

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

ЛОБОДА АРТЕМ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ
СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА
ШРЕДИНГЕРА**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: **Смолянов Олег Георгиевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Козырев Сергей Владимирович**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела
математической физики
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Мелихов Сергей Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры и дискретной математики
Южного федерального университета

Орлов Юрий Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий отделом вычислительной физики и
кинетических уравнений Института прикладной
математики имени М.В.Келдыша РАН

Защита диссертации состоится «4» июня 2021 г. в 16 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 15-03.

Email: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/364893018/>.

Автореферат разослан «3» мая 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Н. А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена разработке методов представления решений эволюционных стохастических уравнений типа уравнений Шредингера – Белавкина функциональными интегралами. Эти же методы применяются для некоторых детерминированных уравнений.

Стохастические уравнения Шредингера – Белавкина были выведены В. П. Белавкиным^{1,2} в общем виде и Л. Дьоши³ в наиболее важном частном случае. В. П. Белавкин для вывода уравнения использовал квантовое стохастическое исчисление. С помощью стандартной аксиоматики квантовой механики уравнения Шредингера – Белавкина были получены в работах Л. Дьоши, а также О. Г. Смолянова с соавторами^{4,5}.

Эти уравнения дают описание марковской аппроксимации динамики открытых квантовых систем, в частности, эволюции квантовых систем, находящихся под так называемым непрерывным наблюдением. Поскольку фактически не существует изолированных квантовых систем, то есть все системы можно считать открытыми, уравнения такого типа имеют большое значение для приложений. Внимание к открытым квантовым системам в последнее время сильно возросло в связи с применениями в различных областях, связанных с квантовыми технологиями, в частности, с теорией управления квантовыми системами, поэтому исследование марковских аппроксимаций открытых квантовых систем представляется очень важным для развития соответствующих математических методов. Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Существует несколько подходов к получению представлений решений эволюционных уравнений функциональными интегралами: теорема Чернова⁶ и ее частный случай – теорема Троттера⁷ (впервые использованная в 1964 году

¹Belavkin V. P. Nondemolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes// Proc. Bellman Continuous Workshop, Sophia – Antinopolis, Lect. Notes in Comp. and Inf. Sciences, 121. Springer, Berlin. – 1988. – P. 245–265.

²Belavkin V. P. A new wave equation for a continuous nondemolition measurement// Phys. Lett. A.–1989.– Vol. 140. – P. 355–359.

³Diosi L. Continuous quantum measurement and Itô formalism// Phys. Lett. A. – 1988. – Vol. 129. – P. 419–423.

⁴Belavkin V. P., Smolyanov O. G. The Feynman path integral corresponding to the stochastic Schrödinger// Dokl. Akad. Nauk. – 1998. – Vol. 360. – P. 589–593; English transl., Dokl. Math. – 1998. – Vol. 57. – P. 430–434.

⁵Smolyanov O. G., Truman A. Schrödinger–Belavkin equations and associated Kolmogorov and Lindblad equations// Teoret. Mat. Fiz.–1999. Vol. 120. – №2. – P. 193–207; English transl. Theoret. and Math. Phys. – 1999. Vol. 120. – P. 973–984.

⁶Chernoff R. P. Note on product formulas for operator semigroups// Journ. Funct. Anal. – 1968. – Vol. 2. – №2. – P. 238–242.

⁷Trotter H. F. On the product of semi-groups of operators// Proceedings of the American Math. Society. – 1959. – Vol.10. – №4. – P. 545–551.

Э. Нельсоном⁸ для доказательства лагранжевых формул Фейнмана), метод аналитического продолжения по параметру и метод аналитического продолжения по аргументу. Каждый из этих методов имеет свои преимущества при рассмотрении конкретных задач. Остановимся подробнее на этих методах.

Прежде всего рассмотрим метод, основанный на применении теоремы Чернова, появившейся в 1968 году. В детерминированном случае теорема Чернова была использована в работах О. Г. Смолянова⁹ и его последующих работах с соавторами^{10,11,12}. В 2002 году эта теорема была применена в статье¹³ для доказательства появившихся в 1951 году в работе¹⁴ гамильтоновых формул Фейнмана. В работе О. О. Обрезкова, О. Г. Смолянова и А. Трумена¹⁵ был доказан рандомизированный вариант теоремы Чернова, который затем использовался в работе¹⁶ для получения представлений решений стохастического уравнения Шредингера (подробнее см.¹⁷). С помощью этого подхода функциональные интегралы, представляющие решения уравнений Шредингера – Белавкина, были получены как пределы последовательности конечно-кратных интегралов (так называемые формулы Фейнмана), причем пределами являлись функциональные интегралы по мере Фейнмана, не являющейся счетно-аддитивной. Также при подходе, основанном на применении теоремы Чернова, явно не рассматривается связь представлений решений со стохастическим анализом. Методы аналитического продолжения гораздо лучше выявляют такую связь.

Подробнее о применении аналитического продолжения и равенства Парсеваля можно прочитать в книге О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе¹⁸ (см.

⁸Nelson E. Feynman Integrals and the Schredinger Equation// Journ. Math. Phys.–1964. – Vol. 5. – №3. – P. 332–343.

⁹Smolyanov O. G. Feynman formulae for evolutionary equations

Trends in stochastic analysis. London Math. Soc. Lect. Not. Series. – 2009. – Vol. 353.

¹⁰Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures// Doklady Math. – 2000. – Vol. 61. – P. 230–234.

¹¹Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions// Stoch. proc., Phys. and Geom.: New Interplays. II: A Volume in Honour of S. Albeverio, Can. Math. Soc. Conf. Proc. Am. Math. Soc. – 2000. – Vol. 29. – P. 589–602.

¹²Smolyanov O. G., Truman A. Feynman Formulas for Solutions of the Schrödinger Equation on Compact Riemannian Manifolds// Math. Notes. – 2000. – V. – №5. – P. 668–671.

¹³Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula// Journ. Math. Phys. – 2002. – Vol. 43. – №10. – P. 5161–5171.

¹⁴Feynman R. P. An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics// Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84. – №2. – P. 108–128.

¹⁵Obrezkov O. O., Smolyanov O. G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula// Dokl. Math. – 2005. – Vol. 71. – №1. – P. 105–110.

¹⁶Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G. Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations// Izv.: Math. – 2005. – Vol. 69. – №6. – P. 1081–1098.

¹⁷Обрезков О. О. Представление функциональными интегралами решений регулярных и стохастических эволюционных уравнений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2005 год.

¹⁸Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. 2-е изд. – М.: ЛЕНАНД. – 2015. – 336

также^{19,20}). С помощью этих методов были доказаны появившиеся в 1948 году лагранжевы формулы Фейнмана²¹.

Для применения метода аналитического продолжения сначала требуется получить представление решения уравнения теплопроводности функциональным интегралом, что впервые сделал М. Кац^{22,23}. Затем к полученному функциональному интегралу по счетно-аддитивной мере применяется метод аналитического продолжения.

Аналитически продолжать можно по параметру, стоящему в показателе гауссовской экспоненты под знаком функционального интеграла, и по аргументу, в результате чего получаются разные представления решений одного и того же уравнения.

Аналитическое продолжение по параметру было рассмотрено в работе И. М. Гельфанда и А. М. Яглома²⁴, причем авторы полагали, что при таком аналитическом продолжении будет получаться интеграл по счетно-аддитивной мере. Это опроверг в своих работах Р. Камерон^{25,26}, показавший, что при таком аналитическом продолжении ситуация иная: как только мнимая часть параметра, по которому осуществляется аналитическое продолжение, становится отличной от нуля, у меры появляется неограниченная вариация, сама мера определена на очень маленьком полукольце, а потому не может быть продолжена до счетно-аддитивной. Таким образом, то, что предложили И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, следует считать продолжением функционального интеграла, а не меры. Когда параметр чисто мнимый, с единичной мнимой частью, то мы получаем меру Фейнмана.

На стохастический случай этот метод был обобщен в упоминавшейся выше работе В. П. Белавкина и О. Г. Смолянова, однако эта работа не содержит полных доказательств. Для получения функционального интеграла по мере

с.

¹⁹Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Вероятностный подход к построению решений одномерных начально-краевых задач// Теор. вероятн. и ее примен. – 2013. – Т. 58. – №2. – С. 255–281; Theory Probab. Appl. – 2014. – Vol. 58. – №2. – Р. 242–263.

²⁰Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial d} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta u$ с комплексным параметром σ // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2013. – Т. 420. – С. 88–102; J. Math. Sci., New York. – 2015. – Vol. 206. – №2. – Р. 171–180.

²¹Feynman R. P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics// Rev. Modern Phys. – 1948. – Vol. 20. – №2. – Р. 367–387.

²²Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир. – 1965. – 408 с.

²³Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука. – 1967. – 176 с.

²⁴Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике// Усп. Мат. Наук – 1956. Т. 11. – №1(67). – С. 77–114.

²⁵Cameron R. H. The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula// Annals of Math. – 1954. – Vol. 59. – Р. 134–162.

²⁶Cameron R. H. A Family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals// Journ. Math. Phys. – 1960. – Vol. 39. – Р. 126–140.

Фейнмана, представляющего решение уравнения Шредингера – Белавкина, авторы предполагали использовать аналог представления Маслова и Чеботарева²⁷, преобразование Фурье и равенство Парсеваля; с помощью этих приемов предполагалось получить последовательность конечнократных интегралов, сходящуюся к нужному функциональному интегралу.

Аналитическое продолжение по аргументу в детерминированном случае было впервые изучено в работе Х. Досса²⁸. Соответствующий метод иногда называют методом Досса. При таком аналитическом продолжении у функций заменяется аргумент (откуда еще одно название метода: метод замены переменной), а сами функции под знаком функционального интеграла, представляющего решение уравнения теплопроводности, аналитически продолжаются в подходящую область. При этом на новом пространстве аналитически продолженных функций при отображении, заданном с помощью такой замены и аналитического продолжения, образ меры Винера снова оказывается счетно-аддитивной мерой, что было проверено в работе автора [2].

На стохастический случай метод Досса был распространен в работах С. Альбеверио, В. Н. Колокольцова и О. Г. Смолянова^{29,30}, однако и в этих работах были пропущены многие детали доказательств. Тем не менее идея применения формулы Ито для доказательства формулы Фейнмана – Каца была высказана во всех работах, посвященных методу аналитического продолжения в стохастическом случае.

Надо отметить, что подходы Р. Фейнмана и М. Каца к получению представлений решений задач Коши для эволюционных дифференциальных уравнений с помощью функциональных интегралов являются альтернативными. Оба автора рассматривали представление экспоненты от оператора, однако метод Фейнмана является обобщением разложения экспоненты в бесконечное произведение, а метод Каца – обобщением разложения экспоненты в степенной ряд. Формула Ито в детерминированном случае используется в упоминавшейся выше работе Х. Досса, а также в книге Б. Саймона³¹.

Таким образом, к началу работы над диссертацией не было ни одного полного доказательства формул Фейнмана – Каца и были высказаны только

²⁷Маслов В. П., Чеботарев А. М. Представления решения уравнения типа Хартри в виде Т-отображения// Докл. Акад. Наук СССР. – 1975. – Vol.222. – №5. – P. 1037–1040.

²⁸Doss H. Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques// Commun. Math. Phys. – 1980. – Vol. 73. – P. 247–264.

²⁹Albeverio S., Kolokol'tsov V. N., Smolyanov O. G. Representation des solution de l'equation de Belavkin pour la mesure quantique par une version rigoureuse de la formule d'integration fonctionnelle de Menski// Compt. Rend. Acad. Scien. Paris. – 1996. – Vol. 323. – №1. – P. 661–664.

³⁰Albeverio S., Kolokol'tsov V. N., Smolyanov O. G. Continuous quantum measurement: local and global approaches// Rev. Math. Phys. – 1997. – Vol. 9. – №6. – P. 907–920.

³¹Simon B. Functional Integrals and Quantum Physics. Acad. Press, New York, 1979. – 297 p.

некоторые идеи, обобщающие метод замены переменной на стохастический случай. В диссертации, с использованием новых идей и конструкций, приведены полные доказательства, использующие формулу Ито, и рассмотрены некоторые новые виды уравнений, на которые обобщается метод замены переменной.

Далее используется терминология, отличающаяся от примененной выше. В этой терминологии мы различаем два типа объектов: стохастические уравнения типа Шредингера и уравнения Белавкина (те и другие принадлежат к обсуждавшемуся выше классу уравнений Шредингера – Белавкина). Стохастическим уравнением типа Шредингера называется уравнение, в котором мнимая единица стоит только перед лапласианом, а уравнением Белавкина называется уравнение, в котором мнимые единицы стоят и перед лапласианом, и перед потенциалом V .

Цель работы – с помощью комбинации методов замены переменной и аналитического продолжения по аргументу получить представления решений стохастических дифференциальных уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина, установить связь решений этих уравнений с решениями соответствующих операторных уравнений. При этом предполагается распространить на такие уравнения технический аппарат, использовавшийся ранее для нестохастических уравнений, прежде всего формулу Ито и метод аналитического продолжения по пространственной переменной. Еще одной целью работы является получение представлений с помощью функциональных интегралов решений уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина со знакопеременными гамильтонианами.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты диссертации являются новыми и опубликованы в работах автора. Они состоят в следующем.

1. Получены представления решений стохастических уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина с помощью интегралов по счетно-аддитивным мерам.

2. Методы замены переменной и аналитического продолжения по аргументу обобщены на стохастический случай. При этом использована комбинация формулы Ито и теоремы Ферника.

3. Получены представления с помощью функциональных интегралов решений уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом.

4. Развита новая метод замены пространственных переменных, позволяющий свести уравнения со знакопеременным гамильтонианом к уравнениям со

знакопостоянным гамильтонианом.

Положения, выносимые на защиту.

1. Формулы Фейнмана – Каца для стохастических уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина, содержащие функциональные интегралы по счетно-аддитивным мерам.
2. Метод замены переменной и аналитического продолжения для стохастических уравнений с частными производными.
3. Теоремы о представлениях с помощью функциональных интегралов решений уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом.
4. Метод замены пространственных переменных, позволяющий свести уравнения со знакопеременным гамильтонианом к уравнениям со знакопостоянным гамильтонианом.

Методы исследования. В диссертации использованы методы анализа, связанные с аналитическим продолжением функций, специальными заменами переменных и дифференцируемостью под знаком функциональных интегралов, а также методы теории самосопряженных операторов. Кроме того, используется формула Ито, методы бесконечномерного анализа и ряд специальных конструкций, относящихся к действительному, функциональному и комплексному анализу.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в бесконечномерном анализе, в частности, в стохастическом анализе, при изучении открытых квантовых систем, а также в квантовой информатике и квантовом управлении.

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах, конференциях и заседаниях:

- Научный семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» на механико-математическом факультете МГУ, руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе (многократно, 2011 – 2020 г.г.)
- Научный семинар кафедры высшей математики МФТИ (04. 12. 2020)
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ (14. 11. 2020)
- Международная молодежная научная конференция "ЛОМОНОСОВ" (2016, 2017, 2018, 2019, 2020 гг., МГУ, Москва)

- Международная конференция "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ"(г. Долгопрудный, Моск. обл., Россия, 17 – 21 июня 2019)
- Международная научная конференция "Современные проблемы математики и механики посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко (МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 13 – 15 мая 2019)
- International scientific conference "Infinite-dimensional analysis and mathematical physics". Dedicated to the memory of Sergei Vasilyevich Fomin (Moscow, 28 January – 1 February 2019, Москва, Россия, 28 января – 1 февраля 2019)
- Международная конференция «Современная математическая физика. Владимиров-95» (Москва, Россия, 12-16 ноября 2018)
- Международная научная конференция "Бесконечномерный анализ и теория управления"(МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, 29 января – 1 февраля 2018)
- Межрегиональная научная конференция "Квантовая динамика и функциональные интегралы"(Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия, 26 апреля 2017)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 3 статьи [1-3] в рецензируемых научных журналах RSCI, Web of Science, SCOPUS, 1 статья в сборнике РИНЦ [4] и 6 тезисов докладов на научных конференциях [5-10]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разбитых на параграфы глав, заключения и списка литературы из 78 наименований. Объем текста диссертации составляет 94 страницы. Чертежей, таблиц и рисунков нет.

Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертации рассматривается задача Коши для стохастического уравнения теплопроводности, являющегося евклидовым аналогом стохастического уравнения типа Шредингера:

$$d\Psi_{\omega}(t)(q) = \alpha(\Psi_{\omega}(t))''(q)dt + (\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_{\omega}(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_{\omega}(t)(q)dw(t), \Psi_{\omega}(0, q) = \varphi_0(q). \quad (1)$$

где Ψ_ω – это случайная функция. Ниже приводятся соответствующие определения.

Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, \nu)$ – вероятностное пространство (Ω – множество; $\mathbb{A}$ – σ –алгебра его подмножеств; ν – неотрицательная счетно-аддитивная нормированная мера на $\mathbb{A}$).

Определение. Случайной величиной со значениями в измеримом пространстве $(T, \mathcal{B}_T)$ называется измеримое отображение $F : \Omega \rightarrow T$; измеримость означает, что если $B \in \mathcal{B}_T$, то $F^{-1}(B) \in \mathbb{A}$.

При этом вероятностная мера на $\mathcal{B}_T$, являющаяся образом меры ν при отображении F , называется распределением случайной величины F .

Если E – топологическое пространство, то случайной величиной со значениями в E называется случайная величина в $(E, \mathcal{B}_E)$, где $\mathcal{B}_E$ – это σ –алгебра борелевских подмножеств пространства E .

Пусть $(\mathcal{Q}, \mathcal{B}_{\mathcal{Q}})$ и $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$ – два измеримых пространства, а $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ – множество (некоторых) измеримых отображений из $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{P}$. Подмножество $\mathcal{A}_I$ множества $I(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ называется цилиндрическим, если существуют конечный набор элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$ и набор множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, такие, что $\mathcal{A}_I = \{g \in I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) : g(a_j) \in B_j, j = 1, \dots, n\}$. Множество всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств $\mathcal{C}$; порожденную ею σ –алгебру будем обозначать символом $\mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$.

Определение. Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется случайная величина, принимающая значения в измеримом пространстве $(I(\mathcal{Q}, \mathcal{P}), \mathfrak{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}))$.

Более традиционным является следующее определение (см. с. 214 книги³² и книгу³³ (с. 520)).

Определение. Случайной функцией на множестве $\mathcal{Q}$, принимающей значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$, называется функция на $\mathcal{Q}$, значениями которой являются случайные величины, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}})$.

Далее обычно случайные функции принимают вещественные значения и определены на множестве $[0, +\infty) \times \mathcal{Q}$ (здесь $\mathcal{Q}$ – конфигурационное пространство, которое в этой главе равно $\mathbb{R}$). Для обозначения случайных функций в основном будет использоваться знакосочетание $\Psi_\omega(t)(q)$.

³²Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука. – 1977. – 573 с.

³³Лозэ М. Теория вероятностей (перевод с английского Б. А. Севастьянова). М.: Иностран. Лит. – 1962. – 720 с.

В первой главе для задачи Коши (1) получено представление решения с помощью интеграла по мере Винера (формула Фейнмана – Каца). При этом с помощью теоремы Ферника³⁴ обосновывается сходимость математического ожидания от экспоненты, зависящей от стохастического интеграла. Этот результат сформулирован в виде следующей теоремы (предполагается, что функция R непрерывна и стохастический интеграл от нее существует).

Теорема. Пусть для $t \in [0, +\infty)$, $q \in Q$ функция $\Phi_{t,q}$ на вероятностном пространстве $(C_0[0, t], \mathfrak{B}, w_{0,t})$ определяется равенством

$$\Phi_{t,q}(\xi) = e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)},$$

где символ $\int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)$ обозначает стохастический интеграл Ито. Тогда $\Phi_{t,q}$ интегрируема по мере $w_{0,t}$, то есть интеграл

$$\int_{C_0(0,t)} e^{c \int_0^t R(q+\xi(\tau))dB_\omega(\tau)} w_{0,t}(d\xi)$$

существует.

Эта теорема используется как при получении формулы Фейнмана – Каца для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера, так и во второй главе, где получены представления решения стохастического уравнения типа Шредингера и уравнения Белавкина.

Формула Фейнмана – Каца для решения задачи Коши (1) содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция V непрерывна и ограничена, а функция φ_0 ограничена, дважды дифференцируема и ее первая и вторая производные также ограничены. Тогда при $\alpha = 1$ решение задачи Коши (1) существует и может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \omega)(q) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (q + \xi(\tau))dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t))w_{0,t}(d\xi). \quad (2) \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы основано на применении формулы Ито, однако из-за наличия экспоненты, зависящей от стохастического интеграла, оно требует дополнительных (по сравнению с нестохастическим случаем) рассуждений. Кроме того, как было сказано выше, в доказательстве используется

³⁴Fernique X. Integrabilite des vecteurs gaussiens//Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences, Serie A-B.–1970.– Vol. 270. – P. 1698–1699.

теорема о сходимости функционального интеграла от экспоненты, зависящей от стохастического интеграла. Более общие уравнения теплопроводности были рассмотрены в работе [3] автора диссертации.

В последнем разделе первой главы обсуждается еще один способ получения формулы Фейнмана – Каца.

Рассматривается следующее стохастическое уравнение:

$$d\varphi(t) = (\varphi(t))'' dt + V(q)\varphi(t)dt - \frac{\lambda}{4}q^2\varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)dw(t), \quad (3)$$

где $\lambda > 0$, а w – мера Винера на множестве непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ и исчезающих в нуле.

Случайный оператор в правой части уравнения, применяемый к функции $\varphi(t)$, будет обозначаться символом $A(t)$. Этот оператор представляет собой сумму лапласиана и операторов умножения на функции, каждый из которых является самосопряженным.

Стохастическое уравнение (3) записывается в виде

$$d\varphi(t) = A(t)\varphi(t).$$

Решение задачи Коши для этого уравнения дается следующим разрешающим двухпараметрическим семейством случайных операторов $F(t_1, t_2)$, а $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$, $t_1 \leq t_2$, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и определяемых так (ниже h – это элемент пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$):

$$\begin{aligned} (F(t_1, t_2)h)(q) = \\ = \int_{C_0([t_1, t_2])} (h(q + \xi(t_2))) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} V(q + \xi(\tau))d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2}(q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q + \xi(\tau))dB(\tau) \right\} w_{t_1, t_2}(d\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

В том случае, когда эти операторы самосопряженные, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Каковы бы ни были $t_1 \in [0, +\infty)$ и дважды дифференцируемая функция h с ограниченными производными, функция ψ , определяемая равенством $\psi(t_2) = F(t_1, t_2)h$ ($t_2 > t_1$), является решением задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения (3) при начальных данных (t_1, h) .*

Во второй главе диссертации получены формулы Фейнмана – Каца для одномерного стохастического уравнения типа Шредингера и для уравнения

Белавкина. Функциональные интегралы, являющиеся представлениями решений этих уравнений, – это аналитические продолжения представления решения (2) для евклидова аналога (стохастического уравнения теплопроводности) (1).

Аналитическое продолжение понимается в смысле следующего определения.

Определение. Будем говорить, что функция v , определенная на множестве $R = [0, +\infty)$, допускает аналитическое продолжение на множество $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, если существует функция $s : S \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами: сужение функции s на R совпадает с исходной функцией v ; функция s непрерывна на S ; сужение s на открытый сектор $S_0 = \{z : z = re^{i\gamma}, r > 0, 0 < \gamma < \frac{\pi}{4}\}$ (S_0 является внутренностью множества S) аналитично. При этом сама функция s называется аналитическим продолжением функции v . Если аналитическое продолжение функции v на S существует, то сужение функции s на любую часть множества S также называется аналитическим продолжением функции v на эту часть.

Если функция ψ является решением уравнения теплопроводности, то функция η , определяемая равенством $\eta(t, q) = \psi(t, \sqrt{i}q)$, $(t, q) \in [0, +\infty) \times Q$ (здесь и далее $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$), является решением уравнения типа Шредингера, евклидовым аналогом которого является то уравнение теплопроводности, решением которого является функция ψ . Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть f – решение задачи Коши для уравнения (теплопроводности)

$$df_\omega(t)(q) = (f_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right) f_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q f_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$$

с начальным условием $f_\omega(0)(q) = h_\omega(q)$.

Пусть, кроме того, для каждого ω функция f_ω обладает аналитическим продолжением на множество S . Тогда функция g_ω , определяемая равенством $g_\omega(t)(q) = f_\omega(t)(\sqrt{i}q)$, является решением задачи Коши для следующего уравнения типа Шредингера

$$idg_\omega(t)(q) = -(g_\omega(t))''(q)dt + i\left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right) g_\omega(t)(q)dt + i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q g_\omega(t)(q)dB_\omega(t)$$

с начальным условием $g_\omega(0)(q) = h_\omega(q)$.

С помощью серии лемм мы доказываем, что функциональный интеграл (2) допускает необходимое аналитическое продолжение. Сформулируем наиболее важные из этих лемм.

Лемма. Пусть функция V дифференцируема на S , причем ее производная ограничена. Тогда функция p , определяемая равенством

$$p(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} w_{0,t}(d\xi),$$

дифференцируема по q на S при каждом ξ .

Лемма. Функция u , определяемая равенством

$$u(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi),$$

дифференцируема, причем

$$u'(q) = \int_{C_0[0,t]} \omega(t) \exp \left\{ \int_0^t (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} w_{0,t}(d\xi).$$

В следующей лемме предполагается, что функция φ_0 , определенная на S , ограничена и непрерывна на S , аналитична внутри S и обладает на S ограниченными производными первых двух порядков.

Лемма. Пусть функция r_ω , определенная на S , задается равенством

$$r_\omega(q) = \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi).$$

Тогда эта функция дифференцируема на S (и, следовательно, аналитична на S_0 и непрерывна на S).

Далее, пользуясь сформулированными результатами, мы доказываем, что аналитическое продолжение функционального интеграла (2) на множество $S_1 = \{z : z = re^{i\frac{\pi}{4}}, r \geq 0\}$ ($S_1 \subset S$) является представлением решения стохастического уравнения типа Шредингера. В следующей теореме предполагается, что выполнены все условия лемм, сформулированных выше.

Теорема. Пусть функция V является непрерывной в области $S = \{z : z = re^{i\gamma}, r \geq 0, 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}\}$, сужение V на S_0 аналитично и ее производная в области S непрерывна и ограничена.

Тогда функция Ψ , определяемая равенством

$$\begin{aligned} \Psi(\omega, t, q) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(\sqrt{i}q + \xi(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2} (\sqrt{i}q + \xi(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\sqrt{i}q + \xi(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(\sqrt{i}q + \xi(t)) w_{0,t}(d\xi), \end{aligned} \quad (5)$$

$q \in Q, t \in [0, +\infty)$, является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \end{aligned} \quad (6)$$

В следующей теореме получено представление решения стохастического уравнения типа Шредингера с помощью интеграла по мере, являющейся образом меры Винера при отображении, представляющем собой замену пространственной переменной (этот результат был анонсирован в работе [2] автора диссертации).

Теорема. Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы и пусть ζ — это отображение луча Q в луч

$$Q_1 = \{q = \alpha e^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq \alpha < \infty\},$$

определяемое так: $\zeta(q) = \sqrt{i}q$. Тогда функция $\mathfrak{W}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(t, q_1) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t V(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2 d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau)) dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t)) w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1), \end{aligned}$$

где $\sqrt{i}q = q_1$, является решением следующей задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера:

$$\begin{aligned} d\Psi_\omega(t)(q) = & i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + \left(V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2 \right) \Psi_\omega(t)(q)dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q). \end{aligned}$$

Все приведенные результаты используются для получения представления решения задачи Коши для уравнения Белавкина.

Мы рассматриваем уравнение теплопроводности:

$$d\Psi_\omega(t)(q) = (\Psi_\omega(t))''(q)dt + (\tilde{V}(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \quad (7)$$

где $\tilde{V}(q) = iV(q)$. После замены переменной q на $\sqrt{i}q$ получается уравнение Белавкина

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t). \quad (8)$$

Используя единственность аналитического продолжения и приведенные выше результаты, мы получаем теорему о представлении решения задачи Коши для уравнения Белавкина.

Теорема. Пусть выполнены предположения теорем, сформулированных выше. Тогда функция $\mathcal{G}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, q_1) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left\{ \int_0^t iV(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{4}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))^2d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(\tau))dB_\omega(\tau) \right\} \varphi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t))w_{0,t}\zeta^{-1}(d\xi_1), \end{aligned} \quad (9)$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина

$$d\Psi_\omega(t)(q) = i(\Psi_\omega(t))''(q)dt + (iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2)\Psi_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0, q) = \varphi_0(q).$$

Полученное в последней теореме представление решения содержит интеграл по счетно-аддитивной мере; в этом состоит преимущество аналитического продолжения по аргументу по сравнению с аналитическим продолжением по параметру, в результате которого получается мера Фейнмана, являющаяся обобщенной мерой (к ней понятие счетной аддитивности неприменимо).

В третьей главе диссертации рассмотрена связь между гамильтоновой мерой Фейнмана (гамильтоновой мерой Фейнмана на пространстве $Q \times P$

(Q и P - две копии сепарабельного комплексного гильбертова пространства) называется обобщенная мера на этом пространстве, преобразование Фурье которой имеет вид $e^{(ip,q)}$ и бесконечномерным уравнением Шредингера

$$if'(t) = \Delta_B f(t). \quad (10)$$

Оператор B определяется равенством $B(x_1 + x_2) = B_1(x_1) - B_2(x_2)$, где B_j является копией неотрицательно определенного оператора, действующая в гильбертовом пространстве H_j ($j = 1, 2$), а Δ_B – оператор Лапласа, действующий в пространстве функций на гильбертовом пространстве H и задаваемый оператором B . Он определяется равенством

$$\Delta_B \psi = \text{tr} B_1 \psi''_{H_1} - \text{tr} B_2 \psi''_{H_2}.$$

Связь между гамильтоновой мерой Фейнмана и бесконечномерным уравнением Шредингера является одной из мотивировок для изучения уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом (см. работу [3] автора диссертации).

Для получения представления решения задачи Коши для двумерного уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом

$$i\psi'(t) = H_1(\psi(t)) + V(q_1, q_2)\psi(t). \quad (11)$$

(при этом здесь $Q = \mathbb{R}^2$, H_1 – оператор в $L_2(Q)$, определяемый равенством $(H_1\varphi)(q_1, q_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2}(q_1, q_2)$) мы сначала получаем формулу Фейнмана – Каца для уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q_2^2} + V(q_1, q_2)g(t, q_1, q_2). \quad (12)$$

Для этого с помощью формулы Ито доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $C_0[0, t]$ - множество непрерывных на $[0, t]$ функций, исчезающих в нуле и принимающих значения в $Q(= \mathbb{R}^2)$, с (борелевской) мерой Винера $w_{0,t}$. Тогда решение задачи Коши g для уравнения (12) с начальным условием $g_0 \in L^2$, представляется следующей формулой Фейнмана-Каца

$$g(t, q_1, q_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(q_1+\xi_1(\tau), q_2+\xi_2(\tau)) d\tau} g_0(q_1 + \xi_1(t), q_2 + \xi_2(t)) w_{0,t}(d\xi_1 d\xi_2). \quad (13)$$

При этом мы предполагаем, что функция V такова, что решение задачи Коши для уравнения (12) существует и единственно, а интеграл в формуле Фейнмана – Каца сходится (например, это будет так, если потребовать, чтобы функция V была непрерывна и ограничена по совокупности аргументов, а функция g_0 – ограничена, дважды дифференцируема по каждому аргументу, с ограниченными первой и второй производными).

Далее мы используем метод замены переменных и аналитическое продолжение, чтобы получить представление решения задачи Коши для уравнения (11).

Мы предполагаем, что потенциал V и начальное условие g_0 допускают аналитическое продолжение во внутренность области

$$\widehat{S} = \{(q_1, q_2) : q_1 = \alpha_1 e^{i\gamma_1}, q_2 = \alpha_2 e^{i\gamma_2}, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq \gamma_2 \leq 0\},$$

непрерывное вплоть до границы этой области.

Тогда, производя замену переменных $\widehat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и применяя подход, развитый в главе 2, мы получаем следующую теорему.

Теорема. Пусть функции V и ψ_0 обладают аналитическими продолжениями в область $\widehat{S}$, представляющими собой функции, ограниченные в этой области вместе с производными по каждому из аргументов. Тогда функция $\widehat{\psi}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(t, \widehat{q}_1, \widehat{q}_2) &= \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t V(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(\tau)}{\sqrt{i}}) d\tau} \times \\ &\times \psi_0(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(t), \widehat{q}_2 + \frac{\widehat{\xi}_2(t)}{\sqrt{i}}) w_{0,t} \widehat{\zeta}^{-1}(d\widehat{\xi}_1 d\widehat{\xi}_2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и $\widehat{\xi}_1 = \sqrt{-i}\xi_1$, $\widehat{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_2$, является решением задачи Коши для уравнения (11) с начальным условием ψ_0 .

В пятом разделе третьей главы рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с двумерным белым шумом, которое мы также называем уравнением Белавкина:

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) &= \left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ &+ \left(iV(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – неотрицательные числовые параметры, имеющие тот же смысл, что и параметр λ в главе 1, а B_1 и B_2 – независимые броуновские движения. Определение функции ψ аналогично определению функции Ψ_ω из главы 1, только конфигурационное пространство теперь – двумерная вещественная плоскость.

Сначала мы решаем уравнение теплопроводности, затем, с помощью замены переменных $\widehat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и аналитического продолжения мы получаем формулу Фейнмана-Каца для стохастического уравнения типа Шредингера, после чего, используя метод раздела 3 второй главы, приходим к теореме, в которой получено представление решения задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом.

Теорема. Пусть функция V непрерывна в области $\widehat{S}$, сужение функции V на внутреннюю часть $\widehat{S}$ аналитично и ее производные в области $\widehat{S}$ по обоим аргументам непрерывны и ограничены. Пусть еще функция η , определенная на $\widehat{S}$, ограничена и непрерывна на $\widehat{S}$, аналитична внутри $\widehat{S}$ и обладает на $\widehat{S}$ ограниченными производными первых двух порядков по каждому аргументу. Тогда функция $\mathcal{F}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t)(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau))dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t (\widehat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi}_2(\tau))dB_2(\tau) \right] \times \\ & \times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\widehat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi}_2(\tau))^2 \right] d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\int_0^t iV(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(\tau), \widehat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi}_2(\tau)) d\tau \right] \times \\ & \times \eta(\widehat{q}_1 + \sqrt{i}\widehat{\xi}_1(t), \widehat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi}_2(t)) w_{0,t} \widehat{\zeta}^{-1}(d\widehat{\xi}_1 d\widehat{\xi}_2), \quad (16) \end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина (15).

Результаты этого раздела могут быть обобщены на случай любого конечномерного конфигурационного пространства.

Заключение

В диссертации с помощью формулы Ито и теоремы Ферника получены представления решений стохастических уравнений типа теплопроводности функциональными интегралами. Этот результат и комбинации различных вариантов аналитического продолжения позволяют получить формулы Фейнмана – Каца для стохастических уравнений типа Шредингера и уравнения Белавкина. Рассмотрены уравнения со знакопеременным гамильтонианом и найдена замена пространственных переменных, при которой такие уравнения получаются из уравнений со знакопостоянным гамильтонианом. С помощью

этой замены переменных и аналогичных упомянутым выше вариантов аналитического продолжения получены интегралы по пространствам функций, представляющие решения уравнений Шредингера и Белавкина со знакопеременным гамильтонианом. Все перечисленные представления решений являются интегралами по счетно-аддитивным мерам.

В третьей главе рассмотрена связь результатов диссертации с бесконечномерными уравнениями. Отметим, однако, что метод замены переменной и аналитического продолжения в случае бесконечномерных стохастических уравнений изучен еще недостаточно, так что это одно из актуальных направлений дальнейших исследований (см. статью³⁵). Еще одно важное направление исследований – получение формул Фейнмана – Каца для уравнений на многообразиях (см. статьи^{36,37}). При исследовании таких уравнений применимы методы, развитые в диссертации. Кроме того, общая теория случайных операторов – это мало изученная и очень интересная область. В частности, эта теория может быть использована для получения представлений решений стохастических эволюционных уравнений.

Благодарность. Автор выражает глубочайшую благодарность своему научному руководителю профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постоянное внимание к работе, стимулирующие беседы о науке и всестороннюю поддержку. Автор благодарен за важные и полезные обсуждения и советы Е.Т.Шавгулидзе, Н.Н.Шамарову и всем участникам научного семинара «Бесконечномерный анализ и математическая физика» (руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе). Много полезных замечаний было сделано сотрудниками лаборатории «Бесконечномерного анализа и математической физики» механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, за что автор выражает свою признательность. Наконец, огромное спасибо моей семье за то, что были рядом и всегда и во всем поддерживали меня.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Loboda A. A. Schrödinger Equation with Signed Hamiltonian// Russ. Journ. Math. Phys. – 2020. – Vol.27. – №1. – P. 99–103. (импакт-фактор WoS 1.292).

³⁵Альбеверио С. А., Смолянов О. Г. Бесконечномерные стохастические уравнения Шредингера – Белавкина// Усп. Мат. Наук – 1997. – Vol. 52. – №4(316). – P. 197–198; Russ. Math. Surv. – 1997. – Vol. 52. – №4. – P. 822–823.

³⁶Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях// Докл. Акад. Наук– 2003. – Т. 392. – №2. – С. 174–179.

³⁷Dubravina V. A. Representation of solutions of evolution equations on a ramified surface by Feynman formulae// Izv. Math. – 2018. – Vol. 82. – №3. – P. 494–511.

[2] Loboda A. A. The Doss Method for the Stochastic Schrödinger – Belavkin Equation// Math. Not. – 2019. – Vol. 106. – №2. – P. 311–315. (импакт-фактор WoS 0.626).

[3] Loboda A. A. Ito Method for Proving the Feynman – Kac Formula for the Euclidean Analog of the Stochastic Schrödinger Equation// Differential Equat. – 2018. – Vol. 54. – №4. – P. 557–561. (импакт-фактор WoS 0.659).

Статьи в сборниках, входящих в РИНЦ

[4] Лобода А. А. Методы получения представлений решений стохастических уравнений Шредингера// М.: МАКС Пресс. – 2019. – Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко. Т. 1. – С. 91-94.

Тезисы докладов на научных конференциях

[5] Лобода А. А. Представления решений эволюционных дифференциальных уравнений с коэффициентами типа белого шума// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2017". М.: МГУ, 2017. 2 с.

[6] Лобода А. А. Представление решения стохастического уравнения Шредингера функциональным интегралом// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2018". М.: МГУ, 2018. 2 с.

[7] Лобода А. А. Методы аналитического продолжения для решения эволюционных дифференциальных уравнений// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2019". М.: МГУ, 2019. 2 с.

[8] Лобода А. А. Метод замены переменной для стохастических уравнений типа Шредингера// Сборник тезисов докладов международной конференции International scientific conference «Infinite-dimensional analysis and mathematical physics». М.: МГУ, 2019. С. 25-27.

[9] Лобода А. А. Представления решений эволюционных уравнений со знакопеременным гамильтонианом//Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2020". М.: МГУ. 2020. 2 с.

[10] Лобода А. А. Функциональные интегралы по счетно-аддитивным и несчетно-аддитивным мерам// Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 23-29 ноября 2020 года. Прикладные математика и информатика. М.: МФТИ, 2020. С. 28–29.