

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Ковлаков Егор Витальевич

**Методы управления оптическими квантовыми состояниями
высокой размерности на основе пространственных мод света**

01.04.21 — лазерная физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре квантовой электроники физического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: **Страупе Станислав Сергеевич**
кандидат физико-математических наук
физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова
старший научный сотрудник
кафедры квантовой электроники

Официальные оппоненты: **Фёдоров Михаил Владимирович**
доктор физико-математических наук, профессор
главный научный сотрудник института общей
физики им. А.М. Прохорова РАН

Калачёв Алексей Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор РАН
руководитель казанского физико-технического
института им. Е.К. Завойского

Львовский Александр Исаевич
кандидат физико-математических наук
руководитель группы «Квантовая оптика»
Международного центра квантовых технологий

Защита диссертации состоится 18 ноября 2021 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета МГУ.01.13 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 62, корпус нелинейной оптики, аудитория им. С.А. Ахманова.

E-mail: diss.sov.31@physics.msu.ru

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). С информацией о регистрации участия в защите и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/395086712/>.

Автореферат разослан « » октября 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.13
кандидат физико-математических наук

А.А. Коновко

Общая характеристика работы

Одним из центральных в науке о квантовой информации является понятие «кубита» – двухуровневой квантовой системы, состояние которой описывается вектором в двумерном гильбертовом пространстве. Квантовые системы размерностью выше двойки принято называть «кудитами», они востребованы в задачах линейно-оптических квантовых вычислений и квантовой связи. По сравнению с кубитами, многоуровневые системы позволяют увеличить плотность кодирования информации [1, 2], а также повысить устойчивость канала распределения квантового ключа к шумам [3].

Состояние кудита, волновую функцию которого невозможно представить в виде произведения волновых функций подсистем меньшей размерности, принято называть «перепутанным» (англ. *entangled*). Корреляции между наблюдаемыми свойствами удаленных подсистем таких состояний не имеют классического аналога. В терминах измеряемых величин данный факт был сформулирован Беллом, чье неравенство служат одним из критериев наличия перепутанности в квантовой системе [4], и если сначала наличие квантовых корреляций воспринималось как парадокс, то в настоящее время им находится множество практических применений. Отличительной особенностью многоуровневых перепутанных квантовых систем является то, что нарушение неравенства Белла для них становится все более значительным с увеличением размерности [5], это делает их еще привлекательней для использования в аппаратно-независимых протоколах квантового распределения ключа [6, 7].

Одна из распространенных реализаций кудитов основана на использовании степеней свободы фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) в нелинейном кристалле. Такие пары фотонов (бифотоны) коррелированы не только по поляризации и частоте, но и по направлению распространения. Рассмотрение угловых корреляций удобно проводить в базисе поперечных пространственных мод с целью дискретизации пространства состояний. Для детектирования пространственных мод фотонов обычно применяются пространственные модуляторы света на основе жидкокристаллических матриц.

В большинстве работ по приготовлению пространственных кудитов при СПР используется процедура «постселекции» состояний необходимого вида – исключение нежелательных событий из результатов статистических измерений. На практике постселекция реализуется путем пространственной фильтрации широкого спектра поперечных мод бифотонного поля, что приводит к потерям полезного сигнала. Помимо этого к потерям приводит несовершенство детектирующей части экспериментального аппарата, причем улучшение качества измерений пространственных состояний фотонов эти потери усугубляет.

Целью работы была разработка экспериментальных методов управления состояниями кудитов на основе пространственных степеней свободы бифотонов, а именно их размерностью, амплитудами и фазами без постселекции, а также

снижение уровня потерь при детектировании фотонов в поперечных пространственных модах при сохранении качества измерений.

Актуальность работы обусловлена как фундаментальным интересом к экспериментальным методам генерации квантовых систем высокой размерности, так и их применением в протоколах квантовой связи и квантовых вычислений.

Научная новизна работы заключается в следующих положениях:

1. Экспериментально исследован режим СПР с минимальным числом пространственных мод.
2. Экспериментально исследован случай накачки нелинейного кристалла лазерными пучками в суперпозициях мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра высших порядков при СПР.
3. Разработан метод адаптивной оптимизации модового состава углового спектра лазерной накачки при СПР для повышения степени соответствия «фиделити» (англ. *fidelity*) приготавливаемых состояний пространственных кудитов желаемым.
4. Экспериментально приготовлены перепутанные пары пространственных кудитов с заданной размерностью, а также произвольными амплитудами и фазами без постселекции. Реализована полная квантовая томография таких состояний. Произведена проверка нарушения неравенства типа Белла для данных систем.
5. Разработан метод коррекции систематических ошибок при квантовой томографии высокоразмерных состояний с помощью искусственной нейронной сети.
6. Разработан метод снижения потерь полезного сигнала при измерении пространственных состояний фотонов с помощью пространственного модулятора света путем обработки экспериментальных данных с помощью искусственной нейронной сети.

Научная и практическая значимость работы заключается в возможном использовании разработанных методов приготовления и детектирования пространственных кудитов в задачах квантовой оптики и квантовой информации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Минимум числа пространственных мод Шмидта при СПР достигается при равенстве рэлеевской длины лазерного пучка накачки и половины длины нелинейного кристалла.
2. Накачка нелинейного кристалла при СПР лазерным пучком в пространственных модах Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра позволяет приготовить максимально перепутанные пространственные состояния бифотонов без постселекции.

3. Адаптивная оптимизация модового состава углового спектра лазерной накачки кристалла при СПР позволяет управлять размерностью, амплитудами и фазами пространственных состояний бифотонов.
4. Применение глубокой искусственной нейронной сети позволяет снизить негативное влияние систематических ошибок измерений на результаты квантовой томографии систем высокой размерности.

Личный вклад автора: все результаты диссертационной работы, как экспериментальные, так и теоретические, получены автором лично или при его непосредственном участии.

Апробация результатов работы проводилась на международных конференциях:

- 23th International Laser Physics Workshop (София, Болгария, 2014 год),
- Quantum Information Processing and Communication (Лидс, Великобритания, 2015 год),
- 4th International Conference on Optical Angular Momentum (Анакапри, Италия, 2017 год),
- 27th International Laser Physics Workshop (Ноттингем, Великобритания, 2018 год),

а также на семинарах кафедры квантовой электроники физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Основные материалы работы **опубликованы** в следующих статьях, индексируемых Web of Science:

1. **Spatial Bell-State Generation without Transverse Mode Subspace Postselection** / Kovlakov E. V., Straupe S. S., Bobrov I.B., Kulik S. P. // Physical Review Letters. – 2017. – Т. 118. – №. 3. – С. 030503 (Impact Factor: 9.161).

2. **Quantum state engineering with twisted photons via adaptive shaping of the pump beam** / Kovlakov E. V., Straupe S. S., Kulik S. P. // Physical Review A. – 2018. – Т. 98. – №. 6. – С. 060301 (Impact Factor: 3.14).

3. **Experimental neural network enhanced quantum tomography** / Palmieri A. M., Kovlakov E. V., Bianchi F., Yudin D., Straupe S. S., Biamonte J. D., Kulik S. P. // npj Quantum Information. — 2020. – Т. 6. – №. 1. – С. 1-5 (Impact Factor: 7.286).

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Объем работы составляет 131 страницу, включая 50 рисунков. Список цитируемой литературы содержит 132 наименования и 6 авторских работ, опубликованных в журналах, индексируемых Web of Science.

Содержание работы

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертационной работы. В ней вводится понятие амплитуды бифотона для вектора двухфотонного состояния при СПР и рассматривается ряд приближений для этой амплитуды, что будут использованы далее. Вводится формализм мод Шмидта и сопутствующая качественная оценка степени перепутанности состояний бифотонов (число Шмидта). Рассматриваются условия, при которых параксиальные моды света могут играть роль шмидтовских, отдельное внимание уделено базисам мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра. Проводится анализ влияния углового спектра накачки кристалла на вид амплитуды бифотона, рассмотрены случаи сохранения чётности мод и орбитального углового момента (ОУМ) при СПР.

Часть обзора посвящена работам по генерации высокоразмерных перепутанных состояний на основе пространственных степеней свободы бифотонов. Показано, что значительным недостатком большинства экспериментальных схем является процедура выделения отдельных пространственных мод углового спектра СПР, что приводит к потерям фотонов. Подобный подход принято называть «концентрацией перепутанности» [8] или «прокрустовой фильтрацией» [9]. Помимо этого, приведён обзор существующих экспериментальных техник по пространственному преобразованию пучков света.

Во **второй главе** был предложен и экспериментально опробован метод генерации пространственно-перепутанных кудитов, не нуждающийся в процедуре их фильтрации (постселекции). Для этого сперва число пространственных мод в спектре СПР было минимизировано выбором оптимальной ширины гауссова пучка накачки, благодаря чему размерность бифотонных состояний стала строго ограничена подпространством мод малого порядка. Затем спектр пространственных мод СПР был изменён путём преобразования пучка накачки в моды Гаусса-Эрмита, что привело к резкому увеличению степени перепутанности приготовляемых состояний. Размерность кудитов при этом определялась порядком моды накачки и продолжала оставаться строго ограниченной. Был подробно рассмотрен самый простой случай генерации пары максимально перепутанных кубитов (состояния Белла) при пучке накачки в первой моде Гаусса-Эрмита.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. В качестве накачки использовался диодный лазер с длиной волны излучения 407 нм, его пространственная мода фильтровалась с помощью одномодового волокна (SMF). Пучок на выходе волокна сначала направлялся на первый пространственный модулятора света SLM1 (Cambridge Correlators), а затем фокусировался в периодически поляризованный кристалл KTiOPO_4 длиной 25 мм с помощью линзы L1. Излучение СПР на выходе кристалла коллимировалось линзой L2 и пропусклось через интерференционный фильтр (IF). Поскольку был выбран частотно-вырожденный коллинеарный синхронизм II-го типа, сигнальный и холостой фотон обладали взаимно ортогональными поляризациями, что позволяло разделять их на поляризационном светоделителе (PBS). Анализ модового состава каждого

Первый пространственный модулятор света использовался для преобразования гауссова пучка накачки после волокна в произвольную моду Гаусса-Эрмита. Это устройство представляет собой матрицу из двулучепреломляющих жидких кристаллов на кремниевой подложке, каждый пиксель которой позволяет вносить произвольную фазовую задержку в отраженный волновой фронт. Поскольку для достижения высокого качества приготавливаемых пучков необходимо изменять не только их фазовый профиль, но и амплитудный, к фазовой маске необходимой моды добавлялась фазовая дифракционная решетка треугольного профиля. Она позволяла концентрировать падающее на неё излучение в первый порядок дифракции, что выделяло в этом порядке желаемую область амплитудного фронта [10, 11]. Второй SLM выполнял обратную функцию – правильный подбор голограмм на нём позволял преобразовать пространственные моды бифотонов в гауссовы для последующей фильтрации одномодовыми волокнами и регистрации отсчётов детекторов. Таким образом, отображая на дисплее модулятора фазовые маски для различных мод Гаусса-Эрмита, можно было реализовать проективные измерения в их базисе.

7

K наблюдался при чуть большей величине $w_p = 35.1 \pm 1.0$, как видно из кривой на рис. 2(а).

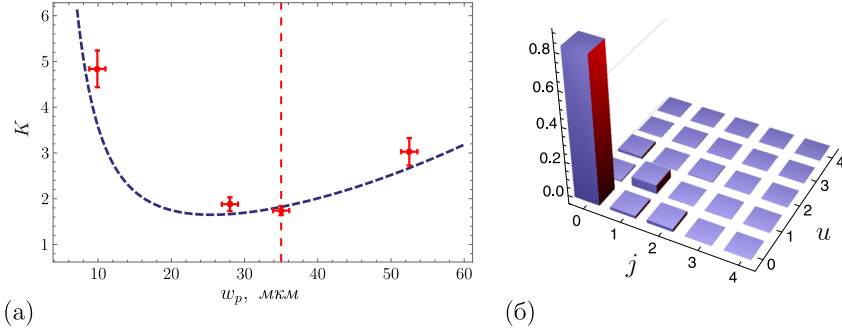


Рис. 2: (а) График зависимости числа Шмидта K от ширины пучка накачки w_p : красные точки – эксперимент, пунктирная кривая – теоретическая зависимость из работы [12]. (б) Экспериментально измеренные частоты совпадений фотоотсчётов для гауссова пучка накачки при детектировании мод Гаусса-Эрмита j -го порядка в сигнальном канале рассеяния и u -го в холостом.

Для каждой из экспериментальных точек на графике были измерены частоты совпадений фотоотсчётов детекторов при проективных измерениях в базисе мод Гаусса-Эрмита. В качестве примера на рис. 2(б) представлены гистограммы частот совпадений фотоотсчётов при отображении на модуляторе голограмм для мод Гаусса-Эрмита j -го порядка в сигнальном канале детектирования и u -го в холостом. Здесь и в дальнейшем гистограммы нормированы на сумму своих элементов.

Как видно, доминирующей в пространственном спектре СПР оказалась нулевая мода, то есть гауссов пучок. Оценка минимального числа Шмидта составила $K = 1.74 \pm 0.08$, она была произведена в предположении, что частота отсчётов совпадений фотодетекторов пропорциональна собственным значениям λ_n шмидтовского разложения вектора состояния бифотона $\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})$:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\vec{k}_{s\perp}) \chi_n(\vec{k}_{i\perp}), \quad (1)$$

где $\vec{k}_{s,i\perp}$ – поперечные компоненты волновых векторов сигнального и холостого фотонов, а $\psi_n(\vec{k}_{s\perp})$ и $\chi_n(\vec{k}_{i\perp})$ – собственные функции редуцированных матриц плотности их подсистем. Формула для числа Шмидта имеет вид $K = 1 / \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2$.

Аналогичные гистограммы для накачки в первых трёх ненулевых модах Гаусса-Эрмита представлены на рис. 3. Из них видно, что чётность суммы индексов $j + u$ рассеянных фотонов равна чётности индекса моды пучка накачки n . При этом состояние, приготовленное в случае накачки модой первого порядка (рис.

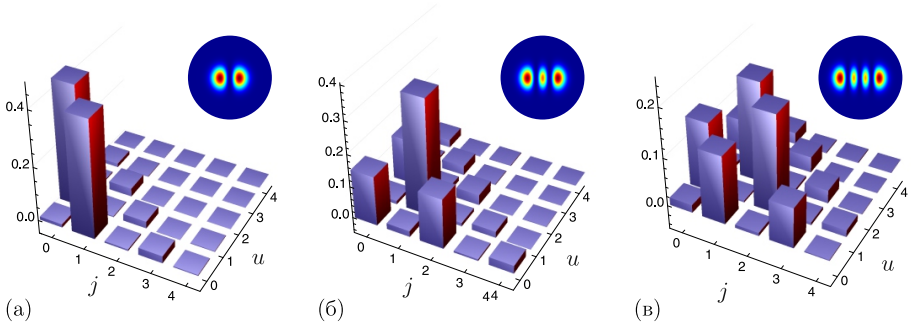


Рис. 3: Экспериментально измеренные частоты совпадений фотоотсчётов для пучков накачки в первых трёх ненулевых модах Гаусса-Эрмита. Их профили интенсивности также приведены на рисунке. 3 (а)), близко к чистому белловскому виду:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{HG}_0, \text{HG}_1\rangle + |\text{HG}_1, \text{HG}_0\rangle), \quad (2)$$

где $|\text{HG}_\alpha\rangle = \int d\vec{k} \text{HG}_\alpha(k) |1\rangle_{\vec{k}}$, $\vec{k}$ – волновой вектор фотона, $\text{HG}_\alpha(k, w) \propto \sqrt{w} H_\alpha(wk) \exp(-w^2 k^2/2)$, а $H_\alpha(x)$ – полином Эрмита порядка α .

Для проверки неравенства Белла приготовленное состояние проецировалась на суперпозиции мод $|\theta_{s,i}\rangle = \cos(\theta_{s,i}/2) |\text{HG}_0\rangle + \sin(\theta_{s,i}/2) |\text{HG}_1\rangle$ в сигнальном и холостом каналах, это позволило наблюдать для частоты совпадений фотоотсчётов R_c так называемые «белловские кривые», представленные для случаев $\theta_i = 0, \theta_i = \pi/4, \theta_i = \pi/2, \theta_i = 3\pi/4$ на рис. 4.

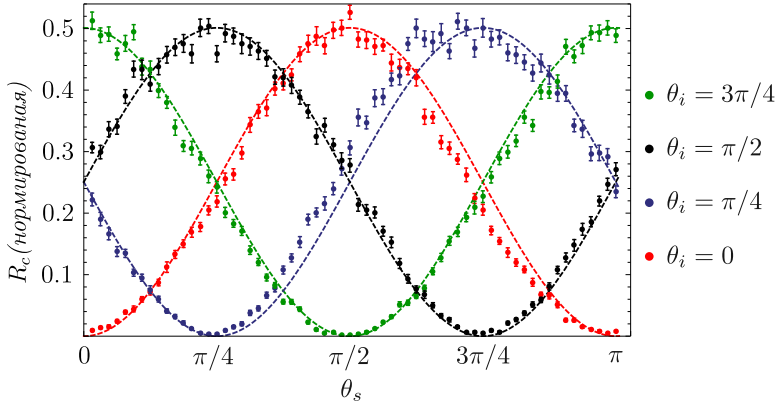


Рис. 4: Измеренные для четырех случаев кривые Белла: $\theta_i = 0, \theta_i = \pi/4, \theta_i = \pi/2, \theta_i = 3\pi/4$. Угол θ_s изменялся от 0 до π .

С на порядок большей длительностью усреднения была измерена частота совпадений фотоотсчётов при следующих тестовых углах: $\theta_i = 0, \theta'_i = \pi/4$,

$\theta_s = 3\pi/8$, $\theta'_s = \pi/8$ и ортогональных им $\theta_{i,s} + \pi/2$, $\theta'_{i,s} + \pi/2$. Из измеренных в этих точках R_c можно оценить параметр I , который для неравенства Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта должен удовлетворять условию $-2 \leq I \leq 2$ [13]. Полученное значение параметра составило $I = 2.81 \pm 0.05$ и оказалось близко к границе Цирельсона $I = 2\sqrt{2}$ что явно демонстрирует нарушение неравенства.

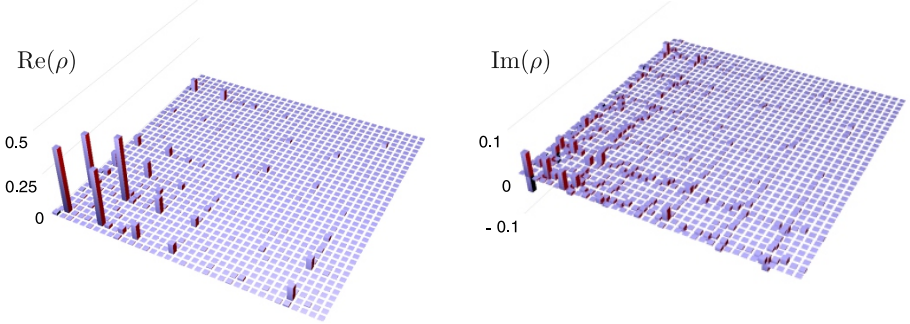


Рис. 5: Действительная и мнимая части матрицы плотности ρ для приготовленного состояния Белла.

С целью восстановления полной матрицы плотности приготовленного состояния, в дополнение к белловским измерениям была проведена его полная квантовая томография в подпространствах более высокой размерности $d = 3 \times 3$ и $d = 6 \times 6$. Для повышения точности восстановления был использован переполненный набор измерений: исследуемое состояние проецировалось на набор из $N = 15 \times 15$ собственных векторов обобщенных матриц Гелл-Манна с модами Гаусса-Эрмита в качестве измерительного базиса. В случае подпространства $d = 6 \times 6$ измерительный базис протокола томографии был расширен до $N = 36 \times 36$ векторов.

Оценка элементов матрицы плотности была получена путем минимизации величины χ^2 между ожидаемыми вероятностями и их экспериментальными оценками из R_c . Мера соответствия фиделити $F(\rho, \rho_{th})$ восстановленного состояния белловскому $\rho_{th} = |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|$ составила 0.97 ± 0.01 . При восстановлении состояния в подпространстве $d = 6 \times 6$ величина $F(\rho, \rho_{th})$ снизилось до 0.72 ± 0.02 , вещественная и мнимая части соответствующей ρ представлены на рис. 5. Стоит отметить, что такое падение значения фиделити с ростом d вполне типично для подобных экспериментов [14, 15], оно связано как с уменьшением статистической выборки, так и с более сложной структурой мод высокой размерности, что приводит к увеличению вклада систематических ошибок при измерениях.

Наблюдаемая частота совпадений фотоотсчетов на 1 мВт мощности лазерного пучка накачки кристалла для пространственного состояния Белла составила $R_c \simeq 100$ Гц. При этом потери при детектировании были достаточно велики: наибольший вклад в них вносили маски с амплитудной модуляцией на SLM2 ($\simeq 80\%$), квантовая эффективность модулей счета фотонов ($\simeq 20\%$) и поте-

ри на пропускании интерференционного фильтра ($\simeq 50\%$). С учетом всех этих потерь оценка скорости генерации бифотонов достигает значения $R_c \simeq 15$ кГц, что сравнимо с показателями для источников поляризационно-перепутанных пар фотонов при использовании такого же кристалла [16].

Третья глава диссертации была также посвящена приготовлению высоко-размерных бифотонных состояний, но на этот раз при использовании базиса мод Гаусса-Лагерра. Как и моды Гаусса-Эрмита, они являются решениями уравнения Гельмольца в параксиальном приближении, но уже не в декартовой, а в цилиндрической системе координат. Это позволяет разделить пространственные корреляции бифотонов на азимутальную и радиальную составляющие. Отказ от рассмотрения последней существенно упрощает задачу приготовления пространственно-перепутанных состояний света и сводит её к формализму ОУМ фотонов, носителями которого являются пучки в азимутальных модах Гаусса-Лагерра. Поскольку полная величина ОУМ сохраняется при коллинеарном режиме СПР [17], ОУМ-бифотоны стали одной из самых популярных реализаций пространственных кудитов.

Для проведения измерений использовалась та же экспериментальная схема, что и в прошлой главе, но длина периодически поляризованного кристалла была уменьшена до 15 мм. Путём оптимизации ширины пучка накачки был найден новый минимум числа азимутальных мод Шмидта $K_{az} = 2.0 \pm 0.1$ при усовершенствованном способе генерации детектирующих голограмм.

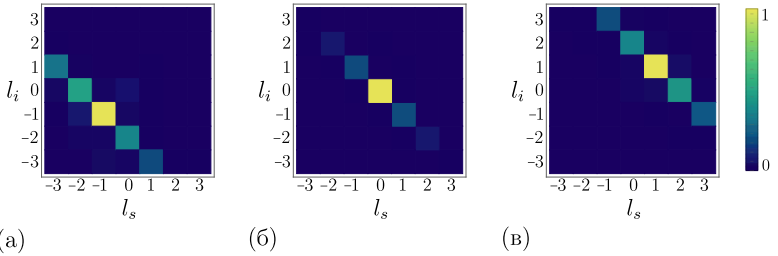


Рис. 6: Гистограммы распределений числа совпадений фотоотсчетов при детектировании пучков с ОУМ $l_i \hbar$ в сигнальном канале и $l_s \hbar$ в холостом при ОУМ фотонов накачки: (а) $-2\hbar$, (б) 0 , (в) $2\hbar$.

На рис. 6 представлены измеренные в эксперименте спектры азимутальных мод СПР при накачке кристалла пучками с ОУМ $-2\hbar$, 0 и $2\hbar$. Благодаря сохранению ОУМ при СПР, изначально антидиагональное распределение отсчетов $l_s = -l_i$ смещается вдоль главной диагонали, а его ширина (а значит степень перепутанности состояния) растет в полном согласии с результатами работы [18]. Полученные распределения показали высокую степень корреляции результатов эксперимента и численного расчета: квадраты коэффициентов Пирсона R^2 составили 0.975, 0.997 и 0.979 для случаев пучков накачки с ОУМ $-2\hbar$, 0 и $2\hbar$ соответственно.

При накачке кристалла суперпозицией рассмотренных пучков можно добиться равенства по величине трёх диагональных пиков $l_s = l_i$ в спектре азимутальных мод СПР с рис. 6. Такой вид кросс-корреляций позволяет приготовить пару максимально перепутанных кутритов с произвольными фазами θ_1 и θ_2

$$|\Psi^{(3)}\rangle = \frac{\exp(i\theta_1)|-1, -1\rangle + |0, 0\rangle + \exp(i\theta_2)|1, 1\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3)$$

где $|l\rangle$ – это вектора состояний фотонов с ОУМ $l\hbar$.

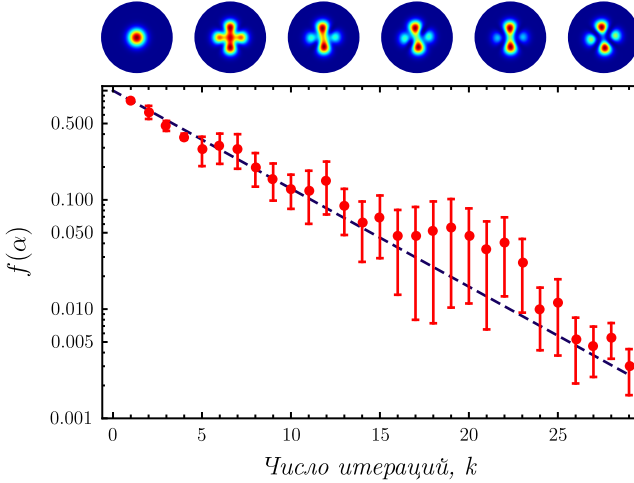


Рис. 7: Зависимость величины целевой функции $f(\alpha)$ от числа k итераций алгоритма оптимизации пучка накачки кристалла, пример эволюции его профиля интенсивности приведён сверху.

Чтобы оптимизировать коэффициенты суперпозиции пучков накачки точно и с учетом экспериментальных ошибок, их величины подбирались с помощью адаптивной процедуры. Для этого был использован алгоритм одновременно возмущаемой стохастической аппроксимации SPSA (англ. *simultaneous perturbation stochastic approximation*), предложенный в работе [19]. Данный алгоритм нуждается в проведении только двух измерений целевой функции на каждой итерации оптимизационного процесса в независимости от размерности рассматриваемой проблемы.

В качестве целевой функции $f(\alpha)$ была выбрана дисперсия измеренных оценок вероятностей $|\langle l_s, l_i | \Psi^{(3)}(\alpha) \rangle|^2$ для $l_s = l_i = -1, 0, 1$, где приготавливаемое состояние имеет вид $|\Psi^{(3)}(\alpha)\rangle = a_1(\alpha)|-1, -1\rangle + a_2(\alpha)|0, 0\rangle + a_3(\alpha)|1, 1\rangle$ и зависит от вектора α . Другими словами, процесс поиска максимально перепутанных кутритов состоял в уменьшении разницы между абсолютными величинами измеренных амплитуд $a_i(\alpha)$ и $1/\sqrt{3}$. На рис. 7 представлена зависимость величины целевой функции от числа итераций алгоритма, она была усреднена по результатам пяти различных запусков оптимизационного процесса, каждый из которых

начинался с гауссовой конфигурации пучка $\alpha = \{0, 1, 0\}$. Пример вида профилей интенсивности пучка накачки на каждой пятой итерации алгоритма представлен сверху.

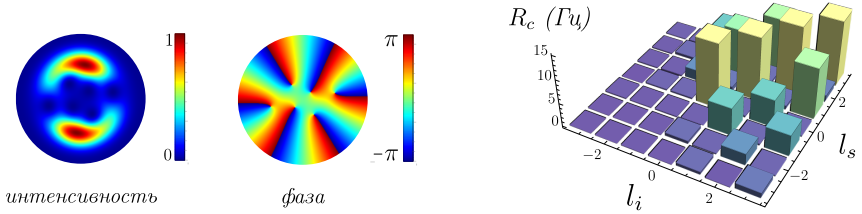


Рис. 8: Спектр азимутальных мод при приготовлении максимально перепутанных куквартов вместе с расчетными профилями интенсивности и фазы пучка накачки.

Та же самая процедура была проведена для приготовления максимально перепутанных куквартов, для этого кристалл накачивался суперпозицией четырех пучков с четными и положительными ОУМ. Получившийся профиль накачки представляет собой гауссово распределение поля с шестью фазовыми сингулярностями, известное по теоретической работе [20] как «vortex pancake». Внесение в накачку отрицательных ОУМ позволило увеличить размерность бифотонного состояния до пары куквинтов. Спектры азимутальных мод для обоих случаев приведены на рис. 8 и рис. 9

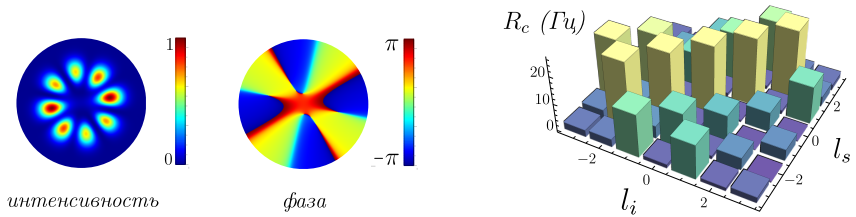


Рис. 9: Спектр азимутальных мод при приготовлении максимально перепутанных куквинтов вместе с расчетными профилями интенсивности и фазы пучка накачки.

Поскольку моды Гаусса-Лагерра аксиально симметричны, поворот пучка накачки относительно оси его распространения не влияет на абсолютные значения амплитуд вектора состояния пространственно-перепутанной пары, но изменяет его фазы. Таким образом, управление фазой состояний не уменьшает степень его перепутанности, что было доказано в эксперименте. На рис. 10 приведены восстановленные в ходе квантовой томографии фазы максимально перепутанных

кутритов при различных углах поворота пучка накачки. Здесь стоит отметить, что остальные известные методы генерации кудитов на основе перепутанных по ОУМ бифотонов не позволяют изменять их фазы произвольным образом для размерностей $d > 2$.

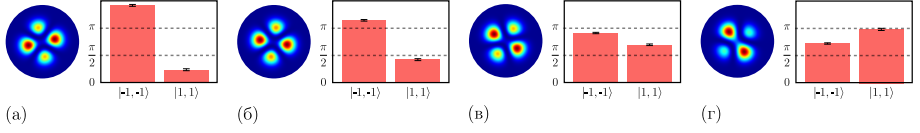


Рис. 10: Экспериментально восстановленные фазы кутритов для компонент $|−1, −1\rangle$ и $|1, 1\rangle$ при различных углах поворота пучка накачки: (а) $\theta = 0$, (б) $\theta = \pi/8$, (в) $\theta = \pi/4$ и (г) $\theta = 3\pi/8$.

Как и в прошлой главе, для перепутанных кутритов была проведена проверка обобщенного неравенства Белла для систем размерности выше двойки [21]. Экспериментальное измеренное значение параметра Белла составило 2.56 ± 0.06 , что больше классического предела $I_3 = 2$, но ниже теоретической верхней границы $I_3 \approx 2.87$. Последнее связано с низкой наблюдаемой чистотой приготовленных состояний $\pi = 0.85 \pm 0.02$, что обусловлено несовершенством техники их детектирования.

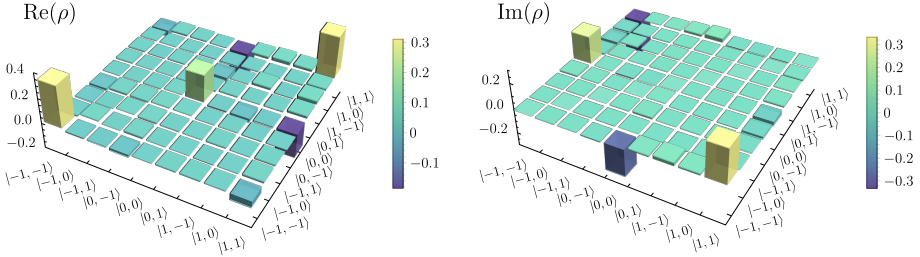


Рис. 11: Восстановленные в эксперименте действительная и мнимая части матрицы плотности ρ для состояния (4), нарушение неравенства Белла для которого максимально.

Граница $I_3 \approx 2.87$ может быть превышена для немаксимально перепутанных состояний. Так в случае кутритов максимальное нарушение обобщенного неравенства Белла $I_3 \approx 2.91$ наблюдается для состояния

$$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2 + \gamma^2} (|−1, −1\rangle + \gamma |0, 0\rangle + |1, 1\rangle), \quad (4)$$

где $\gamma \approx 0.79$ [22]. Оно также было приготовлено в эксперименте для демонстрации возможностей разработанной техники адаптивной подстройки пучка накачки. Это позволило увеличить белловский параметр до значения $I_3 = 2.61 \pm 0.05$. Восстановленная в ходе квантовой томографии матрица плотности такого состояния представлена на рис. 11.

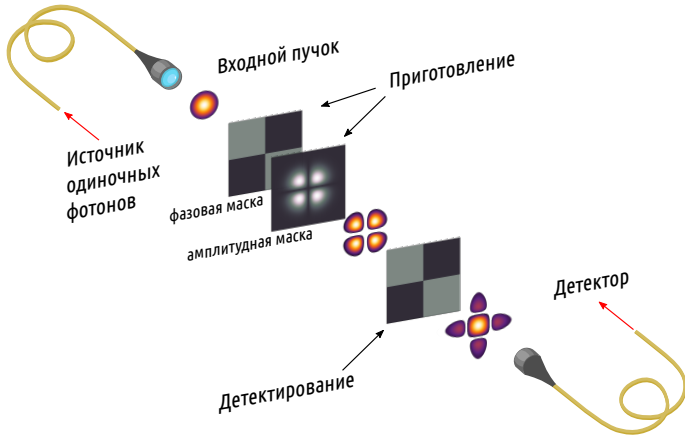


Рис. 12: Принципиальная схема эксперимента по приготовлению и детектированию фотонов в режиме Гаусса-Эрмита HG_{11} : амплитудная модуляция присутствует только на фазовой голограмме для приготовления пространственных состояний фотонов.

Как видно из представленных глав работы, использование пространственных степеней свободы фотонов сопряжено с рядом трудностей как при приготовлении квантовых состояний на их основе, так и при детектировании. Эти проблемы вызваны абберациями в оптических путях, а также систематическими ошибками при использовании фазовых голограмм: их неидеальным сопряжением с модами волокон, конечным разрешением матрицы жидкокристаллического модулятора и прочим.

В общем случае измерения характеризуются набором операторов $\{\mathbb{M}_\alpha\}$, где индекс α соответствует разным конфигурациям экспериментальной установки. Согласно правилу Борна, вероятность наблюдения исхода γ при конфигурации установки α для матрицы плотности ρ составляет

$$\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\rho), \quad (5)$$

где операторы $M_{\alpha\gamma} \in \mathbb{M}_\alpha$ удовлетворяют условию $\sum_\gamma M_{\alpha\gamma} = \mathbb{I}$ и известны как POVM (от англ. Positive Operator-Valued Measure). Для правильного анализа результатов эксперимента необходимо строгое соответствие матриц $\{M_{\alpha\gamma}\}$ и реальных измерений, что на практике осложняется систематическими ошибками. Их можно интерпретировать как неизвестный процесс $\mathcal{M}$ над операторами $\{M_{\alpha\gamma}\}$. Тогда полученные в эксперименте оценки вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho}) = \text{Tr}(\tilde{M}_{\alpha\gamma}\tilde{\rho})$ будут отличаться от идеальных из выражения (5) из-за преобразования POVM-операторов вида $\tilde{M}_{\alpha\gamma} = \mathcal{M}(M_{\alpha\gamma})$.

Четвёртая глава была посвящена решению проблемы установления соответствия экспериментальной оценки вероятности $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho}) \leftrightarrow \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho)$ теоретической с помощью методов машинного обучения, а именно глубокой искусственной нейронной сети. Принципиальная схема эксперимента приведена на рис. 12.

Для приготовления произвольных пространственных состояний света использовался источник одиночных фотонов, мода которого фильтровалась с помощью одномодового волокна. Затем гауссов пучок на его выходе преобразовывался с помощью как фазовой, так и амплитудной масок. Детектирование получившегося состояния производилось с применением только фазовой модуляции, что сильно снижало качество реализуемых проективных измерений, но в то же время значительно уменьшало потери голограмм на отражение. В предположении, что процесс приготовления состояний близок к идеальному, предложенная схема эксперимента позволяет откалибровать получившийся «детектор пространственных мод», протестировав на нём алгоритмы машинного обучения.

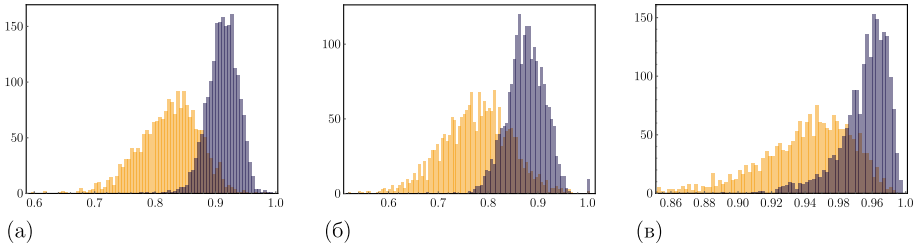


Рис. 13: Результат восстановления тестовых состояний при отсутствии амплитудной модуляции на детектирующей голограмме. (а) Фиделити между экспериментально восстановленными состояниями и идеальными $F = \langle \psi^i | \hat{\rho}_{(raw/nn)}^i | \psi^i \rangle$, найденные из необработанных данных (оранжевые столбцы) и после обработки данных нейронной сетью (синие столбцы). (б) Аналогичные результаты для величин чистоты восстановленных состояний. (в) Фиделити для состояний, восстановленных как чистые.

Для корректировки измеренных в эксперименте вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}(\gamma|\alpha, \tilde{\rho})$ состояний размерности $d = 6$ была разработана нейронная сеть с входным и выходным слоями из $d^2 = 36$ нейронов. Они были связаны двумя скрытыми слоями из $N_1 = 400$ нейронов в первом слое и $N_2 = 200$ нейронов во втором.

С целью тренировки и проверки нейронной сети был приготовлен набор данных для N чистых состояний, которые были равномерно распределены по мере Хаара. Измерения над каждым из состояний производились с помощью набора POVM элементов числом d^2 , что позволило накопить массив данных из $d^2 \times N$ экспериментально измеренных частот отсчетов детектора, которые и подавались на входной слой сети. Процесс обучения на получившейся архитектуре заключается в минимизации целевой функции, в качестве которой было выбрано расстояние Кульбака-Лейблера между распределением предсказанных вероятностей $\{p_\gamma^i\}_{\gamma=1}^{d^2}$ на выходе нейронной сети и ожидаемых $\{\mathbb{P}_\gamma^i\}_{\gamma=1}^{d^2}$.

Набор данных для обучения состоял из результатов измерений для $N = 10500$ входных состояний и был случайным образом разделен на три части: тренировочную, валидационную и тестовую. Первая выборка использовалась для тренировки модели и её составляли 7000 состояний, а вторая была необходима для того, чтобы определить оптимальный момент остановки обучения нейронной сети – в неё входило 1500 состояний (около 15% от полного числа). Обучение

останавливалось в случае, если ошибка не уменьшалась после 100 проходов всего массива данных через сеть в прямом и обратном направлениях – так называемых «эпох» (такой подход известен как «ранняя остановка» (англ. *early stopping*) [23]). Третья же выборка – «тестовая» – использовалась для проверки найденной модели на незнакомых для неё данных и включала в себя 2000 состояний (примерно 20% от общего набора).

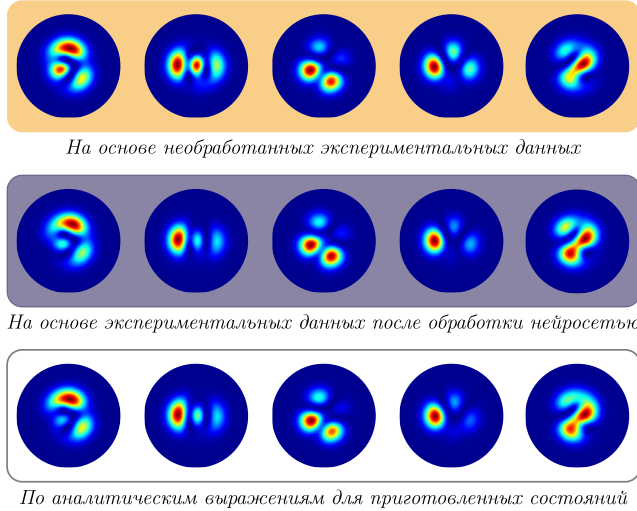


Рис. 14: Примеры восстановленных профилей интенсивности пучков.

Найденные по отсчетам детекторов оценки матриц плотности $\hat{\rho}_{(raw)}^i$ можно было сравнить с $\hat{\rho}_{(nn)}^i$, восстановленных из предсказанных нейросетью вероятностей p_γ . Гистограммы для фиделити между $\hat{\rho}_{(raw)}^i$ и $\hat{\rho}_{(nn)}^i$ и приготовленным тестовыми состояниями $|\psi^i\rangle$ представлены на рис. 13(а): из них видно, что средняя величина фиделити для необработанных данных $F_{(raw)} = 0.82 \pm 0.05$ заметно ниже, чем аналогичная $F_{(nn)} = 0.91 \pm 0.03$ для матриц плотности $\hat{\rho}_{(nn)}^i$. Что интересно, похожее поведение демонстрирует и величины средней чистоты состояний: они составили $\pi_{(raw)} = 0.78 \pm 0.07$ и $\pi_{(nn)} = 0.88 \pm 0.04$ (гистограммы на рис. 13(б)). Более того, если измеренные состояния восстанавливать как чистые (путем соответствующей параметризации их матриц плотностей), то изначально довольно высокие фиделити $F_{(raw)} = 0.94 \pm 0.03$ вырастают до значений $F_{(nn)} = 0.98 \pm 0.02$ (гистограммы на рис. 13(в)). Для наглядности в последнем случае были восстановлены профили интенсивностей пучков, несколько из них представлены вместе с распределениями для $|\psi^i\rangle$ на рис. 14.

Таким образом, результаты томографии при наличии потерь оказались неотличимы от результатов без потерь в пределах ошибки, поскольку при амплитудной модуляции детектирующих масок значения средних фиделити для 2000

случайных состояний оказываются равны 0.93 ± 0.03 при восстановлении состояний как смешанных и 0.97 ± 0.02 при восстановлении состояний как чистых. Средняя частота фотоотсчётов при этом падает в 6.6. раз.

Заключение

1. Экспериментально реализован режим СПР с пространственным числом Шмидта $K = 1.74 \pm 0.08$.
2. Произведено приготовление максимально перепутанных пар кудитов на основе пространственных степеней свободы бифотонов размерностей $d = 4, 9, 16$ и 25 путем оптимизации углового спектра накачки при СПР с применением алгоритма одновременно возмущаемой стохастической аппроксимации.
3. Продемонстрирован контроль над амплитудами и фазами максимально перепутанных кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$ за счет управления угловым спектром накачки при СПР.
4. Произведена полная квантовая томография максимально перепутанных кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$ в подпространстве размерности $d = 36$. Продемонстрировано отсутствие необходимости в их постселекции.
5. Произведена экспериментальная проверка нарушения неравенства типа Белла для кудитов размерностей $d = 4$ и $d = 9$. Измеренные параметры Белла I_d составили 2.81 ± 0.05 и 2.56 ± 0.06 соответственно.
6. С помощью искусственной нейронной сети было уменьшено влияние систематических ошибок измерений на результаты квантовой томографии пространственных состояний одиночных фотонов размерности $d = 6$, что привело к увеличению величины средней фиделити для 2000 тестовых состояний на $\approx 11\%$.
7. Обработка измеренных данных с помощью искусственной нейронной сети позволила сохранить высокую фиделити восстановленных пространственных состояний одиночных фотонов размерности $d = 6$ при уменьшении потерь при их детектировании в 6.6 раз.

Литература

- [1] Bechmann-Pasquinucci H, Tittel Wolfgang. Quantum cryptography using larger alphabets // *Physical Review A*. — 2000. — Vol. 61, no. 6. — P. 062308.
- [2] Quantum key distribution with higher-order alphabets using spatially encoded qudits / Walborn SP, Lemelle DS, Almeida MP, and Ribeiro PH Souto // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 96, no. 9. — P. 090501.
- [3] Security of quantum key distribution using d-level systems / Cerf Nicolas J, Bourennane Mohamed, Karlsson Anders, and Gisin Nicolas // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 88, no. 12. — P. 127902.
- [4] Bell John S. On the einstein podolsky rosen paradox // *Physics Physique Fizika*. — 1964. — Vol. 1, no. 3. — P. 195.
- [5] Violations of local realism by two entangled N-dimensional systems are stronger than for two qubits / Kaszlikowski Dagomir, Gnaciński Piotr, Żukowski Marek, Miklaszewski Wiesław, and Zeilinger Anton // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 85, no. 21. — P. 4418.
- [6] Barrett Jonathan, Hardy Lucien, Kent Adrian. No signaling and quantum key distribution // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95, no. 1. — P. 010503.
- [7] Vazirani Umesh, Vidick Thomas. Fully device-independent quantum key distribution // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 113, no. 14. — P. 140501.
- [8] Concentrating partial entanglement by local operations / Bennett Charles H, Bernstein Herbert J, Popescu Sandu, and Schumacher Benjamin // *Physical Review A*. — 1996. — Vol. 53, no. 4. — P. 2046.
- [9] Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violations of generalized Bell inequalities / Dada Adetunmise C, Leach Jonathan, Buller Gerald S, Padgett Miles J, and Andersson Erika // *Nature Physics*. — 2011. — Vol. 7, no. 9. — P. 677.
- [10] Encoding amplitude information onto phase-only filters / Davis Jeffrey A, Cottrell Don M, Campos Juan, Yzuel María J, and Moreno Ignacio // *Applied Optics*. — 1999. — Vol. 38, no. 23. — P. 5004–5013.
- [11] Vortex knots in light / Leach Jonathan, Dennis Mark R, Courtial Johannes, and Padgett Miles J // *New Journal of Physics*. — 2005. — Vol. 7, no. 1. — P. 55.
- [12] Spatial Schmidt modes generated in parametric down-conversion / Miatto Filippo M, Pires H Di Lorenzo, Barnett Stephen M, and van Exter Martin P // *The European Physical Journal D*. — 2012. — Vol. 66, no. 10. — P. 263.

- [13] Proposed experiment to test local hidden-variable theories / Clauser John F, Horne Michael A, Shimony Abner, and Holt Richard A // *Physical Review Letters*. — 1969. — Vol. 23, no. 15. — P. 880.
- [14] Precise quantum tomography of photon pairs with entangled orbital angular momentum / Jack B, Leach J, Ritsch H, Barnett SM, Padgett MJ, and Franke-Arnold S // *New Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 11, no. 10. — P. 103024.
- [15] Tomography of the quantum state of photons entangled in high dimensions / Agnew Megan, Leach Jonathan, McLaren Melanie, Roux F Stef, and Boyd Robert W // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 84, no. 6. — P. 062101.
- [16] A wavelength-tunable fiber-coupled source of narrowband entangled photons / Fedrizzi Alessandro, Herbst Thomas, Poppe Andreas, Jennewein Thomas, and Zeilinger Anton // *Optics Express*. — 2007. — Vol. 15, no. 23. — P. 15377–15386.
- [17] Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / Mair Alois, Vaziri Alipasha, Weihs Gregor, and Zeilinger Anton // *Nature*. — 2001. — Vol. 412, no. 6844. — P. 313.
- [18] Observation of quantum recoherence of photons by spatial propagation / Bouchard Frédéric, Harris Jérémie, Mand Harjaspreet, Bent Nicolas, Santamato Enrico, Boyd Robert W, and Karimi Ebrahim // *Scientific Reports*. — 2015. — Vol. 5. — P. 15330.
- [19] Spall James C. Implementation of the simultaneous perturbation algorithm for stochastic optimization // *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*. — 1998. — Vol. 34, no. 3. — P. 817–823.
- [20] Preparation of engineered two-photon entangled states for multidimensional quantum information / Torres Juan P, Deyanova Yana, Torner Lluís, and Molina-Terriza Gabriel // *Physical Review A*. — 2003. — Vol. 67, no. 5. — P. 052313.
- [21] Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems / Collins Daniel, Gisin Nicolas, Linden Noah, Massar Serge, and Popescu Sandu // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 88, no. 4. — P. 040404.
- [22] Quantum nonlocality in two three-level systems / Acin Antonio, Durt Thomas, Gisin Nicolas, and Latorre José I // *Physical Review A*. — 2002. — Vol. 65, no. 5. — P. 052325.
- [23] Prechelt Lutz. Early stopping-but when? // *Neural Networks: Tricks of the trade*. — Springer, 1998. — P. 55–69.