ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 457, № 4, с. 406–410

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 533.9:517.5

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С МАГНИТОСФЕРОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

© 2014 г. С. И. Безродных, Б. В. Сомов

Представлено академиком А.М. Черепащуком 03.02.2014 г.

Поступило 10.02.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565214220095

1. Нейтронные звезды обладают магнитным полем, напряженность которого достигает 10^{12}–10^{15} Гс. Столь сильное поле ответственно за возникновение ряда наблюдаемых ярких эффектов, таких как направленный релятивистский выброс плазмы, ускорение частиц до гигантских энергий, всплески жесткого электромагнитного излучения [1–3]. Исследование магнитосфер нейтронных звезд представляет собой актуальную астрофизическую проблему.

Одним из важных вопросов в этой тематике является исследование взаимодействия ударной волны, образованной взрывом сверхновой, с магнитным полем нейтронной звезды. В результате такого взаимодействия формируется магнитосфера, граница которой определяется условием равенства газового давления p набегающего потока плазмы и давления $\dfrac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$ магнитного поля, заполняющего околозвездное пространство. В хвосте магнитосферы образуется пересоединяющий токовый слой, в котором происходит высвобождение магнитной энергии. Магнитная сила $\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{B}$ доминирует над градиентом газового давления, гравитационной и другими силами вплоть до значительных расстояний от звезды до границы магнитосферы. В связи с этим для описания магнитогидродинамических процессов в магнитосфере хорошо применимо приближение сильного поля [4].

В настоящей работе в рамках двумерной стационарной модели [5] построено аналитическое решение задачи о (заранее неизвестной) форме границы магнитосферы нейтронной звезды и дано явное представление для магнитного поля. В рассматриваемой модели предполагается, что магнитное поле звезды приближается точечным диполем, а в хвосте магнитосферы расположен плоский нейтральный токовый слой. Изучение подобных задач со свободной границей в связи с астрофизическими приложениями имеет давнюю историю и проводилось многими авторами (см., например, [6–11]). Однако решений в замкнутой аналитической форме для моделей с токовыми слоями, по-видимому, не было получено.

2. Математическая постановка задачи заключается в следующем. В рассматриваемой модели [5] магнитосфера звезды представляет собой симметричную односвязную область G на комплексной плоскости $z = x + iy$ (рис. 1а).

Магнитное поле $\mathbf{B} = (B_x(x, y), B_y(x, y), 0)$ считается потенциальным в области G за исключением начала координат $z = 0$, где расположен точечный

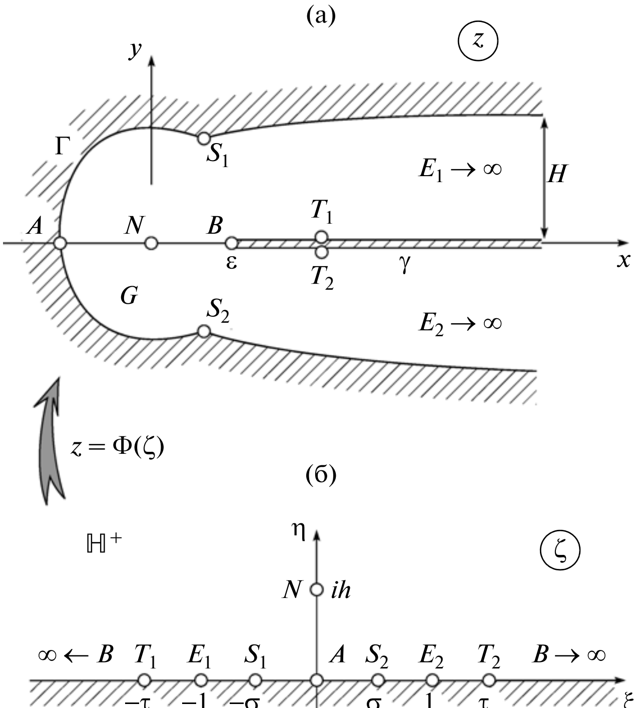

Рис. 1. Схема решения задачи.

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук, Москва

магнитный диполь, моделирующий поле звезды; направление диполя совпадает с направлением оси y, а его величина равна μ. Это означает, что функция $\overline{\mathcal{B}}(z)$, сопряженная с "комплексным" магнитным полем $\mathcal{B}(z) = B_x(x, y) + iB_y(x, y)$, является аналитической в $G\backslash\{0\}$, и выполняется асимптотическое соотношение

$$\overline{\mathcal{B}}(z) = i\frac{\mu}{z^2} + O(1), \quad z \to 0. \tag{1}$$

Граница области G состоит из двух дуг Γ и γ (рис. 1а). Форма кривой Γ, изображающей магнитопаузу, заранее неизвестна и определяется равенством внешнего газового давления p потока плазмы и давления магнитного поля $\mathcal{B}$:

$$\frac{|\mathcal{B}|^2}{8\pi} = p, \quad z \in \Gamma; \tag{2}$$

величина p считается постоянной. Бесконечный прямолинейный разрез γ вдоль вещественной оси представляет собой сечение токового слоя, перпендикулярного плоскости z. Координата $z = \varepsilon$ концевой точки B и полуширина H хвоста магнитосферы на бесконечности заданы.

Предполагается, что магнитное поле не проникает через Γ и γ, т.е. выполняются соотношения

$$(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = 0, \quad z \in (\Gamma \cup \gamma), \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к Γ или γ.

Для описания поля $\mathcal{B}(z)$ удобно ввести комплексный потенциал, представляющий собой аналитическую функцию $\mathcal{F}(z)$, связанную с $\mathcal{B}(z)$ соотношением

$$i\mathcal{F}'(z) = \overline{\mathcal{B}}(z). \tag{4}$$

Потенциал $\mathcal{F}(z)$ считается непрерывным в $\bar{G}\backslash\{N, E_1, E_2\}$. Условие (3) с учетом такой непрерывности означает, что на дугах Γ и γ границы области G вещественная часть $\mathcal{F}(z)$ принимает постоянные значения, которые полагаем равными соответственно 0 и $-\pi Q$.

Из соотношений (1), (3) получаем следующие условия для потенциала:

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{\mu}{z} + O(1), \quad z \to 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\mathcal{F} = -\pi Q, \quad z \in \gamma; \quad \mathrm{Re}\mathcal{F} = 0, \quad z \in \Gamma. \tag{6}$$

Условие (2), определяющее форму кривой Γ, приобретает вид

$$|\mathcal{F}'(z)|^2 = 8\pi p, \quad z \in \Gamma. \tag{7}$$

Параметрами модели являются величины p, μ, ε и H. Задача заключается в том, чтобы по заданным значениям этих параметров и соотношениям (5)–(7) найти форму границы магнитосферы (кривую Γ) и вычислить магнитное поле $\mathcal{B}(z)$ в области G.

3. Обратимся к решению сформулированной задачи. Введем конформное отображение $z = \Phi(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ = \{\zeta: \mathrm{Im}\zeta > 0\}$ на область G с неизвестной граничной дугой Γ. Магнитный потенциал $\mathcal{F}(z)$, определенный в области G, при таком отображении перейдет в функцию

$$\mathcal{P}(\zeta) := \mathcal{F} \circ \Phi(\zeta), \tag{8}$$

для которой в $\mathbb{H}^+$ возникнет задача, аналогичная (5), (6). После построения Φ и $\mathcal{P}$ кривая Γ и магнитный потенциал $\mathcal{F}$ будут найдены по формулам

$$\begin{gathered}\Gamma = \{z: z = \Phi(\zeta), \mathrm{Im}\zeta = 0; \mathrm{Re}\zeta \in (-1, 1)\},\\ \mathcal{F}(z) = \mathcal{P} \circ \Phi^{-1}(z),\end{gathered} \tag{9}$$

где $\zeta = \Phi^{-1}(z)$ – отображение G на $\mathbb{H}^+$, обратное к Φ.

Искомое конформное отображение $z = \Phi(\zeta)$ подчиним следующим условиям, которые его однозначно определяют:

$$\Phi(-1) = E_1, \quad \Phi(1) = E_2, \quad \Phi(\infty) = B. \tag{10}$$

Точки на плоскостях z и ζ, соответствующие друг другу при отображении Φ, будем обозначать одинаковыми буквами (рис. 1). В силу симметрии областей G, $\mathbb{H}^+$ и выбранных условий (10) прообразом точки N плоскости z, где располагается магнитный диполь, будет точка на мнимой оси плоскости ζ с комплексной координатой, обозначаемой ih.

Функция $\mathcal{P}(\zeta)$, определяемая формулой (8), удовлетворяет на вещественной оси следующим условиям, вытекающим из (5), (6):

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\mathcal{P}(\zeta) = -\pi Q, \quad \zeta \in (BE_1) \cup (E_2B);\\ \mathrm{Re}\mathcal{P}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (E_1E_2);\end{gathered} \tag{11}$$

$$\mathcal{P}(\zeta) = -\frac{iM}{\zeta - ih} + O(1), \quad \zeta \to ih, \tag{12}$$

где $M = \mu|\Phi'(ih)|^{-1}$. Кроме этих условий, задачу для $\mathcal{P}(\zeta)$ дополним еще следующими асимптотиками при $\zeta \to \pm 1$, согласующимися с условиями (11) разрыва вещественной части аналитической функции $\mathcal{P}(\zeta)$, и асимптотикой на бесконечности, согласующейся с (12):

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(\zeta) = O(\ln(\zeta \pm 1)), \quad \zeta \to \pm 1;\\ \mathcal{P}(\zeta) = O(1), \quad \zeta \to \infty.\end{gathered} \tag{13}$$

Аналитическая в $\mathbb{H}^+$ за исключением $\zeta = ih$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{H}^+}\backslash\{E_1, E_2, N\}$ функция $\mathcal{P}$, удовлетворяющая условиям (11)–(13), единственна [12–14] и имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}(\zeta) = iQ\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{M}{2h}\left(\frac{\zeta - ih}{\zeta + ih} - \frac{\zeta + ih}{\zeta - ih}\right). \tag{14}$$

Физический смысл задачи (5)–(7) предполагает существование двух точек заострения на кривой Γ и наличие обратного тока в токовом слое. Для этого достаточно предположить (см. пп. 5, 6), что все четыре нуля $\zeta = \pm\sigma, \pm\tau$ производной $\mathcal{P}'(\zeta)$ потенциала (14) вещественны и выполняются не-равенства $\sigma < 1$, $\tau > 1$. Отсюда получаем следующее обеспечивающее указанные эффекты соотношение для параметров модели:

$$0 < \frac{Q}{M} < \min\{1, h^{-2}\}. \qquad (15)$$

С учетом сказанного из (14) находим производную $\mathcal{P}'(\zeta)$ в виде

$$\mathcal{P}'(\zeta) = 2i(Q-M)\mathcal{C}(\zeta),$$
$$\mathcal{C}(\zeta) = \frac{(\zeta^2-\sigma^2)(\zeta^2-\tau^2)}{(1-\zeta^2)(\zeta^2+h^2)^2}, \qquad (16)$$

где числа σ и τ даются равенствами

$$\sigma = \sqrt{\frac{b-\sqrt{D}}{2a}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{b+\sqrt{D}}{2a}}, \qquad (17)$$

в которых

$$a = M - Q, \quad b = 2h^2Q + (1+h^2)M,$$
$$D = [8h^2(1+h^2)Q + (1-h^2)^2M]M.$$

На рис. 1 точки, соответствующие нулям $\zeta = \pm\sigma$, обозначены S_1, S_2, а соответствующие нулям $\zeta = \pm\tau$, $-T_1$, T_2.

4. Перейдем к построению конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$. Прежде всего отметим, что условие (7) на Γ при отображении G на $\mathbb{H}^+$ преобразуется с учетом (8) в следующее соотношение на интервале (E_1E_2) вещественной оси для производной $\Phi'(\zeta)$:

$$|\Phi'(\zeta)| = (8\pi p)^{-1/2}|\mathcal{P}'(\zeta)|, \quad \zeta \in (E_1E_2), \qquad (18)$$

где $\mathcal{P}'(\zeta)$ определяется из (16).

Для того чтобы сформулировать условие для $\Phi'(\zeta)$ на остальной части $\mathbb{R}$, заметим, что луч (BE_1) преобразуется отображением Φ в верхний берег разреза γ, а (E_2B) — в нижний берег этого разреза. Отсюда, используя геометрический смысл аргумента производной конформного отображения, находим

$$\arg\Phi'(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (BE_1);$$
$$\arg\Phi'(\zeta) = \pi, \quad \zeta \in (E_2B). \qquad (19)$$

Вводя аналитическую функцию

$$\Psi(\zeta) := \ln\Phi'(\zeta) \qquad (20)$$

и переписывая с ее помощью равенства (18) и (19), приходим к следующему краевому условию задачи Римана—Гильберта относительно $\Psi(\zeta)$:

$$\mathrm{Re}[\nu(\zeta)\Psi(\zeta)] = c(\zeta), \qquad (21)$$

где коэффициент $\nu(\zeta)$ и правая часть $c(\zeta)$ даются равенствами

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in (E_1E_2), \\ -i, & \zeta \in (BE_1) \cup (E_2B); \end{cases}$$

$$c(\zeta) = \begin{cases} \ln p_0 + \ln|\mathcal{C}(\zeta)|, & \zeta \in (E_1E_2), \\ 0, & \zeta \in (BE_1), \\ \pi, & \zeta \in (E_2B), \end{cases} \qquad (22)$$

$$p_0 = \frac{M-Q}{\sqrt{2\pi p}}, \qquad (23)$$

где $\mathcal{C}(\zeta)$ дается вторым равенством (16).

Дополним задачу для $\Psi(\zeta)$ следующими асимптотиками при $\zeta \to \pm1$ и $\zeta \to \infty$:

$$\Psi(\zeta) = O(\ln(\zeta \pm 1)), \quad \zeta \to \pm 1;$$
$$\Psi(\zeta) = O(\ln\zeta), \quad \zeta \to \infty, \qquad (24)$$

согласующимися с тем, что коэффициент $\nu(\zeta)$ и правая часть $c(\zeta)$ краевого условия (21) разрывны, а также с предполагаемым видом области G (см. рис. 1а) и с тем, что функция $\Psi(\zeta)$ связана с производной конформного отображения $\mathbb{H}^+$ на G формулой (20).

Опираясь на [12—14], можно показать, что решение задачи Римана—Гильберта, заключающейся в нахождении аналитической в $\mathbb{H}^+$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{H}^+}\setminus\{E_1, E_2, B\}$ функции $\Psi(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (21)—(24), сушествует, единственно и имеет следующее представление в виде интеграла типа Коши:

$$\Psi(\zeta) = \frac{\mathcal{X}(\zeta)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{c(t)dt}{\mathcal{X}(t)\nu(t)(t-\zeta)}, \qquad (25)$$

где $\mathcal{X}(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-1}$ — каноническое решение однородной задачи Римана—Гильберта.

5. Вычисляя интеграл (25) с использованием геометрического подхода к задаче Римана—Гильберта [13] и формулы типа Якоби [14] для функции Аппеля F_1, изучавшейся в [15], получаем

$$\Psi(\zeta) = \ln\frac{p_0(\zeta^2-\sigma^2)[1-(\tau\zeta+\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{\zeta^2-1})^2]}{(\zeta^2-1)(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})[1+(h\zeta+\sqrt{h^2+1}\sqrt{\zeta^2-1})^2]^2}, \qquad (26)$$

где постоянная p_0 определяется формулой (23).

Из равенств (20) и (26) находим выражение для производной $\Phi'(\zeta)$ искомого конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$. Интегрируя это выражение, получаем представление для отображающей функции $\Phi(\zeta)$ в виде интеграла

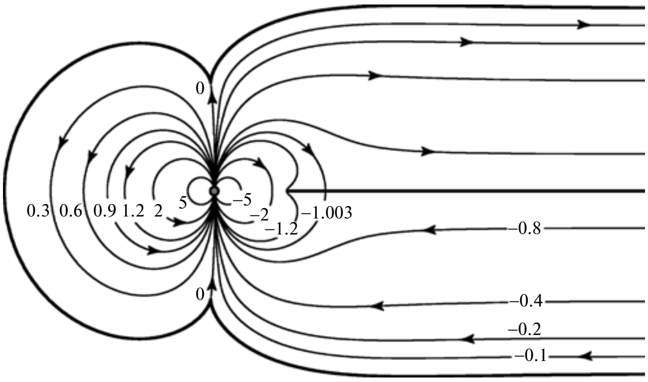

Рис. 2. Форма границы магнитосферы и картина магнитного поля. Соответствующие $p = 1$, $\mu = 0.15$, $\varepsilon = 0.08$, $H = 0.2$.

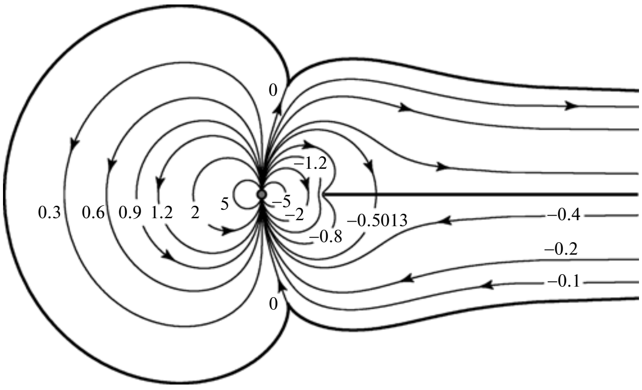

Рис. 3. Форма границы магнитосферы и картина магнитного поля, соответствующие $p = 1$, $\mu = 0.15$, $\varepsilon = 0.06$, $H = 0.1$.

$$\Phi(\zeta) = -2p_0\lambda^{-2}\delta^4 \times \\ \times \int\limits_{\mathcal{Z}(ih)}^{\mathcal{Z}(\zeta)} \frac{(t^2-2\delta t+1)(t^2+2\delta t+1)(t^2-\lambda^2)^2}{t(t^2-1)(t^2+\delta^2)^4}dt, \tag{27}$$

где $\mathcal{Z}(\zeta) = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ – обратная функция Жуковского, а δ и λ выражаются через h и τ по формулам

$$\delta = \sqrt{h^2+1} - h, \quad \lambda = \tau - \sqrt{\tau^2 - 1}. \tag{28}$$

Вычисляя интеграл (27) путем разложения подынтегральной функции на простые дроби, получаем $\Phi(\zeta)$ в виде конечной комбинации логарифмов и степеней обратной функции Жуковского:

$$\Phi(\zeta) = \mathcal{K}[\tilde{\Phi}(ih) - \tilde{\Phi}(\zeta)]; \tag{29}$$

$$\tilde{\Phi}(\zeta) = \kappa_1 \ln\mathcal{Z}(\zeta) + \kappa_2\ln[\mathcal{Z}^2(\zeta) - 1] + \\ + \kappa_3\ln[\mathcal{Z}^2(\zeta) + \delta^2] + \sum_{k=1}^{3} c_k[\mathcal{Z}_k(\zeta) + \delta^2]^{-k}; \tag{30}$$

$$\kappa_1 = -\frac{2\lambda^4}{\delta^8}, \quad \kappa_2 = \frac{4(1-\sigma^2)(1-\lambda^2)^2}{(1+\sigma^2)^4}, \\ \kappa_3 = \frac{\lambda^4}{\delta^8} - \frac{4(1-\sigma^2)(1-\lambda^2)^2}{(1+\delta^2)^4}; \tag{31}$$

$$c_1 = -1 + \frac{\lambda^4}{\delta^6} + \frac{4(1-\sigma^2)(1-\lambda^2)^2}{(1+\delta^2)^3}, \\ c_2 = -\frac{3}{2} + 2\sigma^2 + \lambda^2 + \delta^2 - \frac{\lambda^4}{2\delta^4} + \frac{2(1-\sigma^2)(1-\lambda^2)^2}{(1+\delta^2)^2}; \tag{32}$$

$$c_3 = -\frac{[\delta^4 - 2(1-\sigma^2)\delta^2 + 1](\delta^2+\lambda^2)^2}{3\delta^2(\delta^2+1)}, \\ \mathcal{K} = \frac{(M-Q)\delta^4}{\sqrt{2\pi p}\lambda^2}. \tag{33}$$

Здесь σ и τ даются формулами (17), а δ и λ – формулами (28).

Зависимость величин M, Q и h от параметров p, ε, μ и H модели выражается следующими соотношениями:

$$M|\Phi'(ih)| = \mu, \quad \mathcal{K}\tilde{\Phi}(ih) = \varepsilon, \quad \frac{\pi}{2}\mathcal{K}\kappa_2 = H,$$

где Φ' определяется из формулы (27), а $\tilde{\Phi}$, $\mathcal{K}$ и κ_2 даются равенствами (30)–(33).

6. Подытоживая результаты пп. 3–5, получаем решение исходной задачи (5)–(7) в явном аналитическом виде: искомая форма границы Γ магнитосферы дается первой, а требуемый магнитный потенциал $\mathcal{F}(z)$ – второй формулой (9), в которых функция $\mathcal{P}$ определяется равенством (14), а конформное отображение $z = \Phi(\zeta)$ – формулами (29)–(33).

На рис. 2 приведены форма Γ границы магнитосферы и распределение линий магнитного поля, соответствующие $p = 1$, $\mu = 0.15$, $\varepsilon = 0.08$, $H = 0.2$, а на рис. 3 – аналогичные данные, соответствующие $p = 1$, $\mu = 0.15$, $\varepsilon = 0.06$, $H = 0.1$. На этих рисунках видны участки обратного тока на внутреннем крае токового слоя, отделенные от участков прямого тока линией магнитного поля, пересекающей слой.

Наличие обратных токов в токовом слое характеризует неравновесную магнитосферу, образованную в результате взаимодействия ударной волны от сверхновой с магнитным полем нейтронной звезды, в отличие от равновесной магнитосферы, например магнитосферы Земли, сформированной квазистационарным потоком плазмы солнечного ветра. Обратный ток позволяет накопить избыток магнитой энергии, который реализуется в виде импульсных всплесков γ-излучения [5] или другого жесткого электромагнитного излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13–01–00923), Программы ОМН РАН “'Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики”) и Программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neutron Stars and Pulsars / W. Becker. Ed. B.: Springer, 2009.
2. *Woods P.M., Kouveliotou C., Gögüs E., et al.* // Astrophys. J. 2001. V. 552. №. 2. Pt 1. P. 748–755.
3. *Thompson C., Duncan R.* // Astrophys. J. 1996. V. 473. № 1. Pt 1. P. 322–342.
4. *Somov B.V.* Plasma Astrophysics. Pt II. Reconnection and Flares. N.Y.: Springer, 2013.
5. *Сомов Б.В.* // Письма в Астрон. журн. 2011. Т. 37. № 10. С. 740–753.
6. *Chapman S., Ferraro V.C.A* // Terr. Mag. 1931. V. 36. P. 171–186.
7. *Альфвен X.* Космическая электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
8. *Жигулев В.Н.* // ДАН. 1959. Т. 126. № 3. С. 521–523.
9. *Жигулев В.Н., Ромишевский Е.А.* // ДАН. 1959. Т. 127. № 5. С. 1001–1004.
10. *Unti T., Atkinson G.* // J. Geophys. Res. Spec. Phys. 1968. V. 73. P. 7319–7327.
11. *Оберц П.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1973. Т. 13. В. 5. С. 896–905.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
13. *Безродных С.И., Власов В.И.* Междунар. конф. “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посв. памяти И.Г. Петровского. Тезисы докл. Москва, 21–26 мая 2007 г. М., 2007. С. 36.
14. *Безродных С.И.* Сингулярная задача Римана–Гильберта и ее приложение. Дис. канд. физ.-мат. наук. М. ВЦ РАН, 2006.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.