

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/288676400>

The solution of the problem of a plane jet flowing into an infinitely permeable screen

Article · January 1998

CITATION

1

READS

15

2 authors:



[Peter Andronov](#)

Lomonosov Moscow State University

17 PUBLICATIONS 66 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[S. V. Guvernuyuk](#)

Lomonosov Moscow State University

85 PUBLICATIONS 356 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Динамика тел в жидкости [View project](#)

МГУ им. М. В. Ломоносова

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКИ

К юбилею Л. И. Седова

Под редакцией С. С. Григоряна

Издательство Московского университета
1998

УДК 532.516+532.526+533.6.011+536.24

ББК 22.2

П78

Проблемы современной механики / Под ред. члена-корреспондента РАН С. С. Григоряна. – М.: Изд-во Московского ун-та. 1998. – 318 с.

Сборник научных работ по проблемам современной механики посвящен 90-летию юбилею крупнейшего ученого-механика нашего времени Леонида Ивановича Седова. Авторы работ за немногими исключениями – это ученики и научные коллеги Л. И. Седова разных поколений, которым посчастливилось учиться у него искусству научного творчества и долгие годы сотрудничать с мэтром на научном поприще.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук,
профессор *А. Г. Куликовский*,

доктор физ.-мат. наук, профессор *В. Г. Вильке*

ISBN 5-211-04073-2

© Институт механики МГУ, 1998

СОДЕРЖАНИЕ

С. С. Григорян. Патриарху современной механики Л. И. Седову – 90 лет	5
Г. А. Тирский. Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания тел при умеренных и малых числах Рейнольдса	9
В. А. Садовничий, Ю. М. Окунев. Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения	28
С. С. Григорян, И. А. Соколова, А. А. Шахназаров, В. В. Смирнов. Биомеханические аспекты действия снижающих гидродинамическое сопротивление полимеров.	47
А. В. Колесниченко. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред	52
В. М. Максимов, Н. М. Дмитриев. Методы теории нелинейных тензорных функций в моделях двухфазной фильтрации в анизотропных средах	76
В. И. Сахаров, О. Н. Суслов, Е. И. Фатеева. Модель частичного химического равновесия в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел	84
В. В. Лохин. Ковариантная форма целого рационального базиса полиномиальных инвариантов симметричного тензора второго ранга	91
А. А. Бармин, В. В. Марков, О. Э. Мельник, А. Б. Прищепенко. Разреженный двухфазный след за вентилируемой каверной	100
Г. Ю. Степанов. Построение безотрывно обтекаемых тел в комплексе с двигателем	109
А. Н. Голубятников. Аномальные магнитокапиллярные свойства магнитных жидкостей	118
А. Б. Ватажин, О. В. Гуськов, В. И. Копченков. О некоторых особенностях торможения гиперзвукового потока газа в каналах магнитным полем	126
С. С. Григорян, Я. В. Бабкин. Об автомодельных решениях уравнений мелководных течений в крупных акваториях	137
С. Я. Герцеништейн. О сценариях перехода к турбулентности	145
Т. А. Журавская, В. А. Левин. Формирование взрывной волны в результате распада области низкого давления	155
В. А. Налетова. Влияние электрического поля на эффективные упругие свойства электрострикционных материалов	162
Н. А. Остапенко. Теория тонких тел вращения минимального сопротивления,двигающихся в плотных средах при смешанном законе трения на поверхности контакта	168
П. Р. Андронов, С. В. Гувернюк. Решение задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран	179
С. А. Логвенков, А. А. Штейн. Математическое моделирование роста костного регенерата при дистракции	186
В. П. Карликов, Г. И. Шоломович. О развитых кавитационных течениях, создаваемых с помощью встречных струй	194

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ СТРУЕ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРОНИЦАЕМЫЙ ЭКРАН

П. Р. Андронов, С. В. Гувернюк

Рассматривается боковое растекание и протекание струи идеальной несжимаемой жидкости при взаимодействии с проницаемой поверхностью.

1. Изучение обтекания проницаемых поверхностей представляет большой теоретический и практический интерес [1], однако математическое исследование возникающих задач сопряжено со значительными трудностями. В выполненных под руководством Л. И. Седова работах [2, 3] и др. развит метод малого параметра, позволяющий находить потенциальные течения жидкости около слабопроницаемых границ. В частности, в работе [3] было показано, что при струйном обтекании пластинки по схеме Кирхгофа увеличение ее проницаемости может приводить к некоторому увеличению сопротивления. В дальнейшем было найдено точное решение [4] соответствующей нелинейной задачи и вычислен абсолютный максимум сопротивления. Сравнительно простые решения удается получать в задачах о вытекании жидкости из сосудов через щель, затянутую густой сеткой [5]. Обзор теоретических и экспериментальных работ по обтеканию проницаемых поверхностей несжимаемой жидкостью содержится в [6]. В настоящей работе получено точное решение нелинейной задачи о столкновении плоской струи идеальной несжимаемой жидкости с проницаемой плоскостью. Показано, что за исключением вырожденного случая абсолютной проницаемости происходит неограниченное растекание первичной струи перед преградой, при этом часть жидкости, просочившаяся через преграду, образует завихренную вторичную струю бесконечной ширины. Вырождение при этом происходит «регулярным» образом, т. е. интенсивность бокового растекания и количество жидкости, протекающей через преграду вне калибра исходной струи, стремятся к нулю.

2. **Постановка задачи.** Пусть двумерная стационарная струя идеальной несжимаемой жидкости, имеющая на бесконечности толщину $2h$ и скорость $V = \{u_\infty, 0\}$, набегают на проницаемый экран в виде бесконечной плоскости в сечении $x = 0$, растекаясь перед экраном в поперечных направлениях и полностью или частично просачиваясь через него (рис. 1). Проницаемый экран моделируется поверхностью гидродинамического разрыва с граничными соотношениями вида [4, 5, 6]

$$u(+0, y) = u(-0, y) \equiv u_n, \quad (2.1)$$

$$k p u_n = p(-0, y) - p(+0, y), \quad (2.2)$$

$$v(+0, y) = 0, \quad (2.3)$$

которые выражают закон сохранения массы, линейный закон протекания и свойство экрана гасить касательную составляющую импульса в пересекающих его жидких частицах (последнее справедливо не для любых типов проницаемости [6]).

Примем следующую схему течения. Перед экраном в струе ($x < 0$) течение безвихревое. За проницаемой поверхностью ($x > 0$) находится зона завихренного течения с прямолинейными линиями тока. Завихренность в этой зоне должна быть найдена в процессе решения задачи. Предположение о прямолинейности линий тока за экраном эквивалентно предположению о постоянстве давления во вторичной струе.

Примем это давление равным p_∞ – давлению на бесконечности в окружающем пространстве

$$p(+0, y) = p_\infty. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.1)-(2.4) образуют полную систему условий на разрыве $x = 0$ в рамках принятой схемы течения.

В области безвихревого движения $x < 0$ перед экраном справедлив интеграл Бернулли $\rho(u^2 + v^2) + 2p = \rho u_\infty^2 + 2p_\infty$. Используя (2.2), (2.4) и переходя к безразмерным величинам по формулам

$$x_* = \frac{x}{h}, \quad y_* = \frac{y}{h}, \quad u_* = \frac{u}{u_\infty}, \quad v_* = \frac{v}{u_\infty}, \quad \alpha_* = \frac{k}{u_\infty}, \quad p_* = \frac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2},$$

$$u_1 = u_*(-0, y_*), \quad v_1 = v_*(-0, y_*), \quad p_1 = p_*(-0, y_*),$$

(знак * будем в дальнейшем опускать), получаем граничное условие [3, 4]

$$u_1^2 + v_1^2 + 2\alpha u_1 = 1, \quad (2.5)$$

позволяющее искать потенциальное течение перед экраном независимо от обтекания в целом. Пусть $z = x + iy$ – комплексная координата точки в физической плоскости,

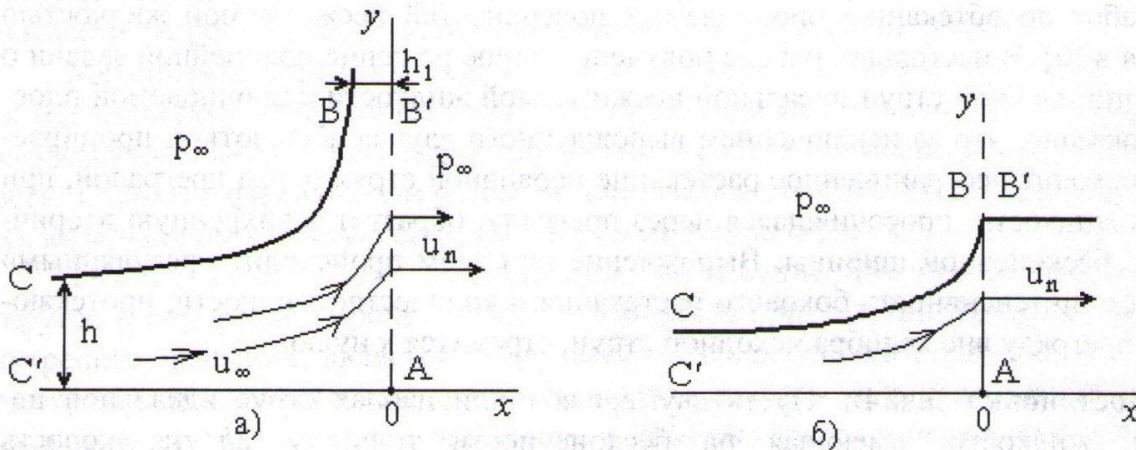


Рис. 1. Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$; частичное (а) и полное (б) просачивание.

$\bar{V} = u - iv$ – комплексная скорость. Для отыскания аналитической функции $\bar{V}(z)$ в области $AB'BCC'$ (рис. 1) имеются краевые условия: на AC' – условие непроницаемости $v = 0$ (следствие симметрии), на AB' – соотношение (2.5) для проницаемой границы, на свободной линии тока BC – условие постоянства давления $p = 0$, которое эквивалентно условию $u^2 + v^2 = 1$.

Если решение в области $x < 0$ найдено, в частности, известна функция $u_1 = u_n(y)$, то вихревое течение в области $x > 0$ строится немедленно с помощью условий (2.1), (2.3), (2.4):

$$u(x, y) = u_n(y), \quad v(x, y) = 0, \quad p(x, y) = 0, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -u'_n(y). \quad (2.6)$$

3 Построение решения в области безвихревого движения. В плоскости годографа скорости $\bar{V} = u - iv$ области $AB'BCC'$, независимо от того, какая из схем обте-

кания (рис.1) реализуется, соответствует половина круговой луночки (рис. 2). Свободная линия тока BC , на которой выполняется условие $u^2 + v^2 = 1$, переходит в дугу единичной окружности, лежащую в четвертой четверти. Соотношение (2.5) на проницаемой поверхности равносильно условию $(u + \alpha)^2 + v^2 = (\sqrt{1 + \alpha^2})^2$, поэтому линии AB' соответствует дуга окружности с центром в точке $(-\alpha, 0)$ и радиусом $\sqrt{1 + \alpha^2}$, эта окружность проходит через точку с координатами $(0, -1)$ и пересекает ось u в точке $(\sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha, 0)$.

Введем параметрическую переменную $\zeta = \xi + i\eta$, такую, что в плоскости ζ области течения соответствует верхняя полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$, а границе области течения $AB'BCC'$ соответствует действительная ось ξ (рис. 3).

Отображение $\bar{V}(\zeta)$ дает формула

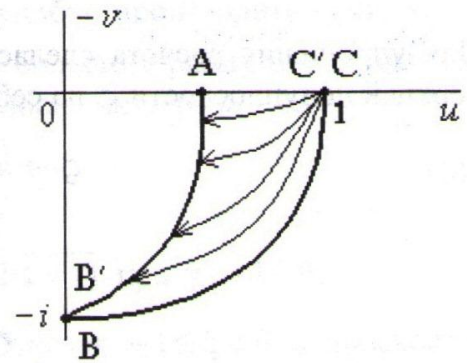


Рис. 2. Область течения в плоскости годографа $\bar{V} = u - iv$.

$$\bar{V}(\zeta) = \frac{(\sqrt{1+\zeta} - 1)^\beta - i(\sqrt{1+\zeta} + 1)^\beta}{(\sqrt{1+\zeta} + 1)^\beta - i(\sqrt{1+\zeta} - 1)^\beta}, \quad \beta = \frac{1}{\pi} \arctg \alpha, \quad (3.1)$$

при этом обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$\bar{V}(\pm\infty) = 1, \quad \bar{V}(\pm 0) = -i, \quad \bar{V}(-1) = \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha.$$

Теперь будем искать $z = z(\zeta)$. Поскольку граница BC области течения в плоскости z неизвестна, сначала найдем вспомогательную функцию [4]

$$\Omega(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = q + ir. \quad (3.2)$$

По определению логарифма от комплексного числа, $\ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| + i \arg \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)$, поэтому

$\text{Im}(\Omega) = r = \arg \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)$. По определению производной $\frac{dz}{d\zeta}$, $\arg \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)$ есть угол поворота

бесконечно малого вектора при переходе от плоскости ζ к плоскости z . Найдем $r(\zeta)$ при $\zeta = \xi$, т. е. на действительной оси. Пусть $-\infty < \xi < -1$ (рис. 3); этому интервалу соответствует луч $C'A$ действительной оси x в плоскости z (рис.1), поэтому $r(\xi) = 0$. Пусть $-1 < \xi < 0$; этому интервалу соответствует участок AB' оси y , поэтому $r(\xi) = \frac{\pi}{2}$. Пусть $0 < \xi < +\infty$; этому интервалу соответствует свободная линия тока BC , следовательно, $r(\xi) = \pi + \arg V(\xi)$, при этом мы не знаем, где находится точка границы BC в плоскости z , но знаем, какой угол наклона вектора скорости на границе будет при данном значении параметра ξ , т. к. отображение $\bar{V}(\zeta)$ (3.1) известно.

Таким образом, мы знаем мнимую часть функции $\Omega(\zeta)$ на действительной оси (рис. 3):

$$\begin{aligned}
C'A: & \quad -\infty < \xi < -1, & r = 0; \\
AB': & \quad -1 < \xi < 0, & r = \frac{\pi}{2}; \\
BC: & \quad 0 < \xi < +\infty, & r = \pi + \Lambda(\xi);
\end{aligned}$$

$$\Lambda(\xi) \equiv \operatorname{arctg} \frac{v(\xi, 0)}{u(\xi, 0)}.$$

Для упрощения расчета сделаем дополнительное дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости ζ на себя

$$\zeta \rightarrow w: \quad w = \frac{\zeta}{\zeta + 2}, \quad \zeta(w) = \frac{2w}{1-w}$$

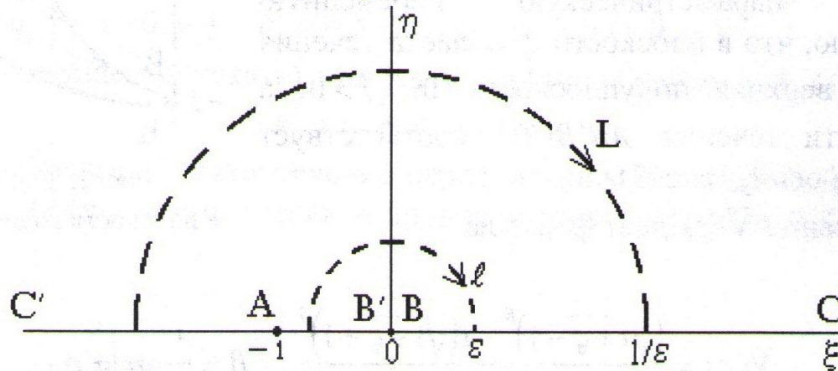


Рис. 3. Параметрическая плоскость $\zeta = \xi + i\eta$

и, обозначая $\gamma \equiv \operatorname{Re}(w)$, перейдем к модифицированным функциям $\Omega_1(w)$ и $\Lambda_1(\gamma)$

$$\Omega_1(w) = \Omega(\zeta(w)), \quad \Lambda_1(\gamma) = \frac{2}{\pi} \Lambda\left(\frac{2\gamma}{1-\gamma}\right). \quad (3.3)$$

В итоге получаем следующую вспомогательную краевую задачу для отыскания в верхней полуплоскости w аналитической функции $\Omega_1(w)$ по значению ее мнимой части на действительной оси γ :

$$\begin{aligned}
-\infty < \gamma < -1, & \quad \operatorname{Im}(\Omega_1) = 0; \\
-1 < \gamma < 0, & \quad \operatorname{Im}(\Omega_1) = \frac{\pi}{2}; \\
0 < \gamma < 1, & \quad \operatorname{Im}(\Omega_1) = \pi + \frac{\pi}{2} \Lambda_1(\gamma); \\
1 < \gamma < +\infty, & \quad \operatorname{Im}(\Omega_1) = 0.
\end{aligned}$$

Эту функцию можно восстановить по формуле Шварца [7]:

$$\Omega_1(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \Omega_1(\gamma)}{\gamma - w} d\gamma + c = \ln \frac{w-1}{\sqrt{w(w+1)}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Lambda_1(\gamma)}{\gamma - w} d\gamma + c$$

(здесь c – произвольная действительная постоянная). Используя (3.1)-(3.3), находим искомую функцию $z(\zeta)$ в виде

$$z(\zeta) = -c_0 \int_{-1}^{\zeta} \sqrt{\frac{2}{\tau(\tau+1)}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Lambda_1(\gamma)}{\gamma - \tau(\tau+2)} d\gamma\right) d\tau, \quad (3.4)$$

где

$$\Lambda_1(\gamma) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1-\gamma})^{2\beta} - (\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1-\gamma})^{2\beta}}{2^{\beta+1} \gamma^{\beta}}. \quad (3.5)$$

Формулы (3.1), (3.4) дают параметрическое решение задачи о набегании плоской струи идеальной несжимаемой жидкости на бесконечную плоскую проницаемую поверхность. Положительная действительная постоянная c_0 в (3.4) определяется из условия соблюдения принятой нормировки ширины струи на бесконечности

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} z(\xi) = i,$$

при этом интегрирование в (3.4) от $\zeta = -1$ до $\zeta = +\infty$ удобно производить вдоль контура, содержащего дугу L полуокружности достаточно большого радиуса ε^{-1} (рис. 3). Итоговое выражение можно записать в виде несобственного интеграла

$$c_0(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Lambda_1(\gamma)}{1-\gamma} d\gamma\right), \quad (3.6)$$

сходимость которого видна из асимптотики $\Lambda_1 \approx \frac{2\beta}{\pi} \sqrt{2(1-\gamma)}$ при $\gamma \rightarrow 1-0$.

4. Анализ решения, результаты расчетов. Отрезок $-1 \leq \xi < 0$ в плоскости параметрической переменной ζ (рис.3) соответствует участку AB' проницаемого экрана в физической плоскости z (рис.1). Используя (3.4), можно получить следующее представление для координаты $y = y_1(\xi)$ на AB' :

$$y_1(\xi) = -2c_0 \int_{-1}^{\xi} \frac{e^{-I(t)}}{t\sqrt{1+t}} dt, \quad I(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-\Lambda_1(\gamma)}{\gamma-t/(2+t)} d\gamma. \quad (4.1)$$

Нетрудно проверить, что для всех $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ интеграл $I(t)$ на интервале $-1 \leq t < 0$ является положительно определенной функцией, имеющей конечный предел $I_0(\beta)$ при $t \rightarrow -0$. Поэтому функция $y_1(\xi)$ монотонно возрастает на интервале $-1 \leq \xi < 0$ и при $\xi \rightarrow -0$ имеет асимптотику $y_1 \approx -2c_0 \exp(-I_0) \ln(-\xi)$, то есть при $\xi \rightarrow -0$ $y_1 \rightarrow +\infty$. Следовательно, точка B' , определяющая границу зоны проницаемой поверхности, омываемой струей, лежит в бесконечности. Это означает, что перед проницаемым экраном жидкость растекается вбок до бесконечности. При этом часть жидкости так и не просачивается, а уходит на бесконечность, оставаясь перед экраном, т.е. почти всегда реализуется первая из показанных на рис. 1 схем течения. Исключение составляет лишь вырожденный случай $\beta = 0$, для которого $y_1(-0) = 1$, при этом квадратуры в (4.1) сводятся к простому выражению $y_1 = \frac{2}{\pi} \arccos(\sqrt{-\xi})$.

Для нахождения нормальной и касательной составляющих скорости на поверхности экрана отделим в выражении (3.1) при $\zeta = \xi \in (-1, 0)$ действительную часть от мнимой:

$$u_1(\xi) = \frac{2 \cos(\pi\beta)(-\xi)^\beta}{2 \sin(\pi\beta)(-\xi)^\beta + (1+\sqrt{1+\xi})^{2\beta} + (1-\sqrt{1+\xi})^{2\beta}}, \quad (4.2)$$

$$v_1(\xi) = \frac{(1+\sqrt{1+\xi})^{2\beta} - (1-\sqrt{1+\xi})^{2\beta}}{2 \sin(\pi\beta)(-\xi)^\beta + (1+\sqrt{1+\xi})^{2\beta} + (1-\sqrt{1+\xi})^{2\beta}}. \quad (4.3)$$

Формулы (4.1)–(4.3) дают возможность вычислять такие физические параметры, как $u_1(y_1)$ – скорость просачивания, $\sigma(y_1) = u_1 v_1$ – касательное напряжение

(нормированное на ρu_∞^2), $\omega(y_1) = -u'_1(\xi)/y'_1(\xi)$ – завихренность (2.6), относительный расход G во вторичной струе

$$G(\beta) = \int_0^{+\infty} u_1 dy_1 = -2c_0 \int_{-1}^0 \frac{u_1(\xi) e^{-I(\xi)} d\xi}{\xi \sqrt{1+\xi}}, \quad (4.4)$$

а также нормальную c_x и тангенциальную c_y составляющие силы воздействия струи на верхнюю половину экрана

$$c_x(\beta) = \int_0^{+\infty} p_1 dy_1 = \int_0^{+\infty} \alpha u_1 dy_1 = \operatorname{tg}(\pi\beta) G(\beta), \quad (4.5)$$

$$c_y(\beta) = \int_0^{+\infty} \sigma dy_1 = -2c_0 \int_{-1}^0 \frac{u_1(\xi) v_1(\xi) e^{-I(\xi)} d\xi}{\xi \sqrt{1+\xi}}. \quad (4.6)$$

Толщина слоя непроточившейся жидкости на бесконечности определяется по формуле

$$h_1 = \lim_{\xi \rightarrow +0} |\operatorname{Re} z(\xi)|.$$

Интегрирование в (3.4) от $\zeta = -1$ до $\zeta = +0$ вдоль контура, содержащего дугу l полуокружности малого радиуса ε (рис.3) дает

$$h_1 = \left| \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z(+\varepsilon) - z(-\varepsilon)) \right|.$$

Используя теорему [8] о поведении интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, можно записать итоговый результат в виде

$$h_1(\beta) = 2\pi c_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \Lambda_1(\gamma)}{\gamma} d\gamma\right). \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) позволяет более просто, чем с помощью (4.4)-(4.5), вычислять G и c_x :

$$G = 1 - h_1(\beta), \quad c_x = (1 - h_1) \operatorname{tg}(\pi\beta). \quad (4.8)$$

На рис. 4 для различных значений β построены распределения вдоль экрана величин $u_n(y)$ и $\omega(y)$, штрихами показаны предельные положения соответствующих кривых для максимальной проницаемости ($\beta = +0$).

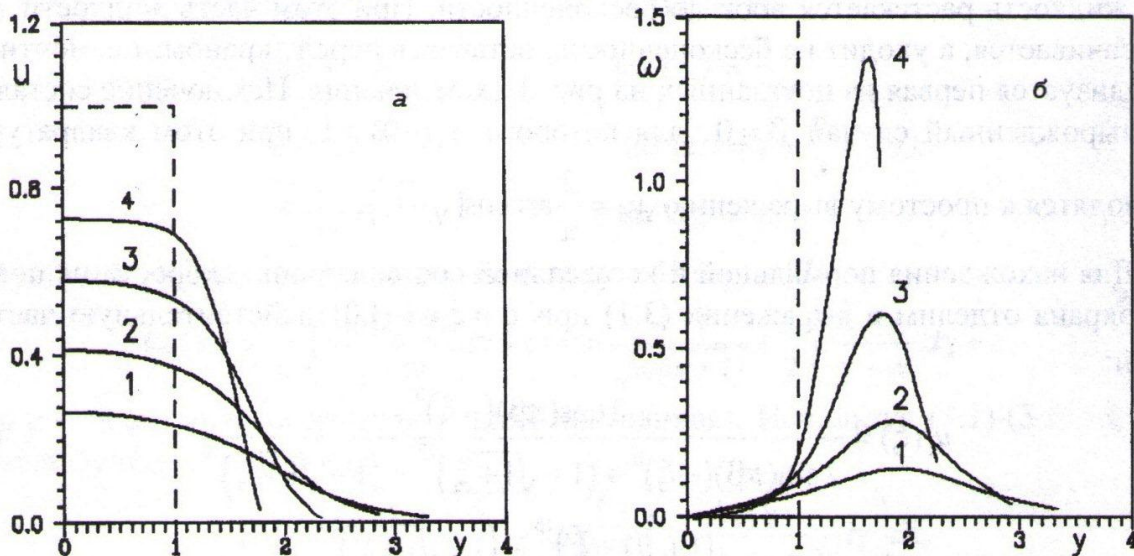


Рис. 4. Поперечные распределения скорости (а) и завихренности (б) во вторичной струе при $\beta = 0,33$ (кривые 1), $\beta = 0,25$ (– 2), $\beta = 0,167$ (– 3), $\beta = 0,1$ (– 4).

Скорость просачивания u_n всегда имеет максимум в центре экрана; экстремальные значения касательного напряжения и завихренности достигаются на конечном расстоянии от центра экрана при $y > 1$; при малых β завихренность во вторичной струе концентрируется в окрестности $y = 1$ и неограниченно возрастает: $\omega_{max} \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow +0$.

На рис. 5 показаны зависимости $c_x(\beta)$, $c_y(\beta)$ и $G(\beta)$, вычисленные по формулам (4.4)-(4.8). Величины c_x и G изменяются монотонно, а c_y достигает максимума при $\beta \approx 0,2$.

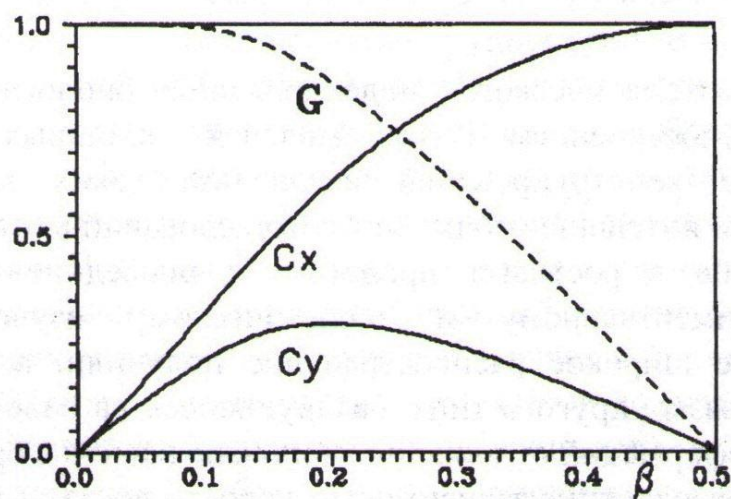


Рис. 5. Интегральные характеристики взаимодействия.

Расчетная конфигурация первичной струи в физической плоскости при $\beta = 0,25$ близка к линии CB , показанной на рисунке 1(а).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Конкурсного Центра фундаментального естествознания при СПбГУ (код 95-0-4.2-155).

ЛИТЕРАТУРА

1. Koo J.-K., James D. F. Fluid Flow around and through a Screen // J. Fluid Mech. 1973. V. 60. Pt. 3. P. 518-538.
2. Бекулов М. Т. Линеаризованная задача об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй // Тр. аспирантов Кабардино-Балкарск. гос. унив. Нальчик, 1965. Вып. 1. С. 445-452.
3. Бекулов М. Т. Линеаризованная задача об обтекании несжимаемой жидкостью с отрывом струй проницаемого клина // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 523-526.
4. Бучин В. А. Решение задачи об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1331-1335.
5. Бучин В. А., Гувернюк С. В., Фещенко С. А. Решение задачи об истечении жидкости из полупространства через частично проницаемую стенку // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 174-176.
6. Рахматулин Х. А., Гувернюк С. В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой // Парашюты и проницаемые тела. М.: Изд-во МГУ, 1987. С.5-24.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е, исправленное. М.: Наука, 1973. 606 с.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2, перераб. М.: Физматлит, 1962. 599 с.