ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Корчемкиной Татьяны Александровны

на тему: «Асимптотичсекие и качественные свойства решений дифференциальных уравнений с нелинейностями общего вида»
по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы диссертации. Диссертационная работа посвящена исследованию качественных и асимптотических свойств дифференциального уравнения второго порядка со знакопостоянным потенциалом общего вида, зависящим от независимой и фазовых переменных, умноженным на положительные степени модулей фазовых переменных, которое представляет собой довольно широкое обобщение классического уравнения Эмдена–Фаулера.

Задачи исследования качественного и асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений стали рассматриваться едва ли не одновременно с возникновением самой теории дифференциальных уравнений, вместе с тем интерес к этому её разделу не ослабевает и в настоящее время. Более того, за последние полвека в области качественной теории неавтономных дифференциальных уравнений получены значительные результаты и разработаны новые методы исследования, позволившие существенно обогатить арсенал её средств и расширить область применения. Свидетельством интереса к задачам качественного исследования поведения решений неавтономных дифференциальных уравнений служит и то обстоятельство, что ими активно занимаются практически во всех странах Евросоюза, Англии, Бразилии, Грузии, Сербии, США, Японии, России и многих других. Лидирующее положение в этой теории принадлежало советской школе, а в настоящее время далеко не последнее – российской и грузинской школам.

Сказанное подтверждает актуальность темы диссертации, непосредственно примыкающей к работам Р. Эмдена, Р. Фаулера, В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурии, Т. Кусано, В.М. Евтухова, И.В. Асташовой, Е. Манойлович, К.М. Дулиной и многих других математиков.

Содержание диссертации. Достоверность и новизна её результатов. Диссертация состоит из введения, трёх глав, содержащих десять параграфов, и заключения.

Во введении сформулирована основная задача, решаемая в диссертации, – получить полную качественную и асимптотическую классификацию решений уравнения

$$y'' = p(x, y, y')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\mathrm{sgn}(yy'), \tag{1}$$

где k_0 и k_1 – фиксированные положительные числа, а называемая потенциалом функция $p(x, u, v)$ вещественных переменных непрерывна по x и липшицева по u, v. Предполагается также, что потенциал знакоопределён, а в большей части работы (всюду, кроме § 1.1) – что он ограничен и отделён от нуля.

Задача классификации – центральная задача любой теории, и то, что эту задачу удалось решить для рассматриваемого – пусть даже и очень специального – типа уравнения, представляется достаточно неожиданным, даже при условии, что для несколько более частного уравнения – с одной степенной нелинейностью – такого рода классификация ранее была получена К.М. Дулиной.

В § 1.1 доказано, что все μ-решения (т.е. максимально продолженные решения, все точки которых – точки единственности) исследуемого уравнения исчерпываются разве что следующими пятью типами: постоянные, возрастающие положительные, возрастающие отрицательные, возрастающие не знакоопределённые, убывающие не знакоопределённые. Подчеркну, что изяществом формулировки эта теорема в существенном обязана понятию μ-решения – очень естественного понятия, хотя и введённого в обиход И.В. Асташовой совсем недавно. Сформулированная теорема ограничивает возможные типы поведения решений (точнее, μ-решений) изучаемого уравнения, но не утверждает, что все они реализуются.

Если существование у всякого рассматриваемого уравнения постоянных и строго монотонных не знакооопределённых решений очевидно, что с учётом одной теоремы И.В. Асташовой, описывающей точки неединственности решений уравнения (1), решает вопрос о μ-решениях, порождаемых указанными решениями, то существование у этих уравнений возрастающих знакоопределённых μ-решений нуждается в исследовании, которое и проводится в § 1.2 при дополнительном предположении ограниченности и отделённости от нуля потенциала. Возможные типы таких μ-решений для данного уравнения исчерпываются сингулярными решениями I рода и кнезеровскими решениями. Вопрос о существовании у уравнения (1) сингулярных решений I рода решает отмеченная выше теорема Асташовой: их наличие равносильно условию $k_0 + k_1 < 1$. Вопрос же о существовании кнезеровских решений у уравнения (1) решён в диссертации: они существуют, если и только если $k_0 + k_1 \geqslant 1$ и $k_1 < 2$. Особо отмечу достаточно нетривиально доказываемую теорему 1.9 этого параграфа диссертации.

В предположении ограниченности и отделённости от нуля потенциала уравнения (1) в § 1.3 и § 1.4 исследуется поведение соответственно его возрастающих и убывающих решений (и μ-решений).

В § 1.3 доказано, что у максимально продолженного решения задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) \geqslant 0$, $y'(x_0) > 0$ тогда и только тогда найдётся такое конечное значение $x^* > x_0$ независимой переменной, в левой полуокрестности которого производная решения стремится к бесконечности, когда $k_0 + k_1 > 1$; при этом в точке x^*, если $k_1 \leqslant 2$, решение имеет вертикальную асимптоту, а если $k_1 > 2$ – то предельное значение решения конечно. Кроме того, получена оценка положения правой границы x^* решения через величины x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$, нижнюю границу m потенциала и числа k_0, k_1. Аналогичные результаты получены и для конечной левой границы x_* максимально продолженного решения задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) \leqslant 0$, $y'(x_0) > 0$. В § 1.5 при $k_1 + k_2 > 1$ доказывается, что эти границы x^* и x_* непрерывно зависят от начальных данных соответствующих задач Коши.

В § 1.4 для убывающего μ-решение уравнения (1) при $0 < k_1 < 1$ доказано, что оно имеет конечные левую и правую границы, при этом производная решения при приближении к этим границам стремится к нулю, а при $k_1 \geqslant 1$ μ-решение определено на всей прямой и ограничено тогда и только тогда, когда $1 \leqslant k_1 < 2$; при $k_1 \geqslant 2$ оно неограничено как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$. В § 1.5 в случае $1 \leqslant k_1 < 2$ для убывающих μ-решений (ограниченных, как показано в § 1.4) доказано, что их точные верхняя и нижняя грани непрерывно зависят от начальных данных $y(x_0) \leqslant 0$, $y'(x_0) < 0$.

Если глава 1 диссертации посвящена качественному исследованию решений уравнения (1), то в главе 2 изучается асимптотическое поведение его решений вблизи границ области их определения. В §2.1 найдена асимптотика μ-решений, неограниченных вблизи границы области их определения, и их первых производных как в случае конечных границ, так и в случае бесконечных границ. В §2.2 установлена асимптотика вблизи границы области определения сингулярных решений I рода и кнезеровских решений и их первых производных, а в §2.3 – асимптотика первых производных μ-решений, имеющих при приближении к границе конечный ненулевой предел. При получении указанных асимптотик на потенциал налагаются дополнительные, иногда довольно жёсткие, требования. Отмечу также одно обстоятельство, установленное в диссертации. Как показано в главе 1, качественное поведение μ-решений уравнения (1) определяется тем, в какую из областей первого квадранта плоскости Ok_0k_1, задаваемых некоторыми из неравенств $k_0+k_1 < 1$, $k_1 < 1$, $1 < k_1 < 2$ и/или им противоположными неравенствами, попадает пара (k_0, k_1) показателей степеней нелинейности. Оказывается, если пара (k_0, k_1) принадлежит внутренности соответствующей области, то асимптотика изучаемого типа решений имеет степенной характер, а если границе соответствующей области – то экспоненциальный.

В третьей главе диссертации проведено сравнение результатов диссертации и известных результатов для вырождающегося уравнения (1) – с $k_1 = 0$ и отсутствующим множителем y' под знаком сигнума. Этот сравнительный анализ подкрепляется маловыразительными иллюстрирующими рисунками. Полученные в диссертации результаты позволили несколько дополнить результаты для вырождающегося уравнения, но в целом ничего необычного не обнаружилось: качественная и асимптотическая картины поведения решений вырождающегося уравнения получается из установленных в диссертации свойств уравнения (1) при формальной замене показателя k_1 нулём.

Все перечисленные выше результаты являются новыми и строго доказанными. Диссертация содержит все необходимые библиографические ссылки.

Автореферат полно и точно отражает содержание диссертации. Язык диссертации и автореферата хороший и математически грамотный.

Замечания. По диссертации могут быть сделаны следующие замечания:

— в названии диссертации, чтобы оно более точно отражало её содержание, следовало бы перед существительным «нелинейностями» добавить прилагательное «степенными»;

– в уравнении (0.1) под знаком сигнума вместо верхнего индекса «(n)» должен стоять «$(n-1)$» (конечно, это не ошибка, но в противном случае не приходится говорить, что рассматриваемое в диссертации уравнение – частный случай уравнения (0.1));

– в тексте диссертации используются названия «black hole» и «white hole» для соответствующих свойств решений, их следовало бы заменить русскоязычными аналогами;

– в п. 1 (с. 10) пропущены постоянные решения, а в следствии 0.1 (с. 13) и следствии 1.1 (с. 29) следует добавить «непостоянные решения»;

– в определениях 0.2–0.4 (с. 14) вместо глагола «является» нужен «называется»;

– в замечании 1.1 (с. 25) вместо $y(-x)$ нужно $-y(x)$; кроме того, в нём и в замечании 1.2 при вычислении имеется некоторая путаница в знаках, но в итоге вывод всё-таки оказывается верным;

– в теоремах 1.1–1.4 (с. 26–27) вместо «нуля (нулю)» должен быть «x_0»;

– в доказательстве теоремы 1.5 в предпоследнем предложении вместо «$\mathbb{R}_{+-}$» нужен «$\mathbb{R}_{--}$», а в предложении перед ним вместо «$\mathbb{R}_{--}$» нужен «$\mathbb{R}_{+-}$»;

в начале третьего абзаца доказательства теоремы 1.8 (с. 33) вместо $k_1 < 2$ должно быть $k_1 > 2$;

– в замечания 1.6 и 1.7 (с. 42) нужно добавить ещё, что $k_1 < 2$;

– в формулировках теорем 1.22 и 1.23 вместо $k_1 \in (0, 2)$ должно быть $k_1 \in [1, 2)$;

– на с. 73 используется не определённый в тексте символ Г.

Все сделанные выше по тексту диссертации замечания относятся к недостаткам, имеющим характер описок, при этом правильное содержание легко восстанавливается из контекста. Поэтому они ни в коей степени не умаляют значимости диссертационного исследования.

Диссертация отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода.

Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определяемым пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

Заключение. Считаю, что соискатель Корчемкина Татьяна Александровна несомненно заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси

Барабанов Евгений Александрович ____________ (подпись)

«17» «декабря» 2021г.

Контактные данные: тел.: +375(017) 284-19-60, e-mail: bar@im.bas-net.by
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и математическая теория управления

Адрес места работы:
220072, г. Минск, ул. Сурганова, д.11,
Институт математики НАН Беларуси,
Тел: +375(017) 284-19-60, e-mail: bar@im.bas-net.by

Подпись ведущего научного сотрудника Института математики НАН Беларуси Е. А. Барабанова удостоверяю:

Ведущий специалист по кадрам Института математики НАН Беларуси

Т. И. Лисавенко

17.12.2021