Численное решение обратной задачи Штурма-Лиувилля вариационным методом

Терновский В. В., Хапаев М. М., Хапаева Т. М.
E-mail: vladimir.ternovskii@icloud.com, tmhapa@yahoo.com
Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Вкратце, обратная задача Штурма-Лиувилля состоит в определении потенциала $q(x)$ для задачи

$$y'' + q(x)y = \lambda y$$

с граничными уловиями на отрезке по известным собственным функциям (решениям уравнения) y_i и собственным значениям λ_i, которых, в общем случае, сколь угодно много.

История обратной задачи Штурма-Лиувилля начинается с 1929 года, когда В.А.Амбарцумян доказал первую теорему об однозначном восстановлении нулевого потенциала по спектру $\lambda_j = j^2 \quad (j = 0 \ldots \infty)$ для задачи с граничными условиями $y'(0) = y'(\pi) = 0$. Борг в 1946 доказал более общую теорему о восстановлении потенциала по двум спектрам. В представленном сообщении изучаются численные аспекты обратной задачи Штурма-Лиувилля.

На практике полные спектры задачи неизвестны, собственные числа заданы с погрешностью. Кроме того, у дискретной задачи Штурма-Лиувилля асимтотика собственных значений отличается от исходной непрерывной задачи. Обсуждаются проблемы численной реализации задачи и известные подходы.

Характерной особенностью обратных задач является их некорректность в смысле Адамара. Некорректность обратной задачи Штурма-Лиувилля связана с определением потенциала по имеющейся не точной априорной информации. Отсюда следует, что метод восстановления потенциалов должен быть вариационный, иначе класс решений будет слишком широк из-за неединственности решения обратной задачи. Необходимо сужение множества допустимых решений до единственно возможного из предполагаемого функционального пространства. Неединственность следует из того факта, что по конечному спектру (даже если не хватает только одного собственного значения) можно восстановить бесконечно много потенциалов.

Для численного решения обратной задачи предлагается прямой вариационный метод минимизации функционала на ограничениях типа интегральных равенств, а также неравенств для собственных чисел. Для примера восстанавливаются потенциалы из различных классов , в том числе и разрывные. Для расчетов использовалась система символьной математики «Mathematica» компании Wolfram.