

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Ковлаков Егор Витальевич

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМИ КВАНТОВЫМИ
СОСТОЯНИЯМИ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ОСНОВЕ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОД СВЕТА**

Специальность 01.04.21 — лазерная физика

Диссертационная работа

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Страупе С. С.

МОСКВА — 2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1 Обзор литературы	9
§ 1.1 Угловой спектр СПР	9
§ 1.2 Разложение по модам Шмидта	12
§ 1.3 Параксиальные моды света	16
§ 1.4 Сохранение чётности мод при СПР	20
§ 1.5 Сохранение орбитального углового момента при СПР	24
§ 1.6 Методы приготовления оптических пучков	27
§ 1.7 Генерация пространственных кудитов	31
§ 1.8 Случай негауссовой накачки	38
Глава 2 Генерация пространственных состояний Белла без пост- селекции	43
§ 2.1 Схема эксперимента	44
§ 2.2 Калибровка SLM	46
§ 2.3 Минимизация числа Шмидта	50
§ 2.4 Случай накачки в моде Гаусса-Эрмита ненулевого порядка ...	56
§ 2.5 Неравенство Белла	57
§ 2.6 Квантовая томография в подпространстве высокой размерно- сти	59
§ 2.7 Численное моделирование	62
§ 2.8 Заключение к главе 2	65

Глава 3 Инженерия квантовых состояний ОУМ-бифотонов с помощью адаптивного управления профилем пучка накачки	67
§ 3.1 Схема эксперимента	68
§ 3.2 Метод расчёта голограмм	69
§ 3.3 Случай накачки с ненулевым ОУМ	71
§ 3.4 Приготовление максимально перепутанных кудитов	73
§ 3.5 Управление фазами кудитов	78
§ 3.6 Неравенство Белла для кутритов	82
§ 3.7 Заключение к главе 3	85
Глава 4 Применение искусственных нейронных сетей к задаче квантовой томографии пространственных состояний фотонов	88
§ 4.1 Схема эксперимента	91
§ 4.2 Томография единичного процесса	93
§ 4.3 Обучение искусственной нейронной сети	97
§ 4.4 Квантовая томография с применением нейронной сети	105
§ 4.5 Случай смешанных состояний	109
§ 4.6 Заключение к главе 4	112
Литература	115

Введение

Одним из центральных в науке о квантовой информации является понятие «кубита» – двухуровневой квантовой системы, состояние которой описывается вектором в двумерном гильбертовом пространстве. Квантовые системы размерностью выше двойки принято называть «кудитами», они востребованы в задачах линейно-оптических квантовых вычислений и квантовой связи. По сравнению с кубитами, многоуровневые системы позволяют увеличить плотность кодирования информации [1, 2], а также повысить устойчивость канала распределения квантового ключа к шумам [3].

Состояние кудита, волновую функцию которого невозможно представить в виде произведения волновых функций подсистем меньшей размерности, принято называть «перепутанным» (англ. *entangled*). Корреляции между наблюдаемыми свойствами удаленных подсистем таких состояний не имеют классического аналога. В терминах измеряемых величин данный факт был сформулирован Беллом, чье неравенство служит одним из критериев наличия перепутанности в квантовой системе [4], и если сначала наличие квантовых корреляций воспринималось как парадокс, то в настоящее время им находится множество практических применений. Отличительной особенностью многоуровневых перепутанных квантовых систем является то, что нарушение неравенства Белла для них становится все более значительным с увеличением размерности [5], это делает их еще

привлекательней для использования в аппаратно-независимых протоколах квантового распределения ключа [6, 7].

Одна из распространённых реализаций кудитов основана на использовании степеней свободы фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) в нелинейном кристалле. Такие пары фотонов (бифотоны) коррелированы не только по поляризации и частоте, но и по направлению распространения. Рассмотрение угловых корреляций удобно проводить в базисе поперечных пространственных мод с целью дискретизации пространства состояний. Для детектирования пространственных мод фотонов обычно применяются пространственные модуляторы света на основе жидкокристаллических матриц.

В большинстве работ по приготовлению пространственных кудитов при СПР используется процедура «постселекции» состояний необходимого вида – исключение нежелательных событий из результатов статистических измерений. На практике постселекция реализуется путем пространственной фильтрации широкого спектра поперечных мод бифотонного поля, что приводит к потерям полезного сигнала. Помимо этого к потерям приводит несовершенство детектирующей части экспериментального аппарата, причем улучшение качества измерений пространственных состояний фотонов эти потери усугубляет.

Целью работы была разработка экспериментальных методов управления состояниями кудитов на основе пространственных степеней свободы бифотонов, а именно их размерностью, амплитудами и фазами без постселекции, а также снижение уровня потерь при детектировании фотонов в поперечных пространственных модах при сохранении качества измерений.

Актуальность работы обусловлена как фундаментальным интересом к экспериментальным методам генерации квантовых систем высокой раз-

мерности, так и их применением в протоколах квантовой связи и квантовых вычислений.

Научная новизна работы заключается в следующих положениях:

1. Экспериментально исследован режим СПР с минимальным числом пространственных мод.
2. Экспериментально исследован случай накачки нелинейного кристалла лазерными пучками в суперпозициях мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра высших порядков при СПР.
3. Разработан метод адаптивной оптимизации модового состава углового спектра лазерной накачки при СПР для повышения степени соответствия «фиделити» (англ. *fidelity*) приготавливаемых состояний пространственных кудитов желаемым.
4. Экспериментально приготовлены перепутанные пары пространственных кудитов с заданной размерностью, а также произвольными амплитудами и фазами без постселекции. Реализована полная квантовая томография таких состояний. Произведена проверка нарушения неравенства типа Белла для данных систем.
5. Разработан метод коррекции систематических ошибок при квантовой томографии высокоразмерных состояний с помощью искусственной нейронной сети.
6. Разработан метод снижения потерь полезного сигнала при измерении пространственных состояний фотонов с помощью пространственного модулятора света путем обработки экспериментальных данных с помощью искусственной нейронной сети.

Научная и практическая значимость работы заключается в возможном использовании разработанных методов приготовления и детектирования пространственных кудитов в задачах квантовой оптики и квантовой информации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Минимум числа пространственных мод Шмидта при СПР достигается при равенстве рэлеевской длины лазерного пучка накачки и половины длины нелинейного кристалла.
2. Накачка нелинейного кристалла при СПР лазерным пучком в пространственных модах Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра позволяет приготовить максимально перепутанные пространственные состояния бифотонов без постселекции.
3. Адаптивная оптимизация модового состава углового спектра лазерной накачки кристалла при СПР позволяет управлять размерностью, амплитудами и фазами пространственных состояний бифотонов.
4. Применение глубокой искусственной нейронной сети позволяет снизить негативное влияние систематических ошибок измерений на результаты квантовой томографии систем высокой размерности.

Личный вклад автора: все результаты диссертационной работы, как экспериментальные, так и теоретические, получены автором лично или при его непосредственном участии.

Автор активно участвовал в подготовке публикаций в рецензируемых научных изданиях, а также представлял результаты работы на следующих международных конференциях, где они прошли **апробацию**: 23th International Laser Physics Workshop, София, Болгария, 2014 год; Quantum

Information Processing and Communication, Лидс, Великобритания, 2015 год; 4th International Conference on Optical Angular Momentum, Анакапри, Италия, 2017 год; 27th International Laser Physic Workshop, Ноттингем, Великобритания, 2018 год.

Основные материалы работы **опубликованы** в следующих статьях:

Spatial Bell-State Generation without Transverse Mode Subspace Postselection / Kovlakov E. V., Straupe S. S., Bobrov I.B., Kulik S. P. // Physical Review Letters. – 2017. – Т. 118. – №. 3. – С. 030503.

Quantum state engineering with twisted photons via adaptive shaping of the pump beam / Kovlakov E. V., Straupe S. S., Kulik S. P. // Physical Review A. – 2018. – Т. 98. – №. 6. – С. 060301.

Experimental neural network enhanced quantum tomography / Palmieri A. M., Kovlakov E. V., Bianchi F., Yudin D., Straupe S. S., Biamonte J. D., Kulik S. P. // npj Quantum Information. — 2020. – Т. 6. – №. 1. – С. 1-5.

ГЛАВА 1

Обзор литературы

§ 1.1. Угловой спектр СПР

Рассмотрим влияние пространственного спектра накачки нелинейного кристалла на вид состояния пары фотонов при СПР. Будем считать, что пучок накачки и генерируемые в процессе СПР поля монохроматичны. В первом порядке теории возмущения вектор двухфотонного состояния будет иметь вид [8]:

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \text{const} \times \int d\vec{k}_s d\vec{k}_i \Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) |1\rangle_{\vec{k}_s} |1\rangle_{\vec{k}_i}, \quad (1.1)$$

здесь \vec{k}_s и \vec{k}_i – волновые вектора рассеянных сигнального и холостого фотонов соответственно, а $|1\rangle_{\vec{k}_s}$ и $|1\rangle_{\vec{k}_i}$ – однофотонные состояния соответствующих пространственных мод, функцию $\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ принято называть амплитудой бифотона. Пренебрегая немонахроматичностью накачки, можно записать $\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ следующим образом:

$$\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) F_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i), \quad (1.2)$$

где $\mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ описывает пространственный Фурье-образ огибающей пучка накачки. Функция

$$F_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \text{sinc}\left(\frac{L\Delta_z}{2}\right) \quad (1.3)$$

является геометрическим фактором нелинейного кристалла, где L – его длина, а Δ_z – продольная волновая расстройка, которая имеет вид:

$$\Delta_z = k_{pz}(\omega_s + \omega_i) - k_{sz}(\omega_s) - k_{iz}(\omega_i), \quad (1.4)$$

где k_{sz}, k_{iz} – продольные компоненты волновых векторов сигнального и холостого фотонов (ось z соответствует направлению волнового вектора накачки \vec{k}_p , для которого в точности выполняется коллинеарный синхронизм).

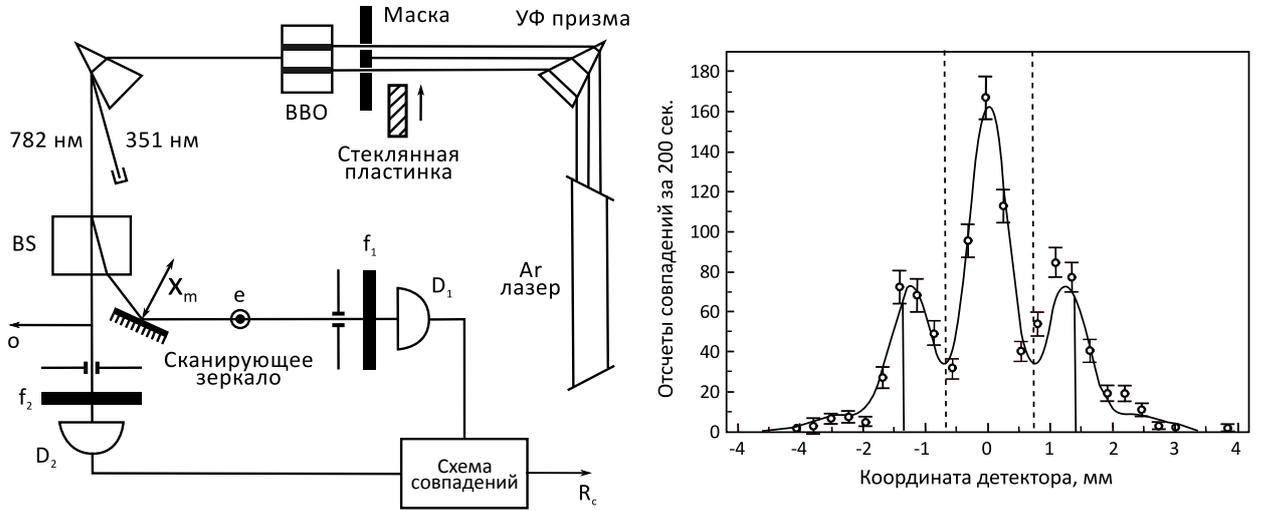


Рис. 1.1. Схема экспериментальной установки из работы [9] по наблюдению нелинейной интерференции Юнга четвертого порядка и вид угловой зависимости скорости счета совпадений фотоотсчетов детекторов от положения одного из них.

Как видно из выражения (1.2), приготавливаемое при СПР двухфотонное состояние несет информацию об угловом спектре накачки $\mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$. Это было подтверждено в экспериментальных работах [9, 10], где наблюдалось изменение углового спектра СПР при установке в пучок лазерной накачки амплитудной маски с двумя щелями. Как видно из графика на рис. 1.1, угловое распределение совпадений фотоотсчетов детекторов для сигнального

и холостого фотонов при этом принимало вид интерференционной картины Юнга. Тем самым вид пространственных корреляций повторял картину дифракции накачки на амплитудной маске, причем её масштаб не изменялся, несмотря на удвоение длины волны. Этот эффект может быть использован для сверхразрешающей многофотонной микроскопии [11], а его объяснение с геометрической точки зрения тривиально: поскольку направления волновых векторов рассеянных фотонов связаны с направлением волнового вектора накачки законом сохранения импульса $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$, то поведение углового спектра бифотонов воспроизводит угловой спектр последней. В работе [12] аналогичная схема эксперимента с тремя щелями была предложена в качестве способа генерации пространственно-перепутанных кутритов, а в эксперименте [13] подобное пространственное разделение пучка накачки было переосмыслено в терминах мод Шмидта (речь о которых пойдет в следующем параграфе). Принцип приготовления таких кудитов заключается в том, что пространственно коррелированы друг с другом оказываются только фотоны от одной щели и потому размерность перепутанных состояний можно увеличить за счет числа щелей амплитудной маски.

К сожалению, передавать подобные состояния на большие расстояния довольно сложно: для передачи кудита размерности d необходимо d оптических волокон, поскольку его распространение в общем волокне приведет к перекрытию волновых функций некоррелированных фотонов друг с другом. Такая же проблема возникнет и при коммуникации по свободному пространству в следствие дифракции. Альтернативой пространственному кодированию с помощью щелей является использование собственных мод света оптических волокон или свободного пространства, что и будет рассмотрено далее.

§ 1.2. Разложение по модам Шмидта

Вернемся к выражению для амплитуды бифотона (1.2) и запишем его в виде:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} \xi_i(\vec{k}_{s\perp}) \xi_j(\vec{k}_{i\perp}), \quad (1.5)$$

где $\xi_a(\vec{k}_{a\perp})$ – полный базис произвольных ортогональных поперечных мод поля, а C_{ij} – комплексные коэффициенты.

Как чистое состояние двухкомпонентной системы эта функция представима в виде разложения по модам Шмидта для случая непрерывных переменных [14]:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\vec{k}_{s\perp}) \chi_n(\vec{k}_{i\perp}), \quad (1.6)$$

здесь $\psi_n(\vec{k}_{s\perp})$ и $\chi_n(\vec{k}_{i\perp})$ – собственные функции редуцированных матриц плотности подсистем сигнального и холостого фотонов, а λ_n – соответствующие им собственные значения. Формализм мод Шмидта позволяет перейти от суммы по двум индексам вида (1.5) к сумме по одному, что соответствует полному и ортогональному базису взаимнокоррелированных мод. Кроме того, шмидтовское разложение позволяет ввести качественную оценку степени перепутанности состояния бифотона. Для этого используется так называемое «число Шмидта»:

$$K = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2}. \quad (1.7)$$

Как видно, к увеличению K приводит рост количества ненулевых собственных значений λ_n , который обусловлен увеличением числа мод разложения

(1.6). При этом если $K = 1$, то состояние двухкомпонентной системы можно представить в виде тензорного произведения состояний подсистем, а значит перепутанность между этими подсистемами отсутствует (такие состояния называют «факторизированными») [15].

Вернемся к выражению для амплитуды бифотона (1.2):

$$\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \text{sinc}\left(\frac{L\Delta_z}{2}\right). \quad (1.8)$$

В приближении широкого кристалла, когда синхронизм выполняется точно для поперечных компонент волновых векторов фотонов ($\vec{k}_{p\perp} = \vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp}$), продольную расстройку можно записать в виде:

$$\Delta_z = \sqrt{k_p^2 - k_{p\perp}^2} - \sqrt{k_s^2 - k_{s\perp}^2} - \sqrt{k_i^2 - k_{i\perp}^2}. \quad (1.9)$$

Упростить это выражение можно приняв $|k_{p,s,i\perp}| \ll k_{p,i,s}$, что соответствует случаю малых отклонений волновых векторов фотонов по углам от оси z . Тогда, раскладывая выражение (1.9) по степеням поперечных компонент до второго порядка включительно, можно в случае точного синхронизма получить [16]:

$$\Delta_z = \vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i + \frac{(\vec{k}_{s\perp} - \vec{k}_{i\perp})^2}{2k_p} = \frac{(\vec{k}_{s\perp} - \vec{k}_{i\perp})^2}{2k_p}, \quad (1.10)$$

для вырожденного по частоте случая $2k_p = k_s = k_i$, а затем перейти к распространенному в литературе выражению для $\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})$ вида [10]:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp}) \text{sinc}\left(\frac{L(\vec{k}_{s\perp} - \vec{k}_{i\perp})^2}{4k_p}\right). \quad (1.11)$$

В работе [17] авторы аппроксимировали функцию sinc гауссом с шириной $\delta^{-1} = \sqrt{4k_p/L}$ и для гауссова профиля накачки шириной w получили следующий вид $\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})$:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) \propto \exp\left(-\frac{(\vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp})^2}{2}w^2\right) \exp\left(-\frac{(\vec{k}_{s\perp} - \vec{k}_{i\perp})^2}{2}\delta^2\right), \quad (1.12)$$

Полученное приближение в дальнейшем будет неоднократно упоминаться как «приближение двойной гауссоиды». Оно замечательно тем, что с выражением (1.12) можно получить аналитические формулы для числа пространственных мод K :

$$K = \left(\frac{w^2 + \delta^2}{2w\delta} \right)^2, \quad (1.13)$$

и собственных значений λ_n :

$$\lambda_n = 4w\delta \frac{(w - \delta)^{2n}}{(w + \delta)^{2n+1}}. \quad (1.14)$$

Формула (1.13) позволяет качественно понять поведение числа Шмидта в зависимости от угловых ширин спектра накачки и синхронизма. Так при $w = \delta$ амплитуда бифотона имеет вид гаусса, что соответствует отсутствию пространственной перепутанности между фотонами. С увеличением w (при $w > \delta$) степень пространственной перепутанности увеличивается и K растет, при этом пары фотонов оказываются антикоррелированы по углу. Уменьшение w (при $w < \delta$) также приводит к росту числа Шмидта, но в этом случае фотоны уже коррелированы по углу [18]. Помимо этого, в приближении двойной гауссоиды можно учесть последующую пространственную фильтрацию рассеянного излучения при детектировании [19].

Для экспериментального определения числа мод Шмидта часто используется отношение ширин распределений условных отсчетов детекторов (совпадений) к их безусловному числу (сигналу) при сканировании бифотонного поля точечными детекторами [16]. Данную величину принято называть «параметром Федорова», она весьма точно описывает поведение K , но только в ближней и дальней зонах дифракции. При переходе от одной зоны к другой наблюдается «провал» параметра, что не соответствует реальному значению числа Шмидта. Этого недостатка лишена схема

по измерению степени перепутанности с помощью модифицированного интерферометра Маха-Цандера с призмами Дове [20, 21]. В случае большого коэффициента параметрического усиления, когда процесс рассеяния становится вынужденным, число Шмидта в промежуточной зоне дифракции может быть определено из кросс-корреляционной функции второго порядка по интенсивности $g^{(2)}$ [22]. Для измерений при этом необходим только один из каналов рассеяния – сигнальный или холостой. Тогда наблюдаемая величина $g^{(2)}$, измеренная с помощью интерферометра Брауна-Твисса, будет связана с K формулой:

$$g^{(2)} = 1 + \frac{1}{K}. \quad (1.15)$$

В работе [23] был предложен способ прямой оценки пространственного числа Шмидта путем измерения профилей интенсивности СПР I_s и I_{FF} в ближней и дальней зонах дифракции соответственно. Предложенное авторами выражение для K имеет вид:

$$K \approx \frac{1}{\lambda^2} \frac{\left[\int I_s(x) dx \right]^2}{\int I_s^2(x) dx} \frac{\left[\int I_{FF}(\theta) d\theta \right]^2}{\int I_{FF}^2(\theta) d\theta}, \quad (1.16)$$

где x – это поперечные координаты в ближней зоне, θ – угловые координаты в дальней, а λ – это длина волны рассеянного излучения. На рис. 1.2 приведено сравнение данной оценки числа Шмидта (сплошная кривая) и численного расчёта (точки) для различных отношений угловой ширины синхронизма δ и перетяжки гауссова пучка накачки в кристалле w . Десятикратно увеличенная кривая демонстрирует высокую точность формулы (1.16) для значений K не ниже 10, что было подтверждено в эксперименте с применением интенсифицированной ПЗС матрицы (ICCD).

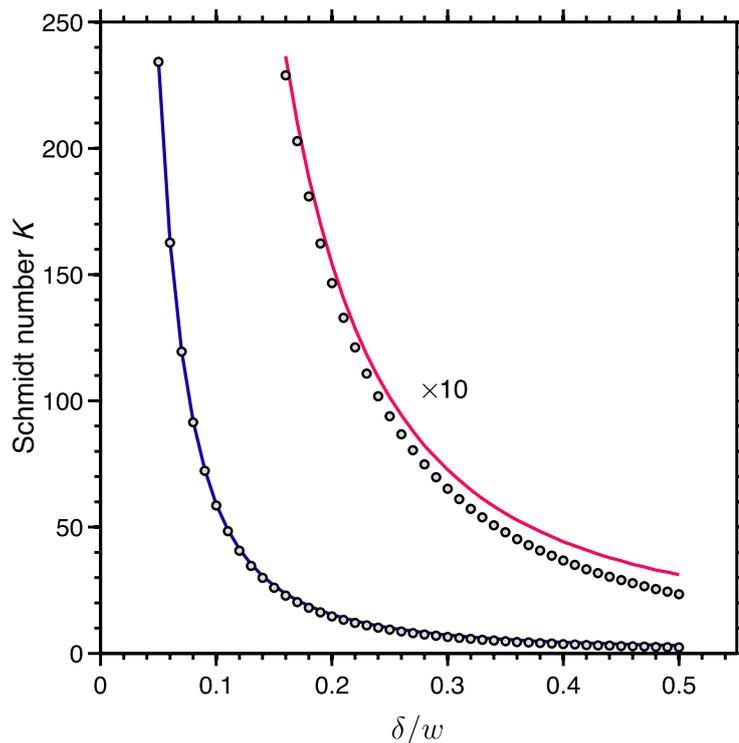


Рис. 1.2. Зависимость числа Шмидта от отношения δ/w , приведенная в работе [23]: сплошные кривые – расчёт согласно выражению (1.16), точки – численные результаты.

§ 1.3. Параксиальные моды света

Помимо того, что приближение двойной гауссоиды позволяет получить аналитическое выражение для числа мод Шмидта, с ним также можно найти их явный аналитический вид. В работе [17] было показано, что при амплитуде бифотона (1.12) моды Шмидта в точности совпадают с решениями уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении

$$\nabla_{\perp}^2 E - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad (1.17)$$

где ∇_{\perp}^2 – это оператор Лапласа для поперечных компонент скалярного электрического поля E . Как известно, решениями этого уравнения в декартовых координатах являются моды Гаусса-Эрмита, а в цилиндрических

– Гаусса-Лагерра.

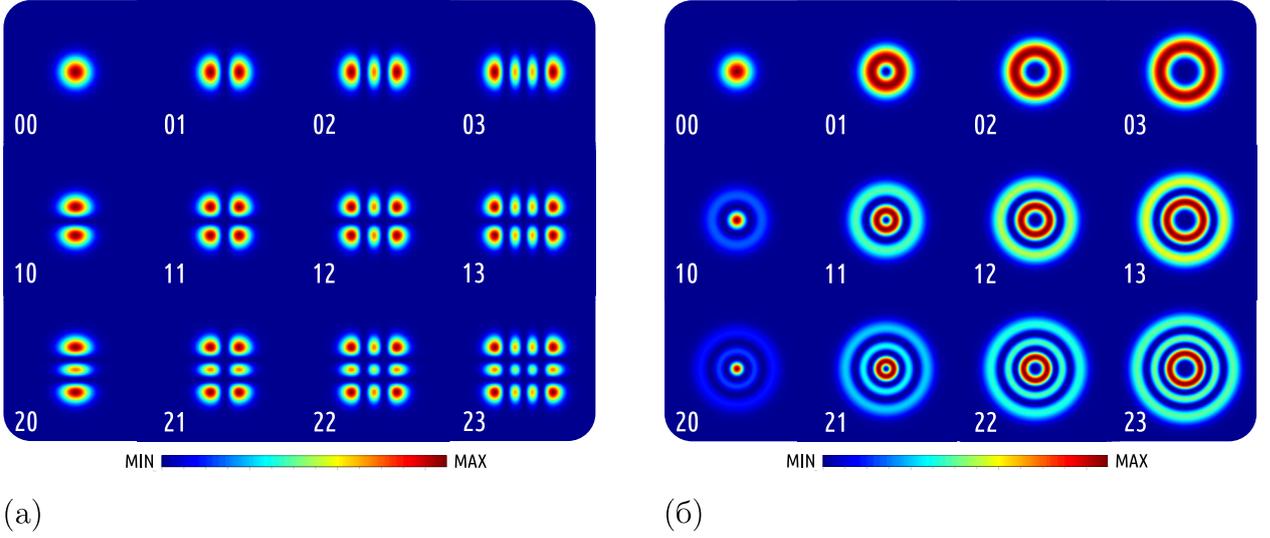


Рис. 1.3. Примеры распределений интенсивности для пучков в модах (а) Гаусса-Эрмита и (б) Гаусса-Лагерра.

В декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ комплексная амплитуда мод Гаусса-Эрмита с волновым вектором k описывается выражением:

$$\begin{aligned} \text{HG}_{nm}(x, y, z) = \frac{C_{nm}}{w(z)} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \times \\ \times \exp\left(i\zeta(z) - i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - ikz\right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где коэффициенты C_{nm} имеют вид:

$$C_{nm} = \sqrt{\frac{2}{2^{n+m} \pi n! m!}}, \quad (1.19)$$

$H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а радиус кривизны $R(z)$ и ширина пучка $w(z)$ выражаются через длину Рэлея z_R и ширину перетяжки пучка w_0 следующим образом:

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right), \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}.$$

Индексы n и m определяют число нулей поля вдоль соответствующих осей x и y , а их сумму $N = n + m$ называют порядком моды.

Моды Гаусса-Лагерра в цилиндрической системе координат $\{\rho, \phi, z\}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{LG}_{pl}(\rho, \phi, z) = \frac{U_{pl}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|l|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right) L_p^{|l|} \left(2\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right) \times \\ \times \exp(-il\phi) \exp\left(i\zeta(z) - i\frac{k\rho^2}{2R(z)} - ikz \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где коэффициенты U_{pl} выражаются как:

$$U_{pl} = (-1)^p \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p + |l|)!}}, \quad (1.21)$$

$L_p^{|l|}(x)$ – присоединенные полиномы Лагерра. Индекс p определяет число нулей амплитуды в радиальном направлении, а азимутальный индекс l – набег фазы при обходе вокруг начала координат. Для пучков Гаусса-Лагерра их порядок определяется как $N = 2p + |l|$, а моде нулевого порядка также соответствует гауссов пучок. Вид распределений интенсивности для некоторых пучков в модах Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра представлен на рис. 1.3.

С практической точки зрения пучки в модах Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра примечательны тем, что не изменяют своей формы при распространении вдоль оси z – это делает привлекательным их использование в задачах связи. Того же нельзя сказать про суперпозиции мод разного порядка, так как величина $\zeta(z)$ из выражений (1.18) и (1.20), известная как фаза Гуи, зависит от N как $\zeta(z) = (N + 1) \arctg(z/z_R)$, и потому разные компоненты суперпозиции будут испытывать разный набег фазы при распространении.

На данный момент основной проблемой, связанной с передачей состояний света по свободному пространству, остается атмосферная турбулент-

ность, поскольку неоднородность коэффициента преломления воздуха приводит к перекачке энергии передаваемой моды света в остальные [24]. Эту проблему можно решать с двух сторон: как исправляя искажения пучков с помощью адаптивной оптики [25], так и применяя продвинутое подходы к обработке цифровых сигналов на выходе детекторов вроде хорошо известного в радиотехнике метода ММО (англ. *multiple-input-multiple-output*) [26].

Если говорить о передаче фотонов в параксиальных модах по оптическим волокнам, то обычно для этого используют волноводы, которые поддерживают только несколько собственных мод. В случае обычного оптического волокна решения для его волнового уравнения легко представимы в виде линейной комбинации мод Гаусса-Эрмита или Гаусса-Лагерра различных поляризаций. Изгибы волокна и другие его неидеальности приводят к перекачке энергии этих мод между друг другом, что в конечном счете не позволяет успешно передать данные. Снизить модовый кросс-ток (англ. *cross-talk*) можно также с помощью ММО-техники [27], что эквивалентно восстановлению матрицы распространения волокна для последующего учёта смешивания мод [28]. Альтернативное решение проблемы модового кросс-тока – это изменение профиля показателя преломления волокна, поскольку его низкий контраст в стандартных волокнах и является основной причиной перекачки энергии излучения между модами. В работе [29] увеличение контраста коэффициентов преломления между модами было достигнуто путем добавления вокруг сердцевины волокна дополнительного кольца с высоким показателем преломления. Также перспективным выглядит использование волокон с воздушными сердцевинами [30] и профилем показателя преломления в виде обратной параболы [31].

Интересно, что физически моды Гаусса-Эрмита могут быть преобразо-

ваны в моды Гаусса-Лагерра того же порядка с помощью цилиндрических линз [32, 33], при этом индексы мод разных базисов будут связаны как $l = m - n$, $p = \min(m, n)$. Можно даже провести аналогию между преобразованием пучков с помощью такого «конвертера мод» и преобразованием поляризованного состояния света на сфере Пуанкаре фазовой пластинкой [34].

С экспериментальной точки зрения выбор между базисами Эрмита и Лагерра произволен и зависит только от удобства использования одного из типов их симметрии – прямоугольной или радиальной. С ними также связаны и правила отбора для пространственных мод, генерируемых в процессе СПР, что и будет рассмотрено подробно ниже.

§ 1.4. Сохранение чётности мод при СПР

Рассмотрим подробно случай накачки нелинейного кристалла пучком в моде Гаусса-Эрмита. Тогда угловой спектр $\mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ из выражения (1.2) для амплитуды бифотона можно записать в виде

$$\mathcal{E}_p^{nm}(k_x, k_y, w) = \text{HG}_n(k_x, w) \text{HG}_m(k_y, w), \quad (1.22)$$

где моды Гаусса-Эрмита факторизуются в k -пространстве волновых векторов как $\text{HG}_{nm}(k_x, k_y, w) = \text{HG}_n(k_x, w) \times \text{HG}_m(k_y, w)$ и зависят от ширины перетяжки накачки в кристалле w следующим образом: $\text{HG}_a(k, w) \propto \sqrt{w} H_a(wk) \exp(-w^2 k^2/2)$.

Так как моды Гаусса-Эрмита образуют полный базис, можно переписать выражение для амплитуды бифотона (1.5) путем замены $\xi_a(\vec{k}_{a\perp}) \longrightarrow \text{HG}_{\alpha\beta}(\vec{k}_{a\perp})$ и получить следующее выражение для волновой функции би-

фотона (1.1) при накачке кристалла пучком HG_{nm} :

$$\left| \psi^{(nm)} \right\rangle = \sum_{j,k,u,t=0}^{\infty} C_{jkt}^{(nm)} |\text{HG}_{jk}, \sigma\rangle_s |\text{HG}_{ut}, \sigma\rangle_i, \quad (1.23)$$

где σ обозначает ширину моды фотона рассеяния, а вектора $|\text{HG}_{\alpha\beta}, \sigma\rangle_a$ определены как $|\text{HG}_{\alpha\beta}, \sigma\rangle_a = \int d\vec{k}_a \text{HG}_{\alpha}(k_x, \sigma) \text{HG}_{\beta}(k_y, \sigma) |1\rangle_{\vec{k}_a}$.

Данное разложение еще не является шмидтовским, так как ширина σ произвольна. Поэтому суммирование в (1.23) идет по четырем индексам $\{jkt\}$, где пара $\{jk\}$ соответствует x и y компонентам для сигнального фотона, а $\{ut\}$ – для холостого.

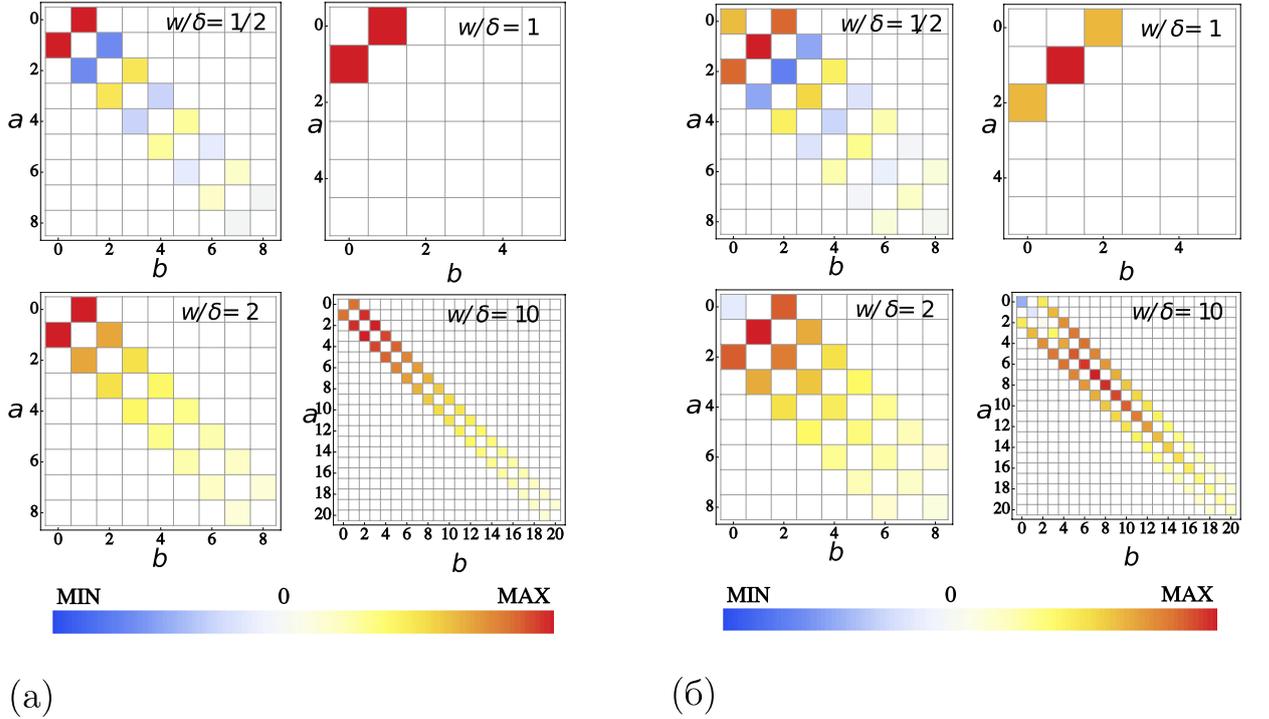


Рис. 1.4. Коэффициенты $C_{ab}^{(1)}$ (а) и $C_{ab}^{(2)}$ (б) для различных отношений ширины пучка накачки w к обратной ширине углового синхронизма δ при размерах мод сигнального и холостого фотонов $\sigma = \sqrt{2w\delta}$ [35].

В работах [36, 37] авторами было получено аналитическое выражение для коэффициентов $C_{jkt}^{(nm)}$ и сформулированы следующие правила отбо-

ра для индексов мод фотонов рассеяния при накачки кристалла пучком Гаусса-Эрмита HG_{nm} :

$$(j + u) \geq n \text{ и чётность}(j + u) = \text{чётность}(n), \quad (1.23a)$$

$$(k + t) \geq m \text{ и чётность}(k + t) = \text{чётность}(m). \quad (1.23b)$$

Позже в работе [35] было показано, что в приближении двойной гауссоиды (1.2) коэффициенты $C_{jku}^{(nm)}$ можно факторизовать как $C_{ju}^{(n)} \times C_{kt}^{(m)}$. При этом выбор ширины мод сигнального и холостого фотонов $\sigma = \sqrt{2w\delta}$ позволяет получить простое выражение для $C_{ab}^{(0)}$ при гауссовой накачке кристалла:

$$C_{ab}^{(0)} = \delta_{ab} \frac{w\delta}{2} \frac{(w - \delta)^a}{(w + \delta)^{a+1}}, \quad (1.24)$$

здесь w – это ширина пучка накачки, δ – обратная ширина углового синхронизма кристалла, а δ_{ab} – символ Кронекера. Этот случай соответствует разложению Шмидта

$$|\psi^{(00)}\rangle = \sum_{a,b=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_a \lambda_b} |\text{HG}_{ab}, \sigma\rangle_s |\text{HG}_{ab}, \sigma\rangle_i, \quad (1.25)$$

который был подробно исследован в эксперименте [38]. Как видно из формулы (1.24), при $w = \delta$ остается только один ненулевой коэффициент $C_{ab}^{(00)} = C_{00}^{(00)} = \lambda_0$, что соответствует режиму СПР с одной модой Шмидта и отсутствию пространственных корреляций между фотонами.

В случае негауссовой накачки вид распределений коэффициентов $C_{ab}^{(q \neq 0)}$ также сильно зависит от соотношения w/δ . На рис. 1.4 представлены полученные аналитически распределения $C_{ab}^{(1)}$ и $C_{ab}^{(2)}$ для пучков накачки HG_1 и HG_2 соответственно при различных w/δ . Можно заметить, что при $w = \delta$ происходит точное сохранение индексов мод накачки, сигнального и холо-

стого фотонов при СПР:

$$n = j + u, \quad (1.25a)$$

$$m = k + t, \quad (1.25b)$$

что будет использовано в оригинальной части работы.

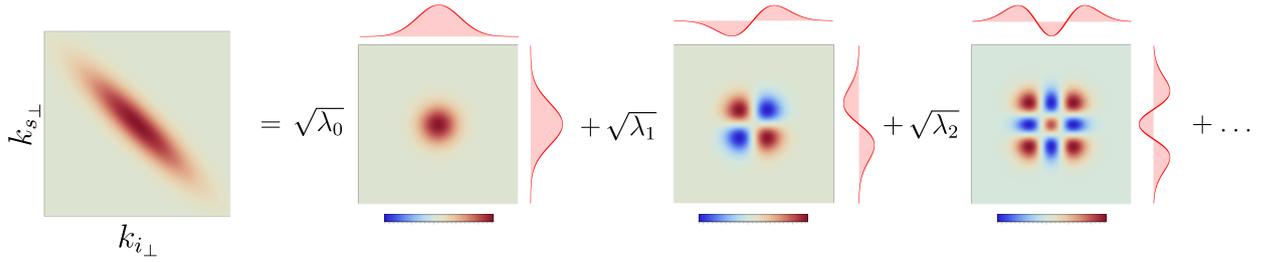


Рис. 1.5. Наглядное представление разложения волновой функции бифотона (1.25) по модам Гаусса-Эрмита при числе Шмидта $1/\sum \lambda_a \approx 4$.

Также стоит отметить особую роль ширин мод сигнального и холостого фотонов σ , так как наблюдение представленных на рис. 1.4 корреляций возможно только при выполнении соотношения

$$\sigma = \sqrt{2w\delta}, \quad (1.26)$$

что при условии $w = \delta$ приобретает вид $\sigma = \sqrt{2}w$. Точно такое же соотношение было получено в работе [39], где был рассмотрен вопрос оптимального отношения между шириной гауссового пучка накачки при СПР и размерами мод детектирования при использовании одномодовых волокон.

Для наглядности на рис. 1.5 изображена амплитуда бифотона для x -компонент векторов $\vec{k}_{s\perp}$ и $\vec{k}_{i\perp}$ в приближении двойной гауссоиды вместе с угловыми спектрами первых трех мод Шмидта оптимальной ширины σ .

§ 1.5. Сохранение орбитального углового момента при СПР

Как и в случае мод Гаусса-Эрмита, двухфотонное состояние (1.5) можно переписать в базисе мод Гаусса-Лагерра [40]:

$$|\psi\rangle = \sum_{p_s, p_i=0}^{\infty} \sum_{l_s, l_i=-\infty}^{\infty} C_{p_s l_s p_i l_i} |\text{LG}_{p_s l_s}, \sigma\rangle_s |\text{LG}_{p_i l_i}, \sigma\rangle_i. \quad (1.27)$$

Аналогично тому, как в базисе мод Гаусса-Эрмита состояние бифотона можно было факторизовать на x и y компоненты, в случае мод Гаусса-Лагерра можно рассмотреть отдельно азимутальные и радиальные пространственные корреляции.

Пусть радиальные индексы p_s и p_i равны нулю. Как видно из выражения (1.20), амплитуда таких пучков с различными азимутальными индексами l будет отличаться их угловой зависимостью фазы $\exp(-il\phi)$. В результате её «закручивания» вокруг направления распространения в центре пучка образуется область с нулевой интенсивностью – так называемый «оптический вихрь». В работе Аллена [41] было показано, что фотоны подобных «вихревых пучков» являются носителями орбитального углового момента (ОУМ) $l\hbar$, что позже было подтверждено в эксперименте [42]. Соответствующий дифференциальный оператор для пучка, распространяющегося вдоль оси z , имеет вид

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.28)$$

ОУМ является частью полного углового момента параксиального пучка, спиновая компонента которого связана с циркулярной поляризацией света. Наглядным является различие в механическом воздействии спиновой и орбитальной компонент углового момента на поглощающие свет части-

цы в оптическом пинцете: первая приводит к вращению частицы вокруг её собственной оси (что косвенно наблюдалось еще в эксперименте 1932 года [43]), в то время как вторая вызывает вращение вокруг оси пучка [44].

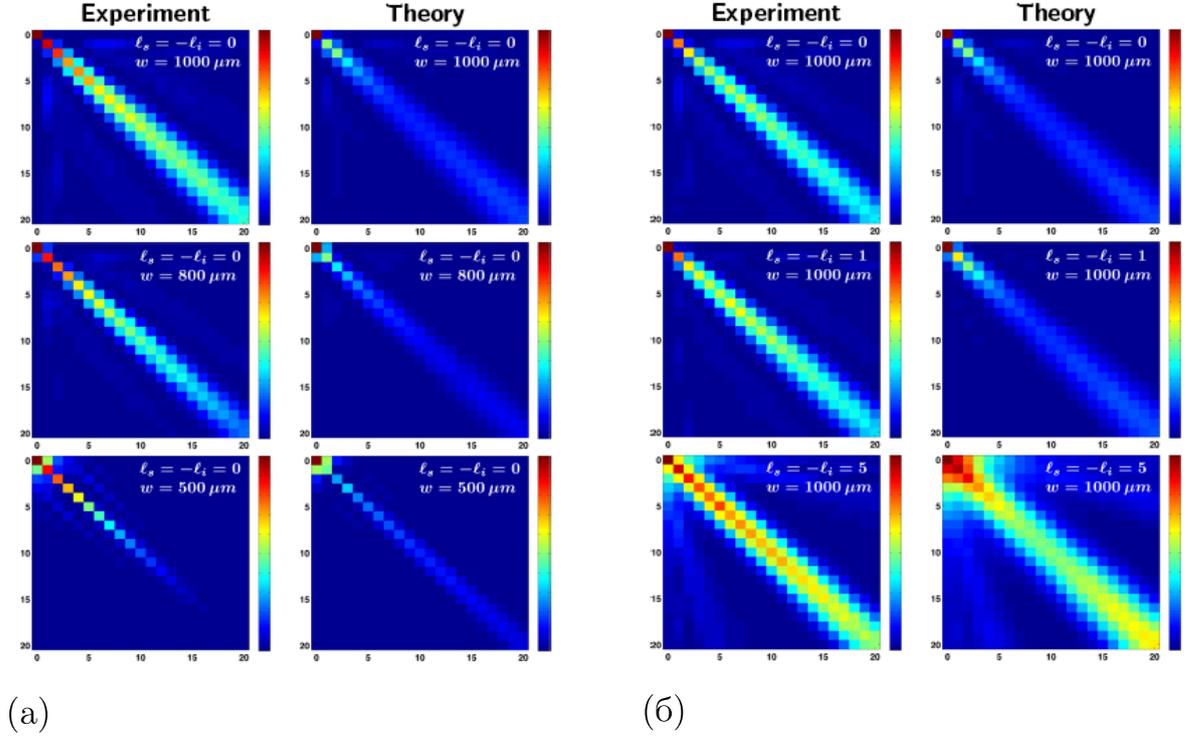


Рис. 1.6. Вид корреляций сигнальных и холостых фотонов с радиальными квантовыми числами $p_{s,i} \leq 20$ при $l_i = -l_s = 0$ для различных размеров детектирующих мод 1000, 800 и 500 мкм (сверху вниз) (а) и при $l_i = -l_s = 0, 1, 5$ (сверху вниз) и размере детектирующей моды 1000 мкм (б) [45].

В эксперименте [46] было продемонстрировано, а позже теоретически подтверждено [47], сохранение полного ОУМ фотонов при коллинеарном режиме СПР:

$$l_p = l_i + l_s, \quad (1.29)$$

здесь l_p – это ОУМ фотона накачки, а l_i и l_s – ОУМ холостого и сигнального фотонов соответственно. По этой причине, если пучок накачки гауссов ($l_p = 0$), рожденные в процессе СПР фотоны антикоррелированы по ОУМ

и вид двухфотонного состояния после кристалла можно упростить до выражения:

$$|\psi\rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l |l\rangle |-l\rangle, \quad (1.30)$$

где коэффициенты $|c_l|^2$ определяют вероятность обнаружить сигнальный фотон в собственном состоянии $|l\rangle$ с ОУМ $l\hbar$ и холостой фотон в состоянии $|-l\rangle$ с ОУМ $-l\hbar$. Не трудно заметить, что данное разложение является шмидтовским. Для него также можно ввести оценку степени перепутанности, которую принято называть «азимутальным числом Шмидта» $K_{az} = 1/\sum_l \lambda_l^2$, где собственные значения разложения λ_l равны вероятностям $|c_l|^2$ [48].

В работе [49] была приведена зависимость K_{az} от полного числа Шмидта K :

$$K_{az} = \frac{\sqrt{2}K}{1 + 1/K}, \quad (1.31)$$

где K учитывает и радиальные корреляции между модами с ненулевыми индексами p . Такой случай полных корреляций для мод Гаусса-Лагерра был теоретически рассмотрен в работе [50] и экспериментально изучен в [45], где особое внимание было уделено вопросу оптимального соотношения между размером перетяжки пучка гауссовой накачки в кристалле w , обратной шириной углового синхронизма δ и размером детектирующей моды σ . На рис. 1.6 (а) можно увидеть, как изменяется вид радиальных корреляций бифотонов с нулевыми ОУМ при изменении последнего из этих параметров: верхняя строка соответствует случаю $\sigma = 1000$ мкм, средняя $\sigma = 800$ мкм, а нижняя $\sigma = 500$ мкм. На соседнем рис. 1.6 (б) изображены те же корреляции фотонов при их азимутальных индексах $l_i = -l_s = 0, 1, 5$ и фиксированной $\sigma = 1000$ мкм. Как видно, степень перепутанности фотонов в радиальном подпространстве растет с увеличением их ОУМ как в

эксперименте (левая колонка), так и в теории (правая колонка).

Рекордным стало наблюдение корреляций в подпространстве размерности 10^4 с $p_{s,i} \leq 13$ и $-11 \leq l_{s,i} \leq 11$ [51]. Для такого большого числа мод становится справедливой оценка азимутального числа Шмидта $K_{az} \approx 2\sqrt{K}$, а вклад радиальных корреляций для фотонов с $l_s = l_i = 0$ можно оценить как $K_{rad} \approx \sqrt{K}$ [45]. При этом, если проводить оценку K_{az} с условием $p_s = p_i$ на радиальные индексы, то оно растёт с их увеличением, что было экспериментально проверено в работе [52].

Спектр азимутальных мод для негауссовой накачки были изучен в теоретических работах [53, 54], где авторы ввели понятие «vortex pancake» – пучка с профилем вида

$$\Phi(\rho, \phi) = \prod_{j=1}^N [\rho \exp(i\phi) - \rho_j \exp(i\phi_j)] \exp(-\rho^2/w^2), \quad (1.32)$$

здесь $\{\rho_j, \phi_j\}$ – это координаты j -го из N внесенных в пучок оптических вихрей, каждый из которых имеет единичный топологический заряд (его фаза изменяется от 0 до 2π единожды при обходе сингулярности в центре вихря по часовой стрелке). Выражение (1.32) можно представить как суперпозицию мод LG_{pl} с $p = 0$ и $0 \leq l \leq N$, что позволяет получить аналитический вид коэффициентов $C_{0l_s 0l_i}$ из формулы (1.27). Эксперименту по изучению СПР при такой накачке посвящена третья глава диссертации.

§ 1.6. Методы приготовления оптических пучков

На сегодняшний день наиболее популярным способом генерации пучков в необходимых пространственных модах является использование активных фазовых модуляторов света на основе жидкокристаллических матриц SLM (англ. *Spatial Light Modulator*). Такое устройство представляет собой мат-

рицу из двулучепреломляющих жидких кристаллов на кремниевой подложке (англ. *LCoS – Liquid Crystal on Silicon*), каждый пиксель которой позволяет вносить произвольную фазовую задержку в пучок для определенной поляризации. Поскольку для достижения высокого качества приготавливаемых пучков необходимо изменять не только их фазовый профиль, но и амплитудный, в эксперименте часто применяется техника их одновременного контроля [55, 56]. Для этого к фазовой маске необходимой моды добавляется фазовая дифракционная решетка треугольного профиля, поскольку она позволяет концентрировать падающее на неё излучение в необходимый порядок дифракции, что дает возможность выделять желаемую область амплитудного фронта в этом порядке.

Для наглядности на рис. 1.7 показана последовательность действий по осуществлению фазовой и амплитудной модуляции в случае моды Гаусса-Лагерра LG_{22} . Так на левой части рис. 1.7(а) изображено распределение фазы соответствующее аргументу $\text{Arg}(LG_{22})$ выражения (1.20) для комплексной амплитуды моды. На средней части рис. 1.7(б) к фазовому распределению добавлена решетка треугольного профиля, которая имеет вид периодического градиента серого. Правая же часть рис. 1.7(в) представляет собой конечный вид фазовой маски после наложения модуля комплексной амплитуды $|LG_{22}|$. Важно отметить, что дифракция на краях амплитудной маски приводит к нежелательным эффектам, а именно к появлению дополнительных пиков интенсивности по краям профиля моды. Разрешить эту проблему позволило точное аналитическое решение задачи о преобразовании поля фазовой голограммой. Оно было получено в работе [57] для случая преобразования с помощью SLM плоской волны в пучок с распределением поля E . Авторы показали, что избавиться от нежелательных искажений можно путем корректировки выражения для фазовой

маски $\text{Arg}(E) \rightarrow \text{Arg}(E) - \pi|E|$. Результат такой коррекции представлен на рис. 1.7(г).

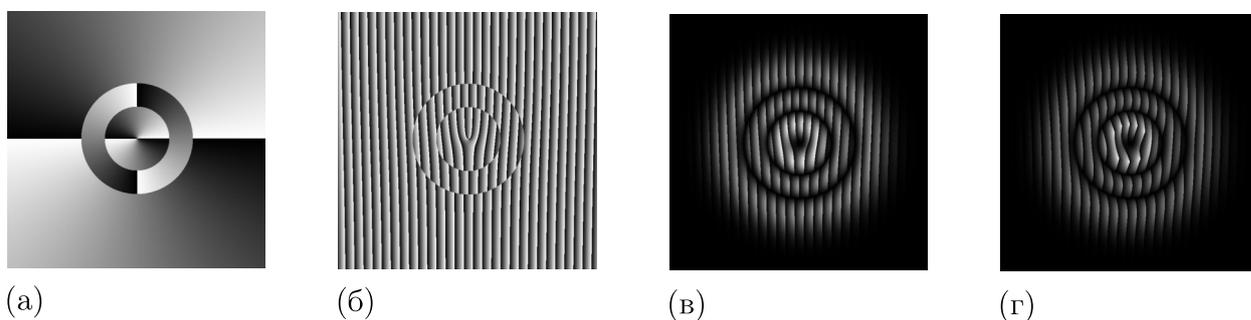


Рис. 1.7. Разные этапы генерации голограммы на примере моды LG_{22} : (а) фазовая модуляция, (б) добавление дифракционной решетки, (в) внесение амплитудной модуляции и (г) учёт поправки из работы [57]. Оттенок серого соответствует величине фазового сдвига: от нуля (черный) до 2π (белый).

Кроме того, возможны и другие варианты зависимости фазы голограммы от $|E|$ и $\text{Arg}(E)$ [58, 59], их сравнительный анализ приведен в работе [60]. Что интересно, существует способ полной модуляции профиля пучка без фазовой решетки за счет усреднения поля после дифракции на нескольких соседних пикселях (так называемом «суперпикселе»). Такой подход позволяет реализовать амплитудную модуляцию в нулевом порядке дифракции при меньшем эффективном разрешении голограммы и, как следствие, худшем качестве преобразования [61]. Данный метод был успешно применен для контроля пространственной моды твердотельного лазера с матрицей SLM в качестве одного из зеркал внешнего резонатора [62].

Менее распространенным способом генерации оптических пучков является применение DMD-устройств (англ. *Digital Micromirror Device*), представляющих собой массивы микрзеркал, у каждого из которых есть два возможных положения наклона в $\pm 10 - 12^\circ$. Эти устройства обладают одинаковыми с SLM разрешением и фактором заполнения ($> 90\%$), а размеры

микрозеркал (~ 10 мкм) сопоставимы с размерами пикселей жидкокристаллических матриц. DMD уступают SLM в коэффициенте отражения падающего света, но на 2-3 порядка превосходят по скорости работы. К тому же DMD-устройства обладают на порядок более высоким порогом повреждения и поляризационно нечувствительны. Не смотря на то, что микрозеркала позволяют изменять только амплитуду отраженного пучка, его фазу также можно преобразовывать с помощью бинарной дифракционной решетки [63]. Этот метод был применен в работе [64], где авторам удалось поочередно генерировать LG-пучки разного порядка с частотой 4кГц при эффективности преобразования падающей на DMD мощности излучения около 1%. Для сравнения, типичная частота обновления кадров для SLM составляет 60Гц, а эффективность дифракции в первый порядок превосходит 80%.

Помимо SLM и DMD для изменения фазового профиля пучка используются деформируемые зеркала [65], прозрачные пластинки, сдвиг фаз в которых осуществляется путем изменения их толщины [66], а также голограммы фазовых масок, проявленные на фотопленках [67]. Отдельно стоит упомянуть то, что в 2006 году были изобретены преобразователи спиновой части углового момента фотонов в орбитальную на основе неоднородных жидкокристаллических пластинок (так называемые «*q-plates*») [68]. Рекордным на сегодняшний день является приготовление пучка с величиной ОУМ $10010\hbar$ при помощи алюминиевого зеркала спиральной формы, изготовленного высокоточным токарным станком [69]. В то же время стандартный SLM позволяет достичь генерации пучков с $l = 600$ [70].

§ 1.7. Генерация пространственных кудитов

Наиболее простым способом приготовления перепутанных кудитов на основе пространственных состояний бифотонов является прямая селекция фотонов с выделенными поперечными импульсами. С этой целью в эксперименте [71] авторы установили в каждый из каналов рассеяния СПР маски с несколькими щелями, его схема представлена на рис. 1.8(а). Вектор состояния двух перепутанных кудитов при этом имеет вид:

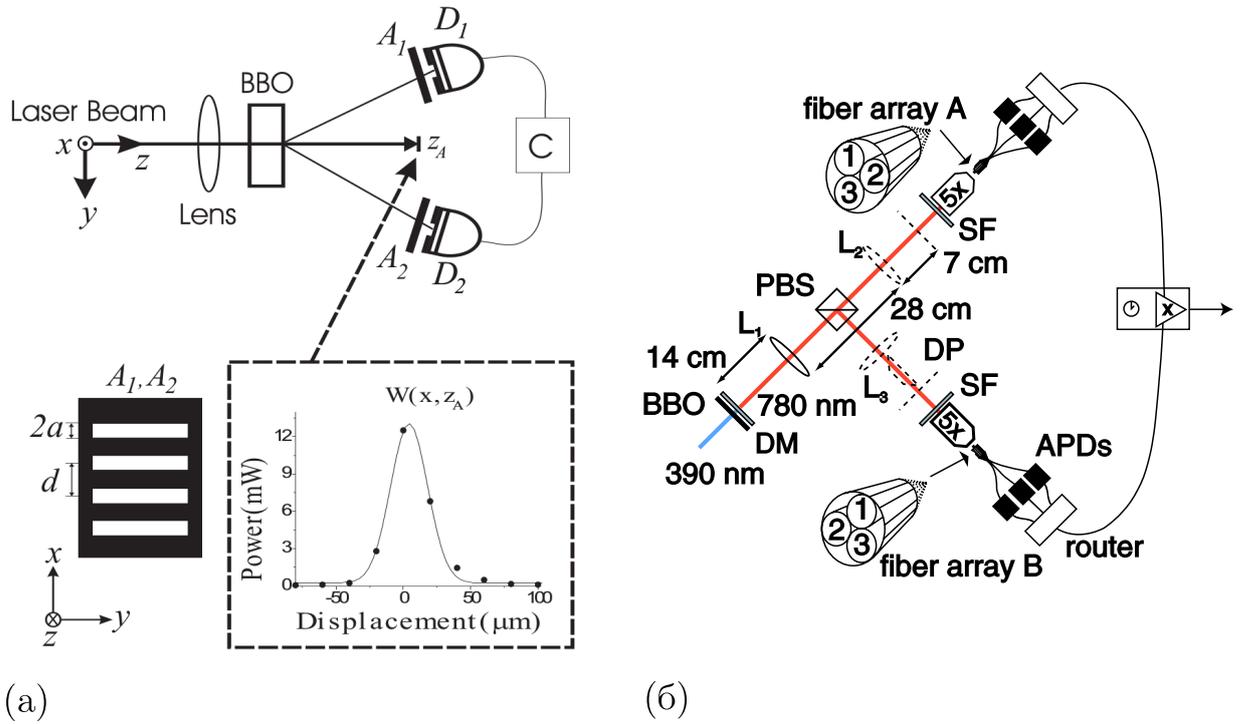


Рис. 1.8. Схемы экспериментальных установок по приготовлению перепутанных кудитов на основе поперечных корреляций импульсов фотонов: (а) из работы [71] и (б) из работы [72].

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{s=-s_d}^{s_d} \exp\left(ik \frac{w^2 s^2}{2z_A}\right) |s\rangle |-s\rangle, \quad (1.33)$$

где s – это номер щели, w – расстояние между соседними щелями, d – число щелей в каждом из каналов, а z_A – это расстояние от кристалла. При этом

состояние $|s\rangle | -s\rangle$ соответствует случаю, когда сигнальный фотон прошел через щель с номером s , а холостой – через щель с номером $-s$. Подобные корреляции обусловлены законом сохранения импульса и позволяют генерировать пары перепутанных кудитов размерности d каждый. Схожая схема, но уже с массивом оптических волокон вместо щелей, была реализована в эксперименте [72], она представлена на рис. 1.8(б). Максимальные размерности кудитов для первой и второй экспериментальных схем составили $d = 8$ и $d = 6$ соответственно.

Первый эксперимент по генерации перепутанных кудитов с использованием пространственных мод бифотонов был выполнен группой Цайлингера в 2002 году [73] (рис. 1.9). Авторами был выбран неколлинеарный режим СПР с углом разлета бифотонов 4° , при котором еще сохраняется полный ОУМ фотонов [74]. Благодаря этому при гауссовой накачке кристалла, сигнальный и холостой фотон антикоррелированы по ОУМ и можно переписать (1.30) как

$$|\Psi\rangle = c_{-1} |-1\rangle |1\rangle + c_0 |0\rangle |0\rangle + c_1 |1\rangle |-1\rangle, \quad (1.34)$$

ограничившись рассмотрением подпространства собственных векторов $|l\rangle$ с $|l| \leq 1$. Выражение (1.34) представляет собой волновую функцию для двух перепутанных кудитов (систем размерности $d = 3$).

Чтобы удостовериться в наличии высокоразмерного перепутывания между фотонами, для них была проведена успешная проверка нарушений неравенства Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта [75], обобщенное на случай произвольной размерности [76]. Для наблюдения соответствующих неклассических корреляций между фотонами авторы использовали голограммы фазовых дифракционных решеток на кварцевом стекле с «вилкообразной» дислокацией в центре (как на рис. 1.7(б)): такая голограмма

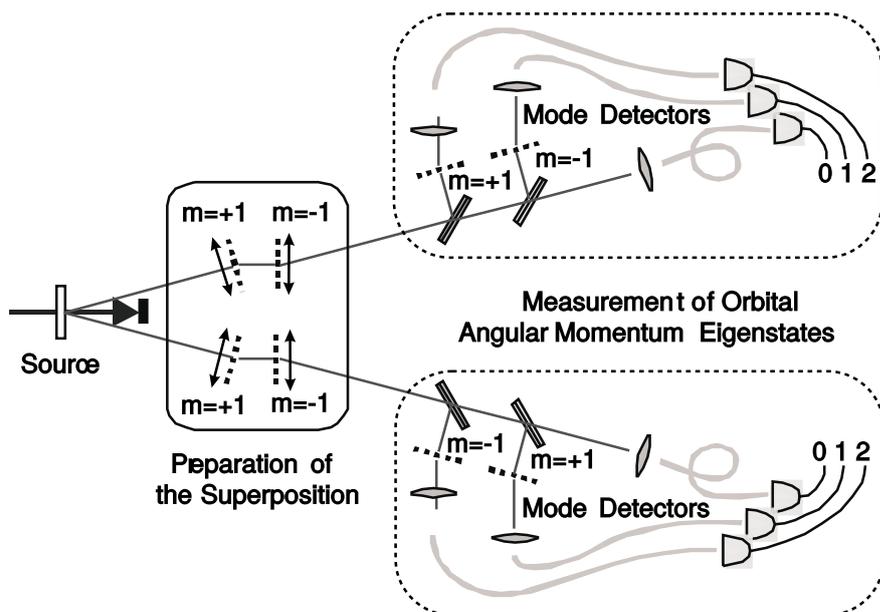


Рис. 1.9. Схема экспериментальной установки по наблюдению перепутанных кудитов на основе ОУМ бифотонов [73].

вносит в падающий гауссов пучок ОУМ $+\hbar$ в первом порядке дифракции и $-\hbar$ в минус первом, а её смещение позволяет создавать суперпозиции гауссова пучка и моды Гаусса-Лагерра первого порядка [77]. Установленная перед одномодовым волокном, голограмма производила проекционные измерения на соответствующую суперпозицию состояний $|0\rangle$ и $|\pm 1\rangle$, что и было использовано в эксперименте. Путём оценки условных вероятностей детектирования фотонов при разных проекторах в каждом из каналов была получена величина так называемого белловского параметра $I_{d=3}$, значение которого не превышает двойки в случае классических корреляций и достигает $4/(6\sqrt{3} - 9) \simeq 2.873$ для максимально перепутанных кутритов, что эквивалентно равенству амплитуд кутритов в выражении (1.34). Проблема заключается в том, что вероятности $|c_l|^2$ из разложения (1.30) монотонно убывают с увеличением $|l|$ [40, 50]. Исправить это можно выровняв распределения $|c_l|^2$ за счёт увеличения его ширины (*spiral bandwidth*)

посредством уширения перетяжки пучка накачки w . Это согласуется с выражениями (1.31) и (1.13) для числа Шмидта, которое будет расти с w при $w > \delta$. Увеличение ширины распределения $|c_l|^2$ приводит к заселению фотонами не используемых в эксперименте мод, и, как следствие, потерям полезного сигнала.

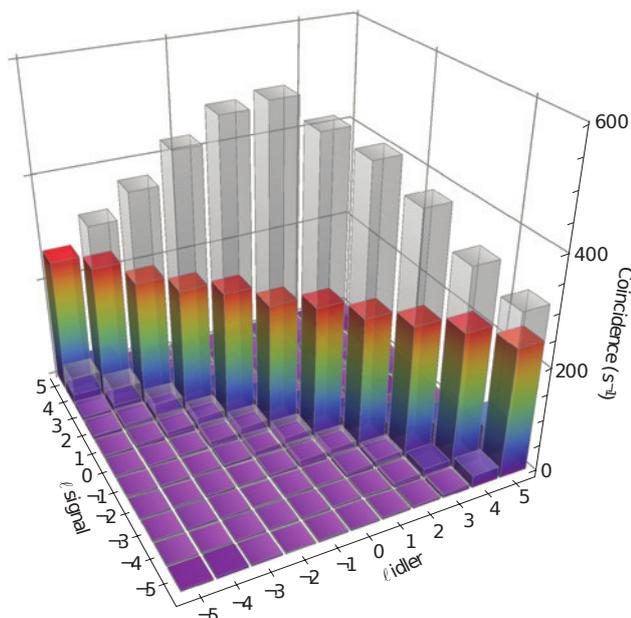


Рис. 1.10. Гистограмма распределений числа совпадений фотоотсчетов для сигнального и холостого фотонов с различными ОУМ [78]. Серые и цветные столбцы соответствуют результатам измерения до и после «прокрустовой фильтрации» соответственно.

Альтернативой такому подходу служит «концентрация перепутанности» [79] приготовленных состояний путём их пространственной фильтрации. Это было сделано той же группой авторов в их следующей работе [80], где размещение в каждом из каналов детектирования дополнительных линз позволило увеличить эффективность детектирования азимутальных мод Гаусса-Лагерра первого порядка за счет уменьшения эффективности детектирования мод нулевого. Подобный способ увеличения степень пере-

путанности ОУМ-кудитов за счет дополнительных потерь (так называемой «прокрустовой фильтрации») был использован и в эксперименте [78], но уже с применением более продвинутой техники детектирования пространственных мод с помощью SLM. В этой работе была реализована генерация перепутанных кудитов вида

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=-[d/2]}^{[d/2]} c_l |l\rangle |-l\rangle \quad (1.35)$$

до размерности $d = 14$ включительно. На рис. 1.10 изображено распределение величин частоты отсчета совпадений при детектировании фотонов с разными ОУМ в сигнальном и холостом каналах, антидиагональные элементы которого пропорциональны вероятностям $|c_l|^2$. Разноцветные и серые столбцы этой гистограммы соответствуют результатам измерений до и после прокрустовой фильтрации, которая, как видно, приводит к существенным потерям. Из-за потерь уровень сигнала для случая $d = 11$ становится сопоставим с уровнем шумов, что в том числе усложняет проверку неравенства Белла, нарушение которых должно становиться все более существенным с увеличением d . На рис. 1.11(а) синими точками отмечено то, как в теории с ростом размерности состояния должна расти величина I_d , а красным – её экспериментальные значения. Как видно, вместе с d увеличивается статистическая погрешность при измерениях белловского параметра, а его значение уменьшается. Скорее всего последнее связано с систематическими ошибками при измерениях, такими как смещение перетяжек детектирующих мод сигнального и холостого каналов в нелинейном кристалле относительно друг друга как в продольном, так и поперечном направлениях. С ростом квантового числа l подобная ошибка становится все более критичной из-за усложнения профиля соответствующих мод.

Набор измерений необходимый для проверки неравенств Белла можно

интерпретировать как частичное восстановление матрицы плотности состояния в процессе полной квантовой томографии. По этой причине томография также позволяет наблюдать перепутывание в системах высокой размерности, что и было выполнено в работе [81] для тех же двухкудитных систем (1.35) в подпространствах $d = 2, 4, 6, 8$. Как и при измерениях параметра I_d в рассмотренном выше эксперименте [78], с ростом размерности томографируемых кудитов наблюдалось снижение величины фиделити F между восстановленными матрицами плотности и ожидаемыми: с $F = 0.96 \pm 0.01$ для $d = 2$ до $F = 0.64 \pm 0.01$ для $d = 8$, что отражено на рис. 1.11(б). Здесь и далее величина фиделити определена как $F(\rho, \rho_{th}) = [\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_{th}} \rho \sqrt{\rho_{th}}}]^2$ и достигает своего максимума $F = 1$ при полном соответствии матрицы плотности восстановленного состояния ρ теоретической ρ_{th} .

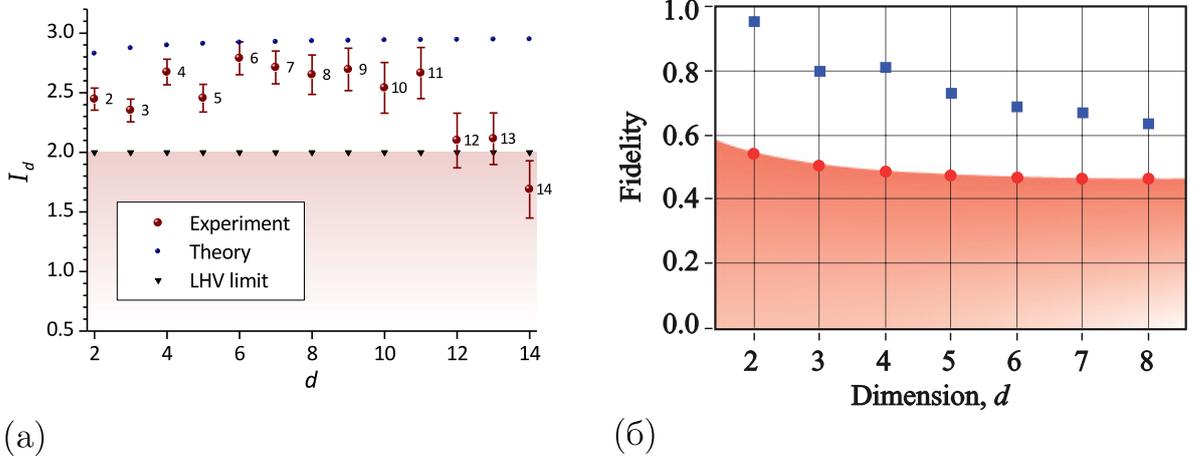


Рис. 1.11. Графики зависимости параметра Белла I_d (синие точки – теория, красные – эксперимент) [78] (а) и фиделити (синие точки – эксперимент) [81] (б) от размерности состояния (1.29). Закрашенные области соответствует случаям классических корреляций.

Как видно, приготовление подобных систем высокой размерности все

еще остается сложной экспериментальной задачей. По этой причине многие работы посвящены исследованию самого простого случая – генерации максимально перепутанных кубитов. Так в эксперименте [82] был подробно рассмотрен случай генерации белловского состояния

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|l, -l\rangle + |-l, l\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.36)$$

для подпространства $l = 2$, а в работе [83] было показано, что остальные три состояния Белла $|\Phi^\pm\rangle$ и $|\Psi^-\rangle$ могут быть получены посредством добавления в каналы сигнального и холостого фотонов призм Дове, осуществляющих преобразование $|l\rangle \rightarrow |-l\rangle$. В эксперименте [84] была проведена квантовая томография таких белловских пар для различных $|l|$, она продемонстрировала снижение фиделити с уровня $F = 0.978$ при $|l| = 3$ до $F = 0.826$ при $|l| = 20$, что также обусловлено возрастающей сложностью детектирования мод Гаусса-Лагерра высоких порядков.

Конечно, в случае перепутанных кубитов применение пространственных степеней свободы фотона не дает преимуществ перед использованием поляризационных, к тому же экспериментальная техника для последних куда более продвинута. С другой стороны, полная размерность системы пары фотонов может быть увеличена путём одновременного использования как пространственных, так и поляризационных степеней свободы. Подобный подход, известный как гиперперепутывание (англ. *hyperentanglement*), был реализован в эксперименте [85] для приготовления 36-мерных систем на основе поляризационных, пространственных и частотно-временных степеней свободы бифотонов. Не так давно одновременное кодирование поляризацией и ОУМ фотонов было успешно опробовано для высокоразмерной версии протокола квантового распределения ключа BB84 по открытому пространству [86].

§ 1.8. Случай негауссовой накачки

Как видно, все рассмотренные эксперименты по генерации пространственно перепутанных бифотонов требуют фильтрации углового спектра СПР. Возможной альтернативой такому подходу является преобразование амплитуды бифотона путём управления угловым спектром пучка накачки кристалла. Число таких работ сравнительно мало по причине того, что до недавнего времени не существовало эффективных способов пространственной модуляции света в коротковолновой части его видимого спектра и УФ диапазоне.

Так в эксперименте 2004 года [87] для преобразования пространственной моды аргонового лазера накачки в его резонатор вносилась проволока на трансляционной подвижке, что позволяло генерировать моды Гаусса-Эрмита до четвертого порядка включительно за счет нарушения круговой симметрии резонатора. Благодаря этому авторы работы наблюдали изменение пространственного распределения детектируемых пар фотонов из-за преобразования профиля пучка накачки.

Позже в эксперименте [88] с той же целью в пучок лазера накачки вносилось покровное стекло – это позволяло создавать скачок фазы на π в его центре. Таким образом, фазовый профиль пучка накачки был близок к первой моде Гаусса-Эрмита, что приводило к изменению вида азимутальных корреляций при СПР. Поскольку первая мода Гаусса-Эрмита может быть представлена как суперпозиция пучков Гаусса-Лагерра с $l = \pm 1$, правило отбора по ОУМ для фотонов рассеяния (1.29) приобрело вид $l_s + l_i = \pm 1$, что было подтверждено посредством измерения спектра азимутальных мод бифотонного поля с помощью SLM и одномодовых волокон.

С появлением пространственных модуляторов света для УФ диапазона,

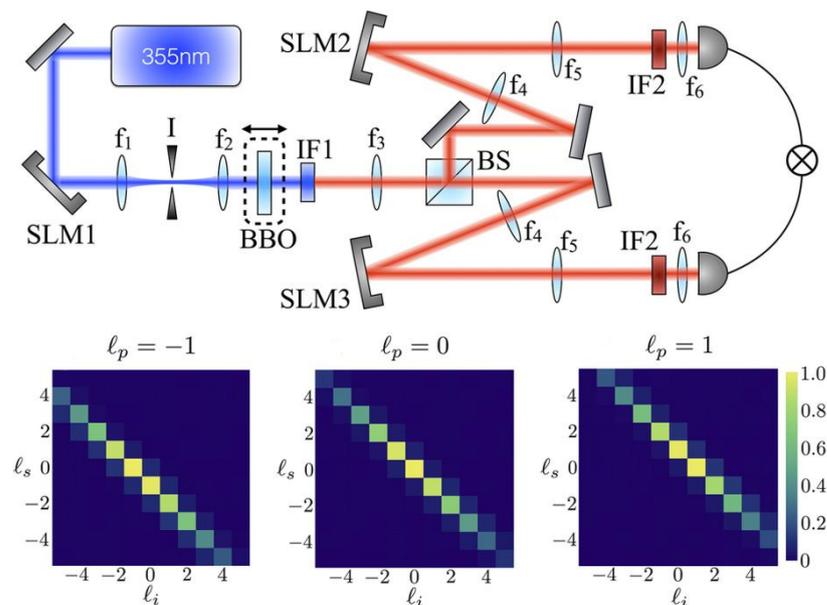


Рис. 1.12. Схема экспериментальной установки из работы [89], а также гистограммы распределений числа совпадений фотоотсчетов для сигнального и холостого фотонов с различными ОУМ при $l_p = -1, 0, 1$.

в 2015 году была осуществлена эффективная накачка кристалла пучками высокого качества с ОУМ $\pm \hbar$ [89]. Схема этого эксперимента представлена на рис. 1.12: с помощью SLM перед кристаллом авторы могли изменять величину ОУМ фотонов накачки, а пара SLM перед одномодовыми волокнами после кристалла позволила провести проекционные измерения состояний сигнальных фотонов с ОУМ $l_s \hbar$ и холостых с ОУМ $l_i \hbar$. Как видно из представленных на том же рисунке гистограмм, внесение в пучок накачки ненулевого ОУМ приводило к сдвигу изначально антидиагонального распределения азимутальных корреляций $l_s = -l_i$ в диагональном направлении.

Подробного рассмотрения заслуживает эксперимент по приготовлению пространственных состояний Белла, основанный на использовании правил отбора по четности для сигнального и холостого фотонов при СПР [90].

В нем авторы разложили волновую функцию фотона в бесконечномерном базисе одномерных мод Гаусса-Эрмита $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\text{HG}_n\rangle$, а затем представили её в двумерном пространстве четных $|e\rangle$ и нечетных $|o\rangle$ собственных состояний:

$$|\psi\rangle = \alpha |e\rangle + \beta |o\rangle, \quad (1.37)$$

где $\alpha |e\rangle = \sum_n c_{2n} |\text{HG}_{2n}\rangle$ и $\beta |o\rangle = \sum_n c_{2n+1} |\text{HG}_{2n+1}\rangle$.

Как следует из правил отбора по четности (1.24), при четном пучке накачки состояние бифотона будет иметь вид

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|e\rangle |e\rangle + |o\rangle |o\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.38)$$

а при нечетном:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|e\rangle |o\rangle + |o\rangle |e\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.39)$$

Легко заметить, что состояния $|\Phi^+\rangle$ и $|\Psi^+\rangle$ являются белловскими.

Схема установки для этого эксперимента представлена на рис. 1.13, где на врезке изображен «вращатель четности» – устройство, представляющее собой пару стеклянных пластинок, положение стыка между которыми совпадает с центром поперечного профиля падающего пучка. Поворот одной из пластинок относительно другой на угол ϕ позволяет вносить сдвиг фаз между разными половинами пучка, изменяя его чётность. Такое преобразование накачки при СПР позволяет приготовить двухфотонное состояние вида:

$$|\Psi\rangle = \cos(\phi/2) |\Phi^+\rangle + i \sin(\phi/2) |\Psi^+\rangle, \quad (1.40)$$

что остается максимально перепутанным при любых ϕ . Для того, чтобы в этом удостовериться, авторы использовали «анализатор четности», который представляет собой сбалансированный интерферометр Маха-Цандера с дополнительным зеркалом в одном из плечей. С помощью такого ин-

терферометра можно разделить на выходе четные и нечетные компоненты состояния за счет зеркального отражения поля в одном из каналов $E(x) \rightarrow E(-x)$ и последующей интерференции. Измерения частоты отсчетов совпадений на выходах интерферометров при различных углах поворота вращателей четности θ_1 и θ_2 позволили пронаблюдать успешное нарушение неравенств Белла для приготовленных состояний (1.40).

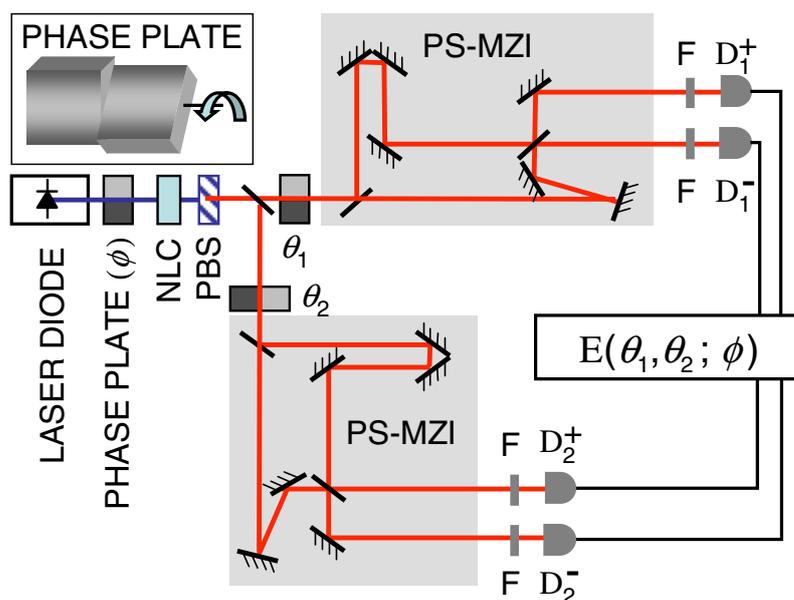


Рис. 1.13. Схема экспериментальной установки для приготовления пространственных состояний Белла из работы [90].

Рассмотренная схема эксперимента обладает существенными достоинствами. Во-первых, приготовление пространственных Белловских состояний такого типа не требует их фильтрации: каким бы не было число пространственных мод в спектре СПР, их всегда можно разделить на четные и нечетные, тем самым сделав переход к двумерному подпространству. Во-вторых, схема детектирования из четырех каналов позволяет одновременно измерять все возможные исходы измерений, чего лишены двухканальные схемы с SLM из работ [78, 81, 82]. Измерения с парой детекторов обла-

дают уязвимостью при проверке неравенств Белла, что может привести к превышению значением белловского параметра не только классической границы, но и границы для квантовых корреляций, найденной Борисом Цирельсоном в работе [91]. Такой случай был рассмотрен в эксперименте с бифотонами [92], где авторам удалось пронаблюдать практически идеальные корреляции Попеску-Рорлиха [93] благодаря специально выбранному набору ОУМ-проекторов при двухканальном детектировании.

В то же время, основным недостатком рассмотренного эксперимента [90] является большое число пространственных мод, составляющих состояние Белла. Это усложняет передачу подобных состояний как по открытому пространству, так и по волноводам. К тому же, подобная схема приготовления двух максимально перепутанных кубитов не позволяет перейти к случаю кубитов. Решению этих проблем и будет посвящена первая оригинальная глава диссертации.

ГЛАВА 2

Генерация пространственных состояний Белла без постселекции

Как было показано в литературном обзоре, существующие схемы приготовления пространственно-перепутанных кудитов обладают существенным недостатком – они нуждаются в процессе фильтрации спектра пространственных мод СПР. В настоящей главе на примере состояний Белла предложен и экспериментально опробован метод генерации таких состояний, не нуждающийся в подобной постселекции.

Первым необходимым шагом предлагаемого метода является минимизация числа пространственных мод в спектре СПР путем поиска оптимальной ширины гауссова пучка накачки. Благодаря этому размерность бифотонных состояний становится строго ограничена подпространством мод малого порядка. Затем спектр пространственных мод СПР изменяется путем преобразования пучка накачки в моды Гаусса-Эрмита, что приводит к резкому увеличению степени перепутанностиготавливаемых состояний. Размерность кудитов при этом определяется порядком моды накачки и продолжает оставаться строго ограниченной. В данной главе подробно рассмотрен самый простой случай, а именно генерация пары максимально перепутанных кубитов (состояния Белла) при пучке накачки в первой моде Гаусса-Эрмита.

§ 2.1. Схема эксперимента

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2.1. В качестве накачки использовался диодный лазер мощностью 450 мВт с длиной волны излучения 407 нм. Для получения гауссова пучка излучение лазера с помощью зеркал заводилось в одномодовое волокно через микроскопный объектив O1 кратностью 20х. Далее пучок на выходе волокна коллимировался при помощи объектива O2 той же кратности. С помощью полуволновой пластинки поляризация накачки подстраивалась под максимальную эффективность дифракции на поляризационно чувствительном SLM1 (Cambridge Correlators). Аналогичным способом направление поляризации пучка после отражения от SLM (в первом порядке дифракции) выставлялась вдоль вертикали для выполнения частотно-вырожденного коллинеарного синхронизма II-го типа в периодически поляризованном кристалле KTiOPO_4 (КТР) длиной 25 мм. Накачка фокусировалась в кристалл линзой L1 с фокусным расстоянием 200 мм, затем излучение СПР собиралось линзой L2 с фокусным расстоянием 150 мм. По причине того, что центр пропускания интерференционного фильтра соответствовал длине волны 820 нм (ширина его спектра пропускания – 10 нм), его приходилось наклонять. При этом максимум пропускания сдвигался в коротковолновую область и совпадал с длиной волны излучения СПР в коллинеарном вырожденном режиме (814 нм).

Далее пучки сигнальных и холостых фотонов разделялись на поляризационном светоделителе, а затем, отражаясь от разных граней треугольной призмы (покрытой высокоотражающим в ИК-диапазоне покрытием), падали на SLM2 (Holoeye Pluto). Так как второй SLM также обладает направлением оптимальной для его работы линейной поляризации (оно гори-

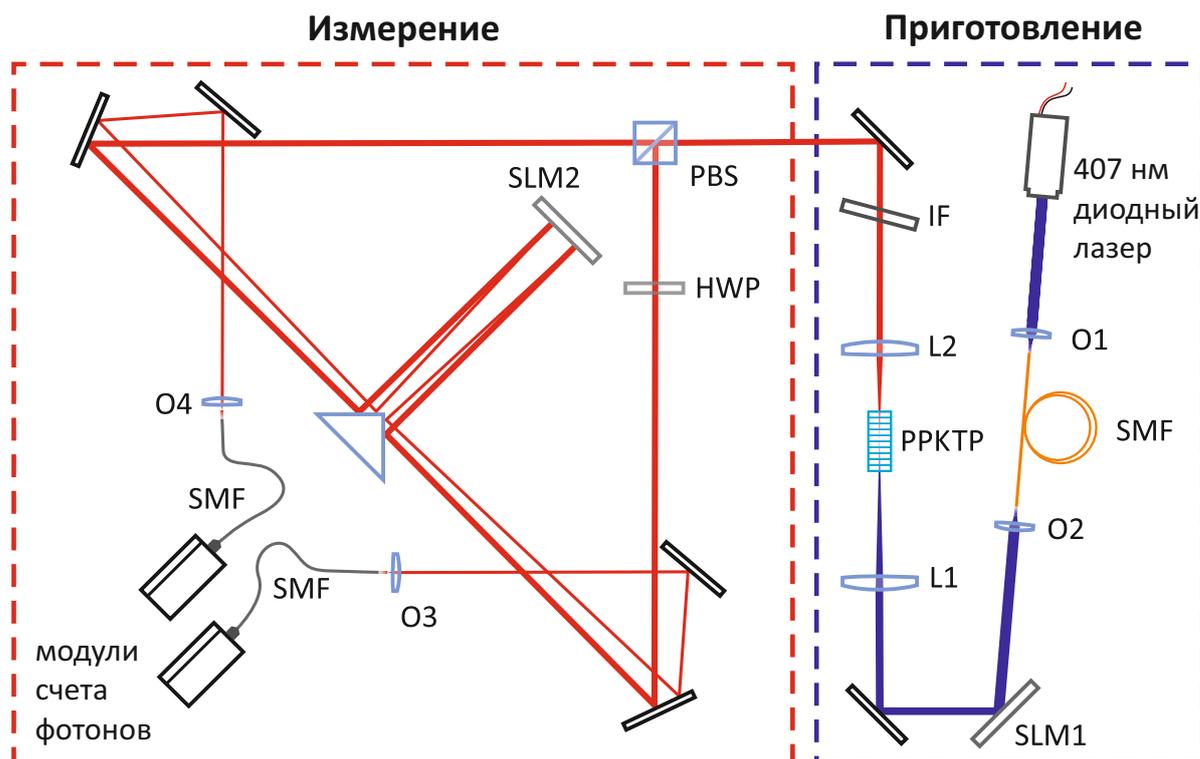


Рис. 2.1. Схема экспериментальной установки по приготовлению и измерению пространственно-перепутанных кудитов.

зонтально), в одном из каналов была установлена полуволновая пластинка. При такой конфигурации второй фазовый модулятор выполнял обратную задачу – он преобразовывал моды пучков в нулевую для последующей пространственной фильтрации одномодовыми волокнами, фокусировка на торцы которых также осуществлялась 20х объективами O3 и O4. Эти волокна подсоединялись к счетчикам фотонов на основе лавинных фотодиодов (Perkin-Elmer), сигнал с которых поступал на схему совпадений.

При такой схеме экспериментальной установки изменять число Шмидта можно двумя способами: выбирая разные линзы L1 и изменяя ширину амплитудной маски на первом SLM (последнее эквивалентно изменению диаметра пучка). Периодически поляризованный кристалл был выбран из тех соображений, что с ним легко добиться одномодового режима по при-

чине малой ширины синхронизма. Другими словами, для δ из формулы (1.13) легко подобрать линзу L1, которая сфокусирует пучок накачки в перетяжку $w = \delta$. К тому же, периодически поляризованный КТР является относительно ярким источником бифотонов [94], а также в нем отсутствует «эффект сноса» [95]. Линза L2 после кристалла подбиралась так, чтобы выполнялось условие на размер детектирующей перетяжки (1.26), то есть $\sigma = \sqrt{2}w_p$. При этом пучки накачки и детектирования должны с одной стороны быть не шире матрицы SLM, а с другой – уместать на себе не меньше нескольких периодов фазовых дифракционных решеток для их корректной работы.

§ 2.2. Калибровка SLM

Используемые в эксперименте пространственные модуляторы света являются восьмибитными устройствами: они подключаются к персональному компьютеру как внешние дисплеи, фазовые маски на которые подаются в виде изображений. Оттенок серого каждого из пикселей этих изображений (от 0 до 255) определяет фазу, вносимую пикселем матрицы SLM. Для расчёта голограмм на SLM1 и SLM2 был использован рассмотренный в литературном обзоре метод [57], который позволяет модулировать как фазу, так и амплитуду пучка в первом дифракционном максимуме треугольной фазовой дифракционной решетки. С целью уменьшения времени на расчёт голограмм при написании программного кода была использована платформа параллельного вычисления на видеокарте CUDA.

Модель SLM1 известна как самая дешевая на рынке, её главным минусом является относительно маленький рабочий диапазон: глубина фазовой решетки на длине волны излучения 405 нм не достигала значения 2π , что

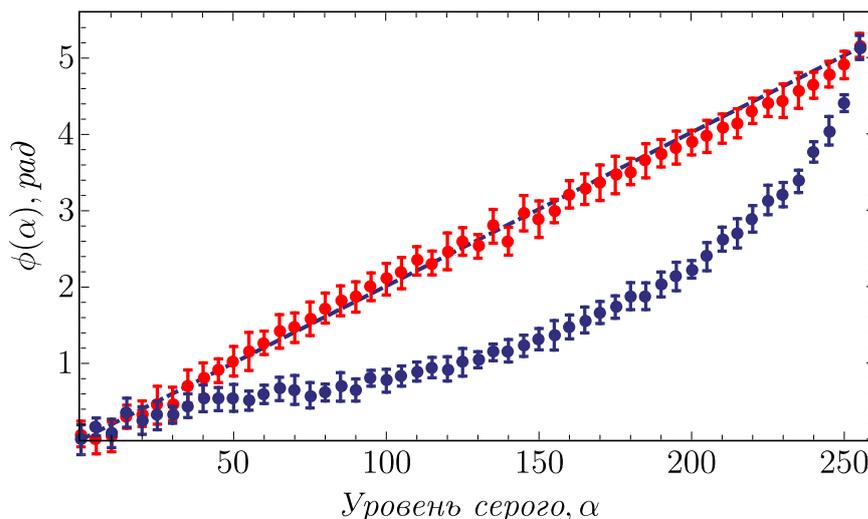


Рис. 2.2. График зависимости величины фазы ϕ , вносимой SLM, от уровня серого α : синие точки – до калибровки, красные точки – после.

уменьшало эффективность дифракции. Кроме того, зависимость вносимого SLM1 сдвига фазы от уровня серого (так называемая «гамма-кривая») была нелинейной, что приводило к некорректной работе устройства. По этой причине была произведена процедура его калибровки. Для этого матрица модулятора была помещена между двумя плёночными поляризаторами, оси которых были повернуты на угол 45° относительно направления «рабочей» поляризации SLM. Зависимость интенсивности I лазерного излучения на выходе такой системы от сдвига фазы ϕ между поляроидами известна и имеет вид $I = \cos(\phi/2)^2$. Благодаря этому можно было восстановить зависимость сдвига фазы, вносимого SLM в нулевом порядке дифракции, от уровня серого α его однородной фазовой маски. Измеренная зависимость $\phi(\alpha)$ представлена на рис. 2.2 синими точками: как видно, она существенно нелинейна и достигает своего максимума $\phi_{max} = 5.17 \pm 0.15$ радиан при уровне серого 255. Её корректировка позволила увеличить эффективность дифракции лазерного пучка накачки при использовании тре-

угольной фазовой решетки с 11% до 22%. Измеренная зависимость $\phi(\alpha)$ для откалиброванного SLM представлена красным на рис. 2.2, где также для сравнения приведена прямая $\phi(\alpha) = (\phi_{max}/255) \times \alpha$ (синяя пунктирная линия). Кроме того, фотографии продифрагировавших на голограмме пучков свидетельствуют об улучшении их вида после проведенной коррекции (рис. 2.3).

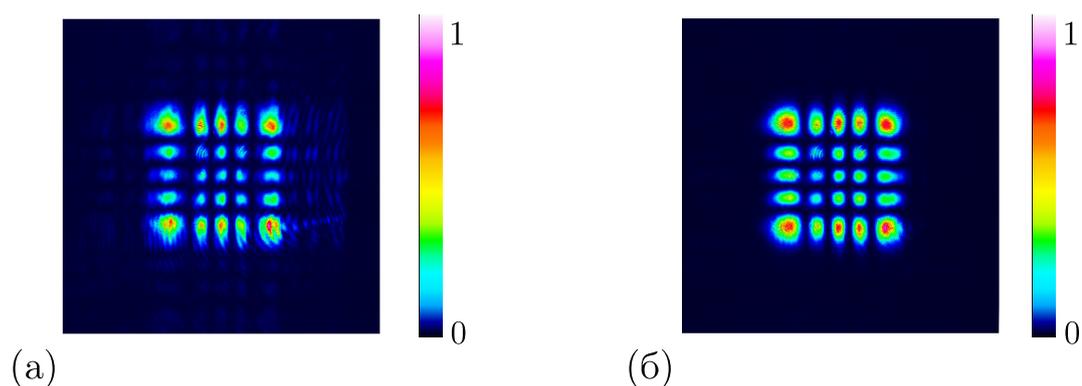


Рис. 2.3. Нормированные распределения интенсивности пучка в моде HG_{44} (а) до и (б) после гамма-коррекции SLM1.

Несмотря на то, что максимальный сдвиг фазы в нулевом порядке дифракции SLM для однородной фазовой маски не достигает 2π , добавление фазовой дифракционной решетки позволяет избежать связанных с этим проблем, ведь сдвигу фазы в первом порядке дифракции SLM соответствует не изменение цвета фазовой маски, а сдвиг периода дифракционной решетки одной части голограммы относительно другой (рис. 2.4). В частности, это приводит к «вилкообразному» виду голограммы для пучка с ненулевым ОУМ на рис. 1.7(б). Таким образом, величина минимального скачка фазы определяется не числом градаций серого фазовой маски, а числом пикселей, приходящихся на период её дифракционной решетки. В данной работе период дифракционной решетки как на SLM1, так и на SLM2, составлял 10 пикселей, чего оказалось достаточным для генерации

и детектирования пучков высокого качества.



Рис. 2.4. Схематичное изображение сдвига периода фазовой дифракционной решетки при добавлении скачка фазы на π в центре голограммы.

Фотографии пучков также позволяют сравнить влияние разных этапов генерации голограммы на итоговый результат. Как видно из снимков пучка в моде HG_{22} на рис. 2.5(а), его вид весьма далёк от желаемого при использовании только фазовой маски вместе с дифракционной решеткой. Добавление амплитудной модуляции значительно улучшает результат (рис. 2.5(б)), но следы нежелательной дифракции света на маске при этом остаются — они заметны по краям снимка. Эту проблему устраняет учёт поправки из работы [57], что заметно по последнему из приведенных снимков (рис. 2.5(в)).

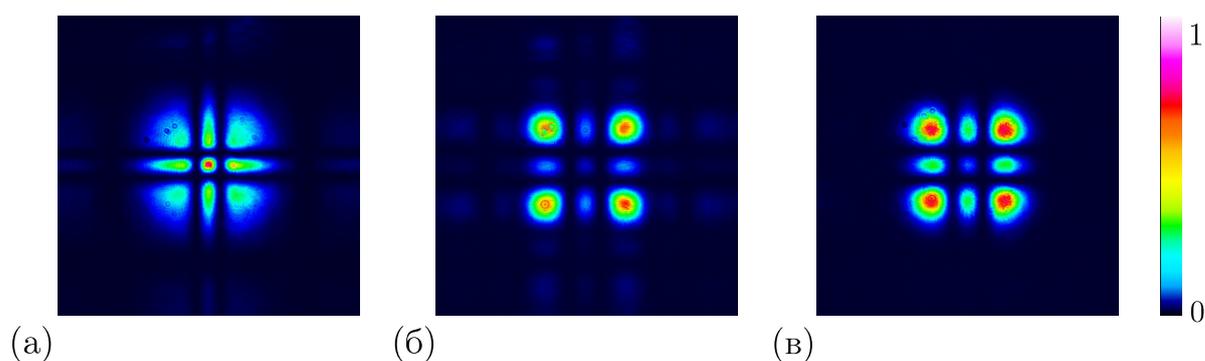


Рис. 2.5. Фотографий пучка для разных этапов генерации голограммы на примере моды HG_{22} : (а) фазовая модуляция с добавлением дифракционной решетки, (б) внесение амплитудной модуляции и (в) учёт поправки из работы [57].

§ 2.3. Минимизация числа Шмидта

Условие для режима генерации с одной модой Шмидта $w = \delta$ можно сформулировать следующим образом: рэлеевская длина пучка накачки $z_R = \pi w_p^2 / \lambda$ должна быть равна половине длины кристалла L . Согласно этому критерию, перетяжка пучка накачки должна составлять $w_p = \sqrt{L/k_p} \approx 30$ мкм с соответствующим ей размером детектирующей моды $\sigma_{s,i} = \sqrt{2}w_p \approx 43$ мкм¹.

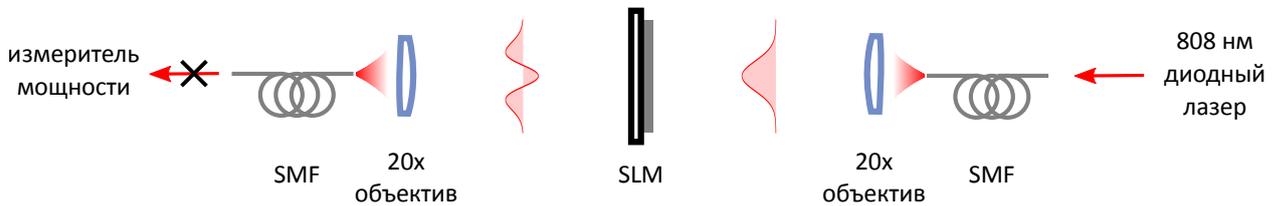


Рис. 2.6. Упрощенный вид установки для подбора оптимальной ширины фазовых масок. При правильном размере маски для моды HG_{02} эффективность заведения излучения в волокно становится минимальной.

Размер масок на SLM2 был зафиксирован, он подбирался из соображений оптимального сопряжения голограмм с модой волокна. Для этого перед SLM2 вместо кристалла и линзы L2 были временно установлены объектив 20x и одномодовое волокно с заведенным в него излучением лазера с длиной волны 808 нм. Эта конфигурация экспериментальной установки схематично изображена на рис. 2.6, она позволила имитировать идеальное детектирование гауссовой моды СПР. Как уже было сказано, моды Гаусса-Эрмита ортогональны друг другу, но если фазовое распределение для моды HG_{01} не зависит от её ширины, то мода HG_{02} не сопрягается с гауссовой

¹Здесь было использовано обозначение ширины перетяжки w_p для наиболее распространенного определения гауссова пучка $\mathcal{E}_p(x, w_p) \propto \exp(-x^2/w_p^2)$. Его следует отличать от введенного для удобства ранее обозначения w , поскольку величина w больше w_p в $\sqrt{2}$ раз. То же самое касается и обозначений σ и $\sigma_{s,i}$.

только при фиксированном размере. По этой причине, изменяя размер маски для моды HG_{02} на SLM2, можно было наблюдать минимум эффективности детектирования излучения лазера, что соответствовало правильной ширине голограммы. Она составила 160 пикселей, а измеренная при обратном распространении через линзу L2 перетяжка $\sigma_{s,i}$ составила 42.6 ± 1.6 мкм для излучения с длиной волны 808 нм.

Размер маски на SLM1 в пучке накачки подбирался посредством максимизации выражения $\eta_c = R_c / \sqrt{R_i R_s}$ для эффективности «сбора» излучения СПР волокнами, где R_i и R_s – величины сигналов холостого и сигнального каналов соответственно, а R_c – частота счета их совпадений. Легко заметить, что η_c не зависит от величины потерь в каналах. Её максимум был достигнут при $w_p = 35.1 \pm 1.1$ мкм, что оказалось близко к теоретическому значению.

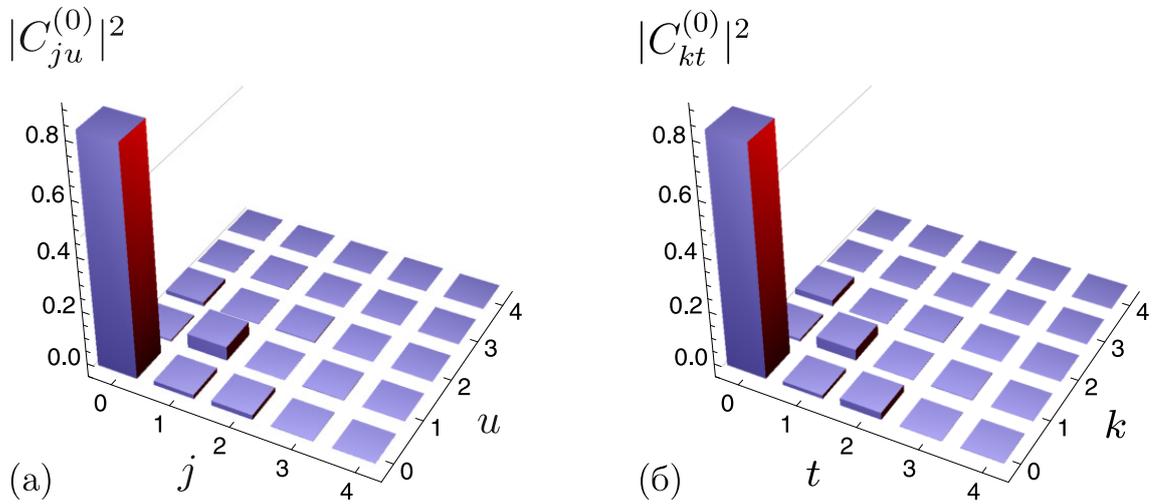


Рис. 2.7. Экспериментально измеренные коэффициенты разложения амплитуды бифотона при гауссовом пучке накачки по (а) горизонтальным и (б) по вертикальным модам Гаусса-Эрмита.

Экспериментально число Шмидта было найдено путём измерения коэф-

коэффициентов $|C_{ju}^{(0)}|^2$ и $|C_{kt}^{(0)}|^2$ разложения (1.23) для горизонтальных и вертикальных мод соответственно. Для этого при гауссовом пучке накачки СПР на разные половины SLM2 подавались фазовые голограммы мод HG_{jk} и HG_{ut} , а затем измерялась частота совпадений фотоотсчётов детекторов. На рис. 2.7 изображены полученные таким образом гистограммы для горизонтальных и вертикальных мод, каждая из них была нормирована на сумму всех своих элементов. По ним можно сделать вывод о том, что полученный режим генерации оказался достаточно близок к одномодовому.

С выражением $\lambda_a \propto |C_{aa}^{(0)}|^2$ была получена грубая оценка экспериментально измеренных горизонтального и вертикального чисел Шмидта $K_x = 1.31 \pm 0.05$ и $K_y = 1.33 \pm 0.04$ при $w_p = 35.1 \pm 1.1$ мкм с полным числом Шмидта $K = K_x \times K_y = 1.74 \pm 0.08$. Найденная величина оказалась выше ожидаемой, и поэтому в эксперименте была также опробована конфигурация из линзы L1 с фокусным расстоянием 150 мм и линзы L2 с фокусным расстоянием 100 мм. Это привело к увеличению наблюдаемого числа Шмидта до $K = 1.88 \pm 0.15$ при перетяжке пучка накачки $w_p = 28.0 \pm 1.0$ мкм. Аналогичным образом были проведены измерения числа Шмидта для $w_p = 9.9 \pm 1.1$ мкм и $w_p = 58.7 \pm 1.1$. Результаты всех измерений представлены на рис. 2.8, красным пунктиром на нем обозначена величина $w_p = 35.1 \pm 1.0$, что была выбрана как оптимальная для дальнейших измерений.

На гистограммах рис. 2.7 можно также заметить небольшие столбцы для коэффициентов $|C_{02}^{(0)}|^2$ и $|C_{20}^{(0)}|^2$ с высотой около 2% от столбца $|C_{00}^{(0)}|^2$ каждый. Их наличие можно было бы объяснить плохим соответствием размера перетяжки накачки w_p ширинам детектирующих мод $\sigma_{s,i}$, но изменение отношения $w_p/\sigma_{s,i}$ в диапазоне от 0.7 до 1.4 не только не помогало приблизить вид гистограмм к теоретическому, но и делало хуже. Поэтому

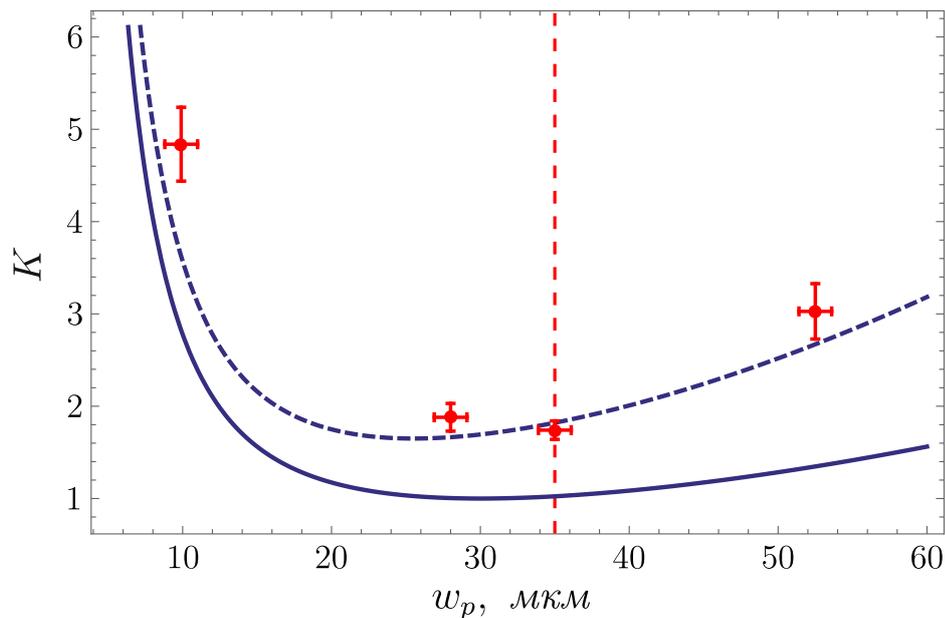


Рис. 2.8. График зависимости числа Шмидта K от ширины пучка накачки w_p : красные точки – эксперимент, сплошная синяя кривая – теоретическая зависимость для приближения двойной гауссоидой (1.13), синяя пунктирная кривая – теоретическая зависимость для выражения (2.1) из работы [48].

можно заключить, что причиной этого несоответствия служит не плохое сопряжение мод, а заметная разница между реальным базисом Шмидта и базисом мод Гаусса-Эрмита. Другими словами, негауссовый вид бифотонной волновой функции (1.8) делает невозможным достижения режима с одной модой Шмидта при гауссовом пучке накачки. Данный факт был учтен при оценке числа Шмидта в работе [48], где проводился численный расчёт амплитуды бифотона. Авторы модифицировали выражение (1.13) посредством добавления параметров $\alpha = 0.85$ и $\beta = 1.65$:

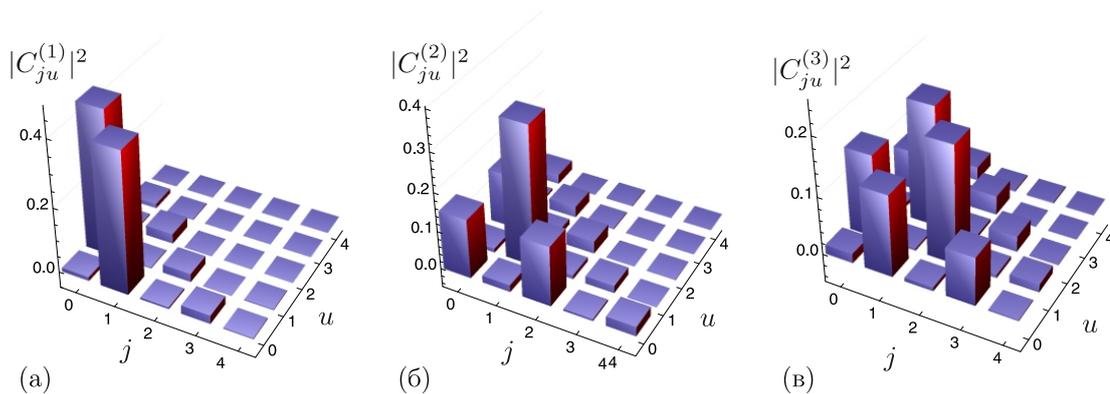
$$K = \beta \left(\frac{w^2 + \alpha^2 \delta^2}{2w\alpha\delta} \right)^2. \quad (2.1)$$

Для сравнения на рис. 2.8 приведены две кривых для величины K как функции w_p : непрерывной кривой для выражения (1.13) и пунктирной для

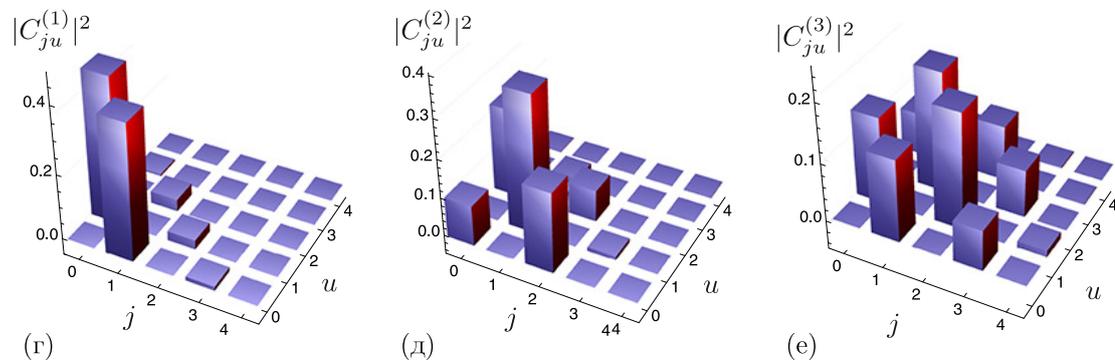
(2.1). Как видно из этого графика, минимум модифицированной кривой поднимается до значения $K = 1.65$ и сдвигается в область меньшей величины $w_p = 25.5$ мкм. Не смотря на то, что по этой оценке размер перетяжки накачки для минимума числа Шмидта оказывается еще меньше найденного, в целом результаты численного расчёта оказались к эксперименту ближе.

Разница между наблюдаемым и ожидаемым поведением числа Шмидта может быть связана с проблемами юстировки, а именно продольным смещением перетяжек накачки и детектирующих мод в нелинейном кристалле относительно друг друга, поскольку его сложно отследить из-за преломления пучков на границе кристалла. К несоответствию эксперимента и теории могло также привести накопления дефектов в периодически поляризованном кристалле при увеличении его длины. Такое предположение было выдвинуто в экспериментальной работе [94], где исследовались зависимости оптимальных ширин w_p и $\sigma_{s,i}$ от длины L периодически поляризованного кристалла КТР того же производителя (Raicol). Критерием оптимальности при этом служил максимум упомянутой выше величины η_c при детектировании излучения СПР одномодовыми волокнами. Авторы данной работы заметили, что начиная с длины кристалла 15 мм экспериментальные зависимости $w_p(L)$ и $\sigma_{s,i}(L)$ отклоняются от теоретических.

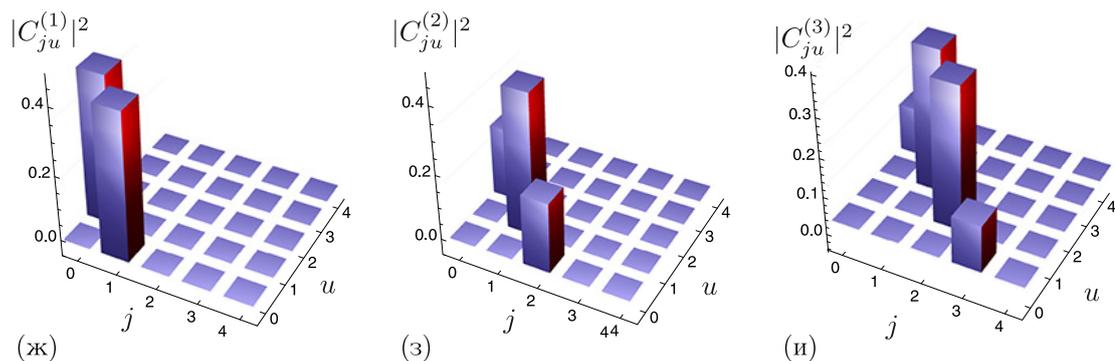
Также нужно отметить, что упомянутый способ оценки числа Шмидта не является точным, поскольку использует только абсолютные значения коэффициентов $C_{aa}^{(0)}$, в то время как полная томография состояния позволила бы получить все коэффициенты разложения $C_{jukt}^{(0)}$. Тем не менее, численное моделирование продемонстрировало корректность такой оценки, поскольку её ошибка оказалась меньше статистической ошибки эксперимента.



Эксперимент для $K_x = 1.31$



Численный расчет для $K_x = 1.31$



Численный расчет для $K_x = 1$

Рис. 2.9. Коэффициенты разложения амплитуды бифотона в базисе мод Гаусса-Эрмита для пучков накачки HG_{01} (левая колонка), HG_{02} (средняя) и HG_{03} (правая): результаты измерений при $K_x = 1.31$ (а-в), численный расчёт для $K_x = 1.31$ (г-е) и численный расчёт для $K_x = 1$ в приближении двойной гауссоиды (ж-и).

§ 2.4. Случай накачки в моде Гаусса-Эрмита ненулевого порядка

Аналогичным образом были проведены измерения $|C_{ju}^{(n)}|^2$ и $|C_{kt}^{(n)}|^2$ для ненулевых n . С помощью SLM1 пучок накачки преобразовывался в моды Гаусса-Эрмита малого порядка: HG_{0n} при $n < 4$. Нормированные гистограммы для измеренных коэффициентов $|C_{ju}^{(n)}|^2$ приведены на рис. 2.9 (а-в). При этом были измерены и значения $|C_{kt}^{(0)}|^2$ для соответствующих вертикальных мод, что позволило убедиться в допустимости факторизации амплитуды бифотона по x - и y -координатам – наблюдаемый угловой спектр вертикальных мод сохранял гауссову форму вне зависимости от порядка горизонтальной моды накачки.

Из представленных гистограмм видно, что сумма модовых индексов $j + u$ рассеянных фотонов близка, но не в точности равна индексу моды пучка накачки n . Данный факт также связан с превышением единицы числом Шмидта и негауссовым видом реальной амплитуды бифотона. Это подтверждается численным расчётом: на рис. 2.9 (г-е) и рис. 2.9 (ж-и) приведены его результаты для $K_x = 1.31$ и $K_x = 1$ соответственно, причем в первом случае расчёт проводился для неупрощенной амплитуды бифотона (1.8), а во втором было использовано приближение двойной гауссоиды (1.12). Как видно, результаты моделирования для $K_x = 1.31$ довольно близки к экспериментальным данным. Так, к примеру, отказ от гауссовой аппроксимации sinc-функции приводит к появлению дополнительных пиков $|C_{30}^{(1)}|^2$ и $|C_{30}^{(1)}|^2$ на гистограмме (г), а учёт неодномодового режима – к ненулевым элементам $|C_{21}^{(1)}|^2$ и $|C_{12}^{(1)}|^2$ (как на рис. 1.4(а) литературного обзора). В то же время, правило отбора по четности строго выполняется для идеальных распределений (ж-и).

§ 2.5. Неравенство Белла

Можно заметить, что состояние, приготавливаемое при пучке накачки в моде HG_{01} , весьма близко к чистому белловскому состоянию:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{HG}_{00}, \text{HG}_{01}\rangle + |\text{HG}_{01}, \text{HG}_{00}\rangle), \quad (2.2)$$

что было продемонстрировано путём проверки неравенства Белла.

Для этого приготовленная белловская пара проецировалась на суперпозиции мод

$$|\theta_{s,i}\rangle = \cos\left(\frac{\theta_{s,i}}{2}\right) |\text{HG}_{00}\rangle + \sin\left(\frac{\theta_{s,i}}{2}\right) |\text{HG}_{01}\rangle \quad (2.3)$$

в сигнальном и холостом каналах, это позволяло наблюдать для частоты совпадений R_c так называемые «белловские кривые»:

$$R_c(\theta_s, \theta_i) \propto |\langle \theta_s, \theta_i | \Psi^+ \rangle|^2 = \frac{1 - \cos(\theta_s + \theta_i)}{4}. \quad (2.4)$$

Измеренные для случаев $\theta_i = 0$, $\theta_i = \pi/4$, $\theta_i = \pi/2$, $\theta_i = 3\pi/4$ зависимости $R_c(\theta_s, \theta_i)$ представлены на рис. 2.10, угол θ_s в каждом случае изменялся от 0 до π .

С на порядок большей длительностью усреднения, была измерена частота совпадений фотоотсчётов при следующих тестовых углах: $\theta_i = 0$, $\theta'_i = \pi/4$, $\theta_s = 3\pi/8$, $\theta'_s = \pi/8$ и ортогональных им $\theta_{i,s} + \pi/2$, $\theta'_{i,s} + \pi/2$. Как известно, в этих точках нарушение неравенства Белла должно быть наиболее существенно. Измеренные значения $R_c(\theta_i, \theta_s)$ нормировались на общую сумму, после чего подставлялись в выражения:

$$E(\theta_i, \theta_s) = \frac{R_c(\theta_i, \theta_s) + R_c(\theta_i + \pi, \theta_s + \pi) - R_c(\theta_i, \theta_s + \pi) - R_c(\theta_i + \pi, \theta_s)}{R_c(\theta_i, \theta_s) + R_c(\theta_i + \pi, \theta_s + \pi) + R_c(\theta_i, \theta_s + \pi) + R_c(\theta_i + \pi, \theta_s)}.$$

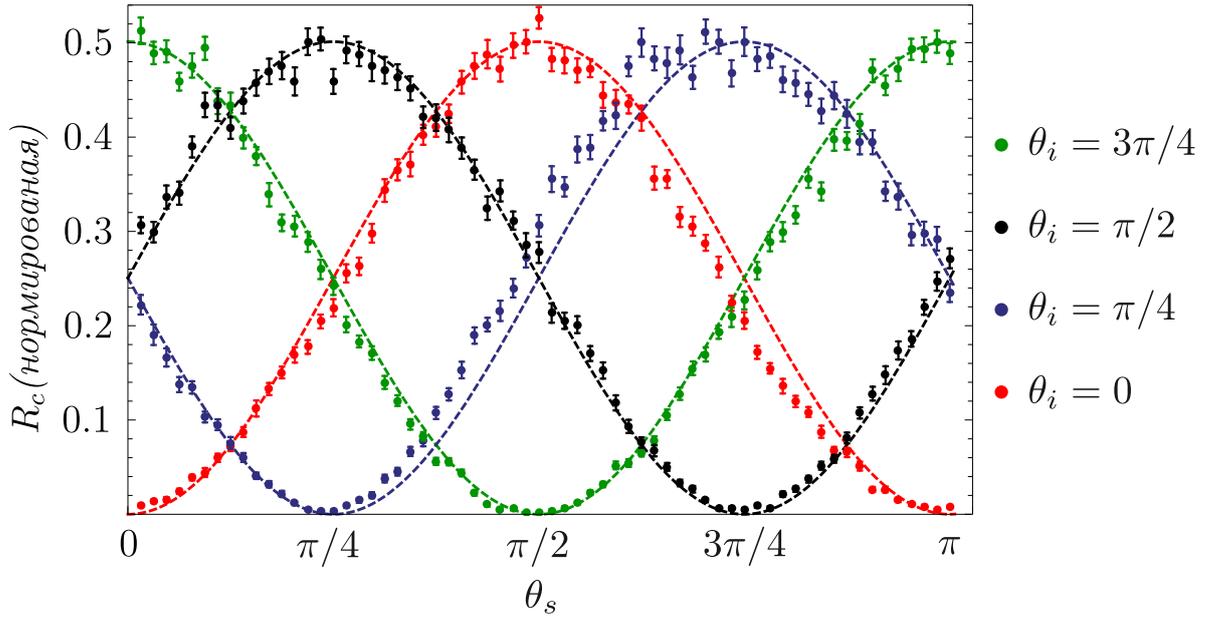


Рис. 2.10. Измеренные для четырех случаев кривые Белла: $\theta_i = 0$, $\theta_i = \pi/4$, $\theta_i = \pi/2$, $\theta_i = 3\pi/4$. Угол θ_s изменялся от 0 до π .

Эти величины должны удовлетворять неравенству Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта $-2 \leq I \leq 2$, где I :

$$I = E(\theta_i, \theta_s) - E(\theta_i, \theta'_s) + E(\theta'_i, \theta_s) + E(\theta'_i, \theta'_s). \quad (2.5)$$

Полученное значение I составило $I = 2.81 \pm 0.05$ и оказалось близко к границе Цирельсона $I = 2\sqrt{2}$ что явно демонстрирует нарушение неравенства.

Стоит отметить, что обычно измерения для проекций на состояния с углами θ , θ' производятся одновременно с проекциями на ортогональные им состояния. К примеру, при работе с поляризационными состояниями для этого используется по светоделителю и паре детекторов в каждом из каналов. В данной схеме детектирования пространственных мод с помощью SLM такая возможность отсутствует, что приводит к наличию «лазейки» (англ. *loophole*) для некорректного нарушения неравенств Белла.

Устранению подобных лазеек посвящено немало экспериментальных работ последних лет [96, 97, 98].

§ 2.6. Квантовая томография в подпространстве высокой размерности

С целью восстановления полной матрицы плотности приготовленного состояния, в дополнение к белловским измерениям была проведена его полная квантовая томография в подпространствах более высокой размерности $d = 3 \times 3$ и $d = 6 \times 6$. Так для восстановления в подпространстве 3×3 , искомая матрица плотности ρ была представлена в виде разложения Холецкого матрицы 9×9 с 80 независимыми действительными параметрами. Для этого она была параметризована как нижняя треугольная матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t_3 + it_4 & t_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{51} + it_{52} & t_{53} + it_{54} & \cdots & t_{50} & 0 \\ t_{66} + it_{67} & t_{68} + it_{69} & \cdots & t_{80} + it_{81} & t_{65} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

с нормировкой

$$\rho = \frac{T^\dagger T}{\text{Tr}(T^\dagger T)}. \quad (2.7)$$

Благодаря этому восстановленная матрица плотности была по определению эрмитова и положительно определенная, а её след равен единице [99].

Для повышения точности восстановления был использован переполненный набор измерений: исследуемое состояние проецировалось на набор из $N = 15 \times 15$ собственных векторов обобщенных матриц Гелл-Манна с модами $|\text{HG}_{00}\rangle$, $|\text{HG}_{10}\rangle$ и $|\text{HG}_{01}\rangle$ в качестве измерительного базиса. В случае

подпространства $d = 6 \times 6$ измерительный базис протокола томографии был расширен путём добавления векторов мод $|\text{HG}_{20}\rangle$, $|\text{HG}_{11}\rangle$ и $|\text{HG}_{02}\rangle$. На этот раз набор проекторов не был переполнен и состоял из $N = 36 \times 36$ векторов, что было обусловлено резким ростом сложности процесса восстановления с d .

Оценка элементов матрицы плотности была получена путём минимизации величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbb{P}_i - P_i)^2}{\mathbb{P}_i} \quad (2.8)$$

для ожидаемых вероятностей \mathbb{P}_i и их экспериментальных оценок $P_i \propto R_c^{(i)}$, где $R_c^{(i)}$ – это измеренная частота отсчётов совпадений для i -го проектора из общего набора. При это сумма всех N частот $R_c^{(i)}$ была нормирована на единицу.

Вещественная и мнимая части восстановленной в подпространстве $d = 3 \times 3$ матрицы плотности ρ представлены на рис. 2.11(а). Мера соответствия фиделити $F(\rho, \rho_{th})$ восстановленного состояния желаемому белловскому $\rho_{th} = |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|$ составила 0.97 ± 0.01 . При восстановлении состояния в подпространстве более высокой размерности (рис. 2.11(б)) величина $F(\rho, \rho_{th})$ снизилось до 0.72 ± 0.02 . Как уже было отмечено в литературном обзоре, такое падение значения фиделити с ростом d вполне типично для подобных экспериментов. Оно связано как с уменьшением статистической выборки, так и с более сложной структурой мод высокой размерности. Присутствие антидиагональных пиков $|C_{ju}^{(1)}|^2$ для $j + u = 3$ на гистограмме рис. 2.7(а) по причине негауссового вида бифотонной амплитуды также внесло свой вклад.

Здесь и в дальнейшем ошибка восстановления состояний рассчитывалась следующим образом: на основе сотни повторных измерений частот от-

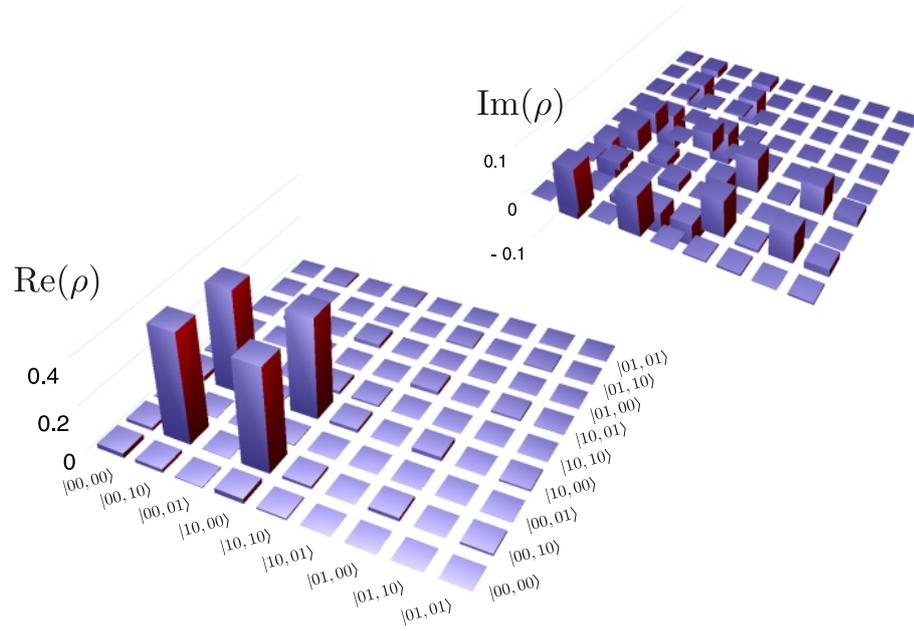
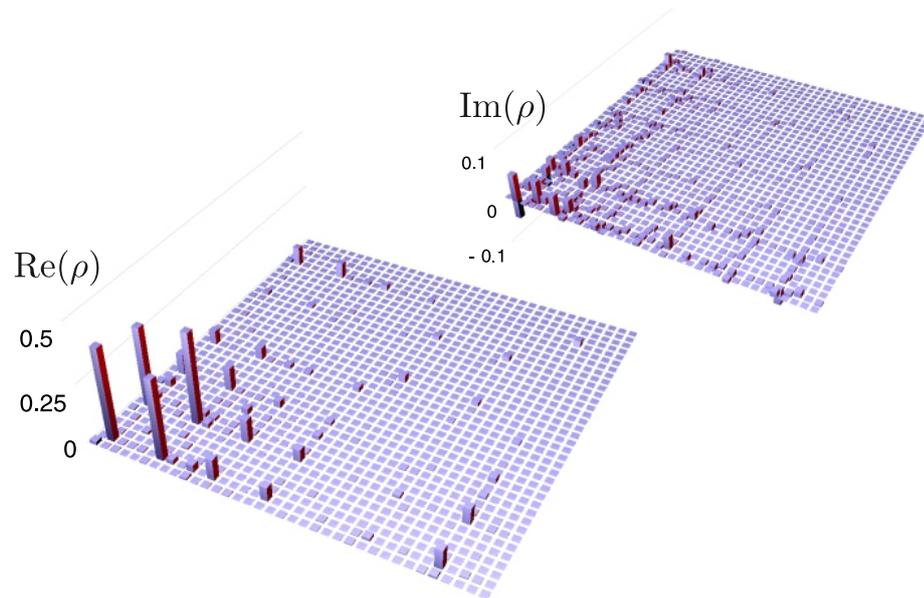
(a) $d = 3$ (б) $d = 6$

Рис. 2.11. Матрица плотности ρ приготовленного состояния Белла: (а) восстановленная в подпространстве $d = 3 \times 3$ и (б) в подпространстве $d = 6 \times 6$. Здесь $|jk, ut\rangle$ обозначают $|\text{HG}_{jk}, \text{HG}_{ut}\rangle$.

счётов совпадений для каждого i -го проектора вычислялось среднее значение $R_c^{(i)}$, а затем из нормального распределения вокруг него выбиралось 10 случайных значений. Полученный таким образом набор данных позволял восстановить 10 различных матриц плотности и вычислить соответствующие значения фиделити. Стандартная ошибка среднего для последних и использовалась в качестве погрешности $F(\rho, \rho_{th})$.

§ 2.7. Численное моделирование

Для численных расчётов коэффициентов разложения амплитуды бифотона в базисе мод Гаусса-Эрмита (рис. 2.7 (г, д, е)) продольная волновая расстройка Δ_z из выражения (1.8) была записана следующим образом:

$$\Delta_z = k_p(T) \cos \vartheta_p - k_s(T) \cos \vartheta_s - k_i(T) \cos \vartheta_i - 2\pi/\Lambda(T), \quad (2.9)$$

где T – температура кристалла, $2\pi/\Lambda(T)$ – вектор его обратной решетки, $\vartheta_{i,s}$ – углы рассеяния сигнального и холостого фотонов, а $\vartheta_p(\vartheta_s, \vartheta_i)$ определяется из равенства нулю поперечной расстройки для каждой угловой фурье-компоненты амплитуды накачки:

$$k_p(T) \sin \vartheta_p = k_s(T) \sin \vartheta_s + k_i(T) \sin \vartheta_i. \quad (2.10)$$

При малых углах рассеяния связь (2.10) преобразуется к виду [100]:

$$\vartheta_p = \frac{n_e(\lambda_s, T)\vartheta_s + n_o(\lambda_i, T)\vartheta_i}{2n_e(\lambda_p, T)}, \quad (2.11)$$

где $n_{o,e}$ – коэффициенты преломления обыкновенной и необыкновенной волн, зависимости которых от λ и T известны [101].

Температура кристалла для частотно-вырожденного синхронизма была найдена экспериментально с помощью спектрометра с многомодовым

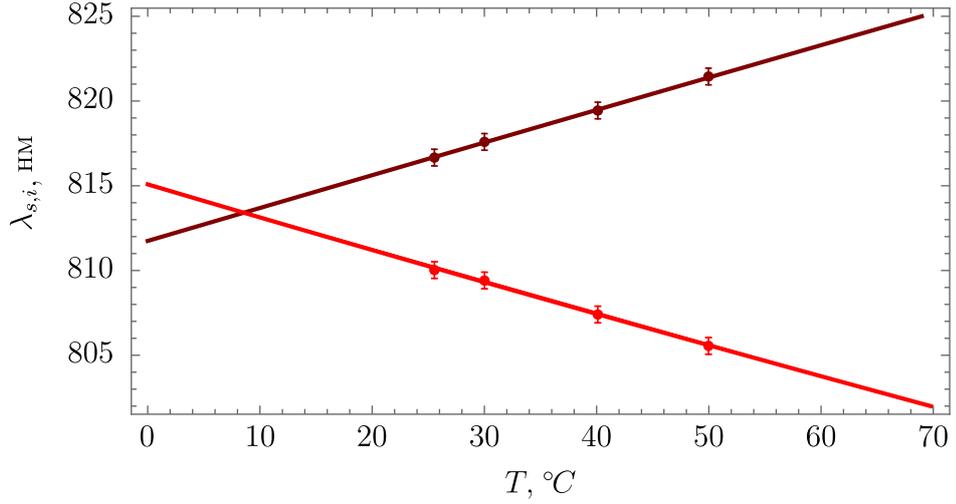


Рис. 2.12. Измеренные зависимости длин волн сигнального и холостого фотонов от температуры кристалла.

волоконным входом (Ocean Optics), который позволял наблюдать температурные зависимости обеих спектральных компонент СПР (рис. 2.12). Эти же данные определили $\Lambda(T)$ из условия $k_p(T) = k_s(T) + k_i(T) + 2\pi/\Lambda(T)$ (сплошные линии на рисунке). Для температуры 25°C величина периода поляризации кристалла составила 10.43 ± 0.02 мкм.

Расчёт амплитуды бифотона при гауссовой накачке производился по формуле

$$\Psi(\vartheta_s, \vartheta_i) \propto \exp\left(-\frac{w^2}{2}\Delta_{\perp}^{(+2)}\right) \text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta_z\right) \quad (2.12)$$

для всех интересующих углов $\vartheta_{s,i}$, где

$$\Delta_{\perp}^{(\pm)} = k_s(T) \sin \vartheta_s \pm k_i(T) \sin \vartheta_i. \quad (2.13)$$

Для сравнения на рис. 2.13 приведены два типа распределений $|\Psi(\vartheta_s, \vartheta_i)|^2$: полученные из выражения (2.15) (а, б, в) и из приближения двойной гауссой (г, д, е):

$$\Psi(\vartheta_s, \vartheta_i) \propto \exp\left(-\frac{w^2}{2}\Delta_{\perp}^{(+2)}\right) \exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\Delta_{\perp}^{(-2)}\right). \quad (2.14)$$

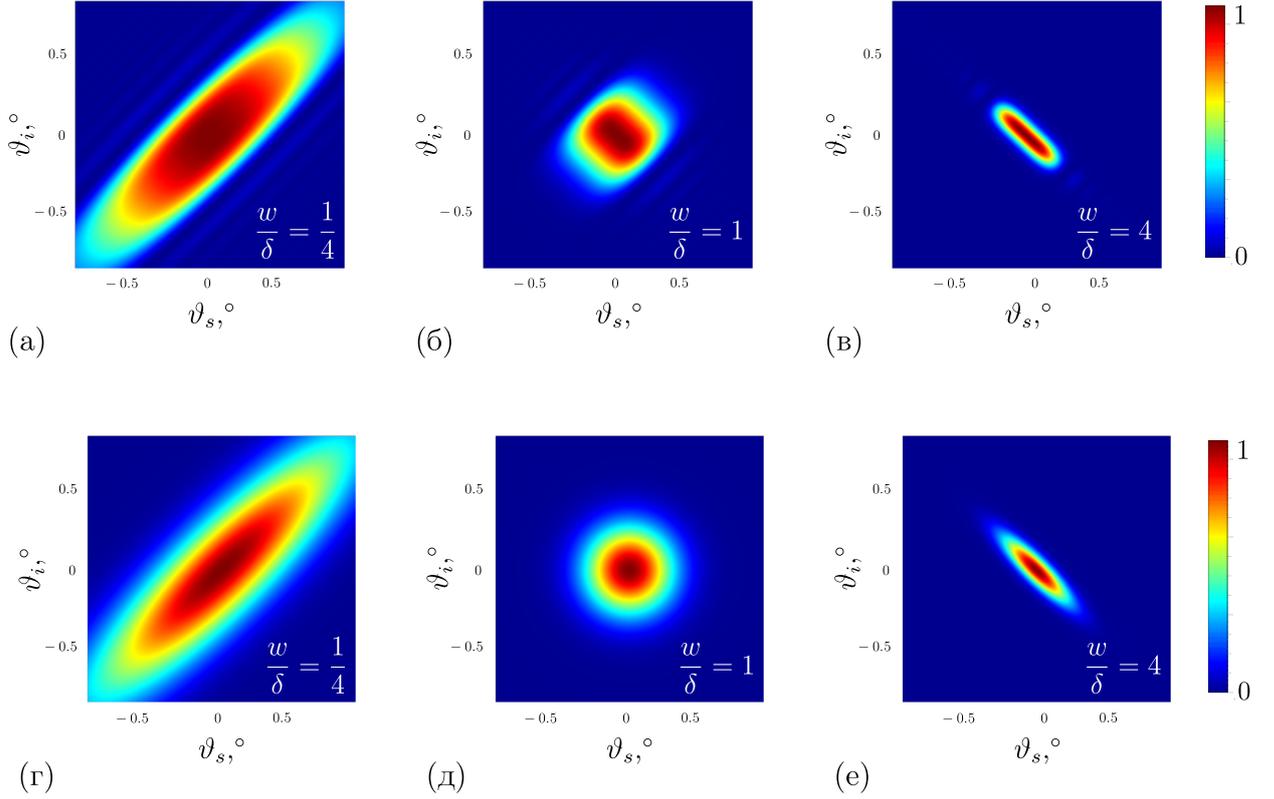


Рис. 2.13. Численный расчёт квадрата амплитуды бифотона как функции угловых отстроек от точного синхронизма с использованием аппроксимации sinc-функции гауссом (г, д, е) и без (а, б, в) для разных w/δ .

Представленные на рис. 2.13 квадраты амплитуд бифотонов были получены для разных отношения ширины пучка накачки w к обратной ширине углового синхронизма δ . В частности, рассмотрены случаи $w = \delta/4$ (а, г), $w = \delta$ (б, д) и $w = 4\delta$ (в, е).

То, как меняется угловой спектр СПР в случае накачки кристалла пучками Гаусса-Эрмита HG_{0n} при условии $w = \delta$, можно увидеть на рис. 2.14. Расчёт соответствующей амплитуды бифотона производился с помощью выражения:

$$\Psi(\vartheta_s, \vartheta_i) \propto H_n(w\Delta_{\perp}^{(+)}) \exp\left(-\frac{w^2}{2}\Delta_{\perp}^{(+)2}\right) \text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta_z\right). \quad (2.15)$$

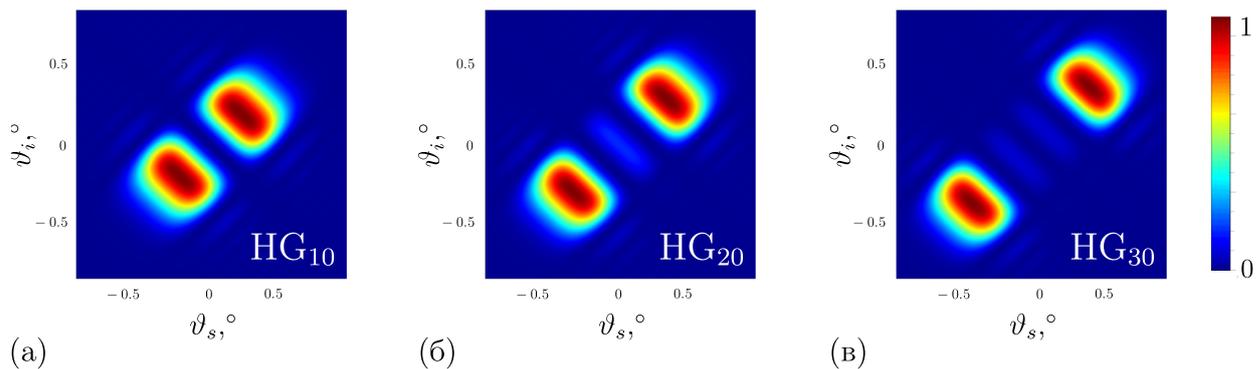


Рис. 2.14. Численный расчёт квадрата амплитуды бифотона как функции угловых отстроек от точного синхронизма при накачке пучками Гаусса-Эрмита: (а) HG_{10} , (б) HG_{20} и (в) HG_{30} для случая $w = \delta$.

§ 2.8. Заключение к главе 2

Таким образом, в ходе эксперимента были реализованы измерения кросс-корреляций между пространственными модами сигнального и холостого фотонов при СПР в базисе Гаусса-Эрмита при близком к единице числе Шмидта. Исследованы изменения спектра пространственных мод СПР при преобразовании накачки в моды Гаусса-Эрмита HG_{01} , HG_{02} и HG_{03} , а также реализована генерация близкого к чистому белловского состояния $|\Psi^+\rangle$ на основе пространственных степеней свободы фотона с последующим экспериментом по наблюдению нарушения неравенства Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта ($I = 2.81 \pm 0.05$). Успешно проведена томография этого состояния в подпространствах размерности $d = 3 \times 3$ и $d = 6 \times 6$. Результаты данной главы были опубликованы в работе [102], позже собранная экспериментальная установка была использована в работе по адаптивной квантовой томографии двухкомпонентных систем [103].

Полученные результаты продемонстрировали возможность получения в эксперименте ряда интересных пространственно-перепутанных состояний

путём изменения формы поперечного профиля пучка накачки. В том числе возможность генерации чистого состояния Белла высокой яркости без предварительной постселекции, что может быть использовано на практике в аппаратно-независимых протоколах квантового распределения ключа. Наблюдаемая частота совпадений фотоотсчётов на 1 мВт мощности лазерного пучка накачки кристалла составила $R_c \simeq 100$ Гц. При этом потери при детектировании были достаточно велики: наибольший вклад в них вносили маски с амплитудной модуляцией на SLM2 ($\simeq 80\%$), квантовая эффективность модулей счета фотонов ($\simeq 20\%$) и потери на пропускании интерференционного фильтра ($\simeq 50\%$). С учётом всех этих потерь оценка скорости генерации бифотонов достигает значения $R_c \simeq 15$ кГц, что сравнимо с показателями для источников поляризационно-перепутанных пар фотонов при использовании такого же кристалла [94].

Стоит отметить, что позже аналогичные результаты были получены и для частотно-временных степеней свободы бифотона. Как было показано в работе [104], спектральная амплитуда бифотона так же может быть представлена в базисе мод Шмидта, если не рассматривать СПР в приближении монохроматических волн. Причем гауссова аппроксимация sinc-функции для фазового синхронизма также приводит к шмидтовскому разложению в виде мод Гаусса-Эрмита. В эксперименте [105] авторам удалось как минимизировать число частотных мод путем подбора оптимальной ширины лазерного импульса накачки кристалла, так и сгенерировать частотно-временное состояние Белла, используя импульс с огибающей в виде первой моды Гаусса-Эрмита. Текущее состояние дел в данном направлении отражено в обзоре [106].

ГЛАВА 3

Инженерия квантовых состояний ОУМ-бифотонов с помощью адаптивного управления профилем пучка накачки

Как было показано в предыдущей главе, реальные моды Шмидта заметно отличаются от мод Гаусса-Эрмита. Это различие куда менее заметно для мод Гаусса-Лагерра с нулевым радиальным индексом. Азимутальные корреляции не столь чувствительны к ширине детектирующих мод σ , что судя по всему и сделало перепутанные по ОУМ бифотоны более распространенной реализацией кудитов.

В литературном обзоре уже упоминались работы [53, 54], где авторы рассмотрели случай накачки кристалла суперпозицией азимутальных мод с $l > 0$:

$$\mathcal{E}_p(\rho, \phi, w) = \sum_l \alpha_l \text{LG}_{0l}(\rho, \phi, w). \quad (3.1)$$

В последней из них было показано, что аккуратный подбор коэффициентов α_l позволяет контролировать как амплитуды, так и фазы генерируемых при СПР кудитов, перепутанных по ОУМ. Реализации данного подхода в эксперименте и посвящена данная глава.

§ 3.1. Схема эксперимента

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 3.1. В отличие от предыдущего эксперимента в качестве накачки использовался узкополосный диодный лазер со встроенной голографической дифракционной решеткой (Ondax SureLock), его мощность составляла 40 мВт, а длина волны излучения – 405 нм. Помимо этого, длина периодически поляризованного кристалла КТР была уменьшена до 15 мм, что должно было снизить количество дефектов в нем. Для того чтобы SLM1 (Cambridge Correlators) мог производить более сложные преобразования профиля накачки, размер пучка на выходе одномодового волокна был увеличен в два раза путём замены объектива O2 кратностью 20x на объектив кратностью 10x.

Фокусное расстояние для линзы L1 осталось прежним – 200 мм. При этом в новой схеме эксперимента излучение СПР не коллимировалось – линза L2 с фокусным расстоянием 100 мм строила изображение кристалла на матрицу SLM2 (Holoeye Pluto). По этой причине объективы O3 и O4 со схемы на рис. 2.1 были заменены асферическими линзами L3 и L4 с фокусными расстояниями 11 мм. Расстояние между линзами и торцами одномодовых волокон были выбраны так, чтобы изображения этих торцов на матрице SLM2 имели размер 1 мм для излучения на длине волны 810 нм. Отказ от схемы с коллимированными пучками был обусловлен тем, что расстояние от линзы L2 до SLM2 и расстояния от SLM2 до линз L3 и L4 сравнимы с длинами Рэля детектируемых пучков, из-за чего их уже нельзя считать параллельными.

Предыдущий эксперимент показал, что наличие небольшого угла падения между детектируемыми пучками и матрицей SLM2 не критично для измерений, по этой причине схема детектирования была упрощена посред-

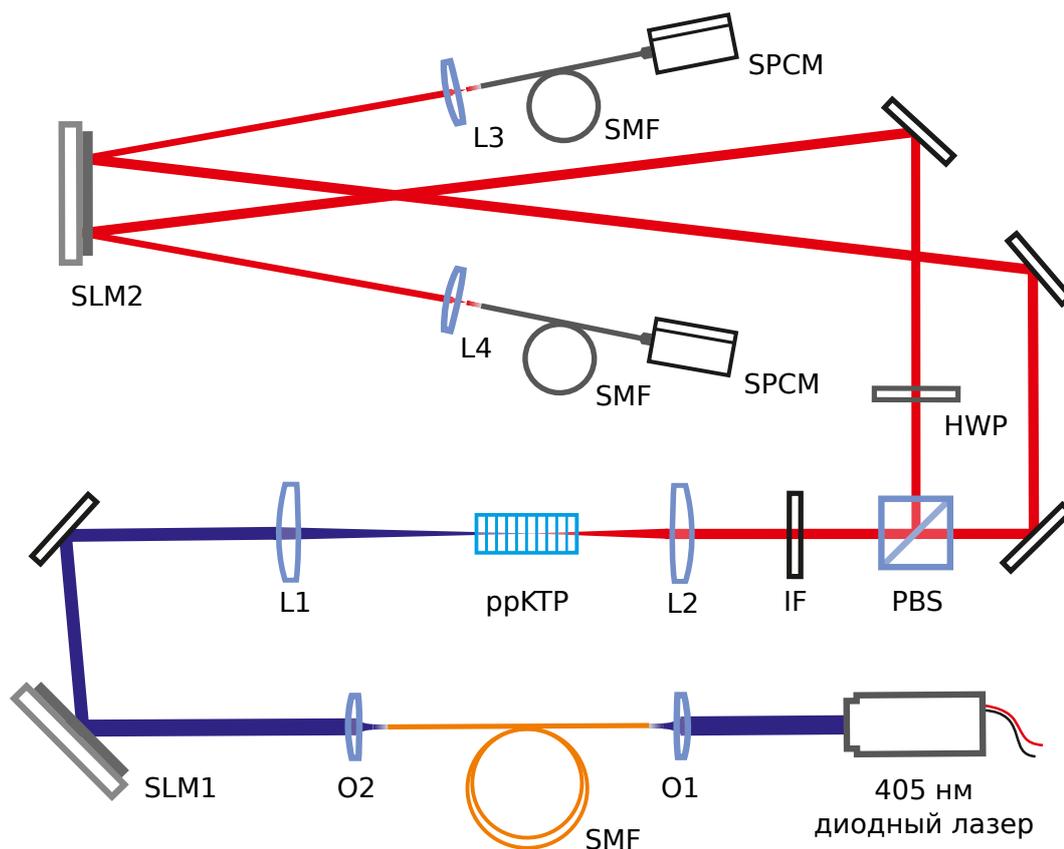


Рис. 3.1. Схема экспериментальной установки по приготовлению и измерению кудитов, перепутанных по ОУМ.

ством отказа от треугольной призмы после PBS. В качестве детекторов в новой схеме также использовались модули счета фотонов (обозначенных как SPCM на схеме) на основе лавинных кремниевых фотодиодов (Laser Components' Count).

§ 3.2. Метод расчёта голограмм

Как уже было отмечено в литературном обзоре, метод расчёта фазовых голограмм из работы [57] предполагает, что на SLM падает плоская волна. Поскольку ширина фазовой маски на SLM1 была в четыре раза меньше падающего на неё гауссова пучка, данный факт не сильно повлиял

на качествоготавливаемых пучков накачки. Намного важнее было учесть разницу между плоской волной и гауссовым пучком при измерениях с помощью SLM2 и одномодовых волокон.

При идеальном детектировании падающего на SLM пучка $\text{LG}_{pl}(\rho, \phi, \sigma)$ фазовой маской для моды $\text{LG}_{p'l'}(\rho, \phi, \sigma)$ должно выполняться условие ортогональности мод Гаусса-Лагерра:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \text{LG}_{p'l'}(\rho, \phi, \sigma)^* \text{LG}_{pl}(\rho, \phi, \sigma) \rho d\rho d\phi = \delta_{l'l} \delta_{p'p}, \quad (3.2)$$

но если принять во внимание то, что сбор излучения после голограмм осуществляется одномодовыми волокнами, условие (3.2) нарушается и в интеграле перекрытия возникнет вклад гауссовой моды волокна шириной σ_F :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} \text{LG}_{p'l'}(\rho, \phi, \sigma)^* \text{LG}_{pl}(\rho, \phi, \sigma) \exp(-\rho^2/\sigma_F^2) \rho d\rho d\phi \neq \delta_{l'l} \delta_{p'p}, \quad (3.3)$$

где также учтена конечность числовой апертуры ρ_{max} при эксперименте.

Данный эффект особенно критичен при детектировании радиальных мод Гаусса-Лагерра [52]. В работе [107] авторами было предложен способ по уменьшению его влияния путём увеличения ширины σ_F с помощью телескопа перед волокном. Это помогло снизить кросс-ток между модами, но также уменьшило и эффективность их детектирования до 3%, что связано с малым отношением площади сбора полезного сигнала к сечению всего пучка.

Для того, чтобы учесть такую неидеальность «детектора пространственных мод» в эксперименте, но не снижать его эффективность, нами было предложено альтернативное решение данной проблемы: выражения для азимутальных мод Гаусса-Лагерра

$$\text{LG}_{0l}(\rho, \phi, \sigma) \propto (\rho/\sigma)^{|l|} L_0^{|l|}(2\rho^2/\sigma^2) \exp(-\rho^2/\sigma^2) \exp(il\phi) \quad (3.4)$$

было модифицировано путём добавления параметра $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{L}G_{0l}(\rho, \phi, \sigma, \tilde{\sigma}) \propto (\rho/\sigma)^{|l|} L_0^{|l|}(2\rho^2/\sigma^2) \exp(-\rho^2/\tilde{\sigma}^2) \exp(il\phi), \quad (3.5)$$

где последний подбирался из условия

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{\sigma_F^2} = \frac{1}{\sigma^2}, \quad (3.6)$$

что компенсирует множитель $\exp(-\rho^2/\sigma_F^2)$ в интеграле (3.3). Такой способ расчёта голограмм вместе с отказом от измерений с колимированными пучками позволил повысить качество детектирования пространственных мод. Ширины масок, соответствующие $\tilde{\sigma}$ и σ для наших экспериментальных условий, составили 280 и 180 пикселей. При этом расстояние между центрами пикселей равнялось 8 мкм с заполнением матрицы SLM на 87%.

На рис. 3.2(а,б,в) показано, как меняется вид профиля пучка в моде LG_{22} с увеличением σ при условии $\tilde{\sigma} = \sigma$. С ростом размера маски она становится больше падающего гауссова пучка, что приводит к искажению генерируемой моды (размер самого пучка уменьшается по причине того, что снимки были получены в дальней зоне дифракции на голограмме). Из рис. 3.2(г) видно, что учёт гауссовой огибающей $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ исправляет вид пучка, не изменяя его размер.

§ 3.3. Случай накачки с ненулевым ОУМ

Авторы работы о генерации кудитов на основе ОУМ бифотонов [54] использовали приближение тонкого кристалла $L \rightarrow 0$, благодаря чему геометрический фактор (1.3) можно было принять равным единице. Согласно выражению (1.13), данное приближение предполагает бесконечное число пространственных мод K , так как $\delta \propto \sqrt{L}$.

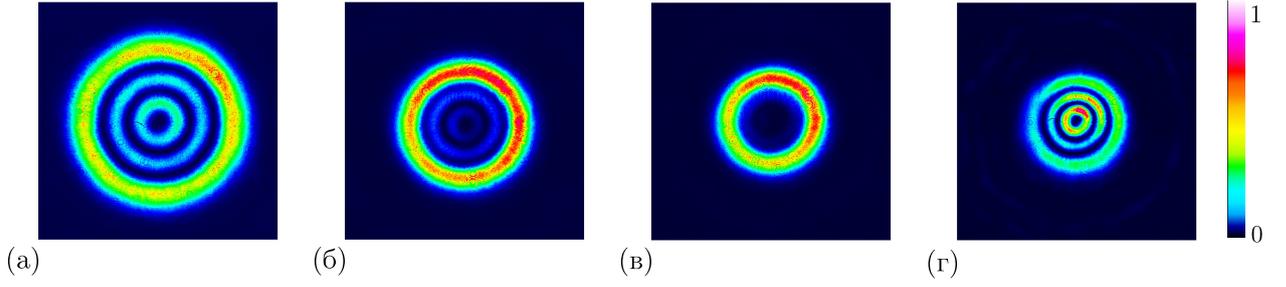
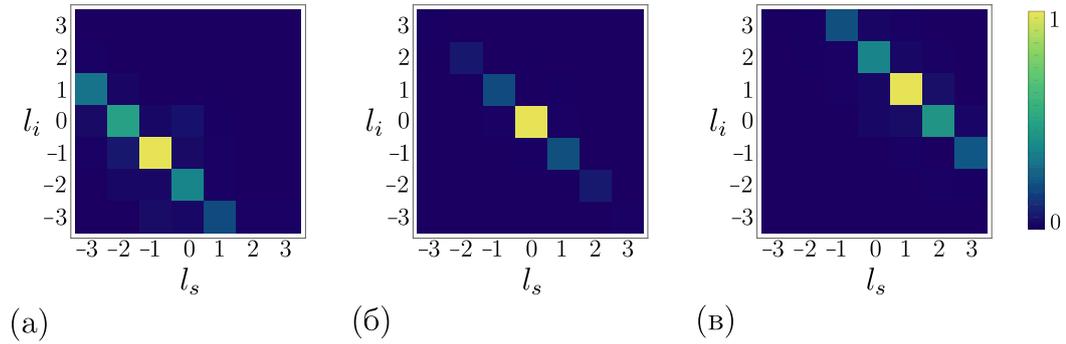


Рис. 3.2. Фотографии пучка в моде LG_{22} при разных ширинах масок $\tilde{\sigma}$ и σ : (а) $\tilde{\sigma} = \sigma = 100$ пикселей, (б) $\tilde{\sigma} = \sigma = 140$ пикселей, (в) $\tilde{\sigma} = \sigma = 180$ пикселей и (г) $\tilde{\sigma} = 280$ пикселей, $\sigma = 180$ пикселей.

Для уменьшения потерь при постселекции широкого спектра азимутальных мод, как и в предыдущем эксперименте, число Шмидта было минимизировано. Размер оптимальной перетяжки гауссова пучка накачки составил $w_p = \sqrt{L/k_p} \approx 25$ мкм, а соответствующие перетяжки для детектирующих мод $\sigma_{s,i} \approx 33$ мкм, что близко к теоретическому значению $\sigma_{s,i} = \sqrt{2}w_p$. Путём измерения напрямую коэффициентов $|c_l|^2$ разложения (1.30) для $|l| \leq 3$ была получена оценка азимутального числа Шмидта $K_{az} = 1/\sum_l |c_l|^4 = 2.0 \pm 0.1$.

На рис. 3.3 представлены измеренные в эксперименте спектры азимутальных мод СПР при накачке кристалла пучками с $l_p = -2, 0, 2$, а также результаты численного расчёта для $K_{az} = 2$ в приближении двойной гауссоиды. Как видно, благодаря сохранению ОУМ при СПР, изначально антидиагональное распределение отсчетов $l_s = -l_i$ при $l_p = 0$ смещается вдоль главной диагонали, а его ширина (а значит степень перепутанности состояния) растёт в полном согласии с результатами работы [89], представленными на рис. 1.12. Нельзя не отметить высокую степень корреляции результатов эксперимента и численного расчёта: квадраты коэффициентов Пирсона R^2 составили 0.975, 0.997 и 0.979 для случаев пучков накачки с

Эксперимент



Теория

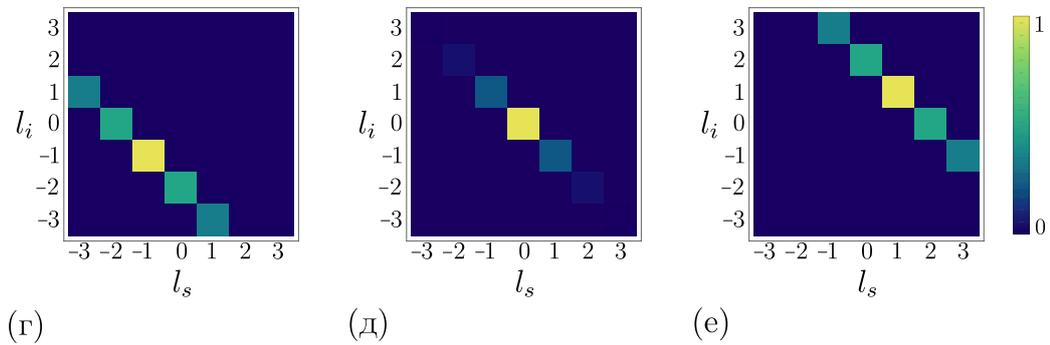


Рис. 3.3. Гистограммы нормированных распределений числа совпадений фотоотсчетов для сигнального и холостого фотонов с различными ОУМ при $l_p = -2$ (а,г), $l_p = 0$ (б,д) и $l_p = 2$ (в,е) – эксперимент и результаты численного счета для $K_{az} = 2$.

l_p равными -2, 0 и 2 соответственно.

§ 3.4. Приготовление максимально перепутанных кудитов

Как можно заметить из представленных на рис. 3.3 гистограмм, накачка кристалла суперпозицией трех четных мод Гаусса-Лагерра наименьшего порядка может привести к появлению трех равных по величине диагональных пиков $l_s = l_i$ в спектре азимутальных мод СПР. Такой вид

кросс-корреляций позволил бы приготовить пару максимально перепутанных кутритов с произвольными фазами θ_1 и θ_2

$$|\Psi^{(3)}\rangle = \frac{\exp(i\theta_1)|-1, -1\rangle + |0, 0\rangle + \exp(i\theta_2)|1, 1\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.7)$$

в подпространстве $S_3 = \{|-1, -1\rangle, |0, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$.

Чтобы оптимизировать коэффициенты суперпозиции (3.1) точно и с учётом экспериментальных ошибок, величины α_l подбирались с помощью адаптивной процедуры. Для этого был использован алгоритм одновременно возмущаемой стохастической аппроксимации SPSA (англ. *simultaneous perturbation stochastic approximation*), предложенный в работе [108]. Данный алгоритм нуждается в проведении только двух измерений целевой функции на каждой итерации оптимизационного процесса в независимости от размерности рассматриваемой проблемы. Это означает, что для определения направления движения к оптимальной конфигурации пучка накачки в пространстве векторов $\alpha = \{\alpha_{-2}, \alpha_0, \alpha_2\}$ требовалось проведение только двух измерений. В качестве целевой функции $f(\alpha)$ была выбрана дисперсия измеренных оценок вероятностей $|\langle l_s, l_i | \Psi^{(3)}(\alpha) \rangle|^2$ для $l_s = l_i = -1, 0, 1$, где приготавливаемое состояние имеет вид $|\Psi^{(3)}(\alpha)\rangle = a_1(\alpha)|-1, -1\rangle + a_2(\alpha)|0, 0\rangle + a_3(\alpha)|1, 1\rangle$ и зависит от вектора α . Другими словами, процесс поиска максимально перепутанных кутритов состоял в уменьшении разницы между абсолютными величинами измеренных амплитуд $a_i(\alpha)$ и $1/\sqrt{3}$.

Каждая k -я итерация алгоритма SPSA состояла из трех шагов: на первом из них случайным образом выбиралось направление поиска Δ_k , на втором происходила оценка производной по этому направлению

$$g_k = \frac{f(\alpha_k + \beta_k \Delta_k) - f(\alpha_k - \beta_k \Delta_k)}{2\beta_k} \Delta_k, \quad (3.8)$$

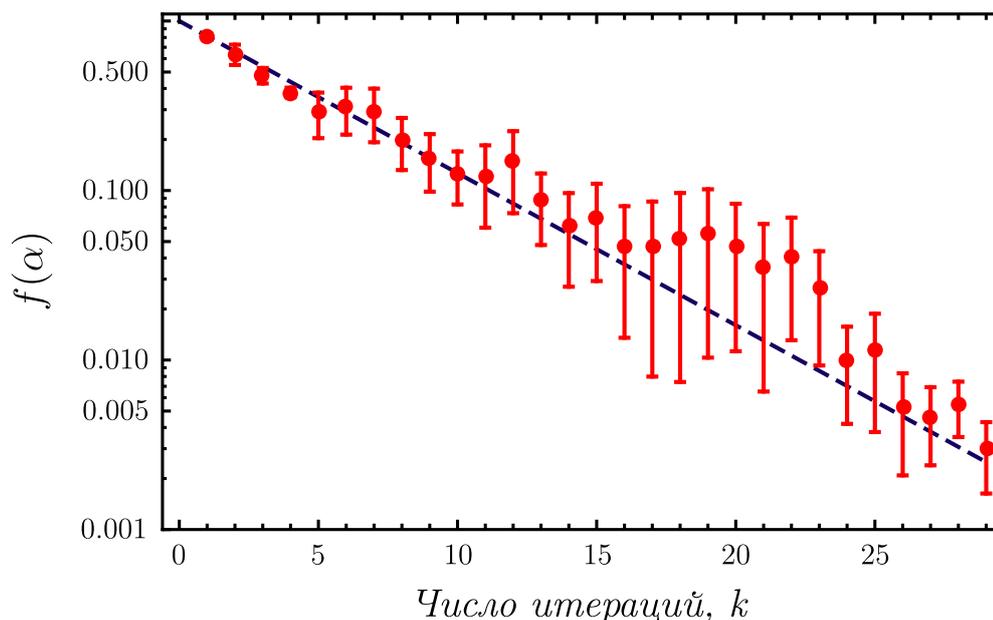


Рис. 3.4. Зависимость измеренной величины целевой функции $f(\alpha)$ от числа k итераций адаптивного алгоритма. Точки соответствуют экспериментальным данным, пунктирная прямая – аппроксимации функцией $\exp(-\gamma k)$ с $\gamma = 0.20 \pm 0.01$.

а на третьем вычислялось значение α для $k + 1$ итерации

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \gamma_k g_k. \quad (3.9)$$

Функции β_k и γ_k управляли сходимостью алгоритма и были определены как

$$\beta_k = \frac{b}{(k+1)^t}, \quad \gamma_k = \frac{c}{(k+1)^s}, \quad (3.10)$$

где параметры b , c , s и t подбирались вручную исходя из поведения целевой функции $f(\alpha)$. Стандартным является выбор $s = 0.6$ и $t = 0.1$, а в качестве направления Δ_k обычно выбирают вектор из случайных элементов ± 1 .

На рис. 3.4 представлена зависимость величины целевой функции от числа итераций алгоритма, она была усреднена по результатам 5 различ-

ных запусков оптимизационного процесса, каждый из которых начинался с гауссовой конфигурации пучка $\alpha = \{0, 1, 0\}$. Как видно, целевая функция сходится экспоненциально к величине 4×10^{-3} за 30 итераций. При удвоенном числе итераций и увеличенном времени экспозиции для каждого из измерений стало возможным достижение величины целевой функции порядка 10^{-5} , что сравнимо с экспериментальной ошибкой. Полученный таким образом профиль пучка накачки в дальнейшем использовался в эксперименте: распределения интенсивности и фазы для него представлены на рис. 3.5(а) вместе с измеренным спектром азимутальных мод. Стоит отметить, что не смотря на то, что SPSA не является алгоритмом глобального поиска, в эксперименте не было выявлено захвата целевой функции локальными минимумами. Оптимальные величины параметров алгоритма b и c составили 0.01 и 1 соответственно.

Та же самая процедура была проведена для приготовления максимально перепутанных куквартов в подпространстве $S_4 = \{|0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |2, 2\rangle, |3, 3\rangle\}$. Для этого накачка кристалла осуществлялась суперпозицией четырех пучков с четным и положительным ОУМ ($l = 0, 2, 4$). Получившийся пучок накачки имеет вид рассмотренных в работе [54] «vortex pancakes» – его профиль представляет собой гауссово распределение с шестью фазовыми сингулярностями (рис. 3.5(б)). По аналогии со случаем кутритов, целевая функция $f(\alpha)$ представляла собой дисперсию четырех измеряемых вероятностей $|\langle l_s, l_i | \Psi^{(4)}(\alpha) \rangle|^2$ для $l_s = l_i = 0, 1, 2, 3$ и вектора $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$.

Наконец, используя в качестве накачки суперпозицию пучков Гаусса-Лагерра с четными $l = -4, -2, 0, 2, 4$, были также приготовлены максимально перепутанные куквинты в $S_5 = \{|-2, -2\rangle, |-1, -1\rangle, |0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |2, 2\rangle\}$ подпространстве. Экспериментально измеренный вид ОУМ-корреляций и соответствующие профили интенсивности и фазы пучка накачки представ-

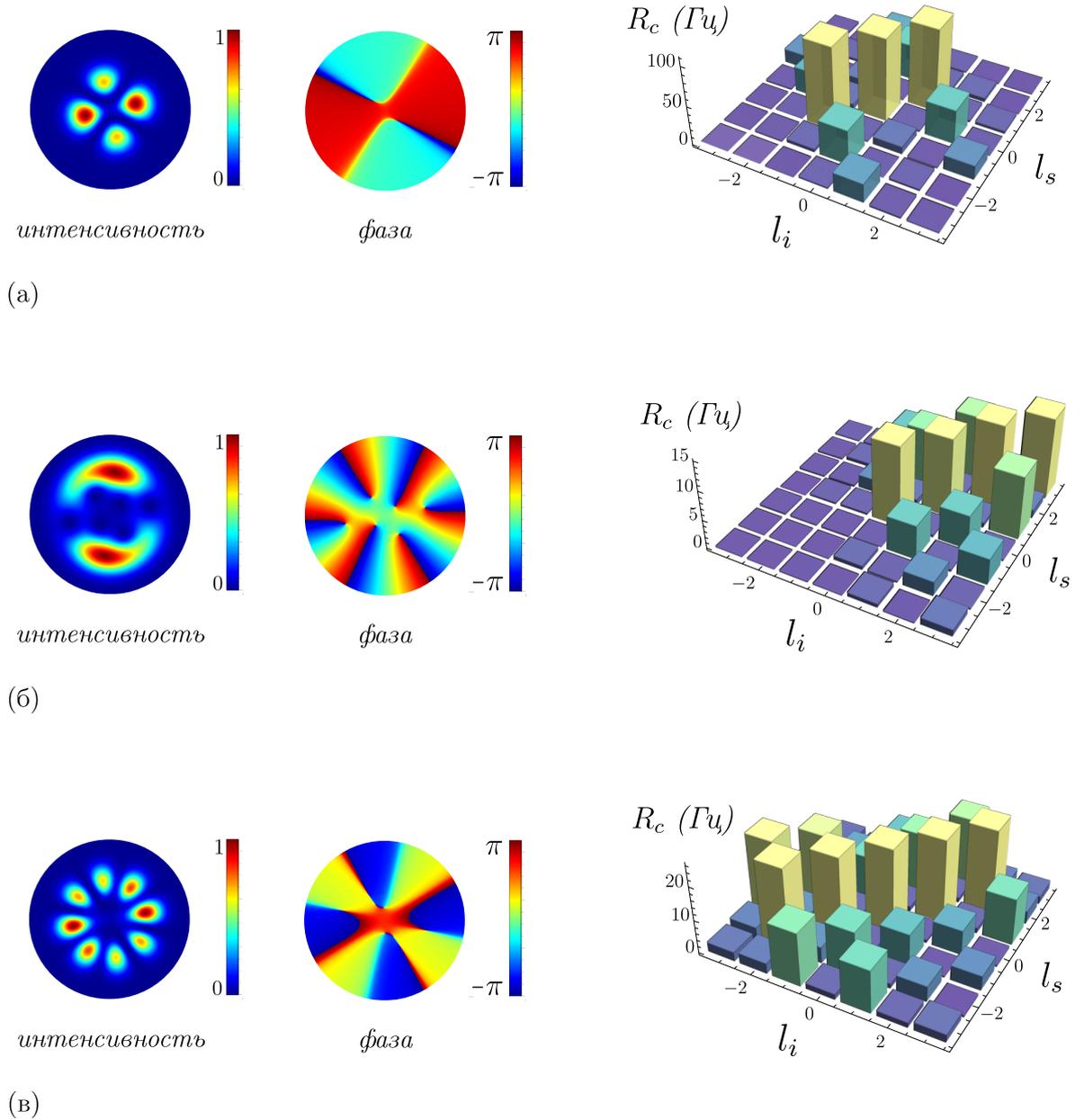


Рис. 3.5. Спектры азимутальных мод для максимально перепутанных (а) кутритов, (б) куквартов и (в) куквинтов. Вид профилей интенсивностей и фаз пучков накачки, рассчитанных из экспериментально найденных коэффициентов α_l представлены слева. Соответствующие ненулевые α_l равны: (а) $\alpha_{-2} = 0.76 - 0.11i$, $\alpha_0 = -0.12 + 0.15i$, $\alpha_2 = 0.30 - 0.53i$, (б) $\alpha_0 = 0.09 - 0.02i$, $\alpha_2 = -0.02 - 0.19i$, $\alpha_4 = 0.57 - 0.01i$, $\alpha_6 = 0.77 - 0.21i$, (в) $\alpha_{-4} = -0.25 - 0.73i$, $\alpha_{-2} = 0.19 - 0.10i$, $\alpha_0 = -0.07 + 0.11i$, $\alpha_2 = 0.14 - 0.14i$, $\alpha_4 = -0.54 + 0.09i$.

лены на рис. 3.5(в). Здесь нужно отметить, что так как для приготовления куквинтов использовались как моды с отрицательными, так и с положительными индексами l , максимальный порядок их суперпозиции оказался меньше, чем для случая куквартов. Это приводит к более эффективному преобразованию изначально гауссова пучка накачки при большей размерности приготавливаемого состояния. Так мощность излучения, падающего на кристалл после SLM для кутритов, куквартов и куквинтов составляла 1.5 мВт, 0.7 мВт и 1.1 мВт соответственно. При этом, как следует из гистограмм на рис. 3.5, частота совпадений фотоотсчётов R_c для случая куквинтов почти в два раза превышала её же для куквартов. В этом смысле выбор подпространства S_4 , предложенный в статье [54], не оптимален с точки зрения экспериментальной реализации, и исключение любой моды Гаусса-Лагерра из пучка накачки «для куквинтов» было бы лучшим способом генерации перепутанных куквартов.

§ 3.5. Управление фазами кудитов

Рассмотрим подробнее эволюцию профиля интенсивности пучка накачки для двух разных проходов алгоритма оптимизации в случае кутритов (рис. 3.6). Как видно, финальное распределение интенсивности для одного случая оказывается повернутым относительно другого на произвольный угол, назовем его θ . Это связано с тем, что моды Гаусса-Лагерра азимутально симметричны, и устанавливая условия на модули амплитуд приготавливаемых кудитов, мы оставляли свободными их фазы. Последними также можно управлять изменяя коэффициенты α_l из выражения (3.1). В частности, в теоретической работе [54] было показано аналитически, что выражение (3.7) может быть модифицировано с учётом угла поворота пучка

накачки θ как:

$$\left| \Psi^{(3)}(\theta) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [\exp(i\theta_1 - i2\theta) |-1, -1\rangle + |0, 0\rangle + \exp(i\theta_2 + i2\theta) |1, 1\rangle]. \quad (3.11)$$

На практике это означает, что можно изготовить высокоэффективную голограмму для генерации пары максимально перепутанных кудитов, а затем, вращая пучок накачки с помощи призмы Дове, генерировать состояния с различными фазами.

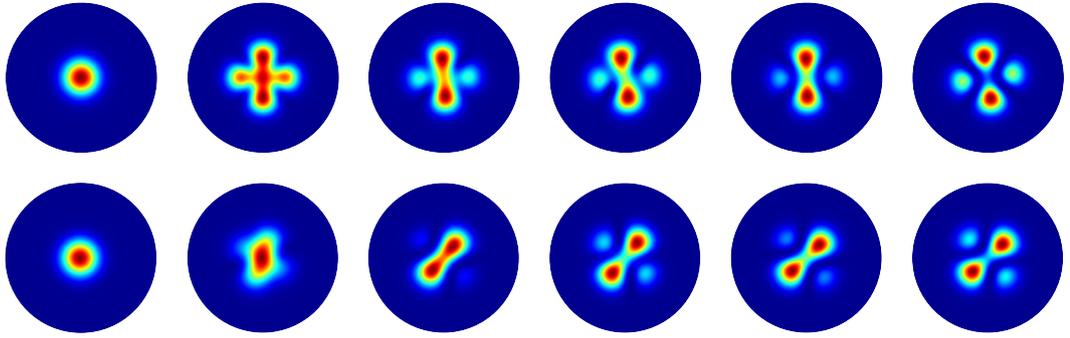


Рис. 3.6. Эволюция профиля интенсивности пучка накачки при двух разных проходах алгоритма оптимизации для случая кудитов (приведена каждая пятая итерация).

С целью проверки данного утверждения в эксперименте была проведена полная квантовая томография приготовленных кудитов, что позволило оценить их относительные фазы. Процедура квантовой томографии совпадала с описанной в предыдущей главе за исключением того, что восстановление состояний производилось в девятимерном подпространстве ОУМ-векторов $|l_s, l_i\rangle$ с $l = -1, 0, 1$. Из-за того, что параметризация матриц плотности восстановленных кудитов ρ подразумевала их смешанность ($\pi = \text{Tr } \rho^2 \neq 1$), в качестве оценки ближайших чистых состояний выбирались собственные вектора матриц плотностей с наибольшими собственными значениями (≈ 0.92) для дальнейшего сравнения с выражением (3.11).

Полученные таким образом фазы компонент $|-1, -1\rangle$ и $|1, 1\rangle$ для различных θ представлены на рис. 3.7. Вращение голограммы для пучка накачки приводило к небольшому нарушению равенства его амплитуд, по причине чего после каждого поворота на угол $\pi/8$ запускался адаптивный алгоритм их выравнивания. Из-за этого профили интенсивностей пучков накачки для различных θ отличались, что едва ли заметно из рис. 3.7.

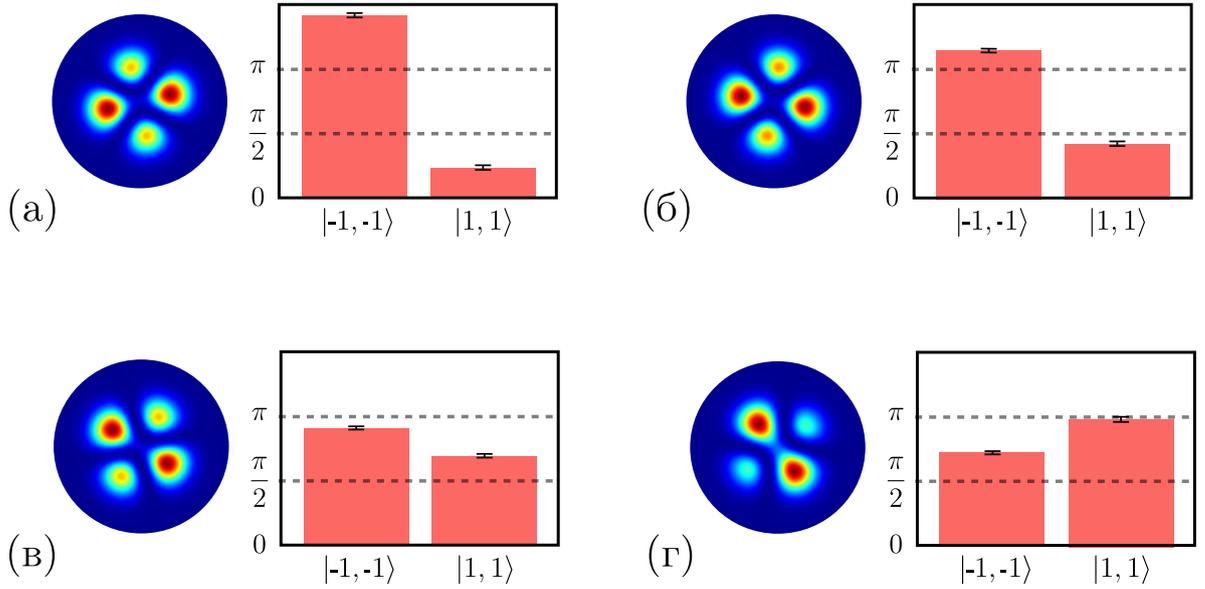


Рис. 3.7. Восстановленные в эксперименте фазы кутритов для компонент $|-1, -1\rangle$ и $|1, 1\rangle$ при различных углах поворота пучка накачки: (а) $\theta = 0$, (б) $\theta = \pi/8$, (в) $\theta = \pi/4$ и (г) $\theta = 3\pi/8$ вместе с соответствующими профилями интенсивности пучков накачки. Фаза компоненты $|0, 0\rangle$ принята за ноль.

Выражение (3.11) накладывает ограничение на фазыготавливаемых кутритов. Тем не менее, набора таких состояний все еще достаточно для реализации высокоразмерного протокола квантового распределения ключа [1, 3]. Стоит отметить, что данного недостатка лишена схема по приготовлению максимально перепутанных кубитов.

Вернемся к случаю накачки кристалла первой модой Гаусса-Эрмита и белловскому состоянию (2.2). Его можно переписать в терминах ОУМ-

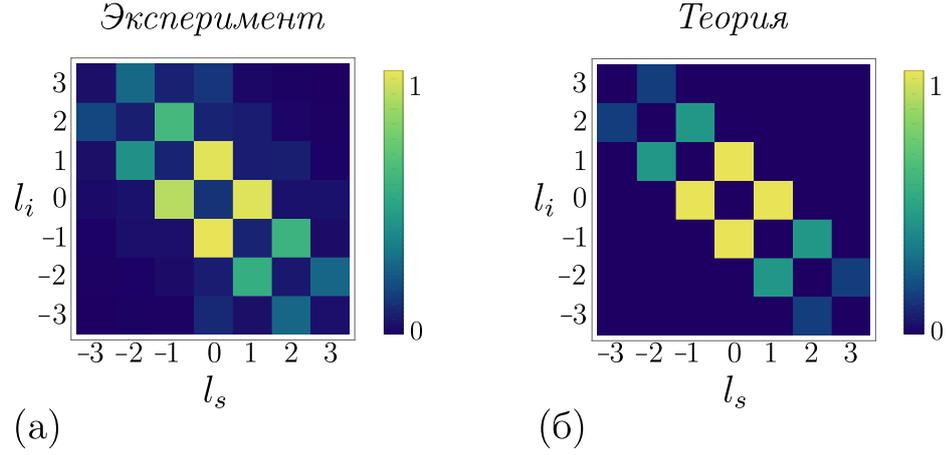


Рис. 3.8. Спектр азимутальных мод для случая накачки кристалла пучком в первой моде Гаусса-Эрмита: (а) полученный экспериментально и (б) путём численного моделирования. Четыре центральных пика соответствуют пространственному состоянию Белла.

векторов $|l\rangle$ как

$$|\Psi\rangle = \frac{|0, 1\rangle + |0, -1\rangle + |1, 0\rangle + |-1, 0\rangle}{2}, \quad (3.12)$$

используя соотношения $|\text{HG}_{10}\rangle = (|-1\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ и $|\text{HG}_{00}\rangle = |0\rangle$. Измеренный спектр азимутальных мод для пучка накачки в моде HG_{10} представлен на рис. 3.8 вместе с результатами численного расчёта.

Теперь, рассматривая подпространство векторов $|0, 1\rangle + |1, 0\rangle$ и $|0, -1\rangle + |-1, 0\rangle$, можно переписать (3.12) как:

$$\left| \Psi^{(2)}(\phi) \right\rangle = \frac{|0, 1\rangle + |1, 0\rangle}{2} + \exp(i\phi) \frac{|0, -1\rangle + |-1, 0\rangle}{2}. \quad (3.13)$$

Зависимость ϕ от угла поворота накачки θ была определена экспериментально, она представлена на рис. 3.9 и имеет вид прямой пропорциональности. Восстановления фаз проводилось посредством полной квантовой томография приготавливаемых состояний в том же девятимерном подпространстве, что и для кутритов. Поскольку изменения амплитуд кубитов

при повороте оказались незначительны, адаптивный алгоритм для их выравнивания не применялся.

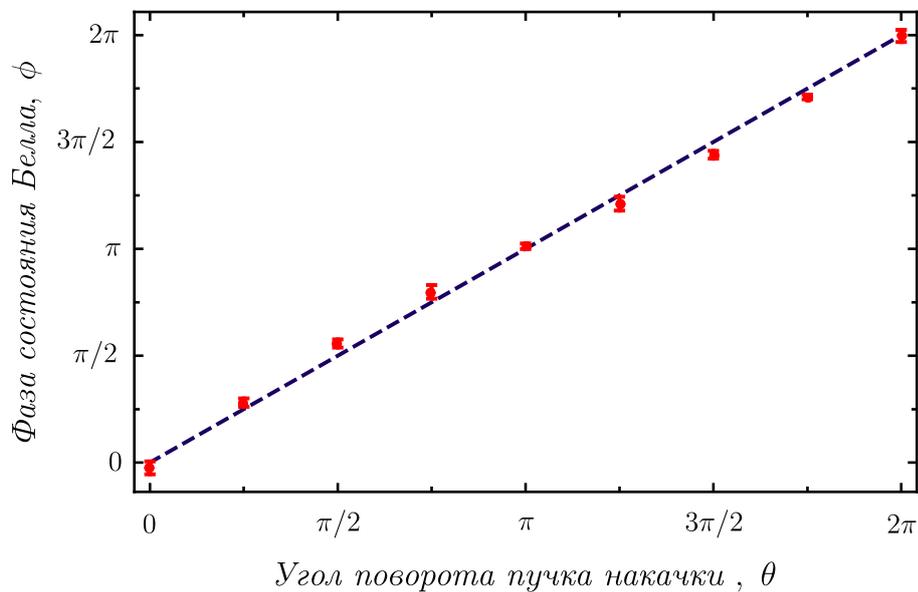


Рис. 3.9. Зависимость фазы ϕ пространственного состояния Белла от угла поворота накачки θ . Точки соответствуют экспериментальным данным, а пунктир – прямо пропорциональной зависимости ϕ от θ .

§ 3.6. Неравенство Белла для кутритов

Для того чтобы удостовериться в перепутанности кутритов, была проведена проверка обобщенного неравенства Белла для систем размерности d . Согласно работе [76], его сильнейшее нарушение для кутритов вида (3.7) происходит при проективных измерениях на следующие состояния в сиг-

нальном и холостом каналах A и B соответственно:

$$|n\rangle_{A,a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{l=-1}^1 \exp\left(i\frac{2\pi}{3}l(n + \alpha_a)\right) |l\rangle_A, \quad (3.14)$$

$$|m\rangle_{B,b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{l=-1}^1 \exp\left(i\frac{2\pi}{3}l(-m + \beta_b)\right) |l\rangle_B, \quad (3.15)$$

где $a, b = 1, 2$ обозначают два возможных варианта измерений, а $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/2$, $\beta_1 = 1/4$, $\beta_2 = -1/4$.

Из-за того, что фазы $\phi_1 = \theta_1 - 2\theta$ и $\phi_2 = \theta_2 + 2\theta$ соответствующих компонент $|-1, -1\rangle$ и $|1, 1\rangle$ из выражения (3.11) не равны нулю, необходимо было выполнить следующую подстановку для векторов (3.14) и (3.15):

$$\begin{aligned} |-1\rangle_{A,B} &\rightarrow \exp(i\phi_1/2) |-1\rangle_{A,B}, \\ |1\rangle_{A,B} &\rightarrow \exp(i\phi_2/2) |1\rangle_{A,B} \end{aligned} \quad (3.16)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 известны из результатов квантовой томографии. Теперь, используя вероятности $P(A_a = n, B_b = m)$, можно найти параметр Белла

$$\begin{aligned} I_3 = &+[P(A_1 = B_1) + P(B_1 = A_2 + 1) + P(A_2 = B_2) + P(A_2 = B_1)] \\ &-[P(A_1 = B_1 - 1) + P(B_1 = A_2) + P(A_2 = B_2 - 1) + P(B_2 = A_1 - 1)]. \end{aligned}$$

Для оценки этих вероятностей были измерены частоты совпадений фотосчётов для 36 различных проекций $|\langle n_{A,a}, m_{B,b} | \Psi^{(3)} \rangle|^2$ со всеми возможными $n, m = 0, 1, 2$. При этом 24 из них использовались для вычисления I_3 и дополнительные 12 были измерены для нормировки на общую сумму. В результате экспериментальное измеренное значение параметра Белла составило 2.56 ± 0.06 , что больше классического предела $I_3 = 2$, но ниже теоретической верхней границы $I_3 \approx 2.87$. Последнее связано с низкой наблюдаемой чистотой приготовленных состояний $\pi = 0.85 \pm 0.02$, что вновь было обусловлено несовершенством техники их детектирования.

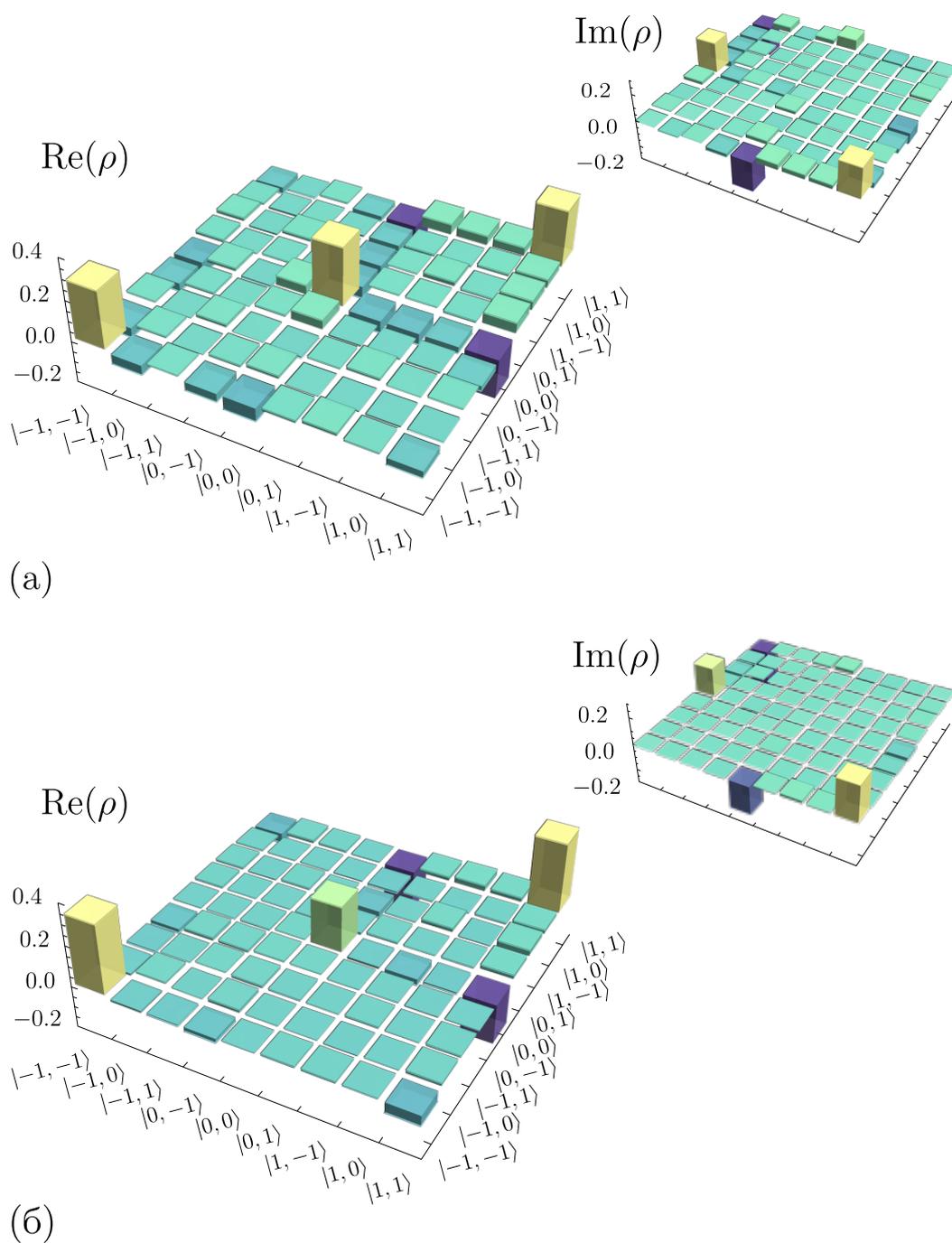


Рис. 3.10. Восстановленные в эксперименте матрицы плотностей ρ для (а) максимально перепутанного состояния (3.7) и (б) немаксимально перепутанного состояния (3.17).

Что интересно, граница $I_3 \approx 2.87$ может быть превышена для немасимально перепутанных состояний. Так в случае кутритов максимальное нарушение обобщенного неравенства Белла $I_3 \approx 2.91$ наблюдается для состояния

$$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2 + \gamma^2} (|-1, -1\rangle + \gamma|0, 0\rangle + |1, 1\rangle), \quad (3.17)$$

с $\gamma \approx 0.79$ [109]. Оно также было приготовлено в эксперименте для демонстрации возможностей разработанной техники адаптивной подстройки пучка накачки. К сожалению, белловский параметр увеличился лишь до значения $I_3 = 2.61 \pm 0.05$, что также связано с неединичной чистотой состояний.

Наблюдаемое снижение I_3 для матрицы плотности ρ можно рассмотреть в рамках модели с симметричным шумом

$$\rho = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - p)\mathbb{1}/d^2, \quad (3.18)$$

где при величине параметра $p = 1$ состояние чистое. Согласно этой модели величина I_3 изменяется как pI_3 , что наблюдалось ранее в экспериментальной работе по генерации частотно перепутанных кудитов [110]. Для приготовленных в нашем эксперименте максимально и немасимально перепутанных пар кутритов параметризации оценок ρ дала значения p равные 0.91 ± 0.02 и 0.88 ± 0.02 соответственно, что показало полное согласие с предсказанным поведением I_3 . Их восстановленные матрицы плотностей представлены на рис. 3.10.

§ 3.7. Заключение к главе 3

В ходе эксперимента была реализована генерация максимально перепутанных состояний размерности $d = 9, 16$ и 25 , продемонстрировано управ-

ление их фазами и амплитудами за счет адаптивной оптимизации модового состава углового спектра накачки при СПР. Здесь стоит отметить, что остальные известные методы генерации кудитов на основе перепутанных по ОУМ бифотонов не позволяют изменять их фазы произвольным образом для размерностей $d > 2$. Также были проведены полная квантовая томография максимально перепутанных кутритов и проверка нарушения обобщенного неравенства типа Белла. Результаты данной главы были опубликованы в работе [111].

В отличие от предыдущих экспериментальных работ, приготовленные состояния не требуют процедуры «концентрации перепутанности», но, тем не менее, нуждаются в минимальной постселекции компонент $|l, l\rangle$. Решить эту проблему можно было бы путём нахождения мод Шмидта уже для негауссовой накачки. С экспериментальной точки зрения, найти набор таких мод можно путём полной квантовой томографии состояния бифотона в старом базисе мод Гаусса-Лагерра с последующим вычислением собственных векторов восстановленных одночастичных матриц плотности. Сложность заключается в поиске профиля пучка накачки, при котором для собственных значений λ_k будут выполнены два критерия: они будут равны в новом базисе (что соответствует максимально перепутанному состоянию), а их число ограничено (что соответствует фиксированной размерности состояния). Такой подход отражен в теоретической работе [112], где был найден профиль пучка накачки для приготовления без постселекции максимально перепутанных куквартов (авторы рассматривали радиальные и азимутальные корреляции одновременно). К сожалению, профиль такого пучка настолько сложен, что потери при его генерации делают невозможным проведение подобного эксперимента при имеющихся лазерном источнике и модуляторе света. К тому же, упомянутый расчёт был выполнен в прибли-

жении двойной гауссоиды, что становится очень критичным при использовании радиальных мод и заявленных критериях для λ_k .

Актуальность и достоверность результатов данной главы подтверждает эксперимент [113], в котором также была реализована генерация максимально перепутанных ОУМ-кутритов при азимутальном числе Шмидта близком к единице, но с накачкой на длине волны 780 нм. Результаты работы [113] были получены независимо и опубликованы одновременно с представленными в диссертации. Кроме того, в 2021 году вышла статья, где модовые спектры с рис. 3.5 были в точности воспроизведены теоретически [114].

ГЛАВА 4

Применение искусственных нейронных сетей к задаче квантовой томографии пространственных состояний фотонов

Как видно из предыдущих глав работы, использование пространственных степеней свободы фотонов сопряжено с рядом трудностей как при приготовлении квантовых состояний на их основе, так и при детектировании. Эти проблемы вызваны абберациями в оптических путях, а также систематическими ошибками при использовании фазовых голограмм: их неидеальным сопряжением с модами волокон, конечным разрешением матрицы SLM и прочим.

В общем случае измерения характеризуются набором операторов $\{\mathbb{M}_\alpha\}$, где индекс α соответствует разным конфигурациям экспериментальной установки. Согласно правилу Борна, вероятность наблюдения исхода γ при конфигурации установки α для матрицы плотности ρ составляет

$$\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\rho), \quad (4.1)$$

где операторы $M_{\alpha\gamma} \in \mathbb{M}_\alpha$ удовлетворяют условию $\sum_\gamma M_{\alpha\gamma} = \mathbb{I}$ и известны как POVM (от англ. Positive Operator-Valued Measure). Для правильного анализа результатов эксперимента необходимо строгое соответствие матриц $\{M_{\alpha\gamma}\}$ и реальных измерений, что на практике осложняется системати-

ческими ошибками. Их можно интерпретировать как неизвестный процесс \mathcal{M} над операторами $\{M_{\alpha\gamma}\}$. Тогда полученные в эксперименте оценки вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho}) = \text{Tr}(\tilde{M}_{\alpha\gamma}\tilde{\rho})$ будут отличаться от идеальных из выражения (4.1) из-за преобразования POVM-операторов вида $\tilde{M}_{\alpha\gamma} = \mathcal{M}(M_{\alpha\gamma})$.

Построение физической модели для описания процесса \mathcal{M} является сложной задачей, точное решение которой едва ли возможно. С другой стороны, стремительно развивающиеся в последнее время методы машинного обучения, а именно искусственные нейронные сети, выглядят привлекательным способом устранения влияния систематических ошибок на процедуру детектирования квантовых состояний. К алгоритмам машинного обучения относят те, что способны «обучаться» на основе полученных данных. Учебник Митчелла [115] даёт следующее определение процессу обучения: «О компьютерной программе говорят, что она обучается на основе опыта E по отношению к некоторому классу задач T и мере эффективности P , если качество решения задачи T , измеренное на основе P , улучшается с приобретением опыта E .» К множеству задач T по обработке данных относят их классификацию, регрессию, машинный перевод, обнаружение аномалий, а также устранение шума. В контексте науки о квантовой информации к первой из задач можно отнести разделение квантовых состояний по признаку наличия у них перепутанности, что было реализовано с помощью искусственных нейронных сетей в экспериментах [116, 117]. Примером решения других проблем являются работы [118] и [119]: в первой из них была теоретически рассмотрена томография системы из более 20 кубитов с помощью стохастической нейронной сети, известной как «ограниченная машина Больцмана», а во второй экспериментально реализована квантовая вариация архитектуры нейронной сети под названием «автокодировщик» – её целью является снижение размерности многомерных данных и умень-

шение шумов. К задаче уменьшения шума можно свести и рассмотренную выше проблему установления соответствия экспериментальной оценки вероятности $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho}) \leftrightarrow \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)$ теоретической.

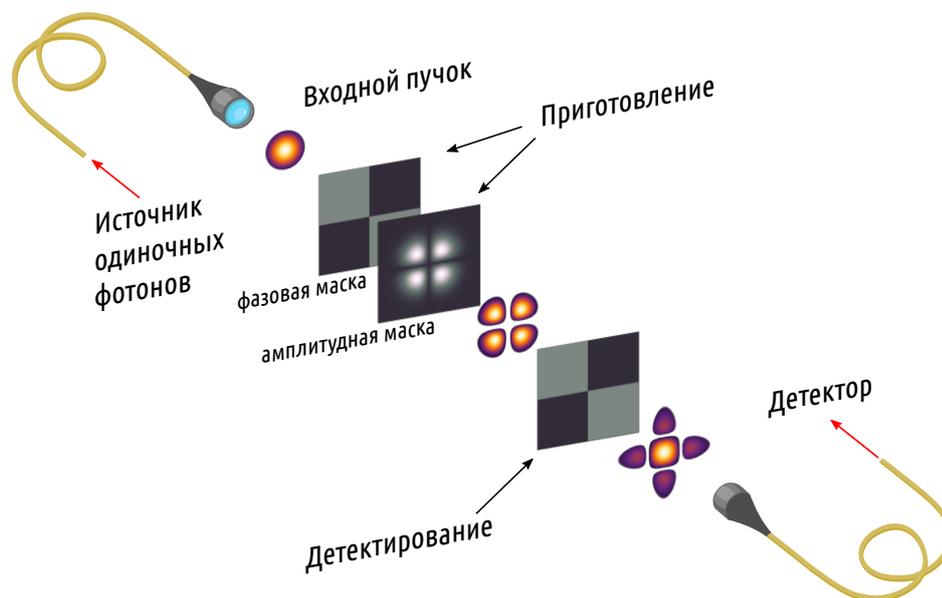


Рис. 4.1. Принципиальная схема эксперимента по приготовлению и детектированию фотонов в моде HG_{11} : амплитудная модуляция присутствует только на фазовой голограмме для приготовления пространственных состояний фотонов.

Принципиальная схема эксперимента приведена на рис. 4.1. Для приготовления произвольных пространственных состояний света использовался источник одиночных фотонов, мода которого фильтровалась с помощью одномодового волокна. Затем гауссов пучок на его выходе преобразовывался с помощью как фазовой, так и амплитудной масок. Детектирование получившегося состояния производилось с применением только фазовой модуляции, что сильно снижало качество реализуемых проективных измерений, но в то же время значительно уменьшало потери голограмм на отражение. В предположении, что процесс приготовления состояний близок

к идеальному, предложенная схема эксперимента позволяет откалибровать получившийся «детектор пространственных мод», протестировав на нём алгоритмы машинного обучения.

§ 4.1. Схема эксперимента

Подробная схема экспериментальной установки представлена на рис. 4.2, её можно разделить на две части: на нижней (выделенной синим цветом) изображен источник одиночных фотонов, а на верхней – схема по приготовлению и детектированию пространственных состояний света. Для условного приготовления одиночных фотонов снова использовался периодически поляризованный 15 мм кристалл КТР с лазерной диодной накачкой на длине волны 405 нм, сигнальный и холостой фотон после кристалла разделялись на поляризационном светоделителе (PBS-1). В результате клик детектора в канале пропускания светоделителя (SPCM-1) сигнализировал о наличии фотона-пары в канале отражения. Вторая часть экспериментальной установки представляла собой видоизмененную схему из предыдущей главы (рис. 3.1), где один из детекторов заменен на источник одиночных фотонов, а вместо кристалла, служившего для генерации бифотонов, между линзами L5 и L6 установлена диафрагма (P).

Помимо изображенного на схеме источника бифотонов, также использовалось и ослабленное излучение лазерного диода с длиной волны 808 нм. Пучки обоих источников пространственно фильтровались с помощью одномодового волокна (SMF-2), а затем фокусировались на правой половине SLM (Holoeye Pluto), отвечавшей за приготовление произвольных пространственных состояний фотонов с применением как амплитудной, так и фазовой модуляций при генерации голограмм. Затем поляризация отра-

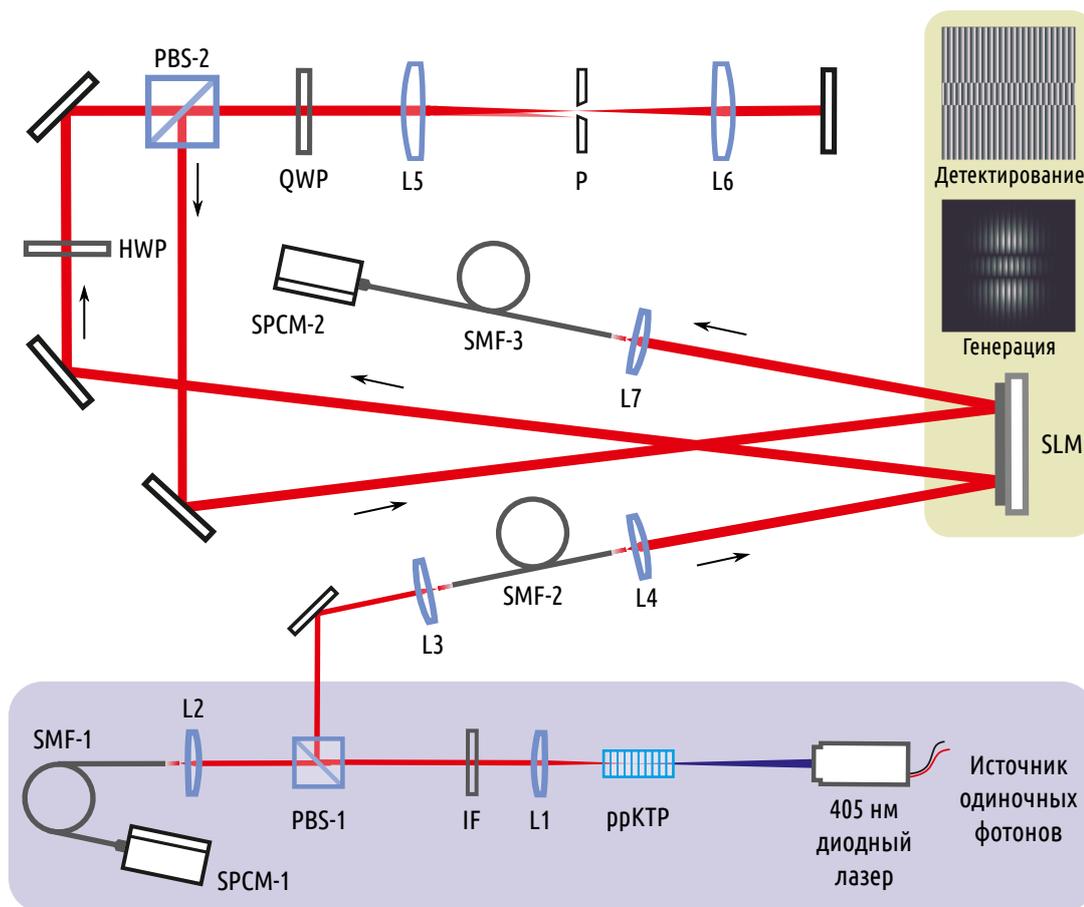


Рис. 4.2. Схема экспериментальной установки по приготовлению и измерению пространственных кудитов.

женного пучка поворачивалась для пропускания поляризационным светоделителем (PBS-2) с помощью полуволновой пластинки (HWP) и нулевой порядок дифракции отсекался диафрагмой (P), расположенной между конфокально установленными линзами L5 и L6 с одним и тем же фокусным расстоянием (100 мм). После двойного прохождения такого телескопа и четвертьволновой пластинки (QWP) пучок отражался на поляризационном светоделителе (PBS-2) на вторую половину SLM, отвечающую за детектирование. На этот раз голограмма не была промодулирована амплитудной маской, что с одной стороны вносило дополнительные систематические

ошибки при измерениях, а с другой – уменьшало потери. Наконец, первый порядок дифракции отраженного от SLM пучка фокусировался на торец одномодового волокна (SMF-3) с помощью асферической линзы L7 с тем же фокусным расстоянием (11 мм), что и линза L4. Установленный после волокна модуль счета фотонов (SPCM-2) позволял как просто измерять сигнал от когерентного источника в случае использования ослабленного лазерного диода, так и детектировать совпадения отсчетов с первым детектором (SPCM-1) при использовании бифотонов.

§ 4.2. Томография единичного процесса

По причине того, что длина оптических путей между SLM и линзой L5 сравнима с длиной Рэлея используемых пучков, фазы Гуй вносили заметный вклад в конечный вид приготавливаемых состояний. Во избежание сопряженных с этим трудностей фазы Гуй были восстановлены в ходе процедуры квантовой томографии процесса.

Под квантовой томографией процесса подразумевается восстановление неизвестного оператора \mathcal{E} , действующего на входные квантовые состояния. При отсутствии потерь его можно записать в виде операторной суммы:

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^{d^2} E_k \rho E_k^\dagger, \quad (4.2)$$

где ρ – это состояние на входе процесса, ρ' – на выходе, а d – размерность рассматриваемого подпространства. Элементы $\{E_k\}$ принято называть операторами Крауса, для них выполняется условие сохранения следа матрицы плотности ρ' :

$$\sum_{k=1}^{d^2} E_k E_k^\dagger = \mathbf{1}. \quad (4.3)$$

Томография процесса сводится к восстановлению операторов $\{E_k\}$ по результатам измерений вероятностей

$$\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \mathcal{E}) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\mathcal{E}(\rho_\alpha)) = \text{Tr}\left(\sum_{k=1}^{d^2} M_{\alpha\gamma}E_k\rho_\alpha E_k^\dagger\right) \quad (4.4)$$

для базисного набора пробных состояний ρ_α .

Стоит отметить, что полнота информации, получаемая в ходе измерений, сильно зависит от выбора проекторов $\{M_{\alpha\gamma}\}$. Близким к оптимальному считается набор под названием SIC-POVM [120]. Это «симметричные и информационно полные» POVM-элементы, для которых выполняется условие

$$M_\gamma = \frac{1}{d} |\varphi_\gamma\rangle \langle \varphi_\gamma|, \quad |\langle \varphi_\gamma | \varphi_\delta \rangle|^2 = \frac{1}{d+1}, \quad \gamma \neq \delta. \quad (4.5)$$

Такой же набор векторов $|\varphi_\alpha\rangle$ был выбран и для генерации состояний $\rho_\alpha = |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha|$.

На время томографии процесса голограммы на обеих половинах SLM были амплитудно промодулированы с целью обеспечения высокого качества как приготовления пробных состояний, так и их детектирования. В качестве базиса был выбран набор мод Гаусса-Эрмита с индексами $n+m \leq 2$, что соответствовало размерности подпространства $d = 6$.

С помощью метода линейной инверсии [15] процесс \mathcal{E} был успешно экспериментально восстановлен. Он оказался близок к одноранговому: на рис. 4.3 изображена матрица элемента E_1 , вклад которого доминировал. Удельный вес E_1 составил 0.59, в то время как веса остальных операторов Крауса оказались меньше 0.04. Как видно из рисунка, восстановленная матрица близка к диагональной, причем величины фаз диагональных элементов для мод с одинаковым порядком $n+m$ равны, что соответствует поведению фаз Гуи. Сдвиги фаз для мод порядка $n+m = 1$ и $n+m = 2$ составили 0.92 ± 0.02 и 1.97 ± 0.03 радиан соответственно.

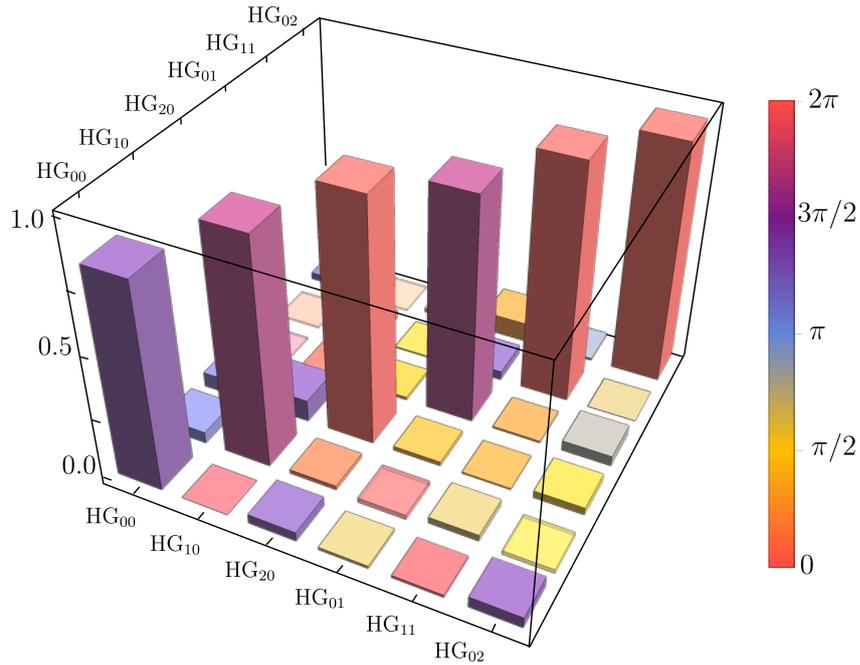
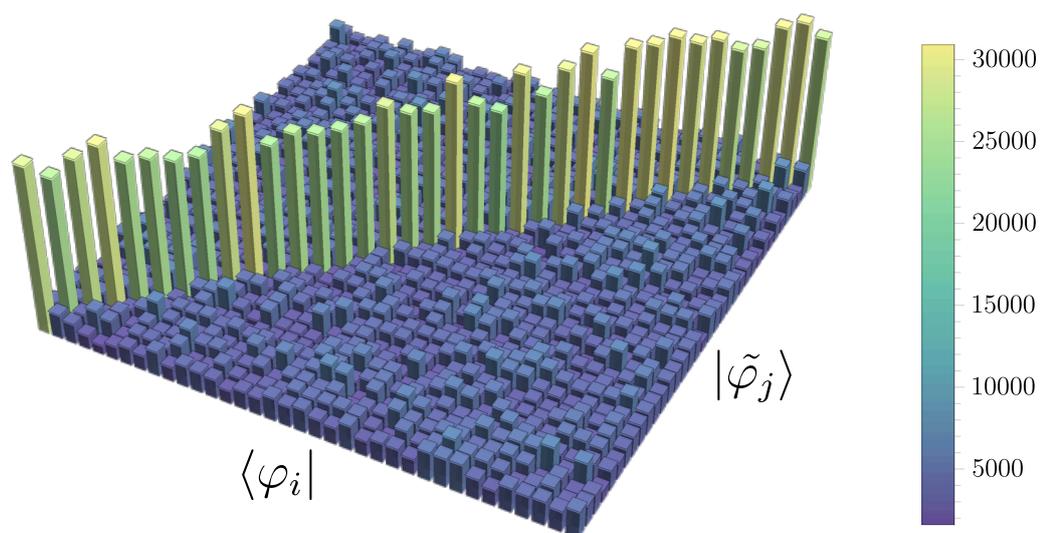


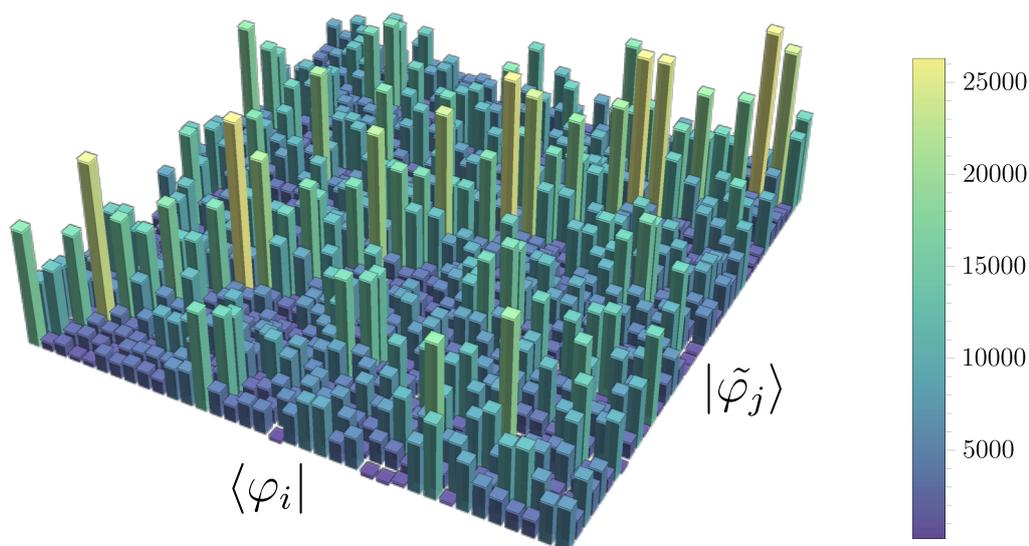
Рис. 4.3. Экспериментально восстановленная матрица элемента E_1 процесса \mathcal{E} эволюции пространственного состояния между стадиями приготовления и детектирования.

В дальнейшем восстановленная матрица E_1 учитывалась при приготовлении пробных состояний. Чтобы убедиться в эффективности такого подхода для SIC-POVM операторов M_γ были экспериментально измерены вероятности $P_j^i = \text{Tr}(\tilde{M}_\gamma |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|) = |\langle \varphi_i | \tilde{\varphi}_j \rangle|^2$ при амплитудной модуляции обеих масок на SLM. Результаты измерений кросс-тока 36 соответствующих суперпозиций мод Гаусса-Эрмита при учёте фаз Гуи приведены на рис. 4.4(а), а без учёта – на рис. 4.4(б). Как видно, отношение вероятностей $P_{j=i}^i$ и $P_{j \neq i}^i$ становится близким к 36, если принять фазовые сдвиги во внимание.

В работе [121] аналогичные кросс-корреляционные измерения SIC-POVM элементов были проведены для азимутальных мод Гаусса-Лагерра (исключая радиальные), при этом степень расхождения экспериментальных дан-



(a)



(б)

Рис. 4.4. Экспериментально измеренные кросс-токи для SIC-POVM элементов (а) при учёте и (б) без учёта восстановленных фаз Гуи. На шкале справа представлено число отсчетов детектора.

ных с идеальными оценивалась с помощью параметра «схожести» (англ. *similarity*) $S = (\sum_{i,j} \sqrt{P_j^i \mathbb{P}_j^i})^2 / (\sum_{i,j} P_j^i \sum_{i,j} \mathbb{P}_j^i)$, где P_j^i соответствовали экспериментальной оценке вероятностей, а \mathbb{P}_j^i – теоретической. В указанной

работе средний параметр S составил 0.97 для SIC-POVM проекторов размерности $2 \leq d \leq 10$. В нашем случае измерения осложнялись рассмотрением не только азимутальных корреляций, но и радиальных. Тем не менее учёт фазовых сдвигов позволил добиться значения $S = 0.99 \pm 0.01$ при $d = 6$.

При возвращении к основной конфигурации экспериментальной установки амплитудная модуляция для детектирующей голограммы была отключена. Это привело к снижению параметра S до значения 0.96 ± 0.02 , соответствующее распределение P_j^i представлено на рис. 4.5. С другой стороны, эффективность дифракции на голограмме без амплитудной маски возросла, из-за чего суммарное число наблюдаемых отсчетов детектора увеличилось с 6.2×10^6 до 40.9×10^6 . Данный результат наглядно демонстрирует зависимость качества проективных измерений от эффективности детектирования. Как уже было отмечено выше, целью данного эксперимента было повышение качества измерений пространственных состояний фотонов при сохранении столь высокой эффективности их детектирования.

§ 4.3. Обучение искусственной нейронной сети

Основным элементом искусственной глубокой нейронной сети является так называемый «нейрон» i , который принимает на вход вектор из d элементов $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ и выдает на выходе скалярную величину $a_i(\vec{x})$. Сеть формируется из множества таких нейронов, сгруппированных по слоям, при этом выходные данные предыдущего слоя служат входными данными для следующего. Первый из слоев принято называть «входным», промежуточные слои – «скрытыми», а последний – «выходным».

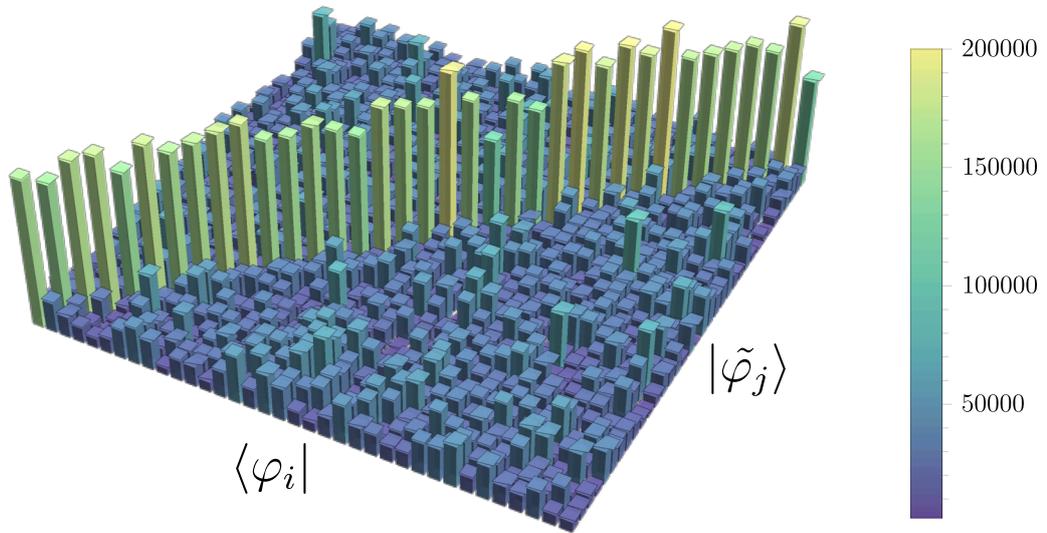


Рис. 4.5. Экспериментально измеренный кросс-ток SIC-POVM элементов при учёте восстановленных фаз Гуй, но без амплитудной модуляции детектирующей маски. На шкале справа представлено число отсчетов детектора.

Явный вид функции $a_i(\vec{x})$ зависит от типа используемой в нейронной сети нелинейности. В большинстве случаев эту функцию раскладывают на линейную часть, определяющая весовой вклад входных данных, и одинаковую для всех нейронов нелинейную составляющую $z_i(y_i)$ (функцию активации). Обычно в качестве линейного преобразования используется скалярное умножение на весовой вектор $\vec{w}_i = \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$ со смещением на b_i :

$$y_i = \vec{w}_i \cdot \vec{x} + b_i, \quad (4.6)$$

где \vec{w}_i и b_i для каждого из нейронов могут быть разными.

Согласно универсальной теореме аппроксимации, искусственная нейронная сеть с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с произвольной точностью [122, 123]. Правда, с усложнением функции растёт и число необходимых свободных

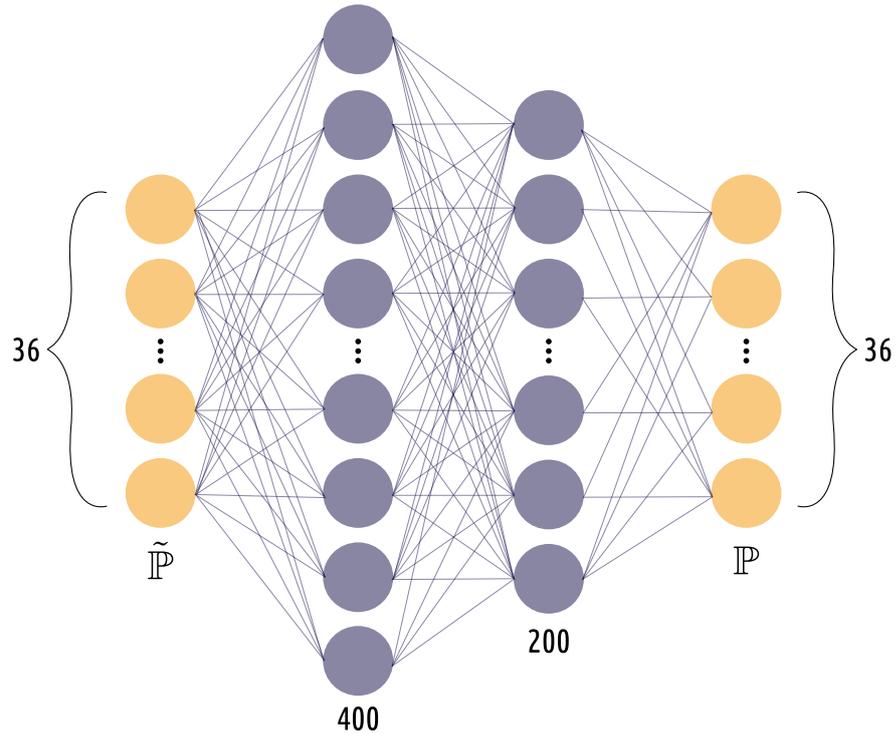


Рис. 4.6. Вид архитектуры нейронной сети для поиска соответствия между измеренными вероятностями $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho})$ и теоретическими $\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)$.

параметров скрытых слоёв. При этом не существует единственного рецепта по масштабированию нейронной сети: можно как увеличивать число скрытых слоёв, так и число нейронов в каждом из них. Поэтому для удачного выбора конкретной архитектуры сети требуется как интуиция, так и множество попыток её тренировки на рассматриваемой задаче.

Для корректировки измеренных в эксперименте вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho})$ состояний размерности $d = 6$ нашими коллегами из Сколтеха была разработана нейронная сеть с входным и выходным слоями из $d^2 = 36$ нейронов¹. Они были связаны двумя скрытыми слоями из $N_1 = 400$ нейронов в первом слое и $N_2 = 200$ нейронов во втором. Архитектура нейронной сети схематично изображена на рис. 4.6.

¹Программный код на языке *python* и данные для обучения доступны по адресу <https://github.com/Quantum-Machine-Learning-Initiative/dnnquantumtomography>

С целью тренировки и проверки нейронной сети был подготовлен набор данных для N чистых состояний $\mathcal{D}_N = \{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^N$, которые были равномерно распределены по мере Хаара. Для этого вещественные и мнимые составляющие амплитуд векторов

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum |C_{nm}|^2}} \sum_{n,m=0}^{n+m \leq 2} C_{nm} |\text{HG}_{nm}\rangle \quad (4.7)$$

выбирались случайно из нормального распределения от 0 до 1:

$$C_{nm} \sim \mathcal{N}(0, 1) + i\mathcal{N}(0, 1). \quad (4.8)$$

Другими словами, если рассматривать вещественные и мнимые компоненты вектора $|\psi_i\rangle$ как координаты точек в многомерном пространстве, то такие точки были бы распределены на сфере равномерно.

Измерения над каждым из состояний производились с помощью набора SIC-POVM элементов числом d^2 , что позволило накопить массив данных из $d^2 \times N$ экспериментально измеренных частот отсчетов детектора, которые и подавались на входной слой сети. При переходе от входного слоя к первому скрытому слою вычисления для n -го нейрона имели вид:

$$y_n^{(1)} = \vec{w}_n^{(1)} \cdot \vec{x} + b_n^{(1)}, \quad (4.9)$$

$$z_n^{(1)} = f_{ReLU}(y_n^{(1)}), \quad (4.10)$$

где $n = 1, 2, \dots, N_1$, а в качестве функции активации была выбрана $f_{ReLU}(\alpha) = \max(0, \alpha)$. Переход от первого скрытого слоя ко второму осуществлялся таким же преобразованием:

$$y_m^{(2)} = \vec{w}_m^{(2)} \cdot \vec{x} + b_m^{(2)}, \quad (4.11)$$

$$z_m^{(2)} = f_{ReLU}(y_m^{(2)}), \quad (4.12)$$

для $m = 1, 2, \dots, N_2$. Наконец, связь второго скрытого слоя с выходным имела вид:

$$y_k^{(3)} = \vec{w}_k^{(3)} \cdot \vec{x} + b_k^{(3)}, \quad (4.13)$$

$$z_k^{(3)} = f_{softmax}(y_k^{(3)}) = \frac{\exp(y_k^{(3)})}{\sum_{k=1}^{36} \exp(y_k^{(3)})}, \quad (4.14)$$

где была использована функция *softmax*.

Чтобы отклик нейронов был нелинеен, традиционно используются ступенчатые функции (перцептроны), гиперболические тангенсы, а также сигмоиды (функции Ферми). Поскольку тренировка нейронной сети производилась с помощью метода градиентного спуска, что подразумевает вычисление производных для $z_i(y_i)$, вариант перцептронов отпадал из-за дискретного вида его производной. С другой стороны, гиперболический тангенс и функция Ферми склонны быстро насыщаться при росте весовых коэффициентов, что приводит к уменьшению величины их производной (проблема «исчезающего градиента»). По этой причине в последнее время эти функции вытеснили вариации функции ReLU (англ. *rectified linear unit*), которые возвращают только положительную часть скалярной величины и не насыщаются.

Отдельное внимание стоит уделить проблеме «переобучения» нейронной сети (англ. *overfitting*) – явлению, когда найденная модель хорошо работает на выборке для обучения, но плохо справляется с незнакомыми данными [124]. Это связано с тем, что при достаточно сложной архитектуре нейронная сеть может отслеживать не только глобальные закономерности поведения входных данных в процессе тренировки, но и случайные, вызванные шумами. Чтобы избежать переобучения, между двумя скрытыми слоями выполнялась процедура исключения (англ. *dropout*) с вероятностью 0.2 [125]. Это означает, что на каждой итерации 20% случайных нейронов

первого скрытого слоя исключались из процесса обучения, что делало нейронную сеть более устойчивой к малым отклонениям входных данных.

Процесс обучения на получившейся архитектуре заключается в минимизации целевой функции L (или функции потерь) путём оптимизации параметров \vec{w} и b с помощью итеративного метода градиентного спуска, который был модифицирован алгоритмом RMSprop [126]. По определению величина L явно зависит от откликов нейронов выходного слоя $z_k^{(3)}$ и неявно – от всех остальных. Для определения её градиента вычисления на нейронной сети сначала проводятся в прямом порядке согласно выражениям (4.9)–(4.13), а затем в обратном направлении рассчитываются ошибки целевой функции (так называемый метод обратного распространения ошибки [115]).

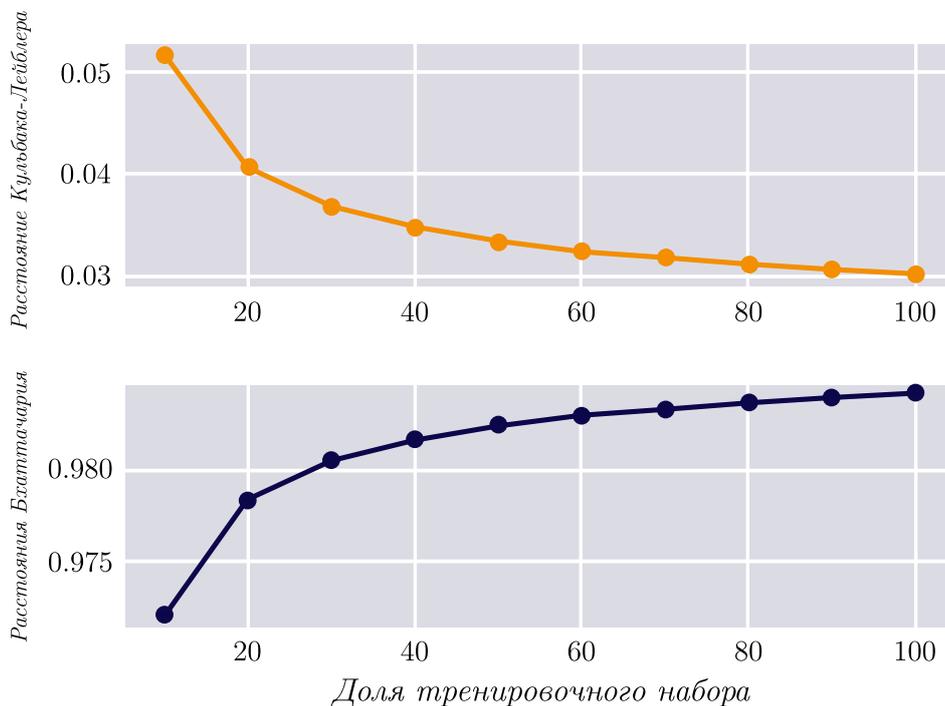


Рис. 4.7. Зависимости расстояний Кульбака-Лейблера и Бхаттачария от размера тренировочной выборки, полученные после пяти усреднений (величина ошибок меньше размера изображенных точек).

В качестве целевой функции было выбрано расстояние Кульбака-Лейблера между распределением предсказанных вероятностей $\{p_\gamma^i\}_{\gamma=1}^{d^2}$ на выходе нейронной сети и ожидаемых $\{\mathbb{P}_\gamma^i\}_{\gamma=1}^{d^2}$, рассчитанных как $\mathbb{P}_\gamma^i = \text{Tr}(M_\gamma \rho_i)$ в предположении об идеальности проекторов M_γ :

$$L = \sum_{i=1}^N D_{KL}(\{\mathbb{P}^i\} || \{p^i\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\gamma=1}^{d^2} \mathbb{P}_\gamma^i \log \left(\frac{\mathbb{P}_\gamma^i}{p_\gamma^i} \right). \quad (4.15)$$

Стоит отметить, что расстояние Кульбака-Лейблера напрямую связано с более известным выражением для перекрестной энтропии $H(\mathbb{P}^i, p^i) = \sum_{\gamma=1}^{d^2} \mathbb{P}_\gamma^i \log p_\gamma^i$ для пары вероятностей (\mathbb{P}^i, p^i) .

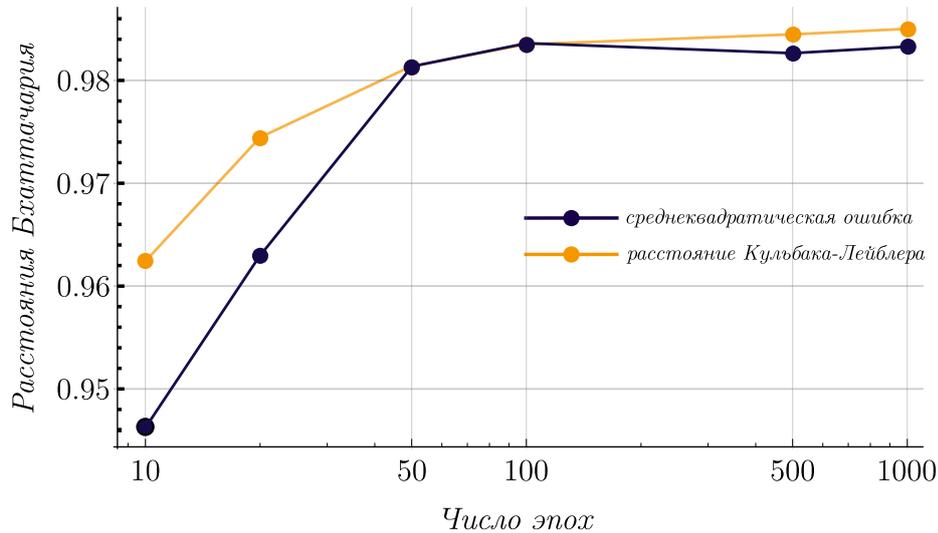


Рис. 4.8. Зависимости расстояние Бхаттачария от числа эпох при использовании для тренировки двух различных целевых функций: расстояния Кульбака-Лейблера и среднеквадратичной ошибки (величина ошибок меньше размера изображенных точек).

Набор данных для обучения состоял из результатов измерений для $N = 10500$ входных состояний и был случайным образом разделен на три части: тренировочную, валидационную и тестовую. Первая выборка использовалась для тренировки модели и её составляли 7000 состояний, а вторая была

необходима для того, чтобы определить оптимальный момент остановки обучения нейронной сети – в неё входило 1500 состояний (около 15% от полного числа). Обучение останавливалось в случае, если ошибка не уменьшалась после 100 проходов всего массива данных через сеть в прямом и обратном направлениях – так называемых «эпох» (такой подход известен как «ранняя остановка» (англ. *early stopping*) [127]). Третья же выборка – «тестовая» – использовалась для проверки найденной модели на незнакомых для неё данных и включала в себя 2000 состояний (примерно 20% от общего набора).

Набор из $K = 7500$ «тренировочных» состояний разбивался в процентном соотношении от $\eta = 0.1$ до $\eta = 1$ с шагом 0.1 (что соответствовало 10% или 750 состояниям). Результат обучения сети после 200 эпох на тренировочных выборках разных размеров представлен на рис. 4.7. На графике построены зависимости как целевой функции Кульбака-Лейблера, так и расстояний Бхаттачария

$$F_c(\eta) = \sum_{i=1}^{\eta K} \sqrt{\mathbb{P}_{\gamma}^i p_{\gamma}^i}. \quad (4.16)$$

Что интересно, небольшого набора данных и нескольких эпох было достаточно для получения вероятностей близких к ожидаемым. Так, величина фиделити для 10% от тренировочной выборки ($\eta = 0.1$) оказалась равной 0.972.

После было проведено сравнение эффективности расстояния Кульбака-Лейблера как целевой функции для обучения нейросети со среднеквадратичной ошибкой. На рис. 4.8 приведены две зависимости расстояний Бхаттачария от числа эпох. Как видно, выбранная целевая функция демонстрирует более быструю скорость обучения. Случай 100 эпох можно проанализировать подробнее по гистограммам на рис. 4.9, где также срав-

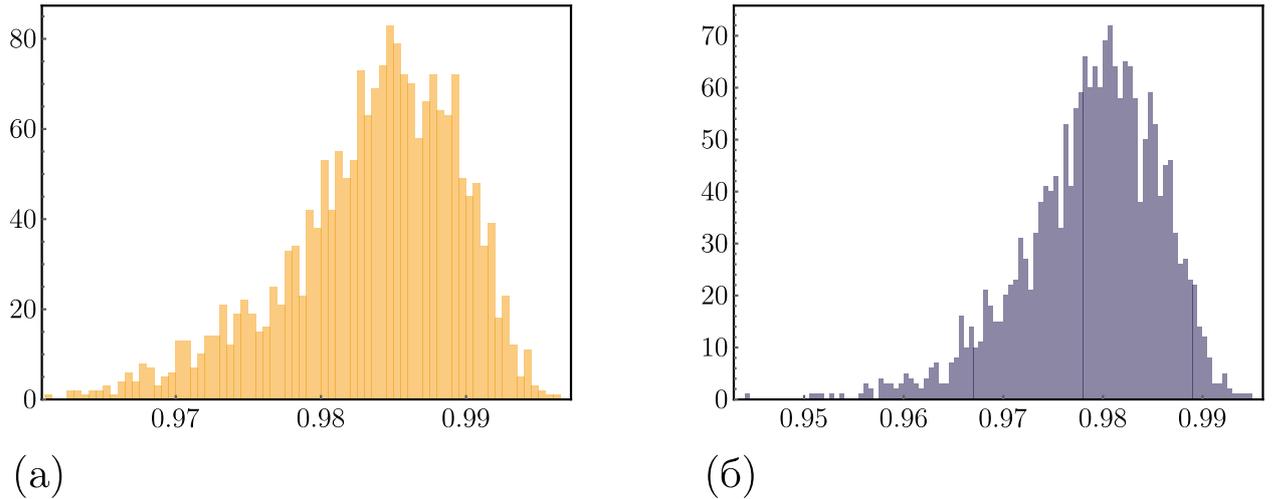


Рис. 4.9. Гистограммы расстояний Бхаттачария для набора тестовых состояний после 100 эпох обучения: для случая целевой функции в виде расстояния Кульбака-Лейблера (а) и среднеквадратичной ошибки (б).

ниваются расстояние Кульбака-Лейблера и среднеквадратичная ошибка в качестве целевых функций. Как видно, выбранная целевая функция показывает лучший результат: среднее значение расстояния Бхаттачария для неё оказалось больше, а дисперсия – меньше.

§ 4.4. Квантовая томография с применением нейронной сети

От предсказанных с помощью нейронной сети вероятностей можно перейти к восстановлению матриц плотности, поскольку их фиделити с приготовленными состояниями является более наглядным критерием эффективности разработанного подхода. На этот раз для квантовой томографии измеренных в эксперименте состояний использовался широко распространенный метод максимального правдоподобия [128]: поиск параметризованной матрицы плотности ρ^i по экспериментально измеренным частотам от-

счетов f_γ^i осуществлялся путём нахождения максимума логарифмической функции правдоподобия

$$\mathcal{L}(f_\gamma^i | \rho^i) \propto \sum_{\gamma=1}^{36} f_\gamma^i \log [\text{Tr}(M_\gamma \rho^i)], \quad (4.17)$$

а не минимизации χ^2 как в (2.8), что считается более статистически обоснованным подходом в рамках задачи томографии.

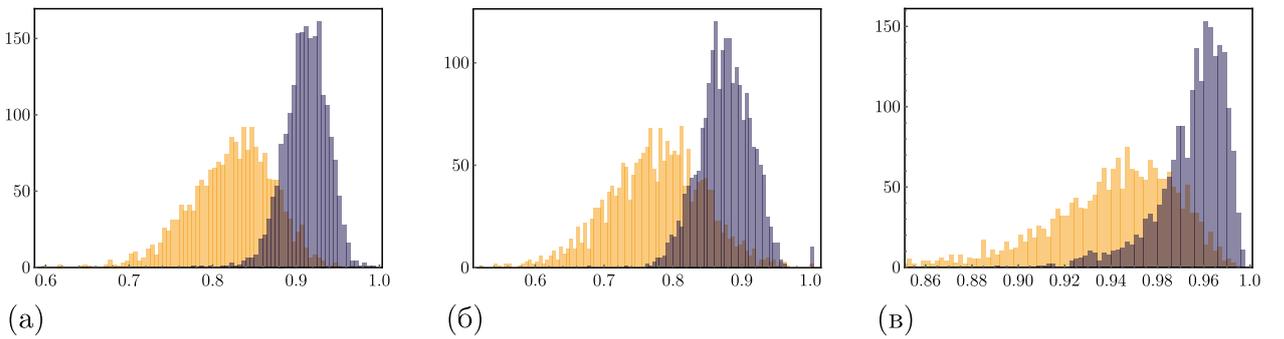
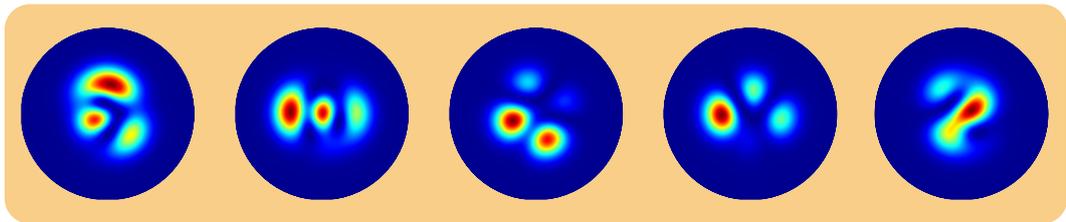


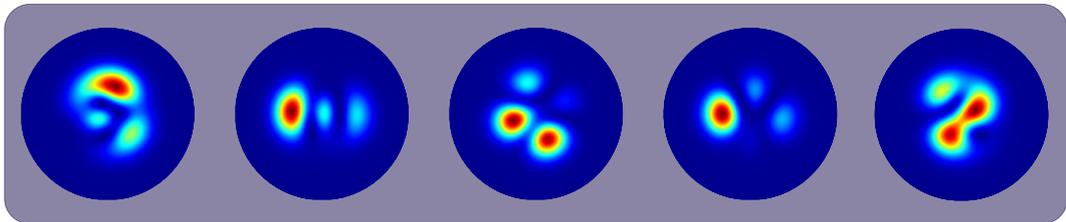
Рис. 4.10. Результат восстановления тестовых состояний при отсутствии амплитудной модуляции на детектирующей голограмме. (а) Фиделити между экспериментально восстановленными состояниями и идеальными $F = \langle \psi^i | \hat{\rho}_{(raw/nn)}^i | \psi^i \rangle$, найденные из необработанных данных (оранжевые столбцы) и после обработки данных нейронной сетью (синие столбцы). (б) Аналогичные результаты для величин чистоты восстановленных состояний. (в) Фиделити для состояний, восстановленных как чистые.

Найденные по отсчетам детекторов f_γ^i оценки матриц плотности $\hat{\rho}_{(raw)}^i = \text{argmax} \mathcal{L}(f_\gamma^i | \rho^i)$ можно было сравнить с $\hat{\rho}_{(nn)}^i = \text{argmax} \mathcal{L}(p_\gamma^i | \rho)$, восстановленных из предсказанных нейросетью вероятностей p_γ . Гистограммы для фиделити между $\hat{\rho}_{(raw)}^i$ и $\hat{\rho}_{(nn)}^i$ и приготовленным тестовыми состояниями $|\psi^i\rangle$ представлены на рис. 4.10(а): из них видно, что средняя величина фиделити для необработанных данных $F_{(raw)} = 0.82 \pm 0.05$ заметно ниже, чем аналогичная $F_{(nn)} = 0.91 \pm 0.03$ для матриц плотности $\hat{\rho}_{(nn)}^i$. Что интересно,

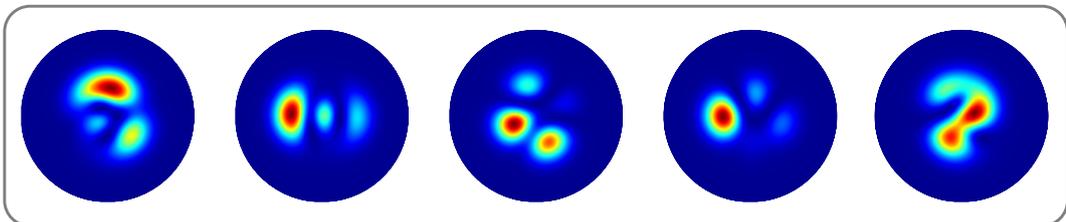
похожее поведение демонстрирует и величины средней чистоты состояний: они составили $\pi_{(raw)} = 0.78 \pm 0.07$ и $\pi_{(nn)} = 0.88 \pm 0.04$ (гистограммы на рис. 4.10(б)). Более того, если измеренные состояния восстанавливать как чистые (путём соответствующей параметризации их матриц плотностей), то изначально довольно высокие фиделити $F_{(raw)} = 0.94 \pm 0.03$ вырастают до значений $F_{(nn)} = 0.98 \pm 0.02$, что является неожиданно хорошим результатом для эксперимента с состояниями столь высокой размерности (гистограммы на рис. 4.10(в)). Для наглядности в последнем случае были восстановлены профили интенсивностей пучков, несколько из них представлены вместе с распределениями для $|\psi^i\rangle$ на рис. 4.11.



На основе необработанных экспериментальных данных



На основе экспериментальных данных после обработки нейросетью



По аналитическим выражениям для приготовленных состояний

Рис. 4.11. Примеры восстановленных профилей интенсивности пучков.

Полученные результаты говорят о том, что обработка экспериментальных данных с помощью нейронной сети позволяет снизить влияние си-

стематических ошибок. В этом смысле интересны результаты её тренировки на экспериментальных данных, для которых сдвиги фаз Гуй не учитывались. Набор данных для такого исследования был того же размера, что и в прошлый раз. Несмотря на значительное ухудшение качества измерений без коррекции фаз Гуй (рис. 4.4(б)), средняя чистота матриц плотности, восстановленных из «сырых» данных, ожидаемо не изменилась и составила $\pi_{(raw)} = 0.77 \pm 0.07$. В то же время средние фиделити для восстановленных состояний упали до значений $F_{(raw)} = 0.54 \pm 0.12$ и $\tilde{F}_{(raw)} = 0.60 \pm 0.13$ соответственно. После обработки их величины растут до значений $F_{(nn)} = 0.81 \pm 0.19$ и $\tilde{F}_{(nn)} = 0.89 \pm 0.22$ (рис. 4.12), что говорит о способности нейронной сети к исправлению куда более серьезных систематических ошибок без априорных знаний об их характере. При этом стоит отметить, что на гистограммах $F_{(nn)}$ и $\tilde{F}_{(nn)}$ появились заметные «пьедесталы», которые сильно ухудшили значения средней фиделити и её дисперсии. Их появление скорее всего обусловлено тем, что размер тренировочной выборки стал слишком мал для выросшего уровня систематической ошибки.

Все представленные выше результаты были получены для ослабленного лазера в качестве источника одиночных фотонов. Это было сделано по причине того, что массив данных для обучения нейросети довольно большой, и накопление такой же статистики для бифотонного источника заняло бы слишком много времени из-за значительно меньшей частоты условных отсчетов. Тем не менее, обученная ранее нейронная сеть была опробована и для 2000 тестовых состояний, приготовленных с помощью СПР. В результате рост средней фиделити и чистоты оказался не настолько значительным: $F_{(raw)} = 0.81 \pm 0.05$ против $F_{(nn)} = 0.86 \pm 0.04$ и $\pi_{(raw)} = 0.75 \pm 0.07$ против $\pi_{(nn)} = 0.84 \pm 0.04$ соответственно. Скорее всего это связано с тем, что за время реконфигурации экспериментальной установки под другой

источник излучения произошла её частичная разъюстировка, что снизило актуальность обученной ранее нейронной сети.

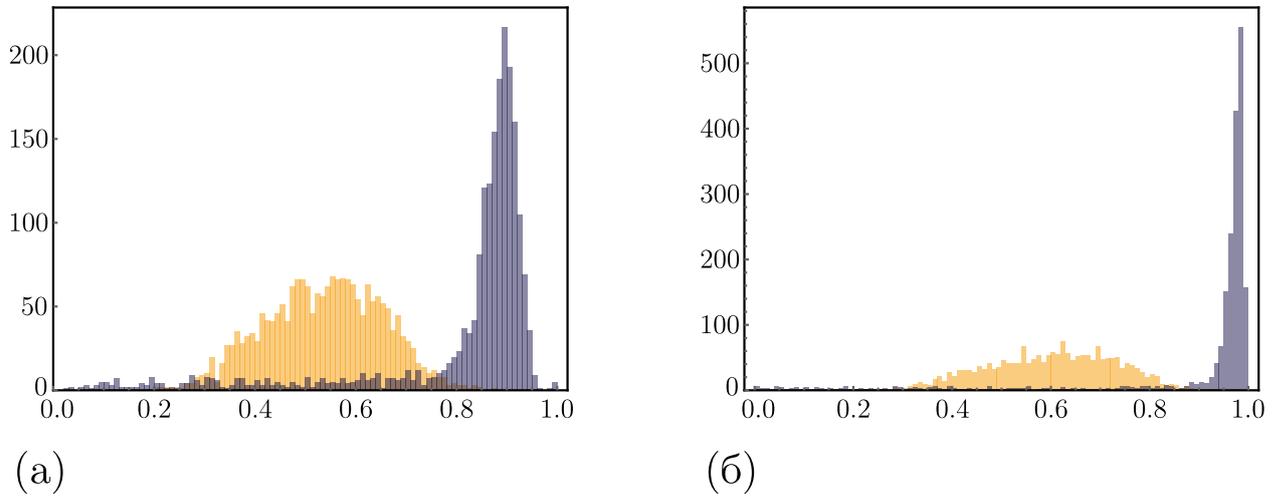


Рис. 4.12. Результат восстановления тестовых состояний при отсутствии амплитудной модуляции на детектирующей фазовой голограмме без коррекции фаз Гуи. (а) Фиделити между экспериментально восстановленными состояниями и идеальными, найденные из необработанных данных (оранжевые столбцы) и после обработки данных нейронной сетью (голубые столбцы). (б) Фиделити для состояний, восстановленных как чистые.

§ 4.5. Случай смешанных состояний

Как уже было отмечено в начале, поскольку при приготовлении пространственных состояний фотонов использовалась амплитудная модуляция фазовых голограмм, их чистота была близка к единице. В то же время было бы интересно узнать, как разработанный подход на основе машинного обучения проявил бы себя со смешанными состояниями на входе неидеального детектора пространственных мод. Для этого было проведено моделирование эксперимента, при котором можно было управлять степенью

чистоты матрицы плотности ρ входного состояния с помощью упомянутой в прошлой главе модели симметричного шума (3.17), где контрольный параметр p определяет «смешанность» матрицы плотности. Изменяя p можно было варьировать величину чистоты π от значения $\pi = 1$ до $\pi = d^{-1}$, где последнее соответствовало симуляции полностью смешанного состояния.

Помимо этого, симуляция эксперимента должна была учитывать неидеальность измерений при томографии, для чего была выбрана следующая модель ухудшения проекторов $M_\gamma = |\varphi_\gamma\rangle\langle\varphi_\gamma|$ с помощью случайного оператора \mathcal{W} [129]:

$$|\tilde{\varphi}_j\rangle = \mathcal{W}(|\varphi_j\rangle) = \sqrt{1-\epsilon}|\varphi_j\rangle + \sqrt{\epsilon}\frac{|g\rangle - |\varphi_\gamma\rangle\langle\varphi_\gamma|g\rangle}{\| |g\rangle - |\varphi_\gamma\rangle\langle\varphi_\gamma|g\rangle \|}, \quad (4.18)$$

здесь параметр ϵ управлял уровнем измерительной ошибки симуляции, а вектора $|g\rangle$ были равномерно распределены по мере Хаара. При $\epsilon = 0.27$ такая модель измерений воспроизводила полученные в эксперименте величины фиделити в предположении, что приготавливаемые состояния чистые ($p = 1$ в выражении (3.17)).

С помощью такой модели измерений была проведена симуляция томографии 10500 случайных состояний при 10 различных величинах параметра p и зафиксированном $\epsilon = 0.27$. При этом тренировка нейронной сети для состояний разной степени чистоты проводилась отдельно, а её архитектура повторяла ту, что была использована в эксперименте. На рис. 4.13 представлена полученная таким образом зависимость средней фиделити от π для данных до и после обработки нейронной сетью. Из графика видно, что чем выше чистота состояния, тем значительнее и рост фиделити за счет нейросетевой обработки данных. Действительно, ведь чувствительность томографической процедуры к неидеальности операторов измерения уменьшается с ростом степени смешанности входных состояний. В частно-

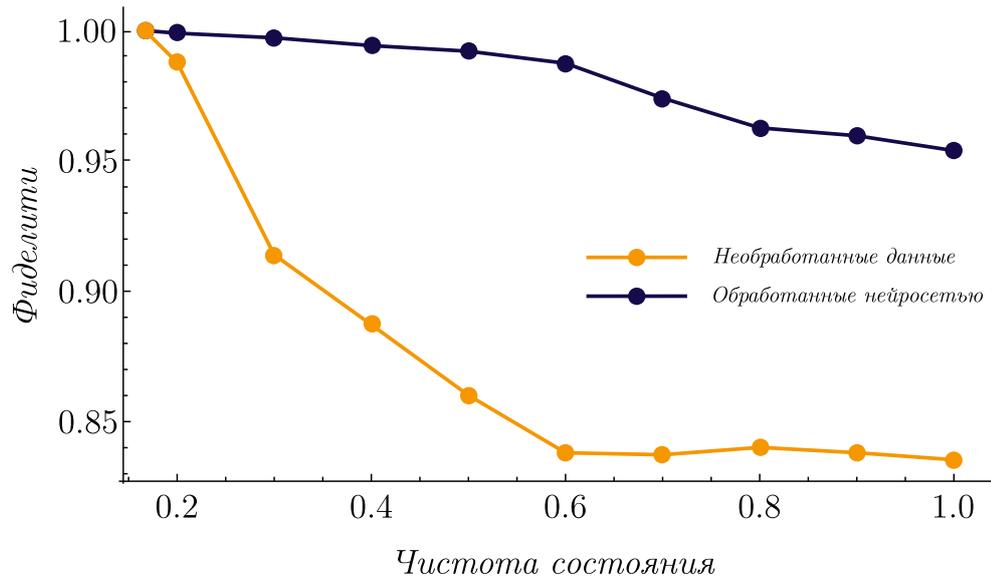


Рис. 4.13. Результаты симуляции эксперимента для смешанных входных состояний. Представлена зависимость средней фиделити восстановленных матриц плотности от степени их смешанности для данных до (оранжевая кривая) и после (синяя кривая) обработки нейронной сетью (величина ошибок меньше размера изображенных точек).

сти, для полностью смешанного состояния результат его измерения совсем не зависит от вида конкретного проектора и одинаков для всех M_γ . Поэтому обе кривые сходятся к единице при $\pi \simeq 1/6$. Помимо этого видно, что качество томографии наиболее чувствительно к систематическим ошибкам при измерениях чистых входных состояний. Из этого можно заключить, что проведенный эксперимент продемонстрировал не самый эффективный случай применения разработанного метода улучшенной обработки данных.

§ 4.6. Заключение к главе 4

Проведенный эксперимент продемонстрировал преимущества использования искусственной нейронной сети в задаче квантовой томографии си-

стем высокой размерности при неидеальных измерениях. В контексте конкретной задачи измерения пространственных состояний фотонов разработанный метод позволил в 6.6 раз уменьшить потери при их детектировании с сохранением высокого качества проективных измерений. В частности, разработанный метод позволил повысить фиделити с 0.82 ± 0.05 для необработанных данных до 0.91 ± 0.03 при восстановлении состояний как смешанных и с 0.94 ± 0.03 до 0.98 ± 0.02 при восстановлении состояний как чистых. Для сравнения, при амплитудной модуляции детектирующих масок соответствующие значения средних фиделити для 2000 случайных состояний оказываются равны 0.93 ± 0.03 и 0.97 ± 0.02 . Таким образом, результаты томографии при наличии потерь оказались неотличимы от результатов без потерь в пределах ошибки.

Результаты данной главы были опубликованы в работе [130]. Помимо этого, собранная установка для приготовления и детектирования высоко-размерных квантовых систем нашла своё применения в экспериментальных работах по проверке новых методов оценки квантовых состояний [131, 132].

Заключение

1. Экспериментально реализован режим СПР с пространственным числом Шмидта $K = 1.74 \pm 0.08$.
2. Произведено приготовление максимально перепутанных пар кудитов на основе пространственных степеней свободы бифотонов размерностей $d = 4, 9, 16$ и 25 путём оптимизации углового спектра накачки при СПР с применением алгоритма одновременно возмущаемой стохастической аппроксимации.
3. Продемонстрирован контроль над амплитудами и фазами максимально перепутанных кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$ за счет управления угловым спектром накачки при СПР.
4. Произведена полная квантовая томография максимально перепутанных кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$ в подпространстве размерности $d = 36$. Продемонстрировано отсутствие необходимости в их постселекции.
5. Произведена экспериментальная проверка нарушения неравенства типа Белла для кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$. Измеренные параметры Белла I_d составили 2.81 ± 0.05 и 2.56 ± 0.06 соответственно.
6. С помощью искусственной нейронной сети было уменьшено влияние систематических ошибок измерений на результаты квантовой томо-

графии пространственных состояний одиночных фотонов размерности $d = 6$, что привело к увеличению величины средней фиделити для 2000 тестовых состояний на $\approx 11\%$.

7. Обработка измеренных данных с помощью искусственной нейронной сети позволила сохранить высокую фиделити восстановленных пространственных состояний одиночных фотонов размерности $d = 6$ при уменьшении потерь при их детектировании в 6.6 раз.

В заключение хотелось бы выразить благодарность руководителю нашей лаборатории, профессору Сергею Павловичу Кулику, за возможность стать частью замечательного коллектива, который он собрал. Я признателен своему научному руководителю Станиславу Страупе, чей подход к работе стал для меня примером. Хотел бы поблагодарить Ивана Боброва за переданный опыт и помощь на первых этапах, Глеба Стручалина и Константина Катамадзе за отзывчивость и ценные советы. Спасибо всем сотрудникам, аспирантам и студентам центра квантовых технологий, а также кафедры квантовой электроники. Я безмерно благодарен своим родителям, брату и друзьям.

Литература

1. Bechmann-Pasquinucci H., Tittel W. Quantum cryptography using larger alphabets // [Physical Review A](#). 2000. Vol. 61, no. 6. P. 062308.
2. Walborn S., Lemelle D., Almeida M., Ribeiro P. S. Quantum key distribution with higher-order alphabets using spatially encoded qudits // [Physical Review Letters](#). 2006. Vol. 96, no. 9. P. 090501.
3. Cerf N. J., Bourennane M., Karlsson A., Gisin N. Security of quantum key distribution using d-level systems // [Physical Review Letters](#). 2002. Vol. 88, no. 12. P. 127902.
4. Bell J. S. On the einstein podolsky rosen paradox // [Physics Physique Fizika](#). 1964. Vol. 1, no. 3. P. 195.
5. Kaszlikowski D., Gnaciński P., Żukowski M. et al. Violations of local realism by two entangled N-dimensional systems are stronger than for two qubits // [Physical Review Letters](#). 2000. Vol. 85, no. 21. P. 4418.
6. Barrett J., Hardy L., Kent A. No signaling and quantum key distribution // [Physical Review Letters](#). 2005. Vol. 95, no. 1. P. 010503.
7. Vazirani U., Vidick T. Fully device-independent quantum key distribution // [Physical Review Letters](#). 2014. Vol. 113, no. 14. P. 140501.
8. Клышко Фотоны и нелинейная оптика. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

9. Burlakov A., Chekhova M., Klyshko D. et al. Interference effects in spontaneous two-photon parametric scattering from two macroscopic regions // [Physical Review A](#). 1997. Vol. 56, no. 4. P. 3214.
10. Monken C., Ribeiro P. S., Pádua S. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion // [Physical Review A](#). 1998. — Apr. Vol. 57. P. 3123–3126.
11. Unternährer M., Bessire B., Gasparini L. et al. Super-resolution quantum imaging at the Heisenberg limit // [Optica](#). 2018. Vol. 5, no. 9. P. 1150–1154.
12. Ghosh D., Jennewein T., Kolenderski P., Sinha U. Spatially correlated photonic qutrit pairs using pump beam modulation technique // [OSA Continuum](#). 2018. Vol. 1, no. 3. P. 996–1011.
13. Borshchevskaia N., Just F., Katamadze K. et al. Separated Schmidt modes in the angular spectrum of biphotons // [Laser Physics Letters](#). 2019. Vol. 16, no. 8. P. 085207.
14. Law C., Walmsley I., Eberly J. Continuous frequency entanglement: effective finite Hilbert space and entropy control // [Physical Review Letters](#). 2000. Vol. 84, no. 23. P. 5304.
15. Nielsen M. A., Chuang I. Quantum computation and quantum information. 2002.
16. Fedorov M., Efremov M., Volkov P. et al. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions // [Physical Review A](#). 2008. Vol. 77, no. 3. P. 032336.

17. Law C., Eberly J. Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion // [Physical Review Letters](#). 2004. — Mar. Vol. 92. P. 127903.
18. Zhong M., Xu P., Lu L., Zhu S. Experimental realization of positively momentum-correlated photon pairs from a long periodically poled lithium tantalate crystal // [JOSA B](#). 2015. Vol. 32, no. 10. P. 2081–2085.
19. Van Exter M., Aiello A., Oemrawsingh S. et al. Effect of spatial filtering on the Schmidt decomposition of entangled photons // [Physical Review A](#). 2006. Vol. 74, no. 1. P. 012309.
20. Chan K., Torres J., Eberly J. Transverse entanglement migration in Hilbert space // [Physical Review A](#). 2007. Vol. 75, no. 5. P. 050101.
21. Just F., Cavanna A., Chekhova M., Leuchs G. Transverse entanglement of biphotons // [New Journal of Physics](#). 2013. Vol. 15, no. 8. P. 083015.
22. Dyakonov I., Sharapova P., Iskhakov T. S., Leuchs G. Direct Schmidt number measurement of high-gain parametric down conversion // [Laser Physics Letters](#). 2015. Vol. 12, no. 6. P. 065202.
23. Pires H. D. L., Monken C. H., van Exter M. P. Direct measurement of transverse-mode entanglement in two-photon states // [Physical Review A](#). 2009. Vol. 80, no. 2. P. 022307.
24. Ren Y., Huang H., Xie G. et al. Atmospheric turbulence effects on the performance of a free space optical link employing orbital angular momentum multiplexing // [Optics Letters](#). 2013. Vol. 38, no. 20. P. 4062–4065.
25. Ren Y., Xie G., Huang H. et al. Adaptive optics compensation of multiple

- orbital angular momentum beams propagating through emulated atmospheric turbulence // [Optics Letters](#). 2014. Vol. 39, no. 10. P. 2845–2848.
26. Millar D. S., Savory S. J. Blind adaptive equalization of polarization-switched QPSK modulation // [Optics Express](#). 2011. Vol. 19, no. 9. P. 8533–8538.
27. Milione G., Huang H., Lavery M. P. et al. [Orbital-angular-momentum mode \(de\) multiplexer: a single optical element for MIMO-based and non-MIMO-based multimode fiber systems](#) // OFC 2014 / IEEE. 2014. P. 1–3.
28. Carpenter J., Xiong C., Collins M. J. et al. Mode multiplexed single-photon and classical channels in a few-mode fiber // [Optics Express](#). 2013. Vol. 21, no. 23. P. 28794–28800.
29. Bozinovic N., Yue Y., Ren Y. et al. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers // [Science](#). 2013. Vol. 340, no. 6140. P. 1545–1548.
30. Gregg P., Kristensen P., Ramachandran S. Conservation of orbital angular momentum in air-core optical fibers // [Optica](#). 2015. Vol. 2, no. 3. P. 267–270.
31. Ung B., Vaity P., Wang L. et al. Few-mode fiber with inverse-parabolic graded-index profile for transmission of OAM-carrying modes // [Optics Express](#). 2014. Vol. 22, no. 15. P. 18044–18055.
32. Abramochkin E., Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams // [Optics Communications](#). 1991. Vol. 83, no. 1-2. P. 123–135.

33. Tamm C., Weiss C. Bistability and optical switching of spatial patterns in a laser // [JOSA B](#). 1990. Vol. 7, no. 6. P. 1034–1038.
34. Padgett M. J., Courtial J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum // [Optics Letters](#). 1999. Vol. 24, no. 7. P. 430–432.
35. Walborn S., Pimentel A. Generalized Hermite–Gauss decomposition of the two-photon state produced by spontaneous parametric down conversion // [Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics](#). 2012. Vol. 45, no. 16. P. 165502.
36. Walborn S., Pádua S., Monken C. Conservation and entanglement of Hermite-Gaussian modes in parametric down-conversion // [Physical Review A](#). 2005. Vol. 71, no. 5. P. 053812.
37. Ren X.-F., Guo G.-P., Li J., Guo G.-C. Entanglement of the Hermite–Gaussian modes states of photons // [Physics Letters A](#). 2005. Vol. 341, no. 1-4. P. 81–86.
38. Straupe S., Ivanov D., Kalinkin A. et al. Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion // [Physical Review A](#). 2011. Vol. 83, no. 6. P. 060302.
39. Ling A., Lamas-Linares A., Kurtsiefer C. Absolute emission rates of spontaneous parametric down-conversion into single transverse Gaussian modes // [Physical Review A](#). 2008. Vol. 77, no. 4. P. 043834.
40. Torres J., Alexandrescu A., Torner L. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states // [Physical Review A](#). 2003. Vol. 68, no. 5. P. 050301.

41. Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R., Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // [Physical Review A](#). 1992. Vol. 45, no. 11. P. 8185.
42. He H., Friese M., Heckenberg N., Rubinsztein-Dunlop H. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity // [Physical Review Letters](#). 1995. Vol. 75, no. 5. P. 826.
43. Beth R. A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light // [Physical Review](#). 1936. Vol. 50, no. 2. P. 115.
44. He H., Friese M. E. J., Heckenberg N. R., Rubinsztein-Dunlop H. Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity // [Physical Review Letters](#). 1995. — Jul. Vol. 75. P. 826–829.
45. Salakhutdinov V., Eliel E., Löffler W. Full-field quantum correlations of spatially entangled photons // [Physical Review Letters](#). 2012. Vol. 108, no. 17. P. 173604.
46. Mair A., Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons // [Nature](#). 2001. Vol. 412, no. 6844. P. 313.
47. Franke-Arnold S., Barnett S. M., Padgett M. J., Allen L. Two-photon entanglement of orbital angular momentum states // [Physical Review A](#). 2002. Vol. 65, no. 3. P. 033823.
48. Miatto F. M., Pires H. D. L., Barnett S. M., van Exter M. P. Spatial

- Schmidt modes generated in parametric down-conversion // [The European Physical Journal D](#). 2012. Vol. 66, no. 10. P. 263.
49. van Exter M. P., Lee P., Doesburg S., Woerdman J. Mode counting in high-dimensional orbital angular momentum entanglement // [Optics Express](#). 2007. Vol. 15, no. 10. P. 6431–6438.
 50. Miatto F. M., Yao A. M., Barnett S. M. Full characterization of the quantum spiral bandwidth of entangled biphotons // [Physical Review A](#). 2011. Vol. 83, no. 3. P. 033816.
 51. Krenn M., Huber M., Fickler R. et al. Generation and confirmation of a (100×100) -dimensional entangled quantum system // [Proceedings of the National Academy of Sciences](#). 2014. P. 201402365.
 52. Zhang Y., Roux F. S., McLaren M., Forbes A. Radial modal dependence of the azimuthal spectrum after parametric down-conversion // [Physical Review A](#). 2014. Vol. 89, no. 4. P. 043820.
 53. Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum // [Physical Review Letters](#). 2001. Vol. 88, no. 1. P. 013601.
 54. Torres J. P., Deyanova Y., Torner L., Molina-Terriza G. Preparation of engineered two-photon entangled states for multidimensional quantum information // [Physical Review A](#). 2003. Vol. 67, no. 5. P. 052313.
 55. Davis J. A., Cottrell D. M., Campos J. et al. Encoding amplitude information onto phase-only filters // [Applied Optics](#). 1999. Vol. 38, no. 23. P. 5004–5013.

56. Leach J., Dennis M. R., Courtial J., Padgett M. J. Vortex knots in light // [New Journal of Physics](#). 2005. Vol. 7, no. 1. P. 55.
57. Bolduc E., Bent N., Santamato E. et al. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram // [Optics Letters](#). 2013. Vol. 38, no. 18. P. 3546–3549.
58. Kirk J. P., Jones A. L. Phase-only complex-valued spatial filter // [JOSA](#). 1971. Vol. 61, no. 8. P. 1023–1028.
59. Arrizón V., Ruiz U., Carrada R., González L. A. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields // [JOSA A](#). 2007. Vol. 24, no. 11. P. 3500–3507.
60. Ando T., Ohtake Y., Matsumoto N. et al. Mode purities of Laguerre–Gaussian beams generated via complex-amplitude modulation using phase-only spatial light modulators // [Optics letters](#). 2009. Vol. 34, no. 1. P. 34–36.
61. Dudley A., Vasilyeu R., Belyi V. et al. Controlling the evolution of non-diffracting speckle by complex amplitude modulation on a phase-only spatial light modulator // [Optics Communications](#). 2012. Vol. 285, no. 1. P. 5–12.
62. Ngcobo S., Litvin I., Burger L., Forbes A. A digital laser for on-demand laser modes // [Nature Communications](#). 2013. Vol. 4. P. 2289.
63. Lee W.-H. High efficiency multiple beam gratings // [Applied Optics](#). 1979. Vol. 18, no. 13. P. 2152–2158.
64. Mirhosseini M., Magana-Loaiza O. S., Chen C. et al. Rapid generation of

- light beams carrying orbital angular momentum // [Optics Express](#). 2013. Vol. 21, no. 25. P. 30196–30203.
65. Tyson R. K., Scipioni M., Viegas J. Generation of an optical vortex with a segmented deformable mirror // [Applied Optics](#). 2008. Vol. 47, no. 33. P. 6300–6306.
 66. Oemrawsingh S., Ma X., Voigt D. et al. Experimental demonstration of fractional orbital angular momentum entanglement of two photons // [Physical Review Letters](#). 2005. Vol. 95, no. 24. P. 240501.
 67. Arlt J., Dholakia K., Allen L., Padgett M. The production of multiringed Laguerre–Gaussian modes by computer-generated holograms // [Journal of Modern Optics](#). 1998. Vol. 45, no. 6. P. 1231–1237.
 68. Marrucci L., Manzo C., Paparo D. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media // [Physical Review Letters](#). 2006. Vol. 96, no. 16. P. 163905.
 69. Fickler R., Campbell G., Buchler B. et al. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10,010 // [Proceedings of the National Academy of Sciences](#). 2016. Vol. 113, no. 48. P. 13642–13647.
 70. Pinnell J., Rodriguez-Fajardo V., Forbes A. Probing the limits of vortex mode generation and detection with spatial light modulators // [Journal of Optics](#). 2020. Vol. 23, no. 1. P. 015602.
 71. Neves L., Lima G., Gómez J. A. et al. Generation of entangled states of qudits using twin photons // [Physical Review Letters](#). 2005. Vol. 94, no. 10. P. 100501.

72. O'Sullivan-Hale M. N., Khan I. A., Boyd R. W., Howell J. C. Pixel entanglement: experimental realization of optically entangled $d=3$ and $d=6$ qudits // [Physical Review Letters](#). 2005. Vol. 94, no. 22. P. 220501.
73. Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication // [Physical Review Letters](#). 2002. Vol. 89, no. 24. P. 240401.
74. Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L. Orbital angular momentum of photons in noncollinear parametric downconversion // [Optics Communications](#). 2003. Vol. 228, no. 1-3. P. 155–160.
75. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories // [Physical Review Letters](#). 1969. Vol. 23, no. 15. P. 880.
76. Collins D., Gisin N., Linden N. et al. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems // [Physical Review Letters](#). 2002. Vol. 88, no. 4. P. 040404.
77. Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A. Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments // [Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics](#). 2002. Vol. 4, no. 2. P. S47.
78. Dada A. C., Leach J., Buller G. S. et al. Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violations of generalized Bell inequalities // [Nature Physics](#). 2011. Vol. 7, no. 9. P. 677.
79. Bennett C. H., Bernstein H. J., Popescu S., Schumacher B. Concentrating partial entanglement by local operations // [Physical Review A](#). 1996. Vol. 53, no. 4. P. 2046.

80. Vaziri A., Pan J.-W., Jennewein T. et al. Concentration of higher dimensional entanglement: qutrits of photon orbital angular momentum // [Physical Review Letters](#). 2003. Vol. 91, no. 22. P. 227902.
81. Agnew M., Leach J., McLaren M. et al. Tomography of the quantum state of photons entangled in high dimensions // [Physical Review A](#). 2011. Vol. 84, no. 6. P. 062101.
82. Jack B., Yao A., Leach J. et al. Entanglement of arbitrary superpositions of modes within two-dimensional orbital angular momentum state spaces // [Physical Review A](#). 2010. Vol. 81, no. 4. P. 043844.
83. Agnew M., Salvail J. Z., Leach J., Boyd R. W. Generation of orbital angular momentum Bell states and their verification via accessible nonlinear witnesses // [Physical Review Letters](#). 2013. Vol. 111, no. 3. P. 030402.
84. Jack B., Leach J., Ritsch H. et al. Precise quantum tomography of photon pairs with entangled orbital angular momentum // [New Journal of Physics](#). 2009. Vol. 11, no. 10. P. 103024.
85. Barreiro J. T., Langford N. K., Peters N. A., Kwiat P. G. Generation of hyperentangled photon pairs // [Physical Review Letters](#). 2005. Vol. 95, no. 26. P. 260501.
86. Sit A., Bouchard F., Fickler R. et al. High-dimensional intracity quantum cryptography with structured photons // [Optica](#). 2017. Vol. 4, no. 9. P. 1006–1010.
87. Walborn S., De Oliveira A., Thebaldi R., Monken C. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion // [Physical Review A](#). 2004. Vol. 69, no. 2. P. 023811.

88. Romero J., Giovannini D., McLaren M. et al. Orbital angular momentum correlations with a phase-flipped Gaussian mode pump beam // [Journal of Optics](#). 2012. Vol. 14, no. 8. P. 085401.
89. Bouchard F., Harris J., Mand H. et al. Observation of quantum recoherence of photons by spatial propagation // [Scientific Reports](#). 2015. Vol. 5. P. 15330.
90. Yarnall T., Abouraddy A. F., Saleh B. E., Teich M. C. Experimental violation of Bell's inequality in spatial-parity space // [Physical Review Letters](#). 2007. Vol. 99, no. 17. P. 170408.
91. Cirel'son B. S. Quantum generalizations of Bell's inequality // [Letters in Mathematical Physics](#). 1980. Vol. 4, no. 2. P. 93–100.
92. Romero J., Giovannini D., Tasca D. et al. Tailored two-photon correlation and fair-sampling: a cautionary tale // [New Journal of Physics](#). 2013. Vol. 15, no. 8. P. 083047.
93. Popescu S., Rohrlich D. Quantum nonlocality as an axiom // [Foundations of Physics](#). 1994. Vol. 24, no. 3. P. 379–385.
94. Fedrizzi A., Herbst T., Poppe A. et al. A wavelength-tunable fiber-coupled source of narrowband entangled photons // [Optics Express](#). 2007. Vol. 15, no. 23. P. 15377–15386.
95. Pérez A., Just F., Cavanna A. et al. Compensation of anisotropy effects in a nonlinear crystal for squeezed vacuum generation // [Laser Physics Letters](#). 2013. Vol. 10, no. 12. P. 125201.

96. Giustina M., Versteegh M. A., Wengerowsky S. et al. Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons // [Physical Review Letters](#). 2015. Vol. 115, no. 25. P. 250401.
97. Rosenfeld W., Burchardt D., Garthoff R. et al. Event-ready Bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes // [Physical Review Letters](#). 2017. Vol. 119, no. 1. P. 010402.
98. Rauch D., Handsteiner J., Hochtainer A. et al. Cosmic Bell test using random measurement settings from high-redshift quasars // [Physical Review Letters](#). 2018. Vol. 121, no. 8. P. 080403.
99. White A., James D. F., Kwiat P. G. Measurement of qubits // [Physical Review A](#). 2001.
100. Rytikov G., Chekhova M. Detection of two-mode compression and degree of entanglement in continuous variables in parametric scattering of light // [Journal of Experimental and Theoretical Physics](#). 2008. Vol. 107, no. 6. P. 923–932.
101. Kato K., Takaoka E. Sellmeier and thermo-optic dispersion formulas for KTP // [Applied Optics](#). 2002. Vol. 41, no. 24. P. 5040–5044.
102. Kovlakov E., Bobrov I., Straupe S., Kulik S. Spatial bell-state generation without transverse mode subspace postselection // [Physical Review Letters](#). 2017. Vol. 118, no. 3. P. 030503.
103. Struchalin G., Kovlakov E., Straupe S., Kulik S. Adaptive quantum tomography of high-dimensional bipartite systems // [Physical Review A](#). 2018. Vol. 98, no. 3. P. 032330.

104. Law C., Walmsley I. A., Eberly J. Continuous frequency entanglement: effective finite Hilbert space and entropy control // [Physical Review Letters](#). 2000. Vol. 84, no. 23. P. 5304.
105. Ansari V., Donohue J. M., Allgaier M. et al. Tomography and purification of the temporal-mode structure of quantum light // [Physical Review letters](#). 2018. Vol. 120, no. 21. P. 213601.
106. Ansari V., Donohue J. M., Brecht B., Silberhorn C. Tailoring nonlinear processes for quantum optics with pulsed temporal-mode encodings // [Optica](#). 2018. Vol. 5, no. 5. P. 534–550.
107. Bouchard F., Valencia N. H., Brandt F. et al. Measuring azimuthal and radial modes of photons // [Optics Express](#). 2018. Vol. 26, no. 24. P. 31925–31941.
108. Spall J. C. Implementation of the simultaneous perturbation algorithm for stochastic optimization // [IEEE Transactions on aerospace and electronic systems](#). 1998. Vol. 34, no. 3. P. 817–823.
109. Acin A., Durt T., Gisin N., Latorre J. I. Quantum nonlocality in two three-level systems // [Physical Review A](#). 2002. Vol. 65, no. 5. P. 052325.
110. Bernhard C., Bessire B., Feurer T., Stefanov A. Shaping frequency-entangled qudits // [Physical Review A](#). 2013. Vol. 88, no. 3. P. 032322.
111. Kovlakov E., Straupe S., Kulik S. Quantum state engineering with twisted photons via adaptive shaping of the pump beam // [Physical Review A](#). 2018. Vol. 98, no. 6. P. 060301.
112. Patera G., Navarrete-Benlloch C., de Valcárcel G. J., Fabre C. Quantum coherent control of highly multipartite continuous-variable entangled

- states by tailoring parametric interactions // [The European Physical Journal D](#). 2012. Vol. 66, no. 9. P. 241.
113. Liu S., Zhou Z., Liu S. et al. Coherent manipulation of a three-dimensional maximally entangled state // [Physical Review A](#). 2018. Vol. 98, no. 6. P. 062316.
114. Bornman N., Tavares Buono W., Lovemore M., Forbes A. Optimal Pump Shaping for Entanglement Control in Any Countable Basis // [Advanced Quantum Technologies](#). P. 2100066.
115. Mitchell T. M. et al. Machine learning // Burr Ridge, IL: McGraw Hill. 1997. Vol. 45, no. 37. P. 870–877.
116. Yang M., Ren C.-l., Ma Y.-c. et al. Experimental simultaneous learning of multiple nonclassical correlations // [Physical Review Letters](#). 2019. Vol. 123, no. 19. P. 190401.
117. Ma Y.-C., Yung M.-H. Transforming bell’s inequalities into state classifiers with machine learning // [npj Quantum Information](#). 2018. Vol. 4, no. 1. P. 1–10.
118. Torlai G., Mazzola G., Carrasquilla J. et al. Neural-network quantum state tomography // [Nature Physics](#). 2018. Vol. 14, no. 5. P. 447.
119. Pepper A., Tischler N., Pryde G. J. Experimental realization of a quantum autoencoder: The compression of qutrits via machine learning // [Physical Review Letters](#). 2019. Vol. 122, no. 6. P. 060501.
120. Renes J. M., Blume-Kohout R., Scott A. J., Caves C. M. Symmetric informationally complete quantum measurements // [Journal of Mathematical Physics](#). 2004. Vol. 45, no. 6. P. 2171–2180.

121. Bent N., Qassim H., Tahir A. et al. Experimental realization of quantum tomography of photonic qudits via symmetric informationally complete positive operator-valued measures // [Physical Review X](#). 2015. Vol. 5, no. 4. P. 041006.
122. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // [Mathematics of Control, Signals and Systems](#). 1989. Vol. 2, no. 4. P. 303–314.
123. Leshno M., Lin V. Y., Pinkus A., Schocken S. Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function // [Neural networks](#). 1993. Vol. 6, no. 6. P. 861–867.
124. Heaton J., Ian G., Yoshua B., Aaron C. Deep learning. 2018.
125. Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A. et al. Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting // [The Journal of Machine Learning Research](#). 2014. Vol. 15, no. 1. P. 1929–1958.
126. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms // arXiv preprint arXiv:1609.04747. 2016.
127. Prechelt L. [Early stopping-but when?](#) // *Neural Networks: Tricks of the trade*. Springer, 1998. P. 55–69.
128. Hradil Z. Quantum-state estimation // [Physical Review A](#). 1997. — Mar. Vol. 55. P. R1561–R1564.
129. Struchalin G., Pogorelov I., Straupe S. et al. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states // [Physical Review A](#). 2016. Vol. 93, no. 1. P. 012103.

130. Palmieri A. M., Kovlakov E., Bianchi F. et al. Experimental neural network enhanced quantum tomography // [npj Quantum Information](#). 2020. Vol. 6, no. 1. P. 1–5.
131. Teo Y. S., Struchalin G., Kovlakov E. et al. Objective compressive quantum process tomography // [Physical Review A](#). 2020. Vol. 101, no. 2. P. 022334.
132. Struchalin G., Zagorovskii Y. A., Kovlakov E. et al. Experimental Estimation of Quantum State Properties from Classical Shadows // [PRX Quantum](#). 2020. Vol. 2. P. 010307.