

Принципы описания геометрии потенциального магнитного поля вблизи нулевых точек 1-го, 2-го и высших порядков

Лукашенко А.Т.¹, Веселовский И.С.^{1,2}

¹НИИФ МГУ, ²ИКИ РАН

Описание нулевых точек магнитного поля порядка выше 1-го может быть упрощено за счёт: 1) выбора системы координат; 2) нахождения таких линий поля, на которых вектор магнитного поля **B** направлен вдоль радиус-вектора или обращается в нуль (реперов). Рассмотрим это на примере потенциального поля. В данном случае вблизи наиболее типичной (невыврожденной) нулевой точки 1-го порядка имеется 6 ненулевых реперов, составляющих три взаимно перпендикулярные прямые. Вблизи наиболее типичной нулевой точки 2-го порядка — до 14 реперов, которые также ненулевые и могут иметь различное взаимное расположение в пространстве. Наличие проходящих через нулевую точку нулевых линий (возможна одна в 1-м порядке, т.н. *D*-нуль, и до трёх — во 2-м) означает вырождение. В таких случаях нужно принимать во внимание влияние нелинейности следующего порядка. Возможно также и чисто геометрическое вырождение (появление дополнительных симметрий)

Потенциальное магнитное поле:
B = ∇*U*,
где Δ*U* = 0

Разложение в ряд Тейлора вблизи нулевой точки (где **B** = 0):
$$U = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \dots$$

R = (x,y,z)^T — радиус-вектор
x = x₁, y = x₂, z = x₃
i,j,k = 1,2,3

Классификация нулевых точек потенциального поля 1-го порядка

R = 0: *M* = Hess *U* (матрица вторых производных)
λ_i (*i* = 1,2,3) — собственные значения *M*

Нулевые точки 1-го порядка

$\lambda_i \neq 0$ и различны (*i* = 1,2,3)
Невырожд. нулевая точка

$\lambda_1 < 0$ (*i* = 1,2), $\lambda_3 > 0$
тип A (− − +)

$\lambda_1 > 0$ (*i* = 1,2), $\lambda_3 < 0$
тип B (+ + −)

$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = 0$
Трансляционная симметрия

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$
Аксиальная симметрия

$\lambda < 0$
тип A (− − +)

$\lambda > 0$
тип B (+ + −)

Подробнее (как о потенциальном случае, так и о непотенциальном) см.:
Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R. The structure of three-dimensional magnetic neutral points // *Phys. Plasmas*. V. 3. № 3. P. 759–770. 1996

Нули 2-го и высших порядков потенциального поля: принципы описания

Система координат и базисные функции

Нуль порядка *p*: для описания нужно 2*p* + 3 сферических функций или однородных гармонических полинома (ОГП) порядка *n* = *p* + 1. Будем использовать в качестве базиса ОГП, представляющих собой перенормированные шаровые функции

Как уменьшить число базисных функций и упростить задачу?

Подходящий выбор системы координат:

- «Теорема о причёсывании ежа» → существует как минимум одна проходящая через нулевую точку прямая, на которой вектор поля **B** направлен вдоль радиус-вектора **R** или обращается в нуль. Выбор оси Z системы координат вдоль такого направления → нужно 2*n* − 1 базисных функций: их список для низших порядков см. в табл. 1
- Поворот системы координат ⇒ 2*n* − 2 базисных функций: одна из сферических гармоник с *m* ≥ 1 (*P_n^(m)*) — присоединённые функции Лежандра) может быть исключена
- Масштабирование ⇒ нужно 2*n* − 2 базисных функций с 2*n* − 3 коэффициентами

Таблица 1

Обозн.	Декартовы координаты	Цилиндрические координаты (ρ,φ,z)	Сферические координаты (r,θ,φ)
<i>V₁⁰</i>	<i>z</i>	<i>z</i>	<i>r</i> cos θ
<i>V₂⁰</i>	$\frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2)$	$\frac{1}{2}(2z^2 - \rho^2)$	<i>r</i> ² <i>P₂⁽⁰⁾</i> (cos θ)
<i>V₂^{1,1}</i>	$\frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{\rho^2}{2} \cos 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos 2\varphi$
<i>V₂^{1,2}</i>	<i>xy</i>	$\frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \sin 2\varphi$
<i>V₃⁰</i>	$\frac{1}{6}[2z^3 - 3z(x^2 + y^2)]$	$\frac{1}{6}(2z^3 - 3\rho^2 z)$	$\frac{r^3}{3} P_3^{(0)}(\cos \theta)$
<i>V₃^{1,1}</i>	$z \frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{\rho^2 z}{2} \cos 2\varphi$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos 2\varphi$
<i>V₃^{1,2}</i>	<i>xyz</i>	$\frac{\rho^2 z}{2} \sin 2\varphi$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cdot \sin 2\varphi$
<i>V₃^{2,1}</i>	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(x^3 - 3xy^2)$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\rho^3 \cos 3\varphi$	$\frac{1}{45\sqrt{2}}r^3 P_3^{(3)}(\cos \theta) \cdot \cos 3\varphi$
<i>V₃^{2,2}</i>	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(3x^2 y - y^3)$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\rho^3 \sin 3\varphi$	$\frac{1}{45\sqrt{2}}r^3 P_3^{(3)}(\cos \theta) \cdot \sin 3\varphi$

Нормировка выбрана таким образом, что следующие потенциалы дают вблизи нулевых точек одинаковые с точностью до поворота в пространстве (∞) системы силовых линий:

$$V_2^0 + V_2^{1,j} \propto 2V_2^{1,k}$$
$$V_3^0 + V_3^{1,j} \propto \sqrt{2}V_3^{2,k}$$
$$V_3^0 + V_3^{2,j} \propto \sqrt{3}V_3^{1,k}$$
$$V_3^0 + 2V_3^{1,2} + V_3^{2,1} + V_3^{2,2} \propto \sqrt{5}V_3^0$$

(*j,k* = 1,2)

$B_i = \frac{1}{p!} T_{i_1 \dots i_p} R_{i_1} \dots R_{i_p}$
$$T_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}$$
$$B_i = \lambda |\mathbf{R}|^{p-1} R_i$$

$$(1)$$

Репер — исходящий из нулевой точки луч, такой что **B** ∥ **R** или **B** = 0

R — радиус-вектор

U — потенциал

p — порядок нуля

λ — собственное значение

Базисные функции для нулей 2-го порядка: системы силовых линий

V₃⁰

«шип» + две конические Σ-поверхности

V₃^{1,j},
j = 1, 2

8 «полушипов» + 3 взаимно перпендикулярных нулевых прямых

V₃^{2,j},
j = 1, 2

двумерные нулевые точки 2-го порядка с 6-ю асимптотами на нулевой прямой

Нули 2-го порядка, описываемые парными комбинациями базисных функций

$$U_I = V_3^0 + K V_3^{1,2}$$
$$U_{II} = V_3^0 + \frac{K}{\sqrt{2}} (V_3^{2,1} + V_3^{2,2})$$
$$U_{III} = V_3^{1,2} + K V_3^{2,1}, \quad U_{IV} = V_3^{1,2} + K V_3^{2,2}$$

K — произвольный коэффициент

Табл. 2

Число реперов											
I											
Коэф.	<i>K</i> < −2	−2 ≤ <i>K</i> < −1	<i>K</i> = −1	−1 < <i>K</i> < 0	<i>K</i> = 0	0 < <i>K</i> < 1	<i>K</i> = 1	0 < <i>K</i> ≤ 2	<i>K</i> > 2		
B ∥ R	10	6	6	10	∞	10	6	6	10		
B = 0	4	4	2	—	—	—	2	4	4		
II											
Коэф.	<i>K</i> < −1	<i>K</i> = −1	−1 < <i>K</i> < 0	<i>K</i> = 0	0 < <i>K</i> < 1	<i>K</i> = 1	<i>K</i> > 1				
B ∥ R	14	8	14	∞	14	8	14				
B = 0	—	6	—	—	—	6	—				
III, IV											
Коэф.	<i>K</i> ≤ −√2/3	−√2/3 < <i>K</i> < 0	<i>K</i> = 0	0 < <i>K</i> < √2/3	<i>K</i> ≥ √2/3						
B ∥ R	6	10	8	10	6						
B = 0	4	4	6	4	4						

Случай I. Система линий поля при разных значениях параметра

K: 0 1.30 0.15 2.00 0.25 2.80 0.50 4.00 1.00 5.50

Σ-поверхности при значениях параметра *K* = 0.25, 2.80

Нули 2-го порядка: общий случай

Потенциал и ур. (1) можно записать в виде:

$$U = V_3^0 + K V_3^{1,2} + F V_3^{2,1} + G V_3^{2,2}$$
$$\begin{pmatrix} -xz + Kyz + F \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}Gxy \\ -yz + Kxz - \sqrt{2}Fxy + G \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + Kxy \end{pmatrix} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

K, *F*, *G* — произвольные коэффициенты

Уравнения реперов:

$$y = ux$$
$$z = vx,$$

где *u* — корни полиномиального уравнения

$$f(u) = (2F^2 + KFG - K^2)u^6 + (KF^2 - 3KG^2 - 12FG + 2K^3)u^5 + (18G^2 - 12F^2 - 5KFG + K^2)u^4 + 2(20FG - KF^2 - KG^2 - 2K^3)u^3 + (18F^2 - 12G^2 - 5KFG + K^2)u^2 + (KG^2 - 3KF^2 - 12FG + 2K^3)u + 2G^2 + KFG - K^2 = 0,$$
$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}K(1 - u^2)}$$

Если вклад аксиально-симметричной базисной функции равен нулю, *K* = 1, *u* — корни полиномиального уравнения:

$$g(u) = FG u^6 + (F^2 - 3G^2 + 2)u^5 - 5FG u^4 - 2(G^2 + F^2 + 2)u^3 - 5FG u^2 + (G^2 - 3F^2 + 2)u + FG = 0,$$
$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}(1 - u^2)}$$

Если у уравнения *f*(*u*) = 0 (или, соответственно *g*(*u*) = 0) 6 корней, то, в совокупностью с полюсами оси Z имеется 14 реперов

Lukashenko A.T., Veselovsky I.S. General Principles of Describing Second- and Higher-Order Null Points of a Potential Magnetic Field in 3D // *Geomagnetism and Aeronomy*. Т. 55. № 8. P. 1152–1158. 2015