

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Рооп Михаил Дмитриевич

**Критические явления в решениях нелинейных
дифференциальных уравнений механики сплошных сред**

Специальность 01.01.03 — «Математическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Кушнер Алексей Гурьевич

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕРМОДИ- НАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ ..	19
1.1 Дисперсия случайных векторов	24
1.2 Структуры высших порядков	25
1.3 Взаимосвязь с термодинамикой	27
1.4 Лежандровы многообразия газов	28
1.5 Основные результаты главы	54
ГЛАВА 2 СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	55
2.1 Постановка задачи и общее решение	55
2.2 Примеры решений для конкретных термодинамиче-	
ских моделей	58
2.3 Основные результаты главы	64
ГЛАВА 3 НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬ- НЫХ ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	65
3.1 Динамики первого порядка и точные решения	68
3.2 Динамики второго порядка и точные решения для иде-	
альных газов	72
3.3 Основные результаты главы	78
ГЛАВА 4 КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СТАЦИОНАР- НЫХ ТЕЧЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ	79
4.1 Уравнения Эйлера	79
4.2 Уравнения Навье-Стокса	84
4.3 Основные результаты главы	86

ГЛАВА 5 КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ	87
5.1 Геометрические структуры, ассоциированные с уравнениями Эйлера.....	87
5.2 Фактор-уравнения.....	92
5.3 Примеры решений	97
5.4 Основные результаты главы	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
ЛИТЕРАТУРА	113

ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений механики сплошных сред, как известно, состоит из дифференциальных законов сохранения энергии, массы (уравнение неразрывности) и импульса [1–3]. При этом закон сохранения импульса в различных ситуациях принимает разнообразные формы. Например, в наиболее общем случае вязких сжимаемых сред это уравнение Навье-Стокса, для невязких сред он принимает вид уравнения Эйлера, а для сред, совершающих движение в пористой среде, — это закон Дарси [4–10]. Кроме того, указанная система уравнений оказывается неполной. Для ее замыкания требуются дополнительные соотношения на термодинамические переменные, входящие в уравнения, такие как давление, температура, плотность, энергия и энтропия, называемые *уравнениями состояния* [11]. Таким образом, термодинамика среды существенно влияет на ее движение.

Геометрическая формулировка термодинамических состояний [26–29] как лежандровых многообразий в некотором специальном термодинамическом контактном пространстве позволяет применить теорию лежандровых и лагранжевых особенностей В.И. Арнольда [45–47] для анализа таких явлений как *фазовые переходы* — скачки среды из одного агрегатного состояния в другое (например, жидкость-газ). А именно, область фазовых переходов определяется особенностями проекции термодинамических лежандровых многообразий на подпространство интенсивных переменных (например, таких как давление и температура). Большинство таких лежандровых многообразий, отвечающих термодинамическим состояниям реальных газов, обладают особенностью типа сборки. С другой стороны, сами уравнения нелинейны, а значит, их решения могут иметь особенности. Эти два типа особенностей, а именно особенности решений нелинейных уравнений механики сплошных сред и особенности термодинамической природы, можно объединить вместе термином «критические явления», чему и посвящена данная диссертация. Несмотря на обширные исследования (как численные, так и аналитические) в области механики

сплошных сред, на сегодняшний день нет полного описания структуры пространств решений основных ее уравнений.

Первые значительные результаты в области процессов фильтрации были получены в [5] и [6]. В этих работах было предложено использовать закон Дарси для изучения течений в пористых средах. Этот подход оказался достаточно эффективным. Такие явления как фазовые переходы в процессах фильтрации были изучены в немногих работах, например, в [12] и [13]. В [12] была изучена одномерная нестационарная фильтрация двухкомпонентной смеси углеводородов, описываемая обобщенным уравнением Ван дер Ваальса, однако только одно (термическое) уравнение состояния принималось во внимание. В [13] были исследованы неравновесные фазовые переходы в фильтрации смесей газовых конденсатов и представлено сравнение с равновесными фазовыми переходами. Использовались численные методы, так же как и в [12].

В отличие от [12] и [13] в настоящей работе рассматривается стационарная однокомпонентная фильтрация и находятся явные формулы для нахождения решений задачи Дирихле. Некоторые точные решения уравнений нестационарной фильтрации вместе с анализом алгебры симметрий соответствующих уравнений для различных сред представлены в [14]. Также используется метод конечномерных динамик [15–20] для нахождения точных решений для системы нестационарной фильтрации для двух типов термодинамических процессов — адиабатического и изотальпического.

Течения сред, описываемые уравнениями Эйлера и Навье-Стокса, формируемые с помощью источника представляют интерес еще с середины 20-го века, когда Ландау нашел новое точное сингулярное решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой среды [21], которое получило название *затопленная струя*. С физической точки зрения это решение описывает струю жидкости, погруженной в ту же самую жидкость, формируемую с помощью источника, который передает импульс окружающей среде в определенном направлении. Оно имеет два свойства, которые обычно интерпретируются как недостатки решения Ландау. Первое

состоит в тривиальности решения в случае идеальной (невязкой) жидкости, что означает, что решение справедливо только для сильно вязких жидкостей. Вторым недостатком состоит в нулевом потоке массы через сферу, окружающую источник. Решение Ландау было обобщено Броманом и Руденко [22]. С помощью методов теории симметрий [23, 57], они построили некоторые точные решения несжимаемых уравнений Навье-Стокса, соответствующие течениям с ненулевым потоком массы и допускающие переход к невязким жидкостям. Стоит отметить, что в работах [21] и [22] термодинамика сред не рассматривалась. Одним из первых, кто стал изучать термодинамические свойства таких течений, был Сквайр [24]. Принимая во внимание также уравнение теплового баланса, он нашел распределение температуры в струе для несжимаемых сред. Некоторые решения с особенностями для несжимаемых и сжимаемых сред, инвариантные относительно подалгебр алгебры симметрий уравнений Навье-Стокса, были получены в [25].

Геометрическая интерпретация равновесных термодинамических систем восходит еще к 19-му веку [26] и недавно отражена в работе [27]. В современных терминах термодинамические состояния являются лежандровыми многообразиями, то есть максимальными интегральными многообразиями в термодинамическом контактном пространстве со структурной формой, представляющей первое начало термодинамики. Дополнительные структуры, такие как римановы структуры на этих лежандровых многообразиях изучались, например, в [28]. Рассматривая термодинамику в контексте теории измерений [29], можно показать, что обе эти структуры (контактная и риманова) происходят из *принципа минимального прироста информации* или *расстояния Кульбака-Лейблера* [30]. Именно, лежандровы многообразия представляют средние значения (в смысле математического ожидания) измеряемых величин (или экстремальные вероятностные распределения) которыми являются внутренняя энергия и объем (экстенсивные величины), тогда как римановы структуры отвечают за их дисперсию, иными словами, контактная и риманова структуры появляются из первых двух центральных моментов

экстремальных вероятностных распределений. Стоит отметить, что обе эти структуры хорошо изучены в литературе, но в то же самое время структуры более высокого порядка, соответствующие центральным моментам высших порядков, ранее не изучались. В настоящей диссертации развивается геометрический подход к термодинамике. По сравнению с традиционным подходом в нем учитываются центральные моменты четвертого порядка и соответствующие им симметрические формы на лежандровых многообразиях для двух типов газов – идеального и Ван дер Ваальса. Естественно потребовать, чтобы центральный момент четвертого порядка был положительно определенным. Известно, что положительность дисперсии приводит к понятию термодинамической фазы [29], в то время как положительность центрального момента четвертого порядка дает более точное условие применимости модели газа Ван дер Ваальса.

Проблема оптимального управления термодинамическими процессами представляет интерес еще с 19-го века, когда классическая работа Карно [31] дала возможность исследовать оптимальные режимы работы тепловых машин. Несколько работ посвящены построению тепловых машин с максимальной эффективностью в случае линейных законов теплопередачи [32, 33]. В [33], задача оптимального управления была исследована с помощью принципа максимума Понтрягина, который был сформулирован в [34] и также описан в [35]. В относительно недавней серии работ [36–38] неравновесная термодинамическая система представлена как семейство равновесных систем с линейными законами теплопередачи между каждой парой подсистем, и при этом максимизируется работа такой системы. Объемы подсистем рассматриваются как управляющие параметры, тогда как переменными состояниями являются энтропии подсистем. В настоящей диссертации термодинамика формулируется как теория измерений случайных векторов, а именно экстенсивных переменных. Это приводит к определению термодинамических состояний как лежандровых или лагранжевых многообразий. Лежандровы и лагранжевы многообразия снабжены римановыми структурами. Такая геометрическая интерпретация термодинамических состояний позволя-

ет использовать принцип максимума Понтрягина для нахождения оптимальных термодинамических процессов, максимизирующих функционал работы. Один из главных результатов работы состоит в том, что гамильтонова система, которая появляется при применении принципа максимума Понтрягина, оказывается интегрируемой в смысле Лиувилля, и ее точное решение найдено, дан анализ его особенностей, доказана теорема об управляемости. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы встречаются редко. Наиболее известными примерами из механики твердых тел таковыми являются волчки Эйлера, Лагранжа [39], Ковалевской [40], а также цепочки Тоды [41] и Веселова-Шабата [42]. Среди бесконечномерных интегрируемых систем особое место занимает уравнение Кортевега де Фриза [43].

Критические явления в нестационарной газовой динамике, такие как ударные волны и взрывы, всегда представляли интерес как с теоретической точки зрения [45–47], так и с практической [48]. В последние десятилетия такие явления широко изучались. Стоит упомянуть [49], где изучались газы Чаплыгина, и [50, 51], где рассматривались слабые ударные волны. Стоит также отметить работы [52, 53], где особое внимание уделяется влиянию турбулентности на ударные волны.

Основной трудностью теоретического исследования таких проблем является то, что соответствующие решения не являются достаточно гладкими для применения численных методов. Анализ таких эффектов представлен, например, в [54], где для многочисленных примеров уравнений математической физики главным образом используются методы функционального анализа. Другой подход, основанный на геометрических методах теории нелинейных дифференциальных уравнений [23, 55–59], был хорошо развит для нестационарных задач фильтрации в работах [60, 61], где система уравнений одномерной нестационарной фильтрации была сведена к уравнению Монжа-Ампера, которое может с помощью преобразования Лежандра быть приведено к волновому уравнению. Это дало возможность построить его точное многозначное решение. В работе [62] многозначное решение было получено для инвариантных от-

носителем вращений течений. Основная идея геометрического подхода заключается в интерпретации решений как интегральных многообразий распределения Картана, что является естественным способом обобщения классических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Такой подход позволяет находить не столько функции, удовлетворяющие исследуемым уравнениям, сколько многообразия, которые, вообще говоря, не могут быть заданы глобально как графики функций, а могут иметь особенности проекции на пространство независимых переменных.

Система уравнений Эйлера является системой гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка, частным случаем систем Якоби [56], теоретические исследования глобальной разрешимости которых исследованы в работах [63–66]. Именно, рассматриваемые в настоящей работе уравнения являются обобщениями уравнений из [65] на случай произвольного газа и произвольного термодинамического процесса. По сравнению с [65], в данной работе не предполагается какая-либо конкретная модель среды или какой-либо конкретный процесс, в котором участвует среда, а дается метод нахождения многозначных решений и построения соответствующих разрывных решений, применимых для любой модели термодинамического состояния. Методы, используемые в настоящей диссертации, основаны на представлении систем Якоби [56] с помощью дифференциальных 2-форм на пространстве 0-джетов. Одно из преимуществ такого рассмотрения состоит в понижении порядка пространства джетов. Используются геометрические структуры только на пространстве 0-джетов, вместо пространства 1-джетов, где эти уравнения имеют естественное представление. Эта идея восходит к работам [67, 68], и она нашла множество приложений также и в несжимаемой гидродинамике [69, 70]. В настоящей диссертации найден новый класс многозначных решений уравнений Эйлера для произвольной термодинамической модели среды, и особенности их проекции на плоскость независимых переменных — в точности то, что вызывает появление ударной волны [55]. Для нахождения таких решений используется идея добавления дифференциальных связей к исходной системе таким образом, что-

бы получившаяся переопределенная система уравнений была совместна [71, 72]. Такие связи находятся из фактор-уравнений [72, 73]. Похожие идеи были использованы также в [74], где найдено общее решение уравнение Хантера-Сакстона, в [75], где рассматривается двумерная система уравнений Эйлера, и в [76], где такой подход был применен к уравнению Хохлова-Заболотской.

Актуальность темы и степень ее разработанности. Фундаментальные уравнения гидро- и газодинамики описывают важные процессы, протекающие в природе и промышленности. Понимание структуры решений этих уравнений, в особенности критические режимы, такие как фазовые переходы и ударные волны, позволяют развивать эффективные методы разработки нефтяных и газовых месторождений, управления течениями газов в трубах при транспортировке газа, прогнозирование погодных явлений. Например, лагранжевы особенности решений уравнений квазигеострофических теорий [84], интерпретируются как погодные фронты. Кроме того, изучение точных решений и решений с особенностями традиционно представляет теоретический интерес [85].

Развитие аналитических методов анализа нелинейных уравнений в частных производных позволяет развивать более эффективные численные методы. В последнее время прослеживается тенденция к разработке численных методов, учитывающих внутреннюю геометрию уравнений гидро- и газодинамики [81–83]. Поэтому понимание геометрических структур, лежащих в основе уравнений газовой динамики, сегодня является актуальным при решении задач прикладного характера.

В любом типе газовых течений, будь то фильтрационные течения, течения газов в трубах и атмосфере, термодинамика играет существенную роль. Несмотря на обилие работ в области газовой динамики, на сегодняшний день не выработан единый относительно различных термодинамических моделей подход решения задач газовой динамики. В данной диссертации основные результаты формулируются для общего вида термодинамических моделей, без выделения какой-либо конкретной. Это позволяет исследовать течения не только, например, идеально-

го газа, которому традиционно уделяется большое внимание в контексте задач газовой динамики, но и, например, Ван дер Ваальса, для которого точных решений уравнений газовой динамики известно очень мало ввиду меньшей симметрии по сравнению с идеальным газом. В настоящей диссертации этот пробел отчасти заполняется, наряду с возможностью напрямую исследовать фазовые переходы в течениях газов, конструктивно находя области фазовых превращений.

Сегодня уже ясно, что язык контактной и симплектической геометрии является естественным для термодинамики. Геометрия, которая лежит в основе равновесной термодинамики, вместе с теорией лежандровых и лагранжевых особенностей являются не только красивыми математически, но и позволяют эффективно исследовать явления фазовых переходов. Недавнее наблюдение о тесной связи между теорией измерений и термодинамикой [29] возродило интерес к этим уже ставшим классическими направлениям математики. А именно, контактная и риманова структуры, изучавшиеся давно и подробно [26–28], являются частью гораздо более общей картины измерений экстенсивных термодинамических величин, в контексте которой естественно рассматривать не только контактную и риманову структуры, связанные соответственно со средними значениями измеряемых величин и их дисперсией, но и структуры высших порядков, соответствующие высшим центральным моментам. Например, ясно, что все центральные моменты четных порядков должны быть положительно определены, что дает дополнительные условия на область применимости термодинамических моделей. Наряду со своей важностью и естественностью структуры высших порядков незаслуженно обделены вниманием и мало изучены.

Кроме того, геометрический подход к термодинамике позволяет эффективно решать оптимизационные задачи для равновесных систем. В такого рода задачах важным является выбор ограничения для управляющих параметров, и римановы структуры могут служить инструментом, позволяющим такие области найти. Поскольку ранее задачи оптимального управления в термодинамике решались без учета римановых и кон-

тактных структур, то можно ожидать, что применение геометрического формализма приведет к новым оптимальным термодинамическим процессам, что и реализовано в данной диссертации.

Актуальными являются следующие задачи:

- исследование структур высших порядков на термодинамических лагранжевых многообразиях для идеального газа и газа Ван дер Ваальса, определение областей допустимых состояний с помощью симметрических форм 4-го порядка;
- нахождение оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов, на которых максимизируется функционал работы;
- решение задачи стационарной фильтрации реальных газов в пористых средах для различных термодинамических моделей, таких как идеальный газ, газ Ван дер Ваальса, газ Пенга-Робинсона и газ Редлиха-Квонга и произвольного вида термодинамических процессов; определение областей фазовых переходов на течениях газов;
- построение решений уравнений нестационарной фильтрации в одномерном случае, исследование особенностей полученных решений и построение областей фазовых переходов;
- решение задачи стационарного истекания реального газа из точечного источника, исследование таких свойств решений, как область существования, асимптотическое поведение на бесконечности, расчет областей фазовых переходов на решениях;
- построение решений с особенностями одномерных нестационарных уравнений Эйлера для произвольных моделей термодинамического состояния, нахождение особенностей проекции полученных решений на пространство независимых переменных (каустик) и линий разрыва с помощью законов сохранения (фронт ударной волны); исследование фазовых переходов для полученных решений.

Цель работы. Целью настоящей работы является исследование критических явлений (ударные волны и фазовые переходы) на решениях нелинейных уравнений газовой динамики, теории фильтрации, а также анализ симметрических тензоров высших порядков на термодинамиче-

ских лагранжевых многообразиях и нахождение оптимальных равновесных термодинамических процессов. Указанная цель достигается путем решения следующих **задач**:

- определение областей допустимых состояний с помощью симметрических форм 4-го порядка на термодинамических лагранжевых многообразиях для и идеального газа и газа Ван дер Ваальса;
- нахождение оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов, исследование интегрируемых свойств соответствующей гамильтоновой системы, особенностей ее инвариантного многообразия, построение решения гамильтоновой системы, анализ управляемости динамической системы;
- решение задачи стационарной фильтрации реальных газов в пористых средах для различных термодинамических моделей, определение областей фазовых переходов на течениях газов;
- нахождение конечномерных динамик и соответствующих им точных решений нелинейных уравнений нестационарной фильтрации, установление областей фазовых переходов для полученных решений;
- решение задачи стационарного истекания реального газа из точечного источника для произвольной термодинамической модели среды, нахождение области существования решения, его асимптотического поведения;
- исследование геометрических структур, ассоциированных с уравнениями Эйлера, исследование вопросов их интегрируемости, нахождение фактор-уравнений относительно группы x -трансляций, построение точных многозначных решений для произвольной модели термодинамического состояния среды, построение множества особенностей проекции многозначных решений на плоскость (t, x) , построение кривых разрыва с помощью законов сохранения, установление областей фазовых переходов для модели Ван дер Ваальса.

Объектом исследования являются математические модели движения жидкостей и газов, теории фильтрации в пористых средах, модели

термодинамических состояний сред.

Предметом исследования являются критические явления, возникающие в решениях дифференциальных уравнений механики сплошных сред, такие как ударные волны и фазовые переходы, а также лежандровы и лагранжевы особенности моделей термодинамических состояний сред.

Научная новизна

- Впервые исследованы симметрические формы 4-го порядка для термодинамических лагранжевых многообразий идеальных газов и газа Ван дер Ваальса, установлена новая область допустимых состояний газа Ван дер Ваальса;
- Найдены новые классы оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов; постановка задачи оптимального управления впервые использует римановы структуры на термодинамических лагранжевых многообразиях;
- Впервые задача стационарной фильтрации газов в пористых средах решена в общем виде для всех термодинамических моделей; для полученных решений найдены области фазовых переходов;
- Впервые задача истекания газа из точечного источника решена в общем виде для всех термодинамических моделей, с учетом фазовых переходов;
- Найдены новые конечномерные динамики второго порядка для уравнений нестационарной фильтрации, построены новые точные решения, им соответствующие;
- Получен новый класс многозначных точных решений уравнений Эйлера для всех термодинамических моделей, для которого рассчитаны местоположение каустик и фронта ударной волны. Найдена термодинамическая модель среды, для которой можно получить все x -инвариантные совместные с системой уравнений Эйлера дифференциальные связи.
- Впервые взаимодействие ударных волн и фазовых переходов проанализировано на основе новых точных многозначных и разрывных решений уравнений Эйлера.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации могут быть использованы для разработки новых численных методов для построения решений уравнений газовой динамики с особенностями. Нахождение областей фазовых переходов и ударных волн может быть использовано при разработке нефтяных и газовых месторождений, для управления особенностями течения газов по трубам. Из полученных классов точных решений можно находить новые решения методом размножения решений с помощью симметрий, а также найденные решения можно использовать для тестирования разностных схем. Уточнение области допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса может быть использовано для более детального анализа фазовых переходов, описываемых с помощью этой модели.

Методология и методы исследования. Описание термодинамических состояний сред и геометрических структур на них основано на методах контактной, симплектической и римановой геометрии, теории лежандровых и лагранжевых особенностей. Построение решений стационарных уравнений фильтрации основано на аналитических методах теории дифференциальных уравнений, построение решений для нестационарных уравнений фильтрации основано на теории конечномерных динамик и геометрической теории дифференциальных уравнений. При построении точных многозначных решений уравнений Эйлера были использованы методы теории уравнений Монжа-Ампера, методы теории симметрий и дифференциальных инвариантов, теории совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой и построено ее решение в квадратурах. Установлены условия, при которых инвариантное многообразие гамильтоновой системы имеет различное число компонент связности. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы.

2. Получена новая область допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса, вычисленная с помощью формы 4-го порядка. Полученная область отличается от ранее известной, рассчитываемой с помощью формы 2-го порядка, в области критической точки.
3. Решения основных уравнений стационарной фильтрации получены в общем виде путем сведения их к уравнению Лапласа для всех моделей термодинамических состояний среды. Установлено, что в общем случае эти решения многозначные, были найдены условия, при которых решение является единственным. Оно совпадает с условием термодинамической устойчивости. Рассмотрен случай точечных источников в области фильтрации для различных моделей термодинамических состояний. Было установлено, что в окрестности стоков наблюдается конденсация среды.
4. Были найдены конечномерные динамики первого порядка, и соответствующие им решения были получены для любой модели термодинамического состояния газа. Области фазовых переходов в пространстве-времени были построены для двух типов процессов — адиабатического и изоэнтальпического. Динамики второго порядка были найдены для специальных видов процессов. Они отличаются от известных ранее динамик второго порядка для этого уравнения. Соответствующие им решения разрушаются за конечное время.
5. Решена задача адиабатического истекания реального газа в трехмерном пространстве из источника заданной интенсивности с учетом фазовых переходов. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера для произвольной модели термодинамического состояния среды. Установлено, что вблизи источника наблюдается конденсация среды. Установлена область существования решений и асимптотическое поведение решений на бесконечности. Установлено, что найденные решения регулярны на бесконечности.
6. Найдены новые классы многозначных точных решений уравнений Эйлера для произвольного класса реальных газов и термодинамических процессов и построены соответствующие разрывные реше-

ния, которым отвечают ударные волны. Для различных конкретных примеров таких решений установлены области появления особенностей проекции на плоскость независимых переменных (каустики), получены области возникновения фазового перехода (в модели Ван дер Ваальса), и возникновения ударных волн. Установлено, что ударная волна может сопровождаться также фазовым переходом.

7. Установлено условие интегрируемости характеристических распределений, ассоциированных с уравнениями Эйлера. Этому условию отвечают определенные термодинамические состояния сред (политропические газы с показателем политропы 3).
8. Получено фактор-уравнение для уравнений Эйлера относительно группы трансляций вдоль x , установлено условие его приводимости к волновому уравнению. Этому условию отвечает определенное термодинамическое состояние среды, для которого можно найти все x -инвариантные совместные с уравнениями Эйлера дифференциальные связи.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

- использованием классических математических моделей;
- использованием строгих аналитических методов исследования;
- сравнением полученных результатов с известными ранее.

Апробация работы. Основные результаты работы представлены автором на следующих конференциях и семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых «Ломоносов». Москва, 9-13 апреля 2018 г.
- Научная школа-конференция «Зимняя геометрическая школа». Переславль-Залесский, 22-27 января 2018 г.
- 11, 12, 13 Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем», ИПУ РАН, Москва, 1-3 октября, 2018, 2019, 2020.
- 13-ое Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ

- XIII), Москва, 17-20 июня 2019.
- 14 Международная Казанская научная школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», Казань, 7-12 сентября 2019.
 - Научный семинар «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений» под руководством И.С. Красильщика, 14 ноября 2018, Независимый московский университет, Москва, Россия.
 - Научный семинар лаборатории «Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем» ИПУ РАН под руководством А.Г. Кушнера и В.В. Лычагина, 29 ноября 2018, 31 января 2019, 27 апреля 2020.
 - Научный семинар кафедры физико-математических методов управления, МГУ, Москва, 9 декабря 2020.
 - International Conference «Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability», dedicated to the 70th birthday of Joseph Krasil'shchik, 8-12 October, 2018, Trieste, Italy.
 - Summer scientific school and workshop Wisla-2019 «Geometrical methods in nonlinear PDEs and critical phenomena» (Wisla, Poland, 19-28 August, 2019), a registered satellite meeting of ICIAM 2019, The International Congress on Industrial and Applied Mathematics, to be held in Valencia (Spain), July 15-19, 2019.
 - Winter School and Workshop Wisla-2021 «Groups, Invariants, Integrals, and Moving Frames» (Wisla, Poland), January, 25 - February, 5, 2021.
 - Scientific seminar «Cohomology in algebra, geometry, physics and statistics», Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Prague, May 6, 2020.
 - Hamiltonian Systems Seminar, University of Toronto and University of Arizona, Toronto, Canada, April 13, 2021.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 11 статьях [86–96] в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science, из которых 1 входит в Q1 (Web of Science), 3

входят в Q1 (Scopus), Q2 (Web of Science), 5 входят в Q2 (Scopus), 3 статьи опубликованы в журналах, входящих также в перечень ВАК, 5 работ [97–101] опубликованы в сборниках трудов конференций. Всего 16 печатных работ.

Личный вклад. Все основные результаты получены автором самостоятельно. Вклад автора диссертации в работах [87–89, 91, 92, 101] составляет 70%, в работах [90, 93–98, 100] вклад автора составляет 85%.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения, содержит 26 рисунков. Список литературы содержит 101 наименование. Полный объем диссертации составляет 122 страницы.

ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Результаты этой главы опубликованы в работах [91–93, 97, 101].

Пусть (Ω, \mathcal{A}, p) — дискретное вероятностное пространство, то есть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ — множество элементарных исходов, \mathcal{A} — σ -алгебра на Ω и p — вероятностная мера, $p = \{p_1, \dots, p_k\}$, где $p_i = p(\omega_i)$. Пусть $q = \{q_1, \dots, q_k\}$ — другая вероятностная мера. Введем *функцию сюрприза* как случайную величину $s_p: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, определив ее значения на элементарных исходах следующим образом:

$$s_p(\omega_i) = -\ln p_i, \quad i = \overline{1, k}. \quad (1.1)$$

В силу (1.1) справедливы соотношения $s_p(\Omega) = 0$, $s_p(\emptyset) = +\infty$, что обосновывает название «функция сюрприза».

Среднее значение $S(p)$ функции сюрприза s_p относительно меры p есть

$$S(p) = -\sum_{i=1}^k p_i \ln p_i. \quad (1.2)$$

Заметим, что формула (1.2) совпадает с определением энтропии Шеннона. При изменении меры p на другую меру q функция сюрприза меняется следующим образом:

$$s(p, q) = s_q - s_p = \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right),$$

и, следовательно, среднее значение $s(p, q)$ относительно меры p , которое называется *приростом информации*, или *расстоянием Кульбака-Лейблера* [30] имеет вид

$$I(p, q) = \sum_{i=1}^k p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right). \quad (1.3)$$

Обобщение (1.3) на случай произвольного вероятностного пространства Ω имеет вид

$$I(p, q) = \int_{\Omega} \ln \left(\frac{dp}{dq} \right) dp, \quad (1.4)$$

и если $dp = \rho dq$, где ρ — плотность вероятности, тогда формула (1.4) принимает вид

$$I(\rho) = \int_{\Omega} \rho \ln \rho dq.$$

Пусть W — векторное пространство над полем действительных чисел \mathbb{R} , $\dim W = n < \infty$ и пусть $X: (\Omega, \mathcal{A}, q) \rightarrow W$ — случайный вектор. Пусть $x \in W$ — зафиксированный элемент векторного пространства W , являющийся результатом измерения случайного вектора X , то есть $\mathbb{E}X = x$. Если исходная мера q не дает нам требуемый вектор $x \in W$, тогда нужно выбрать другую меру $p = \rho dq$, такую что

$$\int_{\Omega} \rho dq = 1, \quad \int_{\Omega} \rho X dq = x. \quad (1.5)$$

Другими словами, для того чтобы получить вектор $x \in W$ в качестве результата измерения, мы должны найти такую плотность, что выполняются условия (1.5). Очевидно, что условий (1.5) недостаточно для однозначного определения ρ , поэтому нужно дополнительное требование, которое носит название *принцип минимального прироста информации* [29]:

$$I(\rho) = \int_{\Omega} \rho \ln \rho dq \rightarrow \min_{\rho}. \quad (1.6)$$

Таким образом, задача нахождения ρ может быть сформулирована как следующая экстремальная задача: найти плотность вероятности ρ , удовлетворяющую ограничениям (1.5) и минимизирующую функционал (1.6).

Теорема 1 ([29]). *Экстремальная плотность вероятности p опреде-*

ляется с помощью плотности ρ как

$$\rho = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\langle \lambda, X \rangle}, \quad Z(\lambda) = \int_{\Omega} e^{\langle \lambda, X \rangle} dq, \quad (1.7)$$

где $\lambda \in W^*$, $\langle \lambda, X \rangle$ — значение ковектора λ на X . Результаты измерения принадлежат многообразию

$$L_H = \left\{ x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\} \subset W \times W^*,$$

где $H(\lambda) = -\ln Z(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \rho \ln \rho dq - \lambda_0 \left(\int_{\Omega} \rho dq - 1 \right) - \left\langle \lambda, \int_{\Omega} \rho X dq - x \right\rangle.$$

Поскольку его первая вариация относительно ρ должна быть равна нулю, то

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\Omega} (\ln \rho + 1 - \lambda_0 - \langle \lambda, X \rangle) \delta \rho dq = 0,$$

откуда следует, что

$$\rho = \exp(\lambda_0 - 1 + \langle \lambda, X \rangle).$$

Принимая во внимание, что $\int_{\Omega} \rho dq = 1$, получается

$$\rho = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\langle \lambda, X \rangle}, \quad \text{где } Z(\lambda) = \int_{\Omega} e^{\langle \lambda, X \rangle} dq.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \int_{\Omega} X e^{\langle \lambda, X \rangle} dq = \int_{\Omega} X \rho Z(\lambda) dq = Z(\lambda) x,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln Z(\lambda)) = x.$$

Вводя гамильтониан $H(\lambda) = -\ln Z(\lambda)$, мы получаем

$$x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}. \quad (1.8)$$

□

Замечание 1. 1. Функция $Z(\lambda)$ называется статистической суммой.
2. Функция $H(\lambda)$ называется гамильтонианом или свободной энергией.

Заметим, что многообразие $\Phi = W \times W^*$ снабжено симплектической структурой

$$\omega = d\lambda \wedge dx = \sum_{i=1}^n d\lambda_i \wedge dx_i.$$

Пара (Φ, ω) , следовательно, представляет собой симплектическое пространство. Более того, многообразие L_H является лагранжевым, то есть $\omega|_{L_H} = 0$.

Рассматривая соотношения $x_i = -H_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$ как уравнения на λ_i , локально будем иметь $\lambda_i = \lambda_i(x)$. Прирост информации $I(x)$ является функцией на L_H , которая связана с гамильтонианом $H(\lambda)$ как [29]

$$I(x) = H(\lambda(x)) + \langle \lambda(x), x \rangle. \quad (1.9)$$

Таким образом, результаты измерений случайных векторов заданы лагранжевым многообразием, и имея заданное лагранжево многообразие, можно найти как экстремальную меру p , так и математическое ожидание x случайного вектора X .

Введем теперь в рассмотрение прирост информации в получившуюся геометрическую картину. Для этого построим контактизацию [45] $\widehat{\Phi}$ многообразия Φ следующим образом:

$$\widehat{\Phi} = \mathbb{R} \times \Phi = \mathbb{R}^{2n+1}(u, x, \lambda).$$

Снабдим $\widehat{\Phi}$ контактной формой

$$\theta = du - \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i. \quad (1.10)$$

Таким образом, $(\widehat{\Phi}, \theta)$ является контактным многообразием. Пусть $a = (x, \lambda) \in L_H$ построим многообразие \widehat{L} размерности n как

$$\widehat{L} = \left\{ u = I(a), x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\} \subset \widehat{\Phi}.$$

Теорема 2. *Многообразие \widehat{L} является лежандровым, то есть $\theta|_{\widehat{L}} = 0$.*

Доказательство. Прежде всего, введем функцию $J(\lambda, x)$:

$$J(\lambda, x) = H(\lambda) + \langle \lambda, x \rangle.$$

Покажем, что $J|_{L_H} = I$. В самом деле, используя (1.7), имеем

$$\begin{aligned} J|_{L_H} &= H(\lambda) \int_{\Omega} \rho dq - \langle \lambda, H_\lambda \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \frac{e^{\langle \lambda, X \rangle}}{Z(\lambda)} (\langle \lambda, X \rangle - \ln Z(\lambda)) dq = \int_{\Omega} \rho \ln \rho dq = I. \end{aligned}$$

Дифференциал функции $J(\lambda, x)$ есть

$$dJ = \sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \right) d\lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i,$$

откуда следует, что $dJ|_{L_H} = \widehat{\theta}|_{L_H}$, где

$$\widehat{\theta} = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i.$$

Принимая во внимание равенство $J|_{L_H} = I$, мы получаем $\widehat{\theta}|_{L_H} = dI$.

Наконец,

$$\theta|_{\widehat{L}} = \left(du - \widehat{\theta} \right) \Big|_{\widehat{L}} = dI - \widehat{\theta}|_{L_H} = 0.$$

□

Стоит отметить, что каноническая проекция $\pi: \widehat{\Phi} \rightarrow \Phi$, $\pi(u, x, \lambda) = (x, \lambda)$, будучи ограниченной на лежандрово многообразии \widehat{L} становится локальным диффеоморфизмом на образ L_H , то есть $\pi(\widehat{L}) = L_H$, и дифференциальная 2-форма $d\theta$ есть pullback симплектической формы ω , $d\theta = \pi^*(\omega)$.

Суммируя все вышесказанное, мы приходим к выводу, что любое измерение случайных векторов может быть представлено с помощью лежандрова подмногообразия \widehat{L} контактного многообразия $\widehat{\Phi}$. Это лежандрово многообразие дает информацию об экстремальной мере p (или, эквивалентно, о плотности ρ), средние значения x случайного вектора X и дополнительно значение прироста информации $I(\lambda)$.

1.1. Дисперсия случайных векторов

Следующий естественный шаг — проанализировать дисперсию случайного вектора X . Стоит отметить, что второй момент — симметрическая 2-форма $\mu_2 \in S^2(W)$, заданная формулой

$$\mu_2(X) = \int_{\Omega} X(\omega) \otimes X(\omega) dp.$$

Дисперсия — второй центральный момент, то есть симметрическая форма $\sigma_2 \in S^2(W)$

$$\sigma_2(X) = \mu_2(X - \mu_1(X)) = \mu_2(X) - \mu_1(X) \otimes \mu_1(X).$$

Теорема 3 ([29]). *Дисперсия случайного вектора X совпадает (с точностью до знака) с гессианом гамильтониана $H(\lambda)$:*

$$\sigma_2(X) = -\text{Hess}(H),$$

где $\text{Hess}(H) = \sum_{i,j=1}^n H_{\lambda_i \lambda_j} d\lambda_i \otimes d\lambda_j$ — гессиан гамильтониана $H(\lambda)$.

Заметим, что симплектическое многообразие Φ снабжено универсальной квадратичной формой κ :

$$\kappa = d\lambda \cdot dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d\lambda_i \otimes dx_i + dx_i \otimes d\lambda_i).$$

Запишем ее ограничение на подмногообразии L_H

$$\kappa|_{L_H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d\lambda_i \otimes dx_i + dx_i \otimes d\lambda_i) \Big|_{x=-H_\lambda} = -\text{Hess}(H) = \sigma_2(X).$$

Оно совпадает с дисперсией случайного вектора X .

Таким образом, измерение случайных векторов приводит к следующим геометрическим структурам на $\Phi = W \times W^*$.

- симплектическая структура

$$\omega = d\lambda \wedge dx,$$

- псевдо-риманова структура

$$\kappa = d\lambda \cdot dx.$$

1.2. Структуры высших порядков

Помимо дисперсии случайных векторов также можно рассмотреть центральные моменты более высоких порядков, а именно, третьего и четвертого.

k -ый момент случайного вектора X определяется известным соотношением

$$m_k(X) = \int_{\Omega} X^{\otimes k} \rho dq. \quad (1.11)$$

В координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ его можно записать как

$$m_k(X) = \frac{Z_{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}}}{Z} d\lambda_{i_1} \otimes \dots \otimes d\lambda_{i_k}. \quad (1.12)$$

Здесь и далее будет использовано правило суммирования Эйнштейна. Формула (1.12) может быть получена индуктивно с помощью определения статистической суммы $Z(\lambda)$.

k -ый центральный момент σ_k — симметрическая k -форма на W :

$$S^k(W) \ni \sigma_k = \int_{\Omega} (X - m_1(X))^{\otimes k} \rho dq. \quad (1.13)$$

Применяя биномиальную теорему, получаем следующее соотношение между m_k и центральными моментами σ_k [80]:

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} m_i \cdot m_1^{\otimes(k-i)}, \quad (1.14)$$

где \cdot обозначает симметрическое произведение.

Дадим координатное описание центральных моментов порядков 3, 4 по аналогии с дисперсией.

Теорема 4. *На левандровом многообразии \widehat{L} третий центральный момент имеет следующее представление в координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*

$$\sigma_3 = -\frac{\partial^3 H}{\partial \lambda_{i_1} \dots \partial \lambda_{i_3}} d\lambda_{i_1} \otimes \dots \otimes d\lambda_{i_3}, \quad (1.15)$$

и в координатах (x_1, \dots, x_n)

$$\sigma_3 = -\frac{\partial^3 I}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_3}} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_3}, \quad (1.16)$$

Теорема 5. *На левандровом многообразии \widehat{L} третий центральный*

момент имеет следующее представление в координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\sigma_4 = -\frac{\partial^4 H}{\partial \lambda_{i_1} \cdots \partial \lambda_{i_4}} d\lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\lambda_{i_4} + 3\sigma_2 \cdot \sigma_2. \quad (1.17)$$

Формулы (1.15), (1.17) напрямую следуют из подстановки (1.12) в (1.14) и использовании соотношения $Z = \exp(-H)$, тогда как (1.16) получается из формулы (1.9), связывающей гамильтониан $H(\lambda)$ и прирост информации $I(x)$.

1.3. Взаимосвязь с термодинамикой

Любая равновесная термодинамическая система описывается двумя типами переменных: экстенсивными (объем, энергия, масса) и интенсивными (давление, температура, химический потенциал). Отличительное свойство экстенсивных величин заключается в их аддитивности при разделении термодинамической системы на совокупность подсистем. Также основной закон термодинамики (в частности, для систем типа газа), включающий первое и второе начало, утверждает, что дифференциальная форма

$$\theta = -dS + T^{-1}dE + pT^{-1}dV - \gamma T^{-1}dm \quad (1.18)$$

должна быть равна нулю. Здесь S — энтропия, E — внутренняя энергия, V — объем, m — масса, T и p — температура и давление соответственно, γ — химический потенциал. Положив $W_{int} = \mathbb{R}^3(p, T, \gamma)$ и $W_{ext} = \mathbb{R}^3(V, E, m)$, можно сделать вывод, что термодинамическое состояние — лежандрово многообразие $\widehat{L} \subset \mathbb{R} \times W_{int} \times W_{ext}$, на котором выполняется основной закон термодинамики, то есть $\theta|_{\widehat{L}} = 0$. Более того, форма (1.10) совпадает с (1.18), если положить

$$du = -dS, \quad (x_1, x_2, x_3) = (E, V, m), \quad (1.19)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-T^{-1}, -pT^{-1}, \gamma T^{-1}). \quad (1.20)$$

Следовательно, на поверхности \widehat{L} справедливо соотношение $S = -I + \alpha$, где α — константа. Это означает, что термодинамику можно рассматри-

вать как теорию измерения экстенсивных величин, а энтропия системы есть прирост информации с точностью до знака и аддитивной постоянной. Это, в свою очередь, означает, что принцип минимального прироста информации есть в точности то, что в термодинамике называют *принцип максимума энтропии*.

Как и в теории измерений, рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{R} \times W_{int} \times W_{ext} \rightarrow W_{int} \times W_{ext}$. Тогда ее ограничение на многообразии \widehat{L} дает лагранжево многообразии $L \subset W_{int} \times W_{ext}$, а $\Phi = W_{int} \times W_{ext}$ — симплектическое пространство со структурной формой

$$\omega = d\theta = d(T^{-1}) \wedge dE + d(pT^{-1}) \wedge dV - d(\gamma T^{-1}) \wedge dm.$$

Условие лагранжевости для многообразия L выражается как $\omega|_L = 0$.

Псевдо-римановы структуры, а также тензоры более высокого порядка, отвечающие высшим центральным моментам, возникающие в теории измерений случайных векторов, проявляются также и в термодинамике. Определим дифференциальную квадратичную форму κ на $\Phi = W_{int} \times W_{ext}$, используя (1.19) следующим образом:

$$\kappa = -d(T^{-1}) \cdot dE - d(pT^{-1}) \cdot dV + d(\gamma T^{-1}) \cdot dm,$$

и ее ограничение $\kappa|_L$ на лагранжево многообразии L должно быть положительно определенной формой, так же как и все моменты четных порядков, например σ_4 . Области, где форма $\kappa|_L$ положительно определена, соответствуют фазам среды, а условие для L быть римановым многообразием относительно формы $\kappa|_L$ есть условие термодинамической устойчивости. При этом условие положительной определенности σ_4 дает новую область допустимых состояний для газа Ван дер Ваальса.

1.4. Лежандровы многообразия газов

В этом разделе дается описание лежандровых многообразий для газов.

Выберем экстенсивные переменные (E, V, m) в качестве координат на

лежандровом многообразии \widehat{L} . Тогда на \widehat{L} энтропия является функцией $S(E, V, m)$. Поскольку энтропия — экстенсивная величина, то функция $S(E, V, m)$ однородная степени 1:

$$S(E, V, m) = ms \left(\frac{E}{m}, \frac{V}{m} \right).$$

Вводя удельные переменные $e = E/m$ — удельная внутренняя энергия, $v = V/m$ — удельный объем, $s(e, v)$ — удельная энтропия, мы получаем следующее выражение для контактной формы θ :

$$\theta = (-s + T^1 e + pT^{-1} v - \gamma T^{-1}) dm + (-ds + T^{-1} de + pT^{-1} dv) m,$$

на заданном лежандровом многообразии $\theta|_{\widehat{L}} = 0$, и, следовательно,

$$-ds + T^{-1} de + pT^{-1} dv = 0, \quad \gamma = e - Ts + pv.$$

Дифференциальная квадратичная форма κ в терминах удельных величин принимает вид

$$\kappa = -m (d(T^{-1}) \cdot de + d(pT^{-1}) \cdot dv),$$

и поскольку $m > 0$, условие положительности κ становится эквивалентным отрицательности формы $-m^{-1}\kappa$, которую мы продолжим обозначать κ :

$$\kappa = d(T^{-1}) \cdot de + d(pT^{-1}) \cdot dv. \quad (1.21)$$

Суммируя, мы получаем следующее описание термодинамических состояний газов. Рассмотрим контактное пространство (\mathbb{R}^5, θ) с координатами (s, e, v, p, T) и структурной формой

$$\theta = -ds + T^{-1} de + pT^{-1} dv.$$

Под термодинамическим состоянием будем понимать лежандрово мно-

гообразиие \widehat{L} , такое что $\theta|_{\widehat{L}} = 0$. Его можно задать функцией $S(e, v)$:

$$\widehat{L} = \left\{ s = S(e, v), p = \frac{S_v}{S_e}, T = \frac{1}{S_e} \right\}. \quad (1.22)$$

Для исключения удельной энтропии из рассмотрения мы используем проекцию $\pi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\pi(s, e, v, p, T) = (e, v, p, T)$. Ее ограничение на лежандрово многообразиие \widehat{L} дает лагранжево многообразиие $L \subset \mathbb{R}^4$, такое что $\omega|_L = 0$, где

$$\omega = d\theta = d(T^{-1}) \wedge de + d(pT^{-1}) \wedge dv$$

задает симплектическую структуру на $\mathbb{R}^4(e, v, p, T)$. Поскольку любая двумерная поверхность $L \subset (\mathbb{R}^4, \omega)$ может быть задана двумя функциями (уравнениями состояния)

$$L = \{f_1(e, v, p, T) = 0, f_2(e, v, p, T) = 0\},$$

то условие $\omega|_L = 0$ выражается как $[f_1, f_2] = 0$ на L , где $[f_1, f_2]$ — скобка Пуассона относительно симплектической формы ω :

$$[f_1, f_2] \omega \wedge \omega = df_1 \wedge df_2 \wedge \omega.$$

Выражение для скобки $[f_1, f_2]$ в координатах задается формулой:

$$[f_1, f_2] = \frac{1}{2} (pT (f_{1p}f_{2e} - f_{1e}f_{2p}) + T^2 (f_{1T}f_{2e} - f_{1e}f_{2T}) + T (f_{1v}f_{2p} - f_{1p}f_{2v})).$$

Предположим, что функции f_1 and f_2 заданы в привычной для термодинамики газов форме

$$f_1 = p - A(v, T), \quad f_2 = e - B(v, T). \quad (1.23)$$

Тогда уравнение $[f_1, f_2]|_L = 0$ принимает вид

$$(T^{-2}B)_v = (T^{-1}A)_T$$

и, следовательно, справедлива теорема:

Теорема 6. *Лагранжево многообразие L задано потенциалом Массье-Планка $\phi(v, T)$:*

$$p = RT\phi_v, \quad e = RT^2\phi_T, \quad (1.24)$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Лежандрово многообразие (1.22) восстанавливается из лагранжева (1.24) посредством решения переопределенной системы уравнений

$$T = \frac{1}{s_e}, \quad p = \frac{s_v}{s_e} \quad (1.25)$$

относительно $s(e, v)$, условием совместности которой является $[f, g]|_L = 0$.

Используя потенциал Массье-Планка, можно записать ограничение дифференциальной квадратичной формы (1.21) на L следующим образом:

$$R^{-1}\kappa = -(\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T) dT \cdot dT + \phi_{vv} dv \cdot dv,$$

и мы заключаем, что условия применимости модели термодинамического состояния имеют вид

$$\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T > 0, \quad \phi_{vv} < 0. \quad (1.26)$$

Используя (1.24) можно показать, что неравенства (1.26) эквивалентны

$$e_T > 0, \quad p_v < 0,$$

что является хорошо известным условием термодинамической устойчивости.

1.4.1. Особенности проекций лагранжевых многообразий и фазовые переходы

Исследуем особенности проекций лагранжевых многообразий газов L на пространство интенсивных переменных (p, T) и экстенсивных пе-

ременных (v, e) . Особенности первого типа соответствуют точкам, в которых дифференциальная 2-форма $dp \wedge dT$ вырождается и совпадает со множеством, где $\phi_{vv} = 0$. Особенности второго типа появляются в точках, где $de \wedge dv = 0$, или, эквивалентно, $\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T = 0$. Таким образом, множество, где лагранжево многообразие L имеет особенности, — в точности то множество, где вырождается дифференциальная квадратичная форма κ . Будем рассматривать такие лагранжевы многообразия, что (e, v) могут служить как глобальные координаты на них. Это означает, что L не имеет особенностей второго типа, и поскольку κ должна быть отрицательно определена, то неравенство $\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T > 0$ выполняется всюду на L . Области L , которые не имеют особенностей и где κ отрицательно определена, называются *допустимыми фазами*. Следовательно, если κ невырождена и отрицательно определена на всем многообразии L , и следовательно L также не имеет особенностей проекции на (p, T) , тогда термодинамическая система, соответствующая такому лагранжеву многообразию L имеет только одну фазу, в противном случае она имеет несколько фаз, разделенных друг от друга множеством, где κ неотрицательна, или, где $\phi_{vv} \geq 0$. В последнем случае термодинамическая система обладает таким свойством как *фазовый переход первого типа*.

Скачок из одной допустимой точки $(e_1, v_1) \in L$ в другую допустимую точку $(e_2, v_2) \in L$, сопровождаемый сохранением интенсивных величин (p, T) и удельным потенциалом Гиббса $\gamma = e - Ts + pv$, называется *фазовым переходом первого типа*.

Множество точек, где появляется фазовый переход, образует кривую на лагранжевом многообразии L , которая называется кривой сосуществования (бинодалью). Используя (1.24), можно получить следующие уравнения для кривой фазового перехода $\Gamma \subset \mathbb{R}^3(p, v, T)$:

$$\phi_v(v_2, T) = \frac{p}{RT}, \quad \phi_v(v_1, T) = \frac{p}{RT}, \quad (1.27)$$

$$\phi(v_2, T) - \phi(v_1, T) - v_2\phi_v(v_2, T) + v_1\phi_v(v_1, T) = 0. \quad (1.28)$$

Под *термодинамическим процессом* будем понимать контактный диф-

феоморфизм $\widehat{\Phi} = \mathbb{R} \times W_{int} \times W_{ext} = \mathbb{R}^5(s, p, T, v, e)$, сохраняющий лежандрово многообразие \widehat{L} . С инфинитезимальной точки зрения такое преобразование задается векторным полем X , то есть $L_X(\theta) \wedge \theta = 0$, где L_X — производная Ли вдоль векторного поля X . Контактные векторные поля однозначно определяются *производящими функциями* (см., например, [56]) и в термодинамическом случае имеют вид [29]:

$$X_f = T(pf_p + Tf_T)\partial_e - T f_p \partial_v + (f + Tf_T)\partial_s + T(f_v - pf_e)\partial_p - T(f_s + Tf_e)\partial_T,$$

где $f \in C^\infty(\widehat{\Phi})$ — производящая функция векторного поля X_f . Можно показать, что $L_{X_f}(f) = X_f(f) = f f_s$, и, следовательно, векторное поле X_f касается поверхности $\{f = 0\}$. Таким образом, для заданного лежандрова многообразия $\widehat{L} = \{f_1 = f_2 = f_3 = 0\}$ ограничение процесса X_f на \widehat{L} представляется как [29]

$$X_f = a_1 X_{f_1} + a_2 X_{f_2} + a_3 X_{f_3},$$

где a_j — функции на \widehat{L} . Используя (1.22), мы получаем, что ограничения Y_j векторных полей X_{f_j} на \widehat{L} есть

$$Y_1 = S_v S_e^{-2} \partial_e - S_e^{-1} \partial_v, \quad Y_2 = S_e^{-2} \partial_e, \quad Y_3 = 0. \quad (1.29)$$

1.4.2. Идеальный газ

Для идеальных газов лежандрово многообразие \widehat{L} задано уравнениями состояния

$$f_1 = pv - RT = 0, \quad f_2 = e - \frac{n}{2}RT, \quad f_3 = s - R \ln(e^{n/2}v), \quad (1.30)$$

где n — число степеней свободы молекулы.

Дифференциальная квадратичная форма κ на \widehat{L} имеет вид

$$\kappa = -\frac{nR}{2e^2} de \cdot de - \frac{R}{v^2} dv \cdot dv. \quad (1.31)$$

Она отрицательно определена на всем многообразии \widehat{L} .

Для анализа формы 4 порядка рассмотрим векторное поле на многообразии \widehat{L}

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial e} + x_2 \frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.32)$$

Условие $\sigma_4 > 0$ означает, что однородный полином степени 4 $P_2(x_1, x_2) = \sigma_4(X, X, X, X)$ от x_1 и x_2 положительно определен.

В случае идеального газа

$$P_2(x_1, x_2) = \frac{3n(n+4)}{4e^4} x_1^4 + \frac{3n}{v^2 e^2} x_1^2 x_2^2 + \frac{9}{v^4} x_2^4,$$

и условие положительности $P_2(x_1, x_2)$ выполняется всюду.

Векторные поля Y_1 и Y_2 имеют вид

$$Y_1 = -\frac{2ev}{nR} \partial_v, \quad Y_2 = -\frac{2e^2}{nR} \partial_e. \quad (1.33)$$

Задача оптимального управления для идеальных газов

Пусть термодинамическое состояние газа задано лежандровым многообразием \widehat{L} и выберем векторные поля Y_1 и Y_2 , заданные формулой (1.29) в качестве базиса в модуле векторных полей на \widehat{L} . Будем использовать обозначение $x = (e, v)$. Пусть $x^{(1)} = (e_1, v_1)$ и $x^{(2)} = (e_2, v_2)$ — две фиксированные точки в допустимой области на \widehat{L} . Пусть $l \subset \widehat{L}$ — интегральная кривая векторного поля $Y = u_1 Y_1 + u_2 Y_2$ и пусть $\alpha = p dv$ — 1-форма работы. Введем функционал качества J следующим образом:

$$J = \int_l \alpha. \quad (1.34)$$

Физический смысл J — работа, совершаемая газом вдоль кривой термодинамического процесса l . Требуется найти такой термодинамический процесс $Y = u_1 Y_1 + u_2 Y_2$, на котором функционал (1.34) достигает своего максимального значения. Вектор $u = (u_1, u_2)$ — вектор управляющих параметров. Если t — параметр на кривой l , то мы будем предполагать,

что $t = 0$ соответствует точке $x^{(1)}$, а $t = t_0$, где t_0 — заданное значение параметра t , соответствует $x^{(2)}$. Запишем векторное поле Y как

$$Y = Y^{(1)}(x, u)\partial_e + Y^{(2)}(x, u)\partial_v,$$

где коэффициенты $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ определяются с помощью (1.29).

Область допустимых управлений задается с помощью дифференциальной квадратичной формы κ . Физический смысл ее ограничения на лежандрово многообразии (с точностью до знака) — это дисперсия случайного вектора (e, v) . Мы ограничиваем относительную вариацию заданным положительным числом δ :

$$-\frac{\kappa(Y, Y)}{e^2} \leq \delta,$$

что приводит к неравенству

$$-\kappa(Y_1, Y_1)u_1^2 - 2\kappa(Y_1, Y_2)u_1u_2 - \kappa(Y_2, Y_2)u_2^2 \leq \delta e^2.$$

Таким образом, для заданной точки $x \in \widehat{L}$ граница ∂U области допустимых управлений U является эллипсом с центром в этой точке, полуоси которого, вообще говоря, зависят от точки x .

Все вышесказанное позволяет сформулировать задачу нахождения оптимального процесса Y в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Y^{(1)}(x, u), Y^{(2)}(x, u)), \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in U, \\ x(0) &= x^{(1)}, x(t_0) = x^{(2)}, \\ J &= \int_0^{t_0} \alpha(Y) dt \rightarrow \max_{u \in U}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Гамильтониан задачи (1.35) имеет вид

$$H(x, \lambda, u) = \alpha(Y) + \lambda_1 Y^{(1)}(x, u) + \lambda_2 Y^{(2)}(x, u), \tag{1.36}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ — множители Лагранжа.

Для идеальных газов векторные поля Y_1 и Y_2 выражаются с помощью (1.33), и векторное поле Y имеет вид

$$Y = -\frac{2ev}{nR}u_1\partial_v - \frac{2e^2}{nR}u_2\partial_e.$$

Следовательно, используя (1.31) для дифференциальной квадратичной формы κ в случае идеальных газов, мы получаем область допустимых управлений U :

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{4}{n^2R}u_1^2 + \frac{2}{nR}u_2^2 \leq \delta \right\},$$

и ее граница есть эллипс с постоянными полуосями.

Коммутатор векторных полей Y_1 и Y_2 имеет вид

$$[Y_1, Y_2] = \frac{2e}{nR}Y_1.$$

Дуальный базис порожден дифференциальными 1-формами

$$\xi_1 = -\frac{nR}{2ev}dv, \quad \xi_2 = -\frac{nR}{2e^2}de.$$

В соответствии с теоремой Ли-Бьянки (см., например, [56]), так как 1-форма ξ_2 точна, то можно ввести новые координаты (q_1, q_2) на \widehat{L} , такие что

$$q_1 = \frac{nR}{2e}, \quad q_2 = -\frac{nR}{2e} \ln v,$$

в которых формы ξ_1 и ξ_2 примут более простой вид:

$$\xi_1 = dq_2, \quad \xi_2 = dq_1.$$

Тогда обратное преобразование выражается следующим образом:

$$e = \frac{nR}{2q_1}, \quad v = \exp\left(-\frac{q_2}{q_1}\right). \quad (1.37)$$

В новых координатах (q_1, q_2) векторные поля Y_1 и Y_2 принимают более простой вид:

$$Y_1 = \partial_{q_2}, \quad Y_2 = \partial_{q_1} + \frac{q_2}{q_1} \partial_{q_2}.$$

Следовательно, гамильтониан (1.36) можно записать следующим образом:

$$H(q, \lambda, u) = -\frac{Ru_1}{q_1^2} + \lambda_1 u_2 + \lambda_2 \left(\frac{q_2 u_2}{q_1} + u_1 \right). \quad (1.38)$$

Поскольку гамильтониан (1.38) линеен относительно управляющих параметров (u_1, u_2) , он достигает экстремальных значений на границе ∂U . Пусть τ — параметр на ∂U . Тогда управляющие параметры (u_1, u_2) записываются как

$$u_1 = \frac{n\sqrt{R\delta}}{2} \cos \tau, \quad u_2 = \sqrt{\frac{nR\delta}{2}} \sin \tau,$$

а гамильтониан $H(q, \lambda, u)$ принимает вид

$$H(q, \lambda, \tau) = \frac{\sqrt{2nR\delta} q_1 (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) \sin \tau + \sqrt{R\delta} n (q_1^2 \lambda_2 - R) \cos \tau}{2q_1^2}. \quad (1.39)$$

Для того чтобы найти точки, в которых гамильтониан $H(q, \lambda, \tau)$ достигает максимума, нужно решить уравнение $\frac{\partial H}{\partial \tau} = 0$ относительно τ :

$$\sin \left(\tau + \arctan \left(\frac{\sqrt{2} q_1 (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)}{\sqrt{n} (R - q_1^2 \lambda_2)} \right) \right) = 0.$$

Его решение

$$\tau^*(q, \lambda) = \pi(2k + 1) - \arctan \left(\frac{\sqrt{2} q_1 (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)}{\sqrt{n} (R - q_1^2 \lambda_2)} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.40)$$

Подставляя корни (1.40) в (1.39), мы получаем следующее выражение

для гамильтониана $H(q, \lambda)$:

$$H(q, \lambda) = \frac{1}{2q_1^2} \sqrt{nR\delta (nq_1^4\lambda_2^2 + 2q_1^4\lambda_1^2 + 4q_1^3q_2\lambda_1\lambda_2 + 2q_1^2q_2^2\lambda_2^2 - 2Rnq_1^2\lambda_2 + R^2n)}. \quad (1.41)$$

Для нахождения оптимальных траекторий требуется решить гамильтонову систему

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{1,2}}, \quad \dot{\lambda}_{1,2} = -\frac{\partial H}{\partial q_{1,2}}, \quad (1.42)$$

в которой гамильтониан $H(q, \lambda)$ задается с помощью (1.41). Поскольку гамильтониан $H(q, \lambda)$ не зависит явно от параметра t , то он является интегралом системы (1.42). Более того, справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Гамильтонова система (1.42) обладает интегралом $G(q, \lambda) = q_1\lambda_2$, который находится в инволюции с гамильтонианом $H(q, \lambda)$ относительно скобки Пуассона на фазовом пространстве, то есть $[G, H] = 0$, где*

$$[G, H]\Omega \wedge \Omega = dG \wedge dH \wedge \Omega, \quad \Omega = dq \wedge d\lambda.$$

Таким образом, гамильтонова система (1.42) обладает двумя коммутирующими интегралами, и, следовательно, интегрируема в смысле Лиувилля.

Для нахождения решения системы (1.42) мы используем метод введения переменных действие-угол (см., например, [44]), в которых гамильтонова система приобретает наиболее простой вид. Инвариантное многообразие M системы (1.42) задается уровнями H_1 и H_2 его интегралов:

$$M = \{(q, \lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid H(q, \lambda) = H_1, G(q, \lambda) = H_2\}.$$

Выберем (q_1, q_2) в качестве локальных координат на M . Тогда при неотрицательном $D = 2R\delta n (4H_1^2q_1^4 - \delta Rn^2(R - H_2q_1)^2)$ будем иметь

$$\lambda_1 = \frac{-2H_2R\delta nq_2 \pm \sqrt{D}}{2Rn\delta q_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{H_2}{q_1}.$$

Заметим, что D является полиномом четвертой степени по q_1 . Поскольку

D может менять знак в зависимости от значений H_1 и H_2 , а многообразие M определено там, где $D \geq 0$, то в зависимости от числа вещественных корней полинома D многообразие M может иметь различное, но не превышающее трех, число компонент связности. В случае, когда полином D имеет четыре различных вещественных корня, M трехсвязно, если D имеет два различных вещественных корня, то M двусвязно, если у D единственный вещественный корень или вещественных корней нет, то многообразие M односвязно.

Теорема 8. *Многообразие M имеет три компоненты связности, если уровни интегралов H_1 и H_2 связаны как*

$$n\sqrt{\delta}H_2^2 - 8H_1\sqrt{R} \geq 0. \quad (1.43)$$

В остальных случаях многообразие M двусвязно.

Доказательство. Из формулы (1.41) видно, что $H_1 > 0$. Сделаем замену переменных, в результате которой избавимся от размерных констант, входящих в D :

$$H_1 \mapsto R^{3/2}n\sqrt{\delta}H_1, \quad H_2 \mapsto H_2R, \quad q_1 \mapsto \frac{q_1}{\sqrt{2H_1}}.$$

Тогда условие $D = 0$ будет эквивалентно уравнению

$$q_1^4 - (1 - \mu q_1)^2 = 0, \quad (1.44)$$

где $\mu = H_2/\sqrt{2H_1}$.

Из (1.44) находим выражения для корней полинома D :

$$q_{1,2}^* = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 4}, \quad q_{3,4}^* = \frac{\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4}. \quad (1.45)$$

Видно, что два вещественных корня $q_{1,2}^*$ существуют всегда, а другие два $q_{3,4}^*$ являются вещественными только при $\mu^2 \geq 4$. Следовательно, при условии $\mu^2 \geq 4$ число компонент связности три, а в остальных случаях — две.

Возвращаясь с помощью обратной замены к исходным переменным, получаем соотношение (1.43). \square

Множество Σ особенностей проекции M на плоскость (q_1, q_2) задано как $\Sigma = \cup \Sigma_j$, где

$$\Sigma_j = \left\{ (q_1^{(j)}, q_2) \mid q_2 \in \mathbb{R}, D(q_1^{(j)}) = 0 \right\}.$$

Таким образом, для заданной начальной точки $(q^{(0)}, \lambda^{(0)}) \in M$ областью достижимости являются все точки, принадлежащие той же компоненте связности, что и $(q^{(0)}, \lambda^{(0)})$.

В качестве базиса модуля векторных полей на M выберем два гамильтоновых поля X_H и X_G , где

$$X_\Psi = \Psi_{\lambda_1} \partial_{q_1} + \Psi_{\lambda_2} \partial_{q_2} - \Psi_{q_1} \partial_{\lambda_1} - \Psi_{q_2} \partial_{\lambda_2}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти две замкнутые формы \varkappa_1 и \varkappa_2 на M , дуальные к векторным полям X_H и X_G . Тогда их потенциалы Ω_1 и Ω_2 будут служить углами, а интегралы $H(q, \lambda)$ и $G(q, \lambda)$, записанные в терминах углов, — действиями.

Теорема 9. *Переменные типа «угол» имеют следующий вид:*

$$\Omega_1 = \pm \int \frac{4H_1 q_1^2 dq_1}{\sqrt{D}}, \quad \Omega_2 = \frac{q_2}{q_1} \pm \int \frac{n^2 R \delta(R - H_2 q_1) dq_1}{q_1 \sqrt{D}}. \quad (1.46)$$

Гамильтонова система (1.42) эквивалентна системе

$$\dot{\Omega}_1 = 1, \quad \dot{\Omega}_2 = 0.$$

Таким образом, решение гамильтоновой системы (1.42) в части переменных (q_1, q_2) выглядит следующим образом:

$$\Omega_1 = t + \alpha_1, \quad \Omega_2 = \alpha_2, \quad (1.47)$$

где Ω_1 и Ω_2 задаются соотношениями (1.46), а α_1 и α_2 — константы,

определяемые с помощью условий на правом и левом концах кривой l . С помощью обратного преобразования (1.37) можно записать решение (1.47) в терминах исходных термодинамических переменных (e, v) . Наличие знака \pm в выражениях не играет определяющего значения. Поскольку его происхождение — квадратное уравнение, из которого находится λ_1 , то для заданных начального и конечного состояний существуют две различные траектории в фазовом пространстве, отвечающие различным инвариантным многообразиям, которые проектируются в одну и ту же траекторию в пространстве состояний. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться только знаком $+$ в выражениях (1.46).

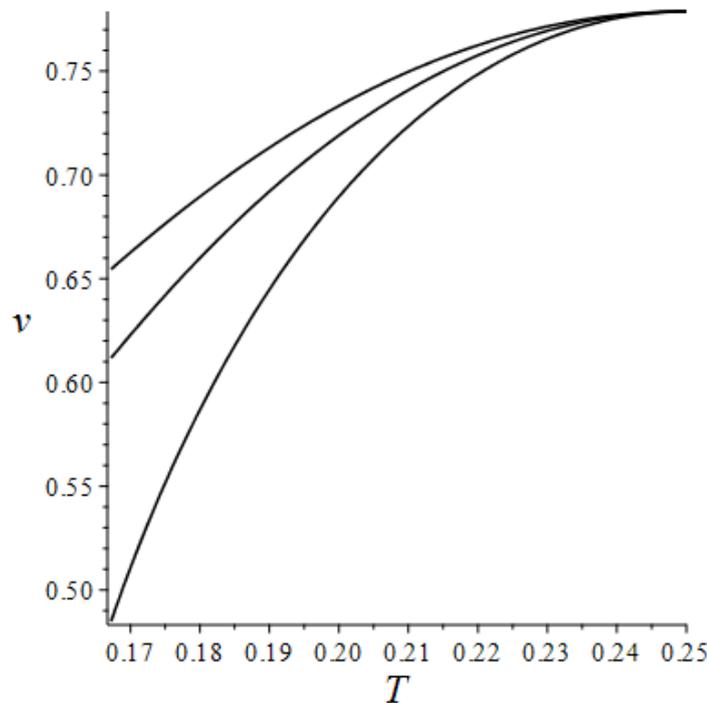


Рис. 1.1: Оптимальные траектории для идеального газа

Траектории гамильтоновой системы, отвечающие начальной точке $T = 0.25, v = 0.78$ и различным конечным точкам, в случае одноатомного газа ($n = 3$) представлены на Рис. 1.1. Этим траекториям отвечают процессы перевода термодинамической системы из начального состояния в конечные.

Пусть (x_1, x_2) — начальное состояние, а (y_1, y_2) — конечное, при этом время t_0 фиксировано, и, не ограничивая общности, можно положить

$t_0 = 1$. Запишем квадратуры (1.47):

$$1 = \int_{x_1}^{y_1} \frac{4H_1 q_1^2}{\sqrt{2R\delta n(4H_1^2 q_1^4 - \delta R n^2 (R - H_2 q_1)^2)}}, \quad (1.48)$$

$$0 = \frac{y_2}{y_1} - \frac{x_2}{x_1} + \int_{x_1}^{y_1} \frac{n^2 \sqrt{R\delta} (R - H_2 q_1)}{q_1 \sqrt{2n(4H_1^2 q_1^4 - \delta R n^2 (R - H_2 q_1)^2)}} \quad (1.49)$$

При масштабном преобразовании

$$H_2 \mapsto H_2 R, \quad H_1 \mapsto R^{3/2} n \sqrt{\delta} H_1, \quad q_1 \mapsto \frac{q_1}{\sqrt{2H_1}}$$

квадратуры (1.48) преобразуются к более простому виду

$$1 = \int_{\sqrt{2H_1}x_1}^{\sqrt{2H_1}y_1} \frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{q_1^4 - (1 - \mu q_1)^2}}, \quad (1.50)$$

$$0 = \frac{y_2}{\sqrt{2H_1}y_1} - \frac{x_2}{\sqrt{2H_1}x_1} + \int_{\sqrt{2H_1}x_1}^{\sqrt{2H_1}y_1} \frac{1 - \mu q_1}{q_1 \sqrt{q_1^4 - (1 - \mu q_1)^2}} dq_1, \quad (1.51)$$

где $\mu = H_2/\sqrt{2H_1}$.

Теорема 10. Для любого начального состояния (x_1, x_2) , где $x_1 > 0$ и любого конечного состояния (y_1, y_2) , где $y_1 > 0$ существуют константы $\mu \in \mathbb{R}$ и $H_1 > 0$, такие что состояние (y_1, y_2) достигается из состояния (x_1, x_2) за конечное время t_0 , то есть динамическая система (1.35) является управляемой.

Доказательство. Запишем квадратуру (1.48):

$$t_0 = \int_{\sqrt{2H_1}x_1}^{\sqrt{2H_1}y_1} \frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{q_1^4 - (1 - \mu q_1)^2}}. \quad (1.52)$$

Несложный анализ показывает, что в области $q_1 > 0$ корни полинома

$\widehat{D} = q_1^4 - (1 - \mu q_1)^2$ связаны неравенством

$$0 < q_1^*(\mu) < q_4^*(\mu) \leq q_3^*(\mu),$$

причем $q_2^*(\mu) < 0$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$, а корни q_3^* , q_4^* существуют только при $\mu \geq 2$. Для определенности будем считать, что $y_1 > x_1$. Для того чтобы существовала траектория из x_1 в y_1 , нужно, чтобы \widehat{D} не обращался в нуль на множестве $[\sqrt{2H_1}x_1, \sqrt{2H_1}y_1]$, и, кроме того, значения $\sqrt{2H_1}x_1$ и $\sqrt{2H_1}y_1$ принадлежали области, где $\widehat{D} > 0$. Для этого необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{2H_1}z_1 > q_1^*(\mu), \quad \mu \in (-\infty, 2), \\ \sqrt{2H_1}z_1 > q_3^*(\mu), \quad \text{либо} \quad q_1^*(\mu) < \sqrt{2H_1}z_1 < q_4^*(\mu), \quad \mu \in [2, +\infty), \end{aligned}$$

где z_1 — либо x_1 , либо y_1 . Соответствующие области для z_1 показаны на Рис. 1.2.

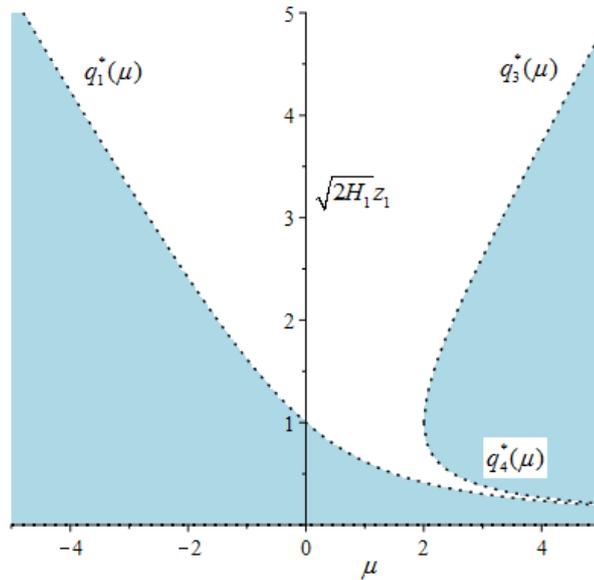


Рис. 1.2: Области допустимых x_1 и y_1

Пусть заданы произвольные $x_1 > 0$ и $y_1 > 0$. Нужно подобрать константу $H_1 > 0$ так, чтобы для точек пересечения μ_2^* и μ_3^* с кривыми $\sqrt{2H_1}y_1 = q_4^*(\mu)$ и $\sqrt{2H_1}x_1 = q_1^*(\mu)$ были связаны соотношением $\mu_2^* \geq \mu_3^*$. Тогда найдется такое $\mu^* \in [\mu_3^*, \mu_2^*]$, что на промежутке $[\sqrt{2H_1}x_1, \sqrt{2H_1}y_1]$

нет особенностей у подынтегральной функции в (1.52). Эти рассуждения графически проиллюстрированы на Рис. 1.3.

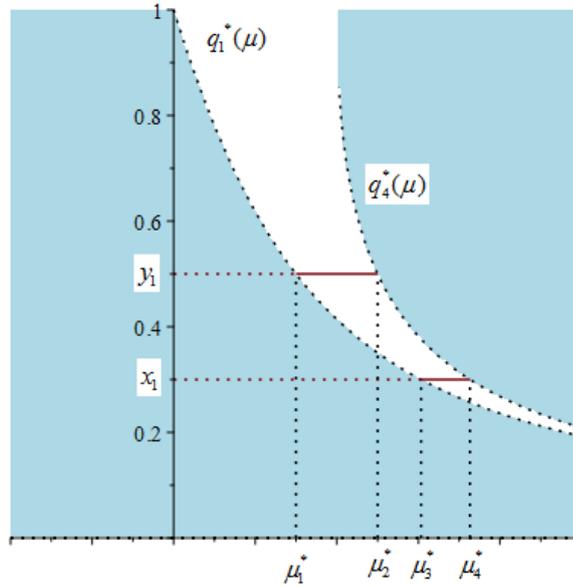


Рис. 1.3: Соотношения между μ_2^* и μ_3^*

Найдем μ_2^* и μ_3^* .

$$\sqrt{2H_1}x_1 = q_1^*(\mu) \implies \mu_3^* = \frac{1 - 2H_1x_1^2}{x_1\sqrt{2H_1}},$$

$$\sqrt{2H_1}y_1 = q_4^*(\mu) \implies \mu_2^* = \frac{1 + 2H_1y_1^2}{y_1\sqrt{2H_1}},$$

откуда следует, что для выполнения неравенства $\mu_3^* \leq \mu_2^*$, нужно выбрать H_1 , удовлетворяющее условию

$$H_1 \geq \frac{y_1 - x_1}{2x_1y_1(x_1 + y_1)} > 0.$$

Видно, что по заданным $0 < x_1 < y_1$ такое H_1 всегда найдется.

Таким образом, система управляема. \square

Доказанная теорема не только говорит о том, что система управляема, но и дает конструктивный способ оценки значений констант H_1 и μ ,

для которых заданные значения (x_1, y_1) принадлежат одной компоненте связности инвариантного многообразия M , а также с помощью (1.52) позволяет оценить соответствующее время достижения состояния y_1 из x_1 .

1.4.3. Газ Ван дер Ваальса

Модель Ван дер Ваальса исторически первая, которая учитывает фазовые переходы типа газ-жидкость. Термическое уравнение состояния имеет вид:

$$f(e, v, p, T) = p - \frac{RT}{v - b} + \frac{a}{v^2},$$

где a и b — константы, соответствующие взаимодействию частиц и их объему. Заметим, что в случае $a = 0$ и $b = 0$ получается уравнение состояния идеального газа.

Для нахождения второго уравнения состояния положим $g(e, v, p, T) = e - B(v, T)$, возьмем скобку Пуассона $[f, g]$. Поскольку она должна обращаться в ноль на лагранжевой поверхности, то получаем следующее уравнение на функцию $B(v, T)$:

$$v^2 B_v - a = 0,$$

из которого следует, что $B(v, T) = F(T) - a/v$. Поскольку в случае $a = 0$ и $b = 0$ получается идеальный газ, то калорическое уравнение состояния газа Ван дер Ваальса имеет вид:

$$g(e, v, p, T) = e - \frac{nRT}{2} + \frac{a}{v}.$$

Решая систему (1.25) для газа Ван дер Ваальса, получаем (с точностью до аддитивной постоянной)

$$s(v, T) = R \ln \left(T^{n/2} (v - b) \right) + \frac{Rn}{2}.$$

Потенциал Массье-Планка имеет вид

$$\phi(v, T) = \ln \left(T^{n/2} (v - b) \right) + \frac{a}{vRT}.$$

Дифференциальная квадратичная форма κ для газов Ван дер Ваальса имеет вид

$$\kappa = -\frac{Rn}{2T^2} dT \cdot dT - \frac{v^3 RT - 2a(v - b)^2}{v^3 T (v - b)^2} dv \cdot dv.$$

Первая компонента κ отрицательна, тогда как вторая может менять знак. Следовательно, лагранжево многообразие имеет особенности проекции на плоскость (p, T) . Кривая в координатах (T, v) , на которой κ меняет знак, также называемая *спинодалью*, дается соотношением:

$$T = \frac{2a(v - b)^2}{Rv^3}.$$

Эта функция имеет максимум в точке $v_{\text{crit}} = 3b$ и он равен $T_{\text{crit}} = 8a/27Rb$. Температура T_{crit} называется *критической температурой*, и если $T > T_{\text{crit}}$, то дифференциальная квадратичная форма κ отрицательна.

Введем масштабное контактное преобразование

$$T \mapsto \frac{T}{T_{\text{crit}}}, \quad v \mapsto \frac{v}{v_{\text{crit}}}, \quad p \mapsto \frac{p}{p_{\text{crit}}}, \quad e \mapsto \frac{e}{e_{\text{crit}}}, \quad s \mapsto \frac{s}{s_{\text{crit}}},$$

где $T_{\text{crit}}, v_{\text{crit}}, p_{\text{crit}}, e_{\text{crit}}, s_{\text{crit}}$ — критические параметры газа Ван дер Ваальса:

$$T_{\text{crit}} = \frac{8a}{27Rb}, \quad v_{\text{crit}} = 3b, \quad p_{\text{crit}} = \frac{a}{27b^2}, \quad e_{\text{crit}} = \frac{a}{9b}, \quad s_{\text{crit}} = \frac{3R}{8},$$

тогда, мы получаем редуцированные уравнения в новых безразмерных координатах, которые мы продолжим обозначать p, T, e, v :

$$p = \frac{8T}{3v - 1} - \frac{3}{v^2}, \quad e = \frac{4n}{3}T - \frac{3}{v}.$$

Можно показать, что энтропия и потенциал Масье-Планка имеют следующий вид:

$$\phi = \ln \left(T^{n/2} (3v - 1) \right) + \frac{9}{8vT}, \quad s = \ln \left(T^{4n/3} (3v - 1)^{8/3} \right), \quad (1.53)$$

Дифференциальная квадратичная форма κ в безразмерных переменных имеет вид:

$$\kappa = -\frac{Rn}{2} \frac{dT^2}{T^2} - \frac{9R(4Tv^3 - 9v^2 + 6v - 1)}{4Tv^3(3v - 1)^2} dv^2.$$

Спинодаль вместе с кривой сосуществования (кривой фазового перехода) в координатах (p, T) для газа Ван дер Ваальса представлена на Рис. 1.4. Уравнения для кривой фазового перехода имеют вид:

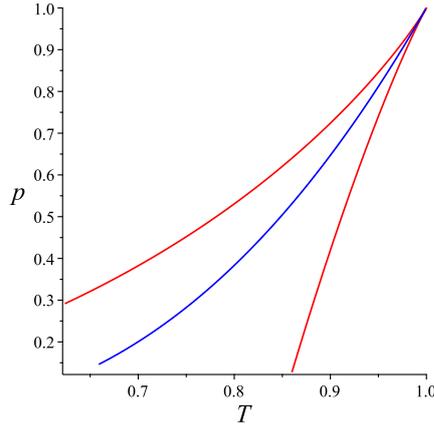


Рис. 1.4: Спинодаль (красная) и кривая сосуществования (синяя) для газа Ван дер Ваальса.

$$\frac{3p}{8T} = \frac{3}{3v_{1,2} - 1} - \frac{9}{8v_{1,2}^2 T},$$

$$\frac{(3v_1 - 1)(3v_2 - 1)(v_1 + v_2)}{v_1 - v_2} \ln \left(\frac{3v_2 - 1}{3v_1 - 1} \right) = 3(v_1 + v_2 - 6v_1v_2),$$

и кривая фазового перехода вместе со спинодалью для газа Ван дер Ваальса в координатах (p, v) показана на Рис. 1.5.

Обе кривые на лагранжевом многообразии газа Ван дер Ваальса показаны на Рис. 1.6. Область слева от кривой фазового перехода соот-

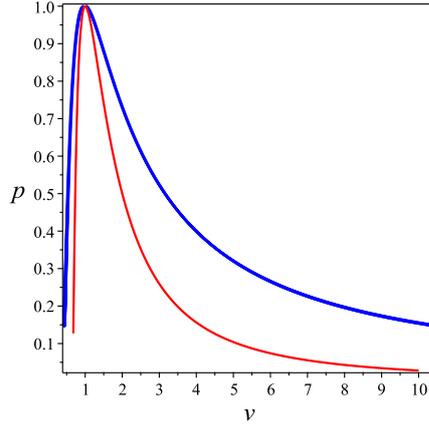


Рис. 1.5: Спинодаль (красная) и кривая сосуществования (синяя) для газа Ван дер Ваальса.

ветствует жидкой фазе, справа — газовой фазе. Область внутри кривой фазового перехода соответствует влажному пару, или конденсации газа, область между спинодалью и кривой фазового перехода соответствует допустимым термодинамическим состояниям, но очень нестабильным. Слева такая область называется *перегретой жидкостью*, а справа — *переохлажденным газом*.

Форма 4 порядка σ_4 для газа Ван дер Ваальса в координатах (e, v) можно получить, подействовав на (1.17) обратным преобразованием Лежандра:

$$(\lambda_1, \lambda_2, H, H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}) \mapsto (I_e, I_v, I - eI_e - vI_v, -e, -v),$$

где $I(e, v) = -S(e, v)$ — энтропия газа Ван дер Ваальса.

Вычисляя значение формы $\sigma_4(X, X, X, X)$ на четверке векторных полей (1.32), приходим к полиному 4 степени вида

$$P_2(x_1, x_2) = x_1^4 + px_1^2x_2^2 + qx_1x_2^3 + rx_2^4, \quad (1.54)$$

где p, q, r — функции переменных (e, v) . Для определения условий положительности полинома (1.54), воспользуемся следующим критерием [79]:

Теорема 11. *Необходимыми и достаточными условиями положитель-*

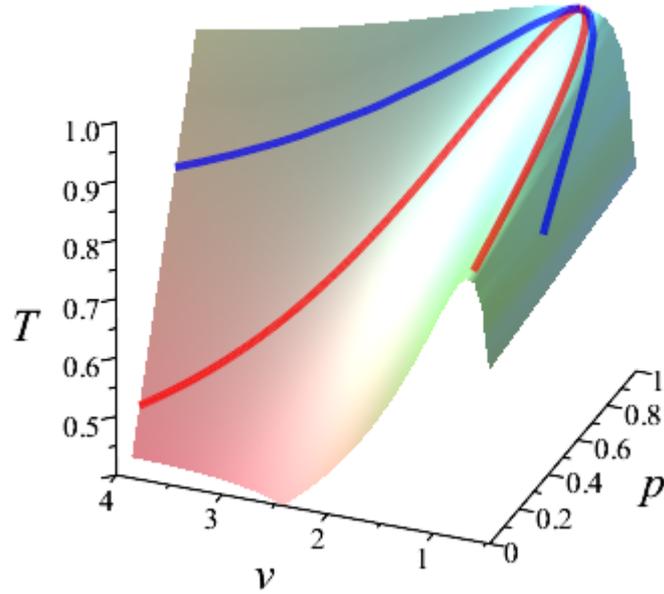


Рис. 1.6: Лагранжево многообразие газа Ван дер Ваальса вместе со спиноподалью (красная) и кривой фазового перехода (синяя).

ной определенности формы (1.54) является система неравенств:

$$p > -2\sqrt{r}, \quad q^2 < \frac{8}{3}pr + \frac{2}{27} \left(\sqrt{(p^2 + 12r)^3} - p^3 \right). \quad (1.55)$$

Неравенства (1.55) задают область допустимых состояний газа для газа Ван дер Ваальса на плоскости (e, v) , или, выразив внутреннюю энергию e через температуру T и удельный объем v , на плоскости (T, v) . Из Рис. 1.7 видно, кривые вырождения для форм σ_2 и σ_4 отличаются. А именно, критическая точка $(T_{\text{crit}}, v_{\text{crit}}) = (1, 1)$ не принадлежит области, где обе формы σ_2 и σ_4 положительно определены. Вместо этого появляется новая критическая точка, которая является максимумом кривой, разделяющей области, где $\sigma_4 > 0$ и $\sigma_4 < 0$. Заметим, что эта кривая такой же формы, что и кривая, разделяющая области, где $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 < 0$. Это означает, что учет формы 4 порядка дает более точное условие применимости модели Ван дер Ваальса по сравнению с традиционным рассмотрением, учитывающим только σ_2 .

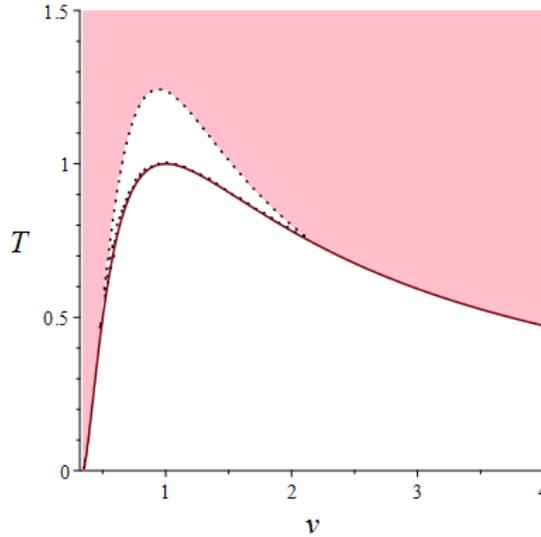


Рис. 1.7: Допустимая область для газа Ван дер Ваальса, $n = 3$.

1.4.4. Газ Пенга-Робинсона

Еще одна важная модель реальных газов — модель Пенга-Робинсона, предложенная в [77]. Она оказалась эффективной при описании углеводородов. Первое уравнение состояния имеет следующий вид:

$$f(p, T, e, v) = p - \frac{RT}{v - b} + \frac{a}{(v + b)^2 - 2b^2},$$

где константы a и b соответствуют взаимодействию частиц и их объему, так же как и в модели Ван дер Ваальса. Условие совместности приводит к калорическому уравнению состояния:

$$g(p, T, e, v) = e - \frac{nRT}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4b} \ln \left(\frac{v + b - \sqrt{2}b}{v + b + \sqrt{2}b} \right).$$

Воспользуемся контактным масштабным преобразованием

$$p \mapsto \frac{a}{b^2}p, \quad T \mapsto \frac{a}{bR}T, \quad e \mapsto \frac{a}{b}e, \quad v \mapsto bv, \quad s \mapsto Rs.$$

Редуцированные уравнения состояния Пенга-Робинсона будут иметь вид:

$$p = \frac{T}{v-1} - \frac{1}{(v+1)^2 - 2}, \quad e = \frac{nT}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{v+1-\sqrt{2}}{v+1+\sqrt{2}} \right),$$

$$s = \ln \left(T^{n/2}(v-1) \right).$$

Потенциал Массье-Планка ϕ для газа Пенга-Робинсона:

$$\phi(v, T) = \ln \left(T^{n/2}(v-1) \right) - \frac{\sqrt{2}}{4T} \ln \left(\frac{(3-2\sqrt{2})(v\sqrt{2}+v-1)}{v\sqrt{2}-v+1} \right).$$

Дифференциальная квадратичная форма κ имеет вид

$$R^{-1}\kappa = -\frac{n}{2T^2}dT \cdot dT - \frac{Tv^4 + 2(2T-1)v^3 + 2(T+1)v^2 - 2(2T-1)v + T - 2}{T(v-1)^2(v^2+2v-1)^2}dv \cdot dv.$$

Следовательно, кривая особенностей проекции лагранжева многообразия газа Пенга-Робинсона на пространство интенсивных переменных дается равенством:

$$T = \frac{2(v+1)(v-1)^2}{(v^2+2v-1)^2}.$$

Как и в случае газов Ван дер Ваальса, существует критическая точка $(T_{\text{crit}}, v_{\text{crit}})$, такая что если $T > T_{\text{crit}}$, то дифференциальная квадратичная форма κ отрицательно определена для всех v .

Теорема 12. *Критическая температура для газов Пенга-Робинсона T_{crit} и соответствующий критический объем v_{crit} определяются следующим образом:*

$$v_{\text{crit}} = 1 + 2(4 + 2\sqrt{2})^{-1/3} + (4 + 2\sqrt{2})^{1/3}, \quad T_{\text{crit}} = \frac{2(v_{\text{crit}}+1)(v_{\text{crit}}-1)^2}{(v_{\text{crit}}^2+2v_{\text{crit}}-1)^2}.$$

Кривая фазового перехода для газов Пенга-Робинсона представлена на Рис. 1.8 в координатах (p, v, T) , и она имеет аналогичную модели Ван дер Ваальса форму.

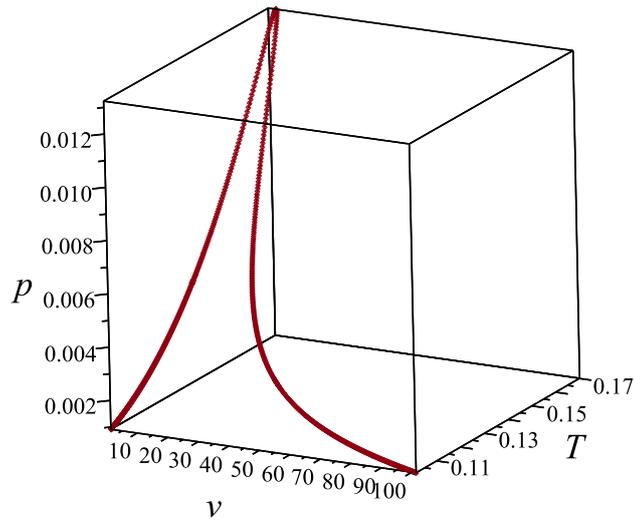


Рис. 1.8: Кривая сосуществования для газов Пенга-Робинсона.

1.4.5. Газ Редлиха-Квонга

Следующая рассматриваемая модель реальных газов — модель Редлиха-Квонга. Она была предложена в [78] и стала активно использоваться для описания процессов фильтрации. Термическое уравнение состояния для газов Редлиха-Квонга имеет вид:

$$f(p, T, v, e) = p - \frac{RT}{v - b} + \frac{a}{\sqrt{T}v(v + b)}. \quad (1.56)$$

Вычисляя скобку Пуассона $[f, g]|_L$, где $g(e, v, p, T) = e - B(v, T)$, получается следующее уравнение на $B(v, T)$:

$$3a - 2v\sqrt{T}(v + b)B_v = 0,$$

которое имеет решение вида

$$B(v, T) = F(T) + \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(\frac{v}{v + b} \right).$$

Снова, $F(T)$ нужно положить равной $F(T) = nRT/2$, и лагранжево многообразиие газов Редлиха-Квонга дается (1.56) вместе с

$$g(p, T, v, e) = e - \left(\frac{nRT}{2} + \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(\frac{v}{v+b} \right) \right). \quad (1.57)$$

Решая уравнение на удельную энтропию s , получаем

$$s(v, T) = \frac{Rn}{2} \ln T + R \ln(v-b) + \frac{a}{2bT^{3/2}} \ln \left(\frac{v}{v+b} \right). \quad (1.58)$$

Таким образом, лежандрово многообразиие для газа Редлиха-Квонга \widehat{L} определяется с помощью (1.56), (1.57), (1.58).

Контактное масштабное преобразование

$$p \mapsto \left(\frac{Ra^2}{b^5} \right)^{1/3} p, \quad T \mapsto \left(\frac{a}{Rb} \right)^{2/3} T, \quad v \mapsto bv, \quad e \mapsto \left(\frac{Ra^2}{b^2} \right)^{1/3} e, \quad s \mapsto Rs$$

дает редуцированные уравнения состояния:

$$p = \frac{T}{v-1} - \frac{1}{\sqrt{T}v(v+1)}, \quad e = \frac{nT}{2} + \frac{3}{2\sqrt{T}} \ln \left(\frac{v}{v+1} \right), \quad (1.59)$$

$$s = \ln \left(T^{n/2}(v-1) \right) + \frac{1}{2T^{3/2}} \ln \left(\frac{v}{v+1} \right). \quad (1.60)$$

Потенциал Масье-Планка имеет вид

$$\phi(v, T) = \ln \left(T^{n/2}(v-1) \right) - \frac{1}{T^{3/2}} \ln \left(\frac{v}{v+1} \right) + \ln \left(b \left(\frac{a}{Rb} \right)^{n/3} \right).$$

Дифференциальная квадратичная форма κ есть

$$\begin{aligned} \kappa R^{-1} = & - \left(\frac{n}{2T^2} + \frac{3}{4T^{7/2}} \ln(1+v^{-1}) \right) dT \cdot dT \\ & - \frac{v^2(v+1)^2 T^{3/2} - 2v^3 + 3v^2 - 1}{T^{3/2}(v+1)^2 v^2 (v-1)^2} dv \cdot dv. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае газов Редлиха-Квонга первая компонента диффе-

ренциальной квадратичной формы κ зависит от удельного объема v . Но поскольку давление p и температура T предполагаются положительными, то из (1.59) следует, что только $v > 1$ имеют физический смысл, и следовательно упомянутая компонента отрицательно определена, и проекция лагранжева многообразия для газов Редлиха-Квонга на (e, v) не имеет особенностей.

1.5. Основные результаты главы

1. Решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой и построено ее решение в квадратурах. Установлены условия, при которых инвариантное многообразие гамильтоновой системы имеет различное число компонент связности. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы.
2. Исследованы термодинамические лагранжевы и лежандровы многообразия различных газов, таких как газ Ван дер Ваальса, газ Пенга-Робинсона, газ Редлиха-Квонга. Получены области фазового перехода, особенности проекции термодинамических лагранжевых и лежандровых многообразий на пространство интенсивных переменных.
3. Получена новая область допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса, вычисленная с помощью формы 4-го порядка. Полученная область отличается от ранее известной, рассчитываемой с помощью формы 2-го порядка, в области критической точки.

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Результаты этой главы опубликованы в работах [87–89, 97, 98, 100].

2.1. Постановка задачи и общее решение

Термодинамика реальных газов, обсуждавшаяся в предыдущей главе, формирует основу для изучения различных газовых течений, поскольку уравнения, описывающие динамику сред, существенно зависят от их термодинамических свойств. В этой главе формулируется постановка задачи стационарной фильтрации газов в пористых средах, дается ее полное решение и приводится его иллюстрация на конкретных примерах.

Система уравнений, описывающих однокомпонентную фильтрацию газов в пористых средах, состоит из следующих уравнений: [4–6]

1. закон Дарси

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(x) = (u_1, u_2, u_3)$ — поле скоростей, $x \in D \subset \mathbb{R}^3$, $p(x)$ — давление, $k = k(v, T)$ и $\mu = \mu(v, T)$ коэффициенты проницаемости и вязкости соответственно, которые предполагаются функциями состояния среды.

2. Закон сохранения массы

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2)$$

где $\rho(x) = v^{-1}(x)$ — плотность среды.

В дополнение к (2.1) и (2.2) предполагается адиабатичность течения, то есть удельная энтропия s сохраняется вдоль траекторий векторного поля \mathbf{u} :

$$(\mathbf{u}, \nabla s) = 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что система (2.1) вместе с (2.2), (2.3) является неполной. Это

ожидаемо, поскольку среда, для которой написаны уравнения (2.1)-(2.3) еще не определена. Это может быть сделано с помощью уравнений состояния (лежандрова многообразия)

$$p = RT\phi_v, \quad e = RT^2\phi_T, \quad s = R(\phi + T\phi_T), \quad (2.4)$$

где $\phi(v, T)$ задан. Таким образом, система (2.1), (2.2)-(2.4) становится полной.

Использование уравнений состояния вместе с уравнениями, описывающими динамику, не только делает систему полной, но и позволяет исследовать, как термодинамические свойства, в особенности фазовые переходы, появляются в решениях уравнений. Действительно, имея решения уравнений, можно получить термодинамические функции как функции в области D и следовательно кривые фазовых переходов для разных газов можно перенести с лежандрова многообразия на область D . Это позволяет определить местоположения различных фаз среды, а также точки в области D , где появляются фазовые переходы.

Предположим, что область D содержит некоторое количество источников, расположенных в точках $a_i \in D$ и имеющих интенсивности J_i . Будем обозначать источник как пару (a_i, J_i) , $i = \overline{1, N}$. Тогда D можно представить как объединение областей $D = \cup D_k$, где каждая D_k содержит источники с общей удельной энтропией s_0 , тогда как фильтрационные потоки в D_k независимы. Следовательно, можно ограничиться случаем $s(x) = s_0$. Также можно сказать, что газ участвует в адиабатическом процессе.

Для фильтрационных течений, описываемых законом Дарси, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть термодинамическое состояние газа задано лежандровым многообразием \widehat{L} и $l \subset \widehat{L}$ — термодинамический процесс. Тогда уравнения фильтрации (2.1), (2.2), (2.4) эквивалентны задаче Дирихле

$$\Delta(Q(\tau)) = 0, \quad \tau|_{\partial D} = \tau_0,$$

где

$$Q(\tau) = - \int v^{-1}(\tau) \frac{k(\tau)}{\mu(\tau)} p'(\tau) d\tau,$$

τ — параметр на l и Δ — оператор Лапласа.

Доказательство. Пусть τ — параметр на заданном процессе l . Тогда все термодинамические величины можно выразить в терминах τ , в частности,

$$p = p(\tau), \quad v = v(\tau), \quad T = T(\tau), \quad k = k(\tau), \quad \mu = \mu(\tau). \quad (2.5)$$

Из (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div}(v^{-1}\mathbf{u}) &= \operatorname{div} \left(v^{-1}(\tau) \left(-\frac{k(\tau)}{\mu(\tau)} \nabla p \right) \right) = \\ &= \operatorname{div} \left(v^{-1}(\tau) \left(-\frac{k(\tau)}{\mu(\tau)} p'(\tau) \nabla \tau \right) \right) = \\ &= \operatorname{div} (Q'(\tau) \nabla \tau) = \operatorname{div} (\nabla Q(\tau)) = \Delta(Q(\tau)), \end{aligned}$$

где $Q(\tau) = - \int v^{-1}(\tau) \frac{k(\tau)}{\mu(\tau)} p'(\tau) d\tau$. □

Данная теорема дает явный метод нахождения решений задачи Дирихле для уравнений стационарной фильтрации. Заметим, что этот результат получен для произвольных процессов, в том числе и для оптимальных, найденных в предыдущей главе, и произвольных термодинамических моделей газов. Ниже в качестве примера будут рассмотрены адиабатические процессы.

В случае N источников (a_i, J_i) и $D = \mathbb{R}^3$ получим

$$\tau(x) = Q^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{J_i}{4\pi|x - a_i|} + Q(\tau_0) \right).$$

С помощью (2.5) имеем $p = p(x)$, $v = v(x)$, $T = T(x)$, и следовательно полное решение уравнений фильтрации. Условия обратимости $Q(\tau)$ будут сформулированы для конкретных газов.

В нашем случае удельный объем v можно выбрать в качестве параметра τ на адиабатическом процессе $l_{\text{adiab}} \subset \widehat{L}$. Действительно, в силу (2.4) справедливо следующее соотношение

$$s_0 = R(\phi + T\phi_T),$$

которое можно рассматривать как уравнение на $T(v)$, имеющее единственное решение по теореме об обратной функции, поскольку производная правой части относительно T положительна в допустимой области. Следовательно, все термодинамические переменные можно выразить в терминах v . Коэффициенты k и μ будут предполагаться постоянными.

2.2. Примеры решений для конкретных термодинамических моделей

2.2.1. Идеальный газ

Выразим все термодинамические параметры через v . В случае идеальных газов имеем

$$T(v) = \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) v^{-2/n}, \quad p(v) = R \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) v^{-2/n-1}. \quad (2.6)$$

Следовательно, функция $Q(v)$ есть

$$Q(v) = -\frac{Rk}{2\mu} \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) \frac{n+2}{n+1} v^{-2/n-2}.$$

И, наконец, решение $v(x)$ имеет следующий вид:

$$v(x) = \left(-\frac{2\mu}{Rk} \exp\left(-\frac{2s_0}{Rn}\right) \frac{n+1}{n+2} \left(Q(v_0) + \sum_{i=1}^N \frac{J_i}{4\pi|x-a_i|} \right) \right)^{-\frac{n}{2(n+1)}},$$

где v_0 — удельный объем на бесконечности.

2.2.2. Газ Ван дер Ваальса

Для газов Ван дер Ваальса выражения $T(v)$ и $p(v)$ имеют вид:

$$T(v) = \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) (3v-1)^{-1-2/n}, \quad p(v) = 8 \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) (3v-1)^{-1-2/n} - \frac{3}{v^2},$$

а функция $Q(v)$ определяется из соотношения

$$-\frac{\mu}{k}Q(v) = -\frac{2}{v^3} + 8 \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) \frac{(3v-1)^{-\alpha}}{v} + 8 \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) \int (3v-1)^{-\alpha} v^{-2} dv,$$

где $\alpha = 1 + 2/n$.

В случае газов Ван дер Ваальса условия обратимости $Q(v)$ даются следующей теоремой:

Теорема 2. *Функция $Q(v)$ обратима, если уровень удельной энтропии s_0 удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) > \frac{1}{4\alpha}(1+\alpha)^{1+\alpha}(2-\alpha)^{2-\alpha}.$$

Доказательство. Требуется определить условие, при котором функция $Q(v)$ является монотонной для $v > 1/3$. Это означает, что ее производная не должна обращаться в ноль. Поскольку условия $Q'(v) = 0$ и $p'(v) = 0$ эквивалентны, то легко показать, что

$$Q'(v) = 0 \iff w(v) = 4c\alpha,$$

где $w(v) = (3v-1)^{1+\alpha}v^{-3}$, $c = \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right)$. Функция $w(v)$ имеет максимум в точке v_0 , которая находится из уравнения $w'(v) = 0$:

$$v_0 = \frac{1}{2-\alpha}.$$

Следовательно, $w(v_0) = (1+\alpha)^{1+\alpha}(2-\alpha)^{2-\alpha}$. □

Заметим, что условие обратимости $Q(v)$ совпадает с условием непопа-

дания кривой термодинамического процесса в термодинамически неустойчивую область. Однако фазовый переход наступает раньше достижения кривой процесса особых точек лагранжева многообразия, поэтому наблюдение фазового перехода возможно и в случае однозначного решения.

Как уже было сказано, имея решение задачи фильтрации, можно определить местоположение различных фаз. Это показано на Рис. 2.1. Он показывает, что вблизи стоков наблюдается конденсация.

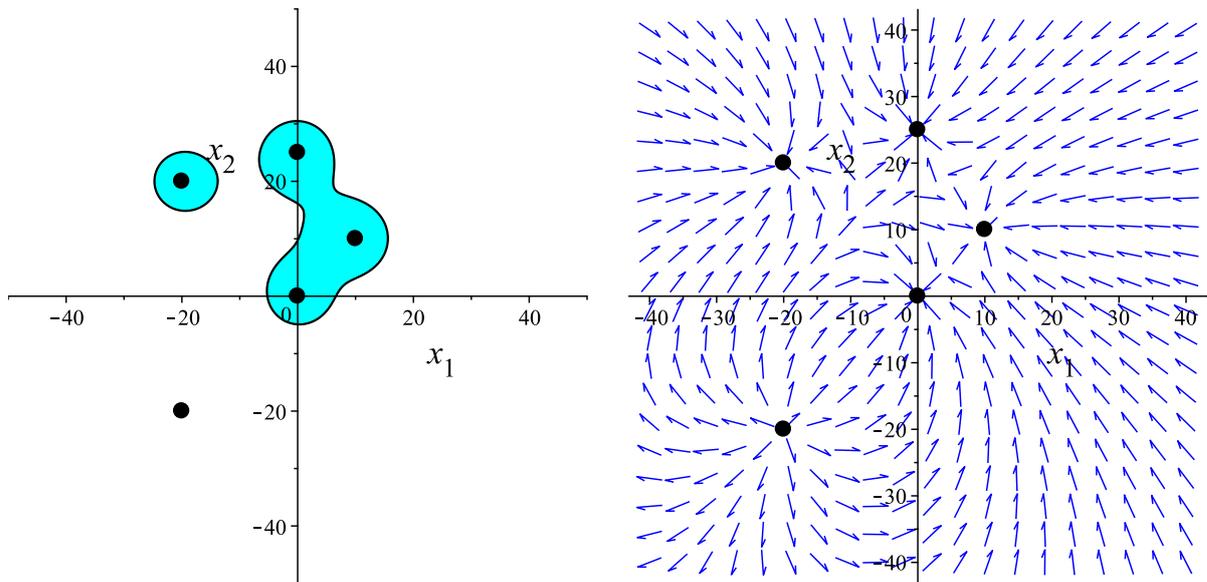


Рис. 2.1: Распределение фаз для газа Ван дер Ваальса и поле скоростей. Закрашенная область соответствует конденсации, белая область соответствует газовой фазе.

2.2.3. Газ Пенга-Робинсона

В случае газов Пенга-Робинсона выражения для $T(v)$ и $p(v)$ имеют следующий вид:

$$T(v) = \exp\left(\frac{2s_0}{n}\right) (v-1)^{-2/n},$$

$$p(v) = \exp\left(\frac{2s_0}{n}\right) (v-1)^{-1-2/n} - \frac{1}{(v+1)^2 - 2}.$$

Следовательно, функция $Q(v)$ имеет вид

$$-\frac{\mu}{k}Q(v) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{v+1+\sqrt{2}}{v+1-\sqrt{2}} \right) + \ln \left(\frac{v^2}{v^2+2v-1} \right) - \frac{v+2}{v^2+2v-1} - \exp \left(\frac{2s_0}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \int \frac{dv}{v(v-1)^{2+2/n}}.$$

Условия обратимости для $Q(v)$ в этом случае даются следующей теоремой:

Теорема 3. *Функция $Q(v)$ обратима, если уровень удельной энтропии s_0 удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\exp \left(\frac{2s_0}{n} \right) > \frac{2n(v_0+1)(v_0-1)^{2+2/n}}{(n+2)(v_0+2v_0-1)^2},$$

где v_0 — корень уравнения:

$$(2-n)v^3 + 3(n+2)v^2 + (3n+2)v + 3n - 2 = 0. \quad (2.7)$$

У уравнения (2.7) существует вещественный корень $v_0 > 1$.

Распределение фаз выглядит аналогично рассмотренному случаю газа Ван дер Ваальса.

2.2.4. Газ Редлиха-Квонга

В случае газа Редлиха-Квонга заданное значение константы s_0 приводит к следующему соотношению:

$$s_0 = \ln \left(T^{n/2}(v-1) \right) + \frac{1}{2T^{3/2}} \ln \left(\frac{v}{v+1} \right). \quad (2.8)$$

Явное выражение для $T(v)$ нельзя получить из (2.8), но тем не менее можно оценить асимптотическое поведение $p(v)$, $T(v)$, $Q(v)$ при $v \rightarrow 1$ или $v \rightarrow \infty$.

Теорема 4. *Если $v \rightarrow 1$, то асимптотики для $T(v)$, $p(v)$ и $Q(v)$ имеют*

следующий вид:

$$T(v) = \frac{B^{2/3}}{(v-1)^{2/3}} + O\left((v-1)^{1/3}\right), \quad p(v) = \frac{B^{2/3}}{(v-1)^{5/3}} + O\left(\frac{1}{(v-1)^{2/3}}\right),$$

$$Q(v) = -\frac{kB^{2/3}}{\mu(v-1)^{5/3}} + O\left(\frac{1}{(v-1)^{2/3}}\right),$$

где $B = \exp(s_0)$.

Теорема 5. Если $v \rightarrow +\infty$, то асимптотики для $T(v)$, $p(v)$ and $Q(v)$ имеют следующий вид:

$$T(v) = \frac{1}{(B^*v)^{2/3}} + O\left(\frac{1}{v^{5/3}}\right), \quad p(v) = \frac{c}{v^{5/3}} + O\left(\frac{1}{v^{8/3}}\right),$$

$$Q(v) = -\frac{5kc}{8\mu v^{8/3}} + O\left(\frac{1}{v^{11/3}}\right),$$

где B^* — корень уравнения

$$-s_0 = B/2 + \ln B,$$

и

$$c = (B^*)^{-2/3} - (B^*)^{1/3}.$$

Проанализируем условия обратимости для $Q(v)$. Прежде всего, воспользуемся уравнением состояния $p(T, v)$. Тогда

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{dT}{dv}. \quad (2.9)$$

Производная $T'(v)$ может быть получена с помощью (2.8). Подставив ее в (2.9), уравнение $p'(v) = 0$ примет вид:

$$AZ^2 + BZ + C = 0, \quad (2.10)$$

где $Z = T^{3/2}$ и

$$\begin{aligned} A &= 2(n+2)v^2(v+1)^2, & C &= (v-1)^2(1-3(2v+1)\ln(1+v^{-1})), \\ B &= 3v^2(v+1)^2\ln(1+v^{-1}) + 2(v-1)((v+1)(2v+n) - 2nv^2). \end{aligned}$$

Поскольку $A > 0$ и $C < 0$, дискриминант (2.10) положителен, следовательно, существуют два вещественных корня. Но поскольку $B > 0$, то один из них отрицательный и следовательно, выпадает из рассмотрения. Таким образом, из уравнения $p'(v) = 0$ имеем

$$T(v) = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)^{2/3}. \quad (2.11)$$

Подставляя корень (2.11) в (2.8), получаем соотношение

$$s_0 = H(v). \quad (2.12)$$

Если значение константы s_0 таково, что (2.12) не имеет решения $v^* > 1$, тогда $Q(v)$ обратима. Пример функции $H(v)$ в случае $n = 3$ представлен на Рис. 2.2. Численные вычисления показывают, что если $s_0 > -0.5$, то $Q(v)$ обратима. Распределение фаз выглядит аналогично рассмотренно-

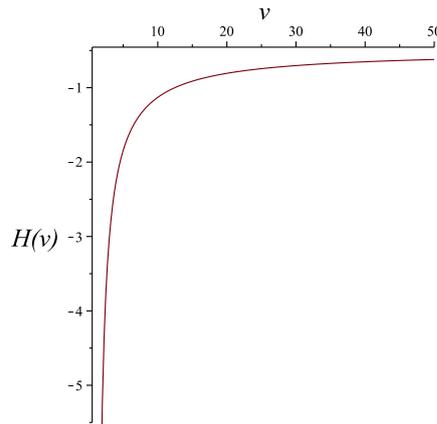


Рис. 2.2: График функции $H(v)$.

му случаю газа Ван дер Ваальса.

2.3. Основные результаты главы

1. Решения основных уравнений стационарной фильтрации были получены в общем виде путем сведения их к уравнению Лапласа для всех моделей термодинамических состояний среды.
2. Установлено, что в общем случае эти решения многозначные, были найдены условия, при которых решение является единственным. Оно совпадает с условием термодинамической устойчивости.
3. Рассмотрен случай точечных источников в области фильтрации для различных моделей термодинамических состояний. Было установлено, что в окрестности стоков наблюдается конденсация среды.

ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Результаты этой главы опубликованы в работе [90].

Одномерные течение однокомпонентных газов в пористых средах описываются следующей системой дифференциальных уравнений [4–6]:

- закон Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu}p_x, \quad (3.1)$$

- уравнение неразрывности

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (3.2)$$

где $u(t, x)$ — скорость газа, $p(t, x)$ — давление, $\rho(t, x)$ — плотность, k и μ — коэффициенты проницаемости и вязкости соответственно. В дополнение к (3.1)-(3.2) мы предполагаем, что среда участвует в одном из двух процессов, адиабатическом или изоэнтальпическом. В первом случае удельная энтропия $s(t, x)$ предполагается постоянной, то есть $s(t, x) = s_0$, тогда как во втором случае удельная энтальпия $\eta = e + p\rho^{-1}$, где e — удельная внутренняя энергия, предполагается постоянной, $\eta(t, x) = \eta_0$. В обоих случаях, требуются дополнительные соотношения для термодинамических величин для того чтобы система (3.1)-(3.2) была полной. Для этого используются уравнения состояния идеального газа и газа Ван дер Ваальса. Модель Ван дер Ваальса позволяет изучать такие критические явления как фазовые переходы, и их рассматривая их вместе с уравнениями, описывающими динамику среды, можно анализировать, как фазовые переходы появляются на течении среды.

Прежде всего опишем способ нахождения решений скалярных эволюционных уравнений с помощью метода конечномерных динамик [15–17]. Основная идея этого метода состоит в нахождении конечномерных подпространств в бесконечномерном пространстве решений эволюционных уравнений.

Обратимся к некоторым сведениям из геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений [23, 56, 57]. Пусть $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — тривиальное расслоение и пусть $J^k(\pi)$ с каноническими координатами (x, y_0, \dots, y_k) будет пространством k -джетов сечений расслоения π . Тогда любое обыкновенное дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ можно рассматривать как подмногообразие

$$\mathcal{E} = \{F(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0\} \subset J^k(\pi). \quad (3.3)$$

Распределение Картана \mathcal{C} на $J^k(\pi)$ задается дифференциальными 1-формами

$$\omega_j = dy_j - y_{j+1}dx, \quad j = \overline{0, k-1},$$

или, эквивалентно, $\mathcal{C} = \langle \partial_{y_k}, \mathcal{D} \rangle$, где

$$\mathcal{D} = \partial_x + y_1 \partial_{y_0} + \dots + y_k \partial_{y_{k-1}}.$$

Будем предполагать, что \mathcal{E} — гладкое многообразие и что в каждой точке $\theta_k \in \mathcal{E}$ подпространство Картана \mathcal{C}_{θ_k} трансверсально касательному пространству $T_{\theta_k} \mathcal{E}$, что означает выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} \neq 0, \quad \mathcal{D}(F) \neq 0 \text{ на } \mathcal{E}.$$

Последнее означает, что ограничение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ распределения Картана \mathcal{C} на \mathcal{E} является одномерным распределением, порожденным векторным полем

$$X_F = \frac{\partial F}{\partial y_k} \mathcal{D} - \mathcal{D}(F) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Векторное поле $X \in D(\mathcal{E})$ называется *инфинитезимальной симметрией* \mathcal{E} , если оно сохраняет распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, то есть $[X, \mathcal{C}(\mathcal{E})] \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Такие векторные поля образуют алгебру Ли $\text{Sym}(\mathcal{E})$ относительно коммутатора векторных полей. Инфинитезимальная симметрия называется *характеристической*, если сдвиги вдоль нее сохраняют каждую ин-

тегральную кривую распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Характеристические симметрии образуют идеал в $\text{Sym}(\mathcal{E})$, который обозначается $\text{Char}(\mathcal{E})$. Фактор-алгебра

$$\text{Shuff}(\mathcal{E}) = \text{Sym}(\mathcal{E})/\text{Char}(\mathcal{E})$$

называется алгеброй Ли *тасующих симметрий*.

Рассмотрим разрешенные относительно старшей производной ОДУ, то есть уравнения вида $F = y_k - f(x, y_0, \dots, y_{k-1})$.

Теорема 6. *Тасующие симметрии \mathcal{E} имеют следующий вид:*

$$S_\phi = \sum_{j=0}^k \mathcal{D}^j(\phi) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

где $\phi \in C^\infty(\mathcal{E})$ — производящая функция симметрии S_ϕ , удовлетворяющая уравнению Ли

$$S_\phi(F) = 0 \quad \text{mod } \langle F, \mathcal{D}F, \dots \rangle. \quad (3.4)$$

Пусть $y = h(x)$ — решение уравнения \mathcal{E} и пусть

$$\Gamma = \left\{ y_0 = h(x), y_1 = h'(x), \dots, y_k = h^{(k)}(x) \right\} \subset \mathcal{E}$$

— его продолжение в $J^k(\pi)$. Пусть Φ_t — поток векторного поля S_ϕ . Тогда для малых t кривая $\Gamma_t = \Phi_t(\Gamma) \subset \mathcal{E}$ — k -джет $h_t(x) = (\Phi_t^*)^{-1}(h(x))$:

$$\Gamma_t = \left\{ y_0 = h_t(x), y_1 = h'_t(x), \dots, y_k = h_t^{(k)}(x) \right\} \subset \mathcal{E}.$$

Поскольку $\dot{y}_j = \mathcal{D}^j(\phi)$ для $j = \overline{1, k}$, то функция $u(t, x) = h_t(x)$ удовлетворяет следующему эволюционному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right). \quad (3.5)$$

Другими словами, решения эволюционного уравнения (3.5) могут быть получены из решений ОДУ \mathcal{E} с симметрией S_ϕ как $u(t, x) = (\Phi_t^*)^{-1}(h(x))$,

и ОДУ \mathcal{E} называется *конечномерной динамикой* для эволюционного уравнения (3.5).

Следующая теорема [16, 17] используется для нахождения динамик.

Теорема 7. *Уравнение (3.3) является конечномерной динамикой для эволюционного уравнения (3.5) тогда и только тогда, когда*

$$[\phi, F] = aF + b\mathcal{D}(F),$$

где a и b — некоторые функции, а $[\phi, F]$ — скобка Пуассона-Ли между функциями ϕ и F следующего вида:

$$[\phi, F] = \sum_{j=0}^k \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_j} \mathcal{D}^j(F) - \frac{\partial F}{\partial y_j} \mathcal{D}^j(\phi) \right).$$

Другими словами,

$$[\phi, F] = 0 \quad \text{mod } \langle F, \mathcal{D}F, \dots \rangle. \quad (3.6)$$

3.1. Динамики первого порядка и точные решения

Пусть термодинамическое состояние газа задано лагранжевым многообразием L и газ участвует в термодинамическом процессе $l \subset L$ и пусть ρ является параметром на l . Это означает, что все термодинамические переменные можно выразить в терминах ρ :

$$p = p(\rho), \quad \mu = \mu(\rho), \quad k = k(\rho). \quad (3.7)$$

Теорема 8. *Уравнения (3.1)-(3.2) для газа L и процесса $l \subset L$ эквивалентны уравнению*

$$\rho_t = (Q(\rho))_{xx}, \quad (3.8)$$

где

$$Q(\rho) = \int \frac{k(\rho)\rho p'(\rho)}{\mu(\rho)} d\rho.$$

Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$\rho_t = A(\rho)\rho_{xx} + A'(\rho)(\rho_x)^2, \quad (3.9)$$

где $A(\rho) = Q'(\rho)$. Найдем динамики первого порядка для (3.9) в виде [17]:

$$F(y_0, y_1) = y_1 - f(y_0) = 0, \quad (3.10)$$

которые имеют симметрию

$$\phi = A(y_0)y_2 + A'(y_0)(y_1)^2.$$

Скобка Пуассона-Ли (3.6), следовательно, имеет следующий вид:

$$2A'(y_0)f' + fA''(y_0) + A(y_0)f'' = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$f(y_0) = \frac{C_1 y_0 + C_2}{A(y_0)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Следовательно, динамика первого порядка для (3.9) есть

$$y' = \frac{C_1 y + C_2}{A(y)},$$

и решение этого уравнения дается как

$$x = \int_{y^{(0)}}^y \frac{A(\xi)}{C_1 \xi + C_2} d\xi, \quad (3.11)$$

где $y^{(0)}$ — константа.

Получим решение для (3.9). Симметрия S_ϕ уравнения (3.10) имеет

ВИД

$$S_\phi = \frac{C_1(C_1 y_0 + C_2)}{A(y_0)} \frac{\partial}{\partial y_0},$$

и ее поток $\Phi_t: (x, y_0) \mapsto (x, z(y_0, t))$, где $z(y_0, t)$ находится из соотношения

$$\int_{y_0}^z \frac{A(\xi)}{C_1(C_1 \xi + C_2)} d\xi = t.$$

Введем новую функцию $G(\xi)$ следующим образом:

$$G'(\xi) = \frac{A(\xi)}{C_1(C_1 \xi + C_2)}.$$

Тогда $G(z) - G(y_0) = t$, откуда следует, что $z = G^{-1}(t + G(y_0))$. Следовательно, с помощью Φ_t^{-1} решение (3.11) превращается в решение (3.9), которое задается неявно:

$$x = \int_{y^{(0)}}^{G^{-1}(-t+G(\rho))} \frac{A(\xi)}{C_1 \xi + C_2} d\xi. \quad (3.12)$$

Рассмотрим (3.12) более подробно. Введем другую функцию $H(\xi)$ следующим образом:

$$H'(\xi) = \frac{A(\xi)}{C_1 \xi + C_2}.$$

Заметим, что $G(\xi)$ и $H(\xi)$ связаны как $H(\xi) = C_1 G(\xi) + \alpha_1$, где α_1 является константой. Следовательно, (3.12) преобразуется как

$$\begin{aligned} x &= H(G^{-1}(-t + G(\rho))) - H(y^{(0)}) = C_1 G(G^{-1}(-t + G(\rho))) + \alpha_1 - H(y^{(0)}) = \\ &= C_1(-t + G(\rho)) - \alpha_0, \end{aligned}$$

где $\alpha_0 = -\alpha_1 + H(y^{(0)})$ — константа.

В результате приведенных рассуждений, справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Решение нестационарного уравнения фильтрации (3.8) да-*

ется как

$$\rho(t, x) = G^{-1} \left(\frac{x + \alpha_0}{C_1} + t \right). \quad (3.13)$$

где

$$G(\rho) = \int \frac{Q'(\rho)}{C_1(C_1\rho + C_2)} d\rho,$$

и C_1, C_2, α_0 — константы.

С помощью уравнений состояния (1.22) и (3.7) все термодинамические переменные выражаются как функции (t, x) .

3.1.1. Адиабатические процессы

Положим μ и k равными константам.

В случае адиабатических процессов $s = Rs_0$ давление выражается в терминах плотности следующим образом:

$$p(\rho) = 8 \exp \left(\frac{3s_0}{4n} \right) (3\rho^{-1} - 1)^{-1-2/n} - 3\rho^2.$$

Функция $A(\rho) = Q'(\rho)$ имеет вид

$$Q'(\rho) = \frac{k}{\mu} \left(-6\rho^2 + 24 \exp \left(\frac{3s_0}{4n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \rho^{2/n+1} (3 - \rho)^{-2-2/n} \right).$$

Условия обратимости для $G(\rho)$ определяются следующей теоремой:

Теорема 10. *Функция $G(\rho)$ обратима, если константа s_0 удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\exp \left(\frac{3s_0}{4n} \right) > \frac{1}{4\nu} (1 + \nu)^{1+\nu} (2 - \nu)^{2-\nu},$$

где $\nu = 1 + 2/n$.

Распределение фаз показано на Рис. 3.1.

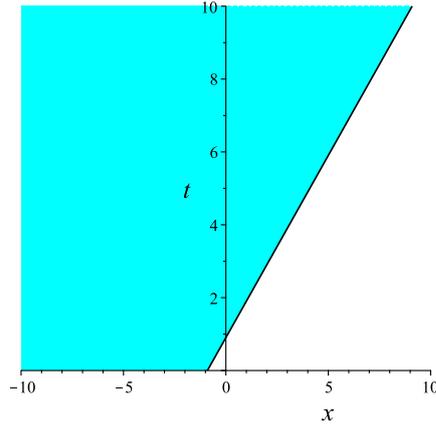


Рис. 3.1: Распределение фаз для газа Ван дер Ваальса. Закрашенная область соответствует конденсации (влажный пар), белая — газовой фазе.

3.1.2. Изоэнтальпические процессы

Для изоэнтальпических процессов $\eta = \eta_0$ давление $p(\rho)$ имеет следующий вид:

$$p(\rho) = \frac{3\rho(n\rho^2 + (6 - 3n)\rho + 2\eta_0)}{6 + 3n - \rho n},$$

и следовательно

$$Q'(\rho) = \frac{6k\rho}{\mu(6 + 3n - \rho n)^2} (3\eta_0(n + 2) + \rho(6 - 3n)(6 + 3n) + 6n\rho^2(n + 1) - n^2\rho^3).$$

Теорема 11. *Функция $G(\rho)$ обратима, если константа η_0 удовлетворяет неравенству:*

$$\eta_0 > \frac{2(n - 2)^2(2n + 5)}{3n(n + 2)}.$$

Распределение фаз для изоэнтальпических процессов показано на Рис. 3.2.

3.2. Динамики второго порядка и точные решения для идеальных газов

Построим динамики второго порядка для (3.8) в случае, когда термодинамическое состояние газа дается уравнениями состояния идеального

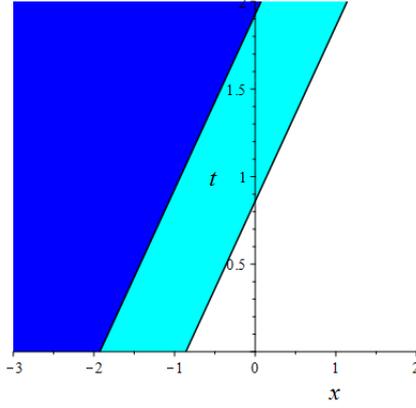


Рис. 3.2: Распределение фаз для газа Ван дер Ваальса. Синяя область соответствует жидкой фазе, белая область — газовой фазе, область между ними — конденсация (влажный пар)

газа:

$$p = \rho RT, \quad e = \frac{n}{2} RT, \quad s = R \ln \left(\frac{T^{n/2}}{\rho} \right).$$

Будем предполагать, что функция $A(\rho) = Q'(\rho)$ имеет вид:

$$A(\rho) = q\rho^\alpha, \tag{3.14}$$

где $q > 0$ и α — константы. Можно показать, что по крайней мере для двух процессов, которые мы рассматриваем, изоэнтальпический и адиабатический, в случае постоянных вязкости μ и проницаемости k , условие (3.14) выполняется. Действительно, если уровень удельной энтальпии $\eta(t, x) = \eta_0$ задан, то

$$A(\rho) = \frac{2\eta_0 k \rho}{\mu(n+2)}. \tag{3.15}$$

А если задан уровень удельной энтропии $s(t, x) = s_0$, то

$$A(\rho) = \frac{Rk}{\mu} \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \exp \left(\frac{2s_0}{Rn} \right) \rho^{2/n+1}. \tag{3.16}$$

Будем искать динамики второго порядка в следующем виде:

$$F(y_0, y_1, y_2) = y_2 - y_0^\beta B(y_1). \tag{3.17}$$

Такой выбор обоснован видом (3.14) для $A(y_0)$. В работе [17] динамики второго порядка были найдены в виде $F(y_0, y_1, y_2) = y_2 - g_1(y_0)y_1 - g_2(y_0)$. Такие динамики существуют, но только в случае, если $A(y_0)$ — полином степени не выше 2, что выполняется для (3.15), но не для (3.16).

Функцию $B(y_1)$ нужно найти, так же как и константу β . Как и в предыдущем случае, нужно решить уравнение (3.6) относительно $B(y_1)$. Следующая теорема является результатом прямых вычислений.

Теорема 12. *Динамики второго порядка вида (3.17) существуют, если*

$$\beta = -1, \quad B(y_1) = b_1 y_1^2,$$

где b_1 — константа, равная либо $-\alpha$, либо $-\alpha + 1$, либо $-\alpha/2 + 1$.

В случае $b_1 = -\alpha$ соответствующая динамика тривиальна.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

3.2.1. Случай $b_1 = -\alpha/2 + 1$

Динамика второго порядка имеет вид

$$y'' = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{(y')^2}{y}. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) имеет две коммутирующие симметрии

$$\phi_1 = y_1, \quad \phi_2 = q y_0^{\alpha-1} y_1^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Первая — трансляции по x , вторая — правая часть (3.9). Соответствующие векторные поля

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{(2-\alpha)y_1^2}{2y_0} \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ S_2 &= q \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) y_0^{\alpha-2} y_1^2 \left(y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \end{aligned}$$

линейно независимы, и следовательно теорему Ли-Бьянки [23, 56] можно применить для интегрирования (3.18).

Ограничение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ распределения Картана на (3.18) задано дифференциальными 1-формами

$$\omega_1 = dy_0 - y_1 dx, \quad \omega_2 = dy_1 - \frac{(2-\alpha)y_1^2}{2y_0} dx.$$

Выберем другой базис $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ в $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1(S_1) & \omega_1(S_2) \\ \omega_2(S_1) & \omega_2(S_2) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с теоремой Ли-Бьянки, поскольку алгебра Ли $\langle S_1, S_2 \rangle$ коммутативна, то новые формы $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ замкнуты и, следовательно, локально точны, то есть локально $\varkappa_i = dJ_i$, где J_i — функции на \mathcal{E} , и решение (3.18) дается (в общем случае, неявно) соотношениями $J_i(x, y_0, y_1) = C_i$ для некоторых констант C_i .

В нашем случае матрица W^{-1} имеет вид

$$W^{-1} = \frac{2}{q\alpha(\alpha+2)y_1^3} \begin{pmatrix} q(\alpha+2)y_1^2 & -qy_0y_1(\alpha+2) \\ (\alpha-2)y_1y_0^{-\alpha+1} & 2y_0^{-\alpha+2} \end{pmatrix},$$

и формы $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -dx + \frac{2}{y_1\alpha} dy_0 - \frac{2y_0}{y_1^2\alpha} dy_1, \\ \varkappa_2 &= \frac{2(\alpha-2)y_0^{-\alpha+1}}{y_1^2q\alpha(\alpha+2)} dy_0 + \frac{4y_0^{-\alpha+2}}{y_1^3q\alpha(\alpha+2)} dy_1, \end{aligned}$$

и соответствующие интегралы имеют вид:

$$-x + \frac{2y_0}{y_1\alpha} = C_1, \quad \frac{2y_0^{-\alpha+2}}{q\alpha(\alpha+2)y_1^2} = C_2. \quad (3.19)$$

Исключая y_1 из (3.19), получаем решение (3.18):

$$y(x) = \left(\frac{2C_2q(\alpha + 2)}{\alpha(C_1 + x)^2} \right)^{-1/\alpha}.$$

Решение (3.9) получается сдвигом (3.19) вдоль траекторий векторного поля S_2 . Траектории векторного поля S_2 показаны на Рис. 3.3.

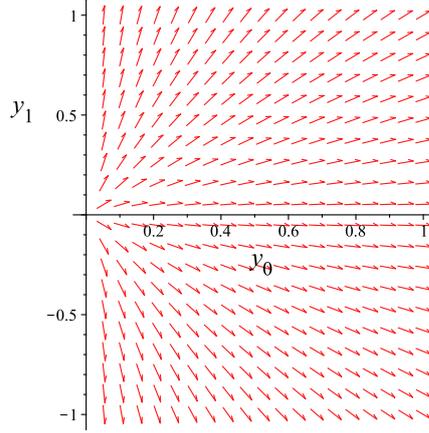


Рис. 3.3: Векторное поле S_2

Поток векторного поля S_2 имеет следующий вид:

$$\Phi_t: (x, y_0, y_1) \mapsto (x, y_0\Psi(y_0, y_1, t), y_1\Psi(y_0, y_1, t)),$$

где

$$\Psi(y_0, y_1, t) = \left(1 - \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) qt\alpha y_1^2 y_0^{\alpha-2} \right)^{-1/\alpha}.$$

Применяя преобразование Φ_t^{-1} к (3.19) и исключая y_1 , получаем решение (3.9):

$$\rho(t, x) = \left(\frac{\alpha(x + C_1)^2}{2q(\alpha + 2)(C_2 - t)} \right)^{1/\alpha}. \quad (3.20)$$

Для адиабатических течений $\alpha = 2/n + 1$ и поскольку $n \geq 3$, то константа α положительна. Для изоэнтальпических течений $\alpha = 1$. В обоих случаях на решениях можно наблюдать blow-up эффект. Именно, решение (3.20) становится бесконечным для всех x за конечное время, определяемое константой C_2 . На Рис. 3.4, константа $C_2 = 1$, распределение плотности дается для моментов времени $t = 0.5$, $t = 0.85$ и $t = 0.999$, и

решение не существует при $t > 1$.

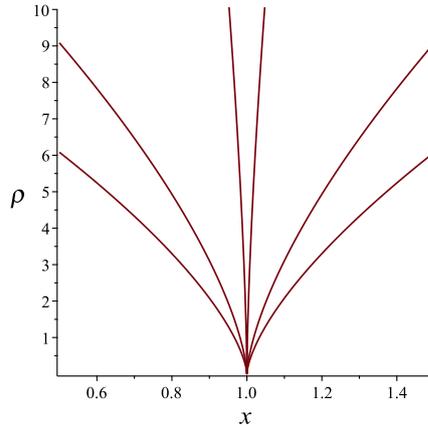


Рис. 3.4: График плотности.

Если функции $\mu(\rho)$ и $k(\rho)$ таковы, что $A(\rho) = q\rho^\alpha$, где α отрицательна, то решение (3.20) имеет особенность в точке $x = -C_1$. График решения показан на Рис. 3.5 для моментов времени $t = 5$ и $t = 9$.

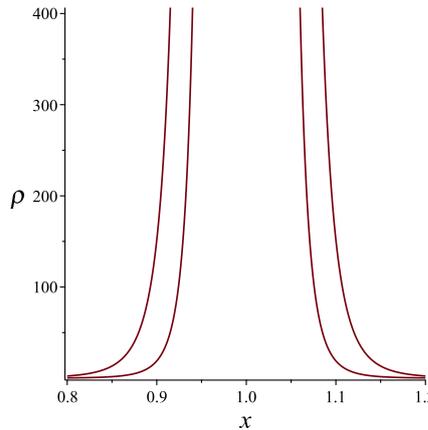


Рис. 3.5: График плотности для течений с $\alpha = -1/3$.

3.2.2. Случай $b_1 = -\alpha + 1$

В этом случае динамика второго порядка имеет вид

$$y'' = (1 - \alpha) \frac{(y')^2}{y}.$$

Симметрии S_1 и S_2

$$S_1 = y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{(1-\alpha)y_1^2}{y_0} \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad S_2 = qy_0^{\alpha-1}y_1 S_1.$$

Поскольку векторные поля S_1 и S_2 линейно зависимы, то теорему Ли-Бьянки применить нельзя, но решение все равно можно получить в явном виде:

$$y(x) = (\alpha(C_1x + C_2))^{1/\alpha}. \quad (3.21)$$

Сдвигая (3.21) вдоль траекторий S_2 как это было сделано в предыдущем случае, мы получаем решение в виде

$$\rho(t, x) = (C_1^2 \alpha q t + C_1 \alpha x + C_2 \alpha)^{1/\alpha}. \quad (3.22)$$

Решение (3.22) — бегущая волна, оно совпадает с (3.13) при подходящем выборе констант C_1 и C_2 .

3.3. Основные результаты главы

1. Для уравнений нестационарной фильтрации были найдены конечномерные динамики первого порядка, и соответствующие им решения были получены для любой модели термодинамического состояния газа. Области фазовых переходов в пространстве-времени были построены для двух типов процессов — адиабатического и изоэнтальпического.
2. Динамики второго порядка были найдены для специальных видов процессов. Они отличаются от известных ранее динамик второго порядка для этого уравнения. Соответствующие им решения разрушаются за конечное время.

ГЛАВА 4. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Результаты этой главы опубликованы в работах [94, 97].

4.1. Уравнения Эйлера

Движение невязких сред описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ (\mathbf{u}, \nabla s) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{u}(x)$ — поле скоростей, $p(x)$ — давление, $\rho(x) = v^{-1}(x)$ — плотность, $s(x)$ — удельная энтропия, $x \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 13. Пусть термодинамическое состояние газа задано лежандровым многообразием \widehat{L} и $l \subset \widehat{L}$ — термодинамический процесс. Пусть (a, J) — изотропный источник интенсивности J , расположенный в точке a . Тогда решение задачи (4.1) дается неявно следующим выражением

$$\frac{v^2(\tau)}{2|x-a|^4} + \left(\frac{4\pi}{J}\right)^2 \Psi(\tau) = 0, \quad (4.2)$$

где τ — параметр на l и

$$\Psi(\tau) = \int v(\tau)p'(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Пусть $r = |x-a|$ — расстояние до источника, $x-a = \mathbf{r}$ и пусть $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Поскольку источник изотропный, получаем

$$\mathbf{u} = U(r)\mathbf{r}, \quad \nabla = \mathbf{n}\partial_r.$$

Интенсивность источника равна J , это означает, что поток массы через сферу S_a радиуса r с центром в точке a равен J :

$$J = \int_{S_a} v^{-1}(\tau(r))(\mathbf{u}, \mathbf{n})dS = 4\pi r^3 v^{-1}(\tau(r))U(r),$$

откуда следует, что

$$U(r) = \frac{J}{4\pi r^3} v(\tau(r)).$$

Тогда уравнение

$$\rho(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p$$

в силу (2.5) принимает вид

$$v^{-1}(\tau) \left(\frac{J}{4\pi} \right)^2 \frac{v(\tau)}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{v(\tau)}{r^2} \right) = -p'(\tau) \frac{d\tau}{dr},$$

что в свою очередь означает

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v^2(\tau)}{2r^4} \right) + \left(\frac{4\pi}{J} \right)^2 v(\tau) p'(\tau) \frac{d\tau}{dr} = 0,$$

откуда следует заключение теоремы. \square

Вычислив функцию $\Psi(\tau)$, можно получить решение стационарных уравнений Эйлера.

Прежде всего, пусть $D = \mathbb{R}^3$ и предположим, что значение удельного объема задано на бесконечности: $v|_{|x-a| \rightarrow \infty} = v_0$. Поскольку мы берем v в качестве параметра на процессе l_{adiab} , общий вид формулы (4.2) принимает вид:

$$\frac{v^2}{2|x-a|^4} + \left(\frac{4\pi}{J} \right)^2 \Psi(v) = 0,$$

где $\Psi(v) = \int v p'(v) dv$.

4.1.1. Идеальный газ

Используя (2.6), можно показать, что функция $\Psi(v)$ для идеальных газов имеет следующий вид:

$$\Psi(v) = \frac{R(n+2)}{2} \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) v^{-2/n}.$$

Следовательно, решение для идеальных газов принимает вид (удобнее записать его в терминах плотности $\rho = v^{-1}$):

$$\frac{1}{2|x-a|^4\rho^2} + \left(\frac{4\pi}{J}\right)^2 \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) \frac{R(n+2)}{2} \rho^{2/n} = C_0,$$

где C_0 — константа, определяемая из условия $\rho|_{|x-a|\rightarrow\infty} = \rho_0$.

Теорема 14. *Если $\rho_0 = 0$, то асимптотическое поведение $\rho(x)$ на бесконечности имеет вид:*

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2C_0}|x-a|^2} + o\left(\frac{1}{|x-a|^2}\right),$$

если $\rho_0 \neq 0$, тогда

$$\rho(x) = \left(\frac{J}{4\pi}\right)^n \left(\frac{2C_0}{R(n+2)} \exp\left(-\frac{2s_0}{Rn}\right)\right)^{n/2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{|x-a|^{4i}},$$

где β_i — константы.

Таким образом, полученное решение регулярно на бесконечности в обоих случаях. Распределение плотности показано на Рис. 4.1.

Можно видеть, что решение, вообще говоря, многозначное. Более того, оно существует не при всех $x \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 15. *Решение $\rho(x)$ существует, если*

$$|x-a| > \left(2\rho_*^2 \left(C_0 - R \left(\frac{4\pi}{J}\right)^2 \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) (n/2 + 1)\rho_*^{2/n}\right)\right)^{-1/4},$$

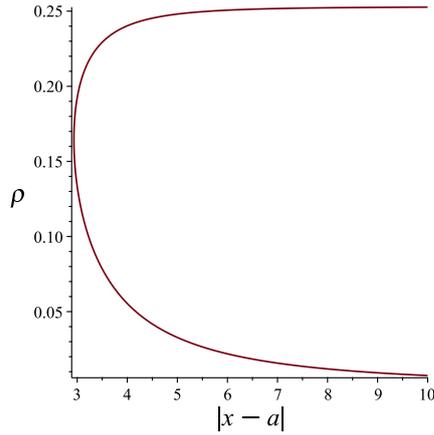


Рис. 4.1: Распределение плотности для идеальных газов.

где

$$\rho_* = \left(\frac{J}{4\pi}\right)^n \left(\exp\left(-\frac{2s_0}{Rn}\right) \frac{2nC_0}{R(n+1)(n+2)}\right)^{n/2}.$$

4.1.2. Газ Ван дер Ваальса

В случае газа Ван дер Ваальса решение задано в следующем виде:

$$\frac{1}{2|x-a|^4\rho^2} + \left(\frac{4\pi}{J}\right)^2 \left(4 \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) (3\rho^{-1} - 1)^{-(1+2/n)} \left(\rho^{-1}(n+2) - \frac{n}{3}\right) - 6\rho\right) = C_0.$$

Теорема 16. Если $\rho_0 = 0$, то асимптотическое поведение $\rho(r)$ на бесконечности имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{2C_0}r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

если $\rho_0 \neq 0$, то

$$\rho(r) = \rho_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{r^{4i}},$$

где β_i — константы, ρ_0 и C_0 связаны следующим соотношением:

$$\frac{3C_0\rho_0}{2} \left(\frac{J}{4\pi}\right)^2 = 2c(3\rho_0^{-1} - 1)^{-(1+2/n)}(3n + 6 - n\rho_0) - 9\rho_0^2.$$

Проанализируем фазовые переходы в двух случаях, для «маленьких» и «больших» значений константы s_0 . Начнем с верхней ветви решения.

Если $s_0 = 0.5$, распределение фаз показано на Рис. 4.2. В окрестности источника наблюдается конденсация газа, тогда как вдали от источника среда находится в жидкой фазе.

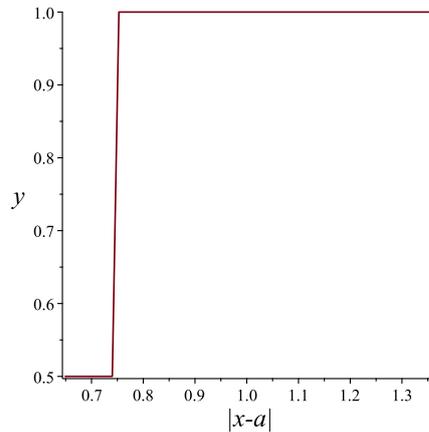


Рис. 4.2: Распределение фаз для газа Ван дер Ваальса. Значение переменной $y = 1$ соответствует жидкой фазе, значение переменной $y = 0.5$ соответствует процессу конденсации (влажный пар).

Если $s_0 = 200$, то распределение фаз имеет вид, представленный на Рис. 4.3. Снова процесс конденсации наблюдается вблизи источника, на больших расстояниях от источника среда находится в газовой фазе.

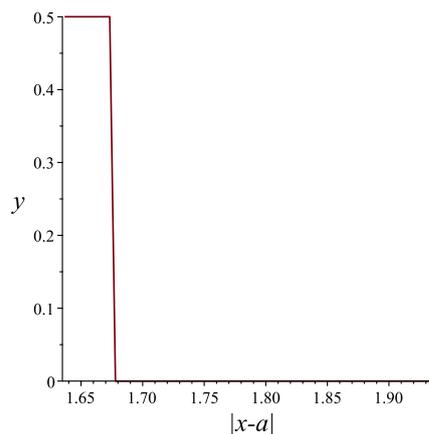


Рис. 4.3: Распределение фаз для газа Ван дер Ваальса. Значение переменной $y = 0$ соответствует газовой фазе, значение переменной $y = 0.5$ соответствует процессу конденсации (влажный пар).

Нижняя ветвь решения целиком попадает в область конденсации.

4.2. Уравнения Навье-Стокса

Теперь примем во внимание вязкость среды. В этом случае уравнение на удельный объем $v(r)$ в приближении адиабатического процесса содержит коэффициенты вязкости η и ζ и может быть записано в следующем виде:

$$-\frac{v}{r^3}(rv'' - 2v')\mu + \frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2r^4} + I^{-2}\Psi(v) \right) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\mu = I^{-1} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right), \quad I = \frac{J}{4\pi}.$$

Рассмотрим интенсивность источника I как либо большой, либо малый параметр. Прежде всего, запишем уравнение (4.3) в виде:

$$\frac{v}{r^3}(rv'' - 2v') = \frac{I}{k} \frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2r^4} + I^{-2}\Psi(v) \right),$$

где $k = 4\eta/3 + \zeta$. Введем новые переменные (x, w) следующим образом:

$$r = I^\alpha x, \quad v = I^\beta w,$$

где α и β — константы. Получим

$$\frac{w}{x^3}(xw'' - 2w') = k^{-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{I^{1-\alpha}w^2}{2x^4} + I^{3\alpha-2\beta-1}\Psi(I^\beta w) \right). \quad (4.4)$$

Потребуем, чтобы функция $\Psi(v)$ удовлетворяла неравенству $|\Psi(v)| \leq Cv^A$. Как для идеального газа, так и для газа Ван дер Ваальса это условие выполняется, если положить $A = -2/n$. В этом случае в правую часть уравнения (4.4) можно ввести малый параметр, выбирая (α, β) следующим образом:

- если $I \ll 1$, то

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta - 1 + A\beta > 0, \\ 1 - \alpha > 0. \end{cases}$$

- если $I \gg 1$, то

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta - 1 + A\beta < 0, \\ 1 - \alpha < 0. \end{cases}$$

Идеальный газ

Для идеального газа

$$\Psi(v) = R \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) v^{-2/n}.$$

Взяв $\beta = n(n+1)^{-1}(2\alpha - 1)$ и $\alpha = 1/2$ для $I \ll 1$, $\alpha = 2$ для $I \gg 1$ получим:

$$\frac{w}{x^3}(xw'' - 2w') = \varepsilon_{1,2} \frac{d}{dx} \left(\frac{w^2}{2kx^4} + \Psi(w) \right), \quad (4.5)$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{I}$ для $I \ll 1$ и $\varepsilon_2 = 1/I$ для $I \gg 1$.

Будем искать решение (4.5) в следующем виде:

$$w(x) = w_0(x) + \varepsilon_{1,2} w_1(x) + \dots,$$

тогда для нулевого $w_0(x)$ и первого $w_1(x)$ приближение получаем выражения:

$$\begin{aligned} w_0(x) &= C_1 x^3 + C_2, \\ w_1(x) &= -\frac{Rn}{6C_1 k} \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right) (C_1 x^3 + C_2)^{-2/n} + \\ &+ \frac{1}{6xk} (2x^4 C_3 k - 3C_1 x^3 + 6kx C_4 - 3C_2), \end{aligned}$$

где C_j ($j = \overline{1, 4}$) — константы.

Газ Ван дер Ваальса

Для газов Ван дер Ваальса имеем:

$$\Psi(v) = \frac{8}{3(3v-1)^{2/n+1}} \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) + \frac{4(n+2)}{3(3v-1)^{2/n}} \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right) - \frac{6}{v}.$$

Ограничимся рассмотрением одноатомных газов, то есть положим $n = 3$. Если $I \gg 1$, то можно взять $\alpha = 2$, $\beta = 6$, что приведет к результату

$$w(x) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \dots,$$

где $\varepsilon = 1/I$,

$$w_0(x) = C_1 x^3 + C_2, \quad w_1(x) = \frac{1}{6xk} (2x^4 C_3 k - 3C_1 x^3 + 6C_4 k x - 3C_2),$$

и C_j ($j = \overline{1, 4}$) — константы.

Случай $I \ll 1$ можно исследовать аналогично.

4.3. Основные результаты главы

1. Решена задача адиабатического истечения реального газа в трехмерном пространстве из источника заданной интенсивности с учетом фазовых переходов. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера для произвольной модели термодинамического состояния среды.
2. Установлено, что вблизи источника наблюдается конденсация среды. Установлена область существования решений и асимптотическое поведение решений на бесконечности. Установлено, что найденные решения регулярны на бесконечности.
3. Для уравнения Навье-Стокса построены асимптотические разложения решений относительно малого параметра (в случае больших и малых интенсивностей источника).

ГЛАВА 5. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Результаты этой главы опубликованы в работах [86, 95, 96].

5.1. Геометрические структуры, ассоциированные с уравнениями Эйлера

Нестационарные одномерные течения газов описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

- Закон сохранения импульса

$$\rho(u_t + uu_x) = -p_x, \quad (5.1)$$

- Закон сохранения массы

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (5.2)$$

- Закон сохранения энтропии вдоль потока

$$s_t + us_x = 0. \quad (5.3)$$

Здесь $u(t, x)$ — скорость среды, $\rho(t, x)$ — плотность среды, и $s(t, x)$ — удельная энтропия. Система (5.1)-(5.3) является неполной. Она становится замкнутой при дополнении ее уравнениями состояния (1.22). Будем рассматривать *гомэнтропические течения*, то есть такие, что $s(t, x) = s_0$. С одной стороны, это предположение тождественно удовлетворяет (5.3), с другой стороны, оно позволяет выразить все термодинамические переменные в терминах ρ аналогично тому, как это было сделано в предыдущих главах. Таким образом, мы получаем следующую двухкомпонентную систему уравнений:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + uu_x + \frac{p'(\rho)}{\rho} \rho_x = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Пусть $E = J^0(\mathbb{R}^2)$ координатами (t, x, u, ρ) — пространство 0-джетов функций на $M = \mathbb{R}^2(t, x)$. Свяжем следующие две дифференциальные 2-формы $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(E)$ с системой (5.4) [56, 67, 68]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \rho dt \wedge du + u dt \wedge d\rho - dx \wedge d\rho, \\ \omega_2 &= u dt \wedge du + \frac{p'(\rho)}{\rho} dt \wedge d\rho - dx \wedge du. \end{aligned}$$

Любая форма $\omega \in \Omega^2(E)$ порождает оператор

$$\Delta_\omega: C^\infty(M) \rightarrow \Omega^2(M), \quad \Delta_\omega(f) = \omega|_{\Gamma^0(f)},$$

где $\Gamma^0(f) \subset E$ — график вектор-функции f . Тогда систему (5.4) можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{\omega_1}(f) = 0, \quad \Delta_{\omega_2}(f) = 0,$$

где $f = (u(t, x), \rho(t, x))$. Двумерное многообразие $N \subset E$ называется *многозначным решением* системы (5.4), если $\omega_1|_N = \omega_2|_N = 0$. Заметим, что такое понимание решений уравнений Эйлера позволяет изучать решения, которые глобально не задаются как графики функций. При этом они могут иметь особенности проекций на пространство независимых переменных. Заметим также, что многозначные решения уравнений (5.4) являются также лагранжевыми многообразиями, поскольку форма ω_2 является симплектической структурой на E .

Пусть $q = dt \wedge dx \wedge du \wedge d\rho$ — форма объема на E . Введем билинейный оператор

$$P: \Omega^2(E) \times \Omega^2(E) \rightarrow C^\infty(E)$$

с помощью следующего соотношения:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = P(\alpha_1, \alpha_2)q, \quad \alpha_i \in \Omega^2(E).$$

Обозначим $P_\omega = \|P(\omega_i, \omega_j)\|$, $i, j = 1, 2$. Тогда система (5.4) называется *гиперболической*, если $\det(P_\omega) < 0$, *эллиптической*, если $\det(P_\omega) > 0$ и *параболической*, если $\det(P_\omega) = 0$. Прямые вычисления показывают, что

$$P_\omega = \begin{pmatrix} 2\rho & 0 \\ 0 & -2\rho^{-1}p'(\rho) \end{pmatrix},$$

и следовательно, гиперболичность системы (5.4) совпадает с условием применимости модели термодинамического состояния, или, эквивалентно, отрицательной определенности формы $\kappa|_{\widehat{L}}$.

Теорема 17. Система (5.4) является гиперболической тогда и только тогда, когда кривая термодинамического процесса целиком лежит в допустимой области многообразия \widehat{L} .

Заметим, что дифференциальные 2-формы

$$\widehat{\omega}_1 = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2, \tag{5.5}$$

$$\widehat{\omega}_2 = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2, \tag{5.6}$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ также задают систему (5.4). Будем предполагать, что система (5.4) является гиперболической. В этом случае [56] можно выбрать другие формы (5.5), которые мы продолжим обозначать как ω_1 и ω_2 , такие что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad \omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_2. \tag{5.7}$$

Такие формы также называют *эффективными*.

Теорема 18. Пусть система (5.4) является гиперболической. Тогда

она задается дифференциальными 2-формами

$$\begin{aligned}\omega_1 &= A(\rho)(\rho dt \wedge du + u dt \wedge d\rho - dx \wedge d\rho), \\ \omega_2 &= u dt \wedge du + \rho A^2(\rho) dt \wedge d\rho - dx \wedge du,\end{aligned}$$

где $A(\rho) = \rho^{-1}\sqrt{p'(\rho)}$, и 2-формы ω_1, ω_2 удовлетворяют соотношениям (5.7).

Рассмотрим линейный оператор $A_\omega: D(E) \rightarrow D(E)$, определяемый следующим образом:

$$X \lrcorner \omega_2 = A_\omega(X) \lrcorner \omega_1.$$

Выбирая $\langle \partial_t, \partial_x, \partial_\rho, \partial_u \rangle$ в качестве базиса в модуле векторных полей $D(E)$ на E , получим матрицу W оператора A_ω в следующем виде:

$$W = \frac{1}{\rho A(\rho)} \begin{pmatrix} u & -1 & 0 & 0 \\ u^2 - \rho^2 A^2(\rho) & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho A^2(\rho) \\ 0 & 0 & \rho & 0 \end{pmatrix},$$

и легко проверить, что $A_\omega^2 = \text{id}$. Собственные подпространства $\mathcal{C}_+ = \langle X_+, Y_+ \rangle$ и $\mathcal{C}_- = \langle X_-, Y_- \rangle$ оператора A_ω называются *характеристическими распределениями*, они порождаются векторными полями

$$\begin{aligned}X_\pm &= \pm A(\rho)\partial_u + \partial_\rho, \\ Y_\pm &= (\mp \rho A(\rho) + u)^{-1}\partial_t + \partial_x.\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Фробениуса о вполне интегрируемых распределениях, получим следующий результат:

Теорема 19. *Распределения \mathcal{C}_+ и \mathcal{C}_- вполне интегрируемы, если*

$$p(\rho) = c_0 \rho^3 + c_1, \tag{5.8}$$

где c_0 и c_1 — константы.

В случае, когда распределения \mathcal{C}_+ и \mathcal{C}_- вполне интегрируемы, можно конструктивно построить решение задачи Коши для (5.4) [56].

Тем не менее, мы не будем конкретизировать зависимость $p(\rho)$. Для построения решений в общем случае нам потребуется следующая теорема [56]:

Теорема 20. *Двумерное многообразие $N \subset E$ является многозначным решением \mathcal{E} тогда и только тогда, когда касательные пространства $T_a N$ для всех точек $a \in N$ имеют одномерные пересечения $h_+(a)$ и $h_-(a)$ с плоскостями $\mathcal{C}_+(a)$ и $\mathcal{C}_-(a)$:*

$$T_a N = h_+(a) \oplus h_-(a).$$

Прямые $h_{\pm}(a) = \mathcal{C}_{\pm}(a) \cap T_a N$ называются *характеристическими направлениями*. Утверждение этой теоремы графически показано на Рис. 5.1.

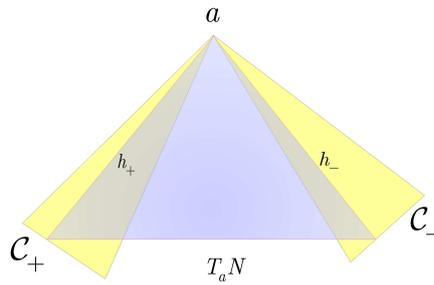


Рис. 5.1: Характеристические направления.

Будем искать однопараметрическое семейство решений, задаваемое некоторым трехмерным многообразием

$$N_1 = \{F(t, x, u, \rho) = 0\}$$

с интегрируемым распределением $h = \langle h_+, h_- \rangle$.

Возьмем два векторных поля $V_{\pm} \in \mathcal{C}_{\pm}$, касательных к N_1 , то есть $V_{\pm} \lrcorner dF = 0$, и выберем $F(t, x, u, \rho)$ таким образом, что $V_+ \wedge V_- \wedge [V_+, V_-] = 0$. Ограничивая V_{\pm} на N_1 , получаем интегрируемое распределение $h =$

$\langle h_+, h_- \rangle$, где $h_+ = V_+|_{N_1}$ и $h_- = V_-|_{N_1}$.

Рассмотрим частный случай, когда $F(t, x, \rho, u)$ не зависит от x : $F(t, x, \rho, u) = t - f(\rho, u)/\rho$. Тогда условие интегрируемости $V_- \wedge V_+ \wedge [V_-, V_+] = 0$ приводит к следующему уравнению на $f(\rho, u)$:

$$f_{uu} - A^{-2}(\rho)f_{\rho\rho} = 0, \quad (5.9)$$

Теорема 21. *Уравнение (5.9) эквивалентно волновому уравнению, если $A(\rho) = (C_1\rho + C_2)^{-2}$, где C_1 и C_2 — константы.*

В этом случае можно найти все трехмерные подмногообразия $N_1 = \{t - f(\rho, u)/\rho = 0\}$, на которых распределение $\langle V_-, V_+ \rangle$ будет интегрируемым.

5.2. Фактор-уравнения

Уравнение (5.9) может быть получено из несколько иных соображений.

Пусть x_1, \dots, x_n — независимые переменные, u^1, \dots, u^m — зависимые переменные, \mathbf{J}^k — пространство k -джетов гладких функций на \mathbb{R}^n . Пусть $\mathcal{E}_k \subset \mathbf{J}^k$ — система дифференциальных уравнений, а \mathfrak{g} — алгебра Ли ее симметрий. Тогда при определенных условиях поле рациональных дифференциальных \mathfrak{g} -инвариантов является конечнопорожденным. Более точно, справедлива глобальная теорема Ли-Трессе [71]:

Теорема 22. *Пусть $\mathcal{E}_k \subset \mathbf{J}^k$ — алгебраическое формально интегрируемое дифференциальное уравнение (система ДУ), и пусть \mathfrak{g} — алгебраическая алгебра Ли его симметрий. Тогда существуют рациональные \mathfrak{g} -инварианты $a_1, \dots, a_n, b^1, \dots, b^N$ порядка $\leq l$, такие что поле рациональных дифференциальных \mathfrak{g} -инвариантов порождается рациональными функциями этих инвариантов и производными Трессе $\frac{d^{|\alpha|} b^j}{da^\alpha}$.*

Здесь n — размерность пространства независимых переменных. Производные Трессе являются дифференцированиями вдоль инвариантов

a_i :

$$\frac{d}{da_j} = \sum_{i=1}^n A_{ij} \frac{d}{dx_i}, \quad \frac{da_i}{da_j} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} u_{\sigma i}^j \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}$$

— полные производные по координатам базы.

Вообще говоря, алгебра дифференциальных инвариантов не является свободно порожденной, между инвариантами существуют связи (сизигии — *syzygies*). Если ограничить инварианты $a_1, \dots, a_n, b^1, \dots, b^N$ на некоторое решение s (в смысле интегрального многообразия распределения Картана) уравнения \mathcal{E} , то получится (локально) $(n + N)$ функций на n -мерном многообразии. Это означает, что существует по крайней мере N независимых соотношений между ними, которые локально можно записать как $(b^j)_s = B^j(a_1|_s, \dots, a_n|_s)$. Поскольку функции a_i, b^j — \mathfrak{g} -инварианты, то функции B^j зависят от класса эквивалентности s (где отношение эквивалентности определяется алгеброй Ли симметрий).

Функции B^j не являются произвольными, а являются решениями некоторой системы дифференциальных уравнений, называемых *фактор-уравнениями*.

Дифференцируя соотношения $b^j = B^j(a_1, \dots, a_n)$ в смысле Трессе, получим

$$\frac{db^j}{da_i} = B_{a_i}^j(a_1, \dots, a_n). \quad (5.10)$$

Поскольку производные Трессе — инвариантные дифференцирования, то левая часть уравнений (5.10) — новые дифференциальные инварианты, которые связаны дифференциальными сизигиями. Таким образом, дифференциальные сизигии дают новые уравнения на функции B^j , называемые *фактор-уравнениями* [72, 74]. Для того чтобы найти фактор-уравнения, требуется исключить все переменные пространств джетов из соотношений (5.10) и, возможно, более высоких порядков. Одно из ос-

новых свойств решений фактор-уравнений состоит в том, что они представляют собой совместные с исходной системой дифференциальные связи, которыми можно переопределять исходную систему уравнений, и полученная совместная переопределенная система будет обладать той же алгеброй симметрий, что и исходная. Как известно, интегрирование переопределенных систем сводится к интегрированию вполне интегрируемого распределения Картана [23, 56, 57]. При наличии достаточного количества симметрий его можно проинтегрировать с помощью теоремы Ли-Бьянки [23, 56].

Вычислим симметрии системы (5.4). Поскольку все симметрии точечные, то их можно искать в виде

$$X = a(t, x, u, \rho) \frac{\partial}{\partial t} + b(t, x, u, \rho) \frac{\partial}{\partial x} + c(t, x, u, \rho) \frac{\partial}{\partial u} + d(t, x, u, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (5.11)$$

где функции a, b, c, d находятся из уравнения Ли:

$$L_{X^{(1)}}(F_1)|_{\mathcal{E}} = 0, \quad L_{X^{(1)}}(F_2)|_{\mathcal{E}} = 0, \quad (5.12)$$

где F_i — левые части системы (5.4), $X^{(1)}$ — продолжение векторного поля (5.11) в пространство 1-джетов $J^1(\mathbb{R}^2)$, $L_{X^{(1)}}$ — производная Ли вдоль векторного поля $X^{(1)}$.

Решая систему определяющих уравнений (5.12), приходим к следующему результату:

Теорема 23. *Алгебра Ли симметрий системы уравнений (5.4) порождается векторными полями*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, & X_4 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 &= C_1 e^{-C_1 u} Y \frac{\partial}{\partial t} + (C_1 Y u + Y' \rho + Y) e^{-C_1 u} \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

где функция $Y = Y(\rho)$ — решение ОДУ

$$-\rho A^2(\rho) C_1^2 Y + \rho Y'' + 2Y' = 0,$$

C_1 — константа.

В рассматриваемом случае $n = 2$, в качестве подалгебры Ли \mathfrak{g} выберем

$$\mathfrak{g} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle.$$

Тогда дифференциальными инвариантами нулевого порядка будут являться функции

$$b^1 = t, \quad a_1 = u, \quad a_2 = \rho.$$

В качестве базовых инвариантов выберем u и ρ . Тогда $t = B(u, \rho)$. Соответствующие производные Трессе будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} &= \frac{\rho_x}{\rho u_x^2 - \rho A^2 \rho_x^2} \frac{d}{dt} + \frac{\rho u_x + u \rho_x}{\rho u_x^2 - \rho A^2 \rho_x^2} \frac{d}{dx}, \\ \frac{d}{d\rho} &= \frac{u_x}{\rho A^2 \rho_x^2 - \rho u_x^2} \frac{d}{dt} + \frac{A^2 \rho \rho_x + u u_x}{\rho A^2 \rho_x^2 - \rho u_x^2} \frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение на функцию $B(u, \rho)$ (фактор-уравнение), требуется вычислить производные Трессе от $B(u, \rho)$ до второго порядка включительно:

$$\frac{dB}{du} = \frac{\rho_x}{u_x^2 \rho - A^2 \rho \rho_x^2}, \quad \frac{dB}{d\rho} = \frac{u_x}{A^2 \rho \rho_x^2 - u_x^2 \rho}, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{du^2} &= \frac{1}{(u_x^2 \rho - \rho_x^2 \rho A^2)^3} \left(2(A^2 + 2\rho A A') \rho \rho_x^4 u_x + \right. \\ &\quad \left. + (-\rho \rho_x^3 u_{xx} + 3\rho \rho_x^2 \rho_{xx} u_x - 2\rho_x^4 u_x) \rho A^2 + u_x^2 \rho^2 (-3\rho_x u_{xx} + \rho_{xx} u_x) \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{d\rho^2} &= \frac{1}{(-u_x^2 \rho + \rho_x^2 \rho A^2)^3} \left(-2\rho A^2 (A^2 + 2\rho A A') \rho_x^4 u_x + \rho^2 A^4 \rho_x^3 u_{xx} - \right. \\ &\quad \left. - 3\rho^2 A^4 \rho_x^2 \rho_{xx} u_x + 3\rho^2 A^2 \rho_x u_x^2 u_{xx} - \rho^2 A^2 \rho_{xx} u_x^3 + 4\rho A^2 \rho_x^2 u_x^3 - 2\rho u_x^5 \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dud\rho} = & \frac{1}{(u_x^2 \rho - \rho_x^2 \rho A^2)^3} \left((-u_x^2 \rho \rho_x^3 - \rho_x^5 \rho A^2)(A^2 + 2\rho A(\rho)A') - \right. \\ & - \rho^2 A^4 \rho_x^3 \rho_{xx} + (3\rho \rho_x^2 u_x u_{xx} - 3\rho \rho_x \rho_{xx} u_x^2 + 3\rho_x^3 u_x^2) \rho A^2 - \\ & \left. - \rho \rho_x u_x^4 + \rho^2 u_x^3 u_{xx} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Между дифференциальными инвариантами (5.13)-(5.16) существует следующая связь, которая дает фактор-уравнение:

$$A^2 \rho \frac{d^2 B}{du^2} - \rho \frac{d^2 B}{d\rho^2} - 2 \frac{dB}{d\rho} = 0.$$

Оно совпадает с (5.9) при подстановке $B(u, \rho) = f(u, \rho)/\rho$. Всякое его решение дает дополнительное соотношение к уравнениям Эйлера без нарушения условия совместности.

Пусть $f(u, \rho)$ — некоторое решение уравнения (5.9). Тогда на пространстве 1-джетов $J^1(\mathbb{R}^2)$ имеем пять соотношений, два из которых — исходные уравнения, одно — найденная связь $t - f(u, \rho)/\rho = 0$, и еще два — ее производные по t и по x . Таким образом, размерность получившейся переопределенной системы $\widehat{\mathcal{E}}$ равна 3, следовательно, двумерное распределение Картана задается одной дифференциальной 1-формой. Если выбрать (x, u, ρ) в качестве локальных координат на $\widehat{\mathcal{E}}$, то она примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega = & - \frac{\rho(f_\rho \rho - f)}{\rho^2 A^2 f_u^2 - f_\rho^2 \rho^2 + 2f_\rho f \rho - f^2} dx + \frac{(f_\rho \rho - f)(f_u u - f_\rho \rho + f)}{\rho^2 A^2 f_u^2 - f_\rho^2 \rho^2 + 2f_\rho f \rho - f^2} du + \\ & + \frac{(-\rho^2 A^2 f_u + f_\rho \rho u - f u)(f_\rho \rho - f)}{\rho^3 A^2 f_u^2 - \rho^3 f_\rho^2 + 2\rho^2 f f_\rho - f^2 \rho} d\rho. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Легко проверить что распределение, задаваемое (5.17), является вполне интегрируемым для всякого решения $f(u, \rho)$ уравнения (5.9):

$$d\omega \wedge \omega = 0.$$

Более того, оно обладает трансверсальной симметрией ∂_x , и, следовательно, может быть проинтегрировано в квадратурах по теореме Ли-Бьянки. Стоит также отметить, что распределение, задаваемое формой (5.17), совпадает с распределением, задаваемым векторными полями $\langle V_-, V_+ \rangle$ на многообразии N_1 .

5.3. Примеры решений

5.3.1. Решение с одной особенностью типа сборки

Рассмотрим одно из решений (5.9):

$$f(u, \rho) = \frac{1}{\alpha_2}(u(\rho + \alpha_3) - \alpha_1\rho - \alpha_0), \quad (5.18)$$

где α_j — константы.

Выберем (t, x, ρ) в качестве координат на N_1 . Тогда ограничения Z_{\pm} векторных полей V_{\pm} на N_1 примут вид

$$\begin{aligned} Z_{\pm} = & \frac{A(\rho + \alpha_3)^2 \mp \alpha_3(\alpha_1 + t\alpha_2) \pm \alpha_0}{(\rho + \alpha_3)^2} \partial_t \pm \frac{\alpha_2\rho}{\rho + \alpha_3} \partial_{\rho} + \\ & + \frac{(A(\rho + \alpha_3)^2 \mp \alpha_3(\alpha_1 + t\alpha_2) \pm \alpha_0) (\mp A\rho(\rho + \alpha_3) + \rho(t\alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_0)}{(\rho + \alpha_3)^3} \partial_x. \end{aligned}$$

Поскольку распределение $Z = \langle Z_+, Z_- \rangle$ интегрируемо, то можно явно найти его интеграл, и решение для $\rho(t, x)$ задается неявно соотношением

$$\begin{aligned} & \int \frac{A^2(\rho + \alpha_3)}{\alpha_2} d\rho + \frac{(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0)^2}{2\alpha_2(\rho + \alpha_3)^2} + \\ & + \frac{2x(\rho + \alpha_3)^2 - 2t(\rho^2\alpha_1 + \alpha_3(\alpha_0 + 2\rho\alpha_1)) - \rho\alpha_2(\rho + 2\alpha_3)t^2}{2(\rho + \alpha_3)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

для любой функции $A(\rho)$. Решение для скорости можно получить с помощью (5.18):

$$u = \frac{\alpha_2\rho t + \alpha_1\rho + \alpha_0}{\rho + \alpha_3}. \quad (5.20)$$

Отметим, что решение N , задаваемое (5.19) и (5.20), вообще говоря,

многозначное. Особенности проекции N на плоскость $\mathbb{R}^2(t, x)$ — множество точек, в которых дифференциальная 2-форма $(dx \wedge dt)|_N = 0$, такая кривая называется *каустикой*. Решая уравнение (5.19) относительно x и выбирая ρ в качестве координаты на каустике, получаем следующее уравнение каустики в параметрической форме:

$$x(\rho) = - \int \frac{A^2(\rho + \alpha_3)}{\alpha_2} d\rho + \frac{\rho(\rho + 2\alpha_3)(\rho + \alpha_3)^2 A^2 - \alpha_3^2 \alpha_1^2 + \alpha_0^2 \pm 2\alpha_0(\rho + \alpha_3)^2 A}{2\alpha_3^2 \alpha_2}, \quad (5.21)$$

$$t(\rho) = \frac{\pm A(\rho + \alpha_3)^2 - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_0}{\alpha_3 \alpha_2}. \quad (5.22)$$

Для получения разрывного решения из многозначного требуется закон сохранения. Запишем уравнение неразрывности с помощью (5.20) в виде:

$$\rho_t + \left(\rho \frac{\alpha_2 \rho t + \alpha_1 \rho + \alpha_0}{\rho + \alpha_3} \right)_x = 0,$$

откуда следует, что закон сохранения массы имеет вид:

$$\Theta = \rho dx - \rho \frac{\alpha_2 \rho t + \alpha_1 \rho + \alpha_0}{\rho + \alpha_3} dt.$$

На решении N форма Θ замкнута, и следовательно, локально точна. Найдем в явном виде ее потенциал. Для этого выберем (ρ, t) в качестве координат на многозначном решении N , которое задано (5.19) и (5.20). В этих координатах, с помощью (5.19) получим $x = g(\rho, t)$, а также из (5.20) $u = U(\rho, t)$, где

$$g(\rho, t) = - \int \frac{A^2(\rho + \alpha_3)}{\alpha_2} d\rho + \frac{\alpha_2^2 t^2 \rho(\rho + 2\alpha_3) + 2t\alpha_2 (\alpha_3(\alpha_0 + 2\alpha_1 \rho) + \alpha_1 \rho^2) - (\alpha_0 - \alpha_1 \alpha_3)^2}{2\alpha_2(\rho + \alpha_3)^2},$$

$$U(\rho, t) = \frac{\alpha_2 \rho t + \alpha_1 \rho + \alpha_0}{\rho + \alpha_3}.$$

Ограничение формы Θ на N есть

$$\Theta|_N = \rho g_\rho d\rho + \rho(g_t - U(\rho, t))dt.$$

Пусть $H(\rho, t)$ — потенциал формы $\Theta|_N$, то есть $\Theta|_N = H_\rho d\rho + H_t dt$. Решая переопределенную систему на $H(\rho, t)$

$$H_\rho = \rho g_\rho, \quad H_t = \rho(g_t - U(\rho, t)),$$

получим

$$H(\rho, t) = \frac{(\alpha_2 \rho t - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_0) (\alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_3((t\alpha_2 + 2\alpha_1)\rho - \alpha_0) - 2\rho\alpha_0)}{2\alpha_2(\rho + \alpha_3)^2} - \int \frac{\rho(\rho + \alpha_3)A^2}{\alpha_2} d\rho.$$

Таким образом, для нахождения точек разрыва, то есть фронта ударной волны, требуется решить следующую систему уравнений для заданного момента времени t :

$$H(\rho_1, t) = H(\rho_2, t), \quad g(\rho_1, t) = g(\rho_2, t),$$

где ρ_1 и ρ_2 — значения плотности по разные стороны разрыва.

Идеальный газ

Проиллюстрируем указанный метод нахождения каустик и фронта ударной волны на примере гомэнтропических течений идеальных газов.

Воспользовавшись (1.30), можно показать, что в случае идеального газа функция $A(\rho) = A_0 \rho^m$, где

$$A_0 = \sqrt{R \left(1 + \frac{2}{n}\right) \exp\left(\frac{2s_0}{Rn}\right)}, \quad m = \frac{1}{n} - 1.$$

Решение для скорости (5.20) и для плотности (5.19) можно записать как

$$\begin{aligned} & \frac{A_0^2 \rho^{2m+1} (2m\rho + 2m\alpha_3 + \rho + 2\alpha_3)}{2\alpha_2(m+1)(2m+1)} + \frac{(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0)^2}{2\alpha_2(\rho + \alpha_3)^2} + \\ & + \frac{2x(\rho + \alpha_3)^2 - 2t(\rho^2\alpha_1 + \alpha_3(\alpha_0 + 2\rho\alpha_1)) - \rho\alpha_2(\rho + 2\alpha_3)t^2}{2(\rho + \alpha_3)^2} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (5.21) для каустики в случае идеального газа и гомэнтропического процесса имеют вид:

$$\begin{aligned} x(\rho) &= -\frac{A_0^2}{\alpha_2} \left(\frac{\rho^{2m+2}}{2m+2} + \frac{\rho^{2m+1}}{2m+1} \right) + \\ & + \frac{\rho(\rho + 2\alpha_3)(\rho + \alpha_3)^2 A_0^2 \rho^{2m} - \alpha_3^2 \alpha_1^2 + \alpha_0^2 \pm 2\alpha_0(\rho + \alpha_3)^2 A_0 \rho^m}{2\alpha_3^2 \alpha_2}, \\ t(\rho) &= \frac{\pm A_0 \rho^m (\rho + \alpha_3)^2 - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_0}{\alpha_3 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Потенциал $H(\rho, t)$ в случае идеального газа имеет вид:

$$\begin{aligned} H(\rho, t) &= \frac{(\alpha_2 \rho t - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_0) (\alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_3 ((t\alpha_2 + 2\alpha_1)\rho - \alpha_0) - 2\rho\alpha_0)}{2\alpha_2(\rho + \alpha_3)^2} - \\ & - \frac{A_0^2}{\alpha_2} \left(\frac{\rho^{2m+3}}{2m+3} + \frac{\alpha_3 \rho^{2m+2}}{2m+2} \right). \end{aligned}$$

Сечения многозначного решения в различные моменты времени показаны на Рис. 5.2.

Каустика и фронт ударной волны на плоскости (t, x) показаны на Рис. 5.3.

Газ Ван дер Ваальса

В случае газа Ван дер Ваальса решение имеет вид

$$t + \alpha_2 + \frac{C_2 - u}{\alpha_1 \rho} + \frac{C_3 u}{\alpha_1} = 0, \quad (5.23)$$

и

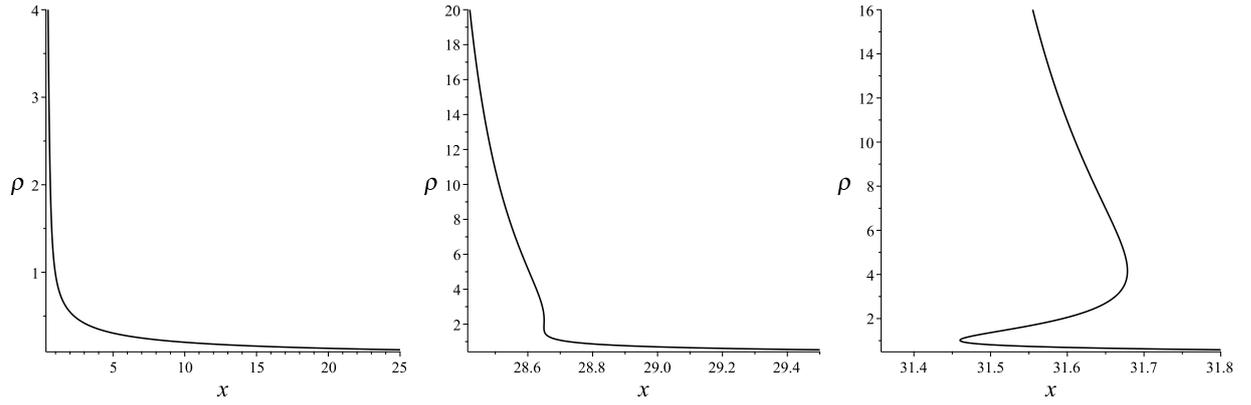


Рис. 5.2: График плотности в случае $n = 3$ в моменты времени $t = 0$, $t = 6.58$, $t = 7$

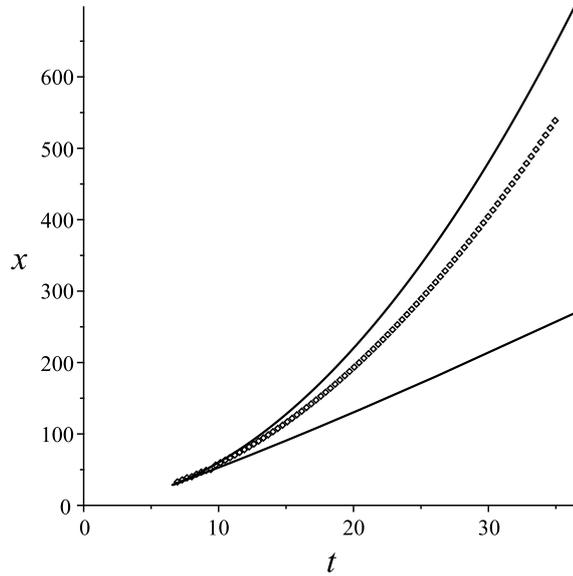


Рис. 5.3: Каустика (линия) и фронт ударной волны (точки) для $n = 3$

$$\begin{aligned}
 0 = & x + \alpha_3 + \frac{1}{\alpha_1} \left(C_1 \ln \rho - C_1 C_3 \rho + \frac{C_3 u^2}{2} + \frac{u(C_2 - u)}{\rho} - \right. \\
 & - C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho} \right)^{C_6+1} \frac{2\rho^2 C_3^2 - C_7^2 (C_6 + 1)(C_3 \rho (C_6 + 3) - C_6 - 2)}{(C_6 + 1)(C_6 + 2)(C_6 + 3) C_7^3 \rho^2} - \\
 & \left. - C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho} \right)^{C_6+1} \frac{C_3 C_7 \rho (C_3 \rho (C_6 + 3) - 2C_6 - 2)}{(C_6 + 1)(C_6 + 2)(C_6 + 3) C_7^3 \rho^2} \right),
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 = -6, \quad C_3 = -1, \quad C_5 = 24 \left(1 + \frac{2}{n}\right) \exp\left(\frac{3s_0}{4n}\right), \\
C_6 = -2 - \frac{2}{n}, \quad C_7 = 3.
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

График многозначного решения для плотности показан на Рис. 5.4. Была использована подстановка (5.25), где $C_5 = 240$, $n = 3$, вместе с $C_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

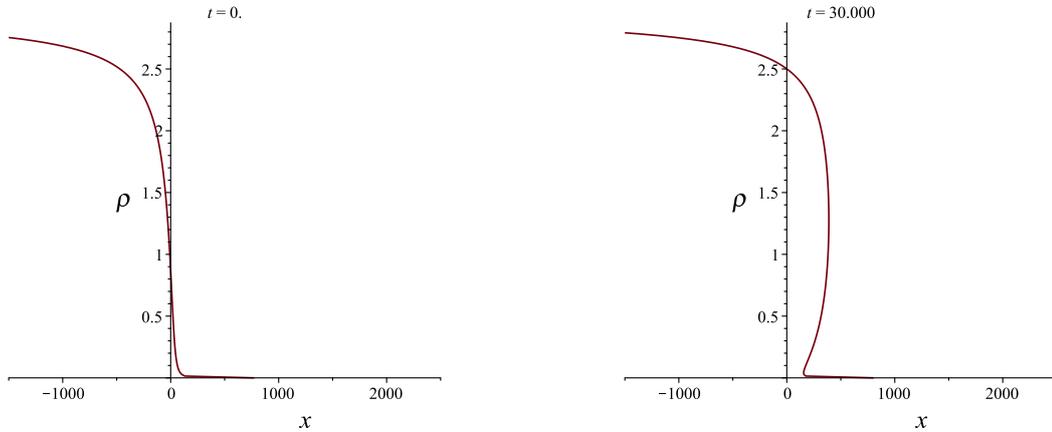


Рис. 5.4: График плотности в случае $n = 3$ в моменты времени $t = 0$, $t = 30$

Уравнения каустики в параметрической форме имеют вид:

$$t(\rho) = -\alpha_2 - \frac{C_2 C_3}{\alpha_1} \pm \frac{(C_3 \rho - 1)^2}{\alpha_1 \rho^2} \sqrt{C_1 \rho^3 + C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho}\right)^{C_6}}, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
x(\rho) = & -\frac{1}{2\alpha_1} (2C_1 \ln \rho + C_1(C_3^3 \rho^3 - 4\rho^2 C_3^2 + 3C_3 \rho - 2) + C_3 C_2^3 + 2\alpha_1 \alpha_3) \pm \\
& \pm \frac{C_2(C_3 \rho - 1)^2}{\alpha_1 \rho^2} \sqrt{C_1 \rho^3 + C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho}\right)^{C_6}} - \\
& - \frac{C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho}\right)^{C_6}}{2(C_6 + 2)(C_6 + 3)C_7^3 \alpha_1 (C_6 + 1) \rho^3} \cdot \\
& \cdot (C_3^3(-4 + C_7^3(C_6^3 + 6C_6^2 + 11C_6 + 6)) + (-2C_6 - 6)C_7) \rho^3 - \\
& - 2C_7((2(C_6^3 + 6C_6^2 + 11C_6 + 6))C_7^2 + (-C_6^2 - 3C_6)C_7 - C_6)C_3^2 \rho^2 + \\
& + C_7^2(C_6 + 1)((C_6 + 3)(5C_6 + 12)C_7 - 2C_6)C_3 \rho - \\
& - 2C_7^3(C_6 + 4)(C_6 + 2)(C_6 + 1).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Потенциал $H(\rho, t)$ в случае газа Ван дер Ваальса имеет вид

$$\begin{aligned}
H(\rho, t) = & \frac{\rho}{2\alpha_1(C_3 \rho - 1)^2} (C_1 C_3^3 \rho^3 - 4C_1 C_3^2 \rho^2 + \\
& + \rho (C_2^2 C_3^2 + (2C_2(t + \alpha_2)\alpha_1 + 5C_1)C_3 + \alpha_1^2(t + \alpha_2)^2) - 2C_1) - \\
& - \frac{C_5 \left(C_3 + \frac{C_7}{\rho}\right)^{C_6}}{(C_6 + 2)\alpha_1 C_7^2 (C_6 + 1) \rho^2} (C_3 \rho + C_7) \cdot \\
& \cdot (C_3(1 + (C_6 + 2)C_7)\rho - (C_6 + 1)C_7).
\end{aligned}$$

Каустики вместе с фронтом ударной волны показаны на Рис. 5.5.

Время существования решения, то есть временной промежуток, внутри которого решение (5.23)-(5.24) гладкое, дается следующей теоремой.

Теорема 13. *Решение (5.23)-(5.24) единственно и гладкое, если $t \in [0, t^*)$, где*

$$t^* = \frac{1}{\alpha_1} \left(-C_2 C_3 - \alpha_1 \alpha_2 + (C_3 - 3)^2 \sqrt{\frac{C_1}{27} + C_5 (C_3 + 3C_7)^{C_6}} \right),$$

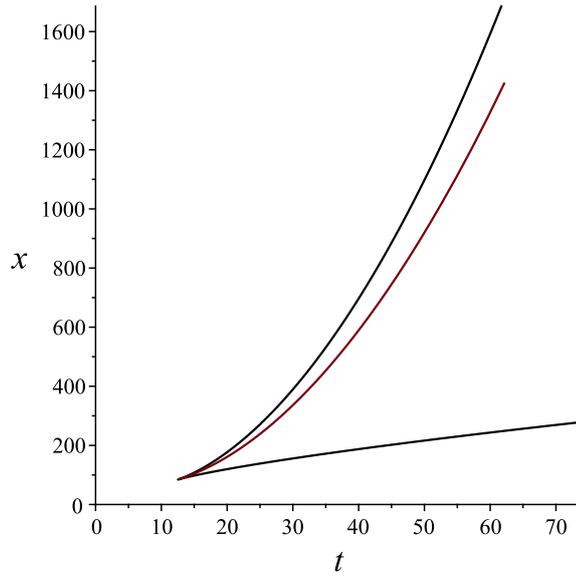


Рис. 5.5: Каустика (черная) и фронт ударной волны (красный) для $n = 3$.

и в случае (5.25), где $C_5 = 240$, $n = 3$, вместе с $C_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ приблизительно $t^* = 12.53$.

Имея решение, можно перенести кривую фазового перехода из пространства термодинамических переменных на плоскость $\mathbb{R}^2(t, x)$, определив тем самым местоположение различных фаз среды. Фазовые переходы вместе с фронтом ударной волны представлены на Рис. 5.6. Была использована подстановка (5.25), где $C_5 = 240$, $n = 3$, вместе с $C_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

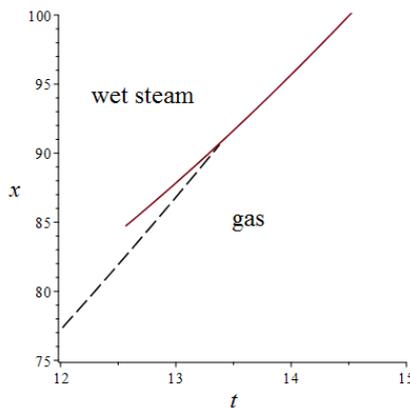


Рис. 5.6: Кривая фазового перехода (пунктирная линия) и фронт ударной волны (красная линия).

Анализ фазовых переходов показал, что ударные волны могут сопро-

вождаться фазовыми переходами, что показано на Рис. 5.6, где кривая фазового перехода пересекается с фронтом ударной волны, по одну сторону от кривой разрыва наблюдается газовая фаза, тогда как на другой стороне — влажный пар.

5.3.2. Решение с двумя особенностями типа сборки

Найдем интеграл дифференциальной 1-формы (5.17).

Векторное поле ∂_x является инфинитезимальной симметрией распределения, задаваемого (5.17), и следовательно, дифференциальная 1-форма $\varkappa = \omega/\omega(\partial_x)$ замкнута и локально точна, то есть $\varkappa = dJ$ для некоторой функции $J \in C^\infty(E)$, и $J = \text{const}$ вместе с $t - f(u, \rho)/\rho = 0$ дают решение системы \mathcal{E} .

Применим метод разделения переменных к уравнению (5.9) в виде: $f(u, \rho) = \rho\mu(u) + \nu(\rho)$. Тогда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения на $\mu(u)$ и $\nu(\rho)$:

$$\mu'' = \lambda, \quad \nu'' = \lambda\rho A^2,$$

для некоторой константы λ , и тогда первая квадратура для системы \mathcal{E} будет иметь вид:

$$t = \frac{\lambda u^2}{2} + \alpha_0 u + \frac{\alpha_2}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \int Q(\rho) d\rho + t_0, \quad (5.28)$$

где α_j, t_0 — константы, $Q(\rho) = \int \rho A^2 d\rho$.

Дифференциальная 1-форма \varkappa имеет вид

$$\begin{aligned} \varkappa = dx - & \left(\lambda u^2 + \alpha_0 u - \lambda Q(\rho) + \frac{\lambda}{\rho} \int Q(\rho) d\rho + \frac{\alpha_2}{\rho} \right) du + \\ & + \left(\frac{\lambda u}{\rho^2} \int Q(\rho) d\rho - \frac{\lambda u}{\rho} Q(\rho) + \rho A^2(\rho)(\lambda u + \alpha_0) + \frac{\alpha_2 u}{\rho^2} \right) d\rho. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Интегрируя (5.29), получаем вторую квадратуру для \mathcal{E} :

$$x = \frac{\lambda u^3}{3} - \lambda u Q(\rho) + \frac{\alpha_0 u^2}{2} + \frac{\lambda u}{\rho} \int Q(\rho) d\rho + \frac{\alpha_2 u}{\rho} - \alpha_0 Q(\rho) + x_0, \quad (5.30)$$

где x_0 — константа.

Формулы (5.28), (5.30) задают многозначное решение системы \mathcal{E} . Оно также может быть применено к произвольной модели термодинамического состояния, поскольку функция $p(\rho)$ не конкретизирована.

Особенности проекции многозначного решения, заданного (5.28), (5.30), на пространство независимых переменных появляются в точках вырождения формы $dx \wedge dt$. Уравнение $(dx \wedge dt)|_N = 0$ задает соответствующую каустику, параметрические уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} x(\rho) &= x_0 - \frac{Z_{\pm}^3}{3\lambda^2 A^3 \rho^6} + \frac{\alpha_0 Z_{\pm}^2}{2\lambda^2 A^2 \rho^4} \pm \frac{\alpha_0 Z_{\pm}}{\lambda \rho} \mp \frac{Z_{\pm}^2}{\lambda A \rho^3} - \alpha_0 Q, \\ t(\rho) &= \frac{Z_{\pm}^2}{2\lambda A^2 \rho^4} + \frac{Z_{\pm}}{\rho} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\lambda \rho A}\right) - \alpha_0 \rho A + \lambda Q + t_0, \end{aligned}$$

где

$$Z_{\pm} = \alpha_0 \rho^2 A \mp \lambda \rho Q \pm \lambda \int Q d\rho \pm \alpha_2.$$

Выберем (t, ρ) в качестве координат на решении N . Разрешая (5.28) относительно u , получаем два корня

$$u = U_{\pm}(\rho, t) = -\frac{\alpha_0}{\lambda} \pm \frac{1}{\lambda \rho} \sqrt{2\rho \left(\rho \lambda (t - t_0) + \frac{\rho \alpha_0^2}{2} - \lambda \alpha_2 - \lambda^2 \int Q d\rho \right)}. \quad (5.31)$$

Подставляя это соотношение в (5.2), получаем

$$\rho_t + (\rho U_{\pm})_x = 0,$$

и следовательно, закон сохранения имеет вид:

$$\Theta_{\pm} = \rho dx - \rho U_{\pm} dt. \quad (5.32)$$

Ограничение $\Theta_{\pm}|_N$ формы (5.32) на решение (5.28),(5.30) является замкнутой формой, и локально $\Theta_{\pm}|_N = dH_{\pm}$, потенциал $H_{\pm}(\rho, t)$ имеет вид

$$H_{\pm}(\rho, t) = \mp \frac{1}{\lambda\sqrt{\rho}} \sqrt{2 \left(\rho\lambda(t - t_0) + \frac{\rho\alpha_0^2}{2} - \lambda\alpha_2 - \lambda^2 \int Q d\rho \right)} \cdot \left(\rho\lambda Q - \lambda \int Q d\rho - \alpha_2 \right).$$

Для нахождения точек разрыва нужно решить систему

$$H_{\pm}(\rho_1, t) = H_{\pm}(\rho_2, t), \quad x(\rho_1, t) = x(\rho_2, t),$$

для каждого момента времени t относительно $\rho_{1,2}$ — значения плотностей на каждой из ветвей разрывного решения. Зависимость $x(\rho, t)$ находится как результат подстановки (5.31) в (5.30).

В случае идеального газа для гоэнтропических течений имеем следующие квадратуры:

$$t = \frac{\lambda u^2}{2} + \alpha_0 u + \frac{\alpha_2}{\rho} + \frac{\lambda A_0^2 \rho^{2m+2}}{2(2m^2 + 5m + 3)} + t_0,$$

$$x = \frac{1}{\rho(2m^2 + 5m + 3)} \left((m+1)(2m+3) \left(\alpha_2 u + \rho \left(\frac{\lambda u^3}{3} + \frac{\alpha_0 u^2}{2} + x_0 \right) \right) - A_0^2 \rho^{2m+3} \left(m(\lambda u + \alpha_0) + \lambda u + \frac{3\alpha_0}{2} \right) \right).$$

Уравнения каустик имеют вид

$$x(\rho) = x_0 - \frac{Z_{\pm}^3}{3\lambda^2 A_0^3 \rho^{3m+6}} + \frac{\alpha_0 Z_{\pm}^2}{2\lambda^2 A_0^2 \rho^{2m+4}} \pm \frac{\alpha_0 Z_{\pm}}{\lambda \rho} \mp \frac{Z_{\pm}^2}{\lambda A_0 \rho^{m+3}} - \frac{\alpha_0 A_0^2 \rho^{2m+2}}{2(m+1)},$$

$$t(\rho) = \frac{Z_{\pm}^2}{2\lambda A_0^2 \rho^{2m+4}} + \frac{Z_{\pm}}{\rho} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\lambda A_0 \rho^{m+1}} \right) - \alpha_0 A_0 \rho^{m+1} + \frac{\lambda A_0^2 \rho^{2m+2}}{2(m+1)} + t_0,$$

где

$$Z_{\pm} = \alpha_0 A_0 \rho^{m+2} \mp \frac{\lambda A_0^2 \rho^{2m+3}}{2m+3} \pm \alpha_2.$$

Графики многозначного решения представлены на Рис. 5.7, где была использована подстановка $A_0 = 1$, $\alpha_0 = 1$, $t_0 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\lambda = 1$, $x_0 = 0$.

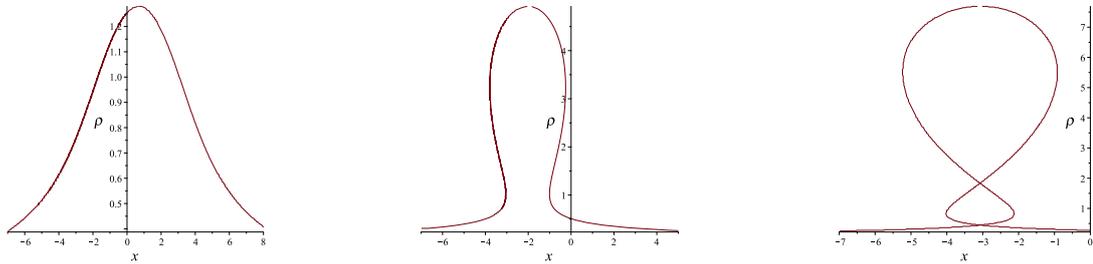


Рис. 5.7: График плотности для $n = 3$ в моменты времени $t = 0$, $t = 2.7$, $t = 3.75$

Линии разрыва вместе с каустиками показаны на Рис. 5.8. Можно наблюдать следующее явление. Эволюция гладкого начального условия со временем приводит к образованию двух сборок, движущихся друг к другу. Однако, как показывают численные вычисления, два разрыва встречаются только асимптотически при $t \rightarrow +\infty$.

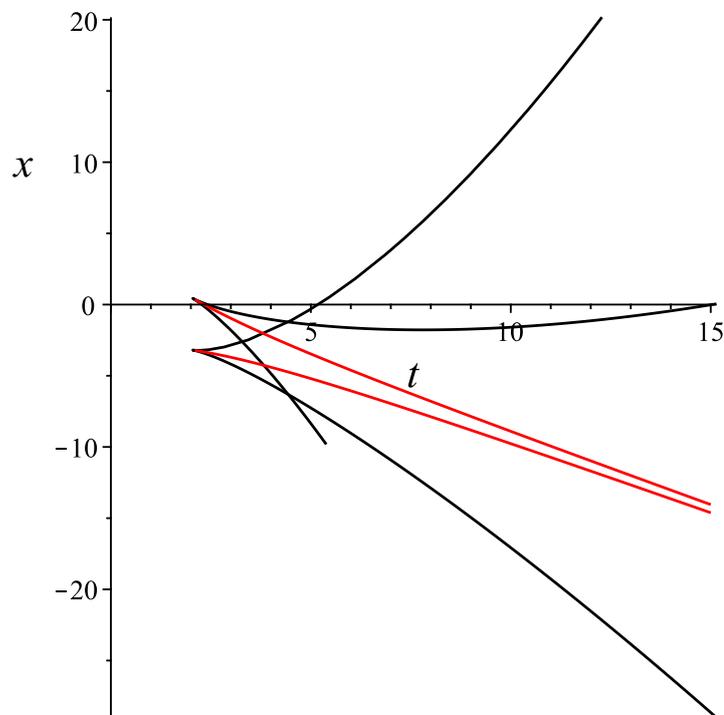


Рис. 5.8: Каустики (черный) и фронты ударных волн (красный).

5.4. Основные результаты главы

1. Найдены новые классы многозначных точных решений уравнений Эйлера для произвольного класса реальных газов и термодинамических процессов и построены соответствующие разрывные решения, которым отвечают ударные волны.
2. Для различных конкретных примеров таких решений установлены области появления особенностей проекции на плоскость независимых переменных (каустики), получены области возникновения фазового перехода (в модели Ван дер Ваальса), и возникновения ударных волн. Установлено, что ударная волна может сопровождаться также фазовым переходом.
3. Установлено условие интегрируемости характеристических распределений, ассоциированных с уравнениями Эйлера. Этому условию отвечают определенные термодинамические состояния сред (политропические газы с показателем политропы 3).
4. Получено фактор-уравнение для уравнений Эйлера относительно группы трансляций вдоль x , установлено условие его приводимости к волновому уравнению. Этому условию отвечает определенное термодинамическое состояние среды, для которого можно найти все x -инвариантные совместные с уравнениями Эйлера дифференциальные связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты диссертации:

1. Решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой и построено ее решение в квадратурах. Установлены условия, при которых инвариантное многообразие гамильтоновой системы имеет различное число компонент связности. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы.
2. Исследованы термодинамические лагранжевы и лежандровы многообразия различных газов, таких как газ Ван дер Ваальса, газ Пенга-Робинсона, газ Редлиха-Квонга. Получены области фазового перехода, особенности проекции термодинамических лагранжевых и лежандровых многообразий на пространство интенсивных переменных.
3. Получена новая область допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса, вычисленная с помощью формы 4-го порядка. Полученная область отличается от ранее известной, рассчитываемой с помощью формы 2-го порядка, в области критической точки.
4. Решения основных уравнений стационарной фильтрации были получены в общем виде путем сведения их к уравнению Лапласа для всех моделей термодинамических состояний среды.
5. Установлено, что в общем случае эти решения многозначные, были найдены условия, при которых решение является единственным. Оно совпадает с условием термодинамической устойчивости.
6. Рассмотрен случай точечных источников в области фильтрации для различных моделей термодинамических состояний. Было установлено, что в окрестности стоков наблюдается конденсация среды.
7. Для уравнений нестационарной фильтрации были найдены конечномерные динамики первого порядка, и соответствующие им решения были получены для любой модели термодинамического со-

стояния газа. Области фазовых переходов в пространстве-времени были построены для двух типов процессов — адиабатического и изоэнтальпического.

8. Динамики второго порядка были найдены для специальных видов процессов. Они отличаются от известных ранее динамик 2 порядка для этого уравнения. Соответствующие им решения разрушаются за конечное время.
9. Решена задача адиабатического истечения реального газа в трехмерном пространстве из источника заданной интенсивности с учетом фазовых переходов. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера для произвольной модели термодинамического состояния среды.
10. Установлено, что вблизи источника наблюдается конденсация среды. Установлена область существования решений и асимптотическое поведение решений на бесконечности. Установлено, что найденные решения регулярны на бесконечности.
11. Для уравнения Навье-Стокса построены асимптотические разложения решений относительно малого параметра (в случае больших и малых интенсивностей источника).
12. Найдены новые классы многозначных точных решений уравнений Эйлера для произвольного класса реальных газов и термодинамических процессов и построены соответствующие разрывные решения, которым отвечают ударные волны.
13. Для различных конкретных примеров таких решений установлены области появления особенностей проекции на плоскость независимых переменных (каустики), получены области возникновения фазового перехода (в модели Ван дер Ваальса), и возникновения ударных волн. Установлено, что ударная волна может сопровождаться также фазовым переходом.
14. Установлено условие интегрируемости характеристических распределений, ассоциированных с уравнениями Эйлера. Этому условию отвечают определенные термодинамические состояния сред (по-

литропические газы с показателем политропы γ).

15. Получено фактор-уравнение для уравнений Эйлера относительно группы трансляций вдоль x , установлено условие его приводимости к волновому уравнению. Этому условию отвечает определенное термодинамическое состояние среды, для которого можно найти все x -инвариантные совместные с уравнениями Эйлера дифференциальные связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М: ФИЗМАТЛИТ. 1986. 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
3. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge Univ. Press. 2000.
4. Scheidegger A.E. The physics of flow through porous media. Revised edition. The Macmillan Co., New-York. 1960.
5. Leibenson L.S. Motion of natural liquids and gases in a porous medium. Gostekhizdat, Moscow. 1947.
6. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. McGraw-Hill, New-York. 1937.
7. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра. 1993. 416 с.
8. Aziz K., Settary A. Petroleum reservoir simulation. London: Applied Science Publishers Ltd. 1979. 476 pp.
9. Henk H. Fluids in Porous Media. Transport and phase changes. Morgan & Claypool Publishers. 2016. 89 pp.
10. Masoodi R., Pillai K.M. Wicking in Porous Materials: Traditional and Modern Modeling Approaches. New York: CRC Press Taylor & Francis Group. 2013. 380 pp.
11. Фортов В. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
12. Maikov I.L., Zaichenko V.M., Torchinsky V.M. Theoretical Investigations of Filtration Process of Hydrocarbon Mixtures in Porous Media // 9th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics. 2012. p. 1266–1269.
13. Kachalov V.V, Molchanov D.A., Sokotushchenko V.N., Zaichenko V.M. Mathematical modeling of gas-condensate mixture filtration in porous

- media taking into account non-equilibrium of phase transitions // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 774 (1). Article 012043.
14. Duyunova A., Lychagin V., Tychkov, S. Non-stationary adiabatic filtration of gases in porous media // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7(1) p. 25-33.
 15. Kruglikov B., Lychagina O. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation // Lobachevskii J. Math. 2005. Vol. 19 p. 13–28.
 16. Lychagin V., Lychagina O. Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Equations // Nonlinear Dynamics. 2007 Vol. 48 (1-2) p. 29–48.
 17. Akhmetzianov A., Kushner A., Lychagin V. Finite dimensional dynamics for nonlinear filtration equation // Procedia computer science. 2017. Vol. 112 p. 1361–1368.
 18. Kushner A., Matviichuk R. Exact solutions of the Burgers–Huxley equation via dynamics // J. Geom. Phys. 2020. Vol. 151. Article 103615.
 19. Kushner A., Gorinov A. Dynamics of Evolutionary PDE Systems // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41(12). p. 2448–2457.
 20. Kushner A., Kushner E. Dynamics and Exact Solutions of Third-order Nonlinear Evolutionary Differential Equations // Proceedings of the IEEE. 2020. p. 1–4. doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247716.
 21. Ландау Л.Д. Новое точное решение уравнений Навье-Стокса // Доклады АН СССР. 1944. Т. 44. с. 311–314.
 22. Броман Г.И., Руденко О.В. Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения // УФН. 2010. Т. 80(1). с. 97–104.
 23. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Factorial, Moscow. 1997.
 24. Squire H.B. The round laminar jet // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1951. Vol. 4(3). p. 321–329.
 25. Roop M.D. Singular Solutions in Nonlinear Models of Fluid Dynamics // Proceedings of the 11th International Conference

- «Management of Large-Scale System Development» (MLSD). 2018. doi: 10.1109/MLSD.2018.8551782.
26. Gibbs J.W. A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic Properties of Substances by Means of Surfaces // Transactions of the Connecticut Academy. 1873. Vol. 1. p. 382–404.
 27. Mrugala R. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics // Reports on Mathematical Physics. 1978. Vol. 14(3). p. 419–427.
 28. Ruppeiner G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory // Reviews of Modern Physics. 1995. Vol. 67(3). p. 605–659.
 29. Lychagin V. Contact Geometry, Measurement, and Thermodynamics. // Nonlinear PDEs, Their Geometry and Applications. Kycia, R., Schneider, E., Ulan, M., Eds.; Birkhäuser: Cham, Switzerland. 2019. p. 3–52.
 30. Kullback S. Information theory and statistics. John Willey & Sons. 1959.
 31. Carnot S., Thurston R.H. (ed.). Reflections on the Motive Power of Heat. John Willey & Sons.: New York. 1897.
 32. Curzon F.L., Alborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output // American Journal of Physics. 1975. Vol. 43. p. 22–24.
 33. Rubin M.H. Optimal configuration of a class of irreversible heat engines // Physical Review A. 1979. Vol. 19(3). p. 1272–1276, p. 1277–1289.
 34. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience: New York. 1962.
 35. Girsanov I.V. Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. Springer: Berlin. 1979.
 36. Rozonoer L.I., Tsirlin A.M. Optimal control of thermodynamic processes. Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44(1), p. 55–62.
 37. Rozonoer L.I., Tsirlin A.M. Optimal control of thermodynamic processes. Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44(2), p. 209–

- 220.
38. Rozonoer L.I., Tsirlin A.M. Optimal control of thermodynamic processes. *Automation and Remote Control*. 1983. Vol. 44(3), p. 314–326.
 39. Audin M. *Spinning Tops: A Course on Integrable Systems*. New York: Cambridge University Press. 1996.
 40. Kovalevskaya S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica* (in French). 1889. Vol. 12. p. 177–232.
 41. Toda M. Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1967. Vol. 22. p. 431–436.
 42. Веселов А.П., Шабат А.Б. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера // *Функц. анализ и его прил.* 1993. Т. 27. № 2. с. 1–21.
 43. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I. Динамические системы 4 // *Итоги науки и техн. М.: ВИНТИ*, 1985. Т. 4. с. 179–277.
 44. Arnold V. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag: New York. 1989.
 45. Arnold V. *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Springer Netherlands. 1990.
 46. Arnold V. *Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1984.
 47. Arnold V., Gusein-Zade S., Varchenko, A. *Singularities of Differentiable Maps*. Birkhäuser, Basel. 1985.
 48. Zeldovich A., Kompaneets I. *Theory of Detonation*. Academic Press. 1960.
 49. Huang S.J., Wang R. On blowup phenomena of solutions to the Euler equations for Chaplygin gases // *Applied Mathematics and Computation*. 2013. Vol. 219. p. 4365–4370.
 50. Rosales R., Tabak E. Caustics of weak shock waves // *Physics of Fluid*. 1997. Vol. 10(1). p. 206–222.

51. Chaturvedi R., Gupta P., Singh L.P. Evolution of weak shock wave in two-dimensional steady supersonic flow in dusty gas // *Acta Astronautica*. 2019. Vol. 160. p. 552–557.
52. Poludnenko A., Oran E. The interaction of high-speed turbulence with flames: Global properties and internal flame structure // *Combustion and Flame*. 2010. Vol. 157. p. 995–1011.
53. Poludnenko A., Gardiner T., Oran E. Spontaneous Transition of Turbulent Flames to Detonations in Unconfined Media // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. Article 054501.
54. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V. *Blow-Up in Nonlinear Equations of Mathematical Physics*. De Gruyter. 2018.
55. Lychagin V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena // *Acta Appl. Math.* 1985. Vol. 3(2). p. 135–173.
56. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. *Contact geometry and nonlinear differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge. 2007.
57. Vinogradov A., Krasilshchik I., Lychagin V. *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*. Gordon and Breach, New York. 1996.
58. Ovsiannikov L. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press. 1982.
59. Olver P. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. 1986.
60. Akhmetzyanov A., Kushner A., Lychagin V. Control of displacement front in a model of immiscible two-phase flow in porous media // *Doklady Mathematics*. 2016. Vol. 94(1). p. 378–381.
61. Akhmetzyanov A., Kushner A., Lychagin V. Integrability of Buckley-Leverett's filtration model // *IFAC-PapersOnLine*. 2016 Vol. 49(12). p. 1251–1254.
62. Akhmetzyanov A., Kushner A., Lychagin V. Shock waves in initial

- boundary value problem for filtration in two-phase 2-dimensional porous media // *Global and Stochastic Analysis*. 2016. Vol 3(2). p. 41–46.
63. Tunitsky D. On the global solubility of the Cauchy problem for hyperbolic Monge-Ampère systems // *Izvestiya: Mathematics*. 2018. Vol. 82(5). p. 1019–1075.
 64. Tunitsky D. On Global Solvability of Initial Value Problem for Hyperbolic Monge-Ampère Equations and Systems // *Doklady Mathematics*. 2017. Vol. 96(1). p. 1–3.
 65. Tunitsky D. On multivalued solutions of equations of one-dimensional gas flow // *Proceedings of the 12th International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD)*. 2019. p. 1–3.
 66. Туницкий Д.В., Богаевский И.А. Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*. 2020. Т. 308. С. 76–87.
 67. Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // *УМН*. 1979. Т. 4(1). С. 137–165.
 68. Лычагин В.В. Нелинейные дифференциальные уравнения и контактная геометрия // *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 238(2). С. 273–276.
 69. Banos V., Gibbon J., Roulstone I., Rubtsov V. Kähler Geometry and the Navier-Stokes Equations. arXiv:nlin/0509023. 2005.
 70. Banos V., Roulstone I., Rubtsov V. Monge-Ampère structures and the geometry of incompressible flows // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016. Vol. 49(24). Article 4003. doi: 10.1088/1751-8113/49/24/244003.
 71. Kruglikov B., Lychagin V. Compatibility, Multi-Brackets and Integrability of Systems of PDEs // *Acta Appl. Math*. 2010. Vol. 109. p. 151–196.
 72. Kruglikov B., Lychagin V. Global Lie-Tresse theorem // *Selecta Math*. 2016. Vol. 22. p. 1357–1411.
 73. С.И. Свинолупов, В.В. Соколов. Факторизация эволюционных урав-

- нений // УМН. 1992. Т. 47. №3(285). с. 115–146.
74. Schneider E. Solutions of second-order PDEs with first-order quotients // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41(12). p. 2491–2509.
 75. Lychagin V., Yumaguzhin V. On Geometric Structures of 2-Dimensional Gas Dynamics Equations // Lobachevskii J. Math. 2009. Vol. 30(4). p. 327–332.
 76. Lychagin V., Yumaguzhin V. Minkowski Metrics on Solutions of the Khokhlov-Zabolotskaya Equation // Lobachevskii J. Math. 2009. Vol. 30(4). 333–336.
 77. Peng B.Y., Robinson D.B. A New Two-Constant Equation of State // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. Vol. 15. p. 59–64.
 78. Redlich O., Kwong J.N.S. On the Thermodynamics of Solutions // Chem. Rev. 1949. Vol. 44(1). p. 233–244.
 79. Новиков М.А. О приложении форм выше второго порядка в задачах устойчивости движения // Иркутск: Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. Т. 2(22). С. 114–119.
 80. Schneider E. Differential invariants of measurements, and their relation to central moments // Entropy. 2020. Vol. 22(10). Article 1118.
 81. Modin K., Viviani M. A Casimir preserving scheme for long-time simulation of spherical ideal hydrodynamics // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 884. A-22.
 82. Viviani M. A minimal-variable symplectic method for isospectral flows // BIT Numerical Mathematics. 2020. Vol. 60, p. 741–758.
 83. Bauer M., Modin K. Semi-invariant Riemannian metrics in hydrodynamics // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2020. Vol. 59(2). Article 65.
 84. Roulstone I., Sewell M.J. The mathematical structure of theories of semigeostrophic type // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. 1997. Vol. 355. p. 2489-2517.
 85. Li Yi A., Olver P., Rosenau P. Non-Analytic Solutions of Nonlinear

- Wave Models // Nonlinear Theory of Generalized Functions. Research Notes in Mathematics. 1998. Vol. 401. p. 129-145.
86. Roop M. Singularities in one-dimensional Euler flows // J. Geom. Phys. 2021. Vol. 166. Article 104272.
 87. Lychagin V., Roop M. Phase transitions in filtration of Redlich-Kwong gases // J. Geom. Phys. 2019. Vol. 143. p. 33–40.
 88. Lychagin V., Roop M. Steady filtration of Peng-Robinson gases in a porous medium // Global and Stochastic Analysis. 2019. Vol. 6(2). p. 59–74.
 89. Lychagin V., Roop M. Critical Phenomena in Filtration Processes of Real Gases // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, Iss. 3. p. 382–399.
 90. Lychagin V., Roop M. Critical phenomena and singular solutions in non-stationary filtration of real gases // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7, Iss. 1. p. 73–86.
 91. Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д. Контактная геометрия в оптимальном управлении термодинамическими процессами в газах // Доклады Российской Академии Наук. 2020. Т. 493(1). С. 99-103; Kushner A., Lychagin V., Roop M. Contact Geometry in Optimal Control of Thermodynamic Processes for Gases // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 102(1). p. 346-349.
 92. Kushner A., Lychagin V., Roop. M. Optimal Thermodynamic Processes for Gases // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 4. p. 448 (1-14).
 93. Lychagin V., Roop. M. On Higher Order Structures in Thermodynamics // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 10. p. 1147 (1-8).
 94. Lychagin V., Roop. M. Real gas flows issued from a source // Analysis and Mathematical Physics. 2020. Vol. 10, Iss. 1. p. 3 (1-16).
 95. Lychagin V., Roop. M. Shock Waves in Euler Flows of Gases // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, Iss. 12. p. 2466–2472.
 96. Lychagin V., Roop. M. Singularities in Euler Flows: Multivalued Solutions, Shockwaves, and Phase Transitions // Symmetry. 2021. Vol. 13, Iss. 1. p. 54 (1-11).
 97. Lychagin V., Roop. M. Critical Phenomena in Darcy and Euler Flows

- of Real Gases // E. Schneider, M. Ulan (eds). Differential Geometry, Differential Equations, and Mathematical Physics. Basel, Switzerland: Springer Nature. 2021. p. 151-186.
98. Лычагин В.В., Рооп М.Д. Стационарная фильтрация реальных газов // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского (Казань, 2019). Казань: Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. Т. 57. С. 220–224.
99. Рооп М.Д. Применение нормализаторов к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений // Сборник тезисов докладов XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых «Ломоносов». Москва, 9-13 апреля 2018 г., с. 712-713.
100. Лычагин В.В., Рооп М.Д. Стационарная адиабатическая фильтрация реальных газов // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1099-1103.
101. Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д. Оптимальные термодинамические процессы для идеальных газов // Труды 13-ой Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD-2020, Москва, 2020). М.: ИПУ РАН, 2020, С. 755-757.