

ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Роопа Михаила Дмитриевича
на тему «Критические явления в решениях нелинейных
дифференциальных уравнений механики сплошных сред»
по специальности 01.01.03 — математическая физика

Рецензируемая диссертационная работа посвящена математическим методам изучения критических явлений, возникающих в решениях дифференциальных уравнений механики сплошных сред, а также лежандровых и лагранжевых особенности моделей термодинамических состояний сред.

Актуальность темы. Фундаментальные уравнения гидро- и газодинамики описывают важные природные и антропогенные процессы, поэтому изучение структуры решений этих уравнений, помимо теоретического интереса, имеет важное значение в различных прикладных областях. При описании газодинамических процессов существенную роль играют термодинамические законы. Основные результаты диссертации сформулированы для термодинамических моделей общего вида, что позволяет исследовать разнообразные задачи газовой динамики, в том числе и критические процессы (например, фазовые переходы). Поскольку естественный математический аппарат термодинамики базируется на контактной и симплектической геометрии, весьма эффективным при исследовании уравнений газовой динамики является применение геометрического подхода, который и был успешно использован автором диссертации. В частности, геометрические методы позволили автору решить ряд оптимизационных задач для равновесных систем.

Научная новизна и практическая значимость исследований.

В работе при помощи различных современных геометрических методов исследован ряд актуальных задач газовой динамики. Так, автором решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой, и построено ее решение в квадратурах. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы. Найдены новые классы оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов. Впервые постановка задачи оптимального управления для уравнений газовой динамики основана на использовании римановых структур на термодинамических лагранжевых многообразиях. Автором исследованы симметрические формы 4-го порядка для термодинамических лагранжевых многообразий простейших газовых систем (идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса). Решена в общем виде задача стационарной фильтрации газов в пористых средах и для полученных решений найдены области фазовых переходов. Исследована задача истекания газа из точечного источника с учетом фазовых переходов. Изучены свойства уравнения нестационарной фильтрации и построены некоторые новые точные решения этого уравнения. Получен новый класс многозначных точных решений уравнений Эйлера. На основе новых точных многозначных и разрывных решений уравнений Эйлера проанализировано взаимодействие ударных волн и фазовых переходов.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.

Обоснованность и достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена применением современного математического аппарата: методов контактной, симплектической и римановой геометрии, теории лежандровых и лагранжевых многообразий, аналитических и геометрических методов теории дифференциальных уравнений, теории симметрий и дифференциальных инвариантов. Сравнение результатов, полученных автором диссертации, с ранее известными результатами подтверждает их корректность.

Рекомендации по использованию результатов диссертации.

Полученные в работе результаты представляют интерес как для физиков, занимающихся проблемами гидродинамики и газовой динамики, включая задачи о фазовых переходах, так и для математиков, работающих в области нелинейных дифференциальных уравнений, динамических систем, оптимального управления и применяющих для исследования геометрические методы. Результаты, касающиеся построения решений с особенностями, полезны при разработке численных методов для нелинейных уравнений. Кроме того, ряд результатов может быть использован в инженерных приложениях, в частности, при разработке нефтяных и газовых месторождений, для управления особенностями течения жидкостей и газов по трубам, для прогнозирования погодных явлений. Классы точных решений некоторых нелинейных моделей, полученные в работе, могут служить тестовыми задачами для отладки разностных схем.

Краткая характеристика содержания диссертации. Диссертация М. Д. Роопа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 101 наименование. Объем диссертации составляет 122 страницы.

Во **введении** дан краткий исторический обзор исследований, связанных с темой диссертации, проведено обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и основные задачи работы, охарактеризована степень научной новизны полученных результатов, кратко описаны методология и методы исследований и перечислены положения, выносимые на защиту. Приведена информация об апробации работы на научных семинарах и конференциях и об основных публикациях автора по теме диссертации.

В **главе 1** приведены подготовительные сведения из термодинамики, причем особый акцент сделан на ее связи с теорией измерений. Этот подход естественным образом приводит к формулировке равновесной термодинамики на языке контактной и симплектической геометрии. Решена задача

оптимального управления термодинамическими процессами для идеального газа. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой, и построено ее решение в квадратурах. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы. Для различных термодинамических моделей газов (идеального газа, газа Ван-дер-Ваальса, газа Пенга–Робинсона, газа Редлиха–Квонга) исследованы термодинамические лагранжевы и лежандровы многообразия. Получены области фазовых переходов, найдены особенности проекции термодинамических лагранжевых и лежандровых многообразий на пространство интенсивных переменных.

В главе 2 решена задача стационарной фильтрации реальных газов в трехмерном пространстве для произвольной модели термодинамического состояния путем их редукции к уравнению Лапласа. Приведены примеры решений для конкретных термодинамических моделей. Проведен анализ критических явлений, возникающих в фильтрационных потоках: особенностей найденных решений и фазовых переходов.

В главе 3 исследуются нестационарные течения газов в пористых средах. Найдены некоторые классы точных решений в нестационарной фильтрации, разрушающихся за конечное время, и проанализированы фазовые переходы на полученных решениях. Построены области фазовых переходов в пространстве—времени для двух типов процессов: адиабатического и изоэнтальпического. Основной аппарат, используемый в данной главе, — теория конечномерных динамик.

В главе 4 решена задача адиабатического истечения реальных газов из точечного источника заданной интенсивности. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера. Проведен анализ фазовых переходов на полученных решениях, установлены области существования решения, исследовано асимптотическое поведение решений на бесконечности.

В главе 5 найдены новые классы точных многозначных решений нестационарных одномерных уравнений Эйлера для произвольных моделей термодинамического состояния среды, построены разрывные решения, соответствующие ударным волнам, проанализированы особенности проекций решений на пространство независимых переменных (каустики), найдены области возникновения ударных волн и фазовых переходов.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

Диссертация М. Д. Роопа является законченным научным исследованием, в котором приведены решения ряда актуальных задач, относящихся с физической точки зрения к гидродинамике и газовой динамике, а с математической — к геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений, что делает работу интересной и полезной как для физиков, так и для математиков.

Замечания по работе.

1. Формулировка теоремы 1 на с. 20-21 довольно расплывчата, поскольку не определены некоторые используемые в ней обозначения. Смысл обозначений раскрывается в процессе доказательства, однако упоминание множителей Лагранжа в формулировке теоремы представляется желательным.
2. Требуют пояснения следующие верные, но не очевидные утверждения на с. 28: «области положительной определенности квадратичной дифференциальной формы соответствуют фазам среды» (в каком смысле понимается соответствие?) и «условие того, что лагранжево многообразие является римановым многообразием относительно указанной формы, есть условие термодинамической устойчивости».
3. Диаграммы на с. 60, иллюстрирующие распределение фаз и поле скоростей (чего?) для газа Ван-дер-Ваальса, мало связаны с иллюстрируемым текстом, поскольку в тексте не объяснены обозначения, использованные

на диаграммах. Аналогичное замечание касается диаграмм на с. 72-73, 76, 83 и др.

4. В разделе 4.2 (с. 84), посвященном исследованию критических явлений в вязких средах, описываемых уравнением Навье—Стокса, отсутствует запись самого этого уравнения для рассматриваемой задачи, что затрудняет понимание текста.
5. Замечание редакционного характера: в списке литературы имеются ссылки на переводы книг, оригиналы которых были опубликованы на русском языке (например, [34] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов; [44-46] В. И. Арнольд, Математические методы классической механики; Особенности каустик и волновых фронтов; Теория катастроф; [47] Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец, Теория детонации и др.). Оправданным было бы указание на русскоязычные оригиналы упомянутых источников.

Указанные замечания не уменьшают значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.03 – математическая физика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Оформление диссертации выполнено согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Рооп Михаил Дмитриевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики
физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

Овчинников Алексей Витальевич

10 ноября 2021 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 939-10-33

e-mail: ovchinnikov@viniti.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена
диссертация: 01.01.03 — математическая физика.

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2,

Физический факультет ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

Тел.: +7 (495) 939-16-82 e-mail: info@physics.msu.ru

Подпись доцента кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Овчинникова Алексея Витальевича удостоверяю:

Ученый секретарь Ученого совета

физического факультета МГУ

профессор

В. А. Караваев

11 ноября 2021 г.