

**ОТЗЫВ**  
**официального оппонента**  
**о диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Роопа Михаила Дмитриевича**  
**на тему «Критические явления в решениях нелинейных**  
**дифференциальных уравнений механики сплошных сред»**  
**по специальности 01.01.03 — математическая физика**

В представленной на отзыв диссертации М.Д. Роопа исследуются критические явления в решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих течение и фильтрацию реальных газов. При этом под критическими явлениями понимаются как особенности самих решений (подобных хорошо известной градиентной катастрофе), так и фазовые переходы в газе. Эти критические явления исследуются методами теории лагранжевых и лежандровых особенностей.

**Актуальность темы.** Несмотря на многочисленные работы, в которых изучаются вопросы движения сплошных сред, на сегодняшний день до конца не ясна структура и свойства решений уравнений гидро- и газодинамики. В связи с этим, изучение нелинейных дифференциальных уравнений механики сплошных сред, в особенности разного рода критические и сингулярные свойства их решений, является актуальной задачей. Вместе с этим на сегодняшний день не выработан единый относительно различных термодинамических моделей подход решения задач газовой динамики. В представленной диссертации этот пробел отчасти заполняется, поскольку большинство результатов формулируется в общем виде по отношению к разным термодинамическим процессам и состояниям.

**Научная новизна и практическая значимость исследований.** Работа имеет теоретический характер. К наиболее заметным новым результатам, полученным в диссертации, следует отнести решение задачи оптимального

управления термодинамическими процессами в идеальном газе, получение новой области допустимых состояний для газа Ван дер Ваальса с помощью симметрических форм 4-го порядка, ранее не изучавшимися в контексте термодинамики. Также в работе найдены новые классы точных многозначных решений нестационарных уравнений Эйлера на прямой для произвольных термодинамических процессов.

**Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.**

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обоснована использованием строгих аналитических методов теории дифференциальных уравнений, контактной и симплектической геометрии, теории оптимального управления.

**Рекомендации по использованию результатов диссертации.**

Результаты диссертации могут оказаться полезными для математиков, работающих в области геометрической теории дифференциальных уравнений, теории особенностей, механики сплошных сред, оптимального управления, а также специалистам по теории фильтрации, физике критических явлений.

**Краткая характеристика основного содержания диссертации.**

Диссертация М. Д. Роопа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 101 наименование, в том числе 11 работ автора по теме представленной диссертации, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных WoS, Scopus, RSCI. Объем диссертации составляет 122 страницы.

Во **введении** дается обзор литературы по теме исследований, обоснована актуальность темы диссертации, новизна полученных результатов, сформулированы положения, выносимые на защиту. Также приводятся сведения об апробации работы на научных конференциях и список опубликованных работ по теме диссертации.

В **первой главе** исследуются лагранжевы и лежандровы подмногообразия термодинамических состояний в моделях реальных газов

Ван дер Ваальса, Пенга–Робинсона и Редлиха–Квонга. Предложено новое ограничение на реализуемость модели Ван дер Ваальса, которое является следствием положительности четвёртого центрального момента в статистическом распределении экстенсивных термодинамических величин. Установлены управляемость и интегрируемость задачи оптимального управления идеальным газом.

**Во второй главе** исследуется стационарная фильтрация реальных газов в однородных пористых средах, описываемая уравнением неразрывности и законом Дарси. Предложен метод решения задачи фильтрации для реального газа, все состояния которого принадлежат однопараметрическому термодинамическому процессу, основанный на следующем наблюдении. А именно, в этом случае рассматриваемая система из уравнения неразрывности и закона Дарси сводится к одному уравнению Лапласа на выделенный параметр термодинамического процесса, для которого найдена явная формула, содержащая зависимости коэффициентов проницаемости и вязкости от исходного параметра термодинамического процесса.

Этим методом во второй главе явно решена задача о стационарной фильтрации в бесконечной однородной среде с конечным числом источников и стоков (и нулевыми условиями на бесконечности). Полученные решения подробно исследованы для рассмотренных в первой главе моделей реальных газов Ван дер Ваальса, Пенга–Робинсона и Редлиха–Квонга при дополнительных предположениях о постоянстве удельной энтропии газа, а также коэффициентов проницаемости и вязкости.

**Третья глава** посвящена исследованию нестационарной фильтрации реальных газов при предположениях и допущениях, описанных во второй главе. В этом случае уравнение Лапласа заменяется на параболическое, для которого при любом термодинамическом процессе автор находит трёхпараметрическое семейство решений. Эти решения подробно исследованы для некоторых термодинамических процессов в модели Ван дер

Ваальса. Кроме того, ещё одно семейство точных решений найдено и исследовано для некоторых термодинамических процессов в идеальном газе.

**В четвёртой главе** для любого термодинамического процесса явно найдено стационарное течение газа во всём пространстве из одного изотропного точечного источника. Это течение является решением уравнений Эйлера и исследовано для некоторых термодинамических процессов в идеальном газе и газе Ван дер Ваальса. Для течений этих газов с вязкостью, описываемых уравнениями Навье–Стокса, получены асимптотические разложения для больших и малых интенсивностей источника.

**В пятой главе** исследуются нестационарные гомоэнтропийные решения уравнений Эйлера на прямой. Для этих решений удельная энтропия постоянна (т.е. не зависит ни от времени, ни от точки) и поэтому сохраняется вдоль потока, а течение является баротропным. В диссертации предложено новое двухпараметрическое семейство рациональных зависимостей давления от плотности, при которых задача Коши допускает явное решение. Если один из параметров обращается в нуль, то получается либо газ Чаплыгина (политропная зависимость с показателем 3), либо газ Бехерта–Станюковича (с показателем политропы -1) – интегрируемость уравнений в этих случаях хорошо известна. Если же оба параметра не обращаются в нуль, то предложенная зависимость не является политропной.

Кроме того, для произвольной зависимости давления от плотности найдены семейства точных решений уравнений Эйлера на прямой. Некоторые из этих решений многозначны, а их графики имеют сборки, в которых соответствующее физическое течение газа испытывает градиентную катастрофу. Такие сборки и сами решения подробно изучены для гомоэнтропийного течения идеального газа и газа Ван дер Ваальса.

**В заключении** перечислены основные результаты диссертации.

**Замечания по работе.** По работе имеются следующие замечания:

- 1) Доказательства теорем 4 и 5 (стр.26) изложены слишком коротко, читателю приходится самостоятельно проводить некоторые выкладки.
- 2) В формулировке теоремы 5 (стр.26) имеется опечатка – в ней речь должна идти о четвёртом моменте, а не о третьем.
- 3) В вычислении допустимой области для газа Ван дер Ваальса, приведённой на рисунке 1.7 (стр.50), пропущены некоторые выкладки, которые читателю приходится проводить самому.
- 4) В пунктах 3.1.1 (стр.71) и 3.1.2 (стр.72) явно не указано, какие именно модели газа в них рассматриваются.
- 5) В пунктах 4.1.1 (стр.81) и 4.1.2 (стр.82) явно не указано, какие именно термодинамические процессы в них рассматриваются.
- 6) Пункт 4.2 (стр.84) слишком короткий, что сильно затрудняет его понимание.
- 7) Доказательство важной теоремы 23 (стр.94) предшествует её формулировке, что затрудняет понимание – гораздо лучше, когда доказательство следует за формулировкой и отделено от остального текста.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.03 – «математическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Рооп Михаил Дмитриевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – «математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории динамических систем механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

**Богаевский Илья Александрович**

16 ноября 2021 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 939-43-89; e-mail: [ilya.bogaevsky@math.msu.ru](mailto:ilya.bogaevsky@math.msu.ru)

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Адрес места работы:

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, Главное здание, механико-математический факультет ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Тел.: +7 (495) 939-12-63, e-mail: [office@mech.math.msu.su](mailto:office@mech.math.msu.su)

Подпись профессора кафедры теории динамических систем механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» Богаевского Ильи Александровича удостоверяю: