ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2017, том 57, № 1, с. 94–110

УДК 519.924.2

ДВУХЧАСТОТНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОННОЙ СЕТИ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО[1)]

© 2017 г. С. Д. Глызин*, А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов**

(150000 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ;*
*** 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, механ.-матем. ф-т)*
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru; andkolesov@mail.ru; fpo.mgu@mail.ru

Поступила в редакцию 26.01.2016 г.

Предлагается математическая модель одномерной цепочки нейронов ФитцХью–Нагумо с резисторно-индуктивными связями между соседними элементами сети. Рассматриваемая модель является новой и представляет собой некоторую цепочку диффузионно связанных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Устанавливается сосуществование в этой цепочке при подходящем увеличении количества ее звеньев любого конечного числа устойчивых двумерных инвариантных торов. Библ. 7. Фиг. 7.

Ключевые слова: нейронная сеть ФитцХью–Нагумо, нормальная форма, инвариантный тор, асимптотика, устойчивость, буферность.

DOI: 10.7868/S0044466917010070

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прежде всего, опираясь на сформулированный в [1] общий принцип о замене биологического нейрона некоторым эквивалентным генератором электрических колебаний, поясним используемый нами термин “нейрон ФитцХью–Нагумо”. Под таковым будем понимать генератор, моделирующийся известной системой ФитцХью–Нагумо

$$\dot{u} = v + \lambda(u - u^3/3), \quad \dot{v} = -\varepsilon v - u, \tag{1.1}$$

где λ, ε – положительные параметры.

Поясним чуть более подробно, о каком именно генераторе идет речь. В связи с этим напомним, что в [2] система (1.1) использовалась в качестве феноменологической модели, воспроизводящей основные свойства волн возбуждения в более сложной модели Ходжкина-Хаксли (см. [1]). В последующем было показано (см. [3]), что та же самая система уравнений описывает электрические колебания в генераторе с туннельным диодом, блок-схема которого изображена на фиг. 1. Данный генератор и будем называть *нейроном ФитцХью–Нагумо*.

При выводе модели (1.1) предполагается, что ток I, подающийся на вход генератора, является постоянным. Далее, пусть $u = u(t)$ – напряжение в узле O, а $i = i(t)$ – ток, текущий через индуктивность L (см. фиг. 1). Согласно законам Ома и Киркгофа, для указанных переменных получаем соотношения

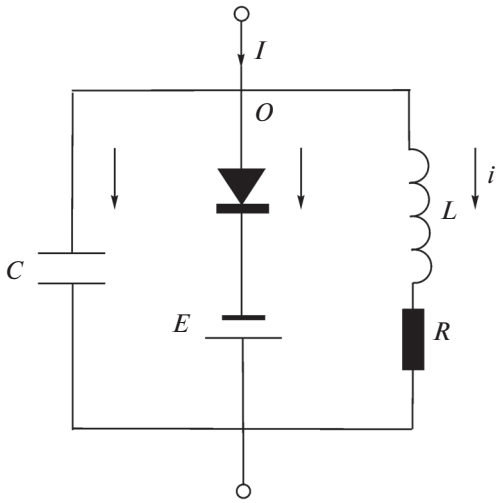
$$I = C\frac{du}{dt} + f(u) + i, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = u - E, \tag{1.2}$$

где $i = f(u)$ – нелинейная характеристика туннельного диода (ее график показан на фиг. 2). Основное ограничение на $f(u)$ состоит в том, что система (1.2) допускает состояние равновесия (u_0, i_0) (так называемую рабочую точку), лежащее иа падающем участке нелинейной характеристики (см. фиг. 2).

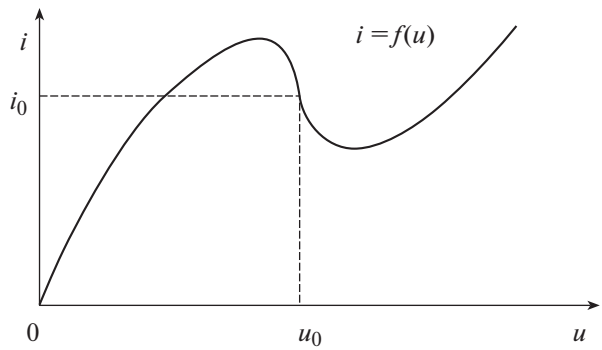
Для упрощения системы (1.2) сделаем в ней последовательно замены

$$u - u_0 \to u, \quad i - i_0 \to i, \quad t/\sqrt{LC} \to t, \quad v = -i\sqrt{L/C} \tag{1.3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-01-04066а) и Министерства образования и науки РФ (код проекта 2014/258-1875).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

и аппроксимируем нелинейную характеристику $i = f(u)$ в окрестности рабочей точки полиномом третьей степени, т.е. положим

$$-\sqrt{\frac{L}{C}}f(u+u_0) = -\sqrt{\frac{L}{C}}i_0 + \lambda(u - u^3/3), \quad \lambda = \text{const} > 0. \tag{1.4}$$

В результате, как нетрудно заметить, интересующая нас система (1.2) преобразуется к виду (1.1) при $\varepsilon = R\sqrt{C/L}$.

Рассмотрим теперь цепочку из N, $N \geq 2$, нейронов ФитцХью–Нагумо. Будем считать, что j-й и $(j+1)$-й парциальные генераторы связаны между собой посредством индуктивности L_0 и активного сопротивления R_0 (см. фиг. 3), а концы цепочки разомкнуты. В этом случае для показанных на фиг. 3 токов $i_{k,j}$, $1 \leq k \leq 4$, и напряжений u_j в узлах O_j, согласно законам Ома и Киркгофа, справедливы равенства

$$I = C\frac{du_j}{dt} + f(u_j) + i_{1,j}, \quad i_{1,j} = i_{4,j} + i_{3,j} - i_{2,j}, \tag{1.5}$$

$$L_0\frac{di_{2,j}}{dt} + R_0 i_{2,j} = u_{j-1} - u_j, \quad L_0\frac{di_{3,j}}{dt} + R_0 i_{3,j} = u_j - u_{j+1}, \tag{1.6}$$

$$L\frac{di_{4,j}}{dt} + Ri_{4,j} = u_j - E, \tag{1.7}$$

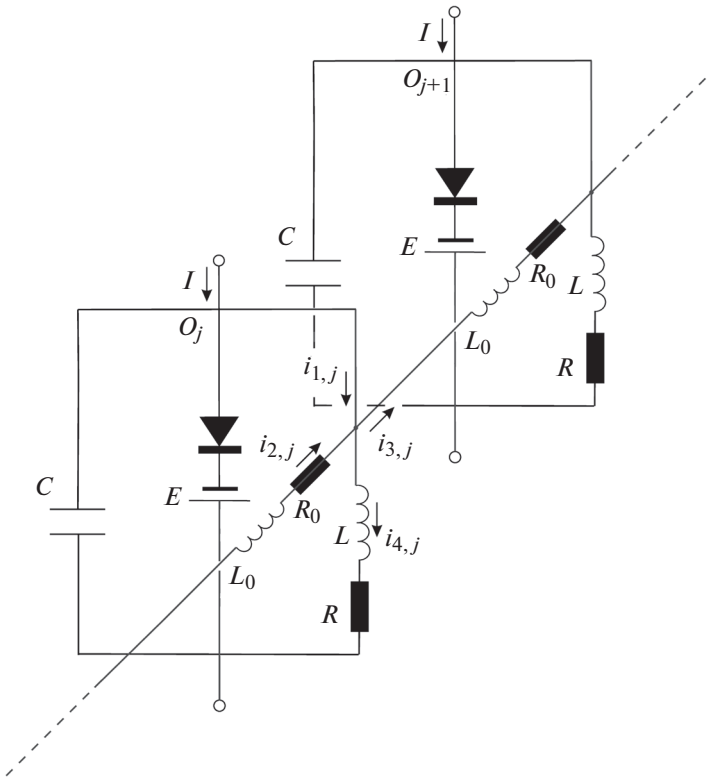
где $j = 1, 2, \ldots, N$, $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$.

Для удобства последующего анализа исключим из системы (1.5)–(1.7) переменные $i_{2,j}$, $i_{3,j}$. С этой целью обратимся к соотношениям (1.5), (1.6), из которых следует, что

$$\begin{gathered} i_{3,j} - i_{2,j} = i_{1,j} - i_{4,j}, \quad \frac{d}{dt}(i_{3,j} - i_{2,j}) = -\frac{1}{L_0}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \\ -\frac{R_0}{L_0}(i_{3,j} - i_{2,j}) = -\frac{1}{L_0}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \frac{R_0}{L_0}(i_{1,j} - i_{4,j}). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Далее, дифференцируя по t второе равенство из (1.5) и учитывая в нем приведенные выше формулы для $di_{4,j}/dt$, $d(i_{3,j} - i_{2,j})/dt$ (см. (1.7), (1.8)), получаем уравнение

$$\frac{di_{1,j}}{dt} = \frac{1}{L}(u_j - E) - \frac{1}{L_0}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \frac{R}{L}i_{4,j} - \frac{R_0}{L_0}(i_{1,j} - i_{4,j}). \tag{1.9}$$



Фиг. 3.

Остается заметить, что первое уравнение из (1.5) и уравнения (1.7), (1.9) образуют замкнутую систему относительно переменных u_j, $i_{1,j}$, $i_{4,j}$. Выполняя в ней аналогичные (1.3), (1.4) замены

$$i_{1,j} - i_0 \to i_{1,j}, \quad i_{4,j} - i_0 \to i_{4,j}, \quad u_j - u_0 \to u_j,$$

$$t/\sqrt{LC} \to t, \quad i_{1,j} = -v_j\sqrt{C/L}, \quad i_{4,j} = -w_j\sqrt{C/L},$$

$$-\sqrt{\frac{L}{C}}f(u_j + u_0) = -\sqrt{\frac{L}{C}}i_0 + \lambda(u_j - u_j^3/3), \quad \lambda = \text{const} > 0,$$

приходим к системе

$$\dot{u}_j = v_j + \lambda(u_j - u_j^3/3), \tag{1.10}$$

$$\dot{v}_j = -u_j + d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \varepsilon w_j - \varepsilon\beta(v_j - w_j), \tag{1.11}$$

$$\dot{w}_j = -u_j - \varepsilon w_j, \tag{1.12}$$

в которой

$$j = 1, 2, \ldots, N, \quad u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N, \tag{1.13}$$

а параметры ε, d, β заданы равенствами $\varepsilon = R\sqrt{C/L}$, $d = L/L_0$, $\beta = R_0 d/R$.

Система (1.10)–(1.13) и является интересующей нас математической моделью нейронной сети ФитцХью–Нагумо. Ниже устанавливается, что при условиях

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \lambda = \varepsilon\alpha, \quad \alpha, \beta, d = \text{const} > 0 \tag{1.14}$$

и при подходящем увеличении параметров α, N в этой системе может сосуществовать любое фиксированное число устойчивых двумерных инвариантных торов.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Прежде чем исследовать вопрос об автоколебаниях системы (1.10)–(1.14), перепишем ее в векторной форме. В связи с этим положим

$$x_j = \mathrm{colon}(u_j, v_j, w_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.1}$$

Тогда для переменных (2.1) получаем систему

$$\dot{x}_j = \mathscr{L}(x_j) + \varepsilon\mathscr{F}(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(x_j) = \mathrm{colon}(v_j, -u_j + d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), -u_j), \quad u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N, \\ \mathscr{F}(x_j) = \mathrm{colon}(\alpha(u_j - u_j^3/3), -w_j - \beta(v_j - w_j), -w_j).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Изучим сначала поведение решений линейной системы

$$\dot{x}_j = \mathscr{L}(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.4}$$

получающейся из (2.2), (2.3) при $\varepsilon = 0$. Для этого нам потребуются так называемые разностные моды

$$e_j^k = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2j-1)\right), \quad j = 1, 2, \ldots N, \quad k = 0, 1, \ldots N-1, \tag{2.5}$$

являющиеся аналогами пространственных мод $\cos k\pi s$, $0 \le s \le 1$, $k \ge 0$, и обладающие свойствами

$$\begin{gathered}\Delta_N(e_j^k) = -\lambda_k e_j^k, \quad e_0^k = e_1^k, \quad e_{N+1}^k = e_N^k, \\ l((e_j^0)^2) = 1, \quad l((e_j^k)^2) = 1/2, \quad k = 1, \ldots, N, \quad l(e_j^k e_j^m) = 0 \quad \text{при} \quad k \ne m,\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta_N(u_j) \overset{\text{def}}{=} -u_j + d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad \lambda_k \overset{\text{def}}{=} 1 + 4d\sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right), \\ l(*) - \text{операция усреднения по индексу } j.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Обыгрывая существование мод (2.5) со свойствами (2.6), (2.7), применим к системе (2.4) метод Фурье. А именно, подставим в нее соотношения

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(t) e_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.8}$$

В итоге для фигурирующих в (2.8) вектор-функций $h_k(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ получаем системы

$$\dot{h}_k = \mathscr{D}_k h_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.9}$$

где

$$\mathscr{D}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_k^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.10}$$

Обратимся, далее, к матрицам $\mathscr{D}_k$ из (2.10) и заметим, что они имеют собственные значения $\lambda = \pm i\omega_k$, $\lambda = 0$, причем

$$\begin{gathered}\mathscr{D}_k h_{1,k} = i\omega_k h_{1,k}, \quad \mathscr{D}_k^* g_{1,k} = -i\omega_k g_{1,k}, \quad (h_{1,k}, g_{1,k}) = 1, \\ \mathscr{D}_k h_{0,k} = 0, \quad \mathscr{D}_k^* g_{0,k} = 0, \quad (h_{0,k}, g_{0,k}) = 1,\end{gathered} \tag{2.11}$$

где (*,*) – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$,

$$h_{1,k} = \operatorname{colon}\left(1, i\omega_k, \frac{i}{\omega_k}\right), \quad g_{1,k} = \frac{1}{2}\operatorname{colon}\left(1, \frac{i}{\omega_k}, 0\right),$$
$$h_{0,k} = \operatorname{colon}(0, 0, 1), \quad g_{0,k} = \operatorname{colon}\left(0, -\frac{1}{\omega_k^2}, 1\right). \tag{2.12}$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что общее решение системы (2.4) задается равенствами (2.8), в которых

$$h_k(t) = \xi_k h_{0,k} + z_k \exp(i\omega_k t)h_{1,k} + \overline{z}_k \exp(-i\omega_k t)\overline{h}_{1,k}, \tag{2.13}$$

а $\xi_k \in \mathbb{R}$, $z_k \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные.

Формулы (2.8), (2.13) позволяют для исследования аттракторов системы (2.2) воспользоваться асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского. Опираясь на общую идеологию этого метода (см. [4]), в данном случае возможные автоколебания системы (2.2) будем искать в виде рядов

$$x_j = x_{j,0}(t,\tau) + \varepsilon x_{j,1}(t,\tau) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad j = 1,2,\ldots N, \tag{2.14}$$

коэффициенты которых являются по t тригонометрическими полиномами переменных $\omega_k t$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Что же касается нулевых приближений $x_{j,0}(t, \tau)$, то они записываются в виде

$$x_{j,0}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^0(t,\tau)e_j^k, \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2.15}$$

где функции $h_k^0(t, \tau)$ задаются формулами (2.13), в которых $\xi_k = \xi_k(\tau)$, $z_k = z_k(\tau)$ – пока неизвестные (подлежащие определению) амплитуды.

Итак, подставим соотношения (2.14), (2.15) в (2.2) и приравняем коэффициенты при ε. В результате приходим к линейной неоднородной системе

$$\frac{\partial x_{j,1}}{\partial t} = \mathscr{L}(x_{j,1}) + F_j(t,\tau), \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2.16}$$

где

$$F_j(t,\tau) = \mathscr{F}(x_{j,0}(t,\tau)) - \frac{\partial x_{j,0}}{\partial \tau}, \tag{2.17}$$

а переменная τ считается параметром.

Как и в случае системы (2.4), для анализа системы (2.16) воспользуемся методом Фурье по модам (2.5). В связи с этим сначала разложим по указанным модам неоднородности (2.17), т.е. представим их в виде

$$F_j(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k(t,\tau)e_j^k, \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2.18}$$

где в силу (2.6), (2.7) коэффициенты $f_k(t, \tau)$ задаются равенствами

$$f_0(t,\tau) = l(F_j(t,\tau)), \quad f_k(t,\tau) = 2l(F_j(t,\tau)e_j^k), \quad k = 1,\ldots N-1. \tag{2.19}$$

Далее, вектор-функции $x_{j,1}$ также будем искать в аналогичном (2.15), (2.18) виде

$$x_{j,1}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^1(t,\tau)e_j^k, \quad j = 1,2,\ldots,N. \tag{2.20}$$

В итоге для фигурирующих в (2.20) коэффициентов $h_k^1(t, \tau)$ получаем аналогичные (2.9) линейные неоднородные системы

$$\frac{\partial h_k^1}{\partial t} = \mathscr{D}_k h_k^1 + f_k(t,\tau), \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2.21}$$

в которых переменная τ считается параметром.

Для анализа систем (2.21) необходимо выявить структуру неоднородностей $f_k(t, \tau)$. Опираясь на формулы (2.11)–(2.13), (2.15), нетрудно увидеть, что

$$x_{j,0}(t,\tau) = \mathrm{colon}(u_{j,0}(t,\tau), v_{j,0}(t,\tau), w_{j,0}(t,\tau)), \tag{2.22}$$

$$u_{j,0}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} (z_k(\tau)\exp(i\omega_k t) + \overline{z}_k(\tau)\exp(-i\omega_k t))e_j^k, \tag{2.23}$$

$$v_{j,0}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} i\omega_k (z_k(\tau)\exp(i\omega_k t) - \overline{z}_k(\tau)\exp(-i\omega_k t))e_j^k, \tag{2.24}$$

$$w_{j,0}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\xi_k(\tau) + \frac{i}{\omega_k}(z_k(\tau)\exp(i\omega_k t) - \overline{z}_k(\tau)\exp(-i\omega_k t))\right] e_j^k. \tag{2.25}$$

Далее, объединяя формулы (2.22)–(2.25) с равенствами (2.3), (2.17), (2.19), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} f_k(t,\tau) = f_{k,0}(\tau) + \sum_{s=0}^{N-1} (f_{k,s}^1(\tau)\exp(i\omega_s t) + \overline{f_{k,s}^1}(\tau)\exp(-i\omega_s t)) + \\ + \sum_{\substack{(m_0,\ldots,m_{N-1}):\\ |m_0|+\ldots+|m_{N-1}|=3}} f_{k,1}^{m_0,\ldots,m_{N-1}}(\tau)\exp[i(m_0\omega_0 + \ldots + m_{N-1}\omega_{N-1})t] \end{aligned} \tag{2.26}$$

(вторая сумма в (2.26) обязана своим происхождением наличию кубических нелинейностей в (2.3)). Что же касается решений h_k^1 систем (2.21), то их будем искать в аналогичном (2.26) виде

$$\begin{aligned} h_k^1 = h_{k,0}^1(\tau) + \sum_{s=0}^{N-1} (h_{k,s}^1(\tau)\exp(i\omega_s t) + \overline{h_{k,s}^1}(\tau)\exp(-i\omega_s t)) + \\ + \sum_{\substack{(m_0,\ldots,m_{N-1}):\\ |m_0|+\ldots+|m_{N-1}|=3}} h_{k,1}^{m_0,\ldots,m_{N-1}}(\tau)\exp[i(m_0\omega_0 + \ldots + m_{N-1}\omega_{N-1})t]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В связи с этим предположим, что для любого целочисленного вектора $(m_0, \ldots, m_{N-1})$: $|m_0| + \ldots + |m_{N-1}| = 3$ выполняются неравенства

$$\omega_k \neq m_0\omega_0 + \ldots + m_{N-1}\omega_{N-1}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2.28}$$

справедливости которых всегда можно добиться за счет надлежащего выбора параметра d.

Указанный способ действий сводит проблему нахождения h_k^1 к решению линейных неоднородных алгебраических систем для входящих в (2.27) коэффициентов $h_{k,0}^1$, $h_{k,s}^1$, $h_{k,1}^{m_0,\ldots,m_{N-1}}$. Начнем с рассмотрения систем для $h_{k,0}^1$, $h_{k,s}^1$, которые имеют вид

$$\mathcal{D}_k h_{k,0}^1 = f_{k,0}(\tau), \quad \mathcal{D}_k h_{k,s}^1 - i\omega_s h_{k,s}^1 = f_{k,s}^1(\tau), \quad s = 0,1,\ldots,N-1. \tag{2.29}$$

Обратим внимание, что две из них (для $h_{k,0}^1$ и $h_{k,k}^1$) являются вырожденными, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$(f_{k,0}(\tau), g_{0,k}) = 0, \quad (f_{k,k}^1(\tau), g_{1,k}) = 0, \tag{2.30}$$

где $g_{0,k}$, $g_{1,k}$ – векторы из (2.11), (2.12). Остальные же системы (2.29) однозначно разрешимы.

Получившиеся соотношения (2.30) будем рассматривать как уравнения для отыскания имеющихся в запасе произвольных амплитуд $\xi_k(\tau)$, $z_k(\tau)$. Снова опираясь на формулы (2.3), (2.17), (2.19), (2.22)–(2.25), приходим к выводу, что

$$f^1_{k,k} = -\frac{dz_k}{d\tau}h_{1,k} + \mathrm{colon}\left(\alpha\left(1 - d_{k,k}|z_k|^2 - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{N-1} d_{k,m}|z_m|^2\right)z_k, -\left(\frac{i}{\omega_k}(1-\beta) + i\beta\omega_k\right)z_k, -\frac{i}{\omega_k}z_k\right),$$

$$f_{k,0} = -\frac{d\xi_k}{d\tau}h_{0,k} + \mathrm{colon}(0, -(1-\beta)\xi_k, -\xi_k),$$

где

$$d_{k,k} = \begin{cases} l((e^0_j)^4), & k = 0,\\ 2l((e^k_j)^4), & k \geq 1,\end{cases} \qquad d_{k,m} = \begin{cases} 2l((e^0_j e^m_j)^2), & k = 0,\\ 4l((e^k_j e^m_j)^2), & k \geq 1.\end{cases} \tag{2.31}$$

А отсюда и из (2.30), в свою очередь, следует, что интересующие нас амплитуды $z_k(\tau)$, $\xi_k(\tau)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dz_k}{d\tau} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - d_{k,k}|z_k|^2 - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{N-1} d_{k,m}|z_m|^2\right)z_k - \left(\frac{1}{2\omega_k^2} + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega_k^2}\right)\right)z_k,\\ \frac{d\xi_k}{d\tau} = -\left(\frac{\beta}{\omega_k^2} + 1 - \frac{1}{\omega_k^2}\right)\xi_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1.\end{gathered} \tag{2.32}$$

Добавим еще, что для ее коэффициентов (2.31) в [5] были установлены следующие явные формулы:

$$d_{k,k} = \begin{cases} 1, & k = 0,\\ 3/4, & 1 \leq k \leq N-1, \quad k \neq N/2,\\ 1/2, & k = N/2 \text{ и четном } N,\end{cases} \tag{2.33}$$

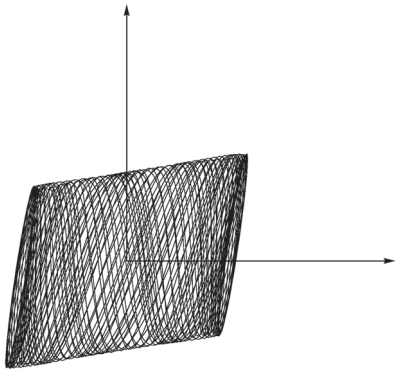
$$d_{k,m} = \begin{cases} 2, & m = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1,\\ 1, & 0 \leq k \leq N-1, \quad m \neq k, N-k,\\ 1/2, & 1 \leq k \leq N-1, \quad m = N-k, \quad m \neq k.\end{cases} \tag{2.34}$$

Закрывая вопрос о разрешимости систем (2.21) в классе тригонометрических полиномов, отметим, что оставшиеся коэффициенты $h^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_{k,1}$ из (2.27) удовлетворяют линейным неоднородным алгебраическим уравнениям

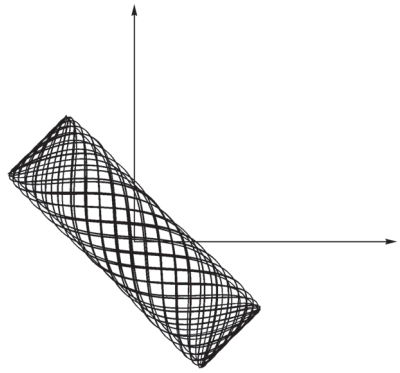
$$\mathcal{D}_k h^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_{k,1} - i(m_0\omega_0 + \ldots + m_{N-1}\omega_{N-1})h^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_{k,1} = f^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_k.$$

В случае, когда выражение $m_0\omega_0 + \ldots + m_{N-1}\omega_{N-1}$ отлично от нуля, эти уравнения в силу условий нерезонансности (2.28) оказываются невырожденными. Если же упомянутое выражение обращается в нуль, то автоматически выполняется соответствующее условие разрешимости $(f^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_k, g_{0,k}) = 0$, поскольку первая компонента вектора $g_{0,k}$ равна нулю, а неоднородность $f^{m_0,\ldots,m_{N-1}}_k$ имеет структуру colon(*, 0, 0).

Последующий анализ связан с рассмотрением системы (2.32), которую в данном случае уместно назвать *укороченной нормальной формой исходной системы* (2.2) или просто *нормальной формой*. Нетрудно увидеть, что она допускает экспоненциально орбитально устойчивое инвариантное многообразие, задающееся равенствами $\xi_0 = \ldots = \xi_{N-1} = 0$. Далее, от системы для z_k,



Фиг. 4.



Фиг. 5.

описывающей движения на этом многообразии, в свою очередь отщепляется система для $\eta_k = |z_k|^2$, $k = 0, 1, ..., N-1$. Последняя после замены $\alpha\tau \to \tau$ приобретает вид

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = \left[\gamma_k - d_{k,k}\eta_k - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{N-1} d_{k,m}\eta_m\right]\eta_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2.35}$$

где

$$\gamma_k = 1 - \frac{1+\beta(\omega_k^2-1)}{\alpha\omega_k^2}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{2.36}$$

Отдельного упоминания заслуживает вопрос о соответствии между стационарными режимами систем (2.2) и (2.35). Из содержащихся в [4], [6] результатов следует, что любому состоянию равновесия $(\eta_0^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_{N-1}^0) : \eta_k^0 \geq 0$, $k = 0, 1, ..., N-1$, амплитудной системы (2.35), экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (2.2) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает инвариантный тор той же устойчивости и размерности r, равной количеству ненулевых координат η_k^0.

Приступим непосредственно к отысканию аттракторов системы (2.35). Для этого введем в рассмотрение натуральное $k_0 = k_0(N)$, определяющееся по правилу

$$k_0(N) = \begin{cases} \lfloor N/2 \rfloor & \text{при нечетном } N, \\ N/2-1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2.37}$$

где $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Опираясь на формулы (2.33), (2.34), убеждаемся, что при выполнении серии неравенств

$$3\gamma_k - 2\gamma_{N-k} > 0, \quad 3\gamma_{N-k} - 2\gamma_k > 0, \tag{2.38}$$

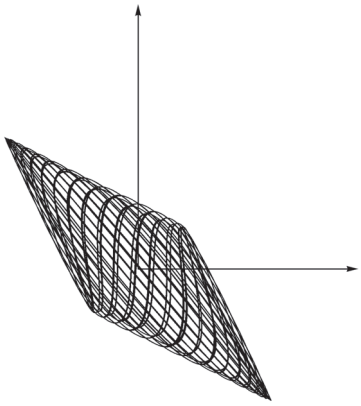
$$\gamma_m - \frac{4}{5}(\gamma_k + \gamma_{N-k}) < 0, \quad m = 0,1,\ldots,N-1, \quad m \neq k, N-k, \tag{2.39}$$

где $k = 1, ..., k_0(N)$, система (2.35) допускает набор экспоненциально устойчивых состояний равновесия $O_k^{(2)}$, $k = 1, ..., k_0(N)$, с двумя ненулевыми координатами $\eta_k = \eta_k^0$, $\eta_{N-k} = \eta_{N-k}^0$, имеющими вид

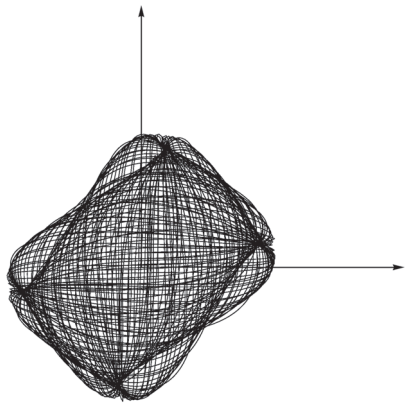
$$\eta_k^0 = \frac{4}{5}(3\gamma_k - 2\gamma_{N-k}), \quad \eta_{N-k}^0 = \frac{4}{5}(3\gamma_{N-k} - 2\gamma_k). \tag{2.40}$$

А отсюда и из упомянутого чуть выше результата о соответствии вытекает следующая

Теорема 2.1. *Пусть при произвольно фиксированном натуральном $N \geq 3$ выполняются условия нерезонансности* (2.28) *и неравенства* (2.38), (2.39). *Тогда найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0 =$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

$= \varepsilon_0(N) > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *исходная система* (2.2) *имеет набор экспоненциально орбитально устойчивых двумерных инвариантных торов* T_k, $k = 1, \ldots, k_0(N)$, *допускающих параметрические представления вида*

$$x_j = \sqrt{\eta_k^0}(\exp(i\varphi_1)h_{1,k} + \exp(-i\varphi_1)\bar{h}_{1,k})e_j^k + \sqrt{\eta_{N-k}^0}(\exp(i\varphi_2)h_{1,N-k} + \\ + \exp(-i\varphi_2)\bar{h}_{1,N-k})e_j^{N-k} + \varepsilon\mathcal{U}_{j,k}(\varphi_1,\varphi_2,\varepsilon), \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2.41}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_k + \varepsilon^2\Psi_{1,k}(\varphi_1,\varphi_2,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_{N-k} + \varepsilon^2\Psi_{2,k}(\varphi_1,\varphi_2,\varepsilon). \tag{2.42}$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi](\mathrm{mod}\ 2\pi)$ *– отвечающие этим торам циклические координаты, а* 2π *– периодические по* φ_1, φ_2 *вектор-функции* $\mathcal{U}_{j,k}$ *со значениями* $\mathbb{R}^3$ *и скалярные функции* $\Psi_{1,k}$, $\Psi_{2,k}$ *достаточно гладко зависят от своих переменных.*

Остановимся на вопросе о реализуемости условий теоремы 2.1. Как уже было сказано выше, требования (2.28) – это некоторая общность положения, связанная с выбором параметра d. Далее, нетрудно увидеть, что неравенства (2.38), (2.39) заведомо выполняются при фиксированном β при соответствующем увеличении параметра α. А поскольку в силу (2.37) имеем $k_0(N) \to \infty$ при $N \to \infty$, то теорема 2.1 гарантирует реализуемость в системе (2.2) известного явления буферности. В данном случае это явление состоит в том, что при согласованном увеличении α, N и при уменьшении ε количество сосуществующих устойчивых инвариантных торов (2.41), (2.42) неограниченно растет.

Полученный теоретический результат проиллюстрируем с помощью численного анализа системы (2.2) при

$$\alpha = 5, \quad \beta = 1.5, \quad d = 10, \quad N = 10 \tag{2.43}$$

и при значении $\varepsilon = 0.1$. В силу теоремы 2.1 при условиях (2.43) и при $\varepsilon \ll 1$ у нее должно сосуществовать четыре устойчивых инвариантных тора. Кроме того, полагая в (2.41), (2.42) $\varepsilon = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и учитывая равенства (2.40), приходим к выводу, что для начальных условий, соответствующих этим торам, с точностью до ε справедливы явные формулы

$$(u_j, v_j, w_j)\big|_{t=0} = \left(2\sqrt{\eta_k^0}e_j^k + 2\sqrt{\eta_{10-k}^0}e_j^{10-k}, 0, 0\right), \quad j = 1,\ldots,10, \quad k = 1,\ldots,4. \tag{2.44}$$

Как оказывается, построенная нами асимптотическая теория заведомо работает при $\varepsilon = 0.1$. Действительно, в этом случае все четыре устойчивых инвариантных тора удается обнаружить посредством численного интегрирования системы (2.2) с начальными условиями (2.44). Проекции найденных торов на плоскость (u_1, u_5) представлены на фиг. 4–7, соответствующих значениям $k = 1, \ldots, 4$.

3. АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

Как и в [3], наряду с дискретной цепочкой нейронов ФитцХью–Нагумо рассмотрим аналогичную непрерывную сеть. Функционирование такой сети описывается тремя распределенными переменными – напряжением $u(t, s)$ и токами $v(t, s)$, $w(t, s)$, где $0 \le s \le 1$. Для упомянутых переменных после замены в (1.10)–(1.14) разностного оператора $u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ частной производной $\partial^2 u/\partial s^2$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + D_1 x + \varepsilon \mathcal{F}(x), \quad \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, \tag{3.1}$$

где $x = \mathrm{colon}(u(t, s), v(t, s), w(t, s))$,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(x) = \mathrm{colon}(\alpha(u - u^3/3), -w - \beta(v - w), -w). \tag{3.2}$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий) краевой задачи (3.1) возьмем вещественное гильбертово пространство E, состоящее из вектор-функций

$$x(s) = \mathrm{colon}(u(s), v(s), w(s)): \quad u(s) \in W_2^1(0,1), \quad v(s) \in L_2(0,1), \quad w(s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,1), \tag{3.3}$$

где $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ – замыкание по норме пространства W_2^2 линеала гладких функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Скалярное произведение в E зададим следующим образом:

$$\forall x_j(s) = \mathrm{colon}(u_j(s), v_j(s), w_j(s)) \in E, \quad j = 1, 2,$$

$$(x_1, x_2)_E = (u_1, u_2)_{L_2} + (u_1', u_2')_{L_2} + (v_1, v_2)_{L_2} + (w_1, w_2)_{L_2} + (w_1', w_2')_{L_2} + (w_1'', w_2'')_{L_2},$$

где $(*, *)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2(0, 1)$.

Наша ближайшая цель – показать, что решения краевой задачи (3.1) порождают в пространстве E нелинейный полупоток. В связи с этим обратимся сначала к линейной задаче

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + D_1 x, \quad \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, \quad \left. x \right|_{t=0} = x_0(s) \in E \tag{3.4}$$

и убедимся в ее однозначной разрешимости на полуоси $t \ge 0$ при $\forall x_0(s) \in E$.

Разложим решение $x(t, s)$ задачи (3.4) в ряд Фурье по системе функций $\cos k\pi s$, $k \ge 0$, т.е. представим его в виде

$$x(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \cos k\pi s. \tag{3.5}$$

В результате, опираясь на явные формулы для D_0, D_1 (см. (3.2)), для фигурирующих в (3.5) вектор-функций $x_k(t) \in \mathbb{R}^3$ приходим к серии задач Коши:

$$\dot{x}_k = \mathcal{D}_k x_k, \quad \left. x_k \right|_{t=0} = \xi_k h_{0,k} + z_k h_{1,k} + \overline{z}_k \overline{h}_{1,k}, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{gathered} \xi_0 = \int_0^1 (x_0(s), g_{0,0}) ds, \quad z_0 = \int_0^1 (x_0(s), g_{1,0}) ds, \\ \xi_k = 2\int_0^1 (x_0(s), g_{0,k}) \cos k\pi s ds, \quad z_k = 2\int_0^1 (x_0(s), g_{1,k}) \cos k\pi s ds, \quad k \ge 1, \end{gathered} \tag{3.7}$$

а матрицы $\mathcal{D}_k$ и векторы $h_{0,k}$, $h_{1,k}$, $g_{0,k}$, $g_{1,k}$ задаются равенствами (2.10), (2.12) при

$$\omega_k = \sqrt{1 + k^2 \pi^2 d}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.8}$$

Что же касается задач (3.6), то их решения записываются в аналогичном (2.13) виде:

$$x_k(t) = \xi_k h_{0,k} + z_k \exp(i\omega_k t) h_{1,k} + \bar{z}_k \exp(-i\omega_k t)\bar{h}_{1,k}, \tag{3.9}$$

где ω_k – частоты (3.8). Добавим еще, что в силу (3.3), (3.7), (3.8) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^4 \xi_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^2 |z_k|^2 < \infty. \tag{3.10}$$

Из проделанных построений следует, что решения задачи (3.4) порождают в пространстве E сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу линейных ограниченных операторов $T(t)$. В силу соотношений (3.5), (3.7), (3.9) действие этой полугруппы на произвольный элемент $x_0 \in E$ определяется равенством

$$T(t)x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} [\xi_k h_{0,k} + z_k \exp(i\omega_k t) h_{1,k} + \bar{z}_k \exp(-i\omega_k t)\bar{h}_{1,k}] \cos k\pi s. \tag{3.11}$$

Полученная формула (3.11) позволяет ввести понятие обобщенного решения краевой задачи (3.1). А именно, под обобщенным ее решением с начальным условием $x(0) = x_0 \in E$ будем понимать сильно непрерывную по t вектор-функцию $x(t)$ со значениями в E, удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$x(t) = T(t)x_0 + \varepsilon \int_0^t T(t-\tau)\mathcal{F}(x(\tau))d\tau. \tag{3.12}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *По любым фиксированным* $\bar{t}$, $r > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\bar{t}, r) > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *и при* $\forall x_0 \in B_r = \{x \in E : \|x\|_E \leq r\}$ *уравнение* (3.12) *имеет на отрезке* $0 \leq t \leq \bar{t}$ *единственное непрерывное решение* $x = x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$.

Доказательство сформулированной теоремы базируется на следующих двух фактах. Во-первых, из представления (3.11) заключаем, что $\|T(t)\|_{E \to E} \leq c$ при $\forall t \geq 0$, где $c > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от t) постоянная. Во-вторых, в силу (3.2) оператор суперпозиции $\mathcal{F}$ действует из E в E и представляет собой сумму линейного ограниченного оператора и непрерывной кубической формы.

Действительно, опираясь на перечисленные свойства, нетрудно убедиться, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при $\forall x_0 \in B_r$ оператор $\Pi(x(t))$, порождаемый правой частью уравнения (3.12) в пространстве $C([0, \bar{t}]; E)$, переводит множество

$$\Sigma_0 = \{x(t) \in C([0,\bar{t}]; E) : \|x(t) - T(t)x_0\|_E \leq \bar{r}\}, \quad \bar{r} = \text{const} > 0,$$

в себя и является сжимающим (с константой сжатия порядка ε). А отсюда справедливость теоремы 3.1 вытекает уже очевидным образом.

Приступим теперь к отысканию аттракторов краевой задачи (3.1). Их анализ существенно опирается на тот факт, что при $\varepsilon = 0$ общее решение этой задачи записывается в виде тригонометрического ряда (3.11), коэффициенты ξ_k, z_k которого удовлетворяют требованиям (3.10), а в остальном произвольны. Указанное обстоятельство позволяет для изучения аттракторов задачи (3.1) воспользоваться бесконечномерным аналогом асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского – так называемым методом квазинормальных форм. Согласно идеологии этого метода возможные автоколебательные режимы исходной задачи ищутся в виде асимптотического ряда

$$x = x_0(t, \tau, s) + \varepsilon x_1(t, \tau, s) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t, \tag{3.13}$$

где первое слагаемое x_0 определяется правой частью формулы (3.11), в которой $\xi_k = \xi_k(\tau)$, $z_k = z_k(t)$, $k \geq 0$, – произвольные (подлежащие нахождению в последующем) амплитуды. Предполагаем, естественно, что для них выполнены требования (3.10).

После подстановки соотношения (3.13) в (3.1) и приравнивания коэффициентов при ε, для отыскания x_1 получаем линейную неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} - D_1 x_1 = \mathcal{F}(x_0(t,\tau,s)) - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}, \quad \left.\frac{\partial x_1}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial x_1}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, \tag{3.14}$$

в которой переменная τ рассматривается как параметр. Подробный анализ этой задачи опустим, так как он вполне аналогичен описанному выше исследованию системы (2.16). Заметим только, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (3.14) в классе формальных тригонометрических рядов переменных $\omega_k t$, $k \geq 0$, является отсутствие в ее правой части слагаемых, пропорциональных гармоникам

$$h_{0,k} \cos k\pi s, \quad \exp(i\omega_k t) h_{1,k} \cos k\pi s, \quad \exp(-i\omega_k t) \overline{h}_{1,k} \cos k\pi s, \quad k \geq 0.$$

Поэтому приравняем указанные слагаемые к нулю. В результате для амплитуд $z_k = z_k(\tau)$, $\xi_k = \xi_k(\tau)$, которые до этого момента были произвольными, приходим к некоторой счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Последнюю принято называть *квазинормальной формой*.

Дальнейший анализ будем проводить в предположении об отсутствии между собственными частотами (3.8) некоторых резонансных соотношений. А именно, считаем, что

$$\omega_{n_0} \neq m_1 \omega_{n_1} + m_2 \omega_{n_2} + m_3 \omega_{n_3} \quad \text{при} \quad n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3 \tag{3.15}$$

для любого набора индексов $n_j, j = 0, 1, 2, 3$, для любого целочисленного вектора $(m_1, m_2, m_3) : |m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$ и при любой расстановке знаков “+” и “–” в формуле для n_0 (тождественные резонансы $\omega_{n_0} = \omega_{n_0} + \omega_m - \omega_m$ из рассмотрения, как обычно, исключаются). Тогда, как показывает непосредственная проверка, интересующая нас квазинормальная форма записывается в аналогичном (2.32) виде

$$\frac{dz_k}{d\tau} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - d_{k,k}|z_k|^2 - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{\infty} d_{k,m}|z_m|^2\right) z_k - \left(\frac{1}{2\omega_k^2} + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega_k^2}\right)\right) z_k, \tag{3.16}$$

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\left(\frac{\beta}{\omega_k^2} + 1 - \frac{1}{\omega_k^2}\right)\xi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.17}$$

где $d_{0,0} = d_{0,m} = 1$, $m \geq 1$; $d_{k,0} = 2$, $d_{k,m} = 1$ при $k \geq 1$, $k \neq m$; $d_{k,k} = 3/4$ при $k \geq 1$. Что же касается условий (3.15), то их выполнения добиваемся за счет подходящего выбора параметра d из (3.2).

Остановимся на объеме информации, которую можно извлечь из системы (3.16), (3.17). В связи с этим, полагая $\eta_k = |z_k|^2$, $k \geq 0$, и выполняя замену $\alpha\tau \to \tau$, перейдем от нее к аналогичной (2.35) вещественной амплитудной системе

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \eta_0\left[\gamma_0 - \sum_{m=0}^{\infty}\eta_m\right], \quad \frac{d\eta_k}{d\tau} = \eta_k\left[\gamma_k - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{\infty}\eta_m - 2\eta_0 - \frac{3}{4}\eta_k\right], \quad k \geq 1. \tag{3.18}$$

Здесь постоянные γ_k, $k \geq 0$, определяются посредством аналогичных (2.36) соотношений, в которых частоты ω_k задаются, естественно, равенствами (3.8).

В качестве фазового пространства системы (3.18) возьмем банахово пространство V, состоящее из векторов $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots)$ с нормой

$$\|\eta\| = \sum_{k\geq 0} \omega_k^2 |\eta_k| < \infty.$$

Из установленных в [7] общих теорем следует, что любому гиперболическому положению равновесия получившейся системы, принадлежащему конусу $K \subset V$ векторов с неотрицательными координатами и имеющему конечное число ненулевых компонент, отвечает инвариантный тор исходной задачи (3.1) с теми же свойствами устойчивости. Размерность этого тора равна количеству ненулевых координат у рассматриваемого состояния равновесия.

Фиксируем произвольно натуральные числа $n_1 < \ldots < n_s$, где $s \geq 2$. Нетрудно увидеть, что данному набору индексов соответствует единственное состояние равновесия системы (3.18) из конуса K с координатами $\eta_{n_j} > 0, j = 1, \ldots, s$, $\eta_m = 0$ при $m \neq n_j$. Точнее говоря, для ненулевых компонент этого состояния равновесия справедливы равенства

$$\eta_{n_j} = 4(\Sigma - \gamma_{n_j}), \quad j = 1, \ldots, s \quad \Sigma = \frac{1}{s - 1/4}\sum_{r=1}^{s}\gamma_{n_r} \tag{3.19}$$

(в предположении, что $\eta_{n_j} > 0, j = 1, \ldots, s$). Далее, следует отметить, что состояние равновесия с координатами (3.19) существует и у конечномерной системы

$$d\eta/d\tau = \Gamma\eta - \eta * A\eta, \quad \eta = \mathrm{colon}(\eta_{n_1}, \ldots, \eta_{n_s}), \tag{3.20}$$

получающейся из (3.18) при $\eta_m = 0\ \forall m \neq n_j, j = 1, \ldots, s$. Здесь матрицы A, Γ задаются равенствами

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 3/4 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \mathrm{diag}\{\gamma_{n_1}, \ldots, \gamma_{n_s}\}, \tag{3.21}$$

а символом * обозначена операция покоординатного умножения векторов.

Наша цель – показать, что любое состояние равновесия системы (3.18) с ненулевыми компонентами (3.19) экспоненциально неустойчиво. Для этого достаточно убедиться в неустойчивости состояния равновесия (3.19) у конечномерной системы (3.20).

Рассмотрим сначала самый простой случай $\beta = 1$, когда все величины γ_k совпадают с $1 - 1/\alpha$, а компоненты (3.19) приобретают вид

$$\eta_{n_j} = (1 - 1/\alpha)/(s - 1/4), \quad j = 1, \ldots, s, \quad \alpha > 1. \tag{3.22}$$

Заметим, далее, что матрица линеаризации системы (3.20) на состоянии равновесия (3.22) получается из A (см. (3.21)) при умножении на $-(1 - 1/\alpha)(s - 1/4)^{-1}$. А так как матрица A имеет собственные значения $\lambda = -1/4$ (кратности $s - 1$) и $\lambda = s - 1/4$, то интересующее нас состояние равновесия будет неустойчивым.

В случае $\beta \neq 1$ согласно (3.19) справедливы свойства

$$\eta_{n_j} \neq \eta_{n_k} \quad \text{при} \quad j \neq k. \tag{3.23}$$

Что же касается матрицы линеаризации B системы (3.20) на состоянии равновесия (3.19), то она задается равенствами

$$B = \|b_{jk}\|_{j,k=1,\ldots s}, \quad b_{jk} = -\eta_{n_j} \quad \text{при} \quad j \neq k, \quad b_{jj} = -\frac{3}{4}\eta_{n_j}. \tag{3.24}$$

Далее, рассмотрим отвечающее матрице (3.24) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3\eta_{n_1}/4 + \lambda & \eta_{n_1} & \ldots & \ldots & \eta_{n_1} \\ \eta_{n_2} & 3\eta_{n_2}/4 + \lambda & \eta_{n_2} & \ldots & \eta_{n_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n_s} & \ldots & \ldots & \eta_{n_s} & 3\eta_{n_s}/4 + \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.25}$$

и раскроем фигурирующий в (3.25) определитель. С этой целью сначала вычтем из его строк с номерами $r = 2, \ldots, s$ первую строку, умноженную соответственно на η_{n_r}/η_{n_1}. После этого аналогичную операцию проделаем со столбцами. А именно, вычтем из первого столбца получившегося определителя столбцы с номерами $r = 2, \ldots, s$, умноженные на

$$\eta_{n_r}\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{\eta_{n_1}}\right)\Big/\left(-\frac{1}{4}\eta_{n_r} + \lambda\right), \quad r = 2, \ldots, s.$$

В итоге убеждаемся, что уравнение (3.25) преобразуется к виду

$$\left(\sum_{r=1}^{s}\frac{\eta_{n_r}}{\eta_{n_r}/4 - \lambda} - 1\right)\prod_{r=1}^{s}(-\eta_{n_r}/4 + \lambda) = 0. \tag{3.26}$$

Проанализируем получившееся уравнение. Из неравенств (3.23) очевидным образом следует, что значения $\lambda = \eta_{n_r}/4$, $r = 1, \ldots, s$, не являются его корнями. Тем самым, мы вправе перейти от (3.26) к уравнению

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{\eta_{n_r}}{\eta_{n_r}/4 - \lambda} = 1, \tag{3.27}$$

которое в силу условия $s \geq 2$ имеет на полуоси $\lambda > 0$ хотя бы один корень. А это и означает неустойчивость состояния равновесия (3.19).

Предположим теперь, что в наборе индексов $n_1 < \ldots < n_s$, где по-прежнему $s \geq 2$, присутствует значение $n_1 = 0$. Тогда такому набору соответствует единственное состояние равновесия системы (3.18) с координатами $\eta_{n_r} \neq 0, j = 1, \ldots, s$, $\eta_m = 0$ при $m \neq n_j$, где

$$\eta_{n_j} = 4(\eta_{n_1} + \gamma_0 - \gamma_{n_j}), \quad j = 2, \ldots, s, \quad \eta_{n_1} = \frac{1}{4s-3}\left(4\sum_{r=1}^{s}\gamma_{n_r} - (4s-1)\gamma_0\right) \tag{3.28}$$

(как и ранее, предполагаем, что выполнены неравенства $\eta_{n_j} > 0$, $j = 1, \ldots, s$). Что же касается конечномерной системы, которой удовлетворяют компоненты (3.28), то она имеет вид (3.20), где матрица Γ задается прежним равенством из (3.21), а матрица A определена равенством

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 2 & 3/4 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 1 & 3/4 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 1 & \ldots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Как и выше, обратимся сначала к самому простому случаю, когда $\beta = 1$ и в силу (3.28) имеем

$$\eta_{n_1} = (1 - 1/\alpha)/(4s-3), \quad \eta_{n_j} = 4(1 - 1/\alpha)/(4s-3), \quad j = 2, \ldots, s. \tag{3.30}$$

В этой ситуации матрица линеаризации системы (3.20) на состоянии равновесия (3.30) получается из (3.29) в результате умножения первой строки на $-(1 - 1/\alpha)(4s - 3)^{-1}$, а всех остальных строк – на величину $-4(1 - 1/\alpha)(4s - 3)^{-1}$. А отсюда несложно вывести, что она имеет собственные значения $\lambda = (1 - 1/\alpha)(4s - 3)^{-1}$ (кратности $s - 1$) и $\lambda = -(1 - 1/\alpha)$. Следовательно, состояние равновесия (3.30) является неустойчивым.

При $\beta \neq 1$ из формул (3.28) несложно вывести, что

$$\eta_{n_j} \neq \eta_{n_k} \quad \text{при} \quad j \neq k, \quad j, k = 2, \ldots, s; \quad \frac{1}{4}\eta_{n_j} \neq \eta_{n_1} \quad \text{при} \quad j = 2, \ldots, s. \tag{3.31}$$

Далее, спектр устойчивости состояния равновесия (3.28) системы (3.20) определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} \eta_{n_1} + \lambda & \eta_{n_1} & \ldots & \ldots & \eta_{n_1} \\ 2\eta_{n_2} & 3\eta_{n_2}/4 + \lambda & \eta_{n_2} & \ldots & \eta_{n_2} \\ 2\eta_{n_3} & \eta_{n_3} & 3\eta_{n_3}/4 + \lambda & \ldots & \eta_{n_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\eta_{n_s} & \eta_{n_s} & \ldots & \eta_{n_s} & 3\eta_{n_s}/4 + \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.32}$$

Исследование этого уравнения проводится по той же схеме, что и в случае (3.25). Опуская вполне понятные выкладки, отметим, что в итоге уравнение (3.32) преобразуется к виду

$$\left(\frac{2\eta_{n_1}}{\eta_{n_1} - \lambda} + \sum_{r=2}^{s}\frac{\eta_{n_r}}{\eta_{n_r}/4 - \lambda} - 1\right)(\eta_{n_1} - \lambda)\prod_{r=2}^{s}(-\eta_{n_r}/4 + \lambda) = 0. \tag{3.33}$$

Анализ уравнения (3.33) не вызывает затруднений. Действительно, из неравенств (3.31) заключаем, что значения $\lambda = \eta_{n_1}$ и $\lambda = \eta_{n_r}/4$, $r = 2, \ldots, s$, не являются его корнями. Следовательно, оно эквивалентно аналогичному (3.27) уравнению

$$\frac{2\eta_{n_1}}{\eta_{n_1} - \lambda} + \sum_{r=2}^{s} \frac{\eta_{n_r}}{\eta_{n_r}/4 - \lambda} = 1,$$

допускающему хотя бы один корень на полуоси $\lambda > 0$. Тем самым, состояние равновесия (3.28) системы (3.20) оказывается неустойчивым.

Итак, все инвариантные торы краевой задачи (3.1), размерности которых больше единицы, заведомо неустойчивы. Устойчивыми же здесь могут быть только циклы, которым в системе (3.18) отвечают состояния равновесия с одной ненулевой компонентой. Действительно, при условии

$$\gamma_0 > 0 \tag{3.34}$$

эта система допускает состояние равновесия с компонентами $\eta_0 = \gamma_0$, $\eta_m = 0$ при $m \geq 1$, являющееся экспоненциально устойчивым при выполнении неравенств

$$\gamma_m - 2\gamma_0 < 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 1 - \beta/\alpha - 2\gamma_0 < 0. \tag{3.35}$$

Если же при некотором натуральном n справедливо условие

$$\gamma_n > 0, \tag{3.36}$$

то система (3.18) имеет состояние равновесия с координатами $\eta_n = 4\gamma_n/3$, $\eta_m = 0$ при $m \neq n$. Упомянутое состояние равновесия оказывается экспоненциально устойчивым при дополнительных предположениях

$$\gamma_m - 4\gamma_n/3 < 0, \quad m \geq 0, \quad m \neq n, \quad 1 - \beta/\alpha - 4\gamma_n/3 < 0. \tag{3.37}$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению, вытекающему из общих результатов монографии [7].

Теорема 3.2. *Фиксируем произвольно натуральное n_* и предположим, что для всех $n = 0, 1, \ldots, n_*$ выполняются неравенства* (3.34)–(3.37). *Предположим также, что справедливы условия нерезонансности* (3.15). *Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_*)$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача* (3.1) *имеет набор экспоненциально орбитально устойчивых циклов*

$$x = x_{(n)}(\varphi, s, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_n(1 + \varepsilon\delta_n(\varepsilon)), \quad n = 0, 1, \ldots, n_*. \tag{3.38}$$

Здесь $x_{(n)}(\varphi, s, \varepsilon)$, $x_{(n)}(\varphi + 2\pi, s, \varepsilon) \equiv x_{(n)}(\varphi, s, \varepsilon)$ и $\delta_n = \delta_n(\varepsilon)$ – достаточно гладкие по своим переменным функции (*со значениями в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}$ соответственно*), *причем*

$$\delta_n(0) = 0, \quad x_{(n)}(\varphi, s, 0) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{3}}(\exp(i\varphi)h_{1,n} + \exp(-i\varphi)\overline{h}_{1,n})\cos n\pi s, & n > 0, \\ \sqrt{\gamma_0}(\exp(i\varphi)h_{1,0} + \exp(-i\varphi)\overline{h}_{1,0}), & n = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Следует отметить, что при фиксированных n_*, β условия (3.34)–(3.37) заведомо выполняются при достаточно больших значениях параметра α. Таким образом, теорема 3.2 гарантирует реализуемость в краевой задаче (3.1) явления буферности. В данном случае это явление состоит в том, что при согласованном увеличении α и уменьшении ε происходит неограниченное накапливание устойчивых циклов (3.38), (3.39).

Опираясь на всю совокупность полученных результатов, проведем сравнительный анализ динамических свойств дискретной цепочки (2.2) и ее непрерывного аналога (3.1). В связи с этим напомним, что в дискретной модели (2.2) при согласованном увеличении α, N и уменьшении ε происходит неограниченный рост числа сосуществующих устойчивых двумерных торов (2.41), (2.42). Следует добавить, что помимо торов при достаточно больших значениях α у нее существу-

ют и циклы, аналогичные циклам (3.38), (3.39). В амплитудной системе (2.35) этим циклам отвечают неподвижные точки

$$O_0^{(1)} = \{\eta_0 = \gamma_0, \eta_m = 0 \text{ при } m > 0\},$$
$$O_k^{(1)} = \{\eta_k = 4\gamma_k/3, \eta_m = 0 \text{ при } m \neq k\}, \quad k = 1,\ldots,N-1, \quad k \neq N/2, \tag{3.40}$$

а в случае четного N к ним добавляется еще одна, имеющая вид

$$O_{N/2}^{(1)} = \{\eta_{N/2} = 2\gamma_{N/2}, \eta_m = 0 \text{ при } m \neq N/2\}. \tag{3.41}$$

Но устойчивыми среди них при надлежащем увеличении α оказываются только $O_0^{(1)}$ и $O_{N/2}^{(1)}$.

В случае непрерывной модели ситуация диаметрально противоположна: все ее торы размерности два и выше неустойчивы, а устойчивыми могут быть лишь циклы (3.38), (3.39). Таким образом, установлено, что переход от дискретной системы (2.2) к непрерывной неправомерен, поскольку при таком переходе принципиально меняются динамические свойства модели.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляет интерес вопрос о том, насколько типичен феномен существования в нейронной сети ФитцХью–Нагумо устойчивых двухчастотных автоколебаний. В связи с этим обратим внимание на то, что он заведомо сохраняется при несимметричной нелинейной характеристике туннельного диода, т.е. в рамках системы (2.2) при

$$\mathcal{F}(x_j) = \mathrm{colon}(\alpha(u_j + pu_j^2 - u_j^3/3), -w_j - \beta(v_j - w_j), -w_j), \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{4.1}$$

где $p = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Действительно, для системы (2.2), (4.1) нормальная форма имеет прежний вид (2.32), а значит, остаются в силе и все последующие выводы.

Одной из причин разрушения феномена устойчивых двухчастотных автоколебаний является смена граничных условий. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим нейронную сеть ФитцХью–Нагумо с заземленными концами. Математической моделью такой сети служит система (2.2), (2.3), в которой граничные условия $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$ заменены на

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0. \tag{4.2}$$

Как и выше, для отыскания автоколебаний системы (2.2), (4.2) воспользуемся асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского. А именно, подставим в нее соотношения (2.14), где теперь

$$x_{j,0}(t,\tau) = \sum_{k=1}^{N} h_k^0(t,\tau)e_j^k, \quad j = 1,2,\ldots,N, \quad e_j^k = \sin\left(\frac{\pi k}{N+1}j\right),$$

а вектор-функции $h_k^0(t, \tau)$ задаются равенствами вида (2.13), в которых

$$\omega_k = \sqrt{1 + 4d\sin^2\left(\frac{\pi k}{2(N+1)}\right)}, \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{4.3}$$

В результате, действуя по описанному в разд. 2 правилу, сначала для фигурирующих в $h_k^0(t, \tau)$ амплитуд $z_k(\tau)$, $\xi_k(\tau)$ приходим к аналогичной (2.32) нормальной форме. Далее, полагая $\eta_k = |z_k(\tau)|^2$, $k = 1, 2, \ldots, N$, после замены $\alpha\tau \to \tau$ для переменных η_k получаем аналогичную (2.35) амплитудную систему

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = \left[\gamma_k - d_{k,k}\eta_k - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N} d_{k,m}\eta_m\right]\eta_k, \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{4.4}$$

Здесь γ_k – величины (2.36), вычисленные на частотах (4.3), а коэффициенты $d_{k,\,k}$, $d_{k,\,m}$ задаются аналогичными (2.33), (2.34) равенствами

$$d_{k,k} = \begin{cases} 3/4 \quad \text{при} \quad 1 \le k \le N, \quad k \ne (N+1)/2, \\ 1 \quad \text{при} \quad k = (N+1)/2 \ \text{ и четном } \ N+1, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$d_{k,m} = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad 0 \le k \le N, \quad m \ne k, N+1-k, \\ 3/2 \quad \text{при} \quad 1 \le k \le N, \quad m = N+1-k, \quad m \ne k. \end{cases} \tag{4.6}$$

Опираясь на формулы (2.36), (4.5), (4.6), нетрудно убедиться, что все состояния равновесия системы (4.4) с двумя ненулевыми компонентами экспоненциально неустойчивы. Устойчивыми же в ней при подходящем увеличении α оказываются аналогичные (3.40), (3.41) состояния равновесия

$$O_k^{(1)} = \{\eta_k = 4\gamma_k/3, \eta_m = 0 \text{ при } m \ne k\}, \quad k = 1,\ldots,N, \quad k \ne (N+1)/2.$$

Добавим еще, что в исходной системе (2.2), (4.2) этим состояниям равновесия отвечают устойчивые циклы.

Итак, нами предложен новый способ связи между отдельными нейронами ФитцХью–Нагумо, приводящий к цепочкам трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Попутно было установлено, что в таких цепочках при увеличении α, N и уменьшении ε происходит неограниченное накапливание устойчивых двумерных инвариантных торов или устойчивых циклов. В заключение отметим, что реализуется и промежуточный вариант, когда при α, $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ неограниченно увеличивается как число сосуществующих устойчивых циклов, так и устойчивых торов (точнее говоря, трехмерных торов). Опираясь на развитую в [5] методику, можно показать, что именно такая ситуация имеет место в системе (2.2) с периодическими граничными условиями $x_{j+2N} = x_j, j \in \mathbb{Z}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. V. 117. P. 500–544.
2. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445–466.
3. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061–2070.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
5. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Динамические эффекты, связанные с дискретизацией по пространству нелинейных, волновых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1812–1826.
6. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
7. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.