

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Лобода Артем Александрович

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ
СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА
ШРЕДИНГЕРА**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук, профессор
Смолянов Олег Георгиевич

Москва — 2021

Оглавление

Введение	3
1 Формула Фейнмана-Каца для стохастического уравнения теплопроводности	23
1.1 Вывод уравнения Белавкина	24
1.2 Представление решения для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера	28
1.3 Операторный подход к доказательству формулы Фейнмана-Каца	41
2 Представление решения одномерного стохастического уравнения типа Шредингера	48
2.1 Нестохастическое уравнение Шредингера	48
2.2 Получения представления решения стохастического уравнения типа Шредингера	50
2.3 Формула Фейнмана-Каца для уравнения Белавкина	65
3 Уравнения со знакопеременным гамильтонианом	69
3.1 Бесконечномерные дифференциальные операторы	69
3.2 Гамильтонова мера Фейнмана	74
3.3 Представление решения двумерного уравнения теплопроводности	75
3.4 Представление решения уравнения Шредингера	77
3.5 Уравнение Белавкина с двумерным шумом	80
Заключение	85
Литература	86

Введение

Диссертация посвящена разработке методов представления решений эволюционных стохастических уравнений типа уравнений Шредингера – Белавкина функциональными интегралами. Эти же методы применяются для некоторых детерминированных уравнений.

Стохастические уравнения Шредингера – Белавкина были выведены В. П. Белавкиным (см. [21], [22]) в общем виде и Л. Дьоши (см. [24]) в наиболее важном частном случае. В. П. Белавкин для вывода уравнения использовал квантовое стохастическое исчисление. С помощью стандартной аксиоматики квантовой механики уравнения Шредингера-Белавкина были получены в работах Л. Дьоши, а также О. Г. Смолянова с соавторами в работах [25] и [26].

Эти уравнения дают описание марковской аппроксимации динамики открытых квантовых систем, в частности, эволюции квантовых систем, находящихся под так называемым непрерывным наблюдением. Поскольку фактически не существует изолированных квантовых систем, то есть все системы можно считать открытыми, уравнения такого типа имеют большое значение для приложений. Внимание к открытым квантовым системам в последнее время сильно возросло в связи с применениями в различных областях, связанных с квантовыми технологиями, в частности, с теорией управления квантовыми системами, поэтому исследование марковских аппроксимаций открытых квантовых систем представляется очень важным для развития соответствующих математических методов. Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Существует несколько подходов к получению представлений решений эво-

люционных уравнений функциональными интегралами: теорема Чернова (см. [35]) и ее частный частный случай – теорема Троттера (см. [48]) (впервые использованная в 1964 году Э. Нельсоном (см. [49])) для доказательства лагранжевых формул Фейнмана), метод аналитического продолжения по параметру и метод аналитического продолжения по аргументу. Каждый из этих методов имеет свои преимущества при рассмотрении конкретных задач. Остановимся подробнее на этих методах.

Прежде всего рассмотрим метод, основанный на применении теоремы Чернова, появившейся в 1968 году. В детерминированном случае теорема Чернова была использована в работе О. Г. Смолянова [31] и его последующих работах с соавторами [36], [40] [27]. В 2002 году эта теорема была применена в статье [59] для доказательства появившихся в 1951 году в работе [45] гамильтоновых формул Фейнмана. В работе О. О. Обрезкова, О. Г. Смолянова и А. Трумена [63] был доказан рандомизированный вариант теоремы Чернова, который затем использовался в работе [52] для получения представлений решений стохастического уравнения Шредингера (подробнее см. [62]). С помощью этого подхода функциональные интегралы, представляющие решения уравнений Шредингера – Белавкина, были получены как пределы последовательности конечнократных интегралов (так называемые формулы Фейнмана), причем пределами являлись функциональные интегралы по мере Фейнмана, не являющейся счетно-аддитивной. Также при подходе, основанном на применении теоремы Чернова, явно не рассматривается связь представлений решений со стохастическим анализом. Методы аналитического продолжения гораздо лучше выявляют такую связь.

Подробнее о применении аналитического продолжения и равенства Парсеваля можно прочитать в книге О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе [1] (см. также [38], [39]). С помощью этих методов были доказаны появившиеся в 1948 году лагранжевы формулы Фейнмана [44].

Для применения метода аналитического продолжения сначала требуется получить представление решения уравнения теплопроводности функциональным интегралом, что впервые сделал М. Кац в работах [15] и [16]. Затем к полученному функциональному интегралу по счетно-аддитивной мере при-

меняется метод аналитического продолжения.

Аналитически продолжать можно по параметру, стоящему в показателе гауссовской экспоненты под знаком функционального интеграла, и по аргументу, в результате чего получаются разные представления решений одного и того же уравнения.

Аналитическое продолжение по параметру было рассмотрено в работе И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [60], причем авторы полагали, что при таком аналитическом продолжении будет получаться интеграл по счетно-аддитивной мере. Это опроверг в своих работах Р. Камерон ([65], [66]), показавший, что при таком аналитическом продолжении ситуация иная: как только мнимая часть параметра, по которому осуществляется аналитическое продолжение, становится отличной от нуля, у меры появляется неограниченная вариация, сама мера определена на очень маленьком полукольце, а потому не может быть продолжена до счетно-аддитивной. Таким образом, то, что предложили И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, следует считать продолжением функционального интеграла, а не меры. Когда параметр чисто мнимый с единичной мнимой частью, то мы получаем меру Фейнмана.

На стохастический случай этот метод был обобщен в упоминавшейся выше работе В. П. Белавкина и О. Г. Смолянова, однако эта работа не содержит полных доказательств. Для получения функционального интеграла по мере Фейнмана, представляющего решение уравнения Шредингера – Белавкина, авторы предполагали использовать аналог представления Маслова и Чеботарева (см. [54]), преобразование Фурье и равенство Парсеваля; с помощью этих приемов предполагалось получить последовательность конечнократных интегралов, сходящуюся к нужному функциональному интегралу.

Аналитическое продолжение по аргументу в детерминированном случае было впервые изучено в работе Х. Досса [42]. Соответствующий метод иногда называют методом Досса. При таком аналитическом продолжении у функций заменяется аргумент (откуда еще одно название метода: метод замены переменной), а сами функции под знаком функционального интеграла, представляющего решение уравнения теплопроводности, аналитически продолжают в подходящую область. При этом на новом пространстве аналитически

продолженных функций при отображении, заданном с помощью такой замены и аналитического продолжения, образ меры Винера снова оказывается счетно-аддитивной мерой, что было проверено в работе автора [70].

На стохастический случай метод Досса был распространен в работах С. Альбеверьо, В. Н. Колокольцова и О. Г. Смолянова [33], [34], однако и в этих работах были пропущены многие детали доказательств. Тем не менее идея применения формулы Ито для доказательства формулы Фейнмана-Каца была высказана во всех работах, посвященных методу аналитического продолжения в стохастическом случае.

Надо отметить, что подходы Р. Фейнмана и М. Каца к получению представлений решений задач Коши для эволюционных дифференциальных с помощью функциональных интегралов являются альтернативными. Оба автора рассматривали представление экспоненты от оператора, однако метод Фейнмана является обобщением разложения экспоненты в бесконечное произведение, а метод Каца – обобщением разложения экспоненты в степенной ряд. Формула Ито в детерминированном случае используется в упоминавшейся выше работе Х. Досса, а также в книге Б. Саймона [17].

Таким образом к началу работы над диссертацией не было ни одного полного доказательства формул Фейнмана – Каца и были высказаны только некоторые идеи, обобщающие метод замены переменной на стохастический случай. В диссертации, с использованием новых идей и конструкций, приведены полные доказательства, использующие формулу Ито, и рассмотрены некоторые новые виды уравнений, на которые обобщается метод замены переменной.

Далее используется терминология, отличающаяся от примененной выше. В этой терминологии мы различаем два типа объектов: стохастические уравнения типа Шредингера и уравнения Белавкина (те и другие принадлежат к обсуждавшемуся выше классу уравнений Шредингера-Белавкина). Мы называем стохастическим уравнением типа Шредингера уравнение, в котором мнимая единица стоит только перед лапласианом, а уравнением Белавкина – уравнение, в котором мнимые единицы стоят и перед лапласианом, и перед потенциалом V .

В некоторых случаях мы ограничиваемся изложением алгебраических аспектов теории, не обсуждая подробно аналитических предположений.

Цель работы – с помощью комбинации методов замены переменной и аналитического продолжения по аргументу получить представления решений стохастических дифференциальных уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина, установить связь решений этих уравнений с решениями соответствующих операторных уравнений. При этом предполагается распространить на такие уравнения технический аппарат, использовавшийся ранее для нестохастических уравнений, прежде всего формулу Ито и метод аналитического продолжения по пространственной переменной. Еще одной целью работы является получение представлений с помощью функциональных интегралов решений уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина со знакопеременными гамильтонианами.

Новизна. Все **выносимые на защиту** результаты диссертации являются новыми и опубликованы в работах автора. Они состоят в следующем:

1. Получены представления решений стохастических уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина с помощью интегралов по счетно-аддитивным мерам.

2. Методы замены переменной и аналитического продолжения по аргументу обобщены на стохастический случай. При этом использована комбинация формулы Ито и теоремы Ферника.

3. Получены представления с помощью функциональных интегралов решений уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом.

4. Развита новая метод замены пространственных переменных, позволяющий свести уравнения со знакопеременным гамильтонианом к уравнениям со знакопостоянным гамильтонианом.

Положения, выносимые на защиту.

1. Формулы Фейнмана-Каца для стохастических уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина, содержащие функциональные интегралы по счетно-аддитивным мерам.

2. Метод замены переменной и аналитического продолжения для стоха-

стических уравнений с частными производными.

3. Теоремы о представлениях с помощью функциональных интегралов решений уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом.

4. Метод замены пространственных переменных, позволяющий свести уравнения со знакопеременным гамильтонианом к уравнениям со знакопостоянным гамильтонианом.

Методы исследования. В диссертации использованы методы анализа, связанные с аналитическим продолжением функций, специальными заменами переменных и дифференцируемостью под знаком функциональных интегралов, а также методы теории самосопряженных операторов. Кроме того, используется формула Ито, методы бесконечномерного анализа и ряд специальных конструкций, относящихся к действительному, функциональному и комплексному анализу.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в бесконечномерном анализе, в частности, в стохастическом анализе, при изучении открытых квантовых систем, а также в квантовой информатике и квантовом управлении.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах, конференциях и заседаниях:

- Научный семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ, руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе (многократно, 2016-2020 г.г.)
- Научный семинар кафедры высшей математики МФТИ (04. 12. 2020)
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ (14. 11. 2020)
- Международная молодежная научная конференция "ЛОМОНОСОВ"(2016, 2017, 2018, 2019, 2020 г.г., МГУ, Москва)

- Международная конференция "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ"(г. Долгопрудный, Моск. обл., Россия, 17-21 июня 2019)
- Международная научная конференция "Современные проблемы математики и механики посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко (МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 13-15 мая 2019)
- International scientific conference "Infinite-dimensional analysis and mathematical physics". Dedicated to the memory of Sergei Vasilyevich Fomin (Moscow, 28 January – 1 February 2019, Москва, Россия, 28 января – 1 февраля 2019)
- Международная конференция "Современная математическая физика. Владимиров-95"(Москва, Россия, 12-16 ноября 2018)
- Международная научная конференция "Бесконечномерный анализ и теория управления"(МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, 29 января - 1 февраля 2018)
- Межрегиональная научная конференция "Квантовая динамика и функциональные интегралы"(Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия, 26 апреля 2017)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 3 статьи [63-65] в рецензируемых научных журналах RSCI, Web of Science, SCOPUS, 1 статья в сборнике РИНЦ [66] и 6 тезисов докладов на научных конференциях [67-72]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разбитых на параграфы глав, заключения и списка литературы из 78 наименований. Объем текста диссертации составляет 94 страницы. Чертежей, таблиц и рисунков нет.

Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертации рассматривается задача Коши для стохастического уравнения теплопроводности, являющегося евклидовым аналогом

стохастического уравнения типа Шредингера:

$$d\Psi_\omega(t)(q) = \alpha(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dw(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q), \quad (1)$$

где Ψ_ω – это случайная функция. Ниже приводятся соответствующие определения .

Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, \nu)$ – вероятностное пространство (Ω – множество; $\mathbb{A}$ – σ –алгебра его подмножеств; ν – неотрицательная счетно-аддитивная нормированная мера на $\mathbb{A}$).

Определение. Случайной величиной со значениями в измеримом пространстве $(T, \mathcal{B}_T)$ называется измеримое отображение $F : \Omega \rightarrow T$; измеримость означает, что если $B \in \mathcal{B}_T$, то $F^{-1}(B) \in \mathbb{A}$.

При этом вероятностная мера на $\mathcal{B}_T$, являющаяся образом меры ν при отображении F , называется распределением случайной величины F .

Если E – топологическое пространство, то случайной величиной со значениями в E называется случайная величина в $(E, \mathcal{B}_E)$, где $\mathcal{B}_E$ – это σ –алгебра борелевских подмножеств пространства E .

Пусть $(\mathcal{Q}, \mathcal{B}_{\mathcal{Q}})$ и $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$ – два измеримых пространства, а $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ – множество (некоторых) измеримых отображений из $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{P}$. Подмножество $\mathcal{A}_I$ множества $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ называется цилиндрическим, если существуют конечный набор элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$ и набор множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, такие, что $\mathcal{A}_I = \{g \in I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) : g(a_j) \in B_j, j = 1, \dots, n\}$. Множество всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств $\mathcal{C}$; порожденную ею σ –алгебру будем обозначать символом $\mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$.

Определение. Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется случайная величина, принимающая значения в измеримом пространстве $(I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}), \mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}))$.

Более традиционным является следующее определение (см. [5] (с. 214) и [6] (с. 520)).

Определение. *Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется функция на $\mathcal{Q}$, значениями которой являются случайные величины, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$.*

Далее обычно случайные функции принимают вещественные значения и определены на множестве $[0, +\infty) \times Q$ (здесь Q — конфигурационное пространство, которое в этой главе равно $\mathbb{R}$). Для обозначения случайных функций в основном будет использоваться знакосочетание $\Psi_{\omega}(t)(q)$.

В первой главе для задачи Коши (1) получено представление решения с помощью интеграла по мере Винера (формула Фейнмана-Каца). При этом с помощью теоремы Ферника (см. [46]) обосновывается сходимость математического ожидания от экспоненты, зависящей от стохастического интеграла. Этот результат сформулирован в виде следующей теоремы (предполагается, что функция R непрерывна и стохастический интеграл от нее существует).

Теорема. *Пусть для $t \in [0, +\infty)$, $q \in Q$ функция $\Phi_{t,q}$ на вероятностном пространстве $(C_0[0, t], \mathfrak{B}, w_{0,t})$ определяется равенством $\Phi_{t,q}(\xi) = e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)}$, где символ $\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)$ обозначает стохастический интеграл Ито. Тогда $\Phi_{t,q}$ интегрируема по мере $w_{0,t}$, то есть интеграл*

$$\int_{C_0(0,t)} e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)} w_{0,t}(d\xi)$$

существует.

Эта теорема используется как при получении формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера, так и во второй главе, где получены представления решения стохастического уравнения типа Шредингера и уравнения Белавкина.

Формула Фейнмана-Каца для решения задачи Коши (1) содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция V непрерывна и ограничена, а функция φ_0 ограничена, дважды дифференцируема и ее первая и вторая производные также ограничены. Тогда при $\alpha = 1$ решение задачи Коши (1) существует и может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \omega)(q) = \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi). \quad (2) \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы основано на применении формулы Ито, однако из-за наличия экспоненты, зависящей от стохастического интеграла, оно требует дополнительных (по сравнению с нестохастическим случаем) рассуждений. Кроме того, как было сказано выше, в доказательстве используется теорема о сходимости функционального интеграла от экспоненты, зависящей от стохастического интеграла. Более общие уравнения теплопроводности были рассмотрены в работе [71] автора диссертации.

В последнем разделе первой главы обсуждается еще один способ получения формулы Фейнмана-Каца.

Рассматривается следующее стохастическое уравнение.

$$d\varphi(t) = (\varphi(t))'' dt + V(q)\varphi(t)dt - \frac{\lambda}{4}q^2\varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)dw(t), \quad (3)$$

где $\lambda > 0$, а w – мера Винера на множестве непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ и исчезающих в нуле.

Случайный оператор в правой части уравнения, применяемый к функции $\varphi(t)$, будет обозначаться символом $A(t)$. Этот оператор представляет собой сумму лапласиана и операторов умножения на функции, каждый из которых является самосопряженным.

Стохастическое уравнение (3) записывается в виде

$$d\varphi(t) = A(t)\varphi(t).$$

Решение задачи Коши для этого уравнения дается следующим разрешающим двухпараметрическим семейством случайных операторов $F(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$, $t_1 \leq t_2$, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и определяемых так (ниже h – это элемент пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) :

$$(F(t_1, t_2)h)(q) = \int_{C_0([t_1, t_2])} (h(q + \xi(t_2))) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB(\tau) \right\} w_{t_1, t_2}(d\xi). \quad (4)$$

В том случае, когда эти операторы самосопряженные, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Каковы бы ни были $t_1 \in [0, +\infty)$ и дважды дифференцируемая функция h с ограниченными производными, функция ψ , определяемая равенством $\psi(t_2) = F(t_1, t_2)h$ ($t_2 > t_1$), является решением задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения (3) при начальных данных (t_1, h) .*

Во второй главе диссертации получены формулы Фейнмана-Каца для одномерного стохастического уравнения типа Шредингера и для уравнения Белавкина. Функциональные интегралы, являющиеся представлениями решений этих уравнений, – это аналитические продолжения представления решения (2) для евклидова аналога (стохастического уравнения теплопроводности) (1).

Аналитическое продолжение понимается в смысле следующего определения.

Определение. *Будем говорить, что функция v , определенная на множестве $R = [0, +\infty)$, допускает аналитическое продолжение на множество $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, если существует функция $s : S \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами: сужение функции s на R совпадает*

с исходной функцией v ; функция s непрерывна на S ; сужение s на открытый сектор $S_0 = \{z : z = re^{i\gamma}, r > 0, 0 < \gamma < \frac{\pi}{4}\}$ (S_0 является внутренностью множества S) аналитично. При этом сама функция s называется аналитическим продолжением функции v . Если аналитическое продолжение функции v на S существует, то сужение функции s на любую часть множества S также называется аналитическим продолжением функции v на эту часть.

Если функция ψ является решением уравнения теплопроводности, то функция η , определяемая равенством $\eta(t, q) = \psi(t, \sqrt{i}q)$, $(t, q) \in [0, +\infty) \times Q$ (здесь и далее $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$), является решением уравнения типа Шредингера, евклидовым аналогом которого является то уравнение теплопроводности, решением которого является функция ψ . Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть f — решение задачи Коши для уравнения (теплопроводности)

$$df_\omega(t)(q) = (f_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right) f_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q f_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$$

с начальным условием $f_\omega(0)(q) = h_\omega(q)$.

Пусть, кроме того, для каждого ω функция f_ω обладает аналитическим продолжением на множество S . Тогда функция g_ω , определяемая равенством $g_\omega(t)(q) = f_\omega(t)(\sqrt{i}q)$, является решением задачи Коши для следующего уравнения типа Шредингера

$$idg_\omega(t)(q) = -(g_\omega(t))''(q)dt + i\left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right) g_\omega(t)(q)dt + i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q g_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$$

с начальным условием $g_\omega(0)(q) = h_\omega(q)$.

С помощью серии лемм мы доказываем, что функциональный интеграл (2) допускает необходимое аналитическое продолжение. Сформулируем наиболее важные из этих лемм.

Лемма. Пусть функция V дифференцируема на S , причем ее производная ограничена. Тогда функция p , определяемая равенством

$$p(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} w_{0,t}(d\xi),$$

дифференцируема по q на S при каждом ξ .

Лемма. Функция u , определяемая равенством

$$u(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi),$$

дифференцируема, причем

$$u'(q) = \int_{C_0[0,t]} \omega(t) \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi).$$

В следующей лемме предполагается, что функция φ_0 , определенная на S , ограничена и непрерывна на S , аналитична внутри S и обладает на S ограниченными производными первых двух порядков.

Лемма. Пусть функция r_ω , определенная на S , задается равенством

$$r_\omega(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi).$$

Тогда эта функция дифференцируема на S (и, следовательно, аналитична на S_0 и непрерывна на S).

Далее, пользуясь сформулированными результатами, мы доказываем, что аналитическое продолжение функционального интеграла (2) на множество $S_1 = \{z : z = re^{i\frac{\pi}{4}}, r \geq 0\}$ ($S_1 \subset S$) является представлением решения стохастического уравнения типа Шредингера. В следующей теореме предполагается, что выполнены все условия лемм, сформулированных выше.

Теорема. Пусть функция V непрерывна в области $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, сужение V на S_0 аналитично и ее производная в области S непрерывна и ограничена.

Тогда функция Ψ , определяемая равенством

$$\begin{aligned} \Psi(\omega, t, q) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(\sqrt{i}q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (\sqrt{i}q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\sqrt{i}q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(\sqrt{i}q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) \quad (5) \end{aligned}$$

$q \in Q, t \in [0, +\infty)$, является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \quad (6) \end{aligned}$$

В следующей теореме получено представление решения стохастического уравнения типа Шредингера с помощью интеграла по мере, являющейся образом меры Винера при отображении, представляющем собой замену пространственной переменной (этот результат был анонсирован в работе [70] автора диссертации).

Теорема. Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы и пусть

ζ — это отображение луча Q в луч

$$Q_1 = \{q = \alpha e^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq \alpha < \infty\},$$

определяемое так: $\zeta(q) = \sqrt{i}q$. Тогда функция $\mathfrak{W}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(t, q_1) &= \\ &= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t)) w_{0,t} \zeta^{-1}(d\xi_1), \end{aligned}$$

где $\sqrt{i}q = q_1$, является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) &= i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \end{aligned}$$

Все приведенные результаты используются для получения представления решения задачи Коши для уравнения Белавкина.

Мы рассматриваем уравнение теплопроводности:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) &= (\Psi_\omega(t))''(q)dt + (\tilde{V}(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \quad (7) \end{aligned}$$

где $\tilde{V}(q) = iV(q)$. После замены переменной q на $\sqrt{i}q$ получается уравнение Белавкина

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) &= i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t). \quad (8) \end{aligned}$$

Используя единственность аналитического продолжения и приведенные выше результаты, мы получаем теорему о представлении решения задачи Коши для уравнения Белавкина.

Теорема. Пусть выполнены предположения теорем, сформулированных выше. Тогда функция $\mathcal{G}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, q_1) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t iV(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t))w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1) \end{aligned} \quad (9)$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \end{aligned}$$

Полученное в последней теореме представление решения содержит интеграл по счетно-аддитивной мере; в этом преимущество аналитического продолжения по аргументу по сравнению с аналитическим продолжением по параметру, в результате которого получается мера Фейнмана, являющаяся обобщенной мерой (к ней понятие счетной аддитивности неприменимо).

В третьей главе диссертации рассмотрена связь между гамильтоновой мерой Фейнмана (гамильтоновой мерой Фейнмана на пространстве $Q \times P$ (Q и P - две копии сепарабельного комплексного гильбертова пространства) называется обобщенная мера на этом пространстве, преобразование Фурье которой имеет вид $e^{(ip,q)}$) и бесконечномерным уравнением Шредингера

$$if'(t) = \Delta_B f(t). \quad (10)$$

Оператор B определяется равенством $B(x_1 + x_2) = B_1(x_1) - B_2(x_2)$, где B_j - копия неотрицательно определенного оператора, действующая в гильбертовом пространстве H_j ($j = 1, 2$), а Δ_B - оператор Лапласа, действующий в

пространстве функций на гильбертовом пространстве H и задаваемый оператором B . Он определяется равенством

$$\Delta_B \psi = \text{tr} B_1 \psi''_{H_1} - \text{tr} B_2 \psi''_{H_2}.$$

Связь между гамильтоновой мерой Фейнмана и бесконечномерным уравнением Шредингера является одной из мотивировок для изучения уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом (см. работу [69] автора диссертации).

Для получения представления решения задачи Коши для двумерного уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом

$$i\psi'(t) = H_1(\psi(t)) + V(q_1, q_2)\psi(t). \quad (11)$$

(здесь $Q = \mathbb{R}^2$, H_1 - оператор в $L_2(Q)$, определяется равенством $(H_1\varphi)(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2}(q_1, q_2)$) мы сначала получаем формулу Фейнмана-Каца для уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q_2^2} + V(q_1, q_2)g(t, q_1, q_2). \quad (12)$$

Для этого с помощью формулы Ито доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $C_0[0, t]$ - множество непрерывных на $[0, t]$ функций, исчезающих в нуле и принимающих значения в $Q(= \mathbb{R}^2)$, с (борелевской) мерой Винера $w_{0,t}$. Тогда решение задачи Коши g для уравнения (12) с начальным условием $g_0 \in L^2$, представляется следующей формулой Фейнмана-Каца

$$g(t, q_1, q_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau))d\tau} g_0(q_1+\xi_1(t), q_2+\xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2). \quad (13)$$

При этом мы предполагаем, что функция V такова, что решение задачи Коши для уравнения (12) существует и единственно, а интеграл в формуле Фейнмана-Каца сходится (например, это будет так, если потребовать, чтобы функция V была непрерывна и ограничена по совокупности аргументов, а функция g_0 - ограничена, дважды дифференцируема по каждому аргументу, с ограниченными первой и второй производными).

Далее мы используем метод замены переменных и аналитическое продолжение, чтобы получить представление решения задачи Коши для уравнения (11).

Мы предполагаем, что потенциал V и начальное условие g_0 допускают аналитическое продолжение во внутренность области

$$\widehat{S} = \{(q_1, q_2) : q_1 = \alpha_1 e^{i\gamma_1}, q_2 = \alpha_2 e^{i\gamma_2}, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, 0 \leq \gamma_2 \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq \gamma_2 \leq 0\},$$

непрерывное вплоть до границы этой области.

Тогда, производя замену переменных $\widehat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и применяя подход, развитый в главе 2, мы получаем следующую теорему.

Теорема. Пусть функции V и ψ_0 обладают аналитическими продолжениями в область $\widehat{S}$, представляющими собой функции, ограниченные в этой области вместе с производными по каждому из аргументов. Тогда функция $\widehat{\psi}$, определяемая равенством

$$\widehat{\psi}(t, \widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(\tau)}{\sqrt{i}}) d\tau} \psi_0(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(t), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(t)}{\sqrt{i}}) w_{0,t} \widehat{\zeta}^{-1}(d\widehat{\xi}_1 d\widehat{\xi}_2), \quad (14)$$

где $(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и $\widehat{\xi}_1 = \sqrt{-i}\xi_1$ $\widehat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_2$, является решением задачи Коши для уравнения (11) с начальным условием ψ_0 .

В пятом разделе третьей главы рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с двумерным белым шумом, которое мы также называем уравнением Белавкина:

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ & + \left(iV(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь λ_1 и λ_2 - неотрицательные числовые параметры, имеющие тот же смысл, что и параметр λ в главе 1, а B_1 и B_2 - независимые броуновские

движения. Определение функции ψ аналогично определению функции Ψ_ω из главы 1, только конфигурационное пространство теперь - двумерная вещественная плоскость.

Сначала мы решаем уравнение теплопроводности, затем, с помощью замены переменных $\hat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и аналитического продолжения мы получаем формулу Фейнмана-Каца для стохастического уравнения типа Шредингера, после чего, используя метод раздела 3 второй главы, приходим к теореме, в которой получено представление решения задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом.

Теорема. Пусть функция V непрерывна в области $\hat{S}$, сужение функции V на внутреннюю часть $\hat{S}$ аналитично и ее производные в области $\hat{S}$ по обоим аргументам непрерывны и ограничены. Пусть еще функция η , определенная на $\hat{S}$, ограничена и непрерывна на $\hat{S}$, аналитична внутри $\hat{S}$ и обладает на $\hat{S}$ ограниченными производными первых двух порядков по каждому аргументу. Тогда функция $\mathcal{F}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t)(\hat{q}_1, \hat{q}_2) &= \\ &= \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau)) dB_2(\tau) \right] \times \\ &\times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau))^2 \right] d\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[\int_0^t iV(\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau)) d\tau \right] \times \\ &\times \eta(\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(t), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(t)) w_{0,t} \hat{\zeta}^{-1}(d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2), \quad (16) \end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина (15).

Результаты этого раздела могут быть обобщены на случай любого конечномерного конфигурационного пространства.

Автор выражает глубочайшую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Глава 1

Формула Фейнмана-Каца для стохастического уравнения теплопроводности

В этой главе получено представление решения стохастического уравнения типа теплопроводности с помощью функционального интеграла по мере Винера. Рассматривается стохастическое уравнение теплопроводности, называемое евклидовым аналогом стохастического уравнения типа Шредингера, а также некоторое его обобщение. Для доказательства формулы Фейнмана – Каца используется формула Ито. В дальнейшем уравнением Белавкина будет называться стохастическое уравнение вида

$$d\Psi_{\omega}(t)(q) = i(\Psi_{\omega}(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_{\omega}(t)(q)dt + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_{\omega}(t)(q)dw(t).$$

(все символы будут определены ниже). Любые уравнения, в которых мнимые единицы расположены иначе, будут называться стохастическими уравнениями типа Шредингера.

1.1 Вывод уравнения Белавкина

Для удобства читателя мы приводим схему вывода уравнения Белавкина. Подробнее об этом можно прочитать в работах [25], [26], [62] и [33].

Пусть H_1 – гильбертово пространство чистых состояний наблюдаемой квантовой системы; H_2 – гильбертово пространство состояний квантовой системы, которая является измерительным аппаратом; мы предполагаем, что H_1 реализуется как $L_2(Q_1)$, а H_2 реализуется как $L_2(Q_2)$. Пространство состояний составной системы – это $H = H_1 \otimes H_2$, то есть гильбертово тензорное произведение наблюдаемой системы и измерительного аппарата. В качестве измеряемой наблюдаемой, относящейся к первой системе, возьмем оператор умножения на координату: $(A\varphi)(q) = q\varphi(q)$.

Непосредственно перед измерением H_1 находится в состоянии φ , а H_2 – в состоянии Ψ , так что состояние системы H непосредственно перед измерением – это вектор $\varphi \otimes \Psi$. Сам процесс измерения является эволюцией в сложной системе:

$$L_2(Q_1 \times Q_2) \ni \eta \mapsto [(q_1, q_2) \mapsto (q_1, q_2 - q_1)].$$

Отображение η является унитарным из L_2 в себя. Считая, что есть начальное состояние (q_1, q_2) , имеем

$$(q_1, q_2) \mapsto \varphi(q) \cdot \Psi(q_2 - q_1),$$

следовательно, распределение плотности вероятностей задается следующим образом:

$$(q_1, q_2) \mapsto c \cdot |\varphi(q)|^2 |\Psi(q_2 - q_1)|^2,$$

где c – нормировочный коэффициент. Мы считаем, что прибор, описываемый функцией Ψ , является классическим, то есть после измерения, проведенного с помощью этого прибора, известно как состояние этого прибора (системы H_2), так и состояние наблюдаемой системы (H_1). Чтобы найти распределение q_2 на плоскости (q_1, q_2) , мы должны проинтегрировать указанное выше распределение по q_1 , поэтому

$$q_2 \mapsto \int_{Q_1} c \cdot |\varphi(q_1)|^2 |\Psi(q_2 - q_1)|^2 dq_1$$

задает распределение вероятностей q_2 . Но это распределение вероятностей представляет собой свертку двух квадратов модулей функций, поэтому (так как q_2 - координата измерительного прибора) распределение для q_1 реализуется функцией $q_1 \mapsto c \cdot |\varphi(q_1)|^2 * |\Psi(q_2)|^2$.

Так как измерительный прибор считается классическим, то состояние составной системы оказывается после измерения смешанным, причем фактически реализуется ровно одно значение q_2 , поэтому следует считать, что наблюдаемая система H_1 после измерения оказывается в случайном чистом состоянии $\varphi(\cdot)\Psi(q_2 - \cdot)$. Это состояние можно назвать результатом измерения наблюдаемой A , имеющим ограниченную точность, характеризуемую функцией Ψ .

Заметим, что если бы Ψ^2 была δ -функцией, то однозначно восстанавливалось бы значение q_2 по $|\varphi(q_2)|^2$. Также важно отметить, что вектор состояний $\varphi(\cdot)\Psi(q_2 - \cdot)$ не обязан быть нормированным.

Теперь будем устраивать серии измерений. В промежутках между измерениями система эволюционирует согласно законам квантовой механики. Каждая серия измерений характеризуется числом λ и количеством измерений в серии; при этом чем больше в серии измерений, тем меньше точность каждого из измерений этой серии. Точность характеризуется числом λ , которое представляет собой дисперсию случайной величины, являющейся результатом измерений. Результаты измерений каждой серии определяют случайный процесс с дискретным временем. В каждой серии промежутки между измерениями уменьшается. Величина интервалов между измерениями и точность измерений связаны соотношением (см. [26]).

В каждой следующей серии измерений больше, чем в предыдущих, поэтому количество этих измерений стремится к бесконечности. Осуществляя переход к пределу (см. ниже), мы и получим уравнение Белавкина.

Опишем подробнее, как устраивается каждая серия. Зафиксируем λ и Δt и предположим, что в моменты времени $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots$, система H_1 подвергается наблюдениям; при этом λ - число, характеризующее точность измерений. Мы считаем, что все наблюдения одной серии одинаковы,

а функция Ψ задается равенством

$$c\Psi(q) = \Psi_{\Delta t, \lambda}(q) = \exp(-\lambda\Delta t \cdot q^2).$$

Это наиболее естественное предположение относительно результата измерений; фактически оно вытекает из центральной предельной теоремы.

Физический смысл функции Ψ следующий: она описывает вероятностное распределение q_2 после каждого измерения. Считаем, что в промежутках между наблюдениями эволюция системы H_1 описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом $\mathcal{H}$. После n -го измерения наблюдаемая система находится в состоянии $\varphi(t)$; тогда перед $(n+1)$ -м измерением ее состояние будет $\varphi(t + \Delta t - 0)(q) = e^{-i\mathcal{H}\Delta t}\varphi(t)$, а после этого измерения имеем

$$\varphi(t + \Delta t) = e^{-\lambda\Delta t(q-q_2)^2} e^{-i\mathcal{H}\Delta t}\varphi(t).$$

Тогда функция распределения q_2 имеет плотность

$$c|\varphi(t + \Delta t)|^2 * |\Psi_{\Delta t, \lambda}|^2(q_2), \quad c > 0.$$

Из определения $\Psi_{\Delta t, \lambda}$ следует, что чем меньше Δt , тем больше дисперсия. Задаваемое сверткой распределение приближает гауссовское, но так как нас интересует предельное поведение системы при $\Delta t \rightarrow 0$, то мы предполагаем, что это распределение гауссовское со средним $\bar{q} = (A\varphi, \varphi)$ и дисперсией $(2\lambda\Delta t)^{-1}$. Тот факт, что при малых Δt функция $\Psi_{\Delta t, \lambda}$ мало отличается от δ -функции принципиален, т. к. свертка с δ -функцией ничего не меняет, а отсюда и возникает в пределе гауссовское распределение q_2 . Так как распределение гауссовское, то после измерения получаем, что $q_2 = \bar{q} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda\Delta t}}w(\Delta t)$, где w - стандартный винеровский процесс (выходящий из нуля). Следовательно,

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{\lambda\Delta t}{2} \left(q - \bar{q} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda\Delta t}}w(\Delta t) \right)^2 \right\} = \\ & = \exp \left\{ -\frac{\lambda\Delta t}{2}q^2 + \left(-\frac{\lambda\Delta t}{2}\bar{q}^2 - \frac{1}{4\Delta t}(w(\Delta t))^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\bar{q}w(\Delta t) \right) \right\} \times \\ & \quad \times \exp \left\{ \lambda\Delta tq\bar{q} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}qw(\Delta t) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta t}{2} \bar{q}^2 - \frac{1}{4\Delta t} (w(\Delta t))^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \bar{q} w(\Delta t) \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta t}{2} q^2 + \lambda \Delta t q \bar{q} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q w(\Delta t) \right\}.
\end{aligned}$$

Ко второй из экспонент получившегося произведения применим формулу Ито в окрестности нуля ($\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta t}{2} q^2 + \lambda \Delta t q \bar{q} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q w(\Delta t) \right\} = 1$), а затем заменим дифференциалы конечными приращениями:

$$\begin{aligned}
&\exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta t}{2} q^2 + \lambda \Delta t q \bar{q} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q w(\Delta t) \right\} - 1 = \\
&= \left(-\frac{\lambda}{2} q^2 + \lambda q \bar{q} \right) \Delta t + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q w(\Delta t) + \frac{\lambda}{4} q^2 \Delta t = \\
&= -\frac{\lambda \Delta t}{4} q^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q (w(\Delta t) + \sqrt{2\lambda} \bar{q} \Delta t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Тогда получим, что произведение экспонент может быть записано так:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{4} q^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q (w(\Delta t) + \sqrt{2\lambda} \bar{q} \Delta t) + o(\Delta t) \right) \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta t}{2} \bar{q}^2 - \frac{1}{4\Delta t} (w(\Delta t))^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \bar{q} w(\Delta t) \right\}.
\end{aligned}$$

В этом выражении экспонента не зависит от q , а зависит лишь от Δt , поэтому ею можно пренебречь. Состояние системы при этом останется таким же, т.к. выше мы отмечали, что вектор состояния не является нормированным, а поэтому экспонента связана только с нормировкой этого вектора состояния. Теперь для функции $\varphi(t + \Delta t)$ согласно правилу Лейбница имеем:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t + \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t (q - q_2)^2} e^{-i\mathcal{H} \Delta t} \varphi(t) = \\
&= \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{4} q^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q (w(\Delta t) + \sqrt{2\lambda} \bar{q} \Delta t) + o(\Delta t) \right) \times \\
&\quad \times (1 - i\mathcal{H} \Delta t + o(\Delta t)) \varphi(t) =
\end{aligned}$$

$$= \left(-i\mathcal{H} - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \varphi(t)\Delta t + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)(w(\Delta t) + \sqrt{2\lambda\bar{q}}\Delta t) + \varphi(t)o(\Delta t).$$

Таким образом, так как $\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) \sim d\varphi$, то стохастическое дифференциальное уравнение Шредингера, описывающее предельное поведение системы H_1 , когда $\Delta t \rightarrow 0$, может быть, с использованием центральной предельной теоремы и закона больших чисел (см. [62]), записано так:

$$d\varphi = \left(-i\mathcal{H} - \frac{\lambda}{2}q^2 \right) \varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)(dw(t) + \sqrt{2\lambda\bar{q}}dt).$$

Заметим, что $\bar{q}(t) = \int_Q q|\varphi(t)(q)|^2 dq$, то есть это уравнение нелинейно, поэтому мы будем считать, что $\bar{q}$ мало и пренебрежем $\sqrt{2\lambda\bar{q}}dt$.

Уравнение Белавкина описывает марковскую аппроксимацию динамики открытых квантовых систем. При этом открытой квантовой системой называется квантовая система, являющейся частью некоторой большей квантовой системы, называемой ее окружением.

Открытые квантовые используются, в частности, для описания динамики квантовых систем с когерентной квантовой обратной связью, а также фактически во всех задачах, связанных с теорией управления квантовыми системами. Дополнительную информацию о теории управления квантовыми системами можно найти в работах [55], [56], [57].

1.2 Представление решения для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера

Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, \nu)$ – вероятностное пространство (Ω – множество; $\mathbb{A}$ – σ -алгебра его подмножеств; ν – неотрицательная счетно-аддитивная нормированная мера на $\mathbb{A}$).

Определение 1. *Случайной величиной со значениями в измеримом пространстве $(T, \mathcal{B}_T)$ называется измеримое отображение $F : \Omega \rightarrow T$; измеримость означает, что если $B \in \mathcal{B}_T$, то $F^{-1}(B) \in \mathbb{A}$.*

При этом вероятностная мера на $\mathcal{B}_T$, являющаяся образом меры ν при отображении F , называется распределением случайной величины F .

Если E – топологическое пространство, то случайной величиной со значениями в E называется случайная величина в $(E, \mathcal{B}_E)$, где $\mathcal{B}_E$ – это σ –алгебра борелевских подмножеств пространства E .

Пусть $(\mathcal{Q}, \mathcal{B}_{\mathcal{Q}})$ и $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$ – два измеримых пространства, а $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ – множество (некоторых) измеримых отображений из $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{P}$. Подмножество $\mathcal{A}_I$ множества $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ называется цилиндрическим, если существуют конечный набор элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$ и набор множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, такие, что $\mathcal{A}_I = \{g \in I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) : g(a_j) \in B_j, j = 1, \dots, n\}$. Множество всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств $\mathcal{C}$; порожденную ею σ –алгебру будем обозначать символом $\mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$.

Определение 2. Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется случайная величина, принимающая значения в измеримом пространстве $(I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}), \mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}))$.

Более традиционным является следующее определение (см. [5] (с. 214) и [6] (с. 520)).

Определение 3. Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется функция на $\mathcal{Q}$, значениями которой являются случайные величины, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$.

Мы не будем обсуждать связь между определениями 2 и 3 (некоторые сведения об этом можно найти в [58]).

Далее обычно случайные функции принимают вещественные значения и определены на множестве $[0, +\infty) \times Q$ (здесь Q – конфигурационное пространство, которое в этой главе равно $\mathbb{R}$). Кроме того, вместо символа $\Psi(\omega)(x)$ часто используется символ $\Psi_{\omega}(x)$. При этом обычно $x \in [0, +\infty) \times Q$; в этом случае в основном будет использоваться знакосочетание $\Psi_{\omega}(t)(q)$.

Термины случайная функция и случайный процесс считаются синонимами. Кроме того, если $\mathcal{Q}$ является областью многомерного пространства, то вместо термина случайная функция употребляют термин случайное поле. Важным примером случайного процесса является винеровский процесс на отрезке $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}, b \in (a, +\infty]$.

Символом $C_0[a, b]$ обозначается пространство непрерывных ограниченных функций на $[a, b]$ с равномерной нормой, принимающих вещественные значения и в точке a обращающихся в ноль; $\mathfrak{B}$ – σ – алгебра борелевских подмножеств на $C_0[a, b]$; $w_{a,b}$ – стандартная мера Винера на $\mathfrak{B}$ (различные определения меры Винера можно найти в [1]).

Таким образом, $(C_0[a, b], \mathfrak{B}, w_{a,b})$ – вероятностное пространство. При этом винеровским процессом называется случайная функция в смысле определения 3, задаваемая равенством $B(t)(\omega) = \omega(t), \omega \in C_0[a, b]$. Винеровский процесс в смысле определения 2 – это случайная функция, задаваемая равенством $\mathbf{B}(\omega)(t) = \omega(t)$, так что справедливо равенство $B(t)(\omega) = \mathbf{B}(\omega)(t)$. Будем считать, что винеровский процесс удовлетворяет условию нормировки $E_{t_1}^{t_2}(B(t))^2 = t - t_1$, где символ $E_{t_1}^{t_2}$ обозначает интегрирование по мере w_{t_1, t_2} ; здесь предполагается, что $t_2 \geq t_1$.

В этом разделе рассматривается следующая задача Коши для стохастического дифференциального уравнения типа теплопроводности:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & \alpha(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dw(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\varphi_0 \in C(\mathbb{R}^1)$ и φ_0 ограничена.

Важным частным случаем уравнения из задачи Коши (1.1) является евклидов аналог стохастического уравнения типа Шредингера, который получается при $\alpha = 1$. Параметр α связан с нормировкой меры Винера: $\alpha = 1$, если для всех $0 \leq t_1 \leq t_2$ справедливо приведенное выше условие нормировки. Коэффициенты при q^2 и при слагаемом с $dw(t)$ те же, что и в стохастическом уравнении типа Шредингера (и в уравнении Белавкина).

Уравнение из (1.1) записано с помощью дифференциалов. Его же можно записать с помощью производных, формально разделив обе части на dt .

После этого оно приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{\omega}(t)(q) = & \alpha(\Psi_{\omega}(t))''(q) + (\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_{\omega}(t)(q) + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_{\omega}(t)(q)\dot{w}(t), \Psi_{\omega}(0, q) = \varphi_0(q).\end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по пространственным координатам, а точка – дифференцирование по времени; при этом символ $\dot{w}(t)$ обозначает обобщенный случайный процесс, являющийся обобщенной производной винеровского процесса и называемый белым шумом.

При доказательстве основной теоремы этого раздела – теоремы 2 (о представлении решения уравнения (1.1)) используется следующее предложение (теорема 1), представляющее и самостоятельный интерес. При этом предполагается, что функция R непрерывна и стохастический интеграл от нее существует.

Теорема 1. Пусть для $t \in [0, +\infty)$, $q \in Q$ функция $\Phi_{t,q}$ на вероятностном пространстве $(C_0[0, t], \mathfrak{B}, w_{0,t})$ определяется равенством $\Phi_{t,q}(\xi) = e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)}$, где символ $\int_0^t R(q + \xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)$ обозначает стохастический интеграл Ито. Тогда $\Phi_{t,q}$ интегрируема по мере $w_{0,t}$, то есть интеграл

$$\int_{C_0(0,t)} e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)} w_{0,t}(d\xi) \quad (1.2)$$

существует.

Доказательство. Стохастический интеграл $\int_0^t R(q + \xi(\tau))dB_{\omega}(\tau)$ является гауссовской случайной величиной, дисперсия которой равна соответствующей $\mathbb{L}_2$ –норме; при этом $\|\int_0^t dB_{\omega}(\tau)\|^2 = t$. Этот стохастический интеграл можно считать интегралом по векторнозначной мере Лебега – Стильтьеса, определенной на σ –алгебре борелевских подмножеств отрезка $[0, t]$, порождаемой производящей функцией B , принимающей значения в пространстве

случайных величин, являющихся функциями ω . Полезно отметить, что вероятностное пространство, на котором определены эти случайные величины, является копией введенного выше пространства $(C_0[0, t], \mathfrak{B}, w_{0,t})$.

Интеграл (1.2) из формулировки теоремы представляет собой интеграл Бохнера от функции аргумента ξ , принимающей значения в пространстве случайных величин, являющихся функциями ω , и его существование вытекает из теоремы 3. 7. 4. монографии [18]. Выполнение оценки из этой теоремы вытекает из теоремы Ферника (см. с. 466 [3]) и проверяется так.

Если $\max_{[0,t]} |R(q + \xi(t))| < 1$, то

$$\left\| \int_0^t R(q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\|_{\mathbb{L}_2[0,t]} < \max_{[0,t]} |R(q + \xi(t))| \cdot \sqrt{t}.$$

Если $\max_{[0,t]} |R(q + \xi(t))| \cdot c\sqrt{t} < 1$, то интеграл

$$\int_{C(0,t)} e^{c\sqrt{t}\|R\|} w_{0,t}(d\xi),$$

где $\|R\| = \max_{[0,t]} |R(q + \xi(t))|$, сходится, а тогда сходится и интеграл (1.2), так как подынтегральная функция в нем мажорируется подынтегральной функцией $e^{c\sqrt{t}\|R\|}$. Если же $\max_{[0,t]} |R(q + \xi(t))| \cdot c\sqrt{t} \geq 1$, то выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,t)} e^{c\left\| \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau) \right\|_{\mathbb{L}_2[0,t]}} w_{0,t}(d\xi) &\leq \int_{C(0,t)} e^{c\sqrt{t}\|R\|} w_{0,t}(d\xi) \leq \\ &\leq \int_{C(0,t)} e^{c\sqrt{t}\|R\|^2} w_{0,t}(d\xi), \end{aligned}$$

а последний интеграл сходится по теореме Ферника для достаточно малых c . Тогда сходится и интеграл (1.2). $\square$

Рассмотренный в теореме функциональный интеграл (1.2) потребуется нам для получения представления решения задачи Коши для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера. Также нам потребуется следующее определение.

Определение 4. *Решением задачи Коши (1.1) называется функция, определенная на $[0, +\infty) \times C_0[0, +\infty)$, принимающая значения в пространстве функций, непрерывных и ограниченных на прямой, значения которой обозначаются символом $\Psi_\omega(t)$, и такая, что, каковы бы ни были $t \in [0, +\infty)$ и $q \in \mathbb{R}$, для $w_{0,t}$ -почти всех $\omega \in C_0[0, t]$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(t) = \varphi_0(q) + \int_0^t \alpha(\Psi_\omega(\tau))''(q) d\tau + \int_0^t \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4} q^2 \right) \Psi_\omega(\tau)(q) d\tau + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \int_0^t \Psi_\omega(\tau)(q) dB_\omega(\tau). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В следующей теореме речь идет о формуле Фейнмана-Каца для решения евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера.

Теорема 2. *Пусть функция V непрерывна и ограничена, а функция φ_0 ограничена, дважды дифференцируема и ее первая и вторая производные также ограничены. Тогда при $\alpha = 1$ решение задачи Коши (1.1) существует и может быть представлено следующим образом:*

$$\begin{aligned} \Psi(t, \omega)(q) = \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Так как потенциал зависит от времени, то не существует полугруппы, определяющей решение задачи Коши (1.1), поэтому для доказательства того, что функция Ψ_ω является решением, недостаточно вычислить

ее производную только в точке 0, и нашей целью является непосредственное вычисление производной функции Ψ_ω в каждой точке $t \geq 0$.

Начнем с того, что вычислим значение функции Ψ_ω в точке $t + s$. Так как процесс броуновского движения является марковским, то справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[0,t+s]} \exp \left\{ \int_0^{t+s} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{t+s} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t+s)) w_{0,t+s}(d\xi) = \\
& \quad = \int_{C_0[0,s]} \exp \left\{ \int_0^s V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^s \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^s (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \\
& \quad \left(\int_{C_0[s,t+s]} \exp \left\{ \int_s^{t+s} V(q + \xi(s) + \xi_1(\tau)) d\tau - \int_s^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \right. \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^{t+s} (q + \xi(s) + \xi_1(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t+s)) w_{s,t+s}(d\xi_1) w_{0,s}(d\xi).
\end{aligned}$$

Внутренний интеграл является интегралом по условной мере при условии $\xi(s)$, которая представляет собой сдвиг на $\xi(t)$ меры Винера, сосредоточенный на функциях ξ_1 , определенных на отрезке $[s, t+s]$ и таких, что $\xi_1(s) = 0$.

Снова воспользуемся тем, что процесс броуновского движения является марковским, и запишем, пользуясь сдвигом меры Винера, следующие равен-

ства:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[0,s]} \exp \left\{ \int_0^s V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^s \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^s (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(s)) w_{0,s}(d\xi) = \\
& = \int_{C_0[t,t+s]} \exp \left\{ \int_t^{t+s} V(q + \xi_2(\tau)) d\tau - \int_t^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi_2(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_t^{t+s} (q + \xi_2(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi_2(t+s)) w_{t,t+s}(d\xi_2)
\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[s,t+s]} \exp \left\{ \int_s^{t+s} V(q + \xi(s) + \xi_1(\tau)) d\tau - \int_s^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^{t+s} (q + \xi(s) + \xi_1(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(s) + \xi_1(t+s)) w_{s,t+s}(d\xi_1) = \\
& = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(s) + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(s) + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(s) + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi).
\end{aligned}$$

Здесь функции ξ_2 обращаются в ноль в точке t .

Таким образом, интеграл

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[0,t+s]} \exp \left\{ \int_0^{t+s} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{t+s} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t+s)) w_{0,t+s}(d\xi)
\end{aligned}$$

можно записать так:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[t, t+s]} \exp \left\{ \int_t^{t+s} V(q + \xi_2(\tau)) d\tau - \int_t^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi_2(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_t^{t+s} (q + \xi_2(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \\
& \quad \left(\int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(s) + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \right. \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(s) + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(s) + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) \Big) w_{t, t+s}(d\xi_2).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Наша цель - продифференцировать с помощью формулы Ито произведение экспоненты на начальное условие, а затем, пользуясь свойствами математического ожидания от стохастических дифференциалов, проинтегрировать получившееся выражение по мере $w_{t, t+s}$ и воспользоваться равенством (1.5). Дифференцируемость вытекает из предположений о функциях V и φ_0 и из теоремы 1.

По формуле Ито имеем (дифференцирование ведется по t):

$$\begin{aligned}
d \left(\exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi_2(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \right) = \\
= \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi_2(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi_2(t)) dB_\omega(t) + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} (q + \xi_2(t))^2 d(t) \right),
\end{aligned}$$

где последнее слагаемое возникает из-за поправки Ито (отсюда и следует, как мы дальше увидим, что перед вторым интегралом в показателе экспоненты

необходим коэффициент $-\frac{\lambda}{2}$); для начального условия имеем по формуле

$$\text{Ито: } d\varphi_0(q + \xi(t)) = (\varphi_0)'(q + \xi(t))d\xi + \frac{1}{2}(\varphi_0)''(q + \xi(t))dt.$$

Так как винеровские процессы B_ω и ξ независимы, а также $dB_\omega \cdot d\xi = d\xi \cdot dB_\omega = dB_\omega \cdot dt = dt \cdot dB_\omega = d\xi \cdot dt = dt \cdot d\xi = dt \cdot dt = 0$, то, применяя формулу Ито, получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & d\left(\exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_0(q + \xi(t))\right) = \varphi_0(q + \xi(t)) \times \\ & \quad \times d\left(\exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \right) + \\ & \quad + \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \times \\ & \quad \times d\varphi_0(q + \xi(t)) = \\ & = \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \times \\ & \quad \times \left(V(q + \xi(t))dt - \frac{\lambda}{4}(q + \xi(t))^2 dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q + \xi(t))dB_\omega(t) \right) \varphi_0(q + \xi(t)) + \\ & \quad + \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \times \\ & \quad \times ((\varphi_0)'(q + \xi(t))d\xi + \frac{1}{2}(\varphi_0)''(q + \xi(t))dt) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \\
&\quad \times \left(\left[(V(q + \xi(t)) - \frac{\lambda}{4} (q + \xi(t))^2) \varphi_0(q + \xi(t)) + \frac{1}{2} (\varphi_0)''(q + \xi(t)) \right] dt + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) \varphi_0(q + \xi(t)) dB_\omega(t) + (\varphi_0)'(q + \xi(t)) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Теперь, замечая, что математическое ожидание по мере $w_{s,t}$ (то есть функциональный интеграл) от выражения $(\varphi_0)'(q + \xi(t)) d\xi(t)$ равно нулю (см., например [19]) при каждом $s < t$, мы можем проинтегрировать обе части последнего равенства:

$$\begin{aligned}
&d \int_{C_0[s,t+s]} \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \\
&\quad \times \varphi_0(q + \xi(t)) w_{s,t}(d\xi) = \\
&= \int_{C_0[s,t+s]} \exp \left\{ \int_s^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_s^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_s^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \\
&\quad \times \left(\left[(V(q + \xi(t)) - \frac{\lambda}{4} (q + \xi(t))^2) \varphi_0(q + \xi(t)) + \frac{1}{2} (\varphi_0)''(q + \xi(t)) \right] dt + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(t)) \varphi_0(q + \xi(t)) dB_\omega(t) \right) w_{s,t}(d\xi).
\end{aligned}$$

Используя формулу (1.5) и предыдущее равенство, производную

$$\begin{aligned}
&d \int_{C_0[0,t+s]} \exp \left\{ \int_0^{t+s} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{t+s} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \\
&\quad \times \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t+s}(d\xi)
\end{aligned}$$

можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_0[t, t+s]} \left(\exp \left\{ \int_t^{t+s} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_t^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_t^{t+s} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \right. \\
& \times \left([V(q + \xi(t+s)) - \frac{\lambda}{4} (q + \xi(t+s))^2] \times \right. \\
& \times \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(s) + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(s) + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \varphi_0(q + \xi(s) + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) + \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (\varphi_0)''(q + \xi(t+s)) dt) w_{t, t+s}(d\xi) + \right. \\
& + \int_{C_0[t, t+s]} \left(\exp \left\{ \int_t^{t+s} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_t^{t+s} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_t^{t+s} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \times \right. \\
& \quad \times \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(t+s)) \times \\
& \times \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(s) + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(s) + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(s) + \xi(\tau)) dB_\omega(t) \right\} \varphi_0(q + \xi(s) + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) \times \\
& \quad \times dB_\omega(t)) w_{t, t+s}(d\xi).
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow 0$, получаем, что функция

$$\begin{aligned} \Psi(t, \omega)(q) = \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dw(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi) \end{aligned}$$

удовлетворяет задаче Коши (1.1). $\square$

Замечание 1. *Применение теоремы 1, необходимой для обоснования существования функционального интеграла, возможно в том случае, если выполняются условия теоремы Ферника. Мы можем добиться выполнения этих условий, подбирая соответствующий параметр λ , который задается при выводе уравнения Белавкина.*

Конечно, доказательство теоремы переносится без изменений на задачи Коши для стохастических уравнений типа теплопроводности более общего вида, начальные условия и потенциалы которых удовлетворяют тем же ограничениям, которые накладывались на V и φ_0 в теореме 2. Именно, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = (\Psi_\omega(t))''(q)dt + bV(q)\Psi_\omega(t)(q) + \\ + cR(q)\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0)(q) = \varphi_0(q), b, c \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

О функции R делаются те же предположения, что и перед теоремой 1.

Для этой задачи Коши справедливо следующее следствие, доказательство которого фактически такое же, как и теоремы 2.

Следствие 1. *Функция $\Psi_\omega(t)(q)$, определяемая равенством*

$$\Psi_\omega(t)(q) = \int_{C_0(0, t)} e^{b \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau + c \int_0^t R(q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi),$$

является решением задачи Коши (1.6).

1.3 Операторный подход к доказательству формулы Фейнмана-Каца

Существует еще один подход к доказательству формулы Фейнмана-Каца, для применения которого сначала рассмотрим нестохастический случай.

Для решения задачи Коши для (нестохастического) уравнения $f'(t) = \frac{1}{2}\Delta f(t) + V(\cdot)f(t)$ относительно функции f вещественного аргумента, принимающей значения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, достаточно найти экспоненту e^{tH} , где $H\psi = \frac{1}{2}\Delta\psi + V\psi$, то есть разрешающую полугруппу операторов для этого уравнения. Эта экспонента является решением следующих уравнений относительно функции g вещественного аргумента, принимающей значения в пространстве линейных операторов, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$g'(t) = Hg(t);$$

$$g'(t) = g(t)H.$$

Так как эти уравнения сопряжены друг другу, то из теоремы Гольмгрена (см. [14], [43]) вытекает, что решение каждого из них единственно. Пусть для каждого вещественного t $Q(t)$ – оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, определяемый с помощью функционального интеграла следующим образом: если $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то

$$(Q(t)\psi)(q) = \int_{(C[0,t], \mathbb{R}^n)} \exp\left\{\int_0^t V(q + \xi(\tau))d\tau\right\} \psi(q + \xi(t))w(d\xi).$$

С помощью формулы Ито показывается, что для функции Q справедливо следующее равенство:

$$Q'(t) = Q(t) \cdot H.$$

Как было сказано выше, e^{tH} является единственным решением этого уравнения; следовательно $Q(t) = e^{tH}$, откуда следует, что Q является решением следующего уравнения

$$Q'(t) = HQ(t).$$

В стохастическом случае разрешающей полугруппы операторов не существует из-за зависимости правой части уравнения от времени. Тем не менее и в этом случае мы можем доказать формулу Фейнмана – Каца очень близким к предыдущему способом.

Вернемся к задаче Коши (1.1). Напомним, что мы по-прежнему считаем, что для каждого ω из вероятностного пространства $(C_0[a, b], \mathfrak{B}, w_{a,b})$ функция Ψ_ω — это функция вещественного аргумента t , определенная на луче $[0, +\infty)$ и принимающая значения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$. Здесь $\mathbb{R}^1 (= Q)$ играет роль конфигурационного пространства.

Рассмотрим теперь стохастическое уравнение типа теплопроводности относительно случайных функций φ вещественного аргумента, принимающих значения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$:

$$d\varphi(t) = (\varphi(t))'' dt + V(q)\varphi(t)dt - \frac{\lambda}{4}q^2\varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)dw(t). \quad (1.7)$$

Здесь $\lambda > 0$, а w — мера Винера на множестве непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ и исчезающих в нуле. Дополнительно предполагается, что для каждого t функция $\varphi(t)$ — это квадратично интегрируемая функция на произведении конфигурационного и вероятностного пространств.

Случайный оператор в правой части уравнения, применяемый к функции $\varphi(t)$, будет обозначаться символом $A(t)$. Два таких оператора, $A(t)$ и $A^*(t)$ называются сопряженными, если, каковы бы ни были функции f и g из $L_2(\mathbb{R}^1)$, для почти всех ω из вероятностного пространства справедливо равенство $(A(t)f, g) = (f, A^*(t)g)$. Случайный оператор называется самосопряженным, если для почти всех ω справедливо равенство $A(t) = A^*(t)$. Теория самосопряженных операторов может быть распространена на случайные операторы. В частности, случайный оператор $A(t)$ в правой части уравнения (1.7) является самосопряженным случайным оператором. Это вытекает из того, что он является суммой лапласиана и операторов умножения на функции, каждый из которых является самосопряженным. Остановимся на этом подробнее.

Первое слагаемое справа представляет собой оператор Лапласа (в одномерном случае сводящийся к оператору двукратного дифференцирования).

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ это неограниченный самосопряженный оператор (см. [4]). Второе слагаемое – это оператор умножения на вещественную функцию, то есть снова самосопряженный оператор; из-за неограниченности q^2 он также является неограниченным. Наконец, последнее слагаемое – это композиция двух операторов: оператора умножения на вещественную функцию $q \mapsto q$ и оператора, порожденного умножением на так называемый белый шум. Эти операторы коммутируют, причем первый из них является самосопряженным.

Лемма 1. *Оператор $A(t)$ является самосопряженным для каждого t .*

Доказательство. Напомним, что по определению стохастического дифференциального уравнения равенство (1.7) означает, что для почти всех ω справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t (\varphi(\tau))''(q) d\tau + \int_0^t \left(V(q) - \frac{\lambda}{4} q^2 \right) \varphi(\tau) d\tau + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \int_0^t \varphi(\tau) dB_\omega(\tau). \end{aligned}$$

Переход к интегральному равенству, по определению равносильному исходному стохастическому дифференциальному уравнению, позволяет заменить формальный оператор умножения на белый шум (являющийся обобщенным случайным процессом) стохастическим интегралом. В отличие от умножения на белый шум, последний оператор корректно определен. Оператор $A(t)$ представляет собой сумму трех операторов, действующих на функции, определенные на конфигурационном пространстве: лапласиана, оператора умножения на функцию аргумента q и композицию оператора умножения на функцию аргумента q и стохастического интеграла. Каждый из этих операторов самосопряженный; следовательно, такова же их сумма. $\square$

Таким образом, стохастическое уравнение теплопроводности может быть записано в виде

$$d\varphi(t) = A(t)\varphi(t).$$

Наша цель – показать с помощью формулы Ито, что решение задачи Коши для этого уравнения дается следующим разрешающим двухпараметрическим семейством случайных операторов $F(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$, $t_1 \leq t_2$, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и определяемых так (ниже h – это элемент пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) :

$$\begin{aligned} (F(t_1, t_2)h)(q) = & \int_{C_0([t_1, t_2])} (h(q + \xi(t_2))) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB(\tau) \right\} w_{t_1, t_2}(d\xi). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Лемма 2. *Операторы, задаваемые равенством (1.8), являются самосопряженными.*

Доказательство. Пусть для каждого $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$, $t_1 \leq t_2$, $F_k(t_1, t_2)$ – оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})^n$, определяемый следующим образом: если $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned} F_k(t_1, t_2)h = & \int_{C_0([t_1, t_2])} (h(q + \xi(t_2))) \times \\ & \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_k(\tau) \right\} w_{t_1, t_2}(d\xi), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где для каждого k предполагаем, что B_k – случайная функция, определенная на отрезке $[t_1, t_2]$, график которой представляет собой ломаную, проходящую через точки $(\frac{g}{k}, B(\frac{g}{k}))$, $g = 1, 2, \dots, k$, причем предполагается, что никаких изломов вне перечисленных точек этот график не имеет.

Все (случайные) операторы $F_k(t_1, k_2)$ являются самосопряженными. Если k стремится к бесконечности, то интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q + \xi(\tau))dB_k(\tau)$$

стремится к интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q + \xi(\tau))dB(\tau)$$

почти всюду относительно меры w_{t_1, t_2} .

Так как предел сходящейся последовательности самосопряженных операторов – самосопряженный оператор, то отсюда следует, что оператор $F(t_1, t_2)$, определяемый равенством

$$\begin{aligned} (F(t_1, t_2)h)(q) = & \int_{C_0([t_1, t_2])} (h(q + \xi(t_2))) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q + \xi(\tau))dB(\tau) \right\} w_{t_1, t_2}(d\xi), \end{aligned}$$

является самосопряженным. □

Будем считать далее, что для функции h выполнены те же предположения, что и для функции φ_0 из предыдущего раздела. Явное описание областей определения встречающихся операторов для дальнейшего не требуется. Отметим только, что все функции, используемые нами, входят в эти области определения в силу предположений из предыдущего раздела.

Также отметим, что все равенства, содержащие стохастические дифференциалы, понимаются как соответствующие интегральные равенства.

Теперь мы можем сформулировать теорему о представлении решения стохастического дифференциального уравнения типа теплопроводности, используя введенные выше понятия.

Теорема 3. *Каковы бы ни были $t_1 \in [0, +\infty)$ и дважды дифференцируемая функция h с ограниченными производными, функция ψ , определяемая равенством $\psi(t_2) = F(t_1, t_2)h$ ($t_2 > t_1$), является решением задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения (1.7) при начальных данных (t_1, h) .*

Доказательство. Применяя формулу Ито к функциональному интегралу из формулы (1.8), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& (d_{t_2} F(t_1, t_2)h)(q) = \\
& = \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dw(t) \right\} \times \\
& \quad \times (h''(q + \xi(t_2)) + V(q + \xi(t_2))h(q + \xi(t_2)) + \\
& \quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(t_2)) dw(t_2)) h(q + \xi(t_2)) - \frac{\lambda}{4} (q + \xi(t_2))^2 h(q + \xi(t_2))) w_{t_1, t_2}(d\xi) = \\
& \quad = (F(t_1, t_2)A(t_2)h)(q).
\end{aligned}$$

Это означает, что справедливы следующие операторные равенства:

$$d_{t_2} F(t_1, t_2) = F(t_1, t_2)A(t_2)dt_2$$

Переходя к сопряженным операторам, получим

$$d_{t_2} F(t_1, t_2)^* = A(t_2)^* F(t_1, t_2)^* dt_2$$

Если все операторы самосопряженные (так будет, если λ чисто вещественный параметр), то справедливо равенство

$$d_{t_2} F(t_1, t_2) = A(t_2)F(t_1, t_2)dt_2.$$

В свою очередь это означает, что функция ψ , определяемая равенством $\psi(t_2) = F(t_1, t_2)h$, действительно является решением задачи Коши для уравнения (1.7). □

Глава 2

Представление решения одномерного стохастического уравнения типа Шредингера

В этой главе получено представление решения стохастического уравнения типа Шредингера (формула Фейнмана – Каца) с помощью функционального интеграла по счетно-аддитивной мере. Для получения этого представления используется решение евклидова аналога стохастического уравнения Шредингера (формула (1.4)). При этом используется аналитическое продолжение по аргументу под знаком интеграла, а на пространстве аналитически продолженных функций рассматривается та же самая мера Винера, которая фигурирует в формуле Фейнмана – Каца (1.4).

2.1 Нестохастическое уравнение Шредингера

Прежде всего коротко рассмотрим метод аналитического продолжения по аргументу для нестохастического уравнения Шредингера. Представление решения такого уравнения с помощью формулы Фейнмана – Каца может быть получено с помощью нескольких методов; большинство из них (применение теорема Чернова (см. [59]), аналитическое продолжение по параметру, стоящему в показателе экспоненты (см. [60]), приводит к функциональному

интегралу по мере Фейнмана. В отличие от этих методов с помощью аналитического продолжения по аргументу можно получить представление решения в виде функционального интеграла по мере Винера (метод, восходящий к Х. Доссу, см. [42]).

Итак, пусть рассматривается следующая задача Коши для уравнения теплопроводности:

$$\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = \frac{\lambda^2}{2m} \Delta \Psi(t, x) + V(x) \Psi(t, x),$$

$$\Psi(0, x) = f(x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

где $\lambda > 0$.

С помощью формулы Ито (см. [17]) можно доказать, что решение этой задачи представляется следующим функциональным интегралом:

$$\Psi(t, x) = E f\left(x + \sqrt{\frac{\lambda}{m}} B_t\right) e^{\int_0^t \frac{V}{\lambda}(x + \sqrt{\frac{\lambda}{m}} B_s) ds}.$$

Здесь символ E обозначает математическое ожидание, то есть интеграл по пространству непрерывных на отрезке $[0, t]$ функций с мерой Винера.

Пусть функции $\tilde{f}, \tilde{V}$ представляют собой аналитические продолжения начального условия $f(x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности и потенциала $V(x)$ этого уравнения в некоторую область (см. [42]). Рассмотрим функциональный интеграл от этих аналитических продолжений по счетно-аддитивной мере:

$$\Psi(t, x) = E \tilde{f}\left(x + \sqrt{i\hbar} B_t\right) e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \tilde{V}(x + \sqrt{i\hbar} B_s) ds}.$$

Используя формулу Ито, при необходимых ограничениях на функции f и V можно доказать, что такой функциональный интеграл является решением задачи Коши для уравнения Шредингера (подробности см. в [42]):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, x) + V(x) \Psi(t, x),$$

$$\Psi(0, x) = f(x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Важно отметить, что функциональный интеграл, являющийся представлением решения задачи Коши для уравнения Шредингера, берется по той

же счетно-аддитивной мере, что и интеграл, с помощью которого представляется решение уравнения теплопроводности. Применив формулу замены переменной, мы получаем представление той же задачи Коши для уравнения Шредингера с помощью функционального интеграла по мере, являющейся образом меры Винера на пространстве аналитически продолженных функций, которая также будет счетно-аддитивной.

В этой работе показано, что подобным образом может быть записано решение стохастического уравнения Шредингера – Белавкина, если известна рандомизированная формула Фейнмана – Каца для евклидова аналога этого уравнения.

2.2 Получения представления решения стохастического уравнения типа Шредингера

В первой главе диссертации получено представление решения задачи Коши для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) &= (\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \\ \Psi(0, q) &= \varphi_0(q). \end{aligned}$$

Для этого представления справедлива следующая формула, называемая формулой Фейнмана-Каца:

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(t)(q) &= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2d\tau \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(t) \right\} \varphi_0(q + \xi(t))w_{0,t}(d\xi). \end{aligned}$$

Для дальнейшего нам потребуется определение аналитического продолжения по пространственной переменной.

Определение 5. Будем говорить, что функция v , определенная на множестве $R = [0, +\infty)$, допускает аналитическое продолжение на множество $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, если существует функция $s : S \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами: сужение функции s на R совпадает с исходной функцией v ; функция s непрерывна на S ; сужение s на открытый сектор $S_0 = \{z : z = re^{i\gamma}, r > 0, 0 < \gamma < \frac{\pi}{4}\}$ (S_0 является внутренней частью множества S) аналитично. При этом сама функция s называется аналитическим продолжением функции v . Если аналитическое продолжение функции v на S существует, то сужение функции s на любую часть множества S также называется аналитическим продолжением функции v на эту часть.

В этом разделе с помощью метода аналитического продолжения по пространственной переменной будет получено аналогичное представление для решения стохастического уравнения типа Шредингера. При этом используется наблюдение, состоящее в том, что если функция ψ является решением уравнения теплопроводности, то функция η , определяемая равенством $\eta(t, q) = \psi(t, \sqrt{i}q)$, $(t, q) \in [0, +\infty) \times Q$ (здесь и далее $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$), является решением уравнения типа Шредингера, евклидовым аналогом которого является то уравнение теплопроводности, решением которого является функция ψ . Следующая теорема содержит точную формулировку только что сказанного.

Теорема 4. Пусть f — решение задачи Коши для уравнения (теплопроводности)

$$df_{\omega}(t)(q) = (f_{\omega}(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right) f_{\omega}(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q f_{\omega}(t)(q)dB_{\omega}(t)$$

с начальным условием $f_{\omega}(0)(q) = h_{\omega}(q)$.

Пусть, кроме того, для каждого ω функция f_ω обладает аналитическим продолжением на множество S . Тогда функция g_ω , определяемая равенством $g_\omega(t)(q) = f_\omega(t)(\sqrt{i}q)$, является решением задачи Коши для следующего уравнения типа Шредингера

$$idg_\omega(t)(q) = -(g_\omega(t))''(q)dt + i \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) g_\omega(t)(q)dt + i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}qg_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$$

с начальным условием $g_\omega(0)(q) = h_\omega(q)$.

Доказательство. Семейство функций $g_\omega^\gamma, \gamma \in [0, \frac{\pi}{4}]$, определяемых равенством $g_\omega^\gamma(t)(q) = f_\omega(t)(e^{i\gamma}q)$, обладает следующими свойствами. При $\gamma = 0$ функция g_ω^0 является решением сформулированной выше задачи Коши для уравнения теплопроводности. При каждом $\gamma \in [0, \frac{\pi}{4}]$ справедливы равенства

$$(g_\omega^\gamma(t))''(q) = (f_\omega(t))''(e^{i\gamma}q) = e^{i\gamma}(f_\omega(t))''(e^{i\gamma}q) = e^{i\gamma}(g_\omega^\gamma(t))''(q).$$

Отсюда следует, что для всех таких γ функция $g_\omega^\gamma(t)(q)$ является решением задачи Коши для следующего уравнения:

$$dg_\omega(t)(q) = e^{2i\gamma}g_\omega(t)(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) g_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}qg_\omega(t)(q)dB_\omega(t).$$

Так как функция $f_\omega = g_\omega^0$ является решением задачи Коши для уравнения теплопроводности, то в силу единственности аналитического продолжения функция $g_\omega = g_\omega^{\frac{\pi}{4}}$ является решением задачи Коши для уравнения Шредингера. □

В этом параграфе доказывается, что интеграл, представляющий решение стохастического уравнения теплопроводности, удовлетворяет условиям теоремы 4, а поэтому дает представление решения стохастического уравнения типа Шредингера. Доказательство представлено в виде серии лемм.

Лемма 3. Пусть функция V дифференцируема на S , причем ее производная ограничена. Тогда функция h , определяемая равенством $h(q) = \int_0^t V(q + \xi(\tau))d\tau$, где функция ξ непрерывна на отрезке $[0, t]$, также дифференцируема по q на S при каждом ξ .

Доказательство. По определению производной

$$\begin{aligned} h'(q) &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{h(q + \Delta q) - h(q)}{\Delta q} = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\int_0^t (V(q + \Delta q + \xi(\tau)) - V(q + \xi(\tau)))d\tau}{\Delta q} = \\ &\quad (\text{по теореме Лагранжа о конечных приращениях}) \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\int_0^t V'(q + \theta \Delta q + \xi(\tau))\Delta q d\tau}{\Delta q} \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_0^t V'(q + \theta \Delta q + \xi(\tau))d\tau, \theta \in (0, 1); \end{aligned}$$

так как, по предположению, функция $|V'|$ ограничена на S , то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_0^t V'(q + \theta \Delta q + \xi(\tau))d\tau = \int_0^t V'(q + \xi(\tau))d\tau.$$

□

Лемма 4. Пусть выполнены предположения леммы 3. Тогда функция p , определяемая равенством

$$p(q) = \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} w_{0, t}(d\xi),$$

также дифференцируема по q на S при каждом ξ .

Доказательство. Фактически эта лемма является следствием предыдущей, поскольку экспонента под знаком интеграла аналитична по своему аргументу q , причем ее производная по q ограничена. Единственной разницей между интегралами в леммах 4 и 3 является то, что в лемме 3 интеграл берется по бесконечномерному пространству (по счетно-аддитивной ограниченной мере). При этом схема доказательства леммы 4 может быть применена фактически без изменений. $\square$

В следующей лемме речь идет о функции k , определенной на S , задаваемой равенством $k(q)(\xi) = \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)$ и принимающей значения в пространстве функций, определенных на $(C_0[0, t], w_{0,t})$, где $C_0[0, t]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, t]$ функций, $w_{0,t}$ — мера Винера на σ — алгебре борелевских подмножеств пространства $C_0[0, t]$. Функции из этого пространства интегрируемы в любой степени по мере $w_{0,t}$. Интегрируемость в любой степени по мере $w_{0,t}$ значений $k(q)$ функции k вытекает из гауссовости меры $w_{0,t}$ и из того, что функция $k(q)$ представляет собой сдвиг функции, линейно зависящей от ξ . Значения этих функций — это случайные величины на пространстве Ω , задающем винеровский процесс B_ω , по которому производится стохастическое интегрирование.

Лемма 5. *Функция k дифференцируема на S при каждом ξ , причем, каково бы ни было q , $k'(q)(\xi)(\omega) = \omega(t)$.*

Доказательство. Доказательство дифференцируемости проводится непо-

средственным вычислением: каково бы ни было $q \in S$,

$$\begin{aligned} \frac{k(q + \Delta q)(\xi) - k(q)(\xi)}{\Delta q} &= \\ &= \int_0^t \frac{(q + \Delta q + \xi(\tau))dB_\omega(\tau) - (q + \xi(\tau))dB_\omega(\tau)}{\Delta q} = \\ &= B_\omega(t) - B_\omega(0) = B_\omega(t) = \omega(t) \end{aligned}$$

в силу свойств броуновского движения, задающего стохастический интеграл. □

Следующее определение применяется ниже к случайной величине, задаваемой стохастическим интегралом.

Определение 6. Если β — случайная величина на вероятностном пространстве Π , то e^β — это случайная величина на Π , определяемая равенством: $(e^\beta)(p) = e^{\beta(p)}$, $p \in \Pi$.

В дальнейшем можно предполагать, что либо пространство случайных величин является подпространством соответствующего пространства $\mathbb{L}_1$ и наделено заимствованной из $\mathbb{L}_1$ нормой, либо что пространство случайных величин наделено топологией, задаваемой сходимостью по мере. Благодаря этому приобретает смысл понятие дифференцируемости функции, принимающей значения в пространстве случайных величин.

В лемме 6 речь идет о дифференцируемости экспоненты от стохастического интеграла. Эта экспонента является функцией аргумента $q \in S$, принимающей значения в пространстве функций аргумента ξ , принимающих значения в пространстве определенных на Ω случайных величин. Существование этой экспоненты вытекает из того, что функция $k(q)$ является сдвигом линейной функции аргумента ξ .

Лемма 6. Функция n , определенная на S равенством $n(q) = e^{k(q)}$, дифференцируема, причем $(e^{k(q)})' = k'(q)e^{k(q)} = \omega(t)e^{k(q)}$.

Доказательство. Лемма 6 является следствием леммы 5 и замечаний, предшествующих формулировке леммы 6.

Согласно определению 6, экспонента от случайной величины β , определенной на вероятностном пространстве Ω , – это случайная величина на Ω , значения которой на элементе $\omega \in \Omega$ равняется $e^{\beta(\omega)}$. Поэтому, в частности, если β_1 и β_2 – две случайные величины на Ω , то

$$e^{\beta_1 + \beta_2} = e^{\beta_1} e^{\beta_2}. \quad (*)$$

Здесь $(e^{\beta_1} e^{\beta_2})(\omega) = e^{\beta_1(\omega)} e^{\beta_2(\omega)}$, и, аналогично, $(e^{\beta_1 + \beta_2})(\omega) = e^{\beta_1(\omega) + \beta_2(\omega)}$; это и означает справедливость равенства (*).

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^t (q + \Delta q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} - e^{\int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)}}{\Delta q} &= \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} e^{\int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \frac{e^{\int_0^t (q + \Delta q + \xi(\tau)) - (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} - 1}{\Delta q} = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} e^{\int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \frac{e^{\Delta q \int_0^t dB_\omega(\tau)} - 1}{\Delta q} = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} e^{\int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \frac{\Delta q \int_0^t dB_\omega(\tau) + o(\Delta q)}{\Delta q} = \\ &= \omega(t) e^{\int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} = \omega(t) e^{k(q)}. \end{aligned}$$

Здесь символ o обозначает функцию, принимающую значения в пространстве случайных величин (на Ω), такую, что $\frac{o(\Delta q)}{\Delta q} \rightarrow 0$ при $\Delta q \rightarrow 0$ (в пространстве случайных величин). Символ предела понимается либо в смысле сходимости по мере, либо в смысле сходимости по норме пространства $\mathbb{L}_1$. $\square$

Лемма 7. Функция u , определяемая равенством

$$u(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi),$$

дифференцируема, причем

$$u'(q) = \int_{C_0[0,t]} \omega(t) \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi).$$

Доказательство. Согласно предыдущей лемме имеем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{e^{\int_0^t (q+\Delta q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} - e^{\int_0^t (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)}}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi) = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \frac{e^{\int_0^t (q+\Delta q+\xi(\tau)) - (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} - 1}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi) = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} \frac{e^{\Delta q \int_0^t dB_\omega(\tau)} - 1}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi) = \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta q \int_0^t dB_\omega(\tau) + o(\Delta q)}{\Delta q} \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} w_{0,t}(d\xi) = \\ &= \int_{C_0[0,t]} \left(\int_0^t dB_\omega(\tau) \right) \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi) = \\ &= \int_{C_0[0,t]} \omega(t) e^{\int_0^t (q+\xi(\tau)) dB_\omega(\tau)} w_{0,t}(d\xi). \end{aligned}$$

Множитель $\frac{\Delta q \int_0^t dB_\omega(\tau) + o(\Delta q)}{\Delta q}$ можно вынести за знак функционального интеграла, так как он не зависит от ξ . $\square$

В следующей лемме используются обозначения и предположения лемм 3 – 7. Кроме того, предполагается, что функция φ_0 , определенная на S , ограничена и непрерывна на S , аналитична внутри S и обладает на S ограниченными производными первых двух порядков.

Лемма 8. Пусть функция r_ω , определенная на S , задается равенством

$$r_\omega(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi). \quad (2.1)$$

Тогда эта функция дифференцируема на S (и, следовательно, аналитична на S_0 и непрерывна на S).

Доказательство. Интегрируемость второй из экспонент под знаком интеграла вытекает из теоремы 1 первой главы, а произведение первой экспоненты под знаком интеграла и φ_0 — ограниченная функция, поэтому интеграл (2.1) существует.

Теперь остается доказать дифференцируемость функционального интеграла (2.1). Введем следующие обозначения:

$$m(q) = \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \varphi_0(q + \xi(t)), \\ k_\lambda(q) = \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{r_\omega(q + \Delta q) - r_\omega(q)}{\Delta q} = \\ = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{m(q + \Delta q) k_\lambda(q + \Delta q) - m(q) k_\lambda(q)}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi) = \\ = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \int_{C_0[0,t]} (m(q + \Delta q) k_\lambda(q + \Delta q) - m(q + \Delta q) k_\lambda(q) +$$

$$\begin{aligned}
& + m(q + \Delta q)k_\lambda(q) - m(q)k_\lambda(q))w_{0,t}(d\xi) = \\
& = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \int_{C_0[0,t]} (m(q + \Delta q)(k_\lambda(q + \Delta q) - k_\lambda(q))w_{0,t}(d\xi) + \\
& \quad + \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \int_{C_0[0,t]} k_\lambda(q)(m(q + \Delta q) - m(q))w_{0,t}(d\xi). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

В силу ограничений на V и φ_0 , а также в силу того, что в показателе первой экспоненты под знаком интеграла $r_\omega(q)$ стоит минус перед $\int_0^t \frac{\lambda}{4}(q + \xi(\tau))^2 d\tau$, функция $m(q + \Delta q)$ равномерно ограничена, поэтому предел

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{m(q + \Delta q)(k_\lambda(q + \Delta q) - k_\lambda(q))}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi)$$

существует по лемме 7.

К разности $m(q + \Delta q) - m(q)$ в пределе

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{k_\lambda(q)(m(q + \Delta q) - m(q))}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi)$$

применим теорему Лагранжа о конечных приращениях (она применима в силу тех же ограничений на V и φ_0):

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{k_\lambda(q)(m(q + \Delta q) - m(q))}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi) & = \\
& = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \int_{C_0[0,t]} \frac{k_\lambda(q)m(q + \theta\Delta q)}{\Delta q} w_{0,t}(d\xi), \theta \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Функция $k_\lambda(q)$ интегрируема в силу теоремы 1 первой главы и не зависит от Δq , а функция $m(q + \theta\Delta q)$ равномерно ограничена, поэтому к последнему пределу применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

Таким образом, обоснован переход от предела суммы к сумме пределов в последнем равенстве формулы (2.2), а вместе с этим и дифференцируемость (и аналитичность) функции $r_\omega(q)$. □

С помощью приведенных выше лемм мы обосновали, что функциональный интеграл, являющийся представлением решения уравнения теплопроводности, может быть аналитически продолжен на S . Теперь, воспользовавшись теоремой 4 и леммами 3 – 8, мы можем доказать, что аналитическое продолжение этого функционального интеграла на множество $S_1 = \{z : z = re^{i\frac{\pi}{4}}, r \geq 0\}$ ($S_1 \subset S$) является представлением решения стохастического уравнения типа Шредингера, то есть справедлива следующая теорема, в которой предполагается, что все условия лемм 3 – 8 выполнены (для удобства читателей некоторые из этих условий повторяются в формулировке теоремы).

Теорема 5. Пусть функция V непрерывна в области $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, сужение V на S_0 аналитично и ее производная в области S непрерывна и ограничена.

Тогда функция Ψ , определяемая равенством

$$\begin{aligned} \Psi(\omega, t, q) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(\sqrt{i}q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (\sqrt{i}q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\sqrt{i}q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(\sqrt{i}q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) \quad (2.3) \end{aligned}$$

$q \in Q, t \in [0, +\infty)$ является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \quad (2.4) \end{aligned}$$

Доказательство. Определим функцию f равенством

$$\begin{aligned}
f(\omega, t, q) = & \\
= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times & \\
\times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi). & (2.5)
\end{aligned}$$

Согласно теореме 2 главы 1 эта функция является решением задачи Коши для стохастического уравнения типа теплопроводности. Кроме того, из свойств функций, стоящих под знаком интеграла справа, вытекает, что, каковы бы ни были ω, t , функция f обладает аналитическим продолжением по q на S . Таким образом, мы должны проверить выполнение условия определения 1 для функции f . Зададим функцию s из определения 1 тем же выражением, которое использовано в правой части равенства (2.5):

$$\begin{aligned}
s(\omega, t, q) = & \\
= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times & \\
\times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi), &
\end{aligned}$$

Однако теперь предполагается, что q принадлежит S , а не только множеству $[0, +\infty)$. Из непрерывности и ограниченности функции V , в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, вытекает, что функция s непрерывна на S ; кроме того, из того, что функция V аналитична внутри S , причем ее производная ограничена, в силу лемм 1 – 6 вытекает, что функция s дифференцируема по q , то есть аналитична.

Так как коэффициенты уравнения теплопроводности также обладают аналитическим продолжением на сектор S , то функция η , определяемая равенством $\eta(\omega, t, q) = f(\omega, t, \sqrt{i}q)$ является решением задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера. В силу единственности аналитического продолжения последнее равенство означает, что

$$\begin{aligned} \eta(\omega, t, q) &= \Psi(\omega, t, q) = \\ &= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(\sqrt{i}q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (\sqrt{i}q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\sqrt{i}q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(\sqrt{i}q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi), \end{aligned}$$

то есть что $\Psi(\omega, t, q)$ является решением задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера. $\square$

Следующее абстрактное предложение о замене переменной в интеграле Лебега будет применяться для нахождения связи между различными представлениями решения стохастического уравнения типа Шредингера.

Лемма 9. Пусть $(\Omega_k, \mathcal{B}_k, \mu_k), k = 1, 2$ - вероятностное пространство. Пусть $\zeta : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ - измеримое отображение измеримого пространства $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ в $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ и функция f интегрируема относительно меры $\mu_1 \zeta^{-1}$, определяемой так: $\mu_1 \zeta^{-1}(B_2) = \mu_1(\zeta^{-1}(B_2))$ для всякого $B_2 \in \mathcal{B}_2$. Тогда справедливо равенство:

$$\int_{\Omega_1} f(\zeta(\omega_1)) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_2) \mu_1 \zeta^{-1}(d\omega_2).$$

Эта лемма сначала проверяется для индикаторов множеств, а потом производится переход к пределу (см., например, [2], с. 167).

Лемма 10. Пусть функция ϕ аналитична внутри области

$$S = \{q = \alpha e^{i\gamma}, 0 < \alpha < \infty, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$$

и непрерывна вплоть до ее границы. Пусть w – мера Винера на множестве функций, определенных на $Q = [0, +\infty)$ и обращающихся в нуле в ноль. Пусть ζ – это отображение луча Q в луч

$$Q_1 = \{q = \alpha e^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq \alpha < \infty\},$$

определяемое так: $\zeta(q) = \sqrt{i}q$. Тогда справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) &= \\ &= \int_{C_0([0,t],Q_1)} \phi(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}) w_{0,t} \zeta^{-1}(d\xi_1). \end{aligned}$$

Здесь символы $C_0([0,t],Q)$ и $C_0([0,t],Q_1)$ используются для того, чтобы указать множество, которому принадлежит пространственная переменная.

Доказательство. Для удобства преобразований заметим, что $\sqrt{i}q = \frac{q}{\sqrt{-i}}$.

Пусть

$$\Phi(t, q) = \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi);$$

После замены переменной получается следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\Phi(t, \frac{q}{\sqrt{-i}}) &= \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(\frac{q}{\sqrt{-i}} + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi) = \\
&= \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(\frac{q}{\sqrt{-i}} + \frac{\sqrt{-i}\xi(t)}{\sqrt{-i}}) w_{0,t}(d\xi) = \\
&= \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(\frac{1}{\sqrt{-i}}(q + \xi_1(\tau))) w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1),
\end{aligned}$$

где $\zeta(\xi) = \xi_1 = \sqrt{-i}\xi$. Таким образом,

$$\Phi(t, q_1) = \int_{C_0([0,t],Q)} \phi(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}}) w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1),$$

где $q_1 = \frac{q}{\sqrt{-i}}$. □

В следующей теореме, являющейся следствием теоремы 5 и леммы 10, получено представление решения стохастического уравнения типа Шредингера с помощью функционального интеграла по мере, являющейся образом меры Винера при отображении, задаваемом заменой пространственной переменной.

Теорема 6. Пусть выполнены предположения теоремы 5 и леммы 10. Тогда функция $\mathfrak{W}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W}(t, q_1) &= \\
&= \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t)) w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1),
\end{aligned}$$

является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q).$$

Доказательство. Сформулированная теорема получается из теоремы 2 и леммы 8 с помощью следующей замены переменной: $\sqrt{i}q = q_1$. $\square$

2.3 Формула Фейнмана-Каца для уравнения Белавкина

В этом разделе будет получено уравнение Белавкина путем замены переменной в специально подобранном уравнении теплопроводности. Затем мы получим представление решения задачи Коши для уравнения Белавкина с помощью функционального интеграла по счетно-аддитивной мере.

Уравнением теплопроводности мы называем уравнение

$$d\Psi_\omega(t)(q) = (\Psi_\omega(t))''(q)dt + (\tilde{V}(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \quad (2.6)$$

где $\tilde{V}(q) = iV(q)$. После замены переменной q на $\sqrt{i}q$ это уравнение превращается в уравнение Белавкина

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t). \quad (2.7)$$

Сначала мы убедимся, что все формулы, дающие решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с положительным потенциалом V , могут быть превращены в формулы, дающие решения той же задачи Коши для уравнения теплопроводности (2.6).

Как было доказано, решение задачи Коши для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера может быть выражено следующей формулой Фейнмана-Каца:

$$\begin{aligned}\Psi(t, \omega)(q) &= \\ &= \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi). \quad (2.8)\end{aligned}$$

Подставим в эту формулу функцию $\tilde{V}$ вместо V :

$$\begin{aligned}\Psi(t, \omega)(q) &= \\ &= \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t iV(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi). \quad (2.9)\end{aligned}$$

Проверим, прежде всего, что интеграл в формуле (2.9) существует. Для этой проверки достаточно заметить, что экспонента от чисто мнимой функции ограничена, а интеграл от остальных сомножителей существует по теореме 1 первой главы и в силу ограничений на функцию φ_0 . Тогда интеграл от произведения всех этих функций также существует.

Теперь проверим, что интеграл из формулы (2.9) является представлением решения задачи Коши для уравнения (2.7). Чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть следующее семейство стохастических уравнений типа теплопроводности, зависящее от комплексного параметра $e^{i\gamma}$, $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}d\Psi_\omega(t)(q) &= (\Psi_\omega(t))''(q)dt + (e^{i\gamma}V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t).\end{aligned}$$

Можно считать, что семейство потенциалов в этих уравнениях определяет аналитическую функцию одномерного комплексного аргумента $e^{i\gamma}$, принимающую значения в пространстве комплекснозначных потенциалов. При $\gamma = 0$ решение задачи Коши для соответствующего уравнения дается формулой Фейнмана-Каца (2.8).

Функциональный интеграл

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(t, \omega)(q) = & \int_{C_0[0, t]} \exp \left\{ \int_0^t e^{i\gamma} V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0, t}(d\xi) \end{aligned}$$

также аналитически зависит от параметра γ . Это следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и того, что производная по γ функции z , определяемой равенством $z(\gamma) = e^{\int_0^t e^{i\gamma} V(q + \xi(\tau)) d\tau}$, ограничена. Поскольку коэффициенты уравнения также аналитически зависят от γ , а при $\gamma = 0$ функциональный интеграл дает представление решения задачи Коши для уравнения (2.6), то в силу теоремы единственности аналитического продолжения этот интеграл при каждом $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ дает представление решения задачи Коши для уравнения, параметризованного тем же γ .

Далее, применяя метод аналитического продолжения по q к интегралу (2.9) и формулу замены переменной, мы, с помощью тех же рассуждений, что и в предыдущем разделе, получим представление решения уравнения Белавкина с помощью функционального интеграла. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть выполнены предположения теорем 5 и 6 предыдущего

параграфа. Тогда функция $\mathcal{G}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, q_1) = & \\ = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t iV(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t))w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1), \quad (2.10) \end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \quad \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \end{aligned}$$

При этом используются обозначения теоремы 6 предыдущего раздела.

Глава 3

Уравнения со знакопеременным гамильтонианом

3.1 Бесконечномерные дифференциальные операторы

В бесконечномерном случае необходимо параллельно рассматривать уравнения относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в пространстве функций, определенных на конфигурационном пространстве, и уравнения относительно функций того же аргумента, принимающих значения в пространстве мер (эти меры могут быть счетно-аддитивными, цилиндрическими и обобщенными), определенных на том же пространстве. Так называемые фундаментальные решения задачи Коши являются решениями уравнений относительно мер и тем самым вся теория эволюционных дифференциальных уравнений второго порядка оказывается тесно связанной с теорией мер на бесконечномерном пространстве.

Напомним, что если f — числовая функция на гильбертовом пространстве H , то она называется дифференцируемой по Фреше (соответственно, по Адамару, Гато) в точке q , если существует линейный непрерывный функционал на H , обозначаемый символом $f'(q)$ и называемый производной Фреше (соответственно Адамара, Гато) в этой точке, такой, что, каково бы ни было ограниченное (соответственно, секвенциально компактное, конечное) подмно-

жество $B \subset H$, справедливо следующее соотношение

$$\frac{f(q + th) - f(q)}{t} - f'(q)h \rightarrow 0, t \rightarrow 0, t \neq 0$$

равномерно по $h \in B$.

Таким образом, если числовая функция f дифференцируема (в любом из этих смыслов) в каждой точке гильбертова пространства, то ее производная f' – это функция на гильбертовом пространстве, принимающая не числовые значения, а значения в пространстве линейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве H . Это означает, что производная числовой функции становится не числовой функцией, а функцией со значениями в пространстве, сопряженном к H (которое мы отождествляем с H).

Символ f'' обозначает вторую производную Фреше (Гато, Адамара) функции f , которая определяется по индукции. При этом индуктивном определении предполагается, что топология пространства, в котором принимает значения первая производная f' – это топология сходимости на множестве всех ограниченных (секвенциально компактных, конечных) подмножеств пространства H . Приводимое ниже определение дифференциального оператора позволяет вновь вернуться к числовым функциям, что важно для приложений к квантовой механике.

Определение 7. *Дифференциальный оператор (однородный) второго порядка задается линейным непрерывным функционалом $\mathfrak{A}$ на множестве непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве H , в котором принимают значения вторые производные числовых функций, определенных на гильбертовом пространстве. При этом дифференциальный оператор второго порядка, заданный таким образом, обозначается символом $\Delta_{\mathfrak{A}}$ и определяется равенством $(\Delta_{\mathfrak{A}}f)(q) = \mathfrak{A}(f'')(q)$, где f – числовая функция на гильбертовом пространстве H .*

Аналогично, дифференциальный оператор (однородный) первого порядка задается линейным непрерывным функционалом g на H' . При этом если f –

функция на гильбертовом пространстве, то результат применения так заданного дифференциального оператора к этой функции обозначается символом f'_g и определяется равенством $(f'_g)(q) = g(f'(q))$.

Дифференциальные операторы, действующие на пространстве мер, определяются с использованием двойственности между пространством функций и пространством мер, то есть фактически с помощью формулы интегрирования по частям.

Пример 1. Дифференциальный оператор второго порядка (однородный) на множестве числовых функций на H может быть задан с помощью самосопряженного ядерного оператора $A \in \mathcal{L}_1(H)$ в H следующим равенством: $\mathfrak{A}(C) = \text{tr}(AC), C \in \mathcal{L}(H)$. Заданный таким образом дифференциальный оператор второго порядка определяется так: $(\Delta_{\mathfrak{A}}f)(q) = (\Delta_A f)(q) = \text{tr}(Af''(q))$; этот оператор называется оператором Лапласа (– Вольтерры), задаваемым оператором A . Аналогично определяются дифференциальные операторы, действующие в пространствах мер.

Совсем другого типа пример – это оператор Лапласа-Леви (см., например, [64]).

Важным методом исследования дифференциальных операторов является преобразование Фурье.

Определение 8. Пусть E – локально выпуклое пространство, E' – его сопряженное, ν – E –цилиндрическая мера на E' . Преобразованием Фурье меры ν называется функция $\tilde{\nu}$ на пространстве E , определяемая следующим равенством: $\tilde{\nu}(x) = \int_{E'} e^{ig(x)} \nu(dg)$.

Определение 9. Пусть μ – E' –цилиндрическая мера на пространстве E . Ее преобразованием Фурье называется функция $\tilde{\mu}$ на пространстве E' , определяемая так: $\tilde{\mu}(g) = \int_E e^{-ig(x)} \mu(dx)$.

Преобразования Фурье обобщенных мер задаются аналогично. В случае, когда пространство E бесконечномерно, определение (обратного) преобразования Фурье, переводящего функции в меры, использует новый объект – гамильтонову меру Фейнмана Φ_H на пространстве $E \times E'$. Она может быть задана с помощью преобразования Фурье равенством $\widetilde{\Phi}_H(g, x) = e^{ig(x)}$. При этом (обратное) преобразование Фурье функции $\tilde{\mu}$ (являющейся преобразованием Фурье E' –цилиндрической меры μ на пространстве E) определяется равенством $\int_E f(x)\mu(dx) = \int_{E \times E'} f(x)\tilde{\mu}(y)\Phi_H(dxdg)$ для каждой достаточно хорошей функции f , определенной на E .

Помимо использования в определении обратного преобразования Фурье, гамильтонова мера Фейнмана используется при представлении решений уравнений типа Шредингера с помощью интегралов по фазовому пространству.

Далее предполагается, что E – гильбертово пространство и что пространство E' отождествлено с E .

Предложение 1. Пусть Δ_B – это оператор Лапласа, действующий в пространстве E' –цилиндрических мер на E и задаваемый ядерным оператором B на E (с помощью формального равенства $(\Delta_B \mu)(A) = \text{tr}(B\mu''(A))$, где A – это E' –цилиндрическое подмножество E). Тогда преобразование Фурье меры $\Delta_B \mu$ определяется равенством $\widetilde{\Delta_B \mu}(x) = (-Bx, x)\tilde{\mu}(x)$.

Доказательство этого предложения можно найти в книге [1].

Аналогично определяется преобразование Фурье результата действия оператора Δ_B на обобщенную меру.

Определение 10. E' –цилиндрическая мера μ на E называется гауссовской, если ее преобразование Фурье $\tilde{\mu}$ определяется равенством $\tilde{\mu}(x) = e^{(-Bx, x)}$ (напомним, что мы отождествляем пространства E и E'). При этом оператор B называется корреляционным оператором меры μ . Аналогично определяются преобразования Фурье обобщенных (или комплексных) гауссовских мер, важным примером которых являются меры Фейнмана.

Определение 11. *Фундаментальным решением задачи Коши для дифференциального уравнения $f'(t) = \frac{1}{2}\Delta_A f(t)$ (где A – ядерный оператор в гильбертовом пространстве H) называется решение такого же уравнения относительно мерозначной функции μ в предположении, что при $t \rightarrow 0$ ($t \geq 0$) $\mu(t)$ стремится к вероятностной мере, сосредоточенной в нуле.*

Предложение 2. *Пусть A – ядерный оператор в пространстве H . Тогда фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $f'(t) = \frac{1}{2}\Delta_A f(t)$ представляет собой (зависящую от параметра t) гауссовскую меру, корреляционным оператором которой является оператор tA .*

Доказательство. Пусть μ – функция, принимающая значения в пространстве мер (может быть, обобщенных) и являющаяся фундаментальным решением задачи Коши для уравнения, о котором говорится в определении 5. Тогда функция $t \mapsto \mu(t)$ удовлетворяет уравнению $\mu'(t) = \frac{1}{2}\Delta_A \mu(t)$. Преобразование Фурье переводит это уравнение в следующее: $\tilde{\mu}'(t) = (-Ax, x)\tilde{\mu}(t)$. Решением этого уравнения является функция $\tilde{\mu}(t)(x) = e^{-t(Ax, x)}$. Это и означает, что $\mu(t)$ – это гауссовская мера с корреляционным оператором tA . $\square$

Замечание 2. *Гауссовская мера с корреляционным оператором B (в том числе и обобщенная) является решением уравнения типа Шредингера или типа теплопроводности с оператором Лапласа в правой части, задаваемым оператором B .*

Определение 11 применимо к мерам, заданным на пространстве $E \times E'$. В частности, мера Ψ_H на таком произведении называется гамильтоновой мерой Фейнмана, если ее преобразование Фурье $\widetilde{\Psi}_H$ определяется равенством $\widetilde{\Psi}_H(x, y) = e^{i(C(x, y), (x, y))}$, где корреляционный оператор C задается равенством $C(x, y) = C_1(x) - C_2(y)$, причем C_1 и C_2 – неотрицательно определенные операторы в пространствах E и E' соответственно.

Отметим, что к такому виду можно привести преобразование Фурье той гауссовской меры, которая была введена в связи с определением обратного преобразования Фурье и также названа гамильтоновой мерой Фейнмана.

3.2 Гамильтонова мера Фейнмана

В соответствии со сказанным выше, гамильтоновой мерой Фейнмана на пространстве $Q \times P$ (Q и P – две копии сепарабельного комплексного гильбертова пространства) называется обобщенная мера на этом пространстве, преобразование Фурье которой имеет вид $e^{(ip,q)}$. После подходящего линейного преобразования пространства преобразование Фурье гамильтоновой меры Фейнмана приобретает вид $e^{i(B_1(q)-B_2(p))}$. Операторы B_1 и B_2 играют роль операторов C_1 и C_2 из предыдущего пункта.

Пусть H – гильбертово пространство, определенное равенством $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_{1,2}$ – две копии гильбертова пространства K . Пусть для всякого положительного t φ_{tB} – гамильтонова мера Фейнмана, корреляционный оператор которой равен tB . Оператор B определяется равенством $B(x_1 + x_2) = B_1(x_1) - B_2(x_2)$, где B_j – копия неотрицательно определенного оператора, действующая в H_j ($j = 1, 2$). Обозначим через Δ_B оператор Лапласа, действующий в пространстве функций на H и порождаемый оператором B . Он определяется равенством

$$\Delta_B \psi = \text{tr} B_1 \psi''_{H_1} - \text{tr} B_2 \psi''_{H_2}.$$

Пусть также при $t \rightarrow 0$ $f(t) \rightarrow \delta_1 \otimes \delta_2$, где δ_1 – это вероятностная мера на H_1 , сосредоточенная в нуле, а δ_2 – такая же мера на H_2 с противоположным знаком; f – функция вещественного аргумента со значениями в пространстве мер на гильбертовом пространстве H . Тогда справедлива теорема.

Теорема 8. *Функция $t \mapsto \varphi_{tB}$ является фундаментальным решением задачи Коши для бесконечномерного уравнения Шредингера*

$$if'(t) = \Delta_B f(t). \quad (3.1)$$

Для доказательства рассмотрим уравнение

$$i\tilde{f}'(t)dt = (B_1(x_1, x_1) - B_2(x_2, x_2))\tilde{f}(t),$$

где $\tilde{f}$ – преобразование Фурье функции f . Его решением будет экспонента, являющаяся преобразованием Фурье для φ_{tB} .

Таким образом, гамильтонова мера Фейнмана является решением бесконечномерного уравнения Шредингера (3.1) со знакопеременным гамильтонианом. Представление решения такого уравнения Шредингера с помощью функционального интеграла строится по аналогии с конечномерным случаем, к изучению которого мы переходим.

3.3 Представление решения двумерного уравнения теплопроводности

Пусть $Q = \mathbb{R}^2$, H_1 – оператор в $L_2(Q)$, определяемый равенством $(H_1\varphi)(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2}(q_1, q_2)$.

Наша цель – получить формулу Фейнмана-Каца для нестохастического уравнения Шредингера

$$i\psi'(t) = H_1(\psi(t)) + V(q_1, q_2)\psi(t). \quad (3.2)$$

Для этого рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q_2^2} + V(q_1, q_2)g(t, q_1, q_2). \quad (3.3)$$

Как и в одномерном случае, мы сначала получим представление решения задачи Коши для уравнения (3.3), а затем с помощью аналитического продолжения по пространственным переменным, используя результаты предыдущей главы, получим представление решения уравнения (3.2).

Справедлива следующая теорема о представлении решения уравнения теплопроводности функциональным интегралом.

Теорема 9. Пусть $C_0[0, t]$ – множество непрерывных на $[0, t]$ функций, исчезающих в нуле и принимающих значения в $Q(= \mathbb{R}^2)$, с мерой Винера

$w_{0,t}$. Тогда решение задачи Коши g для уравнения (3.3) с начальным условием $g_0 \in L^2$ представляется следующей формулой Фейнмана – Каца:

$$g(t, q_1, q_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} g_0(q_1+\xi_1(t), q_2+\xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2). \quad (3.4)$$

При этом мы предполагаем, что функция V такова, что решение задачи Коши для уравнения (3.3) существует и единственно, а интеграл в формуле Фейнмана – Каца сходится (например, можно потребовать, чтобы функция V была непрерывна и ограничена по совокупности аргументов, а функция g_0 – ограничена, дважды дифференцируема по каждому аргументу, с ограниченными первой и второй производными).

Доказательство. Отметим, что ξ_1 и ξ_2 – независимые винеровские процессы, причем $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$. Найдём дифференциал подынтегрального выражения, используя формулу Ито (здесь как раз и используется предположение о том, что g_0 дважды дифференцируема по каждому аргументу):

$$\begin{aligned} d \left(e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} g_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) \right) &= \\ &= e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} dg_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) + \\ &+ g_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) de^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} = \\ &= e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} \left(\nabla g_0 d\bar{\xi} + \frac{1}{2} \Delta g_0 dt + g_0 V dt \right) = \\ &= e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} (\nabla g_0 d\bar{\xi} + (H g_0) dt), \end{aligned}$$

где $H = \frac{1}{2} \Delta + V$, $d\bar{\xi} = (d\xi_1(t), d\xi_2(t))$ и $\nabla g_0 d\bar{\xi} = \frac{\partial g_0}{\partial q_1} d\xi_1(t) + \frac{\partial g_0}{\partial q_2} d\xi_2(t)$. При этом $dg_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) de^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} = 0$, так как $dt \cdot dt = d\xi_1 dt = dt \xi_1 = d\xi_2 dt = dt d\xi_2 = 0$.

Пусть

$$(Q_t g_0)(q_1, q_2) = E \left(e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} g_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) \right).$$

Это другая запись интеграла из условия теоремы, равного математическому ожиданию экспоненты, умноженной на начальное условие. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} d((Q_t g_0)(q_1, q_2)) &= E \left(e^{\int_0^t V(q_1 + \xi_1(\tau), q_2 + \xi_2(\tau)) d\tau} (\nabla g_0 d\bar{\xi} + (H g_0) dt) \right) = \\ &= E \left(e^{\int_0^t V(q_1 + \xi_1(\tau), q_2 + \xi_2(\tau)) d\tau} H g_0 dt \right) = (Q_t (H g_0))(q_1, q_2). \end{aligned}$$

При получении второго из них использовано известное свойство броуновского движения, состоящее в том, что $E(\nabla g_0 d\bar{\xi}) = 0$ (см., например, [19], [20]).

Так как операторы e^{tH} и H перестановочны, то оператор e^{tH} является решением задачи Коши для операторного уравнения $dQ_t = Q_t H$ с начальным условием $Q_0 = Id$, где Id – единичный оператор. Поэтому $Q_t g_0 = e^{tH} g_0$, то есть функциональный интеграл (3.4) действительно является представлением решения задачи Коши для уравнения (3.3). $\square$

После замены переменных, которая будет определена в следующем разделе, мы получим из уравнения (3.3) уравнение (3.2). При этом мы предполагаем, что функции, входящие в (3.3), допускают аналитическое продолжение в подходящую область. Полученная в результате такого продолжения формула Фейнмана – Каца будет представлением решения уравнения (3.2) в силу единственности аналитического продолжения.

3.4 Представление решения уравнения Шредингера

Пусть g – решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (3.3).

Мы предполагаем, что для каждого $t \geq 0$ существует определенная на множестве

$$\widehat{S} = \{(q_1, q_2) : q_1 = \alpha_1 e^{i\gamma_1}, q_2 = \alpha_2 e^{i\gamma_2}, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq \gamma_2 \leq 0\}$$

непрерывная функция F_g^t , аналитическая на внутренней части этого множества. При этом $F_g^t(\alpha_1, \alpha_2) = g(t, \alpha_1, \alpha_2)$, а вместо символа $F_g^t(\alpha_1 e^{i\gamma_1 \frac{\pi}{4}}, \alpha_2 e^{-i\gamma_2 \frac{\pi}{4}})$

мы будем использовать символ $g(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$. Мы предполагаем, что потенциал V и начальное условие g_0 допускают аналитическое продолжение в эту область.

Лемма 11. Пусть $\psi(t, q_1, q_2) = g(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$. Тогда функция ψ удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q_1, q_2) = \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_2^2} + V(q_1, q_2) \psi(t, q_1, q_2). \quad (3.5)$$

(Уравнение (3.5) - это подробная запись уравнения (3.2).)

Доказательство. Очевидно, что $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2}(t, q_1, q_2) = i g_2''(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$, а $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_2^2}(t, q_1, q_2) = -i g_3''(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$, где g_j'' обозначает частную производную функции g по j -му аргументу.

Для функции ψ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q_1, q_2) &= i \frac{\partial g}{\partial t}(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}}) = i g_2''(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}}) + i g_3''(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}}) + \\ &+ V(q_1, q_2) g(t, \sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}}) = \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_2^2} + \\ &+ V(q_1, q_2) \psi(t, q_1, q_2) = \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(t, q_1, q_2)}{\partial q_2^2} + V(q_1, q_2) \psi(t, q_1, q_2). \end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана. □

Отметим, что в функциональном интеграле из формулы Фейнмана – Каца (3.4) отсутствует экспонента от стохастического интеграла, поэтому подход к получению представления решения стохастического уравнения типа Шредингера, развитый в первой и второй главах, применим к нему со значительными упрощениями.

Практически без изменений сюда переносятся леммы 3 и 4, также, как и в главе 2, проверяется, что функция, определяемая интегралом (3.4), допускает аналитическое продолжение на область $\hat{S}$.

Таким образом, представление решения задачи Коши с начальным условием ψ_0 для уравнения (3.2) может быть записано следующим образом:

$$\psi(t, q_1, q_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(\sqrt{i}q_1 + \xi_1(\tau), \frac{q_2}{\sqrt{i}} + \xi_2(\tau)) d\tau} \psi_0(\sqrt{i}q_1 + \xi_1(t), \frac{q_2}{\sqrt{i}} + \xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2).$$

Если произвести замену переменных $\widehat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$, то будет верна теорема, в которой для аналитически продолженных на область $\widehat{S}$ функций V и ψ_0 сохраняются предположения теоремы 9.

Теорема 10. Пусть функции V и ψ_0 обладают аналитическими продолжениями в область $\widehat{S}$, представляющими собой функции, ограниченные в этой области вместе с производными по каждому из аргументов. Тогда функция $\widehat{\psi}$, определяемая равенством

$$\widehat{\psi}(t, \widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(\tau)}{\sqrt{i}}) d\tau} \psi_0(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(t), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(t)}{\sqrt{i}}) w_{0,t} \widehat{\zeta}^{-1}(d\widehat{\xi}_1 d\widehat{\xi}_2), \quad (3.6)$$

где $(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и $\widehat{\xi}_1 = \sqrt{-i}\xi_1$ $\widehat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_2$, является решением задачи Коши для уравнения (3.5) с начальным условием ψ_0 .

Доказательство этой теоремы опирается на леммы 9 и 10, как и доказательство теоремы 6 во второй главе.

Таким образом, для двумерного уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом мы получили формулу Фейнмана-Каца, причем использовался подход, развитый во второй главе диссертации. Заметим, что доказанные там свойства функциональных интегралов без изменений переносятся и на представления решений, рассматриваемые в третьей главе. Более того, этот подход может быть применен и к уравнению Белавкина с двумерным белым шумом; об этом уравнении речь пойдет в следующем разделе.

Замечание 3. Как в уравнении теплопроводности, так и в уравнении Шредингера в качестве потенциалов можно использовать, например, преобразования Фурье функций из $D(\mathbb{R}^2)$.

3.5 Уравнение Белавкина с двумерным шумом

В этом разделе мы рассмотрим обобщение уравнения Белавкина на двумерный случай. Такое уравнение также будет называться уравнением Белавкина, хотя в работах самого Белавкина оно не встречается (см., впрочем, [52]). Это уравнение выводится способом, аналогичным тому, о котором говорится в первом разделе главы 1. Отличие состоит в том, что по очереди измеряются первая и вторая координаты, причем серии измерений каждой из координат те же самые, что и для одномерного случая (см. раздел 1, глава 1).

Такое уравнение Белавкина имеет вид

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ & + \left(iV(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь λ_1 и λ_2 - неотрицательные числовые параметры, имеющие тот же смысл, что и параметр λ (см. главу 1), а B_1 и B_2 - независимые броуновские движения. Определение функции ψ аналогично определению функции Ψ_ω из главы 1, только конфигурационное пространство теперь – двумерная вещественная плоскость.

Для того, чтобы получить представление решения с помощью функционального интеграла, нужно подобрать такое уравнение теплопроводности, чтобы после замены переменной получались исходные коэффициенты из уравнения Белавкина. Добиться этого в двумерном случае можно при помощи замены переменных, которая использовалась нами выше. Эта замена переменных переводит уравнение теплопроводности в уравнение Белавкина.

Мы рассмотрим задачу Коши для следующего уравнения теплопроводности

сти:

$$\begin{aligned}
d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\
& + \left(V(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\
& + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Для этого уравнения мы можем записать представление решения следующим образом:

$$\begin{aligned}
\psi(t)(q_1, q_2) = & \\
= & \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (q_1 + \xi_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t (q_2 + \xi_2(\tau)) dB_2(\tau) \right] \times \\
\times & \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (q_1 + \xi_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (q_2 + \xi_2(\tau))^2 + V(q_1 + \xi_1(\tau), q_2 + \xi_2(\tau)) \right] d\tau \right] \times \\
& \times \eta(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2). \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Здесь η - начальное условие, то есть $\psi(0, q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2)$, а $w_{0,t}$ - двумерный винеровский процесс, порождаемый двумя независимыми друг от друга одномерными винеровскими процессами.

Так как винеровские процессы B_1 и B_2 , а также ξ_1 и ξ_2 независимы, доказательство того, что функциональный интеграл (3.9) является представлением решения задачи Коши (3.8) полностью аналогично доказательству теоремы 2 главы 1. При этом используется теорема 1 первой главы, с помощью которой доказывается существование функционального интеграла (3.9). Может быть применен и операторный подход, аналогичный тому, который используется в третьем разделе первой главы.

Далее, совершенно так же, как и в главе 2 (определение 5), задается аналитическое продолжение функции v , определенной на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, на внутреннюю часть множества

$$\hat{S} = \{(q_1, q_2) : q_1 = \alpha_1 e^{i\gamma_1}, q_2 = \alpha_2 e^{i\gamma_2}, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq \gamma_2 \leq 0\},$$

непрерывное вплоть до границы $\widehat{S}$. Теперь, в точности так же, как во второй главе, используя те же леммы, мы можем получить представление решения задачи Коши для следующего двумерного стохастического уравнения типа Шредингера со знакопеременным гамильтонианом:

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ & + \left(V(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При этом используется замена переменных из предыдущего раздела. Само представление решения задачи Коши для уравнения (3.10) функциональным интегралом имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi(t)(q_1, q_2) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\sqrt{i} q_1 + \xi_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{i}} q_2 + \xi_2(\tau) \right) dB_2(\tau) \right] \times \\ & \times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\sqrt{i} q_1 + \xi_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} q_2 + \xi_2(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\int_0^t V(\sqrt{i} q_1 + \xi_1(\tau), \frac{1}{\sqrt{i}} q_2 + \xi_2(\tau)) d\tau \right] \times \\ & \times \eta(\sqrt{i} q_1 + \xi_1(t), \frac{1}{\sqrt{i}} q_2 + \xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя лемму 10, теорему 6 и замену $\widehat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i} q_1, \frac{1}{\sqrt{i}} q_2)$, мы можем записать формулу (3.11) так:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(t)(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\widehat{q}_1 + \sqrt{i} \widehat{\xi}_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t \left(\widehat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \widehat{\xi}_2(\tau) \right) dB_2(\tau) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(\tau))^2 \right] d\tau \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[\int_0^t V(\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(\tau), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(\tau)) d\tau \right] \times \\
& \quad \times \eta(\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(t), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(t)) w_{0,t} \hat{\zeta}^{-1}(d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

где $(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$, $\hat{\xi}_1 = \sqrt{-i}\xi_1$ и $\hat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_2$.

Наконец, повторяя в точности все рассуждения последнего раздела второй главы, мы можем сформулировать следующую теорему о представлении решения задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом с помощью функционального интеграла.

Теорема 11. Пусть функция V непрерывна в области $\hat{S}$, сужение функции V на внутреннюю часть $\hat{S}$ аналитично и ее производные в области $\hat{S}$ по обоим аргументам непрерывны и ограничены. Пусть еще функция η , определенная на $\hat{S}$, ограничена и непрерывна на $\hat{S}$, аналитична внутри $\hat{S}$ и обладает на $\hat{S}$ ограниченными производными первых двух порядков по каждому аргументу. Тогда функция $\mathcal{F}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(t)(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \\
& = \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(\tau)) dB_2(\tau) \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(\tau))^2 \right] d\tau \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[\int_0^t i V(\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(\tau), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(\tau)) d\tau \right] \times \\
& \quad \times \eta(\hat{q}_1 + \sqrt{i} \hat{\xi}_1(t), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}} \hat{\xi}_2(t)) w_{0,t} \hat{\zeta}^{-1}(d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2), \quad (3.13)
\end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина (3.7).

Замечание 4. Результаты этого раздела обобщаются на случай любого конечномерного конфигурационного пространства. При этом достаточно сделать замену переменных, при которой на корень из мнимой единицы умножаются те из аргументов, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак плюс, а делятся те, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак минус.

Заключение

В диссертации с помощью формулы Ито и теоремы Ферника получены представления решений стохастических уравнений типа теплопроводности функциональными интегралами. Этот результат и комбинации различных вариантов аналитического продолжения позволяют получить формулы Фейнмана – Каца для стохастических уравнений типа Шредингера и уравнения Белавкина. Рассмотрены уравнения со знакопеременным гамильтонианом и найдена замена пространственных переменных, при которой такие уравнения получаются из уравнений со знакопостоянным гамильтонианом. С помощью этой замены переменных и аналогичных упомянутым выше вариантов аналитического продолжения получены интегралы по пространствам функций, представляющие решения уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом. Все перечисленные представления решений являются интегралами по счетно-аддитивным мерам.

В третьей главе рассмотрена связь результатов диссертации с бесконечномерными уравнениями. Отметим, однако, что метод замены переменной и аналитического продолжения в случае бесконечномерных стохастических уравнений изучен еще недостаточно, так что это одно из актуальных направлений дальнейших исследований (см. статью [37]). Еще одно важное направление исследований – получение формул Фейнмана – Каца для уравнений на многообразиях (см. статьи [28], [50]). При исследовании таких уравнений применимы методы, развитые в диссертации. Кроме того, общая теория случайных операторов – это мало изученная и очень интересная область. В частности, эта теория может быть использована для получения представлений решений стохастических эволюционных уравнений.

Литература

- [1] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. 2-е изд. – М.: ЛЕНАНД. – 2015. – 336 с.
- [2] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд. – М. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Инст. комп. исследований. – 2020. – 756 с.
- [3] Богачев В. И., Смолянов О. Г., Соболев В. И. Топологические векторные пространства и их приложения. М. – Ижевск: РХД. – 2012. – 584 с.
- [4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т1. Функциональный анализ. М.: Мир. – 1978. – 359 с.
- [5] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука. – 1977. – 573 с.
- [6] Лоэв М. Теория вероятностей (перевод с английского Б. А. Севастьянова). М.: ИЛ. – 1962. – 720 с.
- [7] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир. – 1978. – 396 с.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука. – 1989. – 752 с.
- [9] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. – 1967. – 464 с.
- [10] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. – 1972. – 740 с.

- [11] Копачевский Н. Д. Дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве: Специальный курс лекций. Симферополь.: ФЛП "Бондаренко О. А.". – 2012. – 112 с.
- [12] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, 2-е изд. – М.: МЦНМО. – 2014. – 560 с.
- [13] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т3. М.: Мир. – 1987. – 696 с.
- [14] Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: МГУ. – 1979. – 86 с.
- [15] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир. – 1965. – 408 с.
- [16] Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука. – 1967. – 176 с.
- [17] Simon B. Functional Integrals and Quantum Physics. Acad. Press, New York, 1979. – 297 p.
- [18] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. Лит. – 1962. – 829 с.
- [19] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: МИР, АСТ. – 2003. – 408 с.
- [20] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука. – 1986. – 448 с.
- [21] Belavkin V. P. Nondemolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes// Proc. Bellman Continuous Workshop, Sophia – Antinopolis, Lect. Notes in Comp. and Inf. Sciences, 121. Springer, Berlin. – 1988. – P. 245–265.
- [22] Belavkin V. P. A new wave equation for a continuous nondemolition measurement// Phys. Lett. A. – 1989. – Vol. 140. – P. 355–359.

- [23] Гоф Дж., Ратью Т.С., Смолянов О.Г. Фейнмановские, вигнеровские и гамильтоновы структуры, описывающие динамику открытых квантовых систем// Докл. Акад. Наук – 2014. – Т. 454. – №4. – С. 379–383.
- [24] Diosi L. Continuous quantum measurement and Itô formalism// Phys. Lett. A. – 1988. – Vol. 129. – P. 419–423.
- [25] Belavkin V. P., Smolyanov O. G. The Feynman path integral corresponding to the stochastic Schrödinger// Dokl. Akad. Nauk. – 1998. – Vol. 360. – P. 589–593; English transl., Dokl. Math. – 1998. – Vol. 57. – P. 430–434.
- [26] Smolyanov O. G., Truman A. Schrödinger–Belavkin equations and associated Kolmogorov and Lindblad equations// Teoret. Mat. Fiz. – 1999. Vol. 120. – №2. – P. 193–207; English transl. Theoret. and Math. Phys. – 1999. Vol. 120. – P. 973–984.
- [27] Smolyanov O. G., Truman A. Feynman Formulas for Solutions of the Schrödinger Equation on Compact Riemannian Manifolds// Math. Notes. – 2000. – V. – №5. – P. 668–671.
- [28] Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях// Докл. Акад. Наук – 2003. – Т. 392. – №2. – С. 174–179.
- [29] Смолянов О.Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование Шредингера// Докл. Акад. Наук СССР. – 1982. – Т. 263. – №3. – С. 558–562.
- [30] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Бесконечномерные уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям// Докл. Акад. Наук – 2006. – Т. 408. – №1. – С. 28–33.
- [31] Smolyanov O. G. Feynman formulae for evolutionary equations
Trends in stochastic analysis. London Math. Soc. Lect. Not. Series. – 2009. – Vol. 353.

- [32] Смолянов О. Г., Толстыга Д. С. Формулы Фейнмана для стохастической и квантовой динамики частиц в многомерных областях// Докл. Акад. Наук – 2013. – Т. 452. – №3. – С. 256–260.
- [33] Albeverio S., Kolokol'tsov V. N., Smolyanov O. G. Representation des solution de l'equation de Belavkin pour la mesure quantique par une version rigoureuse de la formule d'integration fonctionnelle de Menski// Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences – 1996. – Vol. 323. – №1. – P. 661–664.
- [34] Albeverio S., Kolokol'tsov V. N., Smolyanov O. G. Continuous quantum measurement: local and global approaches// Rev. Math. Phys. – 1997. – Vol. 9. – №6. – P. 907–920.
- [35] Chernoff R. P. Note on product formulas for operator semigroups// Journ. Funct. Anal. – 1968. – Vol. 2. – №2. – P. 238–242.
- [36] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures// Doklady Math. – 2000. – Vol. 61. – P. 230–234.
- [37] Альбеверио С. А., Смолянов О. Г. Бесконечномерные стохастические уравнения Шредингера – Белавкина// Усп. Мат. Наук – 1997. – Vol. 52. – №4(316). – P. 197–198; Russ. Math. Surv. – 1997. – Vol. 52. – №4. – P. 822–823.
- [38] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Вероятностный подход к построению решений одномерных начально-краевых задач// Теор. вероятн. и ее примен. – 2013. – Т. 58. – №2. – С. 255–281; Theory Probab. Appl. – 2014. – Vol. 58. – №2. – P. 242–263.
- [39] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial d} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta u$ с комплексным параметром σ .// Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2013. – Т. 420. – С. 88–102; J. Math. Sci., New York. – 2015. – Vol. 206. – №2. – P. 171–180.

- [40] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions// Stoch. proc., Phys. and Geom.: New Interplays. II: A Volume in Honour of S. Albeverio, Can. Math. Soc. Conf. Proc. Am. Math. Soc. – 2000. – Vol. 29. – P. 589–602.
- [41] Engel J., Nagel R. One - Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations// Springer, New York. – 2000.
- [42] Doss H. Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques// Commun. Math. Phys. – 1980. – Vol. 73. – P. 247–264.
- [43] Смолянов О. Г. Линейные представления эволюционных дифференциальных уравнений// Докл. Акад. Наук СССР. – 1975. – Т. 221. – №6. – С. 1288–1292.
- [44] Feynman R.P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics// Rev. Modern Phys. – 1948. – Vol. 20. – №2. – P. 367–387.
- [45] Feynman R.P. An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics// Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84. – №2. – P. 108–128.
- [46] Fernique X. Integrabilite des vecteurs gaussiens// Compt Rend. de l'Acad. des Sciences, Serie A-B. – 1970. – Vol. 270. – P. 1698–1699.
- [47] Montaldi J., Smolyanov O.G. Transformations of measures via their generalized densities// Russ. Journ. Math. Phys. – 2014. – Vol. 21. – №3. – P. 379–385.
- [48] Trotter H. F. On the product of semi-groups of operators// Proceedings of the American Math. Society. – 1959. – Vol.10. – №4. – P. 545–551.
- [49] Nelson E. Feynman Integrals and the Schredinger Equation// Joun. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5. – №3. – P. 332–343.

- [50] Dubravina V. A. Representation of solutions of evolution equations on a ramified surface by Feynman formulae// *Izv. Math.* – 2018. – Vol. 82. – №3. – P. 494–511.
- [51] Parthasarathy K. R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.* Springer, New York. – 1992.
- [52] Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G. Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations// *Izv.: Math.* – 2005. – Vol.69. – №6. – P. 1081–1098.
- [53] Smolyanova M. O. The Hilbert supports of measures on locally convex// *Russ. Journ. Math. Phys.* – 2015. – Vol. 22. – №4. – P. 550–552.
- [54] Маслов В. П., Чеботарев А. М. Представления решения уравнения типа Хартри в виде Т-отображения// *Докл. Акад. Наук СССР.* – 1975. – Vol.222. – №5. – P. 1037–1040.
- [55] Pechen A. Selected topics in dynamics and control of open quantum systems// *P-Adic Numb., Ultramet. Anal. and Applic.* – 2011. – Vol.3. – №3. – P. 248–252.
- [56] Pechen A., Prokhorenko D., Wu R., Rabitz H. Control landscapes for two-level open quantum systems// *Journ. Phys. A.* – 2008, 045205. – Vol. 41. – №4. – P. 18.
- [57] Wu R., Pechen A., Rabitz H., Hsieh M., Tsou B. Control landscapes for observable preparation with open quantum systems// *Journ. Math. Phys.* – 2008, 022108. – Vol. 49. – №2. – P. 12.
- [58] Стародубов С. Л. Теорема о свойствах выборочных функций случайного поля и обобщенные случайные поля// *Изв. вузов. Матем.* – 2011. – Т. 7. – С. 48–56.
- [59] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula// *Journ. Math. Phys.* – 2002. – Vol. 43. – №10. – P. 5161–5171.

- [60] Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике// Усп. Мат. Наук – 1956. Т. 11. – №1(67). – С. 77–114.
- [61] Smolyanov O. G. Schrödinger type semigroups via Feynman formulae and all that// Quant. Prob. and White Noise Anal. – 2013. – Vol. 30. – P. 301–313.
- [62] Обрезков О. О. Представление функциональными интегралами решений регулярных и стохастических эволюционных уравнений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2005 год.
- [63] Obrezkov O. O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula// Dokl. Math. – 2005. – Vol. 71. – №1. – P. 105–110.
- [64] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье// Труды ММО. – 1972. – Т. 27. – С. 249–262.
- [65] Cameron R.H. The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula// Annals of Math. – 1954. – Vol. 59. – P. 134–162.
- [66] Cameron R.H. A Family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals// Journ. Math. Phys. – 1960. – Vol. 39. – P. 126–140.
- [67] Smolyanov O.G. Feynman formula for evolution equations// Tren. stoch. anal. – 2009. – Vol. 453. – P. 283–302.
- [68] Smolyanov O.G., Weizsacker H. v., Wittich O. Chernoff' theorem and discrete time approximations of brownian motion on manifolds// Potential Analysis. – 2007. – Vol. 26. – №1. – P. 1–29.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

- [69] Loboda A. A. Schrödinger Equation with Signed Hamiltonian// Russ. Journ. Math. Phys. – 2020. – Vol.27. – №1. – P. 99–103. (импакт-фактор WoS 1.292).
- [70] Loboda A. A. The Doss Method for the Stochastic Schrödinger – Belavkin Equation// Math. Not. – 2019. – Vol. 106. – №2. – P. 311–315. (импакт-фактор WoS 0.626).
- [71] Loboda A. A. Ito Method for Proving the Feynman – Kac Formula for the Euclidean Analog of the Stochastic Schrödinger Equation// Differential Equations. – 2018. – Vol. 54. – №4. – P. 557–561. (импакт-фактор WoS 0.659).

Статьи в сборниках, входящих в РИНЦ

- [72] Лобода А. А. Методы получения представлений решений стохастических уравнений Шредингера// М.: МАКС Пресс. – 2019. – Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко. Т. 1. – С. 91-94.

Тезисы докладов на научных конференциях

- [73] Лобода А. А. Представления решений эволюционных дифференциальных уравнений с коэффициентами типа белого шума// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2017". М.: МГУ, 2017. 2 с.
- [74] Лобода А. А. Представление решения стохастического уравнения Шредингера функциональным интегралом// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2018". М.: МГУ, 2018. 2 с.
- [75] Лобода А. А. Методы аналитического продолжения для решения эволюционных дифференциальных уравнений// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2019". М.: МГУ, 2019. 2 с.

- [76] Лобода А. А. Метод замены переменной для стохастических уравнений типа Шредингера// Сборник тезисов докладов международной конференции International scientific conference «Infinite-dimensional analysis and mathematical physics». М.: МГУ, 2019. С. 25-27.
- [77] Лобода А. А. Представления решений эволюционных уравнений со знакопеременным гамильтонианом//Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2020". М.: МГУ. 2020. 2 с.
- [78] Лобода А. А. Функциональные интегралы по счетно-аддитивным и несчетно-аддитивным мерам// Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 23-29 ноября 2020 года. Прикладные математика и информатика. М.: МФТИ, 2020. С. 28–29.