ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Лободы Артёма Александровича на тему:

«Функциональные интегралы, порождаемые стохастическими уравнениями Шрёдингера» по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена получению представлений решений стохастических уравнений Шрёдингера – Белавкина и некоторых нестохастических уравнений с помощью интегралов по траекториям. Уравнения Шрёдингера – Белавкина играют важную роль при изучении открытых квантовых систем, а также в квантовом управлении, так что тема диссертации является вполне актуальной.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 78 наименований. Во введении содержится подробный исторический обзор работ по тематике диссертации, а также обосновывается актуальность проведенного в диссертации исследования.

В первой главе диссертации получен функциональный интеграл, являющийся представлением решения стохастического уравнения типа теплопроводности – евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера - Белавкина. Из-за наличия в правой части этого уравнения белого шума доказательство принципиально усложняется по сравнению с нестохастическим случаем. В частности, требуется отдельно доказать существование функционального интеграла от экспоненты, зависящей от стохастического интеграла Ито, что сделано в теореме 1 с помощью теоремы Ферника. Доказательство основной теоремы первой главы – теоремы 2 – опирается на формулу Ито, с помощью которой находится производная функционального интеграла по времени. Эта производная из-за наличия под знаком функционального интеграла экспоненты от стохастического интеграла вычисляется для всех моментов времени, а не только в нуле. Кроме этого, в первой главе рассматривается применение операторного подхода к решению стохастического уравнения теплопроводности. В этой главе также приведён вывод уравнения Шрёдингера – Белавкина.

Во второй главе получен интеграл по траекториям, дающий решение стохастического уравнения Шрёдингера – Белавкина. Для этого функциональный интеграл, полученный в первой главе, аналитически продолжается по пространственной переменной во внутреннюю область угла на комплексной плоскости. В этой главе с помощью серии лемм подробно обосновывается возможность такого аналитического продолжения, а затем полученные результаты используются для исследования интеграла по траекториям, представляющего решение стохастического уравнения типа Шрёдингера. После этого осуществляется ещё одно аналитическое продолжение по параметру, на который умножается потенциал в специально подобранном уравнении теплопроводности. Решение уравнения Шрёдингера – Белавкина получено в результате комбинации двух таких аналитических продолжений .В соответствующем интеграле по траекториям используется интегрирование по счётно-аддитивной мере. В этом состоит преимущество описанного подхода по сравнению с методами получения представлений решений с помощью аналитических продолжений по параметру, входящему в показательгауссовской экспоненты, при которых получаются интегралы по обобщённым мерам.

Основной результат диссертации – это теорема 7 главы II о представлении решения уравнения Белавкина с помощью функционального интеграла.

В третьей главе рассмотрена связь бесконечномерного уравнения Шрёдингера со знакопеременным дифференциальным оператором и меры, преобразованием Фурье которой является экспонента от мнимой единицы, умноженной на квадратичную форму (такая мера называется гамильтоновой мерой Фейнмана). Эта связь является одной из мотивировок изучения уравнений со знакопеременными гамильтонианами. Для двумерных уравнений такого типа получено решение в виде функционального интеграла по счётно-аддитивной мере. Используемые в этой главе методы являются обобщением подхода, применённого в предыдущей главе. В частности, здесь применяются замена пространственных переменных и аналитическое продолжение по этим переменным в область, являющуюся произведением двух углов. Сначала решается уравнение теплопроводности с отрицательно определённым гамильтонианом (при этом используется формула Ито), а затем с помощью замены переменных и аналитического продолжения получено представление решения уравнения Шрёдингера. Далее этот метод применяется для решения двумерного аналога уравнения Шрёдингера – Белавкина с двумя независимыми белыми шумами.

В заключении описаны возможные направления дальнейших исследований, в частности, исследований, связанных с представлениями решений дифференциальных уравнений интегралами по траекториям. Приведённые здесь проблемы представляют значительный интерес.

В качестве замечаний необходимо отметить следующее.

1. Вводная часть диссертации, так называемое «краткое содержание диссертации», содержит избыточное количество формул и утверждений, что приводит в итоге к самоповторению. В частности, в дублировании формулировок лемм во введении совершенно нет необходимости. Было бы лучше, если бы эта часть состояла из основных результатов и указания на то, в каких работах соискателя они были опубликованы.

2. Не очень ясно, зачем соискателю понадобилось в главе I приводить достаточно нестрогие, так сказать, физические представления о процессе квантового измерения. Такие рассуждения относятся главным образом к мотивации выбора темы исследования, а после выбора таковой необходимость в них исчезает. В результате появляется некоторый диссонанс

между разделом 1.1 и последующими разделами первой главы. Например, довольно загадочно выглядит фраза на стр. 26 «так как свертка с дельта-функцией ничего не меняет …». Что тут имеется в виду?

3. В разделах 1.2 и 1.3 автор использует понятие «белый шум» без его конкретной математической формулировки. С одной стороны, это понятие можно считать известным из стандартных университетских курсов. Однако в разделе 1.3 автор использует его в контексте «оператор, порожденный умножением на так называемый белый шум», и этот «так называемый» вызывает недоумение: не использует ли автор какой-то другой «белый шум», не тот, который был в разделе 1.2, где он был связан с обобщенной производной винеровского процесса? Следовало бы написать эту фразу более корректно.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования, поскольку носят, по сути, редакционный характер. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Лобода Артём Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук,
доцент, главный научный сотрудник отдела вычислительной физики и кинетических уравнений

Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»,

Орлов Юрий Николаевич

Контактные данные:
тел.: +7(499)220-72-28, e-mail: yuno@kiam.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.03– «математическая физика»

Адрес места работы:
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4,
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук,
отдел вычислительной физики и кинетических уравнений
Тел.: +7(499) 220-72-28; e-mail: yuno@kiam.ru

Подпись главного научного сотрудника
отдела вычислительной физики и кинетических уравнений
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
Ю.Н. Орлова удостоверяю:

Ученый секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН А.А. Давыдов
25.05.2020