bar{u}_1^{(\mp)}(x) \cdot \frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx} + \right.$$
$$\left. + f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \cdot \bar{u}_1^{(\mp)}(x) \right] = 0$$

Обозначим $\dfrac{d^2\varphi^{(\mp)}}{dx^2} = h_1^{(\mp)}(x)$ и дополним уравнение граничными условиями, тогда получим задачи для определения функций $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$:

$$\begin{cases} A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)\dfrac{d\bar{u}_1^{(\mp)}}{dx} + \\ +\bar{u}_1^{(\mp)}(x) \cdot \left[A_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \cdot \dfrac{d\varphi^{(\mp)}}{dx} + f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)\right] = h_1^{(\mp)}(x), \\ \bar{u}_1^{(\mp)}(\mp 1) = 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Функции с верхним индексом «$-$» определены при $0 \le x \le x_0$, а с верхним индексом «$+$» – при $x_0 \le x \le 1$. Решения задач (4.21) могут быть выписаны в явном виде:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}(x) = \\ = \int\limits_{\mp 1}^{x} \exp\left(-\int\limits_{s}^{x} W^{(\mp)}(s')\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s'), s', 0\right)\right)^{-1} ds'\right) \times \\ \times h_1^{(\mp)}(s)\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s), s, 0\right)\right)^{-1} ds.$$

где введено обозначения:

$$W^{(\mp)}(x) = A_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) \cdot \frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx} + f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0). \tag{4.22}$$

Аналогичным образом $m-$тый порядок разложения будет определяться следующими задачами:

$$\begin{cases} A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x),x,0\right)\dfrac{d\bar{u}_m^{(\mp)}}{dx} = -W^{(\mp)}(x)\bar{u}_m^{(\mp)} + h_m^{(\mp)}(x), \\ \bar{u}_m^{(\mp)}(\mp 1) = 0, \end{cases}$$

где $h_m^{(\mp)}(x)$ – известные функции.

Решения задач можно выписать в явном виде

$$\bar{u}_m^{(\mp)}(x) = \\ = \int\limits_{\mp 1}^{x} \exp\left(-\int\limits_{s}^{x} W^{(\mp)}(s')\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s'),s',0\right)\right)^{-1} ds'\right)\times \\ \times h_m^{(\mp)}(s)\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s),s,0\right)\right)^{-1} ds.$$

4.2.2 Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2Q^{(\mp)}}{d\xi^2} = A^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+Q^{(\mp)}(\xi),x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right)\left(\frac{d\bar{u}^{(\mp)}}{dx}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ^{(\mp)}}{d\xi}\right)+ \\ +f^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+Q^{(\mp)}(\xi),x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right)-f^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi),x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right)- \\ -\bar{A}^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi),x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right)\frac{d\bar{u}^{(\mp)}}{dx} \quad (4.23)$$

Подставим в выражение суммы (4.17) и (4.18), разложим функции в правой части в ряд Тейлора по малому параметру до первой степени и приравняем коэффициенты при ε^{-1}, тогда мы получим систему для определения функций переходного слоя нулевого порядка:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} = A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}, x_0, 0)\dfrac{dQ_0^{(\mp)}}{d\xi}, \\
Q_0^{(\mp)}(0) = p - \varphi^{(\mp)}(x_0),\ Q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0.
\end{cases}
\tag{4.24}
$$

Задачи для функций с верхним индексом «$-$» определены при $\xi \leq 0$, а с верхним индексом «$+$» – при $\xi \geq 0$.

Введем обозначения:

$$
\tilde{u}(\xi) = \begin{cases}
\tilde{u}^{(-)}(\xi) := \varphi^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \leq 0; \\
\tilde{u}^{(+)}(\xi) := \varphi^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \geq 0.
\end{cases}
\tag{4.25}
$$

Уравнения (4.24), переписанные с использованием этих обозначений, примут вид (4.4). Согласно пункту 4.1.1 решения задач (4.24) существуют, и для них справедливы следующие экспоненциальные оценки:

$$
\left| Q_0^{(\mp)}(\xi) \right| \leq Ce^{-\kappa|\xi|},
\tag{4.26}
$$

где C и κ – положительные константы.

Обозначим

$$
\Phi^{(\mp)}(\xi) := \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi)) = \frac{d\tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi}(\xi).
\tag{4.27}
$$

Для функций $\Phi^{(\mp)}(\xi)$ справедливы оценки типа (4.26).

Далее для краткости будем использовать обозначения вида

$$
\tilde{F}^{(\mp)}(\xi) = F^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi), x_0, 0),
$$

Для определения функций переходного слоя первого порядка, приравняем в (4.23) коэффициенты при ε^1:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} = \tilde{A}^{(\mp)}(\xi)\dfrac{dQ_1^{(\mp)}}{d\xi} + \tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\Phi^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)}(\xi) + Qh_1^{(\mp)}(\xi), \\ Q_1^{(\mp)}(0) + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0) = 0, \;\; Q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Здесь введено обозначение

$$Qh_1^{(\mp)}(\xi) = \Phi^{(\mp)}(\xi)\left(\tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\bar{u}_1^{(\mp)} + \tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}\xi + \tilde{A}_x^{(\mp)}(\xi)\xi + \tilde{A}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi)\right) +$$
$$+\left(\tilde{A}^{(\mp)}(\xi) - A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0), x_0, 0)\right)\frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx} + \tilde{f}^{(\mp)}(\xi) - f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0), x_0, 0). \tag{4.29}$$

Функции $\Phi^{(\mp)}(\xi)$ являются решениями однородных уравнений для (4.28), в этом можно убедиться, продифференцировав (4.4) по ξ. Решая неоднородное уравнение с помощью метода вариации постоянной, найдем выражения для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \Phi^{(\mp)}(\xi)\int_0^\xi \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(s)}ds\int_{\mp\infty}^s Qh_1^{(\mp)}(t)dt.$$

Аналогично запишем задачи для определения функций переходного слоя $m-$ого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Q_m^{(\mp)}}{d\xi^2} = \tilde{A}^{(\mp)}(\xi)\dfrac{dQ_m^{(\mp)}}{d\xi} + \tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\Phi^{(\mp)}(\xi)Q_m^{(\mp)}(\xi) + Qh_m^{(\mp)}(\xi), \\ Q_m^{(\mp)}(0) + \bar{u}_m^{(\mp)}(x_0) = 0; \; Q_m^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

здесь $Qh_m^{(\mp)}(\xi)$ – известные функции, зависящие от $\bar{u}_j^{(\mp)}(0)(j \le m)$ и

$Q_j^{(\mp)}(\xi)(j \le m-1)$.

Решение задачи (4.30) можно представить в виде

$$Q_m^{(\mp)}(\xi) = -\bar{u}_m^{(\mp)}(x_0)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \Phi^{(\mp)}(\xi)\int_0^{\xi}\frac{1}{\Phi^{\mp}(s)}ds\int_{\mp\infty}^{s} Qh_m^{(\mp)}(t)dt \quad (4.31)$$

Для функций $Q_m^{(\mp)}(\xi)$ также справедливы оценки типа (4.26) [73].

4.2.3 Сшивание производных асимптотических представлений

Введем функцию

$$H(p,\varepsilon) := \varepsilon\frac{dU^{(-)}}{dx}(p,x_0,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dU^{(+)}}{dx}(p,x_0,\varepsilon).$$

С учетом равенств (4.16) – (4.18) функцию $H(p,\varepsilon)$ можно представить в виде разложения по степеням малого параметра:

$$H(p,\varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p) + ... =$$
$$= \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) - \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) + \varepsilon\left(\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) - \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) - \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0)\right) + ...$$

Выполнение условия (4.19) эквивалентно выполнению равенства

$$H(p,\varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p) + ... = 0. \quad (4.32)$$

Представим значение p в виде разложения по малому параметру

$$p := p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + ... \quad (4.33)$$

Подставим это разложение в (4.32) и будем объединять коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравнивать их нулю.

В нулевом порядке с учетом введенных обозначений (4.27), (4.25) и краевого условия при $\xi = 0$ задач (4.24) условие сшивания приводит к равенству

$$\Phi^{(-)}(p_0) - \Phi^{(+)}(p_0) = 0.$$

Величина $p_0 \in \big(\varphi^{(-)}(x_0), \varphi^{(+)}(x_0)\big)$, для которой это равенство справедливо, существует согласно условию **C5** .

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^1 в левой части (4.32), получим уравнения для определения p_1 :

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0) \cdot p_1 = G_1,$$

где введено обозначение $G_1 = H_1(p_0)$.

Это уравнение разрешимо в силу неравенства (4.9).

Коэффициенты $p_m,\ m > 1$ определяются следующим образом

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0) \cdot p_m = G_m,$$

где G_m – известные функции.

4.2.4 Асимптотическое представление решения

Если потребовать достаточной гладкости функций $f^{(\mp)}(u, x, \varepsilon);\ A^{(\mp)}(u, x, \varepsilon)$, то с помощью описанного алгоритма можно найти коэффициенты разложений (4.17), (4.18) до произвольного порядка n. Составим суммы:

$$U_n^{(-)}(p,x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(-)}(x)+Q_i^{(-)}(\xi)\right),\ x\in[-1;x_0],\xi\le 0; \tag{4.34}$$

$$U_n^{(+)}(p,x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(+)}(x)+Q_i^{(+)}(\xi)\right),\ x\in[x_0;1],\xi\ge 0. \tag{4.35}$$

Асимптотическим представлением порядка n решения задачи (4.2) будем называть функцию

$$U_n(p,x,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(p,x,\varepsilon),\ x\in[-1;x_0],\\ U_n^{(+)}(p,x,\varepsilon),\ x\in[x_0;1].\end{cases}$$

Функция $U_n(p,x,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (4.2) соответственно на интервалах $(-1,x_0)$ и $(x_0,1)$ с точностью $O(\varepsilon^n)$, и с точностью до любой степени ε граничным условиям в точках $x=\mp 1$, поскольку функции переходного слоя вносят бесконечно малые, но все же отличные от нуля невязки в краевые условия задачи (4.2). Для того, чтобы граничные условия выполнялись точно, применим стандартную процедуру умножения функций переходного слоя на срезающую функцию, сохранив для них прежние обозначения.

4.3 Существование решения стационарной задачи

Теорема 4.1. *При выполнении условий* ***C1–C5*** *при достаточно малом* $\varepsilon>0$ *существует функция* $u_\varepsilon(x)$*, являющаяся решением задачи* (4.2) *в смысле определения 4.2, для которого функция* $U_n(p(\varepsilon),x,\varepsilon)$ *является равномерным на отрезке* $[-1,1]$ *асимптотическим приближением с* *точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть выполняется неравенство*

$$|u_\varepsilon(x) - U_n(p, x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \tag{4.36}$$

где C – положительная постоянная.

Доказательство теоремы будем проводить при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств [58, 74, 75], использующего метод верхних и нижних решений, обоснование которого для рассматриваемого класса задач приведено в [51, 53].

Определение 4.3. *Верхним $\beta(x, \varepsilon)$ и нижним $\alpha(x, \varepsilon)$ решениями задачи* (4.2) *называются непрерывные функции, для которых при достаточно малых ε справедливы неравенства*

1) $\alpha(x, \varepsilon) \le \beta(x, \varepsilon), \ \ -1 \le x \le 1;$

2) $L[\beta] := \varepsilon \dfrac{d^2\beta}{dx^2} - A(\beta, x, \varepsilon)\dfrac{d\beta}{dx} - f(\beta, x, \varepsilon) \le 0 \le L[\alpha], \ \ -1 < x < x_0 \cup x_0 < x < 1;$

3) $\alpha(\mp 1, \varepsilon) \le u^{(\mp)} \le \beta(\mp 1, \varepsilon).$

Согласно теоремам сравнения, доказанным в работах [51, 53], из существования верхнего и нижнего решений следует существование решения задачи (4.2), заключенного между этими верхним и нижним решениями:

$$\alpha(x, \varepsilon) \le u_\varepsilon(x) \le \beta(x, \varepsilon), \ \ -1 \le x \le 1. \tag{4.37}$$

Отметим, что доказательство теорем сравнения в [51, 53] проведено в предположении гладкости верхнего и нижнего решений. В нашем случае этот результат можно обобщить, используя верхние и нижние решения, не гладкие в точке x_0, для которых в этой точке выполняется следующее условие скачка производной:

$$4)\ \ \frac{d\beta}{dx}(x_0-0,\varepsilon)-\frac{d\beta}{dx}(x_0+0,\varepsilon)\geq 0;\ \ \frac{d\alpha}{dx}(x_0-0,\varepsilon)-\frac{d\alpha}{dx}(x_0+0,\varepsilon)\leq 0.$$

Доказательство неравенств типа (4.37) в [51,53] основано на принципе максимума для функций из класса C^1. В случае использования верхних и нижних решений, удовлетворяющих неравенствам 1)–3) и строгим неравенствам 4), можно доказать утверждение принципа максимума по аналогии с тем, как это сделано в [46, 64].

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств верхнее и нижнее решения строятся как модификации асимптотических приближений. Функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ будем строить отдельно на каждом из отрезков $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$:

$$\beta(x,\varepsilon)=\begin{cases}\beta^{(-)}(x,\varepsilon), & -1\leq x\leq x_0,\ \xi\leq 0;\\ \beta^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0\leq x\leq 1,\ \xi\geq 0.;\end{cases} \tag{4.38}$$

$$\alpha(x,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha^{(-)}(x,\varepsilon), & -1\leq x\leq x_0,\ \xi\leq 0;\\ \alpha^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0\leq x\leq 1,\ \xi\geq 0.\end{cases} \tag{4.39}$$

Функции $\beta^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ и $\alpha^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ являются модификациями построенных асимптотических приближений на каждом из отрезков:

$$\beta^{(\mp)}(x,\varepsilon):=\beta_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)=U_n^{(\mp)}(p,x,\varepsilon)+\varepsilon^n\left(\mu^{(\mp)}(x)+q_0^{(\mp)}(\xi)+\varepsilon q_1^{(\mp)}(\xi)\right), \tag{4.40}$$

$$\alpha^{(\mp)}(x,\varepsilon):=\alpha_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)=U_n^{(\mp)}(p,x,\varepsilon)-\varepsilon^n\left(\mu^{(\mp)}(x)+q_0^{(\mp)}(\xi)+\varepsilon q_1^{(\mp)}(\xi)\right). \tag{4.41}$$

Функции $\mu^{(\mp)}(x)$ выбираются таким образом, чтобы неравенства 1) – 2) выполнялись вдали от переходного слоя, а также выполнялось неравенство 3). Определим функции $\mu^{(\mp)}(x)$ как решения задач

$$\begin{cases} A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)\dfrac{d\mu^{(\mp)}}{dx} + W^{(\mp)}(x)\mu^{(\mp)}(x) = \tilde{R}^{(\mp)}, \\ \mu^{(\mp)}(\mp 1) = R_0^{(\mp)}. \end{cases} \tag{4.42}$$

на отрезке $[-1, x_0]$ для функций с верхним индексом «$-$» и на отрезке $[x_0, 1]$ для функций с верхним индексом «$+$». Здесь $\tilde{R}^{(\mp)}, R_0^{(\mp)}$ – некоторые положительные величины, а функции $W^{(\mp)}(x)$ определены в (4.22).

Выражения для функций $\mu^{(\mp)}(x)$ можно записать в явном виде:

$$\mu^{(\mp)}(x) = R_0^{(\mp)} \exp\left(-\int\limits_{\mp 1}^{x} W^{(\mp)}(s')\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s'), s', 0\right)\right)^{-1} ds'\right) +$$
$$+ \int\limits_{\mp 1}^{x} \exp\left(-\int\limits_{s}^{x} W^{(\mp)}(s')\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s'), s', 0\right)\right)^{-1} ds'\right) \times$$
$$\times \tilde{R}^{(\mp)}(s)\left(A^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(s), s, 0\right)\right)^{-1} ds.$$

В следствие выполнения условия **C3** функции $\mu^{(\mp)}(x)$ принимают только положительные значения.

Функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ вводятся для устранения невязок порядка $O(\varepsilon^{n-1})$, вносимых в неравенство 2) в окрестности точки x_0 в результате добавления к асимптотическому приближению слагаемых $\mu^{(\mp)}(x)$, а функции $q_1^{(\mp)}(\xi)$ – для устранения невязок порядка $O(\varepsilon^{n})$. Кроме того, функции $q_i^{(\mp)}(\xi)$, $i = 0, 1$ подбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства 4).

Определим функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ как решения задач:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{A}^{(\mp)}(\xi)\dfrac{dq_0^{(\mp)}}{d\xi} - \Phi^{(\mp)}(\xi)\tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)q_0^{(\mp)} - \Phi^{(\mp)}(\xi)\tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\mu^{(\mp)}(x_0)+ \\ +d\cdot e^{-\kappa|\xi|} = 0, \\ q_0^{(\mp)}(0) + \mu^{(\mp)}(x_0) = \delta;\ q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{4.43}$$

соответственно на полупрямых $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$. Здесь δ, d и κ – положительные величины, которые подбираются таким образом, чтобы выполнялись дифференциальные неравенства 1) и 4). Решения задач (4.43) можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} q_0^{(\mp)}(\xi) &= \left(\delta - \mu^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \\ &+ \Phi^{(\mp)}(\xi)\int_0^{\xi}\frac{1}{\Phi^{(\mp)}(s)}ds\int_{\mp\infty}^{s}\left(\Phi^{(\mp)}(t)\tilde{A}_u^{(\mp)}(t)\mu^{(\mp)}(x_0) - d\cdot e^{-\kappa|t|}\right)dt. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Выберем положительную величину δ достаточно большой, чтобы выполнялись неравенства $\delta - \mu^{(\mp)}(x_0) > 0$, а постоянные d и κ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\Phi^{(-)}(\xi)\tilde{A}_u^{(-)}(\xi)\mu^{(-)}(x_0) - d\cdot e^{\kappa\xi} < 0, \ \ \xi \leq 0,$$
$$\Phi^{(+)}(\xi)\tilde{A}_u^{(+)}(\xi)\mu^{(+)}(x_0) - d\cdot e^{-\kappa\xi} < 0, \ \ \xi \geq 0.$$

При указанном выборе констант функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ принимают строго положительные значения соответственно при $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$.

Функция $q_1^{(-)}(\xi)$, входящая в выражения (4.38) и (4.39), устраняет невязки порядка $O(\varepsilon^n)$ в выражениях $L[\beta_n^{(-)}]$ и $L[\alpha_n^{(-)}]$ при $x \in (-1, x_0)$ в неравенствах 2), а функция $q_1^{(+)}(\xi)$ – в выражениях $L[\beta_n^{(+)}]$ и $L[\alpha_n^{(+)}]$ при $x \in (x_0, 1)$.

Определим функции $q_1^{(\mp)}(\xi)$ как решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{A}^{(\mp)}(\xi)\dfrac{dq_1^{(\mp)}}{d\xi} - \tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi)\Phi^{(\mp)}(\xi)q_1^{(\mp)}(\xi) = qf_1^{(\mp)}(\xi), \\ q_1^{(\mp)}(0) = 0; \ \ q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{4.45}$$

где $qf_1^{(\mp)}(\xi)$ – слагаемые порядка ε^n в выражении $L[\beta_n^{(\mp)}]$ и $L[\alpha_n^{(\mp)}]$, содержащие функции $\mu^{(\mp)}(x)$, $q_0^{(\mp)}(\xi)$ и $\bar{u}_{n+1}^{(\mp)}(x)$, $Q_{n+1}^{(\mp)}(\xi)$.

Функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$, $q_1^{(\mp)}(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки типа (4.26).

Лемма 4.1. *Функции $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$ являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4.2).

Для доказательства леммы нужно показать, что для функций $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$ выполняются неравенства 1) – 4) из определения (4.3).

Для проверки выполнения неравенства 1) упорядоченности верхнего и нижнего решений, запишем разность функций $\beta_n(x,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,\varepsilon)$ на каждом из отрезков $[-1, x_0]$ и $[x_0, 1]$:

$$\beta_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \alpha_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \varepsilon^n \left(2\mu^{(\mp)}(x) + 2q_0^{(\mp)}(\xi) + 2\varepsilon q_1^{(\mp)}(\xi)\right). \tag{4.46}$$

Выражения справа принимают строго положительные значения при достаточно малом ε за счет положительности функций $\mu^{(\mp)}(x)$ и $q_0^{(\mp)}(\xi)$, таким образом, неравенство 1) выполнено во всей рассматриваемой области.

Из уравнений (4.42), (4.43) и (4.45) следуют равенства

$$L[\beta_n^{(\mp)}] = -\varepsilon^{n-1} d \cdot e^{-\kappa|\xi|} - \varepsilon^n \tilde{R}^{(\mp)} + O(\varepsilon^{n+1}),$$
$$L[\alpha_n^{(\mp)}] = \varepsilon^{n-1} d \cdot e^{-\kappa|\xi|} + \varepsilon^n \tilde{R}^{(\mp)} + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (4.47)$$

При достаточно малом ε выражения $L[\beta_n^{(\mp)}]$ принимают отрицательные значения, а выражения $L[\alpha_n^{(\mp)}]$ – положительные. Тем самым неравенства 2) для функций $\beta_n(x, \varepsilon)$ и $\alpha_n(x, \varepsilon)$ оказываются выполненными.

Условия 3) выполняются при выборе достаточно больших положительных величин $R_0^{(\mp)}$ в начальных условиях задач (4.42).

Проверим выполнение неравенства 4).

Запишем разность производных верхнего решения слева и справа от точки x_0 :

$$\frac{d\beta_n}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) - \frac{d\beta_n}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon) = \frac{d\beta_n^{(-)}}{dx}(x_0, \varepsilon) - \frac{d\beta_n^{(+)}}{dx}(x_0, \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon^{n-1} \left(\frac{dq_0^{(-)}}{d\xi}(0) - \frac{dq_0^{(+)}}{d\xi}(0) \right) + O(\varepsilon^n). \quad (4.48)$$

Используя явный вид функций $q_0^{(\mp)}(\xi)$ (4.44), запишем выражения для их производных при $\xi = 0$:

$$\frac{dq_0^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \frac{\delta - \mu^{(\mp)}(x_0)}{\Phi(0)} \cdot \frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\xi}(0) + \int_{\mp\infty}^{0} \left(\Phi^{(\mp)}(\xi) \tilde{A}_u^{(\mp)}(\xi) \mu^{(\mp)}(x_0) - de^{-\kappa|\xi|} \right) d\xi.$$

Преобразуем это выражение, вычислив интеграл и учтя второе уравнение (4.5).

$$\frac{dq_0^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \delta\tilde{A}^{(\mp)}(0) - \mu^{(\mp)}(x_0)A^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x_0), x_0, 0) \mp \frac{d}{\kappa}.$$

Подставляя полученные выражения в правую часть равенства (4.48) и учитывая выражение (4.10), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_n}{dx}(x_0-0,\varepsilon) - \frac{d\beta_n}{dx}(x_0+0,\varepsilon) = \\ = \varepsilon^{n-1}\Bigg(\delta\cdot\frac{dH_0}{dp}(p_0) - 2\frac{d}{k} - \mu^{(-)}(x_0)A^{(-)}(\varphi^{(-)}(x_0), x_0, 0) + \\ + \mu^{(+)}(x_0)A^{(+)}(\varphi^{(+)}(x_0), x_0, 0)\Bigg) + O(\varepsilon^{n+1}).\end{aligned}$$

В силу условия **C5** $(dH_0/dp)(p_0) > 0$, поэтому выбирая положительную величину δ достаточно большой, можно добиться того, чтобы выражение в правой части этого равенства оказалось положительным, если ε достаточно мало. Неравенство 4) для нижнего решения проверяется аналогично.

Лемма доказана.

Если построить верхнее и нижнее решения на основании асимптотического приближения порядка $n+1$, то из двойного неравенства (4.37) и структуры верхнего и нижнего решений следует оценка (4.36). Теорема 4.1 доказана.

4.4 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия **C1-C5**. Тогда при достаточно малых* ε *решение* $u_\varepsilon(x)$ *задачи* (4.2) *локально единственно и, как стационарное решение задачи* (4.1), *асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере* $[\alpha_2, \beta_2]$.

Для доказательства существования решения задачи (4.1), воспользуемся методом верхних и нижних решений для параболических уравнений [52, 55].

Определение 4.4. *Непрерывные функции* $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ *и* $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ *называются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4.1), *если при достаточно малых* ε *для них справедливы неравенства*

1^0 $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon) \geq \hat{\alpha}(x,t,\varepsilon), \;\; -1 \leq x \leq 1, \; t > 0;$

2^0 $L_t[\hat{\beta}] := -\dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial t} + \varepsilon\dfrac{\partial^2\hat{\beta}}{\partial x^2} - A(\hat{\beta}, x, \varepsilon)\dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial x} - f(\hat{\beta}, x, \varepsilon) \leq 0 \leq L_t[\hat{\alpha}],$
$-1 < x < x_0 \cup x_0 < x < 1, \;\; t > 0;$

3^0 $\hat{\alpha}(\mp 1, t, \varepsilon) \leq u^{\mp} \leq \hat{\beta}(\mp 1, t, \varepsilon)$; $t > 0$.

4^0 $\dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial x}(x_0 - 0, t, \varepsilon) - \dfrac{\partial\hat{\beta}}{\partial x}(x_0 + 0, t, \varepsilon) \geq 0; \;\; \dfrac{\partial\hat{\alpha}}{\partial x}(x_0 - 0, t, \varepsilon) - \dfrac{\partial\hat{\alpha}}{\partial x}(x_0 + 0, t, \varepsilon) \leq 0, \; t > 0.$

Имеет место следующее утверждение: для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x, 0, \varepsilon) \leq v_{init}(x, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, 0, \varepsilon),$$

решение $v_\varepsilon(x,t)$ задачи (4.1), существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями, то есть имеет место двойное неравенство

$$\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon) \le v_\varepsilon(x,t) \le \hat{\beta}(x,t,\varepsilon),\ x \in [-1;1],\ t \ge 0. \tag{4.49}$$

В [55] теорема существования решения параболической задачи, удовлетворяющего неравенствам типа (4.49) доказана с использованием верхнего и нижнего решений из класса $C^{1,1}$. Доказательство основано на принципе максимума и может быть распространено на случай не гладких верхнего и нижнего решений, удовлетворяющих строгим неравенствам 4^0 так же как это сделано в [46, 64].

Единственность решения задачи (4.1) может быть доказана по аналогии с [56].

Докажем теперь, что функции $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$, которые определяются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x,t,\varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\beta_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x))\, e^{-\lambda t}, \\ \hat{\alpha}(x,t,\varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\alpha_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x))\, e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

где $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (4.2), существование которого доказано в пункте 4.3, а λ – достаточно малое положительное число, являются нижним и верхним решениями задачи (4.1) при $\alpha_n(x,\varepsilon) \le v_{init}(x,\varepsilon) \le \beta_n(x,\varepsilon)$.

Тогда из неравенств (4.49) будет следовать предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |v_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon(x)| = 0.$$

Из этого предельного равенства и единственности решения параболической задачи будет вытекать единственность решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (4.2). Положив $t = 0$, а $n = 2$ в неравенствах (4.49) получим, что областью устойчивости стационарного решения является по крайней мере сегмент

$$\alpha_2(x,\varepsilon) \le v_{init}(x,\varepsilon) \le \beta_2(x,\varepsilon).$$

Осталось доказать, что для функций $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$, определенных выражениями (4.50), выполняются неравенства 1^0 – 4^0.

Справедливость неравенств 1^0, 3^0, 4^0 вытекает непосредственно из аналогичных неравенств для функций $\alpha_n(x,\varepsilon)$ и $\beta_n(x,\varepsilon)$ (см. пункт 4.3).

Для доказательства того, что для функций $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ выполняются неравенства 2^0, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.2. *Если* $\alpha_n(x,\varepsilon)$, $\beta_n(x,\varepsilon)$ *– нижнее и верхнее решения задачи* (4.2), *определенные, соответственно, выражениями* (4.38), (4.40), *и* (4.39), (4.41), *а* $u_\varepsilon(x)$ *– решение задачи* (4.2), *существующее согласно теореме 4.1, то при* $x \in (-1, x_0) \cup (x_0, 1)$ *справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{d}{dx}(\beta_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x))\right| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad \left|\frac{d}{dx}(\alpha_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x))\right| = O(\varepsilon^{n-1}). \tag{4.51}$$

Для доказательства леммы используем равенства

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\beta_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)) &= \frac{d}{dx}(U_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)) + O(\varepsilon^n),\\
\frac{d}{dx}(\alpha_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)) &= \frac{d}{dx}(U_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)) + O(\varepsilon^n),
\end{aligned}$$

справедливые при $x \in (-1, x_0) \cup (x_0, 1)$. Эти равенства можно получить так же, как это сделано в [35].

Получим оценки

$$\left|\frac{d}{dx}(U_n(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x))\right| = O(\varepsilon^{n-1}),\ x\in(-1,x_0)\cup(x_0,1).$$

Введем обозначения

$$z^{(-)}(x,\varepsilon)=U_n^{(-)}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x),\ \ -1\le x\le x_0,$$
$$z^{(+)}(x,\varepsilon)=U_n^{(+)}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x),\ \ x_0\le x\le 1.$$

Функции $U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям в задачах (4.14) и (4.15) с точностью $O(\varepsilon^n)$ и точно удовлетворяют краевым условиям этих задач при $x=\mp1$. В силу оценки (4.36) эти функции удовлетворяют условиям при $x=x_0$ задач (4.14) и (4.15) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$. Поэтому функции $z^{(\mp)}$ можно представить как решения задач

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d^2z^{(\mp)}}{dx^2}-\left(A^{(\mp)}(U_n^{(\mp)},x,\varepsilon)\dfrac{dU_n^{(\mp)}}{dx}-A^{(\mp)}(u_\varepsilon,x,\varepsilon)\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right)- \\ -\left(f^{(\mp)}(U_n^{(\mp)},x,\varepsilon)-f^{(\mp)}(u_\varepsilon,x,\varepsilon)\right)=\varepsilon^n\psi^{(\mp)}(x), \\ z^{(\mp)}(\mp1,\varepsilon)=0, \\ z^{(\mp)}(x_0,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\chi^{(\mp)}. \end{cases} \tag{4.52}$$

где $|\psi^{(\mp)}(x)|<c$, $c>0$ и $\chi^{(\mp)}$ – константы. Задача для функции $z^{(-)}$ рассматривается на отрезке $x\in[-1,x_0]$, а для функции $z^{(+)}$ – на отрезке $[x_0,1]$.

С учетом равенств

$$A^{(\mp)}(U_n^{(\mp)},x,\varepsilon)\frac{dU_n^{(\mp)}}{dx}-A^{(\mp)}(u_\varepsilon,x,\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx}=$$
$$=\frac{d}{dx}\int_{u_\varepsilon(x)}^{U_n^{(\mp)}(x)}A^{(\mp)}(y,x,\varepsilon)dy-\int_{u_\varepsilon(x)}^{U_n^{(\mp)}(x)}\frac{d}{dx}A^{(\mp)}(y,x,\varepsilon)dy$$

и следствий оценки (4.36):

$$|f^{(\mp)}(U_n^{(\mp)},x,\varepsilon)-f^{(\mp)}(u_\varepsilon,x,\varepsilon)|=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$
$$\int_{u_\varepsilon(x)}^{U_n^{(\mp)}(x)}\frac{d}{dx}A^{(\mp)}(y,x,\varepsilon)dy=O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \quad (4.53)$$

уравнения (4.52) можно привести к виду

$$\frac{d^2z^{(\mp)}}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dx}\int_{u_\varepsilon(x)}^{U_n^{(\mp)}(x)}A^{(\mp)}(y,x,\varepsilon)dy+\varepsilon^{n-1}r^{(\mp)}(x), \quad (4.54)$$

где $|r^{(\mp)}(x)|<c$. Решения уравнений (4.54) с условиями (4.52) можно выписать, используя функцию Грина:

$$z^{(\mp)}(x,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\chi^{(\mp)}(x\pm1)(x_0\pm1)^{(-1)}\pm\varepsilon^{n-1}\int_{\mp1}^{x_0}G^{(\mp)}(x,s)r^{(\mp)}(s)ds\pm$$
$$\pm\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mp1}^{x_0}G^{(\mp)}(x,s)\frac{d}{ds}\int_{u_\varepsilon(s)}^{U_n^{(\mp)}(s)}A^{(\mp)}(y,s,\varepsilon)dyds, \quad (4.55)$$

где функции Грина $G^{(\mp)}(x,s)$ на каждом из отрезков $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$

даются выражениями

$$
\begin{aligned}
G^{(-)}(x,s) &= \frac{1}{1+x_0}\begin{cases}(x+1)(s-x_0), & -1 \le x \le s;\\ (x-x_0)(s+1), & s \le x \le x_0;\end{cases}\\
G^{(+)}(x,s) &= \frac{1}{1-x_0}\begin{cases}(x-x_0)(s-1), & x_0 \le x \le s;\\ (x-1)(s-x_0), & s \le x \le 1.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Интегрируя последнее слагаемое в правой части каждого из равенств (4.55) по частям, получим

$$
\int_{\mp 1}^{x_0} G^{(\mp)}(x,s)\left(\frac{d}{ds}\int_{u_\varepsilon(s)}^{U_n^{(\mp)}(s)} A^{(\mp)}(y,s,\varepsilon)dy\right)ds =
$$
$$
= -\int_{\mp 1}^{x_0} G_s^{(\mp)}(x,s)\int_{u_\varepsilon(s)}^{U_n^{(\mp)}(s)} A^{(\mp)}(y,s,\varepsilon)dyds.
$$

Подставляя это выражение в (4.55) и дифференцируя полученные равенства по переменной x, придем к выражениям

$$
\frac{dz^{(\mp)}}{dx}(x,\varepsilon) = \pm\varepsilon^{n-1}\int_{\mp 1}^{x_0} G_x^{(\mp)}(x,s)r^{(\mp)}(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{u_\varepsilon(x)}^{U_n^{(\mp)}(x)} A^{(\mp)}(y,x,\varepsilon)dy \mp
$$
$$
\mp \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mp 1}^{x_0} G_{sx}^{(\mp)}(x,s)\int_{u_\varepsilon(s)}^{U_n^{(\mp)}(s)} A^{(\mp)}(y,s,\varepsilon)dyds + O\left(\varepsilon^{n+1}\right),
$$

откуда с учетом второй оценки (4.53) и явных выражений (4.56) для функций Грина, получим следующую оценку для производных функций $z^{(\mp)}$:

$$
\left|\frac{dz^{(\mp)}}{dx}\right| = O(\varepsilon^{n-1}).
$$

Лемма 4.2 доказана.

Докажем теперь, что для функций $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ выполняются неравенства 2^0 из определения 4.4.

Обозначим

$$\hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon) := \hat{\beta}(x,t,\varepsilon),\ -1 \le x \le x_0,\ \ \hat{\beta}^{(+)}(x,t,\varepsilon) := \hat{\beta}(x,t,\varepsilon),\ x_0 \le x \le 1$$

и рассмотрим выражения $L_t[\hat{\beta}^{(\mp)}]$ в каждой из областей $\{(x,t)| -1 < x < x_0,\ t > 0\}$ и $\{(x,t)|x_0 < x < 1,\ t > 0\}$:

$$L_t[\hat{\beta}^{(\mp)}] = \varepsilon\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon\left(\frac{d^2\beta_n^{(\mp)}}{dx^2} - \frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2}\right)e^{-\lambda t} + \lambda(\beta_n^{(\mp)} - u_\varepsilon)e^{-\lambda t} -$$
$$- A(\hat{\beta},x,\varepsilon)\left(\frac{du_\varepsilon}{dx} + \left(\frac{d\beta_n^{(\mp)}}{dx} - \frac{du_\varepsilon}{dx}\right)e^{-\lambda t}\right) - f(\hat{\beta},x,\varepsilon).$$

Проведя преобразования аналогично тому, как это сделано в предыдущей главе, используя первую оценку (4.51), а также оценку

$$|\beta_n^{(\mp)} - u_\varepsilon| = O(\varepsilon^n), \tag{4.57}$$

которая следует из двойного неравенства (4.37) и равенства (4.46), придем к равенству

$$L_t[\hat{\beta}^{(\mp)}] = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(-\varepsilon^{n-1}d\cdot\mathrm{e}^{-\kappa|\xi|} - \varepsilon^n\tilde{R}^{(\mp)} + \lambda(\beta^{(\mp)} - u_\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\right),$$

из которого с учетом оценки (4.57) следует, что неравенство 2^0 из определения (4.4) будет выполнено, если выбрать достаточно малым значение λ.

Таким образом, $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon)$ является верхним решением задачи (4.1).

Аналогично доказывается, что функция $\hat{\alpha}(x, y, \varepsilon)$ является нижним решением задачи (4.1).

Теорема 4.2 доказана.

Глава 5

Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в области $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times [0, a] \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta_{xy} v - \dfrac{\partial v}{\partial t} = (\mathbf{A}(v, x, y), \nabla) + B(v, x, y), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, a), \ t \in (0, \infty) \\ v(x, 0, t, \varepsilon) = u^0(x); \ v(x, a, t, \varepsilon) = u^a(x) \ x \in \mathbb{R}, \ t \in [0, \infty) \\ v(x, y, t, \varepsilon) = v(x + L, y, t, \varepsilon) \ x \in \mathbb{R}, \ y \in [0, a], \ t \in [0, \infty) \\ v(x, y, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, y, \varepsilon), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in [0, a]; \end{cases} \tag{5.1}$$

где

$$\mathbf{A}(v,x,y) = \{A_1(v,x,y), A_2(v,x,y)\},$$

а $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ - малый параметр, $L > 0$ – некоторое число, $u^0(x)$ и $u^a(x)$ – достаточно гладкие $L-$периодические функции, $v_{init}(x,y,\varepsilon)$ – непрерывная функция, $L-$периодическая по переменной x и удовлетворяющая условиям согласования:

$$v_{init}(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \;\; v_{init}(x,a,\varepsilon) = u^a(x), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Будем считать, что функции $A_i(v,x,y), \; i=1,2; \; B(v,x,y)$ определены всюду в области $I_v \times \bar{D}$, где I_v – допустимый интервал изменения v, $\bar{D} = \{(x,y)|\mathbb{R} \times [0,a]\}$, а так же $L-$ периодические по переменной x и претерпевают разрыв 1-го рода вдоль заданной $L-$периодической кривой $y = h(x)$, лежащей внутри области $\bar{D}$, то есть выполняется условие

Условие D1. Пусть функции $A_i(v,x,y), \; i=1,2$ и $B(v,x,y)$ имеют вид

$$A_i(v,x,y) = \begin{cases} A_i^{(-)}(v,x,y), \; (v,x,y) \in I_v \times \mathbb{R} \times [0,h(x)], \\ A_i^{(+)}(v,x,y), \; (v,x,y) \in I_v \times \mathbb{R} \times [h(x),a]; \end{cases}$$

$$B(v,x,y) = \begin{cases} B^{(-)}(v,x,y), \; (v,x,y) \in I_v \times \mathbb{R} \times [0,h(x)], \\ B^{(+)}(v,x,y), \; (v,x,y) \in I_v \times \mathbb{R} \times [h(x),a], \end{cases}$$

и при $v \in I_v, \; x \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$A_i^{(-)}(v,x,h(x)) \neq A_i^{(+)}(v,x,h(x)), \;\; B^{(-)}(v,x,h(x)) \neq B^{(+)}(v,x,h(x)).$$

Пусть, кроме того, функции $A_i^{(\mp)}(v,x,y)$ и $B^{(\mp)}(v,x,y)$, а также $h(x)$ достаточно гладкие в своих областях определения.

Введем обозначения

$$\bar{D}^{(-)} = \{(x,y) |\, \mathbb{R} \times [0, h(x)]\} \quad \text{и} \quad \bar{D}^{(+)} = \{(x,y) |\, \mathbb{R} \times [h(x), a]\},$$
$$\mathbf{A}^{(\mp)}(v,x,y) = \left\{ A_1^{(\mp)}(v,x,y), A_2^{(\mp)}(v,x,y) \right\}.$$

Условие D2. Пусть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\mathbf{A}^{(-)}(u,x,y), \nabla \right) u + B^{(-)}(u,x,y) = 0$$

с дополнительным условием $u(x,0) = u^0(x)$ имеет $L-$периодическое по переменной x решение $\varphi^{(-)}(x,y)$ в области $\bar{D}^{(-)}$, а дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\mathbf{A}^{(+)}(u,x,y), \nabla \right) u + B^{(+)}(u,x,y) = 0$$

с дополнительным условием $u(x,a) = u^a(x)$ имеет $L-$периодическое по переменной x решение $\varphi^{(+)}(x,y)$ в области $\bar{D}^{(+)}$.

Пусть, кроме того, выполняется неравенство $\varphi^{(-)}(x,h(x)) < \varphi^{(+)}(x,h(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Условие D3. Пусть выполняются неравенства:

$$A_2^{(-)} \left(\varphi^{(-)}(x,y), x, y \right) > 0, \ (x,y) \in \bar{D}^{(-)},$$
$$A_2^{(+)} \left(\varphi^{(+)}(x,y), x, y \right) < 0, \ (x,y) \in \bar{D}^{(+)}.$$

Определение 5.1. *Решением задачи* (5.1) *будем называть* $L-$ *периодическую по переменной* x *функцию* $v_\varepsilon(x,y,t)$ *из класса* $C(\mathbb{R} \times [0,a] \times [0,\infty)) \cap C^{2,1,1}(\mathbb{R} \times (0,a) \times (0,\infty)) \cap \big(C^{2,2,1}(\mathbb{R} \times (0,h(x)) \times (0,\infty)) \cup C^{2,2,1}(\mathbb{R} \times (h(x),a) \times (0,\infty))\big)$, *удовлетворяющую уравнению* (5.1) *в каж-*

дой из областей $\{(x,y,t)|D^{(\mp)}\times(0,+\infty)\}$*, а также граничным и начальным условиям задачи* (5.1).

Будем исследовать вопрос существования и асимптотической устойчивости стационарного решения $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (5.1), обладающего большим градиентом в достаточно малой окрестности кривой $h(x)$; близкого к функции $\varphi^{(-)}(x,y)$ при $0\le y\le\ h(x)$, и к функции $\varphi^{(+)}(x)$ при $h(x)\le y\le a$.

Стационарное решение начально-краевой задачи (5.1) по определению является решением краевой задачи

$$\begin{cases}\varepsilon\Delta_{xy}u=(\mathbf{A}(u,x,y),\nabla)\,u+B(u,x,y),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in(0,a),\\ u(x,y,\varepsilon)=u(x+L,y,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a],\\ u(x,0,\varepsilon)=u^0(x);\ \ u(x,a,\varepsilon)=u^a(x),\ \ x\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{5.2}$$

которое определяется аналогично.

Определение 5.2. *Решением задачи* (5.2) *будем называть функцию* $u_\varepsilon(x,y)$ *из класса* $C(\mathbb{R}\times[0,a])\cap C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,a))\cap\big(C^{2,2}(\mathbb{R}\times(0,h(x)))\cup C^{2,2}(\mathbb{R}\times(h(x),a))\big)$*, удовлетворяющую уравнению* (5.2) *в каждой из областей* $D^{(\mp)}$ *и граничным условиям задачи* (5.2).

Для доказательства существования и устойчивости решения задачи (5.2) как стационарного решения задачи (5.1) будем использовать метод верхних и нижних решений.

5.1.1 Локальные координаты

Кривая $y=h(x)$ делит область $\bar{D}$ на две подобласти: $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$. Для детального описания переходного слоя на стыке областей перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l, r) с помощью соотношений:

$$x = l - r\sin\alpha; \quad y = h(l) + r\cos\alpha, \tag{5.3}$$

где

$$\sin\alpha = \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \tag{5.4}$$

α – угол между осью y и нормалью к кривой $y = h(x)$, проведенной в область $y > h(x)$, отложенный против часовой стрелки; l – $x-$координата точки на этой кривой, из которой проводится нормаль; r – расстояние от точки, лежащей в окрестности кривой $h(x)$, до этой кривой вдоль нормали к ней. Будем считать, что $r > 0$ в области $\bar{D}^{(+)}$, $r < 0$ в области $\bar{D}^{(-)}$, $r = 0$ при $y = h(x)$, производные функций $h(x)$ в (5.4) берутся при $x = l$.

В окрестности кривой $y = h(x)$ перейдем к растянутой переменной

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}. \tag{5.5}$$

Запишем выражения для операторов ∇ и Δ в переменных ξ, l

$$\nabla = \Bigg\{ -\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{\varepsilon\xi h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l}; \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{h_x\sqrt{1+h_x^2}}{\varepsilon\xi h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l}\Bigg\}. \tag{5.6}$$

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{h_{xx}}{\varepsilon^2\xi h_{xx} - \varepsilon(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi} +$$
$$+\frac{1+h_x^2}{\left(\varepsilon\xi h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}\right)^3}\left(2\varepsilon\xi h_x h_{xx}^2 + h_x h_{xx}(1+h_x^2)^{3/2} - \varepsilon\xi h_{xxx}(1+h_x^2)\right)\frac{\partial}{\partial l} +$$
$$+\frac{(1+h_x^2)^2}{\left(\varepsilon\xi h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}\right)}\frac{\partial^2}{\partial l^2}. \quad (5.7)$$

Тогда дифференциальный оператор в (5.2) принимает вид:

$$\varepsilon\Delta - (\mathbf{A}(u,x,y),\nabla) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\Big(-h_x A_1(u,l,h(l)) + A_2(u,l,h(l))\Big)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] -$$
$$-\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{1+h_x^2}\Big(A_1(u,l,h(l)) + h_x A_2(u,l,h(l)\Big)\frac{\partial}{\partial l} + \sum_{i=1}\varepsilon^i L_i, \quad (5.8)$$

где L_i – дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным ξ и l, а производные функции $h(x)$ берутся при $x = l$.

5.1.2 Присоединенная система

Введем обозначение

$$P^{(\mp)}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x)}}\left(-h_x(x)A_1^{(\mp)}(u,x,h(x)) + A_2^{(\mp)}(u,x,h(x))\right). \quad (5.9)$$

При $\xi \in \mathbb{R}$ рассмотрим так называемые присоединенные уравнения для функций $\tilde{u}\,(\xi, x)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - P^{(\mp)}\,(\tilde{u}, x)\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = 0, \tag{5.10}$$

где переменная x играет роль параметра.

Преобразуем присоединенные уравнения в присоединенные системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = P^{(\mp)}\,(\tilde{u}, x)\,\Phi,\ -\infty < \xi < \infty. \tag{5.11}$$

Разделим каждое из вторых уравнений систем (5.11) на первое, а затем домножим обе части полученных равенств на Φ и получим дифференциальные уравнения первого порядка относительно функции $\Phi\,(\tilde{u}, x)$, которые определяют фазовые траектории этих систем на плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}} = P^{(\mp)}\,(\tilde{u}, x)\,. \tag{5.12}$$

Точки $\big(\varphi^{(\mp)}(x, h(x)), 0\big)$ фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ являются точками покоя каждой из систем (5.11), а, так как функции $P^{(\mp)}(\tilde{u}, x)$ непрерывны при $\varphi^{(-)}(x, h(x)) < \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x))$, то существует множество непрерывных функций $h(x)$, для которых определены фазовые траектории $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x))$, выходящие из точки $\big(\varphi^{(-)}(x, h(x)), 0\big)$ при $\xi \to -\infty$, и фазовые траектории $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x))$, выходящие из точки $\big(\varphi^{(+)}(x, h(x)), 0\big)$ при $\xi \to +\infty$. Эти траектории определяются равенствами:

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}, x) = \int_{\varphi^{(\mp)}(x,h(x))}^{\tilde{u}} P^{(\mp)}(s, x)ds,\ \varphi^{(-)}(x, h(x)) < \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x)). \tag{5.13}$$

Потребуем выполнения следующего условия:

Условие D4. Пусть выполняются неравенства:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x,h(x))}^{\tilde{u}} P^{(-)}(s,x)ds > 0, \quad \varphi^{(-)}(x,h(x)) < \tilde{u} \leq \varphi^{(+)}(x,h(x)), \tag{5.14}$$

$$\int_{\varphi^{(+)}(x,h(x))}^{\tilde{u}} P^{(+)}(s,x)ds > 0, \quad \varphi^{(-)}(x,h(x)) \leq \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x,h(x)). \tag{5.15}$$

Условие **D4** означает, что фазовые траектории $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u},x)$ не пересекают ось $\Phi = 0$ на фазовой плоскости $(\tilde{u},\Phi)$ ни в одной из внутренних точек интервала $\tilde{u} \in \big(\varphi^{(-)}(x,h(x)); \varphi^{(+)}(x,h(x))\big)$.

На отрезке $\tilde{u} \in \big[\varphi^{(-)}(x,h(x)), \varphi^{(+)}(x,h(x))\big]$ для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим функцию

$$H_0(\tilde{u},x) = \Phi^{(-)}(\tilde{u},x) - \Phi^{(+)}(\tilde{u},x). \tag{5.16}$$

Значение этой функции при каждом $\tilde{u}$ равно расстоянию между фазовыми траекториями $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$ на фазовой плоскости $(\tilde{u},\Phi)$. Если выполнены условия **D1** – **D4**, то функция $H_0(\tilde{u},x)$ является непрерывной при $\tilde{u} \in \big[\varphi^{(-)}(x,h(x)), \varphi^{(+)}(x,h(x))\big]$, кроме того, выполняются неравенства:

$$H_0\left(\varphi^{(-)}(x,h(x)),x\right) < 0, \; H_0\left(\varphi^{(+)}(x,h(x)),x\right) > 0, \tag{5.17}$$

отсюда следует, что для каждого x существует хотя бы одно значение $p_0(x) \in \big(\varphi^{(-)}(x,h(x)), \varphi^{(+)}(x,h(x))\big)$, такое что $H_0(p_0(x),x) = 0$. Это означает, что при $\tilde{u} = p_0(x)$ фазовые траектории $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$ пересекаются.

Условие D5. Пусть при $x \in \mathbb{R}$ существует единственная $L-$ периодическая функция $p_0(x) \in \big(\varphi^{(-)}(x,h(x)),\varphi^{(+)}(x,h(x))\big)$, являющаяся решением уравнения $H_0(\tilde{u},x)=0$ и пусть выполнено неравенство

$$\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{u}}(p_0(x),x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Построение асимптотического представления решения

Асимптотическое представление $U(x,y,\varepsilon)$ решения задачи (5.2) будем строить согласно методу Васильевой [1] отдельно в каждой из подобластей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$:

$$U(x,y,\varepsilon)=\begin{cases}U^{(-)}(x,y,\varepsilon),(x,y)\in \bar{D}^{(-)},\\ U^{(+)}(x,y,\varepsilon),(x,y)\in \bar{D}^{(+)}.\end{cases}, \tag{5.18}$$

затем будем проводить сшивание решения по нормали к кривой $h(x)$.

Каждую из функций $U^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$U^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)=\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)+Q^{(\mp)}(\xi,l,\varepsilon), \tag{5.19}$$

где $\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ – регулярная часть разложения, $Q^{(\mp)}(\xi,l,\varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, ξ – растянутая переменная вблизи кривой локализации переходного слоя, определенная равенством (5.5).

Каждую из функций (5.19) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\mp)}(x,y)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y)+...; \tag{5.20}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, l, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, l) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, l) + ... \tag{5.21}$$

Значения функции $U(x, y, \varepsilon)$ на кривой $h(x)$ являются неизвестными. Обозначим их за $p(x)$ и будем искать их из следующих условий сшивания:

$$U^{(-)}(x, h(x), \varepsilon) = U^{(+)}(x, h(x), \varepsilon) = p(x), \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(p(x), x, h(x), \varepsilon) = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(p(x), x, h(x), \varepsilon), \tag{5.23}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает производную по направлению нормали к кривой $h(x)$.

5.2.1 Регулярные члены асимптотики

Задачи для функций регулярной части получаются из равенств

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\dfrac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y^2} \right) = A_1^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, y) \dfrac{\partial \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x} + \\ + A_2^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, y) \dfrac{\partial \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y} + B^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, y); \\ \bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x + L, y, \varepsilon); \\ \bar{u}^{(-)}(x, 0, \varepsilon) = u^0(x); \; \bar{u}^{(+)}(x, a, \varepsilon) = u^a(x). \end{cases} \tag{5.24}$$

Подставляя в эти уравнения суммы (5.20), раскладывая функции в правой части в ряд Тейлора по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y), \; i = 0, 1, ...$

Функции $\bar{u}_0^{(\mp)}(x,y)$ определяются из задач

$$\begin{cases} A_1^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)},x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial x} + A_2^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)},x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial y} + B^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)},x,y) = 0, \\ \bar{u}_0^{(\mp)}(x,y) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x+L,y), \\ \bar{u}^{(-)}(x,0) = u^0(x);\ \bar{u}^{(+)}(x,a) = u^a(x). \end{cases} \tag{5.25}$$

Согласно условию **D2**, положим $\bar{u}_0^{(\mp)}(x,y) = \varphi^{(\mp)}(x,y)$.

Далее для краткости введем обозначения типа:

$$\bar{F}^{(\mp)}(x,y) = F^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x,y),x,y).$$

Для функций $\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y)$ уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\Delta_{xy}\varphi^{(\mp)}(x,y) = \left(\bar{A}_1^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \bar{u}_1^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_2^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \bar{u}_1^{(\mp)}}{\partial y}\right) + \\ + \bar{u}_1^{(\mp)}\left(\bar{A}_{1u}^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_{2u}^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial y}\right) + \bar{u}_1^{(\mp)}\cdot \bar{B}_u(x,y). \tag{5.26}$$

Обозначим

$$f_1^{(\mp)}(x,y) = \Delta_{xy}\varphi^{(\mp)}(x,y), \tag{5.27}$$

$$W^{(\mp)}(x,y) = \bar{A}_{1u}^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_{2u}^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial y} + \bar{B}_u^{(\mp)}(x,y), \tag{5.28}$$

и дополним уравнение граничными условиями, тогда получим задачи для определения функций $\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y)$:

$$
\begin{cases}
\bar{A}_1^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_1^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_2^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_1^{(\mp)}}{\partial y} + \bar{u}_1^{(\mp)} \cdot W^{(\mp)}(x,y) = f_1^{(\mp)}(x,y),\\
\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y) = \bar{u}_1^{(\mp)}(x+L,y),\\
\bar{u}_1^{(-)}(x,0) = \bar{u}_1^{(+)}(x,a) = 0.
\end{cases}
\tag{5.29}
$$

Задачи (5.29) полностью аналогичны задаче (3.12) из главы 3. Запишем их решения

$$
\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y) = \int\limits_{0,a}^{y} \exp\left(-\int\limits_{y_1}^{y} \frac{W^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2\right)}{\bar{A}_2^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2\right)} dy_2\right) \times \\
\times \frac{\bar{f}_1^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1\right)}{\bar{A}_2^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1\right)} dy_1 \tag{5.30}
$$

Функции с верхним индексом «$(-)$» определены в $\bar{D}^{(-)}$, а с верхним индексом «$(+)$» определены в $\bar{D}^{(+)}$. Функции $X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)})$ имеют тот же смысл, что и в (3.16).

Аналогичным образом $m-$тый порядок разложения будет определяться следующими задачами:

$$
\begin{cases}
\bar{A}_1^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_m^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_2^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \bar{u}_m^{(\mp)}}{\partial y} + \bar{u}_m^{(\mp)} \cdot W^{(\mp)}(x,y) = f_m^{(\mp)}(x,y),\\
\bar{u}_m^{(\mp)}(x,y) = \bar{u}_m^{(\mp)}(x+L,y),\\
\bar{u}_m^{(-)}(x,0) = \bar{u}_m^{(+)}(x,a) = 0.
\end{cases}
\tag{5.31}
$$

где $f_m^{(\mp)}(x, y)$ – известные функции, а функция $W^{(\mp)}(x, y)$ – определена в (5.28).

5.2.2 Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi, l, \varepsilon)$ определяются из равенств

$$\left(\varepsilon\Delta - (\mathbf{A}^{(\mp)}(\xi, l), \nabla)\right) Q^{(\mp)} =$$
$$= (\mathbf{QA}^{(\mp)}(\xi, l), \nabla)\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha) + QB^{(\mp)}(\xi, l), \quad (5.32)$$

где для краткости введены обозначения

$$\mathbf{A}^{(\mp)}(\xi, l) =$$
$$= \mathbf{A}^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha\right),$$

$$\mathbf{QA}^{(\mp)}(\xi, l) =$$
$$= \mathbf{A}^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha\right) -$$
$$- \mathbf{A}^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha), l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha\right),$$

$$QB^{(\mp)}(\xi, l) =$$
$$= B^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha\right) -$$
$$- B^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha), l - \varepsilon\xi\sin\alpha, h(l) + \varepsilon\xi\cos\alpha\right).$$

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются выражениями (5.4), оператор

$\varepsilon\Delta - (\mathbf{A}(\xi, l), \nabla)$ имеет вид (5.8), а оператор ∇ – (5.6).

Подставляя в равенства (5.32) суммы (5.20) и (5.21), раскладывая функции в правой части в ряд Тейлора по степеням малого параметра ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi, l),\ i = 0, 1, ...$

В качестве дополнительных условий потребуем, во-первых, убывания функций переходного слоя на бесконечности, а во-вторых, выполнения условий при $\xi = 0$, следующих из (5.22).

Приравняем в равенствах (5.32) коэффициенты при ε^{-1} и добавим дополнительные условия. Тогда получим задачи для функций переходного слоя нулевого порядка $Q_0^{(\mp)}(\xi, l)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - P^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(l, h(l)) + Q_0^{(\mp)}, l\right) \dfrac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} = 0, \\ Q_0^{(\mp)}(0, l) = p(l) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l)), \\ Q_0^{(\mp)}(\mp\infty, l) = 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» определены при $\xi \leq 0$, а с верхним индексом «$(+)$» при $\xi \geq 0$ Введем обозначения

$$\tilde{Q}_0^{(\mp)}(\xi, l) = \varphi^{(\mp)}(l, h(l)) + Q_0^{(\mp)}(\xi, l). \tag{5.34}$$

$$\tilde{P}^{(\mp)}(\xi, l) = P^{(\mp)}\left(\tilde{Q}_0^{(\mp)}(\xi, l), l\right).$$

Перепишем задачи (5.33) в новых обозначениях

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \tilde{Q}_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \tilde{P}^{(\mp)}(\xi, l)\dfrac{\partial \tilde{Q}_0^{(\mp)}}{\partial \xi} = 0, \\
\tilde{Q}_0^{(\mp)}(0, l) = p(l), \quad \tilde{Q}_0^{(\mp)}(\mp\infty, l) = \varphi^{(\mp)}(l, h(l)).
\end{cases}
\tag{5.35}
$$

Уравнения (5.35) эквивалентны системам уравнений (5.11). Они имеют решения, и можно показать, что при всех $l \in \mathbb{R}$ справедливы экспоненциальные оценки

$$
\left| \tilde{Q}_0^{(\mp)}(\xi, l) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l)) \right| < Ce^{-\kappa|\xi|}, \tag{5.36}
$$

где κ и C - положительные константы, не зависящие от ε.

Учитывая введенные обозначения, запишем оценки для $Q_0^{(\mp)}(\xi, l)$:

$$
\left| Q_0^{(\mp)}(\xi, l) \right| < Ce^{-\kappa|\xi|}. \tag{5.37}
$$

Обозначим

$$
\Phi^{(\mp)}(\xi, l) = \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(\mp)}}{\partial \xi}(\xi, l). \tag{5.38}
$$

Для функций $\Phi^{(\mp)}(\xi, l)$ справедливы оценки типа (5.37).

Для определения функций переходного слоя первого порядка приравняем коэффициенты при ε^1 в (5.32) и добавим условия на границе и на бесконечности:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} = \tilde{P}^{(\mp)}(\xi, l)\dfrac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} + \tilde{P}_u^{(\mp)}(\xi, l)\dfrac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} Q_1^{(\mp)}(\xi, l) + \tilde{h}_1^{(\mp)}(\xi, l), \\
Q_1^{(\mp)}(0, l) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l)), \quad Q_1^{(\mp)}(\mp\infty, l) = 0.
\end{cases}
\tag{5.39}
$$

Здесь $\tilde{h}_1^{(\mp)}(\xi, l)$ – известная функция. Решения задач (5.39) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi,l) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(l,h(l))\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi,l)}{\Phi^{(\mp)}(0,l)}+ \\ + \Phi^{(\mp)}(\xi,l)\int_0^\xi \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(s,l)}ds\int_{\mp\infty}^s \tilde{h}_1^{(\mp)}(t,l)dt. \quad (5.40)$$

Аналогично запишем задачи для определения функций переходного слоя $m-$ого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q_m^{(\mp)}}{\partial\xi^2} = \tilde{P}^{(\mp)}(\xi,l)\dfrac{\partial Q_m^{(\mp)}}{\partial\xi} + \tilde{P}_u^{(\mp)}(\xi,l)\dfrac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi}Q_m^{(\mp)}(\xi,l) + \tilde{h}_m^{(\mp)}(\xi,l), \\ Q_m^{(\mp)}(0,l) = -\bar{u}_m^{(\mp)}(l,h(l)), \\ Q_m^{(\mp)}(\mp\infty,l) = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

здесь $\tilde{h}_m^{(\mp)}(\xi,l)$ – известные функции, зависящие от $\bar{u}_j^{(\mp)}(l,h(l))(j \le m)$ и $Q_j^{(\mp)}(\xi,l)(j \le m-1)$.

5.2.3 Сшивание

Запишем производную по направлению нормали к кривой $h(x)$ в переменных r, l. Единичный вектор нормали имеет вид

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\{-h_x; 1\}.$$

Учитывая представление (5.6) оператора ∇, получим следующее выражение на производной по направлению нормали:

$$\frac{\partial}{\partial n} = (\vec{n},\nabla) = \frac{\partial}{\partial r} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y},$$

где $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются выражением (5.4).

В переменных ξ, l эта производная имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Введем функцию

$$H(p,l,\varepsilon) := \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l,h(l),\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l,h(l),\varepsilon). \tag{5.42}$$

С учетом равенств (5.19)–(5.21) и выражения для оператора производной функцию $H(p,l,\varepsilon)$ можно представить в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}H(p,l,\varepsilon) = H_0(p,l) + \varepsilon H_1(p,l) + ... = \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0,l) - \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0,l) +\\ + \varepsilon\Bigg(-\sin\alpha\frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l)) + \cos\alpha\frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l)) + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0,l) +\\ + \sin\alpha\frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l)) - \cos\alpha\frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l)) - \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0,l)\Bigg) + ...\end{aligned} \tag{5.43}$$

Выполнение условия (5.23) эквивалентно выполнению равенства

$$H_0(p,l) + \varepsilon H_1(p,l) + ... = 0. \tag{5.44}$$

Представим функцию $p(x)$ в виде разложения по степеням малого параметра:

$$p(x) := p(x,\varepsilon) = p_0(x) + \varepsilon p_1(x) + ... \tag{5.45}$$

Подставим разложение (5.45) в равенство (5.44) и будем объединять коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравнивать их к нулю.

В нулевом порядке с учетом введенных обозначений (5.38) и краевых условий при $\xi = 0$ задач (5.33) условие сшивания приводит к равенству

$$\Phi^{(-)}(p_0(l), l) - \Phi^{(+)}(p_0(l), l) = 0. \qquad (5.46)$$

Функция $p_0(l)$, для которой это равенство справедливо, существует согласно условию **D5**.

Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^i, i \geq 1$ в левой части (5.44), получим уравнения для определения $p_i(l)$:

$$\frac{dH_0}{dp}(p_0(l), l) \cdot p_i(l) = G_i(l), \qquad (5.47)$$

где $G_i(l)$ - известные функции.

5.2.4 Асимптотическое представление решения

Если потребовать достаточной гладкости функций $B^{(\mp)}(u, x, y)$; $A_i^{(\mp)}(u, x, y)$, $i = 1, 2$, то с помощью описанного алгоритма можно найти коэффициенты разложений (5.20), (5.21) до произвольного порядка m. Составим суммы:

$$U_m^{(-)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x, y) + Q_i^{(-)}(\xi, l) \right), \ x \in \mathbb{R}, y \in [0, h(x)], \xi \leq 0; \quad (5.48)$$

$$U_m^{(+)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x, y) + Q_i^{(+)}(\xi, l) \right), \ x \in \mathbb{R}, y \in [h_x), a], \xi \geq 0. \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

Асимптотическим представлением порядка n решения задачи (5.2) будем называть функцию

$$U_n(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x,y,\varepsilon),\ x \in \mathbb{R}, y \in [0, h(x)], \\ U_n^{(+)}(x,y,\varepsilon),\ x \in \mathbb{R}, y \in [h(x), a]. \end{cases}$$

Функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ по своему построению удовлетворяет уравнению (5.2) с точностью $O(\varepsilon^n)$ всюду в области $\bar{D}$ за исключением кривой $h(x)$, и с точностью до любой степени ε граничным условиям в точках $y = 0, a$, поскольку функции переходного слоя вносят бесконечно малые, но все же отличные от нуля невязки в краевые условия задачи (5.2). Для того, чтобы граничные условия выполнялись точно, применим стандартную процедуру умножения функций переходного слоя на срезающую функцию, сохранив для них прежние обозначения [71].

5.3 Существование решения стационарной задачи

Теорема 5.1. *При выполнении условий **D1** – **D5** при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $u_\varepsilon(x,y)$, являющаяся решением задачи* (5.2) *в смысле определения 5.2, для которого функция $U_n(x,y,\varepsilon)$ является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть выполняется неравенство*

$$|u_\varepsilon(x,y) - U_n(x,y,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \tag{5.51}$$

где C – положительная постоянная.

Доказательство теоремы будем проводить при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств аналогично предыдущим главам.

Определение 5.3. *Верхним* $\beta(x, y, \varepsilon)$ *и нижним* $\alpha(x, y, \varepsilon)$ *решениями задачи* (5.2) *называются непрерывные* $L-$*периодические по переменной* x *функции, для которых при достаточно малых* ε *выполняются следующие неравенства:*

1) Упорядоченность:

$$\alpha(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, \varepsilon), (x, y) \in \bar{D}.$$

2) Действие оператора в уравнении (5.2) $\forall (x, y) \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$:

$$L[\beta] := \varepsilon \Delta \beta - (\mathbf{A}(\beta, x, y), \nabla)\beta - B(\beta, x, y) \leq 0;$$

$$L[\alpha] := \varepsilon \Delta \alpha - (\mathbf{A}(\alpha, x, y), \nabla)\alpha - B(\alpha, x, y) \geq 0.$$

3) Условия на границе:

$$\alpha(x, 0, \varepsilon) \leq u^0 \leq \beta(x, 0, \varepsilon), \;\; \alpha(x, a, \varepsilon) \leq u^a \leq \beta(x, a, \varepsilon).$$

4) Условия на производные:

$$\frac{\partial \beta}{\partial n}(x, h(x) - 0, \varepsilon) - \frac{\partial \beta}{\partial n}(x, h(x) + 0, \varepsilon) \geq 0;$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n}(x, h(x) - 0, \varepsilon) - \frac{\partial \alpha}{\partial n}(x, h(x) + 0, \varepsilon) \leq 0.$$

Согласно теоремам сравнения, доказанным в работах [51, 53], из существования верхнего и нижнего решений следует существование решения задачи (5.2), заключенного между этими верхним и нижним решениями:

$$\alpha(x, y, \varepsilon) \leq u_\varepsilon(x, y) \leq \beta(x, y, \varepsilon), (x, y) \in \bar{D}. \tag{5.52}$$

Доказательство теорем сравнения в [51, 53] проведено в предположении гладкости верхнего и нижнего решений. Этот результат можно обобщить, используя верхние и нижние решения, удовлетворяющие неравенствам 4), аналогично тому, как это было сделано в [64].

Функция $\beta(x,y,\varepsilon)$ строится отдельно в каждой из подобластей $\bar{D}^{(-)}$, $\bar{D}^{(+)}$ и представляет собой модификацию построенной формальной асимптотики (5.48)

$$\beta_n(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} \beta_n^{(-)}(x,y,\varepsilon) = U_n^{(-)} + \varepsilon^n \left(\mu^{(-)}(x,y) + q_0^{(-)}(\xi) + \varepsilon q_1^{(-)}(\xi)\right), \\ (x,y) \in \bar{D}^{(-)},\ \xi \le 0; \\ \beta_n^{(+)}(x,y,\varepsilon) = U_n^{(+)} + \varepsilon^n \left(\mu^{(+)}(x,y) + q_0^{(+)}(\xi) + \varepsilon q_1^{(+)}(\xi)\right), \\ (x,y) \in \bar{D}^{(+)},\ \xi \ge 0. \end{cases} \tag{5.53}$$

Положительные функции $\mu^{(\mp)}(x,y)$ ищутся таким образом, чтобы неравенства 1) и 2) выполнялись вдали от переходного слоя, а функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ и $q_1^{(\mp)}(\xi)$ вводятся для устранения невязок, возникающих в окрестности кривой $h(x)$ в результате добавления к асимптотическому приближению функций $\mu^{(\mp)}(x,y)$, а также для выполнения условия упорядоченности 1).

Определим функции $\mu^{(\mp)}(x,y)$ как решения задач

$$\begin{cases} \bar{A}_1^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \mu^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_2^{(\mp)}(x,y)\dfrac{\partial \mu^{(\mp)}}{\partial y} + W^{(\mp)}(x,y)\mu^{(\mp)}(x,y) = R^{(\mp)}, \\ \mu^{(-)}(x,0) = R_0^{(-)};\ \mu^{(+)}(x,a) = R_0^{(+)};\ \mu^{(\mp)}(x,y) = \mu^{(\mp)}(x+L,y). \end{cases} \tag{5.54}$$

Здесь $R^{(\mp)}$, $R_0^{(\mp)}$ – некоторые положительные величины, а функции $W^{(\mp)}$ определены в (5.28).Функции с верхним индексом "$(-)$"определены в $\bar{D}^{(-)}$, а с верхним индексом "$(+)$"определены в $\bar{D}^{(+)}$.

Ранее были рассмотрены аналогичные задачи для функций $\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y)$. Повторяя приведенные там рассуждения, запишем выражения для функций $\mu^{(\mp)}(x,y)$ явном виде:

$$\mu^{(\mp)}(x,y) = R_0^{(\mp)} \cdot \exp\left(-\int_{0,a}^{y} \frac{W^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1\right)}{\bar{A}_2^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1\right)} dy_1\right) +$$
$$+\int_{0,a}^{y} \exp\left(-\int_{y_1}^{y} \frac{W^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2\right)}{\bar{A}_2^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2\right)} dy_2\right) \frac{R^{(\mp)}}{\bar{A}_2^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1\right)} dy_1. \tag{5.55}$$

Функции $X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)})$ имеют тот же смысл, что и в (3.16).

Согласно условию **D3** при всех $(x,y) \in \bar{D}$ выполняются неравенства $\bar{A}_2^{(-)}(x,y) > 0; \bar{A}_2^{(+)}(x,y) < 0$, поэтому функции $\mu^{(\mp)}(x,y)$ принимают только положительные значения в области $(x,y) \in \bar{D}$.

Определим функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ как решения задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \tilde{P}^{(\mp)}(\xi,l)\dfrac{\partial q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} - \Phi^{(\mp)}(\xi,l)\tilde{P}_u^{(\mp)}(\xi,l)q_0^{(\mp)} - \\ -\Phi^{(\mp)}(\xi,l)\tilde{P}_u^{(\mp)}(\xi,l)\mu^{(\mp)}(l,h(l)) + d \cdot e^{-\kappa|\xi|} = 0, \\ q_0^{(\mp)}(0) + \mu^{(\mp)}(l,h(l)) = \delta(l);\ q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{5.56}$$

соответственно на полупрямых $\xi \le 0$ и $\xi \ge 0$. Здесь $\delta(l)$, d и κ – положительные величины, которые подбираются таким образом, чтобы для функции $\beta(x,y,\varepsilon)$ выполнялись дифференциальные неравенства 1) и 4).

Решения задач (5.56) можно выписать в явном виде:

$$q_0^{(\mp)}(\xi) = \left(\delta(l) - \mu^{(\mp)}(l,h(l))\right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi,l)}{\Phi^{(\mp)}(0,l)} +$$
$$+\Phi^{(\mp)}(\xi,l) \int_0^{\xi} \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(s,l)} ds \int_{\mp\infty}^{s} \left(\Phi^{(\mp)}(t,l)\tilde{P}_u^{(\mp)}(t,l)\mu^{(\mp)}(l,h(l)) - d\cdot e^{-\kappa|t|}\right) dt. \tag{5.57}$$

Выберем положительную функцию $\delta(l)$ достаточно большой, чтобы для каждого l выполнялись неравенства $\delta(l) - \mu^{(\mp)}(l,h(l)) > 0$, а постоянные d и κ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\Phi^{(-)}(\xi,l)\tilde{P}_u^{(-)}(\xi,l)\mu^{(-)}(l,h(l)) - d\cdot e^{\kappa\xi} < 0, \ \ \xi \le 0,$$

$$\Phi^{(+)}(\xi,l)\tilde{P}_u^{(+)}(\xi,l)\mu^{(+)}(l,h(l)) - d\cdot e^{-\kappa\xi} < 0, \ \ \xi \ge 0.$$

При указанном выборе констант функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$ принимают строго положительные значения при $\xi \le 0$ и $\xi \ge 0$ соответственно.

Функции $q_1^{(\mp)}(\xi)$ устраняют невязки порядка ε^{n+1} в выражении $L[\beta]$. Определим их как решения задач

$$\frac{\partial^2 q_1^{(\mp)}}{\partial\xi^2} - \tilde{P}^{(\mp)}(\xi,l)\frac{\partial q_1^{(\mp)}}{\partial\xi} - \tilde{P}_u^{(\mp)}(\xi,l)\Phi^{(\mp)}(\xi,l)q_1^{(\mp)}(\xi) = qf_1^{(\mp)}(\xi) -$$
$$-\left(\bar{A}_1(l,h(l))^{(\mp)}\frac{\partial\mu^{(\mp)}}{\partial x} + \bar{A}_2(l,h(l))^{(\mp)}\frac{\partial\mu^{(\mp)}}{\partial y} + W^{(\mp)}(l,h(l))\mu^{(\mp)}(l,h(l))\right), \tag{5.58}$$

$$q_1^{(\mp)}(0) = 0, \quad q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0.$$

Здесь $qf_1^{(\mp)}(\xi)$ – прочие слагаемые порядка ε^{n+1} в разложении Тейлора функций, входящих в выражение для $L[\beta]$.

Функции $q_0^{(\mp)}(\xi)$, $q_1^{(\mp)}(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки типа (5.37).

Функция $\alpha_n(x,y,\varepsilon)$ имеет вид

$$\alpha_n(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} \alpha_n^{(-)}(x,y,\varepsilon) = U_n^{(-)} - \varepsilon^n \left(\mu^{(-)}(x,y) + q_0^{(-)}(\xi) + \varepsilon q_1^{(-)}(\xi)\right), \\ (x,y) \in \bar{D}^{(-)},\ \xi \leq 0; \\ \alpha_n^{(+)}(x,y,\varepsilon) = U_n^{(+)} - \varepsilon^n \left(\mu^{(+)}(x,y) + q_0^{(+)}(\xi) + \varepsilon q_1^{(+)}(\xi)\right), \\ (x,y) \in \bar{D}^{(+)},\ \xi \geq 0. \end{cases} \tag{5.59}$$

Лемма 5.1. *Функции $\beta(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha(x,y,\varepsilon)$ являются верхним и нижним решениями задачи* (5.2) *соответственно.*

Для доказательства леммы необходимо показать, что для функций $\beta(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha(x,y,\varepsilon)$ выполняются неравенства 1)–4) из определения 5.3.

Для проверки выполнения упорядоченности запишем разность функций $\beta(x,y,\varepsilon)$ и $\alpha(x,y,\varepsilon)$ в каждой из подобластей $\bar{D}^{(-)}$, $\bar{D}^{(+)}$:

$$\beta^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) - \alpha^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) = \varepsilon^n \left(2\mu^{(\mp)}(x,y) + 2q_0^{(\mp)}(\xi) + 2\varepsilon q_1^{(\mp)}\right).$$

Выражения справа строго положительны при достаточно малом ε за счет положительности функций $\mu^{(\mp)}(x,y)$ и $q_0^{(\mp)}(\xi)$, таким образом, неравенство 1) выполнено во всей рассматриваемой области.

Выполнение неравенств 2) следует из самого способа построения верхнего и нижнего решений:

$$L[\beta^{(\mp)}] = -\varepsilon^{n-1} d \cdot e^{\kappa\xi} - \varepsilon^n \tilde{R}^{(\mp)} + O(\varepsilon^{n+1}) < 0,$$
$$L[\alpha^{(\mp)}] = \varepsilon^{n-1} d \cdot e^{-\kappa\xi} + \varepsilon^n \tilde{R}^{(\mp)} + O(\varepsilon^{n+1}) > 0. \tag{5.60}$$

Условия 3) оказываются выполненными при выборе достаточно больших положительных величин $R_0^{(\mp)}$ в начальных условиях задач (5.54).

Проверим выполнение неравенства 4) для верхнего решения

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(x,h(x)-0,\varepsilon)-\frac{\partial\beta}{\partial x}(x,h(x)+0,\varepsilon)=\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}(x,h(x),\varepsilon)-\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}(x,h(x),\varepsilon)= \\ =\varepsilon^{n-1}\left(\frac{\partial q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0)-\frac{\partial q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0)\right)+O(\varepsilon^n). \quad (5.61)$$

Используя явный вид функций $q_0^{(\mp)}(\xi)$ (5.57), запишем выражения для их производных при $\xi=0$:

$$\frac{\partial q_0^{(\mp)}}{\partial\xi}(0)=\frac{\delta(l)-\mu^{(\mp)}(l,h(l))}{\Phi(0,l)}\cdot\frac{\partial\Phi^{(\mp)}}{\partial\xi}(0,l)+ \\ +\int_{\mp\infty}^{0}\left(\Phi^{(\mp)}(\sigma,l)\tilde{P}_u^{(\mp)}(\sigma,l)\mu^{(\mp)}(l,h(l))-de^{-\kappa|\sigma|}\right)d\sigma.$$

Преобразуем выражение, учитывая, что $\dfrac{1}{\Phi^{(\mp)}(\xi,l)}\dfrac{\partial\Phi^{(\mp)}}{\partial\xi}=\tilde{P}^{(\mp)}(\xi,l)$; $Q_0^{(\mp)}(0,l)=p_0(l)-\varphi^{(\mp)}(l,h(l))$:

$$\frac{\partial q^{(\mp)}}{\partial\xi}(0)=\delta(l)\tilde{P}^{(\mp)}(0,l)-\mu^{(\mp)}(l,h(l))P^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(l,h(l)),l)\mp\frac{d}{\kappa}.$$

Подставляя полученное выражение в (5.61), найдем

$$\frac{\partial q_0^{(-)}}{\partial \xi} - \frac{\partial q_0^{(+)}}{\partial \xi} = \delta(l) \cdot \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{u}}(p_0(l), l) -$$

$$-\mu^{(-)}(l, h(l)) P^{(-)}(\varphi^{(-)}(l, h(l)), l) + \mu^{(+)}(l, h(l)) P^{(+)}(\varphi^{(+)}(l, h(l)), l) - 2\frac{d}{\kappa}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial H_0}{\partial p}(p_0) > 0$ в силу условия **D5**, то, выбирая положительную величину δ достаточно большой, можно добиться того, чтобы выражение в правой части оказалось положительным, если ε мало. Неравенство 4) для нижнего решения проверяется аналогично.

Лемма доказана.

Из двойного неравенства (5.52) и структуры верхнего и нижнего решений стандартным образом следует оценка (5.51).

Теорема доказана.

5.4 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия **D1**–**D5**. Тогда при достаточно малых ε решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи* (5.2) *локально единственно и, как стационарное решение задачи* (5.1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере* $[\alpha_2; \beta_2]$.

Для доказательства существования решения задачи (5.1) воспользуемся методом верхних и нижних решений для параболических уравнений аналогично предыдущей главе.

Определение 5.4. *Непрерывные функции $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ называются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (5.1), *если при достаточно малых ε для них выполняются следующие неравенства*

1^0 Упорядоченность:

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) < \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon), \forall (x, y) \in \bar{D},\ t > 0.$$

2^0 Действие дифференциального оператора в уравнении (5.1) $\forall (x, y) \in D^{(-)} \cup D^{(+)},\ t > 0$:

$$L_t[\hat{\beta}] := \varepsilon \Delta \hat{\beta} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} - \Big(\mathbf{A}(\hat{\beta}, x, y), \nabla\Big) \hat{\beta} - B(\hat{\beta}, x, y) \le 0 \le L_t[\hat{\alpha}].$$

3^0 Условия на границе:

$$\hat{\alpha}(x, 0, t, \varepsilon) \le u^0(x) \le \hat{\beta}(x, 0, t, \varepsilon);$$

$$\hat{\alpha}(x, a, t, \varepsilon) \le u^a(x) \le \hat{\beta}(x, a, t, \varepsilon).$$

4^0 Условия на скачок производных:

$$\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n}(x, h(x) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n}(x, h(x) + 0, t, \varepsilon) \ge 0;$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n}(x, h(x) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n}(x, h(x) + 0, t, \varepsilon) \le 0.$$

Имеет место следующее утверждение: для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x, y, 0, \varepsilon) \le v_{init}(x, y, \varepsilon) \le \hat{\beta}(x, y, 0, \varepsilon),$$

решение $v_\varepsilon(x, y)$ задачи (5.1) существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями.

Докажем теперь, что функции $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$, которые определяются выражениями

$$\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\beta(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))\, e^{-\lambda t}, \tag{5.62}$$

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\alpha(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))\, e^{-\lambda t}, \tag{5.63}$$

где λ – достаточно малое положительное число, являются верхним и нижним решениями задачи (5.1) при $\hat{\alpha}(x, y, 0, \varepsilon) \leq\ v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, 0, \varepsilon)$.

Тогда из неравенств

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq v_\varepsilon(x, y, t) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon),\ (x, y) \in \bar{D}, t > 0 \tag{5.64}$$

будет следовать предельное равенство

$$\lim_{t\to\infty} |v_\varepsilon(x, y, t) - u_\varepsilon(x, y)| = 0.$$

Из этого предельного равенства и единственности решения параболической задачи будет вытекать единственность решения $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (5.2).

Доказательство того, что для функций $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$, определенных выражениями (5.62)–(5.63) с $n = 2$ выполняются неравенства 1^0–4^0 проводится в полной аналогии с главой 3.

Положив $t = 0$ в неравенствах (5.64), получим, что областью устойчивости стационарного решения является по крайней мере сегмент

$$\alpha_2(x, y, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \beta_2(x, y, \varepsilon). \tag{5.65}$$

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены задачи типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция с пограничным и внутренным переходным слоями. Получены асимптотические приближения решений, получены достаточные условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарных решений. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых математических моделей стационарных процессов, происходящих на границе раздела сред. Кроме того, результаты могут в дальнейшем быть использованы для решения задач стационирования и разработки численных методов для эффективного решения жестких задач с разрывными коэффициентами.

Литература

[1] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений // М.: Высш. школа, 1990.

[2] *Sogachev A., Panferov O.* Modification of two-equation models to account for plant drag // Bound. Layer Meteorol. 2006. Vol. 121. P. 229–66.

[3] *Olchev A., Radler K., Sogachev A., Panferov O., Gravenhorst G.* Application of a three-dimensional model for assessing effects of small clear-cuttings on radiation and soil temperature // Ecological Modelling. 2009. Vol. 220. P. 3046–3056.

[4] *Руденко О.В.* Неоднородное уравнение бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474, №6. С. 671–674.

[5] *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478. №3. С. 274-279.

[6] *Nefedov N.N.* The existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of burgers type equations with modular

advection // Mathematical modelling of natural phenomena. 2019. №4. P. 1-14.

[7] *Левашова Н.Т., Николаева О.А., Пашкин А.Д.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур.// Вестник Московского университета. Физ. Астрон. 2015. №5. С. 12-16.

[8] *Лапшин В.Б., Сидоренко А.В.* Взаимодействие гравитационно-капиллярных структур в поверхностном слое океана. // Электронный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ» 2001. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/135.pdf

[9] *Сыроешкин А.В., Смирнов А.Н., Гончарук В.В. ,Успенская Е.В. , Николаев Г.М., Попов П.И. , Кармазина Т.В.,Самсони-Тодоров А.О., Лапшин В.Б.* Вода как гетерогенная структура // Электронный научный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ». 2006. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/088.pdf

[10] *Orlov A., Levashova N., Burbaev T.* The use of asymptotic methods for modeling of the carriers wave functions in the Si/SiGe heterostructures with quantumconfined layers // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). 2015. Vol. 586. №1. P. 01200.

[11] *Levashova N., Sidorova A., Semina A., Ni M.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. 2019. Vol. 11. №13. P. 3658-1-3658-13.

[12] *Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Семина А.Е.* Автоволновая модель морфогенеза мегаполисов в представлениях неоднородных актив-

ных сред // Известия РАН, серия физическая. 2019. Т. 83. №1. С. 106-112.

[13] *Sidorova A.E., Levashova N.T., Semina A.E., MelЎnikova A.A.* The Application of a Distributed Model of Active Media for the Analysis of Urban Ecosystems Development // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2018. Vol. 13. №2. P. 454-465.

[14] *Kopteva N., Stynes M.* Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction diffusion problem // Numerische Mathematik. 2011. Vol. 119. №2. P. 787–810.

[15] *Kopteva N., O'Riordan E.* Shishkin meshes in the numerical solution of singularly pertubed differential equations // International Journal of Numerical Analysis and Modelling. 2010. Vol. 1. №1. P. 1-18.

[16] *O'Riordan E., Quinn J.* Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem // Lectures Notes in Computational Science and Engineering. 2011. Vol. 81. P. 187–195.

[17] *O'Riordan E., Quinn J.* Parameter-uniform numerical method for some linear and nonlinear singularly pertubed convection-diffusion boundary turning point problems // BIT Numerical Mathematics. 2011. Vol. 51. №2. P. 317–337.

[18] *Quinn J.* A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location // Computational and Applied Mathematics. 2015. Vol. 290 №15. P. 500–515.

[19] *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed

reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 54. P. 233–247.

[20] *Lukyanenko D.V. , Grigorev V.B. , Volkov V.T. , Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data // Computers and Mathematics with Applications. 2019. Vol. 77. №5. P. 1245–1254.

[21] *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N., Yagola A.G.* Application of asymptotic analysis for solving the inverse problem of determining the coefficient of linear amplification in burgers' equation // Moscow University Physics Bulletin. 2019. Vol. 74. №2. P. 131–136.

[22] *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2019. Vol. 27. №5. P. 745–758.

[23] *Нефедов Н.Н., Давыдова М.А.* Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №5. С. 738-748.

[24] *Нефедов Н.Н., Давыдова М.А.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. №6. С. 715-733.

[25] *Давыдова М.А.* Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция // Математические заметки. 2015. Т. 98. №6. С. 853-864.

[26] *Нефедов Н.Н., Давыдова М.А.* Решения с пограничными и внутренними переходными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2016. №3. С. 163106-1-163106-3.

[27] *Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А.* Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. №3. С. 283-290.

[28] *Давыдова М.А., Захарова С.А., Левашова Н.Т.* Об одной модельной задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. №9. С. 1548-1559.

[29] *Давыдова М.А., Нефедов Н.Н.* Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24. №1. С. 31-38.

[30] *Давыдова М.А., Захарова С.А.* Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. №1. С. 83-91.

[31] *Давыдова М.А.* Об одной модели реакция-диффузия-адвекция для нелинейного уравнения тепломассопереноса // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2018. Т. 1850202. №5. С. 1850202-1-1850202-7.

[32] *Фэй Пан Я., Мин Кан Ни, Давыдова М.А.* Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывной нелинейностью // Математические заметки. 2018. Т. 104. №5. С. 759-770.

[33] *Ильин А.М.* Исследование сингулярно возмущенных краевых задач методом согласования асимптотических разложений// Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21 №10. С. 1760-1766

[34] *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. №4. С. 520-531.

[35] *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and Stability of Periodic Contrast Structures in the Reaction-Advection-Diffusion Problem // Russian Journal of Mathematical Physics. 2015. Vol. 22. №2. P. 215-226.

[36] *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-Diffusion Equations in the Two-Dimentional Case // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23. №3. С. 342-348.

[37] *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-

диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 57. №4. С. 524-537.

[38] *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. №1. С. 125-132.

[39] *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Математические заметки. 2019. Т. 106. №5. С. 708-722.

[40] *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L.* On The Existence and Asymptotic Stability of Periodic Contrast Structures in Quasilinear Reaction-Advection-Diffusion Equations // Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 26. №1. P. 55-69.

[41] *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягремцев А.В.* Контрастные структуры в уравнениях реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. №3. С. 365-376.

[42] *Nefedov N.N., Yagremtsev A.V.* On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers // Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9045. P. 62-72.

[43] *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягремцев А.В.* Существование решения в виде движущегося фронта у задачи типа реакция-диффузия-

адвекция в случае сбалансированной адвекции // Известия РАН. Серия математическая. 2018. Т. 82. №5. С. 131-152.

[44] *Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. №10. С. 1594-1607.

[45] *Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. №1. С. 17-31.

[46] *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. №4. С. 611-620.

[47] *Нефедов Н.Н., Ни М.К.* Внутренние слои в одномерном уравнении реакция-диффузия с разрывным реактивным членом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. №12. С. 2042-2048.

[48] *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Стационарное уравнение реакции-диффузии с разрывным реактивным членом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. №5. С. 854–866.

[49] *Орлов А.О., Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т.* Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. №5. С. 673-690.

[50] *Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакцияЦдиффузия с разрывным реактивным слагаемым // Вестник МГУ им. Ломоносова, сер. 3, физика, астрономия. 2018. №6. С. 3-10.

[51] *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = (x, u, Du)$ // Матем. сб. 1980. Т. 113. №2. С. 324-338.

[52] *C. De Coster, F. Obersnel, P. Omari* A qualitative analysis, via lower and upper solutions, of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2006 Vol. 3. P. 203-339.

[53] *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Матем. 1998. №11. С. 69–76.

[54] *Carl S., Le V.K., Montreu D.* Nonsmooth Variational Problems and their Inequalities: Comparison Principles and Applications // New York, USA: Springer Science + Business Media, 2007.

[55] *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №4. С. 499-504.

[56] *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations // New York, 1992.

[57] *Александров А.Д.* Исследования о принципе максимума IV // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. №3. С. 3-15.

[58] *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №7. С. 1142-1149.

[59] *Нефедов Н.Н.* Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. №2. С. 262-269.

[60] *Нефедов Н.Н.* Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. №1. С. 181-186.

[61] *Nefedov N.N.* Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8236. P. 62-72.

[62] *Fife Paul C., McLeod J.B.* The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion. Equations to Travelling Front Solutions // Arch. ration. mech. anal. 1977. Vol. 65. №4. P.335–361.

[63] *Шишмарев И.А.* Введение в теорию эллиптических уравнений // Из-во Московского университета, 1979.

[64] *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A.* The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math Meth Appl Sci. 2018. Vol. 41. №18. P. 9203-9217.

[65] *Аксенов В.Н., Андреев Е.Г., Тарасов М.И.* Цифровая обработка вертикальных профилей температуры тонких пограничных слоев мо-

ря и атмосферы // Физические проблемы экологии (экологическая физика). Москва. 2001. Т. 7. С. 43-46.

[66] *Kazdan I.L., Kramer R.I.* Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1978. Vol. 31. №5. P. 619-645.

[67] *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. №4. С. 615-623.

[68] *Wang J.* Monotone method for diffusion equationss with nonlinear diffusion coefficients // Nonlinear Analysis. 1962. Vol. 34. P. 113-142.

[69] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

[70] *Соболевский П.Е.* О функция Грина любых (в частности, целых) степеней эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. №4. С. 804-807.

[71] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[72] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

[73] *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального урав-

нения второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 35. №4. С. 520-531.

[74] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова. 2010. Т. 268. С. 268-283.

[75] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика. 1997. Т. 7. С. 4-32.

[76] *Зилитинкевич С.С.* Динамика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, 1970.

[77] *Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S.* Discrete sungularly perturbed control problems (a survey). // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systens Series B: Applications and Algorithms. 2017. Vol. 24. P. 335-370.

[78] *Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.* Магистральные траектории в экономике и сингулярные возмущения // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2015. Т. 65. №1. С. 60-67

[79] *Дмитриев М.Г., Сачков Ю.Л.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи оптимального управления, связанной с восстановлением поврежденной кривой // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. №11. С. 1381-1389.

[80] *Dmitriev M.G., Pavlov A.A., Petrov A.P.* Nonstationary Fronts in the Singularly Perturbed Power-Society Model // Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013. №172654.

[81] *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №1. С. 45-58.

[82] *Lomov I.S.* Singularly perturbed and irregularly degenerate elliptic problems: common approaches // Complex Variables and Elliptic Equations. 2018. Vol. 63. №12. C. 1675-1686.

[83] *Ломов И.С.* Неклассические постановки задач для вырождвющихся дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №5. С. 723-729.

[84] *Ломов И.С.* Метод спектрального разделения переменных для вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №6. С. 795-801.

[85] *Ломов И.С.* Построение точных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №6. С. 1073-1075.

[86] *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., Шафаревич А.И.* Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. 2007. Т. 82. №5. С. 792-796.

[87] *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б.* Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. №6. С. 67-90.

[88] *Заборский А.В., Нестеров А.В.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального - операторного

нелинейного уравнения с переменными коэффициентами // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. №1. С. 117-131.

[89] *Нестеров А.В., Заборский А.В.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального - операторного уравнения в критическом случае // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. №4. С. 65-79.

[90] *Нестеров. А.В., Павлюк Т.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с несколькими пространственными переменными в критическом случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. №3. С. 450-462.

[91] *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с малой нелинейностью в критическом случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. №7. С. 1267-1276.

[92] *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т.70. №3. С.3–76.

[93] *Григорьева Е.В., Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Квазинормальные формы для уравнений Лэнга-Кобаяши с большим коэффициентом управления // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т.20. №1. С.18–29.