

## **ОТЗЫВ**

**официального оппонента о диссертации  
на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук**

**Лободы Артёма Александровича на тему:**

**«Функциональные интегралы, порождаемые стохастическими  
уравнениями Шрёдингера» по специальности 01.01.01 –  
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»**

В настоящей диссертационной работе исследуются стохастические дифференциальные уравнения Шрёдингера - Белавкина при помощи функциональных интегралов. Такие уравнения применяются для описания динамики открытых квантовых систем, в том числе в задачах квантового управления. Таким образом, эта тематика очень важна для разнообразных приложений и именно поэтому она активно развивается в настоящее время. Всё сказанное означает, что тема диссертации вполне актуальна.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 78 наименований. Объём диссертации составляет 94 страницы. Во введение приведён подробный обзор работ, посвященных тематике диссертации; этот обзор представляет и самостоятельный интерес. Отметим также, что результаты диссертации докладывались на нескольких международных конференциях высокого уровня.

Перейдём теперь к подробному обсуждению содержания диссертации и её результатов.

В первой главе диссертации доказывается существование решения стохастического уравнения теплопроводности и его представления с помощью формулы Фейнмана – Каца. При этом используются формулы Ито и известная теорема Ферника об интегрируемости экспоненты от квадрата нормы по гауссовской мере. Сложность по сравнению со случаем, когда

рассматривается нестохастическое уравнение, состоит в том, что решение зависит от экспоненты, содержащей стохастический интеграл. При этом то, что решение стохастического уравнения теплопроводности представляется в виде функционального интеграла, проверяется прямым дифференцированием с помощью формулы Ито. Кроме того, в последнем параграфе первой главы изучается вопрос об операторном подходе к решению стохастического уравнения теплопроводности. При этом преодолевается трудность, связанная с отсутствием полугруппового свойства решения.

Во второй главе исследуется аналитическое продолжение в комплексную область по пространственной координате для решений уравнения из первой главы, после чего такое аналитическое продолжение применяется для построения решений уравнений Шрёдингера - Белавкина. Показывается, что описанное аналитическое продолжение корректно. Доказательство корректности состоит из нескольких лемм, в которых, в частности, обосновывается возможность дифференцирования под знаком интеграла по пространству функций с мерой Винера. При этом существенно используется теорема 1 из первой главы. Сначала выводится формула Фейнмана – Каца для стохастического уравнения, в котором мнимая единица стоит только перед второй производной, а затем уже рассматривается уравнение Шрёдингера – Белавкина, в котором на мнимые единицы умножаются и вторая производная, и потенциал. Для решения этого уравнения, помимо аналитического продолжения по пространственной переменной, используется ещё аналитическое продолжение по параметру, который стоит перед потенциалом в стохастическом уравнении теплопроводности. На пространстве аналитически продолженных функций определяется счётно-аддитивная мера, которая является образом меры Винера на исходном пространстве функций, так что представление решения уравнения Шрёдингера – Белавкина оказывается функциональным интегралом по счётно-аддитивной мере.

В третьей главе диссертации исследуется уравнение Шрёдингера с бесконечным числом степеней свободы. При этом используются гамильтоновы меры Фейнмана, рассматриваются знакопеременные уравнения Шрёдингера при помощи техники аналитического продолжения, а также стохастическое уравнение Белавкина. Связь гамильтоновых мер Фейнмана и бесконечномерных уравнений Шрёдингера изучается в первых двух параграфах третьей главы. После этого с помощью формулы Ито выводится формула Фейнмана – Каца для двумерного стохастического уравнения теплопроводности со знакопостоянным гамильтонианом. С помощью замены переменной, при которой первая координата умножается на корень из мнимой единицы, а вторая – делится на этот корень, получается двумерное уравнение Шрёдингера со знакопеременным гамильтонианом, для которого с использованием аналитического продолжения по координатам выводится представление решения с помощью функционального интеграла по счётно-аддитивной мере. В последнем параграфе получено представление решения стохастического уравнения Шрёдингера – Белавкина с двумерным белым шумом. При этом развиваются методы, использовавшиеся в первых двух главах.

В заключении рассматриваются направления дальнейших исследований. В частности, предлагается получить представления функциональными интегралами решений уравнений на многообразиях, а также бесконечномерных уравнений. При этом окажется полезным исследовать преобразования функциональных интегралов, порождаемые нелинейными преобразованиями конфигурационного и фазового пространства; такое исследование представляет и самостоятельный интерес.

В качестве замечания (в качестве возможного направления будущей работы) можно предложить диссертанту рассмотреть вопрос о применимости его результатов к вопросам квантового управления (для которых уравнение Белавкина и было предложено), в частности, к квантовому управлению с обратной связью (когда возникают нелинейные уравнения).

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Лобода Артём Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,  
Ведущий научный сотрудник отдела математической физики  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
«Математический институт имени В. А. Стеклова Российской  
академии наук»

Козырев Сергей Владимирович

Контактные данные:

тел.: +7(495) 984 81 41, e-mail: kozyrev@mi-ras.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:

01.01.03 – «математическая физика»

Адрес места работы:

119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8,  
Математический институт имени В. А. Стеклова  
Российской академии наук,  
Отдел математической физики  
Тел.: +7(495) 984 81 41; e-mail: kozyrev@mi-ras.ru

Подпись сотрудника отдела математической физики  
МИАН им. В. А. Стеклова  
С. В. Козырева удостоверяю: