ПОДОБИЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Г. А. ТИРСКИЙ

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

SIMILARITY AND PHYSICAL MODELING

G. A. TIRSKIY

The mathematical rules of physical simulation of natural phenomena (processes) are described with the help of models. The both necessary and sufficient conditions of similarity of two phenomena are established, in model and in nature. It is shown how to use these conditions to design natural objects with given parameters, or to predict and study natural phenomena. The examples of using the rule of simulation are given. School education is sufficient to understand the material.

Изложены математические правила физического моделирования натурных явлений (процессов) на моделях. Установлены необходимые и достаточные условия подобия двух явлений в модели и натуре и показано, как ими пользоваться для проектирования натурных объектов с заданными параметрами или для предсказания и исследования явлений натурных процессов. Даны примеры применения правила моделирования. Для понимания материала достаточно школьного образования.

www.issep.rssi.ru

© Тирский Г.А., 2001

ВВЕДЕНИЕ

Какой мальчик не строил моделей самолетов, кораблей, плотин и водосливов? Но даже взрослые и опытные инженеры-конструкторы, прежде чем изготовить крупное и дорогостоящее сооружение, например высокую телебашню, подводную лодку или систему теплозащиты космических аппаратов, для получения их наилучших (оптимальных) характеристик в реальных условиях работы прибегают сначала к экспериментам на моделях – моделированию. При этом в эксперименте на моделях измеряют, например, в аэродинамических трубах силу сопротивления самолетов, в струях плазмотронов тепловые потоки к телам, на прессах нагрузки, разрушающие модели мостов, и т.п. Такие эксперименты на моделях будут содержательными и полезными для проектирования натурных объектов, если они проводятся с соблюдением определенных правил моделирования. В противном случае результаты экспериментов представляют собой набор малосодержательных фактов, бесполезных для проектирования новых натурных объектов.

Физическое моделирование в отличие от математического – это замена изучения интересующего нас явления, протекающего в натуре, изучением аналогичного (подобного) явления на модели, как правило, меньшего или большего размера (или, другими словами, на модели со значениями определяющих параметров этого явления, удобно достижимыми в эксперименте) обычно в специальных лабораторных условиях. Основной смысл моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями, которые удобно и с меньшими затратами средств и времени изготовить, можно было указать наилучшие характеристики натурного изделия (процесса), а иногда просто установить неизвестные ранее закономерности.

Установление искомых закономерностей с помощью физического моделирования зачастую является единственно возможным способом экспериментального изучения и решения важных и нужных практических задач. Так обстоит дело при изучении природных явлений, где процессы бывают необычайно сложны и протекают в течение десятков, сотен или даже тысяч

лет. В условиях модельных опытов подобное явление может продолжаться всего несколько часов или дней. С этим мы встречаемся при моделировании явлений просачивания нефти, разрабатываемой и откачиваемой через скважины, таяния и сползания ледников и др. Могут быть и обратные случаи, когда вместо исследования очень быстро протекающего в природе явления можно экспериментально изучать подобное ему явление, происходящее на модели гораздо медленнее. Моделирование с успехом применяется в разработке новых типов самолетов, космической техники, создании ядерного оружия, кораблестроении, автомобилестроении, биомеханике, океанологии, метеорологии, астрофизике, науке о Земле и планетах и во многих других областях человеческой деятельности [1–5].

Физическое моделирование – ответственная научная задача, имеющая общее принципиальное и познавательное значение. Оно основывается на глубоком проникновении в явление (в процесс), в разработку экспериментальных и теоретических методов исследования для получения достоверных результатов и в итоге получения систематических правил и рекомендаций для решения конкретных практических задач. Альтернативой физическому моделированию является **математическое моделирование**, приведшее в последние десятилетия XX века к подлинно революционному преобразованию науки вообще и математики в особенности и гармонично дополняющее физическое моделирование. Математическое моделирование – это, как правило, численное решение на ЭВМ алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений, вытекающих из применения законов механики, физики, химии, биологии, экономики к решению конкретных задач [6].

Для правильного физического моделирования необходимо, во-первых, установить условия подобия двух явлений – в модели и натуре и, во-вторых, определить, как ими пользоваться для проектирования натурных объектов с заданными параметрами или предсказания явлений натурных процессов. Исследователям, как теоретикам, так и экспериментаторам, полезно знать, что могут дать методы подобия и как ими пользоваться. Об этом наша статья.

ПОДОБНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Понятие механического или физического подобия можно рассматривать как обобщение геометрического подобия, хорошо известного из школьного курса геометрии. Две геометрические фигуры подобны, если отношения всех соответствующих длин одинаковы, а безразмерные параметры – углы при соответствующих вершинах – для обеих фигур равны.

Для количественного определения физического подобия вернемся к анализу размерностей и кратко сформулируем его главный результат [7]. Пусть ищется (имеется, подозревается) какая-либо зависимость, определяющая искомую величину a в функции n определяющих параметров $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$a = f(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n). \qquad (1)$$

Если эта зависимость выражает некоторую физическую закономерность, то она должна отражать тот бесспорный факт, что функция (1) не должна зависеть от произвола выбора единиц измерения. Для получения следствия из этого факта разобьем параметры a, a_1, a_2, ..., a_n на две группы, как это сделано в (1). В первую группу ($a_1, a_2, ..., a_k$; $k \le n$) включаются величины с независимыми размерностями (например, некоторая длина, скорость, плотность и т.д.); во вторую группу ($a, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n$) входят остальные параметры с размерностями, выражаемыми через размерности величин первой группы. Тогда размерности величин $a, a_{k+1}, ..., a_n$ будут выражаться в виде произведений степеней от размерностей параметров $a_1, a_2, ..., a_k$:

$$\begin{aligned} [a] &= [a_1]^{\alpha}[a_2]^{\beta}\dots[a_k]^{\gamma}, \\ [a_{k+1}] &= [a_1]^{\alpha_{k+1}}[a_2]^{\beta_{k+1}}\dots[a_k]^{\gamma_{k+1}}, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ [a_n] &= [a_1]^{\alpha_n}[a_2]^{\beta_n}\dots[a_k]^{\gamma_n}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Степени $\alpha, \beta, ..., \gamma$ получаются сравнением размерностей левых и правых частей в (2). При этом величины, как легко установить,

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{\alpha}\dots a_k^{\gamma}}, \qquad \Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}}\dots a_k^{\gamma_{k+1}}}, \qquad \Pi_{k+i} = \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}}\dots a_k^{\gamma_{k+i}}}, \quad \dots, \quad \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n}\dots a_k^{\gamma_n}} \qquad (3)$$

оказываются безразмерными (числители и знаменатели в них имеют одинаковые размерности), то есть их значения будут одними и теми же при любом выборе единиц измерения.

Из независимости физической закономерности (1) от выбора единиц измерения вытекает, что соответствующее ей соотношение можно представить в виде зависимости только между безразмерными параметрами ($\Pi = f/(a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_k^{\gamma})$) [7]

$$\Pi = \Phi(\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n), \qquad (4)$$

а сама искомая зависимость принимает вид

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_k^{\gamma}\Phi(\Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n), \qquad (5)$$

то есть искомая функция на самом деле всегда может быть представлена через функцию меньшего числа безразмерных аргументов. Число аргументов в (4) меньше исходного числа n на столько, сколько среди величин $a_1, a_2, ..., a_n$ имеется величин с независимыми размерностями. Уменьшение числа аргументов упрощает исследование, иногда существенно. Приведение искомой закономерности к безразмерному виду (4) называется *пи-теоремой* (П-*теорема*). Теперь можно количественно определить понятие *физического подобия явлений.*

Для физического подобия двух геометрически подобных явлений необходимо и достаточно, чтобы они определялись одним и тем же набором определяющих параметров $a_1, a_2, ..., a_n$, численные значения которых могут отличаться в этих явлениях, но притом так, что численные значения безразмерных параметров $\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$ совпадают в этих явлениях. В связи с принятым определением подобных явлений параметры $\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$ называются *параметрами подобия.*

Итак, при подобии двух явлений, которые мы будем далее называть одно натурным и другое модельным, определяемая величина a должна иметь одинаковую функциональную зависимость от определяющих параметров $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ (1). То есть функция f для обоих явлений будет одна и та же, поскольку явления подобны, хотя численные значения определяющих параметров и определяемой физической величины a могут различаться. Поэтому для натурного явления искомая зависимость (1) принимает вид

$$a^{(н)} = f(a_1^{(н)}, ..., a_k^{(н)}, a_{k+1}^{(н)}, ..., a_n^{(н)}), \qquad (6)$$

для модельного явления

$$a^{(м)} = f(a_1^{(м)}, ..., a_k^{(м)}, a_{k+1}^{(м)}, ..., a_n^{(м)}). \qquad (7)$$

Здесь верхние индексы (н) и (м) относятся соответственно к натуре и модели. Применяя П-теорему, обе зависимости (6) и (7) можем переписать в безразмерном виде (см. (4))

$$\begin{aligned} \Pi^{(н)} &= \Phi(\Pi_{k+1}^{(н)}, ..., \Pi_n^{(н)}), \\ \Pi^{(м)} &= \Phi(\Pi_{k+1}^{(м)}, ..., \Pi_n^{(м)}). \end{aligned} \qquad (8)$$

Причем важно отметить, что здесь функция Ф для натуры и модели одна и та же, так как она в обоих случаях одинаково выражается через одну и ту же функцию f (см. (5)).

ПРАВИЛО ПЕРЕСЧЕТА ОПЫТОВ С ПОДОБНОЙ МОДЕЛИ НА НАТУРУ

Если условия подобия выполнены, то должны выполняться равенства

$$\Pi_{k+1}^{(м)} = \Pi_{k+1}^{(н)}, \quad ..., \quad \Pi_n^{(м)} = \Pi_n^{(н)}. \qquad (9)$$

Эти условия иногда именуют *критериями подобия.* Следовательно, с учетом (9) из (4) получаем равенство безразмерной определяемой величины для модели и натуры

$$\Pi^{(н)} = \Pi^{(м)}. \qquad (10)$$

Возвращаясь от равенства (10) обратно к размерным переменным $a, a_1, ..., a_k$, с учетом первой формулы (3) получим простое правило пересчета результатов измерений с подобного модельного явления на натурное явление в виде

$$a^{(н)} = a^{(м)}\left(\frac{a_1^{(н)}}{a_1^{(м)}}\right)^{\alpha} ... \left(\frac{a_k^{(н)}}{a_k^{(м)}}\right)^{\gamma}. \qquad (11)$$

Все, что стоит справа в (11) после $a^{(м)}$, часто называют переходным масштабом. Для k величин с независимыми размерностями $a_1, a_2, ..., a_k$ переходные масштабы могут быть произвольными, и их нужно задавать или определять условиями задачи, а при экспериментах – из опытов, имея в виду получение максимальной простоты и удобство моделирования. Переходные масштабы для всех же остальных размерных величин $a_{k+1}, ..., a_n$ для обеспечения подобия модели натуре получаются из условий (9) с использованием формул (3):

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^{(м)} = \Pi_{k+1}^{(н)}:\ a_{k+1}^{(м)} &= a_{k+1}^{(н)}\left(\frac{a_1^{(м)}}{a_1^{(н)}}\right)^{\alpha_{k+1}} ... \left(\frac{a_k^{(м)}}{a_k^{(н)}}\right)^{\gamma_{k+1}}, \\ \Pi_n^{(м)} = \Pi_n^{(н)}:\ a_n^{(м)} &= a_n^{(н)}\left(\frac{a_1^{(м)}}{a_1^{(н)}}\right)^{\alpha_n} ... \left(\frac{a_k^{(м)}}{a_k^{(н)}}\right)^{\gamma_n}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Приведенные выше простые определения и утверждения полностью исчерпывают содержание теории подобия: ничего другого в этой теории больше нет. Однако на практике часто выполнение всех условий (9) одновременно бывает затруднено (они всегда выполняются, если модель совпадает с натурой, но тогда моделирование теряет всякий смысл), и тогда встает вопрос о величине погрешностей (масштабном эффекте), которые возникают при переносе на натуру результатов, полученных на модели. Здесь возникает проблема приближенного моделирования (иногда часть безразмерных параметров слабо влияет на результат, тогда выполнение некоторых критериев (9) можно игнорировать, иногда прибегают к частичному или локальному моделированию, условия для которого ослаблены по сравнению с условиями полного моделирования (9)).

ПРИМЕРЫ

1. Задача об определении сопротивления тела, движущегося поступательно в безграничной вязкой жидкости с постоянной скоростью. Рассмотрим движение тела с постоянной скоростью υ в вязкой несжимаемой безграничной (занимающей очень большой по сравнению

с телом объем) жидкости, свойства которой вполне определяются плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ. Тело-модель должно быть геометрически подобно телу-натуре; направление скорости по отношению к соответствующим осям тела в модельном и натурном движениях должно быть одинаковым (условие кинематического подобия). Это приводит к равенству для модельного и натурного явлений соответствующих геометрических и кинематических параметров подобия. В качестве определяющего геометрического размера возьмем, например, диаметр его поперечного сечения d (миделя). Размерности определяющих параметров в классе LMT (длина, масса, время)

$$[\upsilon] = LT^{-1}, \quad [d] = L, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1},$$

то есть $n = 4$, $k = 3$. Следовательно, помимо геометрических и кинематических параметров подобия имеется только один динамический параметр подобия, который

$$\Pi_1 \equiv \mathrm{Re} = \frac{\rho\upsilon d}{\mu}.$$

По предложению А. Зоммерфельда этот параметр называется параметром или *числом Рейнольдса* в честь английского исследователя О. Рейнольдса, применившего одним из первых идеи подобия в гидродинамике. Определим теперь силу сопротивления F, размерность которой $[F] = [\rho\upsilon^2 S]$, $S \sim d^2$ – площадь поперечного сечения тела. Тогда, согласно П-теореме, получаем

$$F = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 S\Phi(\mathrm{Re}). \qquad (13)$$

Функцию Φ можно определить экспериментально или теоретически, решая, как правило численно, соответствующую гидродинамическую задачу об обтекании тела вязкой несжимаемой жидкостью. Нахождение функции одной переменной существенно легче, чем функции четырех переменных.

На рис. 1 представлен коэффициент сопротивления $\Pi \equiv C_D = F/(0{,}5\rho\upsilon^2 S) = \Phi(\mathrm{Re})$; $S = \pi d^2/4$ для шара с диаметром d. Данные многочисленных экспериментов, полученные в различных жидкостях и воздухе (синие и красные точки на рис. 1), с хорошей точностью ложатся на единую кривую. Как мы видим, эта кривая имеет достаточно сложный вид: участки плавного изменения Φ(Re) сменяются резким уменьшением или нарастанием, имеются участки, на которых Φ(Re) почти не зависит от Re. Все это свидетельствует об изменении режимов течения при изменении числа Рейнольдса, в частности о переходе ламинарного режима обтекания к турбулентному (при $\mathrm{Re} \geq 10^5$), которое представляет собой единственный параметр, определяющий структуру потока в целом при обтекании сферы. Если моделирование движения тела осуществляется в той же жидкости (газе), что и натурное движение, то условие динамического подобия сводится к равенству υd в модели и натуре, так что скорость движения геометрически, кинематически и динамически подобной модели малых размеров ($d^{(\text{м})} \ll d^{(\text{н})}$) должна быть больше скорости натуры ($\upsilon^{(\text{м})} \gg \upsilon^{(\text{н})}$), но так, чтобы $\upsilon^{(\text{м})} d^{(\text{м})} = \upsilon^{(\text{н})} d^{(\text{н})}$.

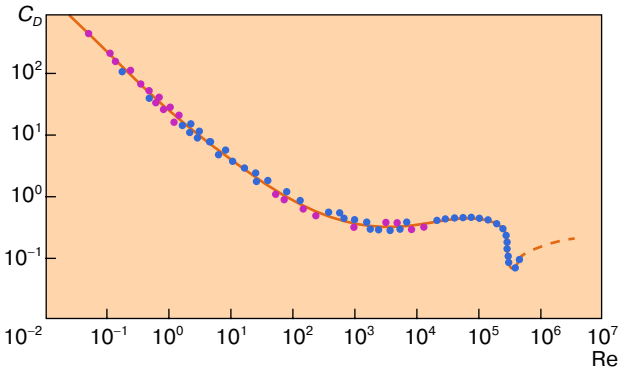

Рис. 1. Коэффициент сопротивления C_D шара как функция числа Рейнольдса Re. Синие и красные точки – экспериментальные данные, полученные в различных жидкостях и в воздухе, хорошо ложатся на единую кривую

Если геометрическое и кинематическое условия всегда можно реализовать в эксперименте, то условие $\upsilon d = \mathrm{const}$, как правило, трудно выполнить, особенно в тех случаях, когда обтекаемое тело имеет большие размеры, как, например, подводная лодка или крыло самолета. Если модель меньше натуры, то для сохранения того же самого значения числа Рейнольдса в опыте с моделью необходимо либо увеличивать скорость набегающего потока, что практически обычно неосуществимо, либо соответственно увеличить плотность или уменьшить вязкость потока. На практике эти обстоятельства сильно затрудняют изучение аэродинамического сопротивления в эксперименте. Выполнение необходимого условия равенства числа Рейнольдса в опыте числу Рейнольдса в натуре привело к постройке гигантских аэродинамических труб, в которых можно производить продувки самолетов в натуре, а также труб закрытого типа, в которых циркулирует с большой скоростью сжатый, то есть более плотный, воздух. Специальные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что иногда для тел с хорошо обтекаемой формой, например для крыла, со срывом потока на задней кромке крыла число Рейнольдса заметно влияет только на безразмерный коэффициент лобового сопротивления и иногда очень слабо влияет на безразмерный коэффициент подъемной силы и не-

которые другие величины. Следовательно, различие в значениях числа Рейнольдса для модели и натуры в некоторых вопросах несущественно. В этом случае приходим к возможности частичного моделирования.

При больших скоростях обтекания, например воздухом ($\upsilon \geq 200$ км/ч), появляется второй критерий подобия – *число Маха* υ/a (a – скорость звука). В этом случае полное моделирование одновременно по числам Рейнольдса и Маха становится невозможным.

2. Движение корабля. Вопросы моделирования имеют большое практическое значение в задачах о плавании и движении кораблей на поверхности воды. Рассмотрим установившееся прямолинейное поступательное движение корабля на поверхности покоящейся глубокой жидкости. При движении корабля сопротивление зависит от вязкости и волнового сопротивления, обусловленного образованием волн на поверхности жидкости за счет ее раздвигания корпусом корабля. Сопротивление за счет вязкости уменьшается с увеличением числа Рейнольдса и составляет при достаточно быстром движении корабля хорошо обтекаемой формы (с отрывом потока в корме) малую долю волнового сопротивления и может быть определено отдельно. Такое приближенное вполне достаточное для практики разделение сопротивления на две составляющие: одну, определяемую свойством вязкости и другую (волновую), определяемую свойством весомости жидкости – подтверждается как теоретическими, так и экспериментальными исследованиями.

Волновое сопротивление модели, геометрически подобной натуре, так же как и сопротивление натуры, будет зависеть от $L = a_1$ (длина корабля), $D = a_2$ (объемное водоизмещение – очевидно, что положение корабля относительно воды (осадка) влияет на сопротивление), $\rho = a_3$ (плотность жидкости), $g = a_4$ (ускорение свободного падения), $\upsilon = a_5$ (скорость движения корабля). Параметр g в данном случае существен, так как сила тяжести оказывает определяющее влияние на возбуждаемые кораблем волны (в невесомости волнового сопротивления не будет, останется только вязкое сопротивление). В классе LMT определяющие параметры имеют следующие размерности: $[L] = L$, $[D] = L^3$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[g] = LT^{-2}$, $[\upsilon] = LT^{-1}$, так что $n = 5$, $k = 3$ и динамически подобные движения (при соблюдении геометрического и кинематического подобия модели и натуры) будут определяться двумя безразмерными параметрами подобия

$$\Pi_1 \equiv \mathrm{Fr} = \frac{\upsilon}{\sqrt{gL}}, \qquad \Pi_2 \equiv \Psi = \frac{L}{\sqrt[3]{D}}$$

(коэффициент остроты). (14)

Параметр $\Pi_1 \equiv \mathrm{Fr}$ называется числом Фруда по имени известного английского инженера-кораблестроителя В. Фруда. Далее размерность силы сопротивления $[F] = MLT^{-2}$, так что

$$F = \rho g l^3 \Phi(\mathrm{Fr}, \Psi). \qquad (15)$$

Критериями подобия служат соотношения (параметр g можно менять только с большим трудом, при помощи непростых ухищрений, обычно не применяемых, поэтому для модели g остается таким же, как и для натуры):

$$\frac{\upsilon^{(\text{м})}}{\sqrt{gL^{(\text{м})}}} = \frac{\upsilon^{(\text{н})}}{\sqrt{gL^{(\text{н})}}}, \qquad \frac{L^{(\text{м})}}{\sqrt[3]{D^{(\text{м})}}} = \frac{L^{(\text{н})}}{\sqrt[3]{D^{(\text{н})}}}. \qquad (16)$$

Если на модели эти соотношения выполнены, то в силу (15) правило пересчета силы сопротивления с модели, определенной в опыте в той же жидкости, на натуру

$$F^{(\text{н})} = \left(\frac{L^{(\text{н})}}{L^{(\text{м})}}\right)^3 F^{(\text{м})},$$

так что сила сопротивления, как говорят, пропорциональна кубу масштаба моделирования. Для геометрически подобных судов второе условие (16) выполняется без труда. Первое соотношение (16) показывает, что для обеспечения динамического подобия отношение скоростей модели и натуры должно быть пропорционально квадратному корню из отношения длин модели и натуры $\upsilon^{(\text{м})} = [L^{(\text{м})}/L^{(\text{н})}]^{1/2}\upsilon^{(\text{н})}$, что также можно выполнить в опыте без особых ухищрений. Если попытаться выполнить полное моделирование, не пренебрегая вязкостью, то появится второй динамический параметр подобия – число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho\upsilon L/\mu$. Полное моделирование с одновременным учетом обоих параметров подобия – числа Фруда и числа Рейнольдса – в одной и той же жидкости ($\mu^{(\text{м})}/\rho^{(\text{м})} = \mu^{(\text{н})}/\rho^{(\text{н})}$) оказывается невозможно. Действительно, выполнение равенства чисел Рейнольдса требует $\upsilon L = \text{const}$, то же условие для числа Фруда требует $\upsilon^2 L = \text{const}$, поэтому изменение (уменьшение) масштаба модели нарушает подобие, то есть, другими словами, моделирование возможно лишь с моделью в натуральную величину, что бессмысленно. Поэтому и прибегают к частичному моделированию, что требует глубокого проникновения в природу изучаемого явления.

Теорема Пифагора. Применим анализ размерностей для доказательства теоремы Пифагора. Площадь прямоугольного треугольника S вполне определяется его гипотенузой c и, например, меньшим из его острых углов φ (рис. 2), то есть $S = f(c, \varphi)$, $n = 2$, $k = 1$, поскольку φ безразмерно. Анализ размерностей дает

$$\Pi = \frac{S}{c^2} = \Phi(\varphi), \qquad S = c^2\Phi(\varphi). \qquad (17)$$

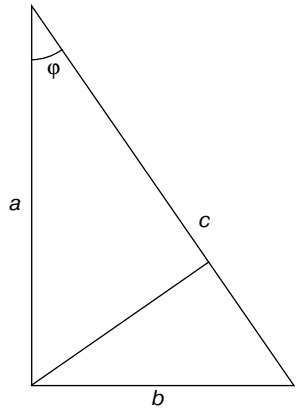

Рис. 2. К теореме Пифагора

Высота, опущенная из прямого угла, разбивает треугольник (см. рис. 2) на два прямоугольных треугольника, подобных основному, с гипотенузами, равными соответственно катетам основного треугольника. Выражение (17) для площадей этих треугольников дает

$$S_a = a^2\Phi(\varphi), \qquad S_b = b^2\Phi(\varphi).$$

Здесь Ф – та же функция, что и для основного треугольника. Так как сумма площадей треугольников S_a и S_b равна площади S исходного треугольника, то

$$S = S_a + S_b, \qquad c^2\Phi(\varphi) = a^2\Phi(\varphi) + b^2\Phi(\varphi). \qquad (18)$$

Откуда, сокращая в последнем равенстве на Φ(φ), получаем $c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.

Важно отметить, что доказательство существенно опирается на евклидовость геометрии: в римановой геометрии и геометрии Лобачевского имеется внутренний параметр λ с размерностью длины. Поскольку в этих геометриях функция Ф для исходного треугольника будет зависеть от двух безразмерных аргументов φ и c/λ, а для первого и второго вспомогательных треугольников соответственно от φ, a/λ и φ, b/λ, то сократить в равенстве (18) на Ф будет нельзя и приведенное доказательство теряет силу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы исследования различных задач механики, физики, природных и экологических явлений, охраны окружающей среды, основанные на применении анализа размерностей и подобия, просты, не связаны с особенностями отдельных частных случаев и доступны школьникам старших классов, поэтому могут быть включены в школьную программу. При применении анализа размерностей и подобия трудность лежит совсем не в использовании простой рецептуры получения закономерностей физических явлений в наиболее простой и наглядной форме, а в схематизации явления с выделением основных (главных) определяющих параметров задачи, вытекающих или из математической постановки задачи, если таковая имеется в виде соответствующих дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями, или из проникновения (интуиции) в механизм изучаемого явления, если оно не сформулировано по каким-то причинам в виде математической задачи. Здесь важно не пропустить основные определяющие параметры и не усложнить задачу добавлением заведомо несущественных параметров.

Правильность выбора определяющих параметров в задаче, не имеющей явной математической формулировки, определяется прежде всего интуицией исследователя. Напомним, что возможность пренебрежения каждым определяющим параметром в задаче на порядок понижает трудность ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. 10-е изд. М.: Наука, 1987. 430 с.
2. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.
3. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.
4. *Курт Р.* Анализ размерностей в астрофизике. М.: Мир, 1975.
5. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия и физические модели. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1986. 290 с.
6. *Самарский А.А.* О математическом моделировании и вычислительном эксперименте в физике // Вестн. АН СССР. 1979. № 5. С. 38–49.
7. *Тирский Г.А.* Анализ размерностей // Соросовский Образовательный Журнал. 2000. Т. 6, № 5. С. 76–82.

Рецензент статьи А.П. Маркеев

* * *

Григорий Александрович Тирский, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Московского физико-технического института, научный руководитель аспирантуры МФТИ, зав. лабораторией физико-химической газодинамики Института механики МГУ, заслуженный деятель науки РФ, действительный член Российской академии естественных наук, член Нью-Йоркской академии наук и ряда отечественных и зарубежных научных обществ. Лауреат премии М.В. Ломоносова МГУ, лауреат первой премии Минвуза СССР, премии МАИК “Наука” за лучшую публикацию года в ее изданиях. Награжден золотой медалью им. С.А.Чаплыгина РАН за выдающиеся теоретические работы по механике, памятной медалью им. П.Л. Капицы “Автор научного открытия”. Член редколлегии журнала “Прикладная математика и механика”. Область основных научных интересов – физико-химическая газодинамика, теория гиперзвуковых течений, кинетическая теория газов, вычислительная гидродинамика. Автор более 280 научных статей, двух монографий, двух изобретений.