ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Лободы Артема Александровича на тему:
«Функциональные интегралы, порождаемые стохастическими уравнениями Шредингера» по специальности 01.01.01 —
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

В диссертации изучаются представления решений задачи Коши для стохастических уравнений типа Шредингера и уравнений Белавкина в виде функциональных интегралов. Такие уравнения были предложены для описания процесса квантового непрерывного измерения. Соответствующая теория (с учетом нестохастического случая) имеет уже более чем полувековую историю. Ей посвящены работы значительного числа отечественных и зарубежных математиков. Уравнения подобного рода используются при описании марковских аппроксимаций динамики открытых квантовых систем, они полезны при изучении различных моделей в квантовой механике и статистической механике. Теория же открытых квантовых систем (а, по сути, все квантовые системы являются открытыми) применяется в квантовой теории измерений, в квантовой оптике, квантовой термодинамике. Она естественно связана с квантовой теорией информации. Значительная часть исследований, отраженных в диссертации, относится к бесконечномерному анализу. Он интенсивно развивается, имеет многочисленные приложения при изучении различных бесконечномерных математических структур, в квантовой теории, в математической физике. Без сомнения, тематика настоящего исследования актуальна.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Перейду к краткому изложению результатов, приведенных в ней, и к их оценке. Введение, помимо обзора полученных результатов, содержит довольно подробный исторический обзор данного направления, мотивационные комментарии. Здесь описываются используемые в работе методы. Основной из них — метод аналитического продолжения и замены пространственных переменных, существенно развитый автором в стохастическом случае. Первая глава посвящена, главным образом, исследованию следующей задачи Коши для стохастического уравнения теплопроводности, в которой Ψ_ω — неизвестная случайная функция:

$$d\Psi_\omega(t)(q)=\alpha(\Psi_\omega(t))''(q)dt+\left(\alpha V(q)-\frac{\lambda}{4}q^2\right)\Psi_\omega(t)(q)dt$$

$$+\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dw(t),\ \ \Psi_\omega(o,q)=\varphi_0(q). \tag{1}$$

Основным результатом этой главы является теорема 2, в которой содержится представление решения задачи Коши (1) посредством интеграла по мере Винера (формула Фейнмана-Каца) для евклидова аналога стохастического уравнения типа Шредингера, т. е. при $\alpha=1$. При этом предполагается, что потенциал V ограничен и непрерывен на $\mathbb{R}$, а функция φ_0 ограничена на $\mathbb{R}$ вместе со своими первой и второй производными. Важную роль в доказательстве теоремы 2 играет теорема 1. В ней с помощью теоремы Ферника доказано существование математического ожидания от экспоненты, зависящей от некоторого стохастического интеграла Ито. Отметим также, что в стохастическом случае, рассмотренном в теореме 2, вследствие зависимости правой части соответствующего стохастического уравнения Шредингера от времени, разрешающей полугруппы операторов не существует. Это существенно усложнило ее доказательство, поскольку потребовалось вычислять непосредственно производную интеграла в представлении решения в каждой точке $t\in[0,+\infty)$. При этом используется формула Ито. При ее применении также возникли трудности по сравнению с нестохастическим случаем, связанные с наличием экспоненты, в показателе которой присутствует стохастический интеграл. В заключительной части первой главы доказана возможность применения операторного подхода к решению задачи Коши для стохастического уравнения типа теплопроводности. Ее решение здесь задается некоторым двухпараметрическим семейством случайных интегральных операторов, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Во второй главе диссертации исследуются представления в виде интегралов Фейнмана-Каца решений задачи Коши для стохастического уравнения типа Шредингера и для уравнения Белавкина. В первой части главы изучен случай уравнения типа Шредингера. Основные результаты этого раздела — теоремы 5 и 6. В теореме 5 с помощью метода аналитического продолжения по переменной показано, что при естественных условиях аналитическое продолжение функционального интеграла, представляющего решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, является представлением уже решения задачи Коши для стохастического уравнения Шредингера. Теорема 6 показывает, что решение указанной задачи представляется в виде интеграла по счетно-аддитивной мере, в которую переходит мера Винера посредством замены переменной (поворота). Доказательства теорем 5 и 6 представляют собой серию вспомогательных лемм, проясняющих логику доказательств. Теорема 6 показывает преимущество метода аналитического продолжения по переменной перед методом аналитического продолжения по параметру, приводящему к не являющейся счетно-аддитивной мере Фейнмана. В последней части второй главы исследуется стохастическое уравнение Белавкина. Оно получено здесь с помощью замены переменной в специальном уравнении теплопроводности. Используя аналитическое продолжение по переменной и замену переменной, автор доказывает теорему 7 о представлении решения задачи Коши для уравнения Белавкина в виде функционального интеграла.

В третьей главе рассматривается бесконечномерный случай. Вначале автор выясняет связь гамильтоновой меры Фейнмана и бесконечномерным уравнением Шредингера

$$if'(t) = \Delta_B f(t). \tag{2}$$

Здесь Δ_B — оператор Лапласа, действующий в некотором пространстве функций на гильбертовом пространстве H, порождаемый оператором B. Последний задается разностью двух копий неотрицательно определенных операторов. Показано, что гамильтонова мера Фейнмана φ_{tB}, корреляционный оператор которой равен tB, является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения Шредингера (2) (теорема 8). Этот результает мотивирует дальнейшее изучение уравнения Шредингера со знакопеременным гамильтонианом в бесконечномерном случае. При этом автору удалось применить методы, использованные и развитые в предыдущих главах для конечномерного случая. Именно, исследуется нестохастическое уравнение Шредингера

$$i\psi'(t) = H_1(\psi(t)) + V(q_1, q_2)\psi(t). \tag{3}$$

С целью получения формулы Фейнмана-Каца для него рассмотрено соответствующее уравнение теплопроводности (со знакопостоянным гамильтонианом). В теореме 9 при достаточно общих предположениях получено решение задачи Коши для этого уравнения в виде функционального интеграла Фейнмана-Каца. Эти предположения (например, функция V непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$, функция g_0, задающая начальное условие, ограничена, дважды дифференцируема по каждому аргументу и соответствующие первая и вторая производные g_0 тоже ограничены) обеспечивают существование и единственность решения упомянутой задачи Коши.

По аналогии с предпринятым в главе 2, с помощью метода аналитического продолжения в произведение двух плоских углов и замены переменных (покординатного поворота), получены формулы Фейнмана-Каца для решения задачи Коши для уравнения (3) (теорема 10). Отметим, что условиям теорем 9 и 10 (для уравнений теплопроводности и Шредингера соответственно) удовлетворяют потенциалы V, являющиеся преобразованиями Фурье финитных бесконечно диференцируемых функций в $\mathbb{R}^2$.

В последней части третьей главы аналогичный результат (теорема 11) доказан для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом. Теорема 11 доказана при естественных обших предположениях о потенциале V и начальном условии η.

Заключение работы, помимо итоговых формулировок, содержит также обсуждение перспектив дальнейших исследований в данном направлении, которые представляются мне интересными.

Таким образом, диссертация А.А. Лободы содержит новые, строго доказанные результаты, представляющие несомненный научный интерес. Автором развиты методы, позволившие в стохастическом случае решить задачи, поддававшиеся ранее решению только в нестохастической ситуации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах, 3 из них — в журналах, входящих в базу WoS. Диссертация прошла весомую апробацию. Работа написана ясно и четко. Автореферат полно и точно отражает ее содержание.

Приведу несколько замечаний.

1) Желательно было бы до формулировки теоремы 1 или в ней пояснить характер константы c в показателе экспоненты.

2) С. 10, 2 строка сверху: Здесь появляется обозначение w, которое нужно пояснить (оно поясняется при выводе уравнения Белавкина).

3) Желательно было бы в главах 1 и 2 прокомментировать вопрос о единственности решения задачи Коши.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.

Ломоносова, а также оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Лобода Артем Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
Института математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича
Федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет»

Мелихов Сергей Николаевич
14.04.2021

Контактные данные:
Рабочий тел.: +7(863)2975111, e-mail: snmelihov@sfedu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена докторская диссертация:
01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Адрес места работы:
344090, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону,
ул. Мильчакова, д. 8-а,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики
и компьютерных наук

Подпись сотрудника Института математики, механики
и компьютерных наук ЮФУ Мелихова С.Н. удостоверяю:

14.05.2021