

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Мошарев Павел Александрович

**Эффекты нелинейной электродинамики
с дилатоном и аксионом**

Специальность 01.04.16

«Физика атомного ядра и элементарных частиц»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф.

Кечкин Олег Вячеславович

Москва - 2020

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Нелинейные модели в классической теории поля	13
1.1 Электродинамика Максвелла	13
1.2 Первые модели нелинейной электродинамики: теория Борна-Инфельда и Гейзенберга - Эйлера	16
1.3 Общая Теория Относительности Эйнштейна	21
1.3.1 Метод симметрий в стационарной ОТО	24
1.3.2 Аксиально-симметричные точные решения в ОТО	26
1.4 Теории Великого Объединения и электродинамика с дополнитель- ными полями	28
1.4.1 Теория Калуцы-Клейна	28
1.5 Аксионы	29
1.6 Дилатон-аксионное обобщение классической электродинамики . . .	32
1.6.1 Компактификация лагранжиана электродинамики с аксио- ном и дилатоном в стационарном случае	33
Глава 2. Дилатон-Максвелловская электродинамика (ДМЭ) . .	35
2.1 Дилатон-Максвелловская электродинамика в четырех измерениях .	35
2.2 Стационарная ДМЭ	36
2.3 Общее гармоническое решение уравнений стационарной электроди- намики Максвелла с дилатоном и интегрируемые частные случаи .	38
2.4 Первый класс решений	39
2.5 Второй класс решений	43
2.6 Третий класс решений	47
2.6.1 Класс дионных решений	50

2.6.2	Электро- и магнитостатические решения	52
Глава 3. Дуальность статической ДМЭ и стационарной ОТО.		
	Методы генерации точных решений	56
3.1	Генерация точных решений ДМЭ с использованием преобразований симметрии ОТО	57
3.2	Общее центрально-симметричное решение и эффективный потенциал	59
3.2.1	Генерация решения и доказательство его единственности . .	59
3.2.2	Энергия полей	62
3.2.3	Эффективный потенциал	63
3.3	Генерация точных решений ДМЭ из стационарных решений ОТО в вакууме	66
3.3.1	Решение Керра-НУТ и его частные случаи в ДМЭ	66
Глава 4. Электродинамика Максвелла с аксионом		
4.1	Компактификация лагранжиана в стационарном случае	72
4.2	Симметрии трехмерной модели	74
4.3	Общее гармоническое решение	77
Глава 5. Возможные способы экспериментальной проверки . . .		
5.1	Модифицированная формула Резерфорда для рассеяния пробных частиц на центрально-симметричном потенциале ДМЭ	81
5.2	Рассеяние пробных частиц на точечном дионе в электродинамике с аксионом	84
Заключение		90
Список литературы		91

*

Введение

В настоящей работе изучались нелинейные модели электродинамики, включающие дополнительные скалярные и псевдоскалярные поля. Наиболее популярными среди таких моделей в настоящее время являются электродинамика Максвелла с дилатоном и электродинамика Максвелла с аксионом. Разработано несколько методов построения точных решений полевых уравнений указанных моделей в случае стационарных полей и представлены несколько классов полученных точных решений. На основании полученных центрально-симметричных решений сформулированы возможные принципы экспериментальной проверки изученных теорий.

Актуальность темы исследования. Главной целью теоретической физики на протяжении последнего столетия является построение единой теории поля, которая включила бы в рамки единого описания все четыре фундаментальных взаимодействия и все поля материи [1]. На сегодняшний день материальные частицы и три из четырёх фундаментальных взаимодействий - электромагнитное, сильное и слабое - описываются так называемой Стандартной моделью физики элементарных частиц, а гравитационное поле независимо от них описывается Общей Теорией Относительности (ОТО). Открытие в 2012 году бозона Хиггса [2], [3] завершило построение Стандартной модели, решив вопрос о механизмах формирования массы элементарных частиц. Также открытие бозона Хиггса - частицы с нулевым спином - указывает на существование в природе фундаментальных скалярных полей. В настоящее время в экспериментах активно ведётся поиск свидетельств о так называемой «новой физике» - частицах и взаимодействиях, не описываемых Стандартной моделью. Существует несколько аргументов в пользу необходимости таких поисков. Первый аргумент можно назвать философским:

человечеству свойственно любопытство и жажда познания, люди обычно не удовлетворяются имеющимся знанием и стремятся расширить его границы. Вторым аргументом связан с необходимостью объяснения результатов экспериментов, которые не имеют объяснения в Стандартной модели и требуют её расширения. Наиболее важными среди таких результатов являются наблюдение нейтринных осцилляций, свидетельствующее о наличии у нейтрино ненулевой массы, и наблюдение тёмной материи, свидетельствующее о присутствии во Вселенной гигантских масс вещества, присутствие которого на сегодняшний день удалось установить только посредством гравитационного взаимодействия с обычным веществом [4]. Ни массы нейтрино, ни гипотетические частицы тёмной материи не описываются Стандартной моделью, хотя для описания тех и других есть несколько в разной степени привлекательных теорий. Третий аргумент в пользу необходимости расширения Стандартной модели связан с её внутренним несовершенством: слишком большим количеством свободных параметров, величины которых не объясняются внутри самой теории, отсутствием понимания того, почему те или иные разделы теории выглядят именно таким образом, а также с тем, что она описывает не все фундаментальные взаимодействия.

В качестве единой теории, позволяющей описывать гравитацию вместе со всеми остальными фундаментальными взаимодействиями, в разное время предлагались теория Калуцы-Клейна, теория суперструн, петлевая квантовая гравитация и другие [5], [6], [7]. В настоящее время в научном сообществе нет общепринятого представления о том, каким образом должна быть устроена единая теория, а её поиски активно ведутся в различных, часто взаимоисключающих направлениях [8].

Одними из главных кандидатов на роль тёмной материи в настоящее время являются аксионы - лёгкие псевдоскалярные частицы, которые появляются в Стандартной модели в рамках одного из возможных решений «сильной CP-проблемы» квантовой хромодинамики. Большинство экспериментов по поиску аксионов основаны на наблюдении фотонов, в которые они могут конвертироваться в сильных неоднородных магнитных полях [9], [10]. Таким образом, важнейшим параметром в теории аксионов и в формулировании экспериментальных предсказаний является константа аксион-Максвелловской связи, характеризующая вели-

чину влияния аксионного поля на поля классической электродинамики и вероятность взаимодействия аксионов с фотонами. Аксионы естественным образом возникают в различных вариантах теории струн, благодаря чему в этих теориях может сразу решаться и проблема тёмной материи, и проблема несохранения CP-чётности [11]. Наряду с аксионом, дилатон является одним из самых распространённых дополнительных полей, взаимодействующих с полями классической электродинамики согласно предсказаниям различных вариантов теорий Великого Объединения. Существуют предположения о том, что посредством дилатона может осуществляться взаимодействие частиц Стандартной модели с частицами тёмной материи [12].

Лагранжиан взаимодействия дилатона и аксиона с полями классической электродинамики представляет собой нелинейную модель электродинамики, одну из многих, активно изучаемых в настоящее время. Её исследование важно, по крайней мере, с трёх точек зрения. Во-первых, полезно понимать, каким образом принятие той или иной теории Великого Объединения через предсказанные дополнительные поля и взаимодействия модифицирует классические результаты теорий, общепринятых в современной физике. Во-вторых, остаётся актуальным вопрос теоретического предсказания эффектов, которые в случае экспериментального наблюдения позволят сделать вывод о природе частиц тёмной материи или о том, какой из вариантов теорий Великого Объединения является предпочтительным. Наконец, поиск точных аналитических решений уравнений любой нелинейной теории имеет самостоятельную ценность как чисто математическая проблема.

Степень разработанности темы. На сегодняшний день было предпринято несколько попыток экспериментальной регистрации аксионов. Самыми известными среди них являются эксперименты ADMX (Axion Dark Matter Experiment) [13] и CAST (CERN Axion Solar Telescope) [14]. Дизайн обоих экспериментов нацелен на наблюдение превращения фотонов в аксионы и обратно в сильных электромагнитных полях. Предлагались также эксперименты по наблюдению дилатона, основанные на схожих принципах [15]. Существует большое количество теоретических работ, рассматривающих динамику дилатона и аксиона, их взаимодействие с гравитационным и электромагнитным полями, а также с полями сильного взаимодействия [16], [17], [18]. Во многих работах динамика аксиона и дилатона рассмат-

ривается на фоне искривленной метрики, а в некоторых из них динамика электромагнитного поля предполагается нелинейной. Наиболее близки к содержанию настоящей диссертации по характеру исследованной модели и применяемым методам следующие работы: [19], [20]. Результаты, приведенные в четвертой главе настоящей диссертации, обобщают результаты, полученные их авторами, в случае стационарных полей.

Цель. Целью настоящей работы было исследование электродинамики Максвелла с дилатоном и аксионом в стационарном случае методами классической теории поля. Особое внимание уделялось разработке новых методов поиска точных решений, поиску точных решений и формулированию на их основании проверяемых следствий теории.

Задачи. Для достижения поставленных целей было необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать существующие нелинейные модели теории поля, подобные электродинамике с аксионом и дилатоном по происхождению или по структуре, и изучить известные результаты, полученные другими авторами при исследовании этой или подобных моделей.

2. Осуществить поиск и изучение точных решений уравнений электродинамики Максвелла с аксионом и дилатоном методами классической теории дифференциальных уравнений.

3. Исследовать возможность применения нестандартных методов построения точных решений. В их числе метод симметрий и метод переноса решений из дуальной теории.

4. Спрогнозировать на основании построенных точных решений новые наблюдаемые эффекты, которые могут быть использованы для изучения дилатон-аксионной электродинамики в реальном или гипотетическом эксперименте.

Объект и предмет исследования Объектом исследования в настоящей работе являлись нелинейные модели классической электродинамики Максвелла с дополнительными дилатонным и аксионным полями. Предметом исследования были точные решения уравнений указанных теорий и возможные экспериментальные следствия, выводимые из этих решений.

Методология исследования В работе использованы различные методы

математической физики, теории дифференциальных уравнений и теории групп. Для вычисления дифференциальных сечений рассеяния в пятой главе работы использованы методы теории возмущений.

Научная новизна. В работе впервые построены общие гармонические решения уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном и электродинамики Максвелла с аксионом в стационарном случае, обобщающие ранее известные результаты других авторов. Впервые найдена дуальность между стационарной аксиально-симметричной ОТО в вакууме и статической электродинамикой Максвелла с аксионом при дополнительном условии равенства нулю магнитного или электрического поля. Указанная дуальность использована для получения точных решений электродинамики с дилатоном из известных решений Шварцшильда и Керра ОТО. Также разработан метод получения точных решений, использующий известные симметрии лагранжиана ОТО в вакууме.

Положения, выносимые на защиту.

1. Общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном содержит подклассы, описывающие поле гипотетической частицы, обладающей всеми тремя типами заряда - дилатонным, электрическим и магнитным. Независимо от величин остальных параметров, магнитное поле точечной частицы, обладающей, в том числе, магнитным зарядом, имеет кулоновский вид.

2. Лагранжиан электродинамики Максвелла с дилатоном в статическом случае имеет дуальность с лагранжианом стационарной аксиально-симметричной ОТО при параметризации метрики, предложенной Ф. Эрнстом. В этом случае использование нормированного преобразования Элерса позволяет получать новые точные решения уравнений ДМЭ.

3. Взаимодействие пробной электрически заряженной частицы с полями центрального источника в дилатон - максвелловской электродинамике может быть описано эффективным потенциалом, имеющим конечную глубину во всём пространстве.

4. Решение электростатики с дилатоном, соответствующее решению Керра-НУТ ОТО, обладает нетривиальной поверхностью, имеющей свойство «горизонта событий».

5. Общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с

аксионом описывает поле гипотетической частицы, имеющей три типа заряда: аксионный, магнитный и электрический. Магнитное поле такой частицы имеет кулоновский вид независимо от величины параметров теории. В единственном случае, когда магнитное поле отсутствует, электрическое и аксионное поля не взаимодействуют друг с другом и имеют кулоновский вид.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе точные решения не привязаны к конкретным значениям констант-параметров теории, поэтому могут быть использованы для проверки следствий из различных вариантов теорий Великого Объединения. Найденная в работе дуальность между статической электродинамикой с дилатоном и стационарной аксиально-симметричной ОТО в вакууме имеет большой потенциал развития для поиска новых статических решений.

Достоверность. Достоверность результатов работы, в первую очередь, обеспечивается строгостью использованных математических методов. Также в пользу достоверности полученных результатов говорит факт соответствия полученных общих решений частным случаям, рассмотренным в работах других авторов.

Личный вклад автора Личный вклад автора в работы, вошедшие в диссертацию, составляет не менее 50 % от основного содержания работ.

Апробация. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. XVI межвузовская научная школа молодых специалистов «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине», Москва, Россия, 24-25 ноября 2015.

2. «Ломоносовские чтения - 2019». Секция «Ядерная физика», Москва, МГУ, Россия, 15-25 апреля 2019.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 6 статьях:

I. В рецензируемых журналах, индексируемых Web of science или SCOPUS:

1. Kechkin O. V., Mosharev P. A. Structures of general relativity in dilaton-maxwell electrodynamics // International Journal of Modern Physics A. — 2016. — Vol. 31, no. 23. — P. 1650127 (Импакт-фактор журнала 1.203; объём 0,56 печатного листа; личный вклад автора 50 % или 0,28 печатного листа)

2. Kechkin O. V., Mosharev P. A. Singularity-free interaction in dilaton-maxwell

electrodynamics // Modern Physics Letters A. — 2016. — Vol. 31, no. 31. — P. 1650169 (Импакт-фактор журнала 1.145; объём 0,35 печатного листа; личный вклад автора 50 % или 0,17 печатного листа)

3. Кечкин О. В., Мошарев П. А. Симметрии и общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с аксионом // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2020. — № 3. — С. 12–17.

Kechkin O. V., Mosharev P. A. The symmetries and the general harmonic solution to equations of maxwell electrodynamics with an axion // Moscow University Physics Bulletin. — 2020. — Vol. 75, no. 3. — P. 192–197. (Импакт-фактор журнала 0.652; объём 0,55 печатного листа; личный вклад автора 50 % или 0,27 печатного листа)

4. Кечкин О. В., Мошарев П. А. Общее гармоническое решение в электродинамике с дилатоном: точное выражение для полей и обобщённая сила Лоренца // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2020. — № 5. — С. 46–52.

Kechkin O. V., Mosharev P. A. A general harmonic solution in dilaton electrodynamics. An exact expression for the fields and the generalized lorentz force // Moscow University Physics Bulletin. — 2020. — Vol. 75, no. 5. — P. 427–433. (Импакт-фактор журнала 0.652; объём 0,54 печатного листа; личный вклад автора 50 % или 0,27 печатного листа)

II. В журналах, входящих в перечень ВАК:

5. Кечкин О. В., Денисова И. П., Мошарев П. А. Генерация статических решений в нелинейной электродинамике с дилатоном из стационарных решений Общей Теории Относительности в вакууме // Ученые Записки Физического Факультета МГУ. — 2019. — № 3. — С. 1930406–1–4 (Импакт-фактор журнала 0,062; объём 0,28 печатного листа ; личный вклад автора 33 % или 0,09 печатного листа)

6. Кечкин О. В., Мошарев П. А. Общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном // Учёные записки физического факультета МГУ. — 2019. — № 6. — С. 1960102–1–5. (Импакт-фактор журнала 0,062; объём 0,34 печатного листа; личный вклад автора 50 % или 0,17 печатного листа)

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из Введения, 5 глав и Заключения, изложена на 95 страницах и содержит 2 рисунка, 0 таблиц и 60 библиографических ссылок.

В первом пункте первой главы приводится описание классической электродинамики Максвелла, хорошо разработанной и проверенной теории, которая является базой и эталоном для данного исследования. Далее даётся небольшой обзор моделей нелинейной электродинамики: моделей Борна-Инфельда и Гейзенберга-Эйлера. Обсуждается мотивация к построению подобных нелинейных моделей. В третьем пункте описана ещё одна теория, давно ставшая общепринятой и также выступающая в некотором смысле образцом для нашей работы - Общая Теория Относительности Эйнштейна. Она интересует нас и как пример фундаментальной нелинейной теории поля, и с точки зрения заимствования конкретных методов и даже прямого переноса точных решений в одну из исследованных нами моделей. В четвертом пункте первой главы раскрыта история появления нелинейных моделей электродинамики с дополнительными полями. Даётся обзор пятимерной теории Калуцы-Клейна, порождающей дилатонное поле, и история появления в теоретической физике представления о возможном существовании аксионов. В пятом пункте приводится дилатон-аксионное обобщение электродинамики Максвелла в достаточно общей формулировке. Его частные варианты и являлись объектом изучения в настоящей работе.

Во второй главе рассмотрена электродинамика Максвелла с одним дополнительным скалярным полем - дилатоном. В первом пункте приводится общий обзор этой модели, во втором пункте проведена компактификация лагранжиана на три измерения в стационарном случае и построение эффективной сигма-модели. В третьем пункте второй главы получено общее гармоническое решение уравнений Эйлера-Лагранжа для построенного лагранжиана и рассмотрены важнейшие частные случаи этого решения, как отдельно электростатические и магнитостатические, так и содержащие одновременно нетривиальные электрическое, магнитное и дилатонное поля.

В третьей главе описана дуальность между электро- и магнитостатикой в присутствии дилатона, с одной стороны, и стационарной аксиально-симметричной ОТО в вакууме с другой стороны. В первом пункте главы развит метод генерации точных решений с использованием преобразований симметрии ОТО, во втором пункте найдено общее центрально-симметричное решение уравнений электростатики с дилатоном. В третьем пункте на примере решений Шварцшильда и Керра

показано, каким образом осуществляется непосредственный перенос решений из ОТО в электродинамику с дилатоном.

В четвертой главе рассмотрена электродинамика Максвелла в присутствии другого дополнительного поля - аксиона, которое является псевдоскалярным. В первом пункте проведена компактификация лагранжиана модели на три измерения в стационарном случае, во втором пункте найдено общее гармоническое решение уравнений Эйлера-Лагранжа для полученного эффективного лагранжиана.

Наконец, в пятой главе сформулированы возможные принципы экспериментальной проверки изученных теорий на основании полученных точных решений. В первом пункте вычислены поправки к классической формуле Резерфорда для рассеяния точечных бесспиновых частиц на эффективном потенциале электродинамики Максвелла с дилатоном, который был построен в главе 3. Во втором пункте исследовано рассеяние точечных частиц в поле диона, полученном в главе 4.

Заключение содержит основные результаты работы.

Глава 1. Нелинейные модели в классической теории поля

1.1 Электродинамика Максвелла

Электродинамика Максвелла является эталонной теорией, хорошо разработанной и проверенной экспериментально как на классическом, так и на квантовом уровне и используемой при решении множества фундаментальных и прикладных задач. Действие для этой теории может быть записано в виде [21], [22]:

$$S = \int d^4x L_{ED}, \quad (1.1)$$

где

$$L_{ED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ - тензор электромагнитного поля, A_μ - 4-потенциал электромагнитного поля. Здесь и далее греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; латинские - 1, 2, 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Запятой перед индексом обозначается производная по соответствующей координате: $f_{,\mu} \equiv \partial_\mu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

Лагранжиан (1.2) инвариантен относительно калибровочного преобразования полей:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - f_{,\mu}, \quad (1.3)$$

где f - произвольная функция 4-координат. Уравнения Эйлера-Лагранжа для него выглядят следующим образом:

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Дополненные соотношением, следующим непосредственно из определения тензора $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = 0, \quad (1.5)$$

они образуют систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Записанные в терминах физических полей, они выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} - напряженности электрического и магнитного полей, соответственно.

Уравнения движения пробного заряда в электромагнитном поле записываются в следующем виде, известном под названием силы Лоренца:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}u_\nu, \quad (1.7)$$

где e - электрический заряд пробной частицы, u_ν - 4-вектор скорости.

В электростатическом случае (при условиях $\partial_0 A_\mu = 0$, $\vec{A} = 0$, $A_0 \neq 0$) уравнения (1.4) принимают вид уравнения Лапласа на потенциал A_0 :

$$\Delta A_0 = 0. \quad (1.8)$$

При дополнительном условии центральной симметрии и выборе начала отсчета таким образом, чтобы потенциал поля стремился к нулю на пространственной бесконечности уравнение (1.8) имеет единственное решение, известное под названием Кулоновского поля:

$$A_0 = \frac{\tilde{Q}}{r}, \quad (1.9)$$

где \tilde{Q} - произвольная константа, обычно интерпретируемая как полный электрический заряд источника поля. Потенциал такого вида описывает поле любой системы со сферически-симметричным распределением заряда во внешней области пространства, а также в первом порядке мультипольного разложения по параметру относительного размера - поле любой системы островного типа. Поскольку к такому типу систем относятся все элементарные частицы, ядра атомов и ионы, этот потенциал имеет широчайшее применение в физике микромира.

Выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния на данном потенциале носит название формулы Резерфорда и, вычисленное как в классическом, так и квантовом приближениях, даётся одной и той же широко известной формулой:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \left(\frac{me\tilde{Q}}{2p^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (1.10)$$

где m - масса, p - импульс, e - заряд пробной частицы; θ - угол между направлениями импульса до и после рассеяния.

Уровни энергии связанных состояний пробной частицы в таком потенциале находятся из стационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (1.11)$$

как собственные значения оператора Гамильтона с потенциалом (1.9):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{e\tilde{Q}}{r} \quad (1.12)$$

(связанные состояния существуют, только если произведение $e\tilde{Q} < 0$). Точные значения уровней энергии даются формулой:

$$E_n = -\frac{me^2\tilde{Q}^2}{2\hbar^2n^2}, \quad (1.13)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ - главное квантовое число. В данную формулу не входит орбитальное квантовое число, то есть, значение энергии уровней не зависит от орбитального момента частицы. Этот факт - так называемое случайное вырождение уровней - уникальная особенность, характерная только для кулоновского и гармонического потенциалов.

Соответствующие этим уровням нормированные волновые функции атома водорода даются выражением:

$$\psi_{nl}^m = Y_l^m(\vartheta, \varphi) R_{nl}(r), \quad (1.14)$$

где $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ - ортонормированные собственные функции угловой части оператора Лапласа (шаровые функции), а $R_{nl}(r)$ - нормированные радиальные волновые функции, выражаемые следующей формулой:

$$R_{nl} = \left(\frac{e\tilde{Q}m}{\hbar n} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4}{n(n-l-1)!(n+l)!}} \left(\frac{2e\tilde{Q}mr}{\hbar^2 n} \right)^l \cdot e^{-\frac{e\tilde{Q}mr}{\hbar^2 n}} \cdot Q_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2e\tilde{Q}mr}{\hbar^2 n} \right), \quad (1.15)$$

где $Q_n^s(x)$ - обобщенные полиномы Лагерра, явный вид которых может быть найден из выражения:

$$Q_n^s(x) = x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{s+n} e^{-x}). \quad (1.16)$$

1.2 Первые модели нелинейной электродинамики: теория Борна-Инфельда и Гейзенберга - Эйлера

Достоинство описанной в предыдущем разделе электродинамики Максвелла состоит в том, что её уравнения линейны относительно всех входящих в них функций, описывающих физические поля. Линейность и релятивистская инвариантность уравнений, а также беспрецедентно точное экспериментальное подтверждение её выводов, позволяют классической электродинамике оставаться централь-

ным инструментом описания электромагнитных взаимодействий на протяжении уже более полутора веков. Однако, уже в течение нескольких десятков лет после её создания были высказаны соображения, согласно которым классическая электродинамика может рассматриваться только в качестве приближенного описания электромагнитного взаимодействия в случае относительно малой интенсивности полей, подобно тому, как классическая механика Ньютона является лишь приближенным описанием движения и гравитации в случае малых скоростей и малой интенсивности взаимодействия.

Рассмотрим несколько аргументов в пользу введения более общей теории.

Первый был высказан Борном и Инфельдом в статье 1934 года [23]. Он заключается в том, что теория Максвелла нарушает принцип финитности, согласно которому в рамках удовлетворительно построенной теории физические величины не должны иметь возможности принимать бесконечные значения. Авторы привели в пример специальную теорию относительности, формулы которой подразумевают фундаментальную ограниченность скоростей, и общую теорию относительности, позволяющую описать пространственно замкнутую Вселенную. Борн и Инфельд предложили записать действие электродинамики в виде

$$\mathcal{L}_{BI} = -b^2 \left(\sqrt{-|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} - \sqrt{-|g_{\mu\nu}|} \right) \quad (1.17)$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор, $f_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор, описывающий электромагнитное поле, b - параметр. Вертикальные скобки означают взятие определителя. В случае плоской метрики в декартовых координатах $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ лагранжиан записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_{BI} = -b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2b^2}I_1 - \frac{1}{4b^4}I_2^2} - 1 \right) \quad (1.18)$$

где

$$I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) \quad (1.19)$$

$$I_2 = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{E} \cdot \vec{H}) \quad (1.20)$$

- два независимых инварианта преобразований Лоренца, построенные из электромагнитных полей, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ - символ Леви-Чивиты.

Приведем здесь также разложение лагранжиана электродинамики Борна-Инфельда по степеням I_1 и I_2 до второго порядка включительно:

$$L_{BI} = -\frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{8b^2} \left(I_2^2 + \frac{1}{2}I_1^2 \right) \quad (1.21)$$

Первый член этого разложения совпадает с лагранжианом классической электродинамики, остальные являются поправочными к нему. Для обеспечения согласия с экспериментом параметр b , имеющий размерность напряженности поля, должен быть достаточно велик. В работе Борна и Инфельда его величина была оценена в 10^{16} единиц СГСЭ.

Важным следствием нелинейной электродинамики Борна-Инфельда является вид решения её уравнений для сферически-симметричного электростатического поля в вакууме. Потенциал электрического поля описывается следующим интегралом:

$$A_0(r) = \frac{Q}{r_0} \int_{\frac{r}{r_0}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad (1.22)$$

где $r_0 = \sqrt{\frac{Q}{b}}$. Данный интеграл может быть выражен через эллиптический интеграл первого рода путем тригонометрической замены. Важно то, что приведенный потенциал, в отличие от соответствующего ему в классической электродинамике кулоновского потенциала остается конечным во всем пространстве. Более наглядно это можно продемонстрировать, выписав выражение для (единственной) радиальной компоненты напряженности электрического поля:

$$E_r = \frac{Q}{r_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4}}. \quad (1.23)$$

Можно проверить, что не только абсолютная интенсивность, но и полная энергия электрического поля точечного заряда в этой версии электродинамики остаётся конечной величиной. В то же время, на больших расстояниях от источника поле неотличимо от кулоновского, создаваемого точечной частицей с зарядом Q . Ин-

интересный эффект проявляется при рассмотрении этого поля в области пространства, близкой к источнику. С одной стороны, на фундаментальном уровне это поле описывается решением вакуумных уравнений модифицированной нелинейной электродинамики. С другой стороны, если изучать эти поля методами классической Максвелловской электродинамики, мы должны будем сделать вывод о том, что они созданы зарядом, плотность которого непрерывно распределена по всему пространству в соответствии с законом

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi\rho. \quad (1.24)$$

В дальнейшем мы всегда будем проводить различие между этими двумя типами зарядов: фундаментальным, который является характеристикой гипотетической точечной частицы, создающей поле в рассматриваемой нелинейной теории, и эффективным, который необходимо ввести в рассмотрение, чтобы описать наблюдаемые поля с точки зрения классической теории.

В настоящее время активно исследуются и другие модели нелинейной электродинамики, подобные теории Борна-Инфельда. Широко распространены исследования логарифмической электродинамики, в которой динамика полей описывается лагранжианом следующего вида [24]:

$$\mathcal{L}_{LOG} = -b^2 \ln \left(1 + \frac{1}{b^2} I_1 - \frac{1}{2b^4} I_2^2 \right), \quad (1.25)$$

подобные теории с нулевым вкладом I_2 [25]:

$$\mathcal{L}_{LOG} = -\frac{b}{16\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{b} I_1 \right), \quad (1.26)$$

а также экспоненциальная электродинамика, лагранжиан которой имеет следующий вид [26]:

$$\mathcal{L}_{EXP} = -I_1 e^{-bI_1}. \quad (1.27)$$

Второй аргумент в пользу введения нелинейной электродинамики был предложен в 1936 году Гейзенбергом и Эйлером, рассмотревшими поляризацию вакуума путем рождения виртуальных пар электронов и позитронов в поле точечного

электрона согласно теории Дирака [27]. Они получили модель электромагнитного поля, описываемого лагранжианом следующего вида:

$$\mathcal{L}_{HE} = -\frac{1}{4}I_1 + \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left[i\eta^2 \frac{I_2}{2} \frac{\cos\left(\frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{-\frac{1}{2}I_1 + iI_2}\right) + c.c.}{\cos\left(\frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{-\frac{1}{2}I_1 + iI_2}\right) - c.c.} + |E_0|^2 + \frac{\eta^2}{6}I_1 \right], \quad (1.28)$$

где I_1, I_2 - упомянутые выше инварианты электромагнитного поля, $|E_0| = \frac{m^2 c^3}{e\hbar}$ - критическая интенсивность электрического поля, *c.c.* означает комплексно сопряженное слагаемое.

В разложении до второго порядка по степеням I_1, I_2 данный лагранжиан имеет вид

$$L_{HE} = -\frac{1}{4}I_1 + \frac{\pi^2 \alpha}{45 E_k^2} (I_1^2 + 7I_2^2), \quad (1.29)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ - постоянная тонкой структуры. Нетрудно заметить, что коэффициенты этого разложения отличаются от полученных в теории Борна-Инфельда.

Поэтому, имея в виду различные возможности построения нелинейной электродинамики, рассмотрим третий аргумент: алгебраический. А именно, на время абстрагируемся от экспериментальных оснований теории Максвелла и посмотрим на задачу построения лагранжиана электромагнитного поля с чисто теоретической точки зрения. Лагранжиан любой теории должен быть вещественной скалярной величиной, инвариантной относительно преобразований Лоренца. Все инварианты преобразований Лоренца, построенные из напряженностей электрического и магнитного полей, выражаются через выписанные выше величины I_1 и I_2 , квадратичные по интенсивности указанных полей. Поэтому, в предположении о том, что рассматриваемые поля малы по сравнению с некой характерной величиной, можно выписать лагранжиан электродинамики в виде разложения в ряд Тейлора по степеням I_1 и I_2 . Инвариант I_2 является не скалярной, а псевдоскалярной величиной (он меняет знак при отражениях системы координат), поэтому может войти в разложение только в чётной степени. Таким образом, с точностью до второго порядка мы получаем лагранжиан, обобщающий низшие порядки разложения как

лагранжиана Борна-Инфельда, так и Гейзенберга-Эйлера:

$$L_{NE} = -\frac{1}{4}I_1 + aI_1^2 + bI_2^2, \quad (1.30)$$

где a и b - произвольные константы. Этот лагранжиан представляет наиболее общий вариант нелинейной электродинамики в приближении слабых полей, не включающий дополнительных полей, кроме электромагнитного. Другие способы построения нелинейных моделей электродинамики, включающих дополнительные скалярные и псевдоскалярные поля, будут рассмотрены ниже.

1.3 Общая Теория Относительности Эйнштейна

Общая Теория Относительности Эйнштейна (ОТО) - теория, описывающая гравитационное поле [22], [28]. Для настоящей работы, посвященной изучению моделей электродинамики, она представляет интерес с трех точек зрения. Во-первых, это нелинейная теория, обобщающая классическую теорию гравитации Ньютона путем замены скалярного потенциала на тензорный с десятью независимыми компонентами. В этом смысле её рассмотрение на методологическом уровне до некоторой степени аналогично введению в описание новых полей, а значит, программе, в рамках которой построены модели, изучаемые в настоящей работе. Во-вторых, изучаемые нами модели происходят из теорий Великого Объединения, которые являются попытками единого описания фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию. Некоторые из них, такие как теория Калуцы-Клейна, строятся по образцу ОТО [5]. Наконец, благодаря установленной дуальности между одной из моделей нелинейной электродинамики и стационарной ОТО стало возможно применять методы ОТО для нахождения преобразований симметрии и точных решений в упомянутой модели электродинамики с дополнительным скалярным полем. Этот метод позволил получить самые значимые результаты настоящей работы.

Действие ОТО в вакууме имеет вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.31)$$

Ниже следует цепочка равенств, выражающих величины, стоящие под интегралом, через компоненты четырехмерной пространственно-временной метрики. Рассмотрим интервал между двумя событиями:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.32)$$

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ - метрический тензор пространства-времени. Величина g , входящая в интеграл действия, является определителем матрицы $g_{\mu\nu}$. Величина R называется скаляром кривизны и представляет собой след тензора Риччи:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

который, в свою очередь, выражается через символы Кристоффеля:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta. \quad (1.34)$$

Последние, наконец, зависят от компонент метрического тензора:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\sigma} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\rho}) \quad (1.35)$$

Варьирование действия (1.31) приводит к следующим уравнениям на компоненты метрики, известным как вакуумные уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.36)$$

Точное решение этих уравнений в общем виде невозможно при современном развитии математических методов, однако различными путями получены многочисленные частные решения.

Уравнениями движения пробной частицы в ОТО являются уравнения геодезических линий в 4-пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu u^\nu u^\sigma = 0. \quad (1.37)$$

Рассмотрим Ньютонов предел ОТО, для чего будем считать поля не зависящими от времени и слабо изменяющимися в пространстве. Это значит, что все

производные по x_0 в выражениях выше будут равны нулю, а производные по пространственным координатам будем считать величинами первого порядка малости. Тогда все компоненты символов Кристоффеля и все пространственные компоненты скоростей также являются величинами первого порядка малости, и если пренебречь слагаемыми более высоких порядков, пространственные составляющие уравнения геодезической можно переписать в виде

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{00}^i (u^0)^2 = 0. \quad (1.38)$$

При указанных условиях $u_0 \approx 1$, $ds \approx dx^0$, и после опускания индексов и подстановки явного выражения для Γ_{00}^i через компоненты метрического тензора получим формулу

$$\frac{du_i}{dx^0} = -\frac{1}{2} \frac{dg_{00}}{dx^m}, \quad (1.39)$$

из которой видно, что ускорение пробной частицы пропорционально градиенту нулевой компоненты метрического тензора, которая, таким образом, играет роль потенциала Ньютоновского гравитационного поля.

Выписав при тех же условиях выражение для нулевой компоненты тензора Риччи

$$R_{00} = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^k}, \quad (1.40)$$

и подставив его в уравнения Эйнштейна, видим, что этот потенциал при тех же условиях удовлетворяет уравнению Лапласа, а значит, имеет вид Кулоновского (или, что правильнее с исторической точки зрения, Ньютоновского) поля. Таким образом, ОТО полностью повторяет результаты классической теории гравитации Ньютона в границах применимости последней, то есть, при описании стационарных полей малой интенсивности. Однако, нам более интересен другой момент. Иногда можно услышать мнения о том, что введение дополнительных полей в классические теории ненужно, вредно и излишне. Что теория должна максимально экономно описывать результаты экспериментов, и это всё, что от неё требуется. На это можно ответить, приведя пример теории Эйнштейна. Для описания гравитации Эйнштейн ввел вместо одного Ньютоновского скалярного поля g_{00} тензорное поле с десятью (!) независимыми компонентами, подчиняющееся чрез-

вычайно сложным нелинейным уравнениям. Можно быть абсолютно уверенным, что для объяснения наблюдаемых отклонений от гравитации Ньютона, таких, как аномальная прецессия Меркурия, гравитационное преломление света, расширение Вселенной и гравитационное замедление времени, можно было бы построить теорию, включающую гораздо меньшее число дополнительных полей, чем целых 9. Но в теоретической физике предпочтение обычно отдаётся не "наиболее экономным" в самом наивном понимании теориям, а тем, которые также имеют наиболее наглядную физическую интерпретацию, базируются на понятных предположениях и имеют наибольшие возможности по выводу наблюдаемых следствий. Такие теории заслуживают самого пристального внимания и изучения.

1.3.1 Метод симметрий в стационарной ОТО

Четырёхмерную метрику можно параметризовать в следующем виде [29]:

$$ds_4^2 = f(dt + \omega_k dx^k)^2 - f^{-1} ds_3^2, \quad (1.41)$$

где

$$ds_3^2 = h_{kl} dx^k dx^l \quad (1.42)$$

-трехмерный интервал. Можно показать, что в стационарном случае уравнения, получающиеся при варьировании действия вида (1.31) для данной метрики, эквивалентны условиям стационарности действия

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{h} (R_3 + \tilde{L}_{GR}), \quad (1.43)$$

где h - определитель матрицы h_{kl} , R_3 - трехмерный скаляр кривизны, вычисленный по метрике h_{kl} , а \tilde{L}_{GR} даётся выражением:

$$\tilde{L}_{GR} = \frac{1}{2} f^{-2} [(\nabla f)^2 + (\nabla \chi)^2], \quad (1.44)$$

где

$$\nabla \chi = -f^2 \nabla \times \vec{\omega}. \quad (1.45)$$

Таким образом, уравнения на компоненты h_{kl} и уравнения на f и $\vec{\omega}$ образуют две независимые системы. Для удобства дальнейшего изучения введем комплексный потенциал Эрнста:

$$\mathcal{E} = f + i\chi. \quad (1.46)$$

В его терминах лагранжиан (1.44) имеет вид (Эрнст):

$$\tilde{L}_{GR} = \frac{\nabla\mathcal{E}\nabla\mathcal{E}^*}{2(\text{Re}\mathcal{E})^2}, \quad (1.47)$$

где символом "*" отмечено комплексное сопряжение.

Полная группа непрерывных симметрий этого лагранжиана содержит следующие преобразования:

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + i\lambda_1 \quad (1.48)$$

$$\mathcal{E} \rightarrow e^{\lambda_2}\mathcal{E} \quad (1.49)$$

$$\mathcal{E}^{-1} \rightarrow \mathcal{E}^{-1} + i\lambda_3 \quad (1.50)$$

где λ_k - вещественные параметры. Первые два преобразования тривиальны, а последнее, известное как преобразование Элерса, оказывается полезным для генерации точных решений. Кроме этих непрерывных симметрий, лагранжиан инвариантен относительно дискретного преобразования $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{-1}$.

Для практических применений удобно скомбинировать три преобразования (1.48) - (1.50) в одно, потребовав дополнительно, чтобы поля, исчезающие на пространственной бесконечности, сохраняли это свойство и после трансформации. Это условие будет выполнено при последовательном применении сначала преобразования (1.50) с параметром $\lambda_3 = \Lambda$, потом преобразования (1.49) с параметром $\lambda_2 = 1 + \Lambda^2$, и преобразования (1.48) с параметром $\lambda_1 = \Lambda$. В результате мы получим однопараметрическую заряжающую (по Киннерсли) подгруппу преобразований симметрии:

$$\mathcal{E} \rightarrow \frac{\mathcal{E} + i\Lambda}{1 + i\Lambda\mathcal{E}}. \quad (1.51)$$

Это преобразование носит название нормированного преобразования Элерса. Поскольку преобразования симметрии лагранжиана оставляют неизменной форму уравнений движения, они переводят одни решения этих уравнений в другие. Поэтому, используя в качестве "затравочных" относительно простые частные решения уравнений, и применяя к ним указанные преобразования, можно в результате получать более сложные классы решений, содержащих в качестве параметра константу преобразования Λ . Подробное изложение метода симметрий в теории дифференциальных уравнений можно найти в [30]. Прямое нахождение таких решений обычными методами чаще всего бывает практически невозможно в силу большой сложности и нелинейности уравнений.

1.3.2 Аксиально-симметричные точные решения в ОТО

Нелинейные уравнения общей теории относительности в вакууме в частном случае статического сферически-симметричного поля, создаваемого покоящимся сферически-симметричным источником, допускают непосредственное точное решение, известное под названием метрики Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.52)$$

Здесь m - масса тела, создающего гравитационное поле. Единицы измерения выбраны так, чтобы гравитационная постоянная была равна единице. Это решение при рассмотрении соответствующих геодезических обобщает закон всемирного тяготения Ньютона. Интересной особенностью метрики Шварцшильда является то, что при $r = 2m$ компоненты метрического тензора g_{00} и g_{11} обращаются, соответственно, в ноль и бесконечность. При этом время, за которое пробная частица, падающая из внешней области на центр под действием сил тяготения, достигает сферы радиуса $2m$, также стремится к бесконечности. Поэтому такая сфера получила название горизонта событий, её радиус называют радиусом Шварцшильда, а любой физический объект, размер которого меньше соответствующего радиуса Шварцшильда, называют чёрной дырой.

В случае, если гравитационное поле создаётся вращающимся телом, имеющим массу m и момент вращения M , оно описывается метрикой Керра [22], [31]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r^2 - 2mr + a^2)} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4mra}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta d\varphi dt, \quad (1.53)$$

где $a = \frac{M}{m}$. При $a = 0$ метрика Керра переходит в метрику Шварцшильда.

Другое точное решение, обобщающее метрику Шварцшильда, известно под названием метрики Тауба-НУТ (сокращение НУТ обозначает фамилии его первооткрывателей Ньюмана, Унти и Тамбурино). Элемент интервала в этой метрике записывается следующим образом [32]:

$$ds^2 = -(r^2 + b^2) \left[\frac{dr^2}{r^2 - 2Mr - b^2} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right] + \frac{r^2 - 2Mr - b^2}{r^2 + b^2} \left[dt + 4b \sin^2 \frac{\theta}{2} d\phi \right]^2. \quad (1.54)$$

Константа b имеет название параметра НУТ, и при обращении его в нуль метрика переходит в метрику Шварцшильда.

Точным решением уравнений Эйнштейна является также комбинация двух последних решений, известная под названием метрики Керра-НУТ. Эта метрика задаёт элементарный интервал следующего вида [33]:

$$-ds^2 = \frac{\omega}{\Delta} dr^2 + \omega d\theta^2 - \frac{1}{\omega} \left\{ (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) d\tau^2 - [4\Delta b \cos \theta - 4a \sin^2 \theta (mr + b^2)] d\tau d\varphi + [\Delta (a \sin^2 \theta + 2b \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta (r^2 + b^2 + a^2)^2] d\varphi^2 \right\}, \quad (1.55)$$

где $\tau = -t + 2a\varphi$, $\omega = r^2 + (b - a \cos \theta)^2$, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 - b^2$. Константа a - параметр Керра, при её обращении в нуль эта метрика переходит в метрику Тауба-НУТ, константа b - параметр НУТ, при её обращении в нуль мы получим метрику Керра.

1.4 Теории Великого Объединения и электродинамика с дополнительными полями

1.4.1 Теория Калуцы-Клейна

Объединить гравитационное и электромагнитное взаимодействия в рамках единой теории оказалось возможно, если рассмотреть действие ОТО (1.31) для метрики пятимерного пространства-времени [5]. Метрический тензор в пяти измерениях удобно параметризовать в следующем виде:

$$(g_{MN}) = \varphi^{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + k^2 \varphi A_\mu A_\nu & k \varphi A_\mu \\ k \varphi A_\nu & \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

где индексы M, N принимают значения от 0 до 4. В этот тензор входят $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор четырехмерного пространства-времени, A_μ - некоторый 4-вектор, φ - новое скалярное поле. Константа k принимает произвольные значения. Для объяснения того факта, что пятое измерение никак не проявляет себя в наблюдаемом мире, нужно потребовать, чтобы все компоненты метрического тензора не зависели от пятой координаты: $\partial_4 = 0$. Далее можно показать, что при таком предположении пятимерные уравнения Эйнштейна

$$R_{MN} = 0 \quad (1.57)$$

совпадают с уравнениями Эйлера-Лагранжа для действия следующего вида:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \varphi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{6k^2} \frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{\varphi^2} \right), \quad (1.58)$$

где тензор $F_{\mu\nu}$ определён через компоненты 4-вектора A_μ по тем же формулам, по которым тензор электромагнитного поля определен через компоненты 4-потенциала электромагнитного поля. Если теперь интерпретировать вектор A_μ как потенциал электромагнитного поля, то мы увидим, что гравитация в пяти измерениях при условии независимости полей от пятой координаты может описывать динамику четырехмерного гравитационного поля, взаимодействующего с электромагнитным

полем и неким новым дополнительным скалярным полем φ , причём последнее выступает во втором слагаемом в качестве константы связи между гравитационным и электромагнитным полями. Если положить $\varphi = 1$, мы получим классическую теорию Эйнштейна-Максвелла, описывающую взаимодействие гравитационного и электромагнитного полей в рамках Общей теории относительности. Однако, такая фиксация одной компоненты пятимерного метрического тензора кажется достаточно искусственной, поэтому мы в рамках настоящей работы будем считать компоненту φ независимым динамическим полем. Для упрощения записи лагранжиана удобно выполнить замену $2\sqrt{3}k = \alpha$, $\varphi = e^{\alpha\phi}$:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} e^{\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \right). \quad (1.59)$$

Определенное таким образом поле ϕ называется дилатонным полем или дилатоном. Одним из предметов изучения в настоящей работе являлась электродинамика Максвелла с дилатоном на плоском пространственно-временном фоне, которая получается из представленной здесь теории при $R = 0$. В третьем частном случае, при отсутствии электромагнитного поля, действие такого вида изучается в теории гравитации Бранса-Дике, в рамках которой рассматривается метрика четырехмерного пространства-времени, взаимодействующая со скалярным полем. В настоящее время теория Бранса-Дике активно применяется для изучения различных космологических моделей [34].

1.5 Аксионы

Аксионы впервые были добавлены в лагранжиан квантовой хромодинамики в рамках одного из способов решения так называемой «сильной CP-проблемы» [35]. Под этим названием известна задача разрешения противоречия между наблюдаемым нарушением CP-чётности в распадах некоторых мезонов и отсутствием явного её нарушения в квантовой хромодинамике, которая является на сегодняшний день самой распространённой теорией описания сильного взаимодействия. Подробное описание технических аспектов этой проблемы выходит далеко за рамки настоящей работы, поэтому ограничимся здесь только небольшой исторической

справкой.

В 1956 году было показано, что в слабых распадах не сохраняется пространственная чётность (Р-чётность), то есть, физические процессы, обусловленные слабым взаимодействием, при пространственном отражении переходят в процессы, невозможные в реальном мире [36]. В то же время, было показано, что симметрия сохраняется, если вместе с операцией пространственного отражения применить операцию зарядового сопряжения (С-преобразование), то есть, заменить частицы на античастицы. Инвариантность физических процессов относительно комбинации преобразований пространственной симметрии и зарядового сопряжения называется СР-инвариантностью. Комбинированная СР-инвариантность считалась точной симметрией до 1964 года, когда в экспериментах по наблюдению распадов каонов были получены косвенные указания на её нарушение [37]. Это открытие является важным не только само по себе, но и в контексте того, что для квантовой теории поля принципиально сохранение комбинированной СРТ-чётности, то есть, симметрии относительно одновременного пространственного отражения, зарядового сопряжения и обращения времени. Если СРТ-чётность сохраняется, а СР-чётность - нет, то, следовательно, не является симметрией и Т-преобразование, обращение времени. А значит, направление времени важно не только в макроскопических теориях, таких, как термодинамика, но и в физике элементарных частиц [38]. Прямое подтверждение несохранения СР-чётности было получено в 1999 году в экспериментах с каонами и в 2001 году в экспериментах с В-мезонами. В то же время, теоретическое описание несохранения СР-чётности в физике сильного взаимодействия остаётся серьёзной проблемой. Общее нарушение СР-чётности в квантовой хромодинамике (подобное нарушению пространственной чётности в теории электрослабого взаимодействия) должно приводить к эффектам, не наблюдаемым в реальном мире, таким, как большая величина дипольного момента нейтрона. Существует способ внести в квантовую хромодинамику слабое нарушение СР-инвариантности путём введения в лагранжиан дополнительных слагаемых, не обладающих такой симметрией. Но в этом случае встаёт вопрос подбора точного значения параметра, определяющего величину нарушения симметрии. Вопрос о том, почему этот параметр, «вакуумный угол θ », имеет столь малое значение, что эффекты нарушения СР-симметрии проявляются в природе настолько ред-

ко, как это наблюдалось в экспериментах, называется «сильной CP-проблемой». Одно из возможных решений этой проблемы было предложено в 1977 году Печчи и Квинн, которые придали параметру θ смысл нового динамического поля, имеющего, подобно полю Хиггса, ненулевое вакуумное среднее, которое и определяет величину нарушения симметрии [39]. В следующем году Вильчек рассмотрел свойства частицы, связанной с этим полем, назвал её аксионом и оценил её массу в 100 кЭв [40]. С тех пор было предпринято несколько неудачных попыток прямого обнаружения аксионов. Большинство экспериментов по детектированию аксионов используют гипотетический процесс превращения аксионов в фотоны в сильных магнитных полях. На этом принципе основаны эксперименты ADMX, CAST, HAYSTAC и CULTASK. Две другие возможности наблюдения аксионов связаны с их взаимодействием с глюонным полем (что может выражаться в появлении дипольных моментов у атомных ядер) и со спинами частиц и атомных ядер. На последнем эффекте основан проект эксперимента CASPEr [41], [42]. По современным оценкам, масса аксионов составляет не более, чем доли электрон-Вольта. Массивные аксионы являются одним из самых привлекательных кандидатов на роль тёмной материи во Вселенной, так как их наличие решает сразу две проблемы: проблему скрытой массы во Вселенной и проблему несохранения CP-чётности в сильном взаимодействии. Предметом изучения в настоящей работе было взаимодействие аксионов с фотонами, благодаря которому лагранжиан классической электродинамики приобретает дополнительные слагаемые. В результате получается лагранжиан Максвелловской электродинамики с аксионом следующего вида:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\gamma\chi\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + V(\chi) \quad (1.60)$$

где χ - аксион, γ - константа аксион-Максвелловской связи, $V(\chi)$ - потенциал самодействия аксиона. Благодаря аксиону, инварианты электромагнитного поля I_1 и I_2 входят в лагранжиан практически одинаковым образом. Для того, чтобы добиться полного единообразия, понадобится рассмотреть наравне с аксионом и дилатонное поле. В настоящее время существуют различные оценки величины константы γ , что позволяет нам в рамках этой работы считать её произвольной постоянной.

1.6 Дилатон-аксионное обобщение классической электродинамики

Выше были рассмотрены несколько способов построения моделей нелинейной электродинамики, в том числе, включающих дополнительные скалярные и псевдоскалярные поля. Нелинейная электродинамика довольно общего вида может быть построена и в результате следующего ниже рассуждения. Известно, что из компонент электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ может быть построено две независимые комбинации, сохраняющиеся при преобразованиях Лоренца - инварианты I_1 и I_2 . Оба эти инварианта имеют размерность энергии; первый из них является скаляром, а второй - псевдоскаляром. Для введения в лагранжиан симметричным образом второго инварианта необходимо домножить его на дополнительное псевдоскалярное поле \varkappa , называемое аксионом. Аналогично один из самых простых способов обобщения слагаемого с инвариантом I_1 - домножение его на функцию некоего скалярного поля ϕ . Если это скалярное поле допускает преобразование

$$\phi \rightarrow \phi + \epsilon, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu e^{\alpha\epsilon}, \quad (1.61)$$

где ϵ - вещественная константа, сохраняющее форму лагранжиана, его называют дилатоном. Мы в настоящий момент рассмотрим более общий вид лагранжиана, не ограничиваясь требованием конкретных преобразований симметрии. Также в лагранжиан необходимо ввести кинетические слагаемые, описывающие динамику свободных полей дилатона и аксиона. Полученный обобщенный лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = 2 \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} g^2(\phi) \partial^\mu \varkappa \partial_\mu \varkappa - \frac{1}{4} \left(f^2(\phi) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \gamma \varkappa \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (1.62)$$

где \varkappa, ϕ - потенциалы аксионного и дилатонного полей; $g(\phi), f(\phi)$ - произвольные функции, γ - произвольная константа. Примечательно то, что лагранжиан подобного вида возникает при компактификации дополнительных измерений в десятимерной теории гетеротической струны, что повышает статус рассматриваемой

модели. В этом случае и аксион, и дилатон являются дополнительными полями типа полей Калуцы-Клейна [43].

Уравнения Эйлера-Лагранжа для выписанного лагранжиана:

$$4\partial^\mu \partial_\mu \phi - g(\phi)g'(\phi)\partial^\mu \varkappa \partial_\mu \varkappa + \frac{1}{2}f(\phi)f'(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.63)$$

$$\partial_\mu (g^2(\phi)\partial^\mu \varkappa) + \frac{1}{4}\gamma F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.64)$$

$$\partial_\nu (f^2(\phi)F^{\mu\nu} + \gamma\varkappa\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0 \quad (1.65)$$

Штрих над функцией означает её производную по единственному аргументу.

1.6.1 Компактификация лагранжиана электродинамики с аксионом и дилатоном в стационарном случае

Рассмотрим уравнения движения в стационарном случае: будем считать все производные по x^0 равными нулю. Уравнение (1.65) при $\mu = t$ в обозначениях из математического анализа запишется в виде:

$$-\text{rot}[-f^2(\phi)\text{rot}(\vec{A}) + \gamma\varkappa\text{grad} A_0] = 0. \quad (1.66)$$

Оно выполняется тождественно, если выражение в квадратных скобках является градиентом некоторой функции u :

$$\text{grad} u = -f^2(\phi)\text{rot}(\vec{A}) + \gamma\varkappa\text{grad} A_0. \quad (1.67)$$

Уравнение (1.65) при $\mu = 0$:

$$\text{div} [-f^2(\phi)\text{grad} A_0 + \gamma\varkappa\text{rot} \vec{A}] = 0. \quad (1.68)$$

Уравнение (1.63):

$$4\Delta\phi - g(\phi)g'(\phi)(\text{grad} \varkappa)^2 - f(\phi)f'(\phi)(\text{grad} A_0)^2 + f(\phi)f'(\phi)(\text{rot} \vec{A})^2 = 0. \quad (1.69)$$

Уравнение (1.64):

$$\operatorname{div} (g^2(\phi) \operatorname{grad} \varkappa) + \gamma \operatorname{grad}(A_0) \operatorname{rot}(\vec{A}) = 0. \quad (1.70)$$

Подставляя в три последние уравнения значение

$$\operatorname{rot}(\vec{A}) = f^{-2}(\phi)[\gamma \varkappa \operatorname{grad} v - \operatorname{grad} u], \quad (1.71)$$

полученное из соотношения (1.67); здесь и далее для удобства $A_0 \equiv v$, получаем:

$$4\nabla^2\phi - g(\phi)g'(\phi)(\nabla\varkappa)^2 - f(\phi)f'(\phi)(\nabla v)^2 + f^{-3}(\phi)f'(\phi)(\gamma\varkappa\nabla v - \nabla u)^2 = 0, \quad (1.72)$$

$$\nabla(g^2(\phi)\nabla\varkappa) + \gamma^2\varkappa f^{-2}(\phi)(\nabla v)^2 - \gamma f^{-2}(\phi)\nabla u\nabla v = 0, \quad (1.73)$$

$$\nabla \left[f^2(\phi)\nabla v - \gamma\varkappa f^{-2}(\phi)(\gamma\varkappa\nabla v - \nabla u) \right] = 0. \quad (1.74)$$

Наконец, подействовав на соотношение (1.67) оператором дивергенции, получаем последнее уравнение трехмерной системы на функции ϕ , \varkappa , u и v :

$$\nabla \left[f^{-2}(\phi)(\gamma\varkappa\nabla v - \nabla u) \right] = 0 \quad (1.75)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что полученные уравнения являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$\mathcal{L}_3 = 2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}g^2(\phi)(\nabla\varkappa)^2 + \frac{1}{2}f^2(\phi)(\nabla v)^2 - \frac{1}{2}f^{-2}(\phi)(\gamma\varkappa\nabla v - \nabla u)^2. \quad (1.76)$$

\mathcal{L}_3 и входящие в него функции ϕ , \varkappa , u и v не зависят от времени.

В литературе чаще всего рассматривается частный случай $f(\phi) = e^{\alpha\phi}$, $g(\phi) = e^{\beta\phi}$, а также варианты модели с различными потенциалами самодействия аксионного и дилатонного полей, среди которых наиболее распространены модели с массивным дилатоном и массивным аксионом. В настоящей работе они не рассматривались.

Глава 2.

Дилатон-Максвелловская электродинамика (ДМЭ)

2.1 Дилатон-Максвелловская электродинамика в четырёх измерениях

В данной главе рассматривается частный случай теории (1.62), а именно, теория с одним дополнительным дилатонным полем:

$$L_4 = 2\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{4}e^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.77)$$

Мы рассматриваем дилатон-максвелловскую электродинамику на плоском фоне, без гравитации, в отличие от того, как это сделано в работах [44], [45], [46].

Различные варианты Теорий Великого Объединения [6], [7], содержащие дилатонное обобщение электродинамики, предсказывают разные значения константы связи α . В частности, из теории гетеротической струны следует значение $\alpha = 1$, из пятимерной теории Калуцы-Клейна $\alpha = \sqrt{3}$. В настоящей работе мы будем считать α произвольной константой.

Группа симметрий ДМЭ, кроме подгруппы преобразований Пуанкаре и калибровочной $U(1)$ симметрии (1.3), содержит еще преобразование дилатации (1.61). Это обстоятельство будет использовано при построении обобщения для силы Лоренца, действующей на пробный заряд, движущийся в полях ДМЭ.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (2.77) имеют вид:

$$4\partial_\nu\partial^\nu\phi + \frac{1}{2}\alpha e^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.78)$$

$$\partial_\nu(e^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.79)$$

Записанные в терминах физических полей \vec{E} , \vec{H} , ϕ , они представляют собой систему модифицированных уравнений Максвелла:

$$4\Box\phi = \alpha e^{-2\alpha\phi}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2), \quad (2.80)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 2\alpha(\vec{E} \cdot \operatorname{grad}\phi), \quad (2.81)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 2\alpha\left([\operatorname{grad}\phi \times \vec{H}] - \vec{E}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \quad (2.82)$$

Здесь единицы измерения времени выбраны таким образом, что $c = 1$. Оставшиеся два уравнения Максвелла, связанные со внутренними свойствами симметрии тензора $F_{\mu\nu}$, остаются в этом случае неизменными:

$$\operatorname{rot}\vec{E} - \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (2.83)$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0. \quad (2.84)$$

Можно сразу отметить, что из последнего уравнения следует, что в центрально-симметричном случае магнитное поле может либо отсутствовать, либо иметь кулоновский вид. Все полученные ниже решения обладают этим свойством.

2.2 Стационарная ДМЭ

Рассмотрим стационарный случай, то есть будем считать, что поля теории не зависят от времени: $\partial_0\phi = \partial_0A_\mu = 0$. При таком предположении система уравнений, эквивалентная (2.78), (2.79), записывается следующим образом:

$$\nabla(e^{-2\alpha\phi}\nabla A^0) = 0 \quad (2.85)$$

$$\nabla \times \left(e^{-2\alpha\phi} \nabla \times \vec{A} \right) = 0 \quad (2.86)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\alpha}{4} e^{-2\alpha\phi} \left((\nabla A^0)^2 - (\nabla \times \vec{A})^2 \right) = 0 \quad (2.87)$$

где ∇ - оператор градиента; $A^\mu = (A^0, \vec{A})$. Прямым вычислением можно проверить, что уравнения (2.85) - (2.87) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$L_3 = 2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\phi} \left[(\nabla A^0)^2 - (\nabla \times \vec{A})^2 \right]. \quad (2.88)$$

Альтернативное описание этой системы можно предложить, введя в соответствии с уравнением (2.86) скалярный потенциал магнитного поля:

$$\nabla u = -e^{-2\alpha\phi} \nabla \times \vec{A}. \quad (2.89)$$

Тогда вместо уравнения (2.86) мы получим соотношение

$$\nabla \left(e^{2\alpha\phi} \nabla u \right) = 0, \quad (2.90)$$

а уравнение (2.87) запишется в виде:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\alpha}{4} \left[e^{-2\alpha\phi} (\nabla v)^2 - e^{2\alpha\phi} (\nabla u)^2 \right] = 0, \quad (2.91)$$

где потенциал электрического поля для удобства обозначен $A^0 = v$. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнения (2.85), (2.90), (2.91) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$\tilde{L}_3 = 2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \left[e^{-2\alpha\phi} (\nabla v)^2 + e^{2\alpha\phi} (\nabla u)^2 \right]. \quad (2.92)$$

Из этого выражения видно, что в терминах ϕ , v и u дилатон-максвелловская электродинамика представляет собой трехмерную сигма-модель на плоском фоне, нелинейную при $\alpha \neq 0$.

2.3 Общее гармоническое решение уравнений стационарной электродинамики Максвелла с дилатоном и интегрируемые частные случаи

Считая, что все поля зависят от одной гармонической функции $\lambda = \lambda(x^k)$ (где $k = 1, 2, 3$), то есть рассматривая специальный случай с $\phi = \phi(\lambda)$, $u = u(\lambda)$, $v = v(\lambda)$ и

$$\Delta\lambda = 0, \quad (2.93)$$

приводим систему уравнений (2.85), (2.90), (2.91) к виду

$$(e^{-2\alpha\phi}v')' = 0, \quad (2.94)$$

$$(e^{2\alpha\phi}u')' = 0, \quad (2.95)$$

$$\phi'' - \frac{\alpha}{4} \left[e^{-2\alpha\phi} (v')^2 - e^{2\alpha\phi} (u')^2 \right] = 0, \quad (2.96)$$

где штрих означает производную по λ . Для этой системы можно выписать три интеграла движения

$$e^{-2\alpha\phi}v' = C_1, \quad (2.97)$$

$$e^{2\alpha\phi}u' = C_2, \quad (2.98)$$

$$(\phi')^2 - \frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} - \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} = C_3, \quad (2.99)$$

где C_1 , C_2 и C_3 - произвольные вещественные константы. Рассматривая второй из этих интегралов и сравнивая его с выражением (2.89), делаем вывод, что магнитное поле имеет следующий вид:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -C_2 \nabla \lambda. \quad (2.100)$$

Общее решение уравнения (2.99) даётся интегралом

$$\lambda = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} + \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} + C_3}}. \quad (2.101)$$

Выполнив замену переменной $e^{\alpha\phi} = x$, можно представить данный интеграл в более удобном виде:

$$\lambda = \pm \frac{2}{\alpha|C_2|} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2}x^4 + \frac{4C_3}{C_2^2}x^2 + 1}}. \quad (2.102)$$

Производя дальнейшие преобразования, можно свести его к виду нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода. Конкретный вид требуемого преобразования зависит от значений входящих в интеграл параметров, поэтому далее будут рассмотрены три различных класса решений, выражаемых в терминах эллиптических функций Якоби, а ещё ниже будут представлены частные случаи, в которых результат интегрирования возможно выразить через элементарные функции.

2.4 Первый класс решений

Рассмотрим случай $4C_3^2 - C_1^2C_2^2 > 0$, $C_3 < 0$. Введём обозначение

$$A = \sqrt{\frac{-C_1^2}{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}}. \quad (2.103)$$

Замена переменной

$$Ax = z \quad (2.104)$$

приводит интеграл (2.102) к виду

$$\lambda = \pm \frac{2\sqrt{-2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}}{\alpha|C_1C_2|} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (2.105)$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}. \quad (2.106)$$

Запишем полученный интеграл в виде определённого интеграла с переменным верхним пределом следующим образом:

$$\frac{\pm\alpha|C_1C_2|}{2\sqrt{-2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}}\lambda + \Lambda_0 = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (2.107)$$

Правая часть полученного выражения представляет собой нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Обращением этого интеграла является одна из функций Якоби, известная под названием эллиптического синуса [47]:

$$z = sn\left(\pm\frac{\alpha|C_2|A}{2}\lambda + \Lambda_0, k\right). \quad (2.108)$$

Теперь, производя обратную замену переменных, получим явное выражение для дилатонного поля согласно формуле

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{A} \cdot sn\left(\pm\frac{\alpha|C_2|A}{2}\lambda + \Lambda_0, k\right). \quad (2.109)$$

Константу интегрирования Λ_0 можно зафиксировать, наложив естественное условие исчезновения поля ϕ при стремлении к нулю функции λ . Подставив значения $\phi = 0$ и $\lambda = 0$ в выражение (2.109), получим уравнение для определения константы Λ_0 следующего вида:

$$sn(\Lambda_0, k) = A. \quad (2.110)$$

Учитывая тот факт, что эллиптический синус является обращением нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода, получим явное выражение для константы Λ_0 :

$$\Lambda_0 = \int_0^A \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (2.111)$$

Далее решим уравнение (2.97) и найдём потенциал электрического поля $v(\lambda)$.

Для этого необходимо вычислить интеграл следующего вида:

$$v(\lambda) = \frac{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{-C_1} \int_0^\lambda sn^2 \left(\pm \frac{\alpha |C_2| A}{2} \lambda + \Lambda_0, k \right) d\lambda. \quad (2.112)$$

Пределы интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы сразу удовлетворить условию $v \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Выполнив замену переменной

$$\tau = \pm \frac{\alpha |C_2 C_1|}{2\sqrt{-2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} \lambda + \Lambda_0, \quad (2.113)$$

придём к выражению

$$v(\lambda) = \pm \frac{2 \left(-2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\alpha |C_1 C_2| C_1} \int_{\Lambda_0}^\tau sn^2(\tau, k) d\tau. \quad (2.114)$$

Это выражение может быть приведено к эквивалентной форме

$$v(\lambda) = -\frac{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1} \lambda \pm \frac{2\sqrt{-2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \int_{\Lambda_0}^\tau dn^2(\tau, k) d\tau, \quad (2.115)$$

где $dn(\tau, k)$ - ещё одна эллиптическая функция Якоби. Последний интеграл путём замены переменной $dn^2(\tau, k) = 1 - k^2 y^2$ может быть приведен к виду нормального эллиптического интеграла Лежандра II рода согласно формуле

$$\int_0^\tau dn^2(\tau, k) d\tau = \int_0^y \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy, \quad (2.116)$$

что позволяет нам записать окончательное выражение в следующем виде:

$$v(\lambda) = -\frac{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1} \lambda \pm \frac{2\sqrt{-2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \int_A^{sn(\tau, k)} \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy. \quad (2.117)$$

Особый интерес для изучения представляют поля, создаваемые центрально-симметричным источником. Они описываются формулами, которые получаются при подстановке вместо функции λ общего центрально-симметричного решения уравнения Лапласа с нулевой асимптотикой на бесконечности - кулоновского потенциала $\lambda = \frac{q}{r}$, где q - произвольная константа. Подставляя это выражение для функции λ в формулы для потенциалов v и ϕ , и раскладывая далее потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка включительно, получим эффективные заряды для каждого из полей: электрический $q_e = C_1 q$, магнитный $q_m = C_2 q$ и дилатонный $q_\phi = \pm \frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2} q$. В этом случае константа A определяется следующим выражением:

$$A = \sqrt{\frac{-2q_e^2}{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}}. \quad (2.118)$$

Соответствующие центрально-симметричные поля, записанные в терминах зарядов, описываются следующими формулами:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{A} \cdot sn(\tau, k), \quad (2.119)$$

$$v(\lambda) = -\frac{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}{2q_e} \frac{1}{r} \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{-4q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}}{\alpha q_e} \int_A^{sn(\tau, k)} \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy, \quad (2.120)$$

где

$$k^2 = \frac{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}, \quad (2.121)$$

$$\tau = \pm \frac{\alpha |q_e q_m|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{-4q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}} \cdot \frac{1}{r} + \Lambda_0, \quad (2.122)$$

и

$$\Lambda_0 = \int_0^A \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (2.123)$$

При значении эллиптического модуля $k = 1$, что соответствует $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$ (или $q_\phi = \frac{q_e + q_m}{2}$), а также при $k = 0$, что соответствует равенству нулю любой из констант C_1 или C_2 , эллиптические функции, входящие в запись решения, выражаются через элементарные тригонометрические и гиперболические функции, и после некоторых преобразований мы можем получить частные решения, рассмотренные ниже.

2.5 Второй класс решений

Рассмотрим случай $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 > 0$, $C_3 > 0$. Введём обозначение

$$A = \sqrt{\frac{C_1^2}{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}. \quad (2.124)$$

В этом случае замена переменной

$$Ax = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (2.125)$$

приводит интеграл (2.102) к следующему виду:

$$\lambda = \pm \frac{2\sqrt{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha|C_1 C_2|} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad (2.126)$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{2\sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}. \quad (2.127)$$

Отсюда, выполняя действия, аналогичные предпринятым в предыдущем разделе, получим выражение для z через λ :

$$z = sn\left(\pm \frac{\alpha|C_2|A}{2}\lambda + \Lambda_0, k\right). \quad (2.128)$$

Далее, путём обратной замены переменной, получим выражение для дилатонного поля ϕ следующего вида:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{A} \cdot sc\left(\pm \frac{\alpha|C_2|A}{2}\lambda + \Lambda_0, k\right). \quad (2.129)$$

Здесь $sc(\tau, k)$ - ещё одна эллиптическая функция Якоби [47]. Накладывая дополнительное требование $\phi \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, зафиксируем константу Λ_0 условием

$$sn(\Lambda_0, k) = B, \quad (2.130)$$

где мы ввели новое обозначение $B = \sqrt{\frac{C_1^2}{C_1^2 + 2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}$. Также можем получить следующее явное выражение:

$$\Lambda_0 = \int_0^B \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (2.131)$$

Потенциал электрического поля $v(\lambda)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$v(\lambda) = \frac{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1} \int_0^\lambda sc^2 \left(\pm \frac{\alpha |C_2| A}{2} \lambda + \Lambda_0, k \right) d\lambda. \quad (2.132)$$

Действуя по аналогии с первым разделом статьи, выполним замену переменной $\tau = \pm \frac{\alpha |C_2| A}{2} \lambda + \Lambda_0$, и далее, используя известную из теории эллиптических функций связь между различными интегралами $dn(u, k)sc(u, k) - (1 - k^2) \int_0^u sc^2(u, k) du = \int_0^u dn^2(u, k) du$, позволяющую привести интеграл к стандартному виду, получим окончательное выражение в форме

$$v(\lambda) = \pm \frac{2\sqrt{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \left(dn(\tau, k)sc(\tau, k) - \sqrt{\frac{C_1^2 C_2^2 + 2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_2^2 C_1^2 + 2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} - \int_{\Lambda_0}^{\tau} dn^2(\tau, k) d\tau \right) \quad (2.133)$$

или, записав интеграл в более привычной форме нормального эллиптического интеграла Лежандра, в следующем виде:

$$v(\lambda) = \pm \frac{2\sqrt{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}}{\alpha C_1} \left(dn(\tau, k)sc(\tau, k) - \sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2} \cdot \frac{C_2^2 + 2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}{C_1^2 + 2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2 C_2^2}}} - \int_B^{sn(\tau, k)} \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy \right). \quad (2.134)$$

Рассматривая центрально-симметричные поля по аналогии с первым разде-

лом статьи, вычислим эффективные заряды. Результат совпадает с полученным в первом разделе: $q_e = C_1 q$, $q_m = C_2 q$ и $q_\phi = \pm \frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2} q$. В этом случае константы A и B определяются следующими формулами:

$$A = \sqrt{\frac{2q_e^2}{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}}, \quad (2.135)$$

$$B = \sqrt{\frac{2q_e^2}{4q_\phi^2 + q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}}. \quad (2.136)$$

Центрально-симметричные поля, записанные в терминах этих зарядов, в этом случае описываются выражениями

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{A} \cdot sc(\tau, k), \quad (2.137)$$

$$v(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}}{\alpha q_e} \left(dn(\tau, k) sc(\tau, k) - \sqrt{\frac{q_e^2}{q_m^2} \cdot \frac{4q_\phi^2 - q_e^2 + q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}{4q_\phi^2 + q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}} - \int_B^{sn(\tau, k)} \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} dy \right), \quad (2.138)$$

где

$$k^2 = 2 \frac{\sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 + \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}, \quad (2.139)$$

$$\tau = \pm \frac{\alpha |q_e q_m|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2 - \sqrt{(4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2)^2 - 4q_e^2 q_m^2}}} \cdot \frac{1}{r} + \Lambda_0, \quad (2.140)$$

и

$$\Lambda_0 = \int_0^B \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (2.141)$$

Здесь при значении эллиптического модуля $k = 0$, что соответствует $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$ (или $q_\phi = \frac{q_e + q_m}{2}$), или при $k = 1$, что получается при равенстве нулю любой из констант C_1 или C_2 , после преобразований также можно получить простые частные случаи решения, выражаемые через элементарные функции.

2.6 Третий класс решений

Рассмотрим, наконец, случай $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 < 0$. В этом случае удобно преобразовать интеграл (2.102), разложив на множители многочлен под корнем следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \frac{2}{\alpha |C_1|} \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \frac{4C_3}{C_1^2} x^2 + \frac{C_2^2}{C_1^2}}} = \\ &= \pm \frac{2}{\alpha |C_1|} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - A \cdot x + \left|\frac{C_2}{C_1}\right|\right) \left(x^2 + A \cdot x + \left|\frac{C_2}{C_1}\right|\right)}}, \end{aligned} \quad (2.142)$$

где для сокращения записи введено обозначение $A = \frac{\sqrt{2}}{|C_1|} \sqrt{|C_1 C_2| - 2C_3}$. После этого замена переменной

$$x = \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|} \frac{1-t}{1+t} \quad (2.143)$$

приводит интеграл к виду

$$\lambda = \pm \frac{4}{\alpha \sqrt{2|C_1 C_2| + 4C_3}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1 + \frac{h}{g}t^2)(1 + \frac{g}{h}t^2)}}, \quad (2.144)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$h = 2\sqrt{|C_1 C_2|} + \sqrt{2|C_1 C_2| - 4C_3}, \quad (2.145)$$

$$g = 2\sqrt{|C_1 C_2|} - \sqrt{2|C_1 C_2| - 4C_3}. \quad (2.146)$$

Наконец, выполнив ещё одну замену согласно выражению

$$\sqrt{\frac{h}{g}}t = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (2.147)$$

приведем интеграл к виду нормального эллиптического интеграла Лежандра I рода:

$$\lambda = \mp \frac{4}{\alpha h} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad (2.148)$$

где $k^2 = 1 - (\frac{g}{h})^2$. Отсюда, переходя к определённому интегралу, обозначая константу интегрирования Λ_0 и выполняя обратную замену переменной, получим решение для дилатонного поля ϕ в виде выражения

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{sc}\left(\mp \frac{\alpha h}{4} \lambda + \Lambda_0, k\right)}{1 + \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{sc}\left(\mp \frac{\alpha h}{4} \lambda + \Lambda_0, k\right)}. \quad (2.149)$$

Константу интегрирования Λ_0 можно найти из уравнения

$$\operatorname{sn}(\Lambda_0, k) = B, \quad (2.150)$$

где обозначено $B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2 - \frac{4C_3}{|C_1 C_2|}})(\sqrt{|C_1|} - \sqrt{|C_2|})^2}{|C_1| + |C_2| - \sqrt{2|C_1 C_2| - 4C_3}}}$, или, в явном виде, путём вычисления интеграла

$$\Lambda_0 = \int_0^B \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (2.151)$$

Потенциал электрического поля $v(\lambda)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$v(\lambda) = C_1 \left| \frac{C_2}{C_1} \right| \int_0^\lambda \frac{[1 - \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{sc}(\mp \frac{\alpha h}{4} \lambda + \Lambda_0, k)]^2}{[1 + \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{sc}(\mp \frac{\alpha h}{4} \lambda + \Lambda_0, k)]^2} d\lambda. \quad (2.152)$$

Выполнив замену переменной $\operatorname{sn}[\frac{1}{2}(\mp \frac{\alpha h}{4} \lambda + \Lambda_0), k] = \xi$, интеграл в этом выражении можно привести к следующему виду:

$$v(\lambda) = C_1 \sqrt{\left| \frac{C_2}{C_1} \right|} \left\{ \lambda \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{32}{\alpha h} \cdot \int_{\operatorname{sn}(\frac{\Lambda_0}{2}, k)}^\xi \frac{(1 - 2\xi^2 + k^2 \xi^4)^2 \xi d\xi}{(1 - 2\xi^2 + k^2 \xi^4)^2 + 2\sqrt{\frac{g}{h}} \xi \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - k^2 \xi^2} + \frac{g}{h} \xi^2 (1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)} \right\}. \quad (2.153)$$

К сожалению, вычислить данный интеграл или свести его к какому-либо стандартному виду не удалось.

Рассматривая центрально-симметричное решение, соответствующее выбору функции $\lambda = \frac{q}{r}$, в первом порядке по $\frac{1}{r}$, можем получить выражения для эффективных зарядов, соответствующих каждому из полей. Эти выражения совпадают с теми, которые были получены в предыдущих двух случаях: $q_e = C_1 q$, $q_m = C_2 q$ и $q_\phi = \pm \frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2} q$. Параметры, входящие в выражения для полей ϕ и v , выра-

жаются через эффективные заряды следующим образом:

$$h = \frac{1}{q} \left(2\sqrt{|q_e q_m|} + \sqrt{2|q_e q_m| - 4q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2} \right), \quad (2.154)$$

$$g = \frac{1}{q} \left(2\sqrt{|q_e q_m|} - \sqrt{2|q_e q_m| - 4q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2} \right), \quad (2.155)$$

$$k^2 = 1 - \left(\frac{g}{h} \right)^2, \quad (2.156)$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{2 - \frac{4q_\phi^2 - q_e^2 - q_m^2}{|q_e q_m|}} \right) (\sqrt{|q_e|} - \sqrt{|q_m|})^2}{|q_e| + |q_m| - \sqrt{2|q_e q_m| - 4q_\phi^2 + q_e^2 + q_m^2}}}. \quad (2.157)$$

Частные случаи, выражаемые в терминах элементарных функций, можно получить при значении эллиптического модуля $k = 1$, что соответствует $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$ (или $q_\phi = \frac{q_e + q_m}{2}$). При равенстве нулю какой-либо из констант C_1 или C_2 данное решение смысла не имеет.

2.6.1 Класс дионных решений

Перейдём к рассмотрению частных случаев, в которых возможно выражение потенциалов через элементарные функции.

В случае $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$ интеграл (2.101) принимает следующий вид:

$$\lambda = 2 \int \frac{d\phi}{C_1 e^{\alpha\phi} + C_2 e^{-\alpha\phi}}. \quad (2.158)$$

При $C_1 C_2 > 0$, обозначив $\frac{C_1}{C_2} = k^2$, для решения получаем:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha C_2 k}{2} \lambda + \operatorname{arctg} k \right), \quad (2.159)$$

$$v = -C_2 \lambda + \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{k} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha C_2 k}{2} \lambda + \operatorname{arctg} k \right) - 1 \right]. \quad (2.160)$$

Здесь мы выбрали константы интегрирования таким образом, чтобы поля ϕ и v обращались в ноль при стремлении к нулю функции λ (например, на простран-

ственной бесконечности). Соответствующее выражение для потенциала u также поддаётся вычислению, однако, мы его не приводим, так как его физический смысл исчерпывается наличием магнитного поля, согласно выражению (2.100).

Далее, при $C_1 C_2 < 0$, обозначив $\frac{C_1}{C_2} = -k^2$, получаем решение в следующем явном виде:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1+k)e^{\alpha C_2 k \lambda} - 1 + k}{1 - k + (1+k)e^{\alpha C_2 k \lambda}}, \quad (2.161)$$

$$v = -C_2 \lambda + \frac{2(1-k)}{\alpha k} \left[1 - \frac{2}{(1+k)e^{\alpha C_2 k \lambda} + 1 - k} \right]. \quad (2.162)$$

Одним из самых интересных с физической точки зрения объектов теории является центрально-симметричный источник соответствующих силовых полей. Как известно, общее центрально-симметричное решение уравнения Лапласа с нулевой асимптотикой на бесконечности описывает кулоновский потенциал $\lambda = \frac{q}{r}$ (где $q = \text{const}$). Подставляя указанное выражение в полученные решения и раскладывая все потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка, получаем заряды для каждого из полей, а именно: электрический $q_e = C_1 q$, магнитный (согласно формуле (2.100)) $q_m = C_2 q$ и дилатонный заряд $q_\phi = \frac{C_1 + C_2}{2} q = \frac{q_e + q_m}{2}$.

Имея эти выражения, можно переписать решения (2.159) - (2.162) при выбранном виде функции λ в терминах физических констант. Так как формулы (2.159) - (2.162) чётны по отношению к параметру k , выбор положительного знака при вычислении квадратного корня в приведенных ниже выражениях не ограничивает множества решений. Формулы, соответствующие выражениям (2.159) - (2.160), при условии $q_e q_m > 0$, будут выглядеть следующим образом:

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\frac{q_m}{q_e}} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{q_e}{q_m}} \cdot \frac{\alpha q_m}{2r} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{q_e}{q_m}} \right) \right], \quad (2.163)$$

$$v = -\frac{q_m}{r} + \frac{2}{\alpha} \left\{ \sqrt{\frac{q_m}{q_e}} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{q_e}{q_m}} \cdot \frac{\alpha q_m}{2r} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{q_e}{q_m}} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (2.164)$$

При условии $q_e q_m < 0$ получим формулы, соответствующие выражениям (2.161) - (2.162):

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{-\frac{q_m}{q_e}} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}} \cdot \frac{\alpha q_m}{r}} - 1 + \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}}{\left(1 + \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}} \cdot \frac{\alpha q_m}{r}} + 1 - \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}}, \quad (2.165)$$

$$v = -\frac{q_m}{r} + \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{-\frac{q_m}{q_e}} - 1 \right) \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(1 + \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}\right) e^{\sqrt{-\frac{q_e}{q_m}} \cdot \frac{\alpha q_m}{r}} + 1 - \sqrt{-\frac{q_e}{q_m}}} \right]. \quad (2.166)$$

Также интересно отметить, что в варианте (2.164) при условии $q_m > 0$ потенциал v может иметь бесконечное множество разрывов второго рода в конечной области в окрестности начала координат, радиус которой (расстояние до внешней сингулярности от центра распределения) равен $r_0 = \frac{\sqrt{\frac{q_e}{q_m}} \cdot \alpha q_m}{\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q_e}{q_m}}}$. В то же время потенциал (2.166) при указанных ограничениях на заряды имеет особенность только в начале координат.

2.6.2 Электро- и магнитостатические решения

Еще один способ выбора параметров, при котором оказывается возможным явное вычисление интеграла (2.101), заключается в придании одному из интегралов движения C_1 или C_2 нулевого значения. Фактически при этом мы ограничиваемся рассмотрением по-отдельности электростатического и магнитостатического секторов теории.

Как видно из уравнений (2.97) и (2.98), электростатический сектор теории реализуется при $C_2 = 0$, в то время как магнитостатический – при $C_1 = 0$. В каждом из этих случаев интеграл (2.101) приобретет вид

$$\lambda = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_{1,2}^2}{4} e^{\pm 2\alpha\phi} + C_3}}. \quad (2.167)$$

Здесь и далее верхний знак в степени экспоненты и константа C_1 перед ней соответствуют электростатике, а альтернативный выбор параметров – магнитостатике.

В зависимости от знака C_3 будем иметь различный вид решения. Обозначая (в случае $C_3 > 0$) $\frac{4C_3}{C_{1,2}^2} = k^2$, и выбирая константы интегрирования таким образом, чтобы удовлетворить условию исчезания полей при стремлении к нулю потенциала λ , в итоге получаем:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{(k + \sqrt{k^2 + 1})^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1}{2k(k + \sqrt{k^2 + 1})e^{\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda}}, \quad (2.168)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \mp \frac{4k}{\alpha} \left[\frac{1}{(k + \sqrt{k^2 + 1})^2 - 1} - \frac{1}{(k + \sqrt{k^2 + 1})^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1} \right]. \quad (2.169)$$

Далее, полагая (в случае $C_3 < 0$) $\frac{4C_3}{C_1^2} = -k^2$, получаем для решения с правильной асимптотикой следующие выражения для полей:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{1}{k} \sin \left(\mp \frac{\alpha k C_{1,2}}{2} \lambda + \arcsin k \right), \quad (2.170)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \pm \frac{2k}{\alpha} \operatorname{ctg} \left(\mp \frac{\alpha k C_{1,2}}{2} \lambda + \arcsin k \right) \mp \frac{2}{\alpha} \sqrt{1 - k^2}. \quad (2.171)$$

Наконец, в предельном случае $C_3 = 0$ получаем выражения

$$e^{\mp\alpha\phi} = 1 \mp \frac{C_{1,2}\alpha}{2} \lambda, \quad (2.172)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{C_{1,2}\lambda}{1 \mp \frac{C_{1,2}\alpha}{2} \lambda}. \quad (2.173)$$

Решения (2.168) - (2.173) являются обобщением найденных в работе [48] сферически-симметричных монопольных решений. Представленные здесь электрический и магнитный потенциалы при подстановке $\lambda = \frac{q}{r}$ имеют на пространственной бесконечности кулоновский вид с зарядами, равными, соответственно, $q_e = C_1 q$ и $q_m = C_2 q$. Дилатонный заряд для решения (2.168) равен $q_\phi = q \frac{C_{1,2}\sqrt{1+k^2}}{2}$, для решения (2.170) $q_\phi = q \frac{C_{1,2}\sqrt{1-k^2}}{2}$, а в предельном случае (2.172) $q_\phi = q \frac{C_{1,2}}{2}$.

Также формулы (2.168) - (2.173) при указанном выборе функции λ могут быть записаны в терминах зарядов. Как и в предыдущем разделе, чётность фор-

мул (2.168) - (2.171) относительно параметра k позволяет без потери общности решения выбрать всюду положительный знак при вычислении квадратного корня. При условиях $q_\phi q_{e,m} > 0$, $\frac{2q_\phi}{q_{e,m}} > 1$ получаем формулы, соответствующие решениям (2.168) - (2.169), следующего вида:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} + \frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2 e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} \cdot \frac{\alpha q_{e,m}}{r}} - 1}{2\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} \left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} + \frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right) e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} \cdot \frac{\alpha q_{e,m}}{2r}}}, \quad (2.174)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \mp \frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} \left[\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} + \frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2} - \right. \quad (2.175)$$

$$\left. - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} + \frac{2q_\phi}{q_{e,m}}\right)^2 e^{\mp\sqrt{\frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2} - 1} \cdot \frac{\alpha q_{e,m}}{r}} - 1} \right]. \quad (2.176)$$

При условиях $q_\phi q_{e,m} > 0$, $\frac{2q_\phi}{q_{e,m}} < 1$ получаем формулы, соответствующие решениям (2.170) - (2.171), следующего вида:

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}}} \cdot \sin \left(\mp \sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}} \cdot \frac{\alpha q_{e,m}}{2r} + \arcsin \sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}} \right), \quad (2.177)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \pm \frac{2}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}} \cdot \operatorname{ctg} \left(\mp \sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}} \cdot \frac{\alpha q_{e,m}}{2r} + \arcsin \sqrt{1 - \frac{4q_\phi^2}{q_{e,m}^2}} \right) \mp \frac{4q_\phi}{\alpha q_{e,m}}. \quad (2.178)$$

Наконец, в предельном случае при $q_\phi = \frac{q_{e,m}}{2}$ получаем выражения, соответствующие

щие решениям (2.172) - (2.173):

$$e^{\mp\alpha\phi} = 1 \mp \frac{q_\phi\alpha}{r}, \quad (2.179)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{2q_{e,m}}{2r \mp q_{e,m}\alpha}. \quad (2.180)$$

Можно отметить, что электростатические потенциалы, описываемые формулами (2.175) и (2.180), при условии $\alpha q_e < 0$ имеют конечную величину во всем пространстве.

При написании этой главы использованы материалы работ [49] и [50]. Личный вклад автора состоит в нахождении всех представленных в работах решений, в их анализе и представлении результатов. Текст работ написан автором лично.

Глава 3. Дуальность статической ДМЭ и стационарной ОТО. Методы генерации точных решений.

В данной главе будет подробно рассмотрена модель с лагранжианом, который отличается от рассмотренного в предыдущей главе выбором знака перед кинетическим членом дилатона:

$$L_4 = -2\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{4}e^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.181)$$

Такой выбор знака вполне оправдан: например, лагранжиан вида (3.181) с отрицательной энергией свободного скалярного поля получается при компактификации дополнительного времениподобного измерения в пятимерной теории Калуцы-Клейна.

В этом случае модель имеет наиболее близкие аналогии с Общей Теорией Относительности. Чтобы показать это, рассмотрим отдельно электростатический и магнитостатический секторы нашей модели. Введём электростатический потенциал v и магнитостатический потенциал u по аналогии с тем, как это было сделано в предыдущей главе, и перейдем к следующим обозначениям: для электростатического сектора $u = 0$, $v \equiv A \neq 0$; для магнитостатического $v = 0$, $u \equiv A \neq 0$. Лагранжиан, описывающий каждую из этих подсистем в отдельности, может быть

записан в виде

$$\tilde{L} = \frac{4}{\alpha^2} \tilde{L}_{GR}, \quad (3.182)$$

где \tilde{L}_{GR} имеет вид (1.44), при следующем определении функций f и χ :

$$f = e^{\pm\alpha\phi}, \quad \chi = \frac{\alpha}{2}A \quad (3.183)$$

(знак "+" отвечает электро-, а "-" - магнитостатике).

Таким образом устанавливается взаимное соответствие между статической ДМЭ и стационарной ОТО в вакууме, позволяющее использовать для исследования нашей модели известные результаты Общей Теории Относительности. При этом, однако, надо иметь в виду, что поднятие и опускание индексов в \tilde{L}_{GR} производится при помощи тензора h^{kl} , в то время как в ДМЭ эту функцию выполняет символ Кронекера δ^{kl} . Поэтому для получения результатов стационарной ДМЭ из результатов ОТО необходимо во всех соотношениях последней произвести замену $h^{kl} \rightarrow \delta^{kl}$.

3.1 Генерация точных решений ДМЭ с использованием преобразований симметрии ОТО

Дуальность статической ДМЭ и стационарной ОТО, установленная в предыдущем разделе, позволяет использовать преобразование симметрии (1.51) лагранжиана (1.44) для генерации нетривиальных точных решений. В терминах полей ϕ и A преобразование (1.51) имеет вид:

$$\phi \rightarrow \phi \pm \frac{1}{\alpha} \ln \left[\left(\cos \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha}{2} A \sin \frac{\lambda}{2} \right)^2 + e^{\pm 2\alpha\phi} \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right], \quad (3.184)$$

$$A \rightarrow \frac{A \cos \lambda - \frac{1}{\alpha} \sin \lambda \left(1 - e^{\pm 2\alpha\phi} - \frac{\alpha^2}{4} A^2 \right)}{\left(\cos \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha}{2} A \sin \frac{\lambda}{2} \right)^2 + e^{\pm 2\alpha\phi} \sin^2 \frac{\lambda}{2}}, \quad (3.185)$$

где переобозначены константы: $\Lambda = tg(\frac{\lambda}{2})$.

Рассматривая мультипольное разложение полей

$$\phi = \frac{q_d}{r} + \dots, \quad A = \frac{q_{e/m}}{r} + \dots, \quad (3.186)$$

где $q_{e/m}$ и q_d - эффективные электрический/магнитный и дилатонный заряды, можно заметить, что при преобразовании (3.184), (3.185) заряды преобразуются по формулам

$$q_d \rightarrow q_d \cos \lambda \mp \frac{1}{2} q_{e/m} \sin \lambda, \quad (3.187)$$

$$q_{e/m} \rightarrow q_{e/m} \cos \lambda \pm 2q_d \sin \lambda. \quad (3.188)$$

Таким образом, заряжающая подгруппа преобразований симметрии в терминах зарядовых координат $q_{e/m}$ и $2q_d$ реализуется как группа вращений $SO(2)$ с натуральным параметром λ . Несложно заметить, что комбинация $q_{e/m}^2 + 4q_d^2$ инвариантна относительно преобразований заряжающей подгруппы.

Перейдем теперь к генерации точных решений. В качестве базы для генерации выберем случай отсутствия электрического и магнитного полей: $A = 0$. В этом случае уравнения движения сводятся к уравнению Лапласа на потенциал ϕ (см. (2.91)):

$$\Delta \phi_0 = 0. \quad (3.189)$$

Применяя преобразование (1.51) и записывая результат в терминах полей ϕ и A , получаем более сложное решение:

$$A = \frac{2}{\alpha} tg \left(\frac{\lambda}{2} \right) \frac{1 - e^{2\phi_0}}{1 + tg^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{2\phi_0}}, \quad (3.190)$$

$$e^{-\alpha\phi} = \frac{[1 + tg^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)] e^{\alpha\phi_0}}{1 + tg^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{2\alpha\phi_0}}. \quad (3.191)$$

Напомним, что потенциал A может быть потенциалом не только электрического, но и магнитного поля, согласно (2.89). Приведённое здесь решение при любой интерпретации скалярного потенциала соответствует электро- и магнито-статическим решениям, полученным в предыдущей главе.

3.2 Общее центрально-симметричное решение и эффективный потенциал

3.2.1 Генерация решения и доказательство его единственности

Одним из самых интересных для приложений и в то же время самых простых является центрально-симметричное решение, описывающее, в частности, потенциал точечного источника полей. Решение уравнения Лапласа в этом случае имеет кулоновский вид:

$$\phi_0 = \frac{Q}{r}, \quad (3.192)$$

где Q - произвольная константа. Подставляя это решение в формулы (3.190), (3.191), найдем центрально-симметричное решение вида:

$$A = \frac{2}{\alpha} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \frac{1 - e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}, \quad (3.193)$$

$$e^{-\alpha\phi} = \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)] e^{\frac{\alpha Q}{r}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{2\alpha Q}{r}}} \quad (3.194)$$

Это решение на пространственной бесконечности $r \rightarrow \infty$ переходит в кулоновское:

$$A = \frac{q_e}{r}, \quad \phi = \frac{q_d}{r}, \quad (3.195)$$

где заряды находятся по формулам (3.187), (3.188):

$$q_e = -2Q \sin(\lambda), \quad q_d = Q \cos(\lambda) \quad (3.196)$$

В точке $r = 0$ потенциал ϕ имеет особенность, в то время как потенциал A принимает конечное значение $A = -\frac{2}{\alpha} \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda}{2} \right) = -\frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d}{q_e}$. Решение (3.193), (3.194), выраженное в терминах эффективных зарядов, выглядит следующим образом:

$$A = -\frac{2}{\alpha} \frac{q_e \left(\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d \right) \left(1 - e^{\frac{2\alpha Q}{r}} \right)}{\left(\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d \right)^2 + q_e^2 e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}, \quad (3.197)$$

$$e^{-\alpha\phi} = \frac{\left[q_e^2 + \left(\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d \right)^2 \right] e^{\frac{\alpha Q}{r}}}{\left(\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d \right)^2 + q_e^2 e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}. \quad (3.198)$$

Это же решение можно получить и другим способом, позволяющим также доказать, что оно является общим решением уравнений движения лагранжиана (1.44) в случае центральной симметрии. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнения движения для лагранжиана (1.44) эквивалентны системе уравнений

$$\nabla (M^{-1} \nabla M) = 0, \quad (3.199)$$

где M - матрица следующего вида:

$$M = \begin{pmatrix} f^{-1} & f^{-1}\chi \\ f^{-1}\chi & f + f^{-1}\chi^2 \end{pmatrix} \quad (3.200)$$

Данная матрица обладает свойствами:

$$\det M = 1, \quad M^T = M, \quad (3.201)$$

благодаря которым в системе (3.199) только два независимых уравнения.

В центрально-симметричном случае уравнение (3.199) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 M^{-1} \frac{\partial}{\partial r} M \right) = 0, \quad (3.202)$$

и его решение при дополнительном условии $M|_{r \rightarrow \infty} = I$ (эквивалентном требованию, наложенному на преобразование (1.51)) даётся выражением:

$$M = e^{\frac{1}{r}A}, \quad (3.203)$$

где A - постоянная матрица. Условия (3.201) накладывают на неё следующие ограничения:

$$\text{tr} A = 0, \quad A^T = A, \quad (3.204)$$

из которых следует, что у матрицы A только две независимые компоненты. Общий вид этой матрицы может быть параметризован в следующем виде:

$$A = -\alpha Q \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ \sin \lambda & -\cos \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.205)$$

Аккуратно расписывая матричную экспоненту и выражая функции f и χ через компоненты матрицы M , можно проверить, что такому виду матрицы A соответствует решение (3.193), (3.194). Таким образом, доказано, что это решение является общим решением центрально-симметричной задачи.

3.2.2 Энергия полей

Плотность энергии полей, динамика которых описывается лагранжианом (2.77), совпадает с нулевой компонентой тензора энергии-импульса и в стационарном случае выражается формулой

$$T^{00} = -2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\phi}(\nabla A)^2. \quad (3.206)$$

Полная энергия вычисляется путем интегрирования этого выражения по всему пространству:

$$E = \int d^3x \left[-2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\phi}(\nabla A)^2 \right] \quad (3.207)$$

После подстановки сюда решений (3.193) и (3.194) можно отделить инвариантную относительно группы симметрий модели бесконечную часть и нетривиальную конечную добавку к ней:

$$E = E_0 + \Delta E, \quad (3.208)$$

где

$$E_0 = -2 \int d^3x \frac{Q^2}{r^4} \quad (3.209)$$

расходится, но не зависит от параметра заряжающего преобразования λ , а

$$\Delta E = 16 \, tg^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \int d^3x \frac{Q^2}{r^4} \frac{e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}{\left[1 + tg^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{2\alpha Q}{r}} \right]^2} = \frac{8\pi q_e^2}{\alpha(\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} - 2q_d)} \quad (3.210)$$

имеет конечное значение. Поэтому можно считать, что вклад E_0 не имеет физического влияния и может быть отброшен. Если же теперь рассмотрим динамику пробной частицы, считая, что она движется под действием стандартной силы Лоренца (1.7), создаваемой полем A , то, наблюдая за движением такой частицы, мы будем "видеть" только электрическое поле $\vec{E} = -\vec{\nabla}A$, имеющее плотность энергии

$$E_e = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^2 = \frac{8\pi}{3\alpha} \frac{\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d}{\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} - 2q_d} (\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} - q_d). \quad (3.211)$$

Интересно заметить, что выражения для энергии имеют зависимость $\frac{1}{\alpha}$, то есть, непертурбативны по отношению к константе дилатон-максвелловской связи. Отношение вкладов энергий ΔE и E_e выражается через параметр преобразования λ формулой

$$\frac{E_e}{\Delta E} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2 - \cos(\lambda)}{1 - \cos(\lambda)} \quad (3.212)$$

и лежит в пределах $(\frac{1}{4}, \infty)$, то есть, наблюдаемая энергия может быть лишь долей от полной энергии полей. Поэтому после точного измерения константы λ теория может иметь приложения к объяснению природы тёмной материи.

3.2.3 Эффективный потенциал

Вычисляя энергию электрического поля в предыдущем разделе, мы рассматривали движение заряда под действием силы Лоренца (1.7) классической электродинамики. Однако, более логично было бы потребовать, чтобы уравнения движения пробной частицы были инвариантны относительно той же группы симметрий, что и полевой лагранжиан. Поэтому требование симметрии относительно преобразований (1.61) приводит к следующему выражению для обобщенной силы Лоренца в ДМЭ:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = qe^{-\alpha\phi} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.213)$$

Подставляя в это выражение общий вид решения (3.190), (3.191), непосредственной проверкой можно убедиться, что сила Лоренца может быть записана в потенциальном виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}U \quad (3.214)$$

с эффективным потенциалом

$$U = -\frac{4q}{\alpha} \left[\operatorname{arctg} \left(e^{\alpha\phi_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right) - \frac{\lambda}{2} \right]. \quad (3.215)$$

График этого потенциала в центрально-симметричном случае, при подстановке кулоновского вида затравочной функции ϕ_0 из (3.192), изображен на рисунке 3.1.

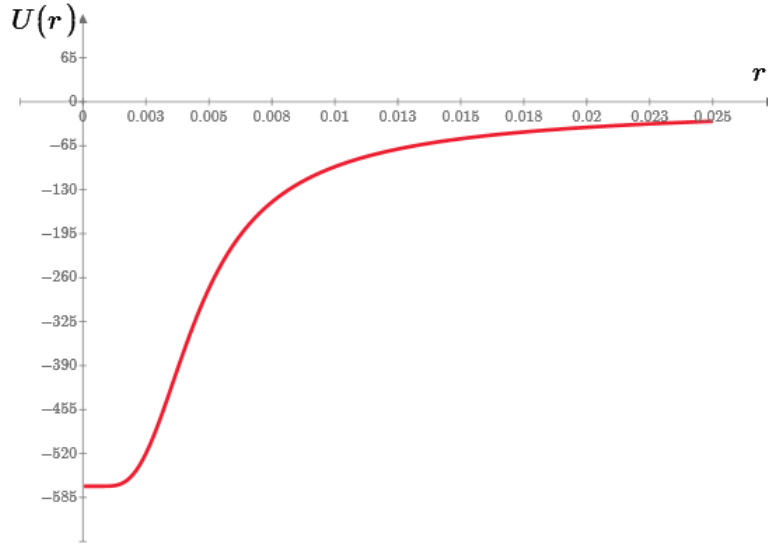


Рис. 3.1: Эффективный потенциал движения пробной частицы

Данный потенциал регулярен и всюду конечен, на больших расстояниях от центра имеет кулоновскую асимптотику:

$$U|_{r \rightarrow \infty} = \frac{qq_e}{r}, \quad (3.216)$$

а в нуле достигает минимального значения $U(0) = \frac{2q}{\alpha} [\operatorname{sign}(\alpha Q)\pi - \lambda]$ и обладает свойством асимптотической свободы. Интересным фактом является то, что сила, действующая на заряд, имеет максимальное значение на конечном расстоянии от центра потенциала (в точке его перегиба). Также нужно отметить, что при $\alpha \rightarrow 0$ дно ямы уходит на бесконечную глубину, и потенциал полностью принимает кулоновский вид (3.216). В другом же предельном случае, при $\alpha \sim 1$, $\lambda \rightarrow 0$, потенциал приобретает характерные признаки потенциала Вудса-Саксона: широкое плоское "дно" и резкую границу.

Можно вычислить эффективную плотность заряда, создающего такой потенциал в стандартной электродинамике. Она находится по формуле

$$\rho_{\text{эфф}} = -\frac{1}{4\pi q} \nabla^2 U \quad (3.217)$$

и даётся выражением

$$\rho_{\text{эфф}} = \frac{\alpha Q^2}{\pi r^4} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{\alpha Q}{r}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}{\left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) e^{\frac{2\alpha Q}{r}} \right]^2}. \quad (3.218)$$

График этой зависимости представлен на рисунке 3.2

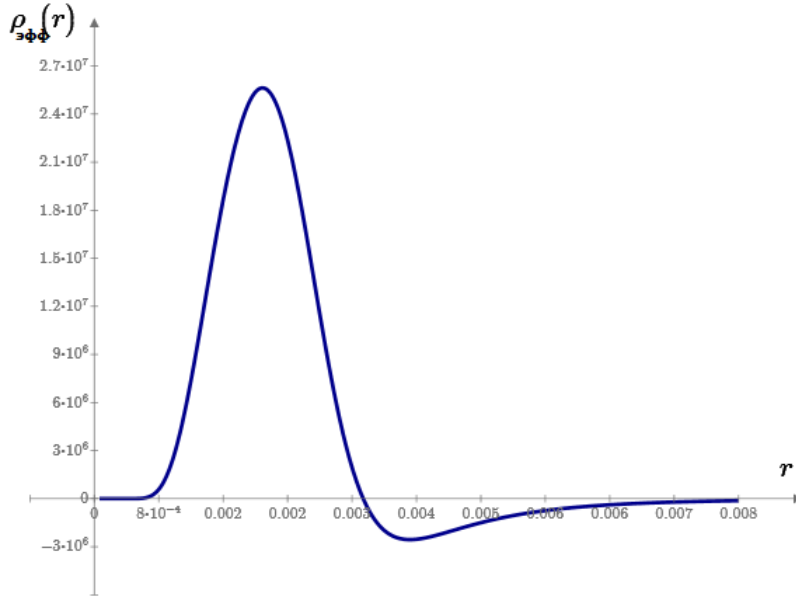


Рис. 3.2: Эффективная плотность заряда

Таким образом, хотя онтологически в нашей теории присутствует точечная частица, создающая потенциал ϕ_0 , в классическом эксперименте будет наблюдаться объект с нетривиальным пространственным распределением заряда. Возможно, поэтому теория имеет приложения к описанию структуры элементарных частиц.

Энергия поля, вычисленная в предположении, что этот потенциал создаётся электростатическим полем стандартной электродинамики, даётся выражением:

$$\tilde{E}_e = \frac{1}{2} \int d^3x (\nabla U)^2 = \frac{4\pi (\sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} + 2q_d)^2}{\alpha \sqrt{q_e^2 + 4q_d^2} - 2q_d}, \quad (3.219)$$

в отличие от значения (3.211).

3.3 Генерация точных решений ДМЭ из стационарных решений ОТО в вакууме

3.3.1 Решение Керра-НУТ и его частные случаи в ДМЭ

В случае аксиальной симметрии общее выражение для метрики четырехмерного пространства-времени может быть параметризовано в следующем виде:

$$ds_4^2 = f(dt + \omega_\varphi d\varphi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (3.220)$$

где функции f , ω_φ и γ не зависят от φ . Сравнивая это выражение с выражением для метрики Керра-НУТ (1.55), можем выписать соответствующие выражения для функций f и ω_φ :

$$f = \frac{r^2 - 2mr - b^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + (b - a \cos \theta)^2}, \quad (3.221)$$

$$\omega_\varphi = \frac{2b \cos \theta (r^2 - 2mr + a^2 - b^2) + 2ab^2 \sin^2 \theta + 2amr \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr - b^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.222)$$

Координаты в этих выражениях связаны с теми, которые использованы при записи общего вида метрики (3.220), преобразованием

$$\rho = \sqrt{(r - m)^2 - m^2 + a^2 - b^2} \sin \theta, \quad (3.223)$$

$$z = (r - m) \cos \theta. \quad (3.224)$$

Физическим смыслом в ДМЭ обладает функция χ , которую можно найти, решив систему уравнений (1.45). Для его решения оказывается удобно перейти к вытянутым сфероидальным координатам (σ, τ, φ) , согласно выражениям

$$r = \sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m, \quad (3.225)$$

$$\cos \theta = \tau. \quad (3.226)$$

В этих координатах уравнения для нахождения функции χ записываются следующим образом:

$$\chi_{,\sigma} = \frac{f^2}{(\sigma^2 - 1)\sqrt{m^2 - a^2 + b^2}}\omega_{\varphi,\tau}, \quad (3.227)$$

$$\chi_{,\tau} = -\frac{f^2}{(1 - \tau^2)\sqrt{m^2 - a^2 + b^2}}\omega_{\varphi,\sigma}. \quad (3.228)$$

Преимущество выбора этой системы координат состоит в том, что все функции становятся дробно-рациональными, что облегчает вычисление интегралов. Решая эту систему уравнений, получаем выражение для потенциала χ в вытянутых сфероидальных координатах следующего вида:

$$\chi = 2 \frac{\sigma b \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m a \tau}{(\sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m)^2 + (b - a \tau)^2} \quad (3.229)$$

Константа интегрирования выбрана таким образом, чтобы функция была равна нулю на пространственной бесконечности. Выражения для физических полей ДМЭ запишутся в этом случае так:

$$e^{\pm \alpha \phi} = -\frac{(m^2 - a^2 + b^2)(1 - \sigma^2) + a^2(1 - \tau^2)}{(\sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m)^2 + (b - a \tau)^2}, \quad (3.230)$$

$$A = \frac{4}{\alpha} \frac{\sigma b \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m a \tau}{(\sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m)^2 + (b - a \tau)^2}. \quad (3.231)$$

Здесь знак «+» соответствует электростатике, знак «-» - магнитостатике, потенциал A является скалярным потенциалом электрического или магнитного поля согласно определению в начале главы.

Исследуем полученные решения подробнее, для чего выразим вытянутые сфероидальные координаты через обыкновенные сферические согласно формулам

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^2 + 2R \cos \Theta + 1} + \sqrt{R^2 - 2R \cos \Theta + 1} \right), \quad (3.232)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^2 + 2R \cos \Theta + 1} - \sqrt{R^2 - 2R \cos \Theta + 1} \right) \quad (3.233)$$

(нужно отметить, что координаты (r, θ) , в которых выше записана метрика Керра-Нута, отличаются от общепринятых сферических координат). После такого преобразования, раскладывая выражения для полей A и ϕ в ряд по степеням $\frac{1}{R}$ до второго порядка включительно, получим следующие выражения:

$$\phi = \pm \frac{2m}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} R} \pm \frac{2b(a \cos \Theta - b)}{\alpha} \frac{1}{(m^2 - a^2 + b^2) R^2}, \quad (3.234)$$

$$A = \frac{4b}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} R} - \frac{4m(2b - a \cos \Theta)}{\alpha} \frac{1}{(m^2 - a^2 + b^2) R^2}. \quad (3.235)$$

Если теперь изменить единицы измерения радиальной координаты, выполнив замену $\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} R \rightarrow \tilde{R}$, то можно будет заметить, что в этой системе координат дилатонный и электрический/магнитный заряды, создающие такое поле, имеют величины $q_\phi = \pm \frac{2m}{\alpha}$, $q_{e/m} = \frac{4b}{\alpha}$.

В частном случае решения Тауба-НУТ ($a = 0$) величины зарядов останутся такими же, а в случае решения Керра ($b = 0$) дилатонный заряд остаётся прежним, а электрическое/магнитное поле соответствуют источнику с нулевым полным зарядом и дипольным моментом $d_{e,m} = \frac{4ma}{\alpha}$. Из этого рассмотрения видно, что параметр m в решении Керра-НУТ отвечает за дилатонный заряд, а параметры b и a - за полный электрический/магнитный заряд и за электрический/магнитный дипольный момент, соответственно.

Решение Шварцшильда получается из решения Керра-НУТ при $a = b = 0$, что мгновенно даёт

$$e^{\pm\alpha\phi} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad (3.236)$$

$$A = 0, \quad (3.237)$$

или

$$\phi = \pm \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right), \quad (3.238)$$

$$A = 0. \quad (3.239)$$

Таким образом, решение ДМЭ, дуальное решению Шварцшильда ОТО, не содер-

жит нетривиального электрического/магнитного поля. Дилатонное поле, соответствующее решению Шварцшильда, имеет особенность при $\sigma = 1$, что в декартовой системе соответствует одной точке - началу координат.

Поскольку найденные выше поля получены переносом из ОТО решений, описывающих метрику пространства-времени вблизи чёрных дыр, закономерным становится вопрос о том, сохраняется ли при таком переносе главная характерная особенность исходных решений, а именно, наличие «горизонта событий», некоторой поверхности в пространстве, для достижения которой пробной заряженной частице потребовалось бы обладать бесконечной энергией. Конечно, аналогия не может быть полной, поскольку в настоящей работе мы исследуем поля на фоне плоского пространства-времени, соответственно, здесь не будут проявляться эффекты замедления времени, а также зависимости наблюдаемой динамики от системы отсчёта. Будем рассматривать случай электростатики, как более интересный с практической точки зрения. Для поиска поверхностей в пространстве, за которые пробные частицы не могут проникнуть, воспользуемся интегралом движения типа энергии, установленным в работе [51] для динамики пробной частицы в полях ДМЭ:

$$E = Mu^0 e^{\alpha\phi} + qA, \quad (3.240)$$

где M и q - соответственно, масса и заряд пробной частицы, а u^0 - нулевая компонента 4-скорости. Подставляя сюда соответствующие выражения для полей, получим в общем случае следующую формулу:

$$u^0 = -\frac{1}{M} \left(E - \frac{4q}{\alpha} \frac{\sigma b \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + ma\tau}{(\sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m)^2 + (b - a\tau)^2} \right) \cdot \frac{(\sigma \sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m)^2 + (b - a\tau)^2}{(m^2 - a^2 + b^2)(1 - \sigma^2) + a^2(1 - \tau^2)}. \quad (3.241)$$

Величина u^0 достигает бесконечного значения на поверхности, заданной уравнением

$$\sigma^2 = \frac{m^2 + b^2 - a^2\tau^2}{m^2 + b^2 - a^2}. \quad (3.242)$$

В случае решения Шварцшильда и решения Тауба-НУТ эта поверхность вырождается в точку, расположенную в начале координат. В общем случае поверхность, за которую пробная частица, движущаяся в полях ДМЭ, не может проникнуть, обладая конечной энергией, выглядит довольно сложным образом.

При написании этой главы использованы материалы работ [52], [53] и [54]. Личный вклад автора состоит в записи преобразований симметрии лагранжиана ОТО в виде, пригодном для анализа уравнений ДМЭ и построения новых точных решений, в доказательстве общего характера представленного центрально-симметричного решения, в вычислении величины энергии полей и эффективных электрического и дилатонного зарядов, в анализе потенциала взаимодействия пробных электрических частиц с центрально-симметричным потенциалом. Автором лично вычислено распределение эффективного заряда, соответствующего такому потенциалу. Также автором лично найдено решение, дуальное решению Керра-НУТ ОТО и проанализирован вид поверхности, обладающей свойствами «горизонта событий» в общем и в частных случаях.

Глава 4. Электродинамика Максвелла с аксионом

В настоящей главе независимым образом рассматривается аксионный сектор нелинейного обобщения электродинамики Максвелла, представленного в первой главе настоящей работы. Будем изучать модель, описываемую лагранжианом следующего вида:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \gamma\kappa\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial^\mu\kappa\partial_\mu\kappa. \quad (4.243)$$

Здесь κ - псевдоскалярное поле (аксион), $\gamma = const$ - произвольная константа связи.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для выписанного лагранжиана:

$$\partial^\mu\partial_\mu\kappa + \frac{1}{4}\gamma\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0, \quad (4.244)$$

$$\partial_\nu(F^{\mu\nu} + \gamma\kappa\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.245)$$

Из второго уравнения видно, что введение в электродинамику аксиона эквивалентно появлению эффективного тока электрических зарядов в уравнениях Максвелла $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$, а именно, $J^\mu = -\partial_\nu(\gamma\kappa\tilde{F}^{\mu\nu})$, причем благодаря антисимметрии $\tilde{F}^{\mu\nu}$ для него выполняется «закон сохранения заряда»: $\partial_\mu J^\mu \equiv 0$.

Записанные в терминах физических полей \vec{E} , \vec{H} , κ , эти уравнения представ-

ляют собой систему модифицированных уравнений Максвелла:

$$\square \varkappa = -\gamma(\vec{E} \cdot \vec{H}), \quad (4.246)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\gamma(\vec{H} \cdot \operatorname{grad} \varkappa), \quad (4.247)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \gamma \left([\operatorname{grad} \varkappa \times \vec{E}] + \vec{H} \frac{\partial \varkappa}{\partial t} \right). \quad (4.248)$$

Здесь единицы измерения времени выбраны таким образом, что $c = 1$. Оставшиеся два уравнения Максвелла, связанные со внутренними свойствами симметрии тензора $F_{\mu\nu}$, остаются в этом случае неизменными:

$$\operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (4.249)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4.250)$$

Можно сразу отметить, что из последнего уравнения следует, что в центрально-симметричном случае магнитное поле может либо отсутствовать, либо иметь кулоновский вид. Все полученные ниже решения обладают этим свойством.

4.1 Компактификация лагранжиана в стационарном случае

Рассмотрим уравнения (4.244) и (4.245) в стационарном случае: будем считать все производные по x^0 равными нулю. Уравнение (4.245) при $\mu = m$ запишется в виде

$$\epsilon^{kmn} [-\epsilon_k^{ab} A_{a,b} + \gamma \varkappa A_{0,k}],_n = 0, \quad (4.251)$$

или, в терминах векторных дифференциальных операторов,

$$\nabla \times [-\nabla \times \vec{A} + \gamma \varkappa \nabla A_0] = 0. \quad (4.252)$$

Это выражение позволяет ввести потенциал магнитного поля u согласно уравнению

$$\nabla u = -\nabla \times \vec{A} + \gamma \varkappa \nabla A_0. \quad (4.253)$$

Уравнение (4.245) при $\mu = 0$ имеет вид

$$\nabla^2 A_0 + \gamma \nabla \varkappa (\nabla \times \vec{A}) + \gamma \varkappa \nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0, \quad (4.254)$$

а уравнение (4.244):

$$\nabla^2 \varkappa + \gamma \nabla A_0 (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (4.255)$$

Подставляя в два последних уравнения значение $\nabla \times \vec{A}$ согласно соотношению (4.253) и обозначая для удобства $A_0 \equiv v$, получаем:

$$\nabla^2 v + 2\gamma^2 \varkappa \nabla \varkappa \nabla v + \gamma^2 \varkappa^2 \nabla^2 v - \gamma \nabla \varkappa \nabla u - \gamma \varkappa \nabla^2 u = 0, \quad (4.256)$$

$$\nabla^2 \varkappa + \gamma^2 \varkappa (\nabla v)^2 - \gamma \nabla u \nabla v = 0. \quad (4.257)$$

Наконец, подействовав на соотношение (4.253) оператором дивергенции, получаем последнее уравнение трехмерной системы на функции \varkappa , u и v :

$$\nabla^2 u - \gamma \nabla \varkappa \nabla v - \gamma \varkappa \nabla^2 v = 0. \quad (4.258)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что полученные уравнения (4.256), (4.257) и (4.258) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} (\nabla \varkappa)^2 - \frac{1}{2} [(\nabla u - \gamma \varkappa \nabla v)^2 + (\nabla v)^2]. \quad (4.259)$$

Отметим, что, просто положив в исходном лагранжиане (4.243) производные по x^0 равными нулю и расписав его явно через A_0 , \vec{A} , \varkappa , получим

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} (\nabla \varkappa)^2 - \frac{1}{2} \left\{ -(\nabla A_0)^2 + [\nabla \times \vec{A}]^2 + 2\gamma \varkappa (\nabla A_0 [\nabla \times \vec{A}]) \right\} \quad (4.260)$$

Уравнения (4.254) и (4.255) являются для него уравнениями Эйлера-Лагранжа, и в этом смысле он эквивалентен лагранжиану (4.259), но процесс поиска симметрий, описанный в следующем разделе работы, для него сильно затруднен.

4.2 Симметрии трехмерной модели

Найдем преобразования обобщенных координат \varkappa , u и v , сохраняющие форму \mathcal{L}_3 . Предположим, что производится преобразование

$$v = v(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0), \quad u = u(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0), \quad \varkappa = \varkappa(\lambda, v_0, u_0, \varkappa_0) \quad (4.261)$$

такое, что

$$v_{,\lambda} = K_v(v, u, \varkappa), \quad u_{,\lambda} = K_u(v, u, \varkappa), \quad \varkappa_{,\lambda} = K_\varkappa(v, u, \varkappa). \quad (4.262)$$

Преобразование является преобразованием симметрии для данной системы, если $\mathcal{L}_{3,\lambda} = 0$, т. е.

$$\mathcal{L}_{3,\lambda} = \nabla \varkappa \nabla K_\varkappa - \left(\nabla u - \gamma \varkappa \nabla v \right) \left(\nabla K_u - \gamma (K_\varkappa \nabla v + \varkappa \nabla K_v) \right) - \nabla v \nabla K_v = 0. \quad (4.263)$$

Подставляя сюда

$$\nabla K_u = K_{u,v} \nabla v + K_{u,u} \nabla u + K_{u,\varkappa} \nabla \varkappa$$

и аналогичные выражения для ∇K_v , ∇K_\varkappa , приравнивая к нулю множители при дифференциалах разных координат и решая полученную систему из 6 уравнений, находим:

$$\begin{aligned} K_\varkappa &= Av + B, \\ K_v &= A\varkappa + C, \\ K_u &= \frac{\gamma}{2}A(\varkappa^2 + v^2) + \gamma Bv + D, \end{aligned} \quad (4.264)$$

где A, B, C, D - произвольные постоянные. Используя эти выражения, можно выписать генераторы полной четырехпараметрической группы симметрий лагран-

жиана \mathcal{L}_3 согласно формуле

$$X_A = K_{\varkappa(A)} \frac{\partial}{\partial \varkappa} + K_{u(A)} \frac{\partial}{\partial u} + K_{v(A)} \frac{\partial}{\partial v}, \quad (4.265)$$

где $K_{\varkappa(A)}$ - значение K_{\varkappa} при $A = 1$ и остальных константах, равных нулю. Рассматривая генераторы, соответствующие разным константам, получаем:

$$\begin{aligned} X_1 &= v \frac{\partial}{\partial \varkappa} + \varkappa \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma}{2} (\varkappa^2 + v^2) \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial \varkappa} + \gamma v \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (4.266)$$

Коммутационные соотношения между генераторами имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [X_4, X_1] &= [X_4, X_2] = [X_4, X_3] = 0, \\ [X_3, X_1] &= X_2, \\ [X_2, X_1] &= X_3, \\ [X_3, X_2] &= \gamma X_4. \end{aligned} \quad (4.267)$$

Для того, чтобы получить явный вид преобразования функций \varkappa , u и v , решаем систему (4.264) с учетом (4.262). Получаем:

-при $A \neq 0; B = C = D = 0$

$$\begin{aligned} v &= \varkappa_0 \operatorname{sh}(\lambda) + v_0 \operatorname{ch}(\lambda), \\ \varkappa &= \varkappa_0 \operatorname{ch}(\lambda) + v_0 \operatorname{sh}(\lambda), \\ u &= u_0 + \frac{\gamma}{4} \left[(\varkappa_0^2 + v_0^2) \operatorname{sh}(2\lambda) + 4\varkappa_0 v_0 \operatorname{sh}^2(\lambda) \right]; \end{aligned} \quad (4.268)$$

-при $B \neq 0; A = C = D = 0$

$$\begin{aligned}\varkappa &= \varkappa_0 + \lambda, \\ u &= u_0 + \gamma v_0 \lambda, \\ v &= v_0;\end{aligned}\tag{4.269}$$

-при $C \neq 0; A = B = D = 0$

$$\begin{aligned}v &= v_0 + \lambda, \\ u &= u_0, \\ \varkappa &= \varkappa_0;\end{aligned}\tag{4.270}$$

-при $D \neq 0; A = B = C = 0$

$$\begin{aligned}u &= u_0 + \lambda, \\ v &= v_0, \\ \varkappa &= \varkappa_0.\end{aligned}\tag{4.271}$$

Преобразования (4.268) представляют собой так называемую «заряжающую» подгруппу симметрий, позволяющую нетривиальным образом преобразовывать одни известные точные решения уравнений теории в другие. Для примера, выберем в качестве базы генерации решение, не содержащее магнитного и электрического полей: $v = 0, u = 0$. В этом случае единственное оставшееся нетривиальным уравнение (4.255) принимает вид уравнения Лапласа на потенциал \varkappa :

$$\Delta \varkappa_0 = 0.\tag{4.272}$$

Его решением может быть, например, кулоновский потенциал: $\varkappa_0 = \frac{q}{r}$. Применив к этому потенциалу преобразования (4.268), получим решение, в котором потен-

циалы v и u отличны от нуля:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\gamma q^2 \operatorname{sh}(2\lambda)}{4r^2}, \\ v &= \frac{q \operatorname{sh} \lambda}{r}, \\ \varkappa &= \frac{q \operatorname{ch} \lambda}{r}. \end{aligned} \quad (4.273)$$

Таким образом, мы получили новое решение нелинейной системы уравнений, не решая уравнения непосредственно. Нужно только отметить, что вычисленная с использованием этих выражений напряжённость магнитного поля остаётся равной нулю, что понижает возможности использования этого преобразования для построения решений, обладающих достаточно высокой степенью общности.

4.3 Общее гармоническое решение

Считая, что все поля зависят от одной гармонической функции $\lambda = \lambda(x^k)$,

$$\Delta\lambda = 0, \quad (4.274)$$

то есть, положив $u = u(\lambda)$, $v = v(\lambda)$, $\varkappa = \varkappa(\lambda)$, можем перейти к системе, описываемой эффективным лагранжианом

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \left[\varkappa'^2 - (u' - \gamma \varkappa v')^2 - v'^2 \right], \quad (4.275)$$

где штрих обозначает производную по λ . Эффективно мы получили классическую систему, характеризуемую тремя обобщенными координатами, зависящими от "времени" λ . Сразу видно, что координаты u и v являются циклическими. Соответствующие им уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$[u' - \gamma \varkappa v']' = 0, \quad (4.276)$$

$$[v' - \gamma \varkappa (u' - \gamma \varkappa v')]' = 0 \quad (4.277)$$

и позволяют выписать два интеграла движения

$$u' - \gamma \varkappa v' = C_1, \quad (4.278)$$

$$v' - \gamma \varkappa C_1 = C_2. \quad (4.279)$$

Подставляя первый из этих интегралов в уравнение (4.253), делаем вывод, что магнитное поле всегда имеет следующий вид:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -C_1 \vec{\nabla} \lambda \quad (4.280)$$

В дальнейшем мы не будем интересоваться явным видом функции u , так как её физический смысл исчерпывается этим выражением для вектора магнитной индукции.

Уравнение, соответствующее переменной \varkappa , выглядит следующим образом:

$$\varkappa'' - \gamma(u' - \gamma \varkappa v')v' = 0 \quad (4.281)$$

и при подстановке интегралов движения (4.278), (4.279) принимает вид:

$$\varkappa'' - (\gamma C_1)^2 \varkappa - \gamma C_1 C_2 = 0. \quad (4.282)$$

Решая его и интегрируя выражение (4.279), получаем общее гармоническое решение уравнений аксион-Максвелловской электродинамики в стационарном случае:

$$\varkappa = Ae^{\gamma C_1 \lambda} + Be^{-\gamma C_1 \lambda} - \frac{C_2}{\gamma C_1}, \quad (4.283)$$

$$v = Ae^{\gamma C_1 \lambda} - Be^{-\gamma C_1 \lambda} + D. \quad (4.284)$$

Здесь A, B, D - произвольные константы интегрирования, λ - произвольная гармоническая функция пространственных переменных.

Самый простой и физически интересный вариант - сферически-симметричное решение. Как известно, общее сферически симметричное решение уравнения Ла-

пласа имеет кулоновский вид. Рассмотрим поэтому решение с

$$\lambda = \frac{q}{r}, \quad (4.285)$$

где q - произвольная константа. Введем ограничение на множество решений: потребуем, чтобы все потенциалы имели кулоновскую асимптотику на пространственной бесконечности. Это позволяет зафиксировать две константы из трех. Решения с правильной асимптотикой выглядят так:

$$\varkappa = \frac{C_2}{\gamma C_1} \left(ch\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1 \right) - D sh\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right), \quad (4.286)$$

$$v = \frac{C_2}{\gamma C_1} sh\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - D \left(ch\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1 \right). \quad (4.287)$$

Магнитное поле в этом случае имеет кулоновский вид с эффективным зарядом $q_m = C_1 q$. Эффективные электрический и аксионный заряды находим, раскладывая потенциалы в ряд по степеням $\frac{1}{r}$ до первого порядка. Они равны $q_e = C_2 q$, $q_\varkappa = -\gamma D C_1 q$. Зная выражения для зарядов, можем переписать решение в терминах физических констант. Оно будет выглядеть следующим образом:

$$\varkappa = \frac{q_e}{\gamma q_m} \left(ch\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) - 1 \right) + \frac{q_\varkappa}{\gamma q_m} sh\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right), \quad (4.288)$$

$$v = \frac{q_e}{\gamma q_m} sh\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) + \frac{q_\varkappa}{\gamma q_m} \left(ch\left(\frac{\gamma q_m}{r}\right) - 1 \right). \quad (4.289)$$

Отметим, что при стремлении к нулю магнитного заряда аксионное и электрическое поля принимают кулоновский вид.

Интересный случай реализуется при значении $D = \frac{C_2}{\gamma C_1}$ или, в терминах зарядов, $q_\varkappa = -q_e$.

$$\varkappa = \frac{q_e}{\gamma q_m} \left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1 \right), \quad (4.290)$$

$$v = -\frac{q_e}{\gamma q_m} \left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1 \right). \quad (4.291)$$

Эти потенциалы имеют конечную глубину в начале координат. Магнитное поле при этом остаётся кулоновским, в соответствии с формулой (4.280).

При написании этой главы использованы материалы работы [55]. Личный вклад автора состоит в компактификации четырехмерной модели на три измерения, в вычислении всех преобразований симметрии, в нахождении и анализе всех представленных в главе решении. Текст работы написан автором лично.

Глава 5. Возможные способы экспериментальной проверки

В данной главе будут рассмотрено построение следствий теории, допускающих экспериментальную проверку. Рассмотрение будет проводиться в первом порядке теории возмущений, поэтому правильнее будет воспринимать его как демонстрацию принципов, нежели как результаты, позволяющие на самом деле непосредственную экспериментальную проверку теории.

5.1 Модифицированная формула Резерфорда для рассеяния пробных частиц на центрально-симметричном потенциале ДМЭ

В главе 3 нами был получен эффективный потенциал движения пробной частицы под действием модифицированной силы Лоренца в поле точечного источника ДМЭ

$$U = -\frac{4q}{\alpha} \left[\operatorname{arctg} \left(e^{\alpha\phi_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right) - \frac{\lambda}{2} \right]. \quad (5.292)$$

На первый взгляд кажется, что самым эффективным экспериментом по рассеянию на таком потенциале будет наблюдение динамики центрального удара или рассеяния на малые углы, при высоких энергиях. Регистрация «пролета насквозь» при некоторой энергии была бы неоспоримым свидетельством достоверности изучаемой модели. Однако, как известно, эксперименты по рассеянию, в частности,

электронов на электронах и позитронах, до сих пор не давали подобных результатов. Кроме того, при высоких энергиях изучение формы потенциала затруднено из-за эффектов рождения частиц.

С другой стороны, классическая электродинамика на сегодняшний день имеет беспрецедентно точное согласие с экспериментом, поэтому наибольший интерес представляют малые поправки к её результатам, например, в виде разложения в ряд по некоторому малому параметру. В нашем случае таким параметром может служить константа связи α , так как при стремлении её к нулю дилатон перестаёт оказывать влияние на электромагнитные поля. Рассмотрим поэтому приближённое выражение для потенциала в виде разложения по степеням константы связи:

$$U = \frac{qq_e}{r} + \alpha \frac{qq_e q_d}{2r^2}. \quad (5.293)$$

Конечно, в таком виде потенциал лишается своей главной характерной особенностью, а именно, он перестаёт быть ограничен в нуле. Но при изучении рассеяния на малые углы или при низких энергиях данное выражение позволяет получить достаточно хорошее приближение, которое позволит отличить потенциал U от кулоновского.

Главной величиной, характеризующей какой-либо объект в экспериментах по рассеянию, является дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как относительное число налетающих частиц, попадающих в результате рассеяния в телесный угол $d\Omega$ в направлении θ . Мы пользовались методом вычисления дифференциального сечения через амплитуду рассеяния [56]. При упругом взаимодействии волновую функцию пробной частицы на большом расстоянии от центра потенциала можно представить в виде суммы набегающей плоской волны и расходящейся сферической:

$$\Psi(\theta) = \left(e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right) e^{-i\omega t}, \quad (5.294)$$

где k - волновое число пробной частицы, движущейся первоначально вдоль оси z . Здесь $f(\theta)$ - амплитуда рассеяния, содержащая всю угловую информацию. Нетрудно заметить, что её квадрат определяет вероятность для данной частицы быть рассеянной в телесный угол $d\Omega$ в направлении θ , а это и есть определение диффе-

ренциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (5.295)$$

Можно также показать [57], что амплитуда рассеяния вычисляется как Фурье-образ потенциала:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} U(r) d^3r \quad (5.296)$$

где m - масса частицы, \vec{q} - переданный импульс, измеренный в единицах волнового числа.

Вычислить амплитуду рассеяния на точном потенциале (5.292) не удалось из-за его сложности, поэтому мы обращаемся к приближенному выражению для потенциала (5.293) в первом порядке константы α

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int \int e^{iqr\cos\vartheta} \left[\frac{qq_e}{r} + \alpha \frac{qq_e qd}{2r^2} \right] r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\phi, \quad (5.297)$$

где интегрирование ведется по всему пространству. После интегрирования по угловым переменным получаем радиальный интеграл следующего вида:

$$f(\theta) = -\frac{2meq_e}{q\hbar^2} \int_0^\infty \left(\sin(qr) + \frac{\alpha q_e c t g \lambda}{4} \frac{\sin(qr)}{r} \right) dr, \quad (5.298)$$

где заряд пробной частицы временно обозначен e , чтобы не путать его с переданным импульсом q . Данный интеграл разбивается на два, из которых первый берется при помощи введения дополнительного параметра:

$$I_1 = \int_0^\infty \sin(qr) dr = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{b}} \sin(qr) dr. \quad (5.299)$$

Дважды применяя к выражению под знаком предела процедуру интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r}{b}} \sin(qr) dr = b^2 q - b^2 q^2 \int_0^\infty e^{-\frac{r}{b}} \sin(qr) dr, \quad (5.300)$$

откуда, выражая интересующий нас интеграл и переходя к пределу $b \rightarrow \infty$, находим

$$I_1 = \frac{1}{q}. \quad (5.301)$$

Второй интеграл в выражении для амплитуды рассеяния берется путем интегрирования по комплексной плоскости. Учитывая, что

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{r} dr = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (5.302)$$

и подставляя значения вычисленных интегралов I_1 и I_2 в формулу для амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = -\frac{2meq_e}{q\hbar^2} \left(I_1 + \frac{\alpha q_e ctg\lambda}{4} I_2 \right), \quad (5.303)$$

выражаем модуль переданного импульса через импульс налетающей частицы p и угол рассеяния θ по формуле $q = \frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}$. В результате мы находим следующую модификацию формулы Резерфорда:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mqe}{2p^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{\alpha\pi}{4\hbar} \frac{m^2 q^2 q_e^2 q_d}{p^3} \frac{1}{\sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (5.304)$$

Интересно, что в поправочное слагаемое явно входит постоянная Планка \hbar .

5.2 Рассеяние пробных частиц на точечном дионе в электродинамике с аксионом

В главе 4 мы получили потенциалы электромагнитного поля, создаваемого точечным источником в аксион-максвелловской электродинамике. Точечный источник является так называемым дионом: частицей, обладающей и магнитным, и электрическим зарядами [58], [59]. Причем магнитный заряд точечный, а (эффективный) электрический распределен сложным образом в пространстве. Электростатический потенциал может быть всюду конечным, а магнитное поле при любых параметрах имеет кулоновский вид.

Изучим движение пробной точечной бесспиновой частицы с электрическим зарядом в таких полях. Будем предполагать, что взаимодействие осуществляется посредством обычной силы Лоренца:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} v + \frac{q_m}{r^3} \cdot [\dot{\vec{r}} \times \vec{r}]. \quad (5.305)$$

Заряд пробной частицы будем считать единичным, чтобы избежать выписывания лишних констант. Вопрос о правомерности использования классического выражения для силы Лоренца в теории с аксионом остаётся открытым, как и вопрос о построении выражения, учитывающего присутствие аксионного поля, исходя из принципа наименьшего действия, подобно тому, как это сделано в работе [51]. Мы здесь используем, за неимением лучшего, классическое выражение для силы Лоренца. Можно показать, что при таком движении сохраняются следующие величины: энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + v(r), \quad (5.306)$$

модуль момента импульса

$$\tilde{L} = |[\vec{r} \times m\vec{v}]| = mbv_0, \quad (5.307)$$

где b - прицельный параметр, v_0 - скорость пробной частицы на бесконечности, и обобщенный момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] - q_m \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.308)$$

Из сохранения двух последних величин следует, что частица движется по поверхности конуса с углом раствора, определяемым соотношением

$$ctg(\theta) = \frac{q_m}{mbv_0}. \quad (5.309)$$

При этом радиальное движение и временная зависимость азимутального угла определяются только электростатическим притяжением. Нас интересует угловая часть движения

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - v(r) - \frac{\tilde{L}^2}{2mr^2}}}. \quad (5.310)$$

Самая большая сложность состоит в вычислении этого интеграла. В общем виде он не выражается через элементарные функции, но можно рассмотреть теорию возмущений по степеням малого параметра γ . Разложим потенциал электрического поля в ряд до второго порядка включительно:

$$v = \frac{q_e}{r} + \frac{\gamma q_m q_\varkappa}{2r^2} + \dots \quad (5.311)$$

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{q_e}{E} \frac{1}{r} - \left(\frac{\gamma q_m q_\varkappa}{2E} + \frac{\tilde{L}^2}{2mE} \right) \frac{1}{r^2}}}. \quad (5.312)$$

В последнем выражении результат вычисления интеграла будет разным в зависимости от знака множителя перед $\frac{1}{r^2}$, а именно: при $\tilde{L}^2 > -m\gamma q_m q_\varkappa$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{\cos(\theta) \sqrt{\frac{\gamma m q_\varkappa}{q_m} + \text{tg}^2(\theta)}} \cdot \text{arctg} \sqrt{\frac{2E q_m^2}{m q_e^2} \left(\frac{\gamma m q_\varkappa}{q_m} + \text{tg}^2(\theta) \right)}, \quad (5.313)$$

при $\tilde{L}^2 < -m\gamma q_e q_m$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = \frac{-1}{2 \cos(\theta) \sqrt{-\left(\frac{\gamma m q_\varkappa}{q_m} + \text{tg}^2(\theta) \right)}} \cdot \ln \left| \frac{1 - \sqrt{-\frac{2E q_m^2}{m q_e^2} \left(\frac{\gamma m q_\varkappa}{q_m} + \text{tg}^2(\theta) \right)}}{1 + \sqrt{-\frac{2E q_m^2}{m q_e^2} \left(\frac{\gamma m q_\varkappa}{q_m} + \text{tg}^2(\theta) \right)}} \right|. \quad (5.314)$$

Здесь мы взяли значения на бесконечном расстоянии от центра, существенные для нашей задачи, и учли дополнительное условие стремления к нулю угла рассеяния при стремлении к бесконечности прицельного параметра. В критической точке

$\text{tg}(\theta) = \sqrt{-\frac{\gamma m q_\times}{q_m}}$ эти выражения сшиваются непрерывным образом.

Угол рассеяния в данном случае это угол между двумя образующими конуса с углом раствора θ , лежащими в плоскостях, проходящих через ось конуса под углом $2\varphi|_{r \rightarrow \infty}$ друг к другу. Все эти углы связаны друг с другом соотношением

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sin(\theta) \sin(\varphi|_{r \rightarrow \infty}). \quad (5.315)$$

(Мы считаем, что движение симметрично во времени, и моменту $t = 0$ соответствует нулевой азимутальный угол, а также учитываем, что скорость налетающей частицы направлена к центру, а рассеянной - от центра).

После этого дифференциальное сечение вычисляется по обычной формуле

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{bdb}{d(\cos\Theta)} \right|. \quad (5.316)$$

Так как угол θ при фиксированной энергии пробных частиц однозначно связан с прицельным параметром (формула (5.309)), удобно перейти к выражению в терминах угла θ . Правда, в этот момент вскроется неприятная особенность: связь угла рассеяния с прицельным параметром (и углом θ) неоднозначная, поэтому для вычисления сечения нужно учесть вклады от всех значений прицельного параметра, для которых частицы рассеиваются в данном направлении:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\theta_i} \left(\frac{q_m}{mv} \right)^2 \frac{1}{2 \cos^4 \theta} \left| \frac{\sin 2\theta}{\sin \Theta} \frac{d\theta}{d\Theta} \right|. \quad (5.317)$$

Суммирование по всем подходящим углам раствора конуса.

Интересной особенностью является также то, что сечение стремится к бесконечности при $\sin \Theta = 0$ и $\frac{d\Theta}{d\theta} = 0$. В литературе первый случай называют «глюрией» (glory), а второй - «радугой» (rainbow) [60]. Углы рассеяния, соответствующие этим эффектам, можно рассчитать численными методами. Случаю «glory» соответствуют те прицельные параметры, для которых угол Θ принимает значение π , случаю «rainbow» - точки, в которых зависимость угла рассеяния от прицельного параметра достигает экстремумов. Особенностью рассмотренного потенциала является то, что при условии $-\frac{2\gamma E q_\times q_m}{q_e^2} > 1$ прицельные параметры, при которых наблюдаются указанные эффекты, группируются вокруг значения

$b = \sqrt{-\frac{q_m}{2E}(\gamma q_z + \frac{q_e^2}{2Eq_m})}$. Это соответствует углу раствора конуса, для которого $tg(\theta) = \sqrt{-\frac{m}{q_m}(\gamma q_z + \frac{q_e^2}{2Eq_m})}$.

Аналитическое вычисление дифференциального сечения рассеяния становится возможным при особом выборе параметров в выражении для потенциала (4.289). Первый - тривиальный - случай реализуется при $q_m = 0$. В этом случае магнитное поле становится тождественно равным нулю, потенциал электрического поля становится кулоновским с зарядом q_e . Дифференциальное сечение рассеяния описывается формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{eq_e}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}. \quad (5.318)$$

Во втором случае мы требуем выполнения условия $q_e = 0$. Тогда потенциал (4.289) описывает поле частицы, электрический заряд которой кажется нулевым удалённому наблюдателю, но электростатическое взаимодействие с пробными зарядами сохраняется на коротких дистанциях от центра. В разложении этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$ младший порядок соответствует второй степени. Выражение (5.312) в этом случае удобно переписать в терминах прицельного параметра b . При озвученных условиях оно выглядит так:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(m vb)^2 + (eq_m)^2}{(m vb)^2 + \gamma meq_m q_z}}. \quad (5.319)$$

Тогда выражение для угла рассеяния (5.315) принимает вид

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{eq_m}{m vb}\right)^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{eq_m}{m vb}\right)^2}{1 + \frac{\gamma meq_m q_z}{(m vb)^2}}}\right). \quad (5.320)$$

Рассмотрим рассеяние на малые углы, для чего в последней формуле перейдем к пределу при $b \rightarrow \infty$ и рассмотрим её в младшем порядке разложения по степеням малого параметра $\frac{1}{b}$. Получаем выражение

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = -\left(\frac{eq_m}{m vb}\right)^2, \quad (5.321)$$

которое после подстановки в формулу (5.316) приводит к следующему выражению для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(eq_m)^2}{16mE} \frac{1}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (5.322)$$

Это приближённое выражение при указанных условиях совпадает с выражением для дифференциального сечения рассеяния на кулоновском дионе.

При написании этой главы использованы материалы работы [55]. Личный вклад автора состоит в нахождении всех представленных в главе формул для дифференциальных сечений рассеяния, в их анализе и представлении результатов. Текст работы написан автором лично.

Заключение

Основные результаты работы следующие:

1. Найдено общее гармоническое решение уравнений нелинейной электродинамики с дилатоном. Для этого решена задача компактификации полного лагранжиана модели сначала на три измерения путём введения скалярного потенциала магнитного поля. Показано, что гармонические поля подчиняются системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых может быть найдено в терминах эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов Лежандра второго рода. Показано, что центрально-симметричное магнитное поле всегда имеет кулоновский вид. Отдельно рассмотрены частные случаи, в которых поля могут быть выражены в элементарных функциях.

2. Установлена дуальность между статической электродинамикой Максвелла с дилатоном и стационарной Общей Теорией Относительности в вакууме. На основании данной дуальности разработан метод применения известных симметрий лагранжиана ОТО для построения точных решений электродинамики с дилатоном. Построено общее центрально-симметричное решение электростатики и магнитостатики, включающих дилатонное поле.

3. На основании принципа симметрии предложено модифицированное выражение для силы Лоренца, действующей на заряженную частицу в полях дилатон-Максвелловской электродинамики. Показано, что движение под действием этой силы в найденных ранее в работе полях является потенциальным и выведено выражение для эффективного потенциала. Показано, что наблюдаемая полная энергия полей зависит от того, какой вариант теории использовался для вычисления её величины на основании характера движения пробных частиц.

4. Разработан метод построения точных решений электродинамики с дила-

тоном путём переноса известных решений ОТО. Применение этого метода проиллюстрировано в процессе построения решения, соответствующего решению Керра-НУТ ОТО. Для этого решения и его важных частных случаев вычислены эффективные заряды и установлена форма поверхности, обладающей свойством «горизонта событий».

5. Найден эффективный лагранжиан, описывающий динамику полей электродинамики Максвелла с аксионом в стационарном случае. Для этого лагранжиана найдена полная группа преобразований симметрии, включающая одно «скрытое» преобразование, которое может быть использовано в процедуре построения новых точных решений.

Найдено общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с аксионом. Показано, что магнитное поле в центрально-симметричном случае всегда имеет кулоновский вид, в то время, как аксион и потенциал электрического поля сложным образом распределены в пространстве. При особом выборе параметров решения поля могут иметь конечную величину во всём пространстве.

6. Вычислена поправка к формуле Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния точечных заряженных частиц на эффективном потенциале взаимодействия в электродинамике с дилатоном.

Найдено дифференциальное сечение рассеяния пробных частиц на дионе, обладающем аксионным зарядом.

Благодарности

Автор благодарит научного руководителя д. ф-м. н. Олега Вячеславовича Кечкина за научное руководство, поддержку и обсуждение результатов.

Литература

- [1] С. Вайнберг, Мечты об окончательной теории: Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. Пер. с англ., М.: УРСС, (2008).
- [2] CMS collaboration, Physics Letters B, V.716, 1, (2012)
- [3] ATLAS collaboration, Physics Letters B, V.716, 1, (2012)
- [4] L. Papantonopoulos (ed.), The invisible matter. Dark matter and dark energy, Springer, (2007).
- [5] J.M. Overduin, P.S. Wesson, Phys. Rept. 283, 303 (1997).
- [6] М.Грин, Дж. Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
- [7] О.В. Кечкин, Гравитирующие сигма-модели в теории струн, ЭЧАЯ, т.35, вып. 3, стр. 709-762, 2004.
- [8] L. Smolin. The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of a science and what comes next. Houghton Mifflin Company, New York. (2006).
- [9] P. Sikivie, Phys. Rev. Letters, V. 51, N. 16 (1983)
- [10] L. J. Rosenberg, Axions 2010 - Proceedings of the International Conference, (2010)
- [11] P. Svrcek, E. Witten, JHEP06, 051 (2006)
- [12] Y. Bai, M. Carena, J. Lykken, Phys. Rev. Lett. 103, 261803 (2009)
- [13] Ian P. Stern, AIP Conference Proceedings 1604, 456 (2014)

- [14] S Andriamonje, S Aune, D Autiero et. al. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, V. 2007 (2007)
- [15] Y. M. Cho and J. H. Kim, Phys. Rev. D 79, 023504 (2009)
- [16] D.A.Burton, T.Dereli, R.W.Tucker, Physics Letters B, V. 703, 4, (2011)
- [17] G.W.Gibbons, D.A.Rasheed, Physics Letters B, V. 365, 1–4, (1996)
- [18] A. B. Balakin and Wei-Tou Ni, Classical and Quantum Gravity, V. 27, 5 (2010)
- [19] A. G. Nikitin and O. Kuriksha, Phys. Rev. D 86, 025010 (2012)
- [20] A. G. Nikitin and O. Kuriksha, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, V. 17, 12, (2012)
- [21] В.И. Денисов, Лекции по электродинамике, М.: УНЦ ДО, (2007).
- [22] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. М.: Наука, (1988).
- [23] M. Born and L. Infeld, Foundations of the New Field Theory // Proc. R. Soc. Lond. A 144, 425-451, (1934).
- [24] P. Gaete, J. Helayl-Neto, Eur. Phys. J. C 74:2816 (2014).
- [25] H. H. Soleng, Phys. Rev. D, V 52, N 10 (1995).
- [26] S. I. Kruglov, Annals of Physics, 378, 59–70, (2017).
- [27] W. Heisenberg and H. Euler, Zeitschr. Phys. 98 , 714, (1936).
- [28] П. А. М. Дирак, Общая теория относительности, Пер. с англ., М.: Атомиздат (1978).
- [29] F.J. Ernst, Phys. Rev. 167, 1175 (1968).
- [30] H. Shtefani, Differential equations: their solutions using symmetries, Cambridge University Press, (1989).
- [31] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).

- [32] E. Newman, L. Tamburino, T. Unti, *J. Math. Phys.* 4, 915 (1963).
- [33] V. A. Belinskii, V. E. Sakharov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 77, 3-19 (1979).
- [34] Д. А. Третьякова, *Расширенные теории гравитации и возможности их наблюдательной проверки в небесной механике и космологии (кандидатская диссертация)*, 2015 год.
- [35] J. E. Kim, G. Carosi, *Rev. Mod. Phys.* V. 82 (2010).
- [36] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, R. P. Hudson *Phys. Rev.* 105, 1413 (1957).
- [37] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay, *Phys. Rev. Letters*, V 13, N 4, (1964)
- [38] Л. Б. Окунь, *УФН*, Т. 95, вып. 3, (1968).
- [39] R. D. Peccei, H. R. Quinn, *Phys. Rev. Letters*, V. 38, N 25, (1977).
- [40] F. Wilczek, *Phys. Rev. Letters*, V. 40, N. 5, (1978).
- [41] D. F. J. Kimball, S. Afach, et. al. *arXiv:1711.08999v3* (2018).
- [42] D. Budker, P. W. Graham, M. Ledbetter, S. Rajendran, A. Sushkov, *Physical Review X*, 4(2), 021030 (2014).
- [43] J. Jaeckel, A. Ringwald, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 60:405–37 (2010).
- [44] D.V. Gal'tsov, A.A. Garcia, O.V. Kechkin, *Class.Quant.Grav.*12:2887-2903, (1995).
- [45] S. Yazadjiev, *Int.J.Mod.Phys. D*, (1999).
- [46] D. Garfinkle, G. Horowitz, A. Strominger, *Phys. Rev.* D43, 3140, (1991).
- [47] Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. *Курс современного анализа*. Ч.2. М. (1963).
- [48] Gibbons G. W., Wells C. G. *Class. Quant. Grav.* 11. 2499. (1994).

- [49] Кечкин О. В., Мошарев П. А. Учёные записки физического факультета МГУ. №6. (2019)
- [50] Кечкин О. В., Мошарев П. А. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. № 5. (2020)
- [51] I. P. Denisova, O. V. Kechkin, Phys.Part.Nucl.Lett. 15, N 5. (2018).
- [52] Kechkin O. V., Mosharev P. A. International Journal of Modern Physics A. V. 31, №. 23 (2016)
- [53] Kechkin O. V., Mosharev P. A. Modern Physics Letters A. V. 31, № 31. (2016)
- [54] Кечкин О. В., Денисова И. П., Мошарев П. А. Ученые Записки Физического Факультета МГУ. № 3. (2019)
- [55] Кечкин О. В., Мошарев П. А. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. № 3 (2020)
- [56] Л. Валантэн, Субатомная физика: ядра и частицы, том 1. Элементарный подход, М.: Мир. (1986).
- [57] А.Г. Ситенко, Теория рассеяния (Курс лекций), Киев, Вища Школа, (1975).
- [58] Y. M. Shnir, Magnetic Monopoles. Springer. (2005)
- [59] J. Schwinger, Ann. Phys. 101. P. 451. (1976).
- [60] R. G. Newton. Scattering Theory of Waves and Particles. Springer Science + Business Media. (1982).