

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

На правах рукописи

Липатов Артем Владимирович

ЖЕСТКИЕ ПРОЦЕССЫ КХД ЗА РАМКАМИ КОЛЛИНЕАРНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ

Специальность 1.3.15 – «Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий» (01.04.23 – «Физика высоких энергий»)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2022

Содержание

1	Введение	5
2	Общие вопросы k_T-факторизационного подхода	21
2.1	Уравнения эволюции партонных распределений в протоне	21
2.1.1	Уравнения DGLAP	21
2.1.2	Уравнение BFKL	24
2.1.3	Уравнение CCFM	28
2.1.4	Подход PB	31
2.1.5	Подход KMR	35
2.2	TMD функции распределения партонов в протоне	37
2.2.1	Функции распределения A0 и B0	38
2.2.2	Функции распределения JH'2013 set 1 и set 2	39
2.2.3	Функция распределения MD'2018	40
2.2.4	Аналитические выражения для TMD распределений глюонов и морских кварков в приближении двойного скейлинга	44
2.3	Амплитуды партонных подпроцессов вне массовой поверхности	50
2.4	TMD факторизация эффектов физики больших и малых расстояний	56
3	Процессы рождения тяжелых кварков при высоких энергиях	58
3.1	Структурные функции ГНР	58
3.2	Процессы инклюзивного рождения b -струй на коллайдере LHC	65
3.3	Процессы рождения J/ψ и ψ' мезонов, возникающих из распадов b -адронов на коллайдере LHC	72
3.4	Процессы одиночного рождения t -кварков на коллайдере LHC	86
4	Процессы рождения связанных состояний тяжелых кварков при высоких энергиях	91
4.1	Амплитуды вне массовой поверхности	91
4.2	Полные и дифференциальные сечения	99
4.3	Выбор параметров и теоретические неопределенности	99
4.4	Определение значений непертурбативных матричных элементов чармониев	100
4.4.1	ψ' мезоны	100
4.4.2	χ_{cJ} мезоны	104
4.4.3	J/ψ и η_c мезоны	109
4.5	Поляризационные свойства чармониев	112
4.6	Определение значений непертурбативных матричных элементов боттомониев	117
4.6.1	$\Upsilon(3S)$ и $\chi_{bJ}(3P)$ мезоны	117
4.6.2	$\Upsilon(2S)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезоны	122

4.6.3	$\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезоны	126
4.7	Поляризационные свойства боттомониев	132
4.8	Определение значения волновой функции B_c мезонов из эксперимен- тальных данных	138
5	Процессы ассоциативного рождения фотонов (или тяжелых калиб- ровочных бозонов) и адронных струй на коллайдере LHC	145
5.1	Амплитуда вне массовой поверхности подпроцесса $g^* + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm +$ $q + \bar{q}'$	145
5.2	Вклад подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии	148
5.3	Полные и дифференциальные сечения	150
5.4	Коллинеарные расходимости, фрагментационный вклад и условие изо- ляции фотонов	151
5.5	Выбор параметров и теоретические неопределенности	153
5.6	Результаты расчетов	153
5.6.1	Процессы ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков	154
5.6.2	Процесс ассоциативного рождения прямых фотонов и лидиру- ющей струи адронов	158
5.6.3	Процессы ассоциативного рождения Z бозонов и струй тяжелых кварков	164
5.6.4	Связь глюонной динамики SCFM и динамики PB	168
6	Процессы рождения бозонов Хиггса при высоких энергиях	172
6.1	Амплитуды вне массовой поверхности	172
6.2	Полные и дифференциальные сечения	175
6.3	Реконструкция кинематики адронных струй	176
6.4	Выбор параметров и теоретические неопределенности	177
6.5	Результаты расчетов	178
6.5.1	Процессы инклюзивного рождения бозона Хиггса	178
6.5.2	Процессы ассоциативного рождения бозонов Хиггса и струй адронов	186
7	Монте-Карло генератор событий PEGASUS	193
7.1	Библиотека амплитуд партонных подпроцессов	195
7.2	Процессы, доступные для моделирования	196
7.3	Кинематика событий и интегрирование по фазовому объему	196
7.4	Потоковый фактор	198
7.5	Функции распределения глюонов и кварков в протоне	199
7.6	Генератор псевдослучайных чисел	200
7.7	Работа с генератором	201
7.8	PEGASUS PLOTTER	203

7.9	Установка и запуск генератора	206
8	Заключение	208

1 Введение

Диссертация посвящена развитию нового направления современной физики высоких энергий — исследованию различных жестких процессов квантовой хромодинамики (КХД) за рамками стандартного (коллинеарного) приближения с учетом ненулевого поперечного импульса начальных взаимодействующих глюонов и кварков. Изучаются процессы одиночного и парного рождения тяжелых (c , b или t) кварков, связанных состояний c и b кварков — S - и P -волновых чармониев, боттомониев и B_c мезонов, исследуются их поляризационные свойства. Рассматриваются процессы инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении одной или нескольких адронных струй) рождения прямых фотонов, калибровочных бозонов и бозонов Хиггса (наблюдаемого в различных модах распада) при высоких энергиях. Предложены новые функции распределения глюонов и кварков в протоне, зависящие от их поперечного импульса — неинтегрированные, или Transverse Momentum Dependent (TMD) партонные распределения. Разработан Монте-Карло генератор событий PEGASUS, позволяющий в автоматическом режиме производить вычисления сечений широкого ряда процессов КХД с учетом TMD динамики распределений глюонов в протоне.

Актуальность темы и степень ее разработанности

Новые возможности для экспериментального и теоретического изучения свойств адронной материи открываются с ростом энергии вводимых в строй ускорителей. Запуск Большого Адронного Коллайдера (Large Hadron Collider, или LHC) и последующее за ним скорое экспериментальное обнаружение бозонов Хиггса ознаменовало собой начало новой эры в современной физике высоких энергий. В настоящее время коллайдер LHC (Run II) позволяет проводить эксперименты при энергии сталкивающихся протонов $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, что предоставляет богатый потенциал для дальнейшего изучения хиггсовского механизма нарушения электрослабой симметрии, уточнения параметров Стандартной Модели (СМ), поиска различных проявлений эффектов новой физики за ее пределами (таких, как следствий суперсимметричных расширений СМ и моделей с дополнительными размерностями пространства-времени), проверки некоторых экзотических теорий. Проводятся эксперименты для обнаружения еще не открытых частиц СМ, а также изучаются моды распада, спиновые характеристики, уточняется время жизни и иные характеристики уже известных частиц.

Одну из ключевых ролей во всех аспектах физической программы LHC играет калибровочная теория сильного взаимодействия — квантовая хромодинамика (КХД), поскольку одним из основных объектов исследований на LHC являются жесткие процессы, происходящие в столкновениях протонов высоких энергий. В таких процессах присутствуют два или более характерных энергетических масштаба взаимодействия — ”мягкий” адронный масштаб, определяемый величиной порядка Λ_{QCD} , и ”жест-

кий” масштаб, который задается переданным во время взаимодействия импульсом. Типичными примерами являются процессы рождения тяжелых (c или b) кварков, их связанных состояний (кваркониев), инклюзивного или ассоциативного рождения калибровочных бозонов, хиггсовских частиц, струй адронов с большим поперечным импульсом и других. Наличие ”жесткого” масштаба μ^2 позволяет отделить динамику взаимодействия на малых расстояниях от эффектов физики больших расстояний, поскольку в области $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu$ бегущая константа связи КХД $\alpha_s(\mu^2)$ становится достаточно малой (явление асимптотической свободы в КХД). Последнее дает возможность применять хорошо известные методы теории возмущений для описания жесткого подпроцесса партонного рассеяния. Непертурбативная часть процесса, связанная с динамикой взаимодействия на больших расстояниях, присутствует в виде партонных (кварковых и/или глюонных) функций распределения в протоне и предполагается универсальной — она может быть определена в одном процессе и в дальнейшем использоваться для анализа других.

Для отделения (факторизации) пертурбативной части процесса от непертурбативной применяются так называемые теоремы о факторизации [1] (см. также [2, 3]), согласно которым сечения (или иные наблюдаемые) рассматриваемого процесса могут быть представлены в виде свертки сечения соответствующего жесткого подпроцесса партонного рассеяния, вычисленного в рамках теории возмущений КХД, и функций распределения партонов в сталкивающихся протонах. Наиболее часто в расчетах используется так называемая коллинеарная схема факторизации. Так, сечение процесса инклюзивного рождения частицы H в столкновениях двух протонов может быть представлено в виде

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \sum_{a,b} f_a(x_1, \mu_F^2) f_b(x_2, \mu_F^2) \otimes \hat{\sigma}_{ab}(x_1, x_2, \mu_R^2, \mu_F^2), \quad (1)$$

где μ_R^2 и μ_F^2 — ренормализационный и факторизационный масштабы¹ процесса; при этом учитываются вклады от всех возможных взаимодействий партонов типа a и b ($a, b = q, \bar{q}$ или g). Как функции распределения $f_a(x_1, \mu_F^2)$ и $f_b(x_2, \mu_F^2)$, так и сечения партонных подпроцессов $\hat{\sigma}_{ab}(x_1, x_2, \mu_R^2, \mu_F^2)$ зависят от долей x_1 и x_2 продольных импульсов начальных протонов, а поперечными импульсами взаимодействующих глюонов и кварков пренебрегают. Функции распределения партонов определяют вероятность обнаружить внутри протона кварк или глюон, переносящий некоторую долю продольного импульса этого протона; сечения партонных подпроцессов определяют вероятность взаимодействия партонов a и b друг с другом. Кварковые и глюонные распределения содержат информацию о мягкой стадии процесса, и, следовательно, не могут быть вычислены с помощью теории возмущений КХД. Тем не менее, их за-

¹Как правило, в качестве этих масштабов принимается величина μ^2 , что тем самым устраняет вклады, пропорциональные $\ln \mu^2/\mu_R^2$ и $\ln \mu^2/\mu_F^2$, которые возникают при вычислении поправок следующих порядков к партонным сечениям, рассчитанным в ведущем порядке теории возмущений КХД.

висимость от энергетического масштаба может быть рассчитана согласно теории возмущений и выражена в форме уравнений эволюции Докшицера-Грибова-Липатова-Альтарелли-Паризи (DGLAP) [4–7].

Впечатляющие результаты, полученные в рамках коллинеарной факторизации КХД с учетом вкладов высших порядков теории возмущений — а именно, следующего за ведущим (NLO) и даже, в некоторых случаях, двух последующих (NNLO и N³LO) — хорошо известны. В частности, отметим достигнутое великолепное согласие результатов теоретических расчетов с прецизионными экспериментальными данными для структурных функций протона $F_2(x, Q^2)$ [8, 9] и процессов рождения лептонных пар Дрелла-Яна [10, 11]. Тем не менее, достаточно часто возникают существенные трудности (главным образом, технического характера) при вычислении сечений ряда процессов, когда становится необходимо принимать во внимание вклады еще более высоких порядков теории возмущений КХД. Действительно, по мере увеличения порядка количество фейнмановских диаграмм, которые должны быть учтены в расчетах, возрастает многократно, что, в свою очередь, приводит к весьма и весьма трудоемким расчетам. Один из методов учета поправок высших порядков сводится к следующему. Было замечено, что вклады различных диаграмм в сечение неодинаковы: некоторые из них оказываются усилены большими логарифмическими коэффициентами определенного вида, которые определяют поведение сечений в той или иной кинематической области. Например, в области небольших поперечных импульсов p_T главную роль играют судаковские вклады, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n m/p_T$ (где m — масса конечного состояния); в области высоких энергий $\sqrt{s}$ основной вклад в сечение дают члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \alpha_s^n \ln^n 1/x$. Вклады диаграмм, усиленных большими логарифмическими коэффициентами, могут быть просуммированы во всех порядках теории возмущений с помощью соответствующих уравнений эволюции. Так, учет судаковских логарифмов может быть произведен в рамках подхода CSS (Collins-Soper-Sterman) [12, 13] (см. также [1]), а учет вкладов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/x$ — с помощью уравнений Балицкого-Фадина-Кураева-Липатова (BFKL) [14–16] или Катани-Чиафалони-Фиорани-Марчезини (CCFM) [17–20]. В обоих случаях факторизация сечений партонных подпроцессов рассеяния и функций распределения партонов обобщается за коллинеарное приближение:

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \sum_{a,b} f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2) f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2) \otimes \hat{\sigma}_{ab}^*(x_1, x_2, \mathbf{k}_{1T}^2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_R^2, \mu_F^2), \quad (2)$$

где $f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2)$ и $f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2)$ — функции распределения кварков и/или глюонов в протоне, зависящие от их поперечных импульсов $\mathbf{k}_{1T}^2$ и $\mathbf{k}_{2T}^2$ — неинтегрированные, или TMD (Transverse Momentum Dependent) партонные распределения. Такую обобщенную факторизацию обычно называют TMD-факторизацией (главным образом, в случае подхода CSS) или k_T -факторизацией (факторизацией при высоких энергиях, high energy factorization) [21–24].

Теоретическое обоснование факторизации вида (2) было проведено для процессов полуинклюзивного глубоконеупругого рассеяния (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering, или SIDIS), процессов рождения лептонных пар Дрелла-Яна в столкновениях адронов и процессов рождения адронов и струй в противоположных направлениях в e^+e^- -аннигиляции [12, 13, 25–34]. Подход k_T -факторизации, применимый в области высоких энергий, основан на работах [21–24], в которых рассматривались процессы рождения тяжелых (c и b) кварков в фотон-протонных, электрон-протонных и протон-протонных столкновениях. В настоящее время он достаточно широко применяется для феноменологических расчетов сечений (и иных наблюдаемых) различных процессов КХД (см., например, [35–50]). Несомненное преимущество этого подхода связано с удобством учета значительной части поправок следующих порядков теории возмущений КХД в форме TMD функций распределения глюонов и/или кварков в протоне. Кроме того, в отличие от коллинеарного приближения, учет поперечного импульса начальных кварков и глюонов в рамках факторизации (2) позволяет точно воспроизвести кинематику жестких подпроцессов уже в ведущем приближении. Отметим также, что в расчетах становится необходимо принимать во внимание зависимость амплитуд партонных подпроцессов от виртуальностей взаимодействующих партонов². Такие вычисления могут быть выполнены в рамках формализма, основанного на калибровочно-инвариантной эффективной теории поля [51–53], что обеспечивает калибровочную инвариантность рассчитанных амплитуд во всех порядках теории возмущений (несмотря на виртуальности начальных частиц). Калибровочно-инвариантное определение TMD функций распределения партонов было предложено и обсуждается в ряде работ [54–59].

Следует подчеркнуть еще раз, что использование упомянутых выше эволюционных уравнений (CSS, BFKL или CCFM) или других известных подходов для вычисления TMD партонных плотностей — таких, например, как подход KMR (Kimber-Martin-Ryskin) [60–62] — и расчеты сечений жестких подпроцессов в высоких порядках теории возмущений КХД в рамках коллинеарного приближения (1) представляют собой два разных способа учета пертурбативных вкладов. Но, конечно, не совсем одних и тех же — действительно, как было отмечено выше, с помощью эволюционных уравнений суммируются до бесконечно высоких порядков вклады, усиленные различного рода большими логарифмами, тогда как при расчетах в рамках коллинеарной факторизации учет ограничен лишь сравнительно низкими порядками (обычно двумя и весьма редко — тремя), но зато в расчет принимаются вклады всех возможных фейнмановских диаграмм.

К сожалению, в настоящее время подавляющее большинство расчетов сечений партонных подпроцессов рассеяния в рамках k_T -факторизационного подхода ограничены лидирующим порядком (LO) по константе связи КХД. Действительно, учет поперечного импульса взаимодействующих партонов как в жестком подпроцессе, так

²В рамках подхода CSS этой зависимостью обычно пренебрегают.

и в уравнениях эволюции немедленно приводит к опасности двойного счета — один и тот же вклад может быть учтен дважды под разными именами. Конечно, такая проблема не возникает в рамках обычного коллинеарного приближения ввиду отсутствия поперечного импульса у t -канальных партонов во время эволюции партонного каскада (в соответствии с уравнениями DGLAP). Тем не менее, некоторые методы вычислений в следующем за ведущим порядке (NLO) теории возмущений с помощью факторизации вида (2) были предложены недавно и обсуждаются в литературе (см., например, [41, 63, 64]).

Отметим, что TMD функции распределения партонов (и, в частности, глюонов) в протоне являются предметом активных исследований в последние годы (см., например, [62, 65–67]). От величины и формы этих распределений существенно зависят сечения многих процессов КХД, которые изучаются или будут изучаться как на современных коллайдерах (LHC), так и на коллайдерах следующего поколения, таких, как Nuclotron based Ion Collider fAcility (NICA), Future Circular Collider (FCC), Electron Ion Collider (EIC), Electron Ion Collider in China (EIC). Как уже было отмечено выше, теория не позволяет получить однозначные предсказания для распределений партонов в непертурбативной области. Поэтому на основе доступных экспериментальных данных и (возможно) некоторых дополнительных модельных предположений должны быть получены начальные партонные плотности, а затем с помощью решения соответствующих уравнений эволюции TMD распределения могут быть рассчитаны для любой кинематической области, даже еще не доступной экспериментально. Аналогичная процедура широко применяется различными группами (см., например, [68–70]) при вычислении обычных (коллинеарных) кварковых и глюонных плотностей. Тем более актуальным представляется изучение в рамках k_T -факторизационного подхода особого ряда жестких процессов КХД, сечения которых определяются главным образом подпроцессами глюон-глюонного слияния и которые, следовательно, являются наиболее чувствительными к функциям распределения глюонов в протоне. Использование экспериментальных данных для таких процессов с целью определения и/или уточнения параметров начальных TMD распределений важно дальнейшего развития k_T -факторизационного подхода — в частности, для уменьшения неопределенностей теоретических предсказаний (см. также обзор [71]).

Конечно, получение реалистичных оценок сечений различных процессов КХД с учетом вкладов высших порядков теории возмущений необходимо для планирования и постановки будущих экспериментов. Подобные оценки, а также понимание структуры высших поправок к ним важны для поиска эффектов новой физики за пределами СМ. В этом свете значительный интерес представляет развитие методов вычислений в рамках k_T -факторизационного подхода КХД и их непосредственное применение в феноменологических расчетах сечений и иных наблюдаемых широкого ряда процессов. В свою очередь, сопоставление большого количества данных,

уже полученных в экспериментах на коллайдере LHC (а также на других ускорителях — HERA, Tevatron, RHIC) с соответствующими теоретическими предсказаниями предоставит возможность дальнейшей проверки КХД (точнее, нашего ее понимания) — причем как ее пертурбативного аспекта, так и, в случае процессов рождения связанных состояний, различных основанных на КХД непертурбативных моделей их образования.

Действительно, следует отметить, что достаточно часто результаты расчетов оказываются в неожиданном противоречии с экспериментальными данными. Так, например, уже в первых экспериментах на коллайдере Tevatron было обнаружено, что сечения рождения J/ψ мезонов, вычисленные в рамках модели цветовых синглетов [72–75], более чем на порядок ниже измеренных. Этот факт привел к интенсивным теоретическим исследованиям процессов инклюзивного рождения чармониев и боттомониев (связанных состояний c или b кварков). Так, например, в рамках нерелятивистской КХД (NRQCD) [76–78] постулируется существование дополнительных (октетных) механизмов перехода пары тяжелых кварков в кварконий. Если в рамках обычной модели цветовых синглетов эта пара кварков в результате глюон-глюонного слияния рождается в синглетном по цвету состоянии с квантовыми числами наблюдаемого кваркония (за счет испускания жесткого глюона), то в модели цветовых октетов в партонном подпроцессе рождается пара тяжелых кварков, которая изначально может находиться как в синглетном, так и в октетном по цвету состоянии. Затем с помощью испускания мягкого глюона октетная пара кварков переходит в синглетное по цвету состояние, которое соответствует конечному кварконию. Расчеты в рамках NLO приближения³ NRQCD позволяют достичь хорошего согласия с экспериментальными данными для распределений по поперечному импульсу кваркониев (см., например, [80–88]). Это согласие достигается путем подбора значений так называемых непертурбативных матричных элементов (Nonperturbative Matrix Element, NME, или Long Distance Matrix Element, LDME), которые играют роль свободных параметров и описывают вероятность перехода октетной пары тяжелых кварков в наблюдаемое связанное состояние. Однако одной из ключевых проблем данного подхода является проблема описания поляризационных свойств наблюдаемых частиц. Если, как ожидается, доминирующий вклад в сечение определяется фрагментацией глюонов в октетные пары тяжелых кварков (точнее, в состояние $^3S_1^{(8)}$ с квантовыми числами глюона), то конечные кварконии должны быть преимущественно поперечно-поляризованными в области средних и больших поперечных импульсов. Последнее не согласуется с экспериментальными данными LHC для J/ψ и ψ' мезонов [89], которые указывают на неполяризованные частицы. К их деполяризации может приводить наличие большого вклада от состояния $^1S_0^{(8)}$ [80]; однако это предположение

³Отметим, что роль поправок следующего за ведущим порядком теории возмущений в области больших значений поперечного импульса оказывается существенной, порядка 50 – 100% как для синглетного, так и для октетных механизмов. Кроме того, в работе [79] были выполнены расчеты распределений по поперечному импульсу кваркониев в рамках NNLO* (древесного) приближения модели цветовых синглетов.

противоречит данным коллаборации LHCb [90] для сечений процесса инклюзивного рождения η_c мезонов. Дело в том, что непертурбативные матричные элементы J/ψ и η_c мезонов связаны между собой соотношениями, следующими из принципа спиновой симметрии тяжелых кварков, и поэтому должны быть одновременно определены из экспериментальных данных. Такая процедура представляется невозможной в рамках NRQCD [91, 92]. Аналогичная ситуация складывается в секторе боттомониев (см., например, [84–88]), несмотря на лучшее согласие с данными ЛНС для поляризационных параметров $\Upsilon(nS)$ мезонов — действительно, для описания их распределений по поперечному импульсу требуется несколько меньшая доля октетных вкладов. Таким образом, проблема одновременного описания как распределений по поперечному импульсу, так и поляризационных наблюдаемых в процессах рождения тяжелых кваркониев при высоких энергиях все еще остается открытой, несмотря на многолетние исследования, ведущиеся в этой области (см. также [93–95]). Возможное решение этой проблемы, связанное со специальным механизмом перехода промежуточного октетного состояния пары тяжелых кварков в наблюдаемое синглетное было предложено в работе [96].

Долгое время значительным лимитирующим фактором при использовании k_T -факторизационного подхода КХД для вычисления сечений процессов ассоциативного рождения частиц и струй адронов была практическая сложность правильного учета кинематики струй, образующихся в результате излучения кварков и глюонов в начальном состоянии. Недавно эта проблема получила решение благодаря новой версии Монте-Карло генератора событий CASCADE [97], с помощью которого вычисления на партонном уровне могут быть дополнены моделированием вкладов TMD партонных ливней. Это открывает новые возможности для изучения таких процессов, как процессы ассоциативного рождения прямых фотонов, бозонов Хиггса или лептонных пар Дрелла-Яна и адронных струй, что тем самым существенно расширяет область применимости k_T -факторизационного подхода КХД.

Предложенные в диссертации подходы и методы позволяют быстро интерпретировать и осмыслить поток непрерывно поступающих новых экспериментальных данных для широкого ряда жестких процессов, в том числе процессов одиночного и парного рождения тяжелых кварков, их связанных состояний, процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении одной или нескольких адронных струй) рождения прямых фотонов, тяжелых калибровочных бозонов и бозонов Хиггса (наблюдаемого в различных модах распада) при высоких энергиях.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования диссертационной работы являются жесткие процессы КХД при высоких энергиях. В качестве предмета исследования были рассмотрены разнообразные характеристики (полные и дифференциальные сечения, отношения сечений, поляризационные наблюдаемые) процессов одиночного и парного рожде-

ния тяжелых кварков, их связанных состояний, процессов инклюзивного и ассоциативного рождения прямых фотонов, тяжелых калибровочных бозонов и хиггсовских частиц при высоких энергиях.

Цели и задачи

Целью работы является улучшение понимания динамики адронных взаимодействий и развитие методов вычислений сечений жестких процессов КХД за рамками стандартного (коллинеарного) приближения с учетом ненулевого поперечного импульса начальных взаимодействующих глюонов и кварков. Были решены следующие задачи:

1. Вывод нескольких новых TMD функций распределения глюонов и кварков в протоне (в лидирующем приближении). Применение различных подходов для получения этих распределений, в частности, метода, основанного на численном решении уравнения эволюции CCFM. Определение численных значений ряда феноменологических параметров соответствующих начальных TMD функций распределений с помощью подгонки ("фита") теоретических предсказаний к экспериментальным данным для некоторых процессов, полученным на коллайдерах HERA, Tevatron, LHC и RHIC.
2. Изучение вкладов тяжелых (c и b) кварков в структурные функции протона $F_2(x, Q^2)$ и $F_L(x, Q^2)$ в рамках k_T -факторизационного подхода КХД. Сравнение результатов расчетов с последними экспериментальными данными, полученными коллаборациями H1 и ZEUS на коллайдере HERA для этих наблюдаемых, а также для сечений $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$ и $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$ в широком диапазоне изменения значений x и Q^2 .
3. Вычисление сечений рождения струй b -кварков в протон-протонных столкновениях при энергиях коллайдера LHC. Изучение различных корреляций между импульсами двух лидирующих струй с целью поиска наблюдаемых, наиболее чувствительных к динамике TMD распределений глюонов в протоне. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS.
4. Вычисление сечений одиночного и парного рождения чармониев (ψ' и J/ψ мезонов), возникающих из распадов b -адронов на коллайдере LHC с помощью фрагментационного механизма. Моделирование эффектов, связанных с учетом партонных ливней в начальном и/или конечном состоянии. Выяснение роли механизма двойного партонного рассеяния. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными коллабораций CMS, ATLAS и LHCb, полученными в различных кинематических областях при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ.

5. Исследование процесса одиночного рождения t -кварков в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC. Вычисление амплитуды вне массовой поверхности соответствующего партонного подпроцесса с учетом виртуальностей как начального глюона, так и кварка. Изучение чувствительности рассчитанных полных и дифференциальных сечений к TMD распределениям партонов в протоне в области промежуточных и больших значений переменной x . Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными коллорабациями CMS и ATLAS при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ.
6. Исследование процессов инклюзивного прямого рождения S - и P -волновых чармониев (η_c , J/ψ , ψ' и χ_c мезонов) в столкновениях протонов на коллайдере LHC. Использование специальной модели [96], основанной на классической теории мультипольного разложения излучения для описания перехода октетных пар очарованных кварков в наблюдаемый чармоний (при вычислении амплитуд вне массовой поверхности соответствующих подпроцессов). Определение значений непертурбативных матричных элементов всего семейства чармониев из экспериментальных данных различных энергий ($\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ) коллорабаций CMS и ATLAS для распределений по поперечному импульсу. Изучение поляризационных свойств ψ' и J/ψ мезонов. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными LHC.
7. Исследование процессов инклюзивного рождения S - и P -волновых боттомониев — $\Upsilon(nS)$ и $\chi_b(mP)$ мезонов — в столкновениях протонов на коллайдере LHC. Использование специальной модели [96], основанной на классической теории мультипольного разложения излучения для описания перехода октетных пар b -кварков в наблюдаемый боттомоний. Определение значений непертурбативных матричных элементов боттомониев из экспериментальных данных, полученных коллорабациями CMS и ATLAS при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Изучение поляризационных свойств $\Upsilon(nS)$ мезонов. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными LHC.
8. Вычисление сечений процессов инклюзивного рождения псевдоскалярных и векторных B_c мезонов в протон-протонных и протон-антипротонных столкновениях высоких энергий в рамках k_T -факторизационного подхода КХД. Определение значения волновой функции B_c мезонов с помощью экспериментальных данных коллорабаций CDF и LHCb.
9. Исследование процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй адронов (в том числе струй тяжелых кварков) в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC в рамках k_T -факторизационного подхода КХД. Использование Монте-Карло генератора CASCADE для точного определения кинематики адронных струй. Изучение зависимости рассчитанных сечений от выбора TMD глюонных плотностей в протоне. Сравнение полученных результатов как

с предсказаниями, полученными в рамках стандартной (коллинеарной) факторизации КХД (в NLO приближении), так и с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS.

10. Вычисление сечений процессов ассоциативного рождения Z бозонов и одной или двух струй тяжелых (c или b) кварков в рамках k_T -факторизационного подхода КХД. Изучение различных корреляций между импульсами конечных частиц в таких процессах. Оценка вклада механизма двойного партонного рассеяния. Выяснение связи между динамикой TMD распределений глюонов, описываемых уравнением эволюции CCFM, и динамикой партонных распределений в протоне, полученных в рамках подхода PB [65,66] (с учетом необходимой в последнем случае процедуры вычитания двойного счета между вкладами реальных излучений в подпроцессах $2 \rightarrow 3$ и вкладами подпроцессов $2 \rightarrow 2$). Сравнение результатов расчетов с предсказаниями, полученными с помощью коллинеарной факторизации КХД (в LO и NLO приближениях), а также с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS.
11. Вычисление сечений процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении струй адронов) рождения бозонов Хиггса на коллайдере LHC с его последующим распадом по различным модам: $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ и $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm\mu^\mp\nu\bar{\nu}$. Численное моделирование кинематики адронных струй с помощью Монте-Карло генератора CASCADE. Изучение различных корреляций между импульсами конечных частиц с целью поиска наблюдаемых, наиболее чувствительных к динамике TMD распределений глюонов в протоне. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, полученными коллаборациями CMS и ATLAS при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ.
12. Разработка нового общедоступного Монте-Карло генератора событий, позволяющего производить расчеты сечений рассмотренных выше (и некоторых других) процессов, происходящих при столкновениях протонов (или протона и антипротона) с учетом TMD динамики распределений глюонов и кварков. В состав генератора должна входить библиотека, включающая в себя значительное число амплитуд вне массовой поверхности различных подпроцессов взаимодействия кварков и глюонов, в том числе таких, которые отсутствуют в других генераторах — CASCADE [97] и KATIE [98], а также набор TMD функций распределения партонов в протоне, которые наиболее часто применяются в феноменологических исследованиях в настоящее время. Разработка удобного и интуитивно понятного графического интерфейса, который позволит проводить моделирование событий пользователю, даже не обладающему специальными навыками программирования и/или опытом работы с другими генераторами. Результаты вычислений по желанию пользователя должны быть записаны в выходной файл в общепринятом формате Les Houches Event (*.lhe) [99] для

их дальнейшего анализа и обработки.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Использование в расчетах двух предложенных TMD функций распределения глюонов в протоне приводит к лучшему согласию предсказаний (по сравнению с глюонными распределениями, полученными недавно другими группами) с экспериментальными данными для сечений ряда жестких процессов, изучаемых на коллайдерах HERA и LHC.
2. Подход k_T -факторизации в КХД позволяет достичь одновременного описания экспериментальных данных LHC для сечений процессов рождения одной или двух b -струй и процессов одиночного и парного рождения ψ' и J/ψ мезонов, возникающих из распадов b -адронов. Распределения по разности азимутальных углов между импульсами конечных частиц, разности их быстрот, расстоянию между этими частицами в плоскости азимутальных углов и быстрот, а также распределения по инвариантной массе и поперечному импульсу конечного состояния наиболее чувствительны к выбору TMD глюонной плотности в протоне. Вклад механизма двойного партонного рассеяния в сечения рассматриваемых процессов весьма мал и составляет около 2%.
3. Использование специальной модели, основанной на теории мультипольного разложения излучения для описания перехода промежуточных октетных состояний пары тяжелых кварков в наблюдаемое синглетное позволяет достичь самосогласованного описания полного набора экспериментальных данных (как для распределений по поперечному импульсу, так и для поляризационных наблюдаемых, а также различных отношений сечений) процессов инклюзивного рождения S - и P -волновых чармониев и боттомониев (J/ψ , ψ' , η_c , χ_c , $\Upsilon(nS)$ и $\chi_b(mP)$ мезонов) полученных на коллайдерах Tevatron и LHC.
4. Предсказания k_T -факторизационного подхода КХД (с учетом вычисленных в рамках коллинеарного приближения вкладов подпроцессов, включающих кварки в начальном состоянии) находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными LHC для широкого ряда процессов высоких энергий: процессов рождения фотонов или калибровочных бозонов в сопровождении адронных струй или тяжелых (c или b) кварков, процессов одиночного рождения t -кварков, процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении струй адронов) рождения бозонов Хиггса, наблюдаемых в различных модах распада. Наиболее чувствительны к выбору TMD глюонной плотности в протоне наблюдаемые, связанные с кинематикой адронных струй (такие, как, например, распределения по разности быстрот конечной частицы и лидирующей струи, инвариантной массе этой системы, разности быстрот двух лидирующих струй).

5. Новый общедоступный Монте-Карло генератор событий PEGASUS позволяет в автоматическом режиме вычислять сечения различных жестких процессов КХД с учетом TMD динамики глюонных распределений в протоне. Отличительными особенностями генератора являются обширная библиотека амплитуд вне массовой поверхности партонных подпроцессов (многие из которых отсутствуют в других генераторах) и исключительная простота использования.

Научная новизна

Научная новизна состоит в применении k_T -факторизационного подхода КХД к теоретическому описанию новых экспериментальных данных для широкого ряда жестких процессов КХД при энергиях современных коллайдеров. Некоторые из этих процессов (например, процессы ассоциативного рождения калибровочных бозонов и струй тяжелых кварков) только недавно стали доступны для экспериментального анализа. Выделен спектр наблюдаемых, которые могут быть использованы для проверки эволюционной динамики партонных распределений в протоне. Впервые установлено взаимное соответствие между результатами вычислений с использованием различных уравнений КХД эволюции (CCFM [17–20] и РВ [65, 66]) для глюонных и кварковых распределений в протоне.

Предложены две новые TMD функции распределения глюонов, которые обеспечивают лучшее согласие результатов расчетов с экспериментальными данными для ряда процессов (по сравнению с глюонными плотностями, полученными другими группами).

Впервые было достигнуто одновременное и самосогласованное описание данных ЛНС для распределений по поперечному импульсу семейства чармониев — в частности, J/ψ и η_c мезонов. Предложен метод определения значений непертурбативных матричных элементов S - и P -волновых боттомониев с использованием только экспериментальных данных для распределений $\Upsilon(nS)$ мезонов по поперечному импульсу и различных отношений сечений рождения $\Upsilon(nS)$ и $\chi_b(mP)$ частиц. Впервые модель формирования связанных состояний тяжелых кварков, основанная на классической теории разложения излучения по мультиполям, была успешно применена для описания экспериментальных данных для поляризационных параметров ψ' , J/ψ , χ_c и $\Upsilon(nS)$ мезонов. Тем самым предложено возможное решение известной проблемы одновременного описания как данных для распределений по поперечному импульсу, так и поляризационных свойств тяжелых кваркониев. Эта проблема долгое время оставалась нерешенной в КХД.

Предложен метод определения значения волновой функции B_c мезонов с помощью экспериментальных данных для отношений сечений процессов инклюзивного рождения B_c и B^+ мезонов.

Разработанный новый Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100], позволяющий проводить вычисления как в рамках k_T -факторизационного подхода, так и в

рамках стандартной (коллинеарной) факторизации КХД (в ведущем порядке теории возмущений) включает в себя значительное количество амплитуд вне массовой поверхности партонных подпроцессов, отсутствующих в других генераторах. Последнее существенно выделяет его из ряда аналогичных инструментов.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе результаты были использованы коллаборациями D0 [101] и CDF [102] при анализе экспериментальных данных для процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков на коллайдере Tevatron. Предложенные новые TMD функции распределения глюонов в протоне были включены в состав общедоступной библиотеки TMDLIB [103]. Эта библиотека обеспечивает удобный интерфейс к различным TMD распределениям партонов и широко используется при расчетах с помощью Монте-Карло генераторов событий CASCADE [97] и KATIE [98]. Вычисленные амплитуды вне массовой поверхности различных партонных подпроцессов были включены в состав генераторов CASCADE и PEGASUS [100]. Предложенные методы определения значений непертурбативных матричных элементов и волновых функций различных связанных состояний тяжелых кварков — чармониев, боттомониев, дважды тяжелых (B_c) мезонов — могут быть использованы для дальнейшего анализа экспериментальных данных, полученных как на современных коллайдерах, так и на коллайдерах следующего поколения. Генератор PEGASUS, несмотря на то, что был разработан достаточно недавно, уже был использован коллаборацией ALICE в анализе экспериментальных данных для сечений процесса инклюзивного рождения J/ψ мезонов в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергиях $\sqrt{s} = 5.02$ и 13 ТэВ [104, 105]. Конечно, он может также применяться для различных феноменологических исследований как теоретическими, так и экспериментальными группами в НИИЯФ МГУ, ОИЯИ, ФИАНе и других международных научных центрах, а также в студенческих курсах.

Методология и методы исследования

Для вычисления сечений различных жестких подпроцессов рассеяния используется k_T -факторизационный подход КХД, основанный на уравнениях глюонной эволюции типа BFKL. Одним из преимуществ этого подхода связано с удобством учета значительной части поправок следующих порядков теории возмущений КХД в форме TMD функций распределения партонов в протоне. В расчётах применяются несколько различных партонных распределений, полученных как с помощью численного решения уравнения эволюции CCFM, так и в рамках формализма KMR. Описание формирования связанных состояний тяжелых кварков (в рамках нерелятивистского приближения КХД) производится с использованием модели [96], основанной на классической теории разложения излучения по мультиполям. Для реконструкции

кинематики адронных струй проводится моделирование процессов излучения глюонов в начальном состоянии с помощью алгоритма TMD генерации партонных ливней (в соответствии с уравнением CCFM) Монте-Карло генератора CASCADE. Программный код разработанного генератора событий PEGASUS написан на языке C++ с использованием ряда подпрограмм, написанных на языке Фортран. Интерфейс к некоторым функциям распределения партонов в протоне обеспечивается с помощью свободно распространяемых программ группы ММНТ и коллаборации STEQ, которые включены в состав генератора. Для выполнения численного интегрирования методом Монте-Карло применяется программа VEGAS.

Достоверность

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемых методов квантовой теории поля, применением современной системы символьных вычислений FORM [106], сравнением с известными результатами вычислений других авторов, а также поэтапным сравнением предсказаний с различными экспериментальными данными, многие из которых являются критичными к основным характеристикам k_T -факторизационного подхода.

Личный вклад автора

Все представленные результаты были получены либо самим автором, либо при его определяющем участии.

Апробация работы

Основные результаты работы были опубликованы в 42 статьях в высокорейтинговых реферируемых научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Они также докладывались на семинарах отдела теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ, сектора элементарных частиц лаборатории ядерных проблем ОИЯИ, группы DESY CMS QCD (Hamburg, Германия), группы теоретической физики института современной физики академии наук КНР (IMP CAS, Lanzhou, Китай) и были представлены автором или соавторами на различных международных конференциях и симпозиумах: "Resummation, Evolution, Factorization" (REF'2020, online, Англия), "XXXII International Workshop on High Energy Physics: Hot Problems of Strong Interactions" (online, Россия), "XXIV International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory" (QFTHEP'2019, Сочи, Россия), "Resummation, Evolution, Factorization" (REF'2018, Krakow, Польша), "XXIV International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems" (Дубна, Россия), "XXIII International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory" (QFTHEP'2017, Ярославль, Россия), "Resummation, Evolution, Factorization" (REF'2015,

Hamburg, Германия), "XXII International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory" (QFTHEP'2015, Самара, Россия), "VI International Workshop on Multiple Partonic Interactions at the LHC" (MPI@LHC'2014, Krakow, Польша), "V International Workshop on Multiple Partonic Interactions at the LHC" (MPI@LHC'2013, Antwerp, Бельгия), "International Workshop on Diffraction in High-Energy Physics" (Diffraction'2012, Puerto del Carmen, Испания), "XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems" (Дубна, Россия), "III International Workshop on Multiple Partonic Interactions at the LHC" (MPI@LHC'2011, Hamburg, Германия), "International Workshop on Diffraction in High Energy Physics" (Diffraction'2010, Otranto, Италия), "XVII International Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Topics" (DIS'2009, Madrid, Испания), "XXXIX International Symposium on Multiparticle Dynamics" (ISMD'2009, Гомель, Белоруссия), "XVI International Workshop on Deep Inelastic Scattering" (DIS'2008, London, Англия).

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации составляет 259 страниц, включая 115 рисунков и 11 таблиц. Список литературы содержит 448 наименований.

В первой главе излагаются основные положения k_T -факторизационного подхода КХД, приводится явный вид и решение некоторых уравнений эволюции партонных распределений в лидирующем логарифмическом приближении. Представлены используемые в работе TMD функции распределения глюонов и кварков, в том числе предложенные автором. Обсуждаются различные методы вычисления амплитуд партонных подпроцессов вне массовой поверхности.

Во второй главе k_T -факторизационный подход применяется для изучения процессов рождения тяжелых кварков при высоких энергиях. Вычисляются вклады c и b кварков в структурные функции протона $F_2(x, Q^2)$ и $F_L(x, Q^2)$ в широком диапазоне изменения значений x и Q^2 . Рассматриваются процессы инклюзивного рождения b -струй, процессов одиночного и парного рождения ψ' и J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов и процессы одиночного рождения t -кварков в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC.

В третьей главе исследуются процессы рождения связанных состояний тяжелых кварков: процессы инклюзивного рождения S - и P -волновых чармониев, боттомониев, а также B_c мезонов на коллайдерах Tevatron и LHC. Вычисляются полные и дифференциальные сечения этих процессов, производится определение численных значений соответствующих непертурбативных матричных элементов и изучаются поляризационные свойства рассматриваемых частиц.

Четвертая и пятая главы посвящены исследованию процессов рождения прямых фотонов, калибровочных бозонов в сопровождении как струй тяжелых (c или b) кварков, так и струй адронов, а также изучению процессов инклюзивного и ассоциатив-

ного рождения хиггсовских частиц, наблюдаемых в различных модах распада на коллайдере LHC.

В шестой главе обсуждаются основные возможности и характеристики Монте-Карло генератора событий PEGASUS. Детально описаны процедуры его установки, запуска и последующая работа с генератором.

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

2 Общие вопросы k_T -факторизационного подхода

2.1 Уравнения эволюции партонных распределений в протоне

Как было отмечено выше, описание процессов с определенным масштабом виртуальности μ^2 с участием адронов (протонов) в начальном состоянии и выделенными частицами в конечном в рамках КХД производится с помощью функций распределения кварков или глюонов $a(x, \mu^2)$ в протоне ($a = q$ или g). Последние имеют простой физический смысл: в системе бесконечного импульса, в которой начальный протон является ультрарелятивистским (когда модуль его импульса p стремится к бесконечности), величина $a(x, \mu^2)dx$ представляет собой число партонов типа a , обладающих продольным импульсом родительского протона в интервале от xp до $(x + dx)p$. Физические наблюдаемые определяются сверткой партонных распределений в протоне и сечений соответствующих жестких подпроцессов рассеяния. В отличие от партонных сечений, функции распределения содержат информацию о мягкой стадии процесса и поэтому не могут быть вычислены с помощью теории возмущений КХД. Однако их зависимость от масштаба μ^2 может быть рассчитана согласно теории возмущений и выражена в форме так называемых уравнений эволюции. Вид этих уравнений зависит от точности, с которой учитываются вклады больших логарифмов $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ и/или $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$.

2.1.1 Уравнения DGLAP

В ведущем порядке теории возмущений КХД, в котором при вычислении любой наблюдаемой учитываются члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ (причем степени $\ln 1/x$ удерживаются в коэффициентах), уравнения эволюции кварковых и глюонных распределений называются уравнениями Докшицера-Грибова-Липатова-Альтарелли-Паризи (DGLAP) [4–7] и могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial a(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \sum_b \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ab} \left(\alpha_s(\mu^2), \frac{x}{z} \right) b(z, \mu^2). \quad (3)$$

В этом приближении учитываются вклады диаграмм кваркового и глюонного обмена лестничного типа, в которых поперечные импульсы испускаемых партонов строго упорядочены:

$$q_{1T}^2 \gg q_{2T}^2 \gg \dots \gg q_{nT}^2, \quad (4)$$

при этом предполагается, что величина q_{1T}^2 уже пренебрежимо мала. Всего функций распределения партонов различного типа насчитывается $2N_f + 1$, где N_f — число кварковых ароматов, участвующих в эволюции. Суммирование вкладов, пропорци-

ональных $\alpha_s^n \ln^n \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2$, связано с учетом партонных эмиссий в области малых углов между импульсами t -канальных и испускаемых партонов. Отметим, что соотношение (4) лежит в основе часто используемого в расчетах принципа коллинеарной факторизации (1) партонных распределений и амплитуд жесткого подпроцесса рассеяния кварков и/или глюонов. Функции расщепления $P_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z)$ определяют вероятность испускания партоном b другого партона a , обладающего долей импульса z родительского партона и могут быть представлены в виде разложения по степеням бегущей константы связи КХД:

$$P_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \right)^n P_{ab}^{(n-1)}(z). \quad (5)$$

Исходя из ароматовой симметрии группы $SU(N_f)$ и инвариантности относительно преобразований зарядового сопряжения легко убедиться в справедливости следующих соотношений (во всех порядках теории возмущений):

$$\begin{aligned} P_{q_i g}(\alpha_s(\mu^2), z) &= P_{\bar{q}_i g}(\alpha_s(\mu^2), z) \equiv P_{qg}(\alpha_s(\mu^2), z), \\ P_{g q_i}(\alpha_s(\mu^2), z) &= P_{g \bar{q}_i}(\alpha_s(\mu^2), z) \equiv P_{gq}(\alpha_s(\mu^2), z), \\ P_{q_i q_j}(\alpha_s(\mu^2), z) &= P_{\bar{q}_i \bar{q}_j}(\alpha_s(\mu^2), z) \equiv P_{qq}^{NS}(\alpha_s(\mu^2), z) \delta_{ij} + P_{qq}^S(\alpha_s(\mu^2), z), \\ P_{q_i \bar{q}_j}(\alpha_s(\mu^2), z) &= P_{\bar{q}_i q_j}(\alpha_s(\mu^2), z) \equiv P_{q\bar{q}}^{NS}(\alpha_s(\mu^2), z) \delta_{ij} + P_{q\bar{q}}^S(\alpha_s(\mu^2), z), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции $P_{qq}^{NS}(\alpha_s(\mu^2), z)$, $P_{q\bar{q}}^{NS}(\alpha_s(\mu^2), z)$ и $P_{qq}^S(\alpha_s(\mu^2), z)$, $P_{q\bar{q}}^S(\alpha_s(\mu^2), z)$ отвечают несинглетным (валентным) и синглетным вкладам, при этом в ведущем порядке $P_{q\bar{q}}^{(0)NS}(z) = P_{qq}^{(0)S}(z) = P_{q\bar{q}}^{(0)S}(z) = 0$. Кроме того, используя закон сохранения энергии-импульса, легко получить, что

$$\sum_b \int_0^1 dz z P_{ba}(\alpha_s(\mu^2), z) = 0. \quad (7)$$

Лидирующие члены разложения функций расщепления (5) имеют вид [4–7]:

$$\begin{aligned} P_{qq}^{(0)}(z) &= C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad P_{qg}^{(0)}(z) = T_R [(1-z)^2 + z^2], \\ P_{gq}^{(0)}(z) &= C_F \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right], \\ P_{gg}^{(0)}(z) &= 2C_A \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right] + \frac{11C_A - 4T_R N_f}{6} \delta(1-z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$C_A = N_c, \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad T_R = \frac{1}{2}, \quad (9)$$

причем функционал $1/(1-z)_+$ определяется как

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} \equiv \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}. \quad (10)$$

В этом же приближении бегущая константа связи КХД вычисляется из ренормгруппового уравнения в главном (однопетлевом) порядке. В следующих порядках теории возмущений коэффициенты разложения (5) зависят от выбора схемы перенормировки. Так, в схеме $\overline{\text{MS}}$ эти коэффициенты в двухпетлевом приближении приведены, например, в работах [107, 108]; в трехпетлевом приближении их можно найти в работах [109, 110].

Численное или аналитическое решение уравнений (3) позволяет получить функции распределения партонов в протоне для любых значений μ^2 при заданных начальных условиях⁴. Так, в дваждылогарифмическом приближении, в котором в коэффициентах при $\alpha_s^n \ln^n \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2$ удерживается только старшая степень $\ln 1/x$, асимптотическое выражение для глюонной плотности имеет вид [4–7]:

$$xg(x, \mu^2) \sim \exp \sqrt{\frac{48}{11 - 2N_f/3} \ln \frac{\ln \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2}{\ln \mu_0^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2} \ln 1/x}. \quad (11)$$

где μ_0 — некоторый масштаб (порядка адронного масштаба, $\mu_0 \sim 1$ ГэВ), при котором определяются начальные распределения партонов. Как видно из (11), функция распределения глюонов в пределе $x \rightarrow 0$ растет быстрее, чем любая степень $\ln 1/x$. Аналогичный результат справедлив также и для морских кварков, поскольку основной вклад в распределения морских кварков в области малых x вносит процесс глюонного расщепления $g \rightarrow q\bar{q}$.

Быстрый рост партонных плотностей при $x \rightarrow 0$, пропорциональный, как следует из (11), энергии $\sqrt{s}$, приводит к нарушению условия унитарности [21] и ограничения Фруассара [111], согласно которому сечения процессов не могут возрасти быстрее, чем $\ln^2 s$ при $s \rightarrow \infty$. Это влечет за собой необходимость учета поправок высших порядков. Такой учет может быть проведен численно с помощью различных программных пакетов — таких, как, например, QCDNUM [112], NORPET [113], APFEL [114], QCD-PEGASUS [115], которые дают возможность получить решения уравнения эволюции DGLAP с точностью до NNLO вкладов. Отметим, что подход, основанный использовании уравнений DGLAP с учетом поправок следующих порядков приводит к хорошему описанию экспериментальных данных, в частности, для структурных функций протона, полученных на коллайдере HERA (см., например, [8, 9]).

⁴Начальные условия для кварковых и глюонных распределений не вычисляются в рамках пертурбативной КХД. Их можно определить, например, из экспериментов по глубоконеупругому ep -рассеянию.

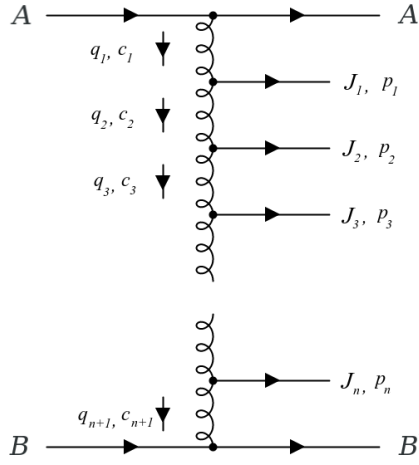


Рис. 1: Амплитуда процесса множественного рождения частиц $A + B \rightarrow A' + J_1 + \dots + J_n + B'$ в мультиреджевской кинематике.

2.1.2 Уравнение BFKL

Уравнения эволюции DGLAP позволяют просуммировать вклад слагаемых, усиленных в каждом порядке теории возмущений степенями $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$. Однако наряду с ними при малых значениях отношения μ^2/s существенную роль (как в функциях распределения партонов, так и в сечении жесткого подпроцесса рассеяния) начинают играть вклады, пропорциональные $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$, которые возникают при интегрировании по широкой области быстрот испущенных партонов. В области малых x их вклад оказывается даже важнее вкладов логарифмических членов, пропорциональных $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$. Задача их суммирования может быть выполнена в рамках подхода Балицкого-Фадина-Кураева-Липатова (BFKL) [14–16], основанного на гипотезе ”реджезации” глюона. Эта гипотеза возникла в результате аналитических вычислений амплитуд рассеяния частиц в нескольких первых порядках теории возмущений. Оказалось, что при больших энергиях сталкивающихся частиц s и фиксированных переданных импульсах t (так называемый реджевский предел) амплитуды процессов с обменом глюоном в t -канале с учетом радиационных поправок имеют вид амплитуд рассеяния в борновском приближении, но с обменом скалярной частицей. К такому же результату приводит наличие особенностей парциальных амплитуд (полюсов Редже) в перекрестном канале (т.е. при $t = m^2$) в плоскости комплексного углового момента модели Редже [116]. Обмен полюсом Редже является обобщением обычного обмена частицей со спином J и массой m на комплексные значения J . Положение этих полюсов определяется траекторией Редже $\alpha(t)$, которая зависит от передачи импульса t и при $t = m^2$ равна спину J соответствующей частицы; при этом значение $\alpha(0)$ называют интерсептом, а производную $\alpha'(0)$ — наклоном траектории Редже.

Гипотеза реджезации глюонов, которая в настоящее время доказана [117] как в лидирующем логарифмическом (Leading Logarithmic Approximation, или LLA), так и в следующем за ним (Next-to-Leading Logarithmic Approximation, или NLLA) прибли-

жениях⁵, обеспечивает простую факторизованную форму амплитуд процессов множественного рождения частиц в мультiredжевской кинематике. Такая кинематика соответствует случаю, когда частицы в конечном состоянии имеют ограниченные (не растущие с энергией) поперечные импульсы и хорошо разделены по быстротам (см. рис. 1). В этом случае t -канальные партоны обладают одной большой компонентой импульса в переменных светового конуса, а также переносят поперечный импульс того же порядка. Соответствующие амплитуды выражаются через эффективные вершины взаимодействия реджезованных глюонов с обычными частицами и соответствующие реджевские траектории, причем вся энергетическая зависимость определяется последними (см. также [118]):

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(A + B \rightarrow A' + J_1 + \dots + J_n + B') \sim \\ & \sim \Gamma_{-AA'}^{c_1} \left(\prod_{i=1}^n \Gamma_{+-J_i}^{c_i c_{i+1}}(q_i, -q_{i+1}) \left[\frac{s_i}{s_0} \right]^{\omega(t_i)} \frac{1}{t_i} \right) \frac{1}{t_{n+1}} \left[\frac{s_{n+1}}{s_0} \right]^{\omega(t_{n+1})} \Gamma_{+BB'}^{c_{n+1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $t_i = q_i^2$, $s_i = (p_i + p_{i+1})^2$, $\Gamma_{-AA'}^{c_1}$ и $\Gamma_{+BB'}^{c_{n+1}}$ — эффективные вершины рассеяния реджезованных глюонов и частиц A, A' и B, B' , $\Gamma_{+-J}^{ab}(p, q)$ — эффективные вершины рождения частиц J в столкновении реджезованных глюонов, обладающих импульсами p и q и цветовыми индексами a и b . Здесь индексы "±" обозначают большую компоненту импульса, которую переносит реджезованный глюон. Все реджеонные вершины известны в настоящее время в главном и следующем за ним логарифмических приближениях [119]. В формуле (12) величина s_0 определяет масштаб энергии. В LLA ее значение не может быть зафиксировано, а в NLLA выбор s_0 зависит от определения реджеонных вершин. Реджевская траектория глюона $\omega(t_i) = 1 - \alpha(t_i)$ в LLA может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \omega(t) \equiv \omega(-\mathbf{k}_T^2) &= -\frac{\alpha_s N_c}{8\pi(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-2} \mathbf{q}_T \frac{\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{q}_T^2 (\mathbf{k}_T - \mathbf{q}_T)^2} + O(\alpha_s^2) = \\ &= -\frac{\alpha_s N_c}{4\pi} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)} (\mathbf{k}_T^2)^\epsilon + O(\alpha_s^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{k}_T$ и $\mathbf{q}_T$ ортогональны 4-импульсам сталкивающихся частиц, $t = -\mathbf{k}_T^2$, $D = 4 + 2\epsilon$ — размерность пространства-времени, взятая отличной от 4 для регуляризации инфракрасных расходимостей. В NLLA траектория глюона была вычислена в работах [120–125].

Выражение (12) определяет амплитуды процессов с глюонными квантовыми числами в t -канале. Асимптотический предел амплитуды упругого рассеяния $A + B \rightarrow A' + B'$ представляет собой линейную комбинацию амплитуд процессов со всеми возможными квантовыми числами в канале t_i , которые могут быть вычислены с помо-

⁵В рамках лидирующего логарифмического приближения учитываются только члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n s / \Lambda_{\text{QCD}}^2$, а в рамках следующего за ним приближения — также и члены порядка $\alpha_s^{n+1} \ln^n s / \Lambda_{\text{QCD}}^2$.

пью соотношений унитарности и аналитичности. Такие амплитуды можно представить в виде свертки импакт-факторов $\Phi_{AA'}$ и $\Phi_{BB'}$, описывающих переходы $A \rightarrow A'$ и $B \rightarrow B'$ с функцией Грина G двух реджезованных глюонов, которая удовлетворяет уравнению BFKL [14–16] и представляет собой сумму лестничных диаграмм, изображенных на рис. 1. Зависимость от свойств взаимодействующих частиц A и B заключена в соответствующих импакт-факторах, а энергетическая зависимость — в функции Грина.

Уравнение BFKL может быть представлено в виде интегрального уравнения эволюции для TMD функции распределения глюонов $f_g(x, \mathbf{k}_T^2)$. В лидирующем логарифмическом приближении (по степеням $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$) оно может быть записано в форме

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2) + \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \times \\ \times \int_{\mathbf{k}_{0T}^2}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}_T'^2}{\mathbf{k}_T'^2} \left[\frac{f_g(x/z, \mathbf{k}_T'^2) - f_g(x/z, \mathbf{k}_T^2)}{|\mathbf{k}_T'^2 - \mathbf{k}_T^2|} + \frac{f_g(x/z, \mathbf{k}_T^2)}{\sqrt{4\mathbf{k}_T'^4 + \mathbf{k}_T^4}} \right], \quad (14)$$

где $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2)$ — начальная функция распределения, известная при некотором значении $x = x_0$; при этом константа связи КХД считается фиксированной, $\alpha_s \simeq 0.2$. TMD функция распределения глюонов связана с обычным (коллинеарным) распределением приближенным соотношением следующего вида:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{\pi \mathbf{k}_T^2} f_g(x, \mathbf{k}_T^2) \sim g(x, \mu^2). \quad (15)$$

Уравнение (14) предсказывает степенной рост глюонных распределений и, конечно, полных сечений с энергией: $\sigma \sim s^\Delta$ (см. [14–16, 126]), что соответствует результатам теории полюсов Редже при высоких энергиях. Таким образом, уравнение BFKL устанавливает связь между КХД и моделью Редже. Позднее подобный (степенной) рост сечений с энергией $\sqrt{s}$ был обнаружен в первых экспериментах по глубоконеупругому рассеянию (ГНР) электронов на протонах при энергиях коллайдера HERA [127]. Отметим, что параметр $\Delta = 4\alpha_s N_c \ln 2/\pi \simeq 0.53$ связан с интерсектом померона⁶: $\alpha_P(0) = 1 + \Delta$. Как было показано [14–16, 128], в рамках подхода BFKL сечения физических процессов (с точностью до членов порядка, следующего за NNLA) могут быть записаны в простой k_T -факторизационной форме (2) — в виде свертки коэффициентов жесткого рассеяния и TMD функций распределения глюонов в адроне (протоне). Подход BFKL применим не только к процессам ГНР, но также, например, к процессам рассеяния фотонов с виртуальностями одного порядка или процессам рождения

⁶В теории полюсов Редже померон представляет собой связанное состояние двух реджезованных глюонов и определяет полное сечение рассеяния частицы. Оддерон, отвечающий за разность сечений рассеяния частицы и античастицы, является связанным состоянием трех реджезованных глюонов.

нескольких адронных струй, обладающих сравнимыми поперечными импульсами и разделенных большими интервалами быстрот. Действительно, в таких процессах эволюция партонных распределений по виртуальности (эволюция DGLAP) отсутствует, тогда как в процессах ГНР или процессах рождения частиц в столкновении адронов, т.е. процессах с двумя разными масштабами взаимодействия) динамика BFKL "затемняется" эволюцией DGLAP партонных распределений.

В NLLA приближении уравнение BFKL было получено в работах [129–132]. В этом приближении возникают, в частности, члены, соответствующие дваждылогарифмическим вкладам в уравнения эволюции DGLAP [133]. Их учет в фиксированном порядке теории возмущений приводит к осцилляциям функции Грина уравнения BFKL и, тем самым, к возможности получения отрицательных сечений, а также весьма значительным поправкам к величине интерсепта померона Δ (см., например, [131, 132]). Однако в последующих работах [134–136] было показано, что такие вклады могут быть эффективно просуммированы во всех порядках с помощью метода ренормгруппы, и был предложен соответствующий алгоритм такого суммирования. Аналогичный подход для уравнений эволюции DGLAP был развит в работах [137–139]. В настоящее время предложен ряд методов, позволяющих использовать результаты NLLA BFKL для описания экспериментальных данных. Так, было показано, что радиационные поправки, пропорциональные α_s , значительно уменьшают величину Δ [131]. Эти поправки, конечно же, зависят от выбора схемы регуляризации и масштаба виртуальности (ренормализационного масштаба) в константе связи КХД. Предсказания [140, 141], полученные с использованием неабелевских физических схем перенормировок и подхода [142] для определения аргумента бегущей константы связи КХД, находятся в хорошем согласии с данными коллабораций OPAL и L3 для сечения взаимодействия двух глубоко виртуальных фотонов на коллайдере LEP2. Кроме того, в работе [140] было получено значение $\Delta \sim 0.17$, которое не зависит от масштаба виртуальности процесса (см. также [118]).

Как уже было отмечено выше, быстрый степенной рост глюонных плотностей при $x \rightarrow 0$ и, соответственно, сечений процессов в области высоких энергий, предсказываемый уравнением BFKL, приводит к нарушению условия унитарности и ограничения Фруассара. Следовательно, на определенном этапе эволюционная динамика должна измениться вследствие учета дополнительных факторов, таких, например, как учёт конечного поперечного размера партонов или эффектов их нелинейного взаимодействия внутри протона, которые приводят к замедлению роста (или насыщению) глюонных плотностей. Соответствующая динамика может быть описана с помощью нелинейного уравнения Балицкого-Ковчегова [143, 144]. Такие нелинейные взаимодействия приводят к образованию близкой к равновесной партонной системы с определенным значением среднего поперечного импульса и соответствующим масштабом насыщения $Q_s(x)$. Последняя может быть представлена как Бозе-конденсат глюонов с достаточно медленным изменением полей (Color Glass Condensate) [145].

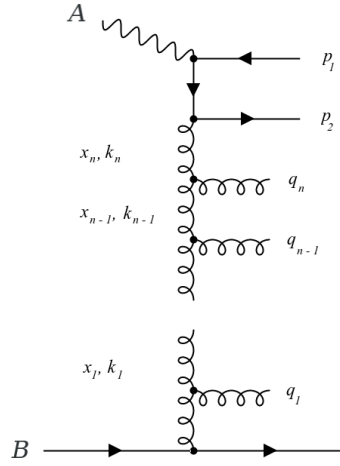


Рис. 2: Схематичное изображение каскада глюонной эволюции ССФМ.

Однако подобные вопросы выходят за рамки настоящей работы.

2.1.3 Уравнение ССФМ

Как было отмечено выше, уравнение BFKL позволяет учесть вклады больших логарифмических членов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/x$, которые в значительной степени определяют поведение сечений в асимптотической области высоких энергий (или в области малых значений переменной x). В работах [17–20] предложен метод суммирования дополнительных вкладов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/(1-x)$, которые могут играть важную роль в области промежуточных энергий (или, что эквивалентно, в области промежуточных и больших значений x). Такое суммирование может быть выполнено с помощью уравнения глюонной эволюции Катани-Чиафалони-Фиорани-Марчезини (ССФМ), в рамках которого учитывается эффект цветовой когерентности между глюонами, испускаемыми в процессе эволюции.

Явление цветовой когерентности заключается в следующем. Допустим, что в процессе двух последовательных глюонных расщеплений угол θ_2 между импульсами четвертого и третьего глюонов больше угла θ_1 , образованного импульсами второго и третьего глюона, $\theta_2 > \theta_1$. Тогда поперечная компонента длины волны четвертого глюона будет больше поперечного пространственного разделения пары, образованной вторым и третьим глюонами. В этом случае четвертый глюон не может разрешить цвета каждого глюона из этой пары, но может разрешить цвет первого распадающегося глюона. Таким образом, амплитуда процесса, включающего в себя два последовательных глюонных расщепления, будет идентична амплитуде процесса, в котором конечный глюон испускается непосредственно первичным глюоном под углом θ_2 . Учет явления цветовой когерентности приводит к тому, что последовательное испускание глюонов в процессе эволюции должно быть упорядочено по углам между импульсами глюонов, $\theta_i < \theta_{i-1}$, при этом максимально допустимый угол определяется жестким подпроцессом (см. рис. 2). Действительно, в переменных Судакова Υ и

Ξ 4-импульс пары кварков, образующейся в жестком подпроцессе рассеяния, может быть записан как:

$$p = p_1 + p_2 = \Upsilon(P_A + \Xi P_B) + Q_T, \quad (16)$$

где P_A и P_B — 4-импульсы начальных частиц и поперечный импульс пары кварков $\mathbf{Q}_T = \mathbf{p}_{1T} + \mathbf{p}_{2T}$. Аналогично, для глюонов, испускаемых в процессе эволюции каскада имеем:

$$q_i = v_i(P_A + \xi_i P_B) + q_{iT}, \quad \xi_i = \frac{q_{iT}^2}{s v_i^2}, \quad (17)$$

где $v_i = (1 - z_i)x_{i-1}$ и $x_i = z_i x_{i-1}$ — доли продольного импульса начального протона, переносимые i -м испущенным и i -го промежуточным глюонами, $s = (P_A + P_B)^2$. Переменные ξ_i связаны с углами θ_i испускания глюонов относительно направления импульса начального протона: $\xi_i = \cos \theta_i$. Условие углового упорядочивания может быть представлено в виде:

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \Xi, \quad (18)$$

или

$$z_{i-1} \bar{q}_{i-1} < \bar{q}_i, \quad (19)$$

где

$$\bar{q}_i = x_{i-1} \sqrt{\xi_i s} = \frac{q_{iT}}{1 - z_i}. \quad (20)$$

Отметим, что при больших значениях z_i условие упорядочивания (19) переходит в условие строго упорядочивания (4), тогда как в области малых $z_i \rightarrow 0$ поперечные импульсы испускаемых глюонов не упорядочены.

В лидирующем логарифмическом приближении уравнение CCFM может быть представлено в виде [17–20]:

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \bar{q}^2) = f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) \Delta_s(\bar{q}^2, q_0^2) + \int \frac{dz}{z} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_T}{\pi \mathbf{q}_T^2} \theta(\bar{q} - z |\mathbf{q}_T|) \Delta_s(\bar{q}^2, z^2 \mathbf{q}_T^2) P_{gg}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) f_g(x/z, \mathbf{k}_T'^2, \mathbf{q}_T^2), \quad (21)$$

где, как и ранее, $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ — некоторая начальная TMD функция распределения глюонов и $\mathbf{k}_T' = (1 - z)/z \mathbf{q}_T + \mathbf{k}_T$. Функция расщепления CCFM может быть записана

в форме:

$$P_{gg}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) = \frac{N_c}{\pi} \alpha_s (\mathbf{q}_T^2 (1-z)^2) \left[\frac{1}{1-z} - 1 + \frac{z(1-z)}{2} \right] + \frac{N_c}{\pi} \alpha_s (\mathbf{k}_T^2) \left[\frac{1}{z} - 1 + \frac{z(1-z)}{2} \right] \Delta_{ns}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2). \quad (22)$$

Судаковский форм-фактор, необходимый для устранения коллинеарных расходимостей в функции расщепления глюонов ССФМ (возникающих в слагаемых вида $1/(1-z)$ при $z \rightarrow 1$), записывается в форме:

$$\ln \Delta_s(p^2, q^2) = -\frac{N_c}{\pi} \int_{q^2}^{p^2} \frac{dk^2}{k^2} \int_0^{1-\Delta} \frac{\alpha_s(k^2(1-z)^2)}{1-z}. \quad (23)$$

где $\Delta = |q|/|k|$. "Несудаковский" форм-фактор $\Delta_{ns}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2)$ в (22) имеет то же происхождение, что и реджевские факторы $(s/s_0)^{\omega(t)}$ в (12) и применяется для учета логарифмических поправок, пропорциональных $\ln 1/z$. Он может быть представлен в виде [146]

$$\begin{aligned} \ln \Delta_{ns}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) &= -\frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}_T^2) \int_z^1 \frac{dz'}{z'} \int_{z'|\mathbf{q}_T|}^{|\mathbf{k}_T|} \frac{dp^2}{p^2} = \\ &= -\frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}_T^2) \ln \left(\frac{z_0}{z} \right) \ln \left(\frac{\mathbf{k}_T^2}{z_0 z \mathbf{q}_T^2} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $z_0 = 1$ при $|\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| > 1$, $z_0 = |\mathbf{k}_T|/|\mathbf{p}_T|$ при $z < |\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| < 1$ и $z_0 = z$ при $|\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| < z$. Из сравнения выражений (8) и (22) видно, что в уравнении ССФМ учитывается мягкая сингулярность функции расщепления (8) в области $z \rightarrow 1$ и эффекты ВФКЛ в лидирующем логарифмическом приближении. Действительно, если в формуле (22) пренебречь членом, пропорциональным $1/(1-z)$ и опустить форм-фактор Судакова в (21), то уравнение ССФМ станет эквивалентным [20] уравнению ВФКЛ. Отметим, что на каждом шаге эволюции используется дополнительное условие кинематического соответствия [147]:

$$\mathbf{q}_T^2 < \frac{(1-z)\mathbf{k}_T^2}{z}. \quad (25)$$

Это условие позволяет учесть значительную часть поправок следующего порядка теории возмущений в области малых x .

Функция распределения глюонов $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \bar{q}^2)$, удовлетворяющая уравнению (21), явно зависит от величины $\bar{q}^2$. Последняя связана с переменной Судакова $\Xi = \cos \theta$, которая определяет максимально возможный угол испускания глюонов в процессе эволюции каскада согласно (18). Величина $\bar{q}^2$ в уравнении ССФМ играет роль, ана-

логичную роли масштаба μ^2 в уравнениях DGLAP, поскольку

$$\bar{q}^2 \simeq x^2 \Xi s = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2, \quad (26)$$

где $\hat{s}$ — переменная Мандельштама для партонного подпроцесса. Соотношение (26) обычно определяет выбор факторизационного масштаба μ_F в феноменологических расчетах. Ниже мы будем полагать $\bar{q}^2 = \mu^2$.

Подход CCFM применим к процессам, в которых динамика взаимодействия проявляется на двух различных характерных масштабах. Типичным примером может служить процесс рождения струй адронов, обладающих большим поперечным импульсом p_T в глубоконеупругом ep рассеянии при высоких энергиях. Действительно, в этом случае взаимодействие частиц определяется величинами порядка Q^2 и p_T^2 . Другим примером может являться процесс рассеяния двух виртуальных фотонов с близкими виртуальностями $Q_1^2 \sim Q_2^2 \sim Q^2$, которые значительно меньше полной энергии взаимодействия: $\Lambda_{\text{QCD}}^2 \ll Q^2 \ll s$.

Решение уравнения CCFM может быть получено численно с помощью различных программных пакетов — таких, как UPDFEVOLVE [148]. На основе этого уравнения был создан генератор Монте-Карло событий CASCADE [97], позволяющий выполнять расчеты сечений различных процессов КХД при высоких энергиях и проводить количественное сравнение с экспериментальными данными. Учет динамики CCFM глюонных распределений в протоне может производиться также с помощью разработанного недавно Монте-Карло генератора событий PEGASUS [100].

2.1.4 Подход PB

В недавних работах [65, 66] был предложен способ вычисления кварковых и глюонных распределений в протоне — как обычных, так и зависящих от поперечного импульса — с помощью численного решения уравнений эволюции DGLAP в рамках так называемого подхода PB (Parton Branching Approach). В основе этого подхода лежит метод разделения мягких партонных эмиссий (в которых доля продольного импульса $z \rightarrow 1$) от партонных излучений с меньшими значениями z . Учет точной кинематики процессов партонного расщепления и условия углового упорядочивания на каждом шаге эволюции в рамках подхода PB позволяет определить поперечный импульс партонных вдов каскада и тем самым вычислить соответствующие TMD функции распределения.

Как было показано в работах [65, 66], удобно представить функции расщепления DGLAP в форме

$$P_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z) = D_{ab}(\alpha_s(\mu^2))\delta(1-z) + K_{ab}(\alpha_s(\mu^2))\frac{1}{(1-z)_+} + R_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z). \quad (27)$$

Последнее слагаемое в (27) содержит только логарифмические вклады, пропорциональные $\ln(1-z)$ и члены, аналитические при $z \rightarrow 1$. Функции $D_{ab}(\alpha_s(\mu^2))$, $K_{ab}(\alpha_s(\mu^2))$

и $R_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z)$ могут быть разложены в ряд по степеням константы связи КХД аналогично (5). Согласно (8), в ведущем порядке соответствующие коэффициенты разложения имеют вид:

$$D_{qq}^{(0)} = \frac{3}{2}C_F, \quad D_{gg}^{(0)} = \frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_R N_f, \quad D_{qg}^{(0)} = 0, \quad (28)$$

$$K_{qq}^{(0)} = 2C_F, \quad K_{gg}^{(0)} = 2C_A, \quad K_{qg}^{(0)} = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} R_{gg}^{(0)} &= 2C_A \left[\frac{1-z}{z} + z(1-z) - 1 \right], \quad R_{gq_i}^{(0)} = R_{g\bar{q}_i}^{(0)} = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \\ R_{q_i g}^{(0)} &= R_{\bar{q}_i g}^{(0)} = T_R [z^2 + (1-z)^2], \quad R_{q_i q_j}^{(0)} = R_{\bar{q}_i \bar{q}_j}^{(0)} = -C_F (1+z) \delta_{ij}, \\ R_{q_i \bar{q}_j}^{(0)} &= R_{\bar{q}_i q_j}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

В двухпетлевом приближении эти коэффициенты выписаны в работе [66] (в схеме $\overline{\text{MS}}$).

Представление функций расщепления DGLAP в форме (27) используется как в области больших $z > z_M$, так и в области меньших значений z . Параметр z_M необходим для отделения мягких партонных эмиссий от остальных и выбирается таким образом, что $1 - z_M \sim O(\Lambda_{\text{QCD}}/\mu)$. Тогда при $z_M < z < 1$ функция распределения партонов может быть записана в виде ряда:

$$a(x/z, \mu^2) = a(x, \mu^2) + (1-z) \frac{\partial a(x, \mu^2)}{\partial \ln x} + O(1-z)^2, \quad (31)$$

что с учетом соотношений (7) и (10) позволяет представить уравнение эволюции DGLAP (3) в форме [65, 66]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \\ & = \sum_b \left[\int_x^{z_M} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(R)}(\alpha_s(\mu^2), z) b\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) - a(x, \mu^2) \int_0^{z_M} dz z P_{ba}^{(R)}(\alpha_s(\mu^2), z) \right], \end{aligned} \quad (32)$$

с точностью до членов порядка $O(1 - z_M)$. Функции расщепления

$$P_{ab}^{(R)}(\alpha_s(\mu^2), z) = K_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z) \frac{1}{1-z} + R_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z) \quad (33)$$

могут быть интерпретированы как вероятности реальных партонных излучений в процессе эволюции партонного каскада. Далее, с помощью форм-фактора Судакера

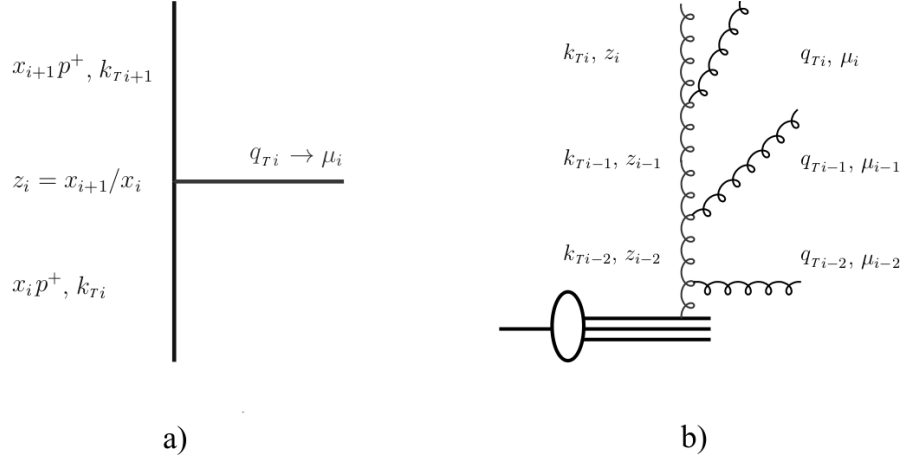


Рис. 3: Кинематика процесса партонного расщепления $b \rightarrow a + c$ (a). Схематичное изображение упорядочивания партонных эмиссий по углу (b).

$\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2)$, определенного как

$$\ln \Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2) = - \sum_b \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \int_0^{z_M} dz z P_{ba}^{(R)}(\alpha_s(\mu'^2), z), \quad (34)$$

выражение (32) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} \left[\frac{a(x, \mu^2)}{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2)} \right] = \sum_b \int_x^{z_M} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(R)}(\alpha_s(\mu^2), z) \frac{b(x/z, \mu^2)}{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2)}. \quad (35)$$

Форм-фактор Судакова (34) представляет собой вероятность того, что партон a не испустит другой партон в процессе КХД эволюции от масштаба μ_0^2 до масштаба μ^2 . Выполняя интегрирование обеих частей соотношения (35) в пределах $\mu_0^2 < \mu'^2 < \mu^2$ и учитывая очевидное равенство $\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu_0^2) = 1$, легко получить уравнение для партонных распределений:

$$a(x, \mu^2) = \Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2) a(x, \mu_0^2) + \sum_b \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \frac{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu'^2)}{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu'^2)} \int_x^{z_M} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(R)}(\alpha_s(\mu'^2), z) b(x/z, \mu'^2). \quad (36)$$

Выражение (36) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода и было решено численно в ведущем [65] и следующем за ним [66] порядках теории возмущений. Было показано, что полученные решения практически не зависят от значения величины z_M при $1 - z_M < 10^{-3}$ и отличаются от результатов расчетов, выполненных с помощью пакета QCDNUM [112] меньше, чем на 1%.

Процедура численного решения уравнения (36) позволяет, в частности, учесть

точную кинематику на каждом этапе эволюции. Действительно, для процесса партонного расщепления $b \rightarrow a + c$ с помощью закона сохранения энергии-импульса легко получить, что

$$p_b^2 = \frac{p_a^2 + \mathbf{q}_{cT}^2}{z} + \frac{p_c^2 + \mathbf{q}_{cT}^2}{1-z}, \quad (37)$$

где (в переменных светового конуса) $p_a^+ = zp_b^+$ и $p_c^+ = (1-z)p_b^+$, см. рис. 3. Рассматривая переменную эволюции μ как величину, связанную с углом излучения партона c относительно импульса p_b (аналогично выражению (26) — так, как это принято в формализме CCFM), можно получить соотношение $\mu = |\mathbf{q}_{cT}|/(1-z)$, которое соответствует условию углового упорядочивания партонных эмиссий [149–151]. Наконец, принимая величину

$$\mathbf{k}_T = - \sum_c \mathbf{q}_{cT}, \quad (38)$$

в качестве поперечного импульса партона, участвующего в жестком взаимодействии, можно вычислить TMD функции распределения партонов, уравнение эволюции РВ для которых имеет вид [65, 66]:

$$\begin{aligned} f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) &= \Delta_a(z_M, \mathbf{k}_T^2, \mu_0^2) f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu_0^2) + \sum_b \int \frac{d^2 \mathbf{q}'_T}{\pi \mathbf{q}_T'^2} \frac{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mu^2)}{\Delta_a(z_M, \mu_0^2, \mathbf{q}_T'^2)} \times \\ &\times \theta(\mu^2 - \mathbf{q}_T'^2) \theta(\mathbf{q}_T'^2 - \mu_0^2) \int_x^{z_M} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(R)}(\alpha_s(\mathbf{q}_T'^2), z) f_b(x/z, \mathbf{k}_T'^2, \mathbf{q}_T'^2), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\mathbf{k}'_T = \mathbf{k}_T + (1-z)\mathbf{q}'_T$. Использование условия углового упорядочивания партонных излучений является весьма существенным, поскольку оно обеспечивает инфракрасную стабильность TMD партонных распределений [65, 66]. Действительно, в отличие от коллинеарных плотностей, TMD функции распределения партонов чувствительны к мягкой области, где $z \rightarrow 1$. Причиной такой зависимости являются сингулярности, возникающие при учете партонных расщеплений в области больших отрицательных быстрот, $y \sim \ln q^+/q^- \rightarrow -\infty$ (см. рис. 3). В случае коллинеарных распределений при суммировании вкладов от мягких реальных и виртуальных излучений эти сингулярности сокращаются; тогда как в случае TMD распределений дополнительное условие углового упорядочивания партонных излучений позволяет получить результаты, не зависящие от параметра z_M при его значении, достаточно близком к единице.

Численное решение уравнений (39) было получено в работах [65, 66] в LO и NLO приближениях теории возмущений КХД. Расчеты сечений различных процессов в рамках подхода РВ с учетом вкладов как от глюонов, так и кварков могут быть выполнены с помощью последней версии Монте-Карло генератора CASCADE [97]. Отметим также, что взаимное соответствие между динамикой глюонной эволюции CCFM и динамикой РВ было установлено в работе [152].

2.1.5 Подход KMR

В работах [60, 61] был предложен метод получения TMD партонных распределений $f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ из обычных (коллинеарных) функций распределения $a(x, \mu^2)$, которые удовлетворяют уравнениям эволюции DGLAP — так называемый подход KMR (Kimber-Martin-Ryskin). Этот метод основан на ключевом предположении о том, что зависимость от поперечного импульса входит в партонные распределения лишь на последнем шаге эволюции (в отличие от подходов SCFM и PB, в которых поперечный импульс возникает в результате большого числа расщеплений), а также позволяет учесть условие углового упорядочивания партонов в процессе эволюции партонного каскада.

Процедура KMR в ведущем порядке теории возмущений состоит в следующем. Полагая характерный энергетический масштаб партонного подпроцесса (факторизационный масштаб) равным некоторому значению $\mu^2 = \mathbf{k}_T^2$, уравнения эволюции DGLAP (3) можно представить в виде⁷:

$$\frac{\partial a(x, \mathbf{k}_T^2)}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} = \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \left[\int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right) - a(x, \mathbf{k}_T^2) \int_0^{1-\Delta} dz z P_{ba}^{(0)}(z) \right], \quad (40)$$

где, как и ранее, $P_{ab}^{(0)}(z)$ — функции расщепления DGLAP в ведущем порядке (8) и $a, b = q, g$. Первое слагаемое в правой части выражения (40) соответствует реальным партонным излучениям в области $\mu^2 < \mathbf{k}_T^2 < \mu^2 + \delta\mu^2$, а второе отвечает вкладам от виртуальных эмиссий. Отметим, что введение параметра обрезания Δ аналогично использованию функционала (10) и/или величины z_M в (32) и необходимо для устранения коллинеарных расхождений, возникающих при $z \rightarrow 1$ в обоих интегралах, входящих в уравнение (40). Последнее может быть переписано в форме

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} [T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) a(x, \mathbf{k}_T^2)] = T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right), \quad (41)$$

где $T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — форм-фактор Судакова, который определяет вероятность того, что партон a , обладающий поперечным импульсом $\mathbf{k}_T^2$, не испустит другой партон в процессе КХД эволюции до масштаба μ^2 :

$$\ln T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) = - \int_{\mathbf{k}_T^2}^{\mu^2} \frac{dp_T^2}{p_T^2} \frac{\alpha_s(p_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_0^{1-\Delta} dz z P_{ba}^{(0)}(z). \quad (42)$$

Здесь мы используем обозначения, принятые в работах [60, 61]. Выполняя интегрирование обеих частей уравнения (41) по $\mathbf{k}_T^2$ в пределах $\mu_0^2 < \mathbf{k}_T^2 < \mu^2$ и учитывая

⁷См. также (31) и (32).

очевидное соотношение $T_a(\mu^2, \mu^2) = 1$, легко получить, что

$$a(x, \mu^2) = T_a(\mu_0^2, \mu^2)a(x, \mu_0^2) + \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} d\mathbf{k}_T^2 \left[T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right) \right], \quad (43)$$

где $\mu_0^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ — начальный масштаб, при котором начинается эволюция DGLAP партонных распределений $a(x, \mu^2)$. Выражение в квадратных скобках определяет TMD функцию распределения партона a в так называемой интегральной формулировке процедуры KMR:

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right), \quad (44)$$

при $\mathbf{k}_T^2 \geq \mu_0^2$. Кроме того, из соотношений (41) и (44) легко получить, что

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = \frac{\partial}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} [T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) a(x, \mathbf{k}_T^2)]. \quad (45)$$

Выражение (45) представляет собой так называемую дифференциальную формулировку процедуры KMR для TMD функции распределения партона a . В области малых $\mathbf{k}_T^2 < \mu_0^2$ партонные распределения обычно определяются как

$$\frac{1}{\mathbf{k}_T^2} f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)|_{\mathbf{k}_T^2 < \mu_0^2} = \frac{1}{\mu_0^2} a(x, \mu_0^2) T_a(\mu_0^2, \mu^2), \quad (46)$$

что в точности обеспечивает выполнение условия нормировки:

$$\int_0^{\mu^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{\pi \mathbf{k}_T^2} f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = a(x, \mu^2). \quad (47)$$

Значение параметра Δ , который входит как в выражение для форм-фактора Судакова (42), так и в выражение для TMD функции распределения партонов (44), может быть определено различными способами [60, 61]. Так, условию строгого упорядочивания поперечных импульсов испускаемых партонов в уравнениях эволюции DGLAP отвечает величина

$$\Delta = |\mathbf{k}_T|/\mu, \quad (48)$$

в этом случае область применения распределений KMR ограничена условием $|\mathbf{k}_T| <$

$\mu(1 - x)$. Другой выбор, а именно

$$\Delta = \frac{|\mathbf{k}_T|}{|\mathbf{k}_T| + \mu}, \quad (49)$$

соответствует условию упорядочивания по углу θ (или, что то же самое, по быстрой y) между последним партоном, излученным в процессе КХД эволюции каскада, и частицами, рождающимися в жестком подпроцессе. При таком значении параметра Δ допустимая область изменения поперечного импульса $|\mathbf{k}_T|$ определяется условием $|\mathbf{k}_T| < \mu(1/x - 1)$ и, следовательно, партонные распределения KMR могут быть использованы также при $\mathbf{k}_T^2 > \mu^2$ (в этом случае форм-фактор Судакова полагается равным 1). Конечно, в обычном коллинеарном приближении КХД такая кинематическая область является недоступной ввиду условия строгого упорядочивания партонов по виртуальности в уравнениях эволюции DGLAP. Следует также подчеркнуть, что форм-фактор $T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2)$, определенный в рамках формализма KMR выражением (42) с учетом (48) или (49), отличается от форм-фактора $\Delta_a(z_M, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ подхода РВ (34), поскольку они вычисляются в различных кинематических областях (см. [153]).

Как было показано в работе [154], выражения для TMD распределений партонов в интегральной (44) и дифференциальной (45) формулировках процедуры KMR полностью эквивалентны при использовании в качестве начальных условий коллинеарных распределений, при вычислении которых мягкие сингулярности устраняются с помощью параметра Δ . Однако в случае использования распределений, полученных с помощью функционала (10) — например, предложенных группами NNPDF [69], ММНТ [70] или CTEQ [68] — для вычисления TMD распределений партонов должна применяться интегральная формулировка (44).

Учет поправок следующего порядка (NLO) к формулам (42) и (44) был проведен в работе [62]. Было показано, что основной эффект этих поправок связан с необходимостью более точного определения масштаба $\mathbf{k}_T'^2$, при котором вычисляются коллинеарные распределения, а именно: $\mathbf{k}_T'^2 = \mathbf{k}_T^2/(1 - z)$. Кроме того, сами функции распределения партонов также должны включать в себя вклады порядка NLO. Роль поправок следующего порядка к функциям расщепления $P_{ab}^{(0)}(z)$ оказалась достаточно невелика [62]. Отметим также, что соответствие между методом KMR и подходом РВ рассматривалось в работах [41, 153].

2.2 TMD функции распределения партонов в протоне

В настоящее время при проведении численных расчетов используется значительное число различных TMD распределений партонов в протоне, полученных с помощью численных или аналитических решений уравнений КХД эволюции BFKL-типа. Большинство из этих наборов включено в библиотеку TMDLIB [103]. Ключевые особенности некоторых (наиболее часто используемых) TMD распределений глюонов и

кварков рассмотрены ниже.

2.2.1 Функции распределения A0 и B0

В одной из пионерских работ [155] было получено численное решение уравнения CCFM с учетом только сингулярных (пропорциональных $\ln 1/z$ и $\ln 1/(1-z)$) членов в функции расщепления (22). Начальная функция распределения глюонов в протоне $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ была выбрана в следующем виде:

$$f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) = N x^{p_0} (1-x)^{p_1} \exp(-\mathbf{k}_T^2/q_0^2), \quad (50)$$

при этом численные значения параметров N , p_0 и p_1 были определены из условия наилучшего описания экспериментальных данных коллабораций H1 и ZEUS для структурной функции протона $F_2(x, Q^2)$ в области $x < 5 \cdot 10^{-3}$ и $Q^2 > 4.5 \text{ ГэВ}^2$. Как уже было отмечено выше, коллинеарные расходимости, возникающие при $z \rightarrow 1$ в выражениях (22) и (23), устранялись ограничением соответствующих областей интегрирования до некоторого верхнего значения $z_{\max} = 1 - q_0/|\mathbf{q}_T|$, где $\mathbf{q}_T$ — поперечный импульс испущенного глюона, см. (17). Такой подход аналогичен методу, применяемому в рамках формализма KMR и, конечно, эквивалентен использованию функционала (10). Кроме того, в процессе эволюции глюонного каскада постулировалось отсутствие глюонных эмиссий в области $|\mathbf{k}_T| < k_T^{\text{cut}}$ и $|\mathbf{q}_T| < q_0$. Это приближение представляется достаточно разумным, поскольку в области небольших масштабов $\mu^2 \sim q_0^2$ и малых поперечных импульсов k_T эффекты насыщения глюонных распределений и рекомбинации глюонов, останавливающие рост глюонных плотностей и, соответственно, сечений физических процессов, становятся существенными.

Функции распределения A0, предложенной в работе [155], отвечают следующие значения параметров начального распределения (50): $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 1.33 \text{ ГэВ}$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 4$. Функция B0 была получена при $q_0 = 0.8 \text{ ГэВ}$, $k_T^{\text{cut}} = 0.25 \text{ ГэВ}$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 4$. Значения $\chi^2/d.o.f.$, достигаемые при описании экспериментальных данных для структурной функции $F_2(x, Q^2)$ с использованием этих распределений, составляют 1.1 и 1.4 [155]. Отметим, что при определении численных параметров из данных использовалось однопетлевое выражение для бегущей константы связи КХД, факторизационный масштаб определялся согласно (26), а ренормализационный масштаб полагался равным поперечной массе конечных частиц. Значения остальных параметров (N_f , $\Lambda_{\text{QCD}}^{(1)}$ и других) приведены в таблице 11. Для оценки неопределенностей результатов феноменологических расчетов, связанных с выбором ренормализационного масштаба μ_R , в работе [155] были предложены функции распределения A0(B0)+ и A0(B0)−, параметры которых были определены при значениях $\mu_R \rightarrow 2\mu_R$ и $\mu_R \rightarrow \mu_R/2$ соответственно.

Зависимость функций распределения A0 и B0 от переменной x и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ для различных значений μ^2 приведена на рис. 6. Как легко видеть, величина k_T^{cut} в значительной степени определяет форму глюонных распределений в

области небольших $\mathbf{k}_T^2$. Кроме того, область малых поперечных импульсов наиболее чувствительна к начальному распределению (50), которое представляет собой непертурбативную часть глюонной плотности. При достаточно больших значениях $\mathbf{k}_T^2$ поведение функций распределения глюонов определяется главным образом уравнением эволюции CCFM. Отметим, что распределение A0 показало лучшие результаты при описании экспериментальных данных для широкого класса процессов рождения частиц при высоких энергиях. Обе функции A0 и B0 включены в состав библиотеки TMDLIB [103] и Монте-Карло генератора событий PEGASUS [100].

2.2.2 Функции распределения JH'2013 set 1 и set 2

Как было отмечено выше, в ранней работе [155] уравнение эволюции CCFM было решено численно с учетом только вкладов сингулярных членов (первых слагаемых в квадратных скобках) в функции расщепления глюонов (22). Такое приближение может быть применимо с достаточной точностью при высоких энергиях, где $x \rightarrow 0$. В области промежуточных значений переменной x возрастает роль несингулярных членов в функции расщепления (22). Учет этих вкладов был проведен в работе [67], в которой были представлены два новых набора TMD глюонных распределений: JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2; при этом в обоих случаях в качестве начального распределения использовалась функция вида (50). Численные значения соответствующих параметров были определены из условия наилучшего описания недавних прецизионных данных [8, 9] коллабораций H1 и ZEUS для структурных функций протона $F_2(x, Q^2)$ и/или $F_2^c(x, Q^2)$. Так, параметры функции распределения JH'2013 set 1 (а именно, $p_0 = -0.18074$, $p_1 = 6.5732$, $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 2.2$ ГэВ) были получены с помощью данных для функции $F_2(x, Q^2)$ в области $x < 5 \cdot 10^{-3}$ и $Q^2 > 5$ ГэВ², тогда как для определения их значений в случае распределения JH'2013 set 2 ($p_0 = -0.14739$, $p_1 = 11.431$, $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 2.2$ ГэВ) дополнительно использовались результаты измерений структурной функции $F_2^c(x, Q^2)$ при $Q^2 > 2.5$ ГэВ². Во всех расчетах применялось двухпетлевое выражение для константы связи КХД. Другие феноменологические параметры (N_f , $\Lambda_{\text{QCD}}^{(2)}$ и прочие) приведены в таблице 11. Отметим, что полученные значения приводят к достаточно хорошему описанию экспериментальных данных для структурных функций протона: действительно, величина $\chi^2/d.o.f$ составляет 1.18 в случае функции $F_2(x, Q^2)$ и 1.43 в случае ее комбинации с функцией $F_2^c(x, Q^2)$. Следуя предложенному ранее подходу [155], для оценки неопределенностей результатов феноменологических расчетов, связанных с выбором ренормализационного и факторизационного масштабов, в работе [67] были предложены функции распределения JH'2013 $\mu_{R+}(\mu_F+)$ и JH'2013 $\mu_{R-}(\mu_F-)$, параметры которых были определены при значениях $\mu_R \rightarrow 2\mu_R$ ($\mu_F \rightarrow 2\mu_F$) и $\mu_R \rightarrow \mu_R/2$ ($\mu_F \rightarrow \mu_F/2$) соответственно.

Зависимость TMD функций распределения JH'2013 set 1 и set 2 от переменной x и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ для различных значений μ^2 приведена на рис. 6. Видно, что глюонные распределения набора JH'2013 существенно отличаются от функций

A0 и B0 как по форме, так и по абсолютной величине. Эти отличия тесно связаны с учетом различных вкладов в эволюцию глюонного каскада в рассматриваемых подходах. Как и распределения A0 и B0, функции JH'2013 set 1 и set 2 включены в состав библиотеки TMDLIB [103] и Монте-Карло генератора событий PEGASUS [100].

2.2.3 Функция распределения MD'2018

Как было отмечено выше (см. также [67, 155]), в области небольших значений поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ поведение глюонной плотности определяется главным образом поведением соответствующего начального распределения, которое представлено первым слагаемым в уравнении эволюции (21). Это позволяет непосредственно определить начальную функцию $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ из экспериментальных данных, полученных в области малых поперечных импульсов для процессов, сечения которых достаточно чувствительны к глюонным распределениям в протоне. Конечно, подобные вычисления должны учитывать эффекты рекомбинации, взаимодействия глюонов из различных партонных каскадов, которые обычно интерпретируются как эффекты насыщения глюонной плотности, приводящие к восстановлению условия унитарности (см. также [21]).

Одной из наиболее известных моделей, предложенных для описания эффектов насыщения глюонной плотности при $x \rightarrow 0$, является так называемая модель GBW (Golec-Biernat and Wüsthof) [156, 157], основанная на дипольной модели [158]. Модель GBW успешно применялась для описания процессов инклюзивного [156] и дифракционного [157] глубоконеупругого рассеяния при энергиях коллайдера HERA. Так, в рамках дипольной модели [158] сечение взаимодействия фотона с виртуальностью Q^2 и протона может быть представлено в форме

$$\sigma_{T,L}(x, Q^2) = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(z, \mathbf{r})|^2 \hat{\sigma}(x, r^2), \quad (51)$$

где $\mathbf{r}$ — расстояние между кварком и антикварком в цветном диполе, который образуется в процессе расщепления $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. Динамика насыщения описывается эффективным сечением взаимодействия $\hat{\sigma}(x, r^2)$ диполя и протона, при этом кварк обладает долей z продольного импульса начального виртуального фотона. Квадраты волновых функций для поперечно-поляризованных и продольно-поляризованных фотонов могут быть записаны как

$$\begin{aligned} |\Psi_T(z, \mathbf{r})|^2 &= \frac{6\alpha}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \left[(z^2 + (1-z)^2) \bar{Q}^2 K_1^2(\bar{Q}r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}r) \right], \\ |\Psi_L(z, \mathbf{r})|^2 &= \frac{6\alpha}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 4z^2(1-z)^2 Q^2 K_0^2(\bar{Q}r), \end{aligned} \quad (52)$$

где $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — функции Мак-Дональда и $\bar{Q}^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$. В работе [156]

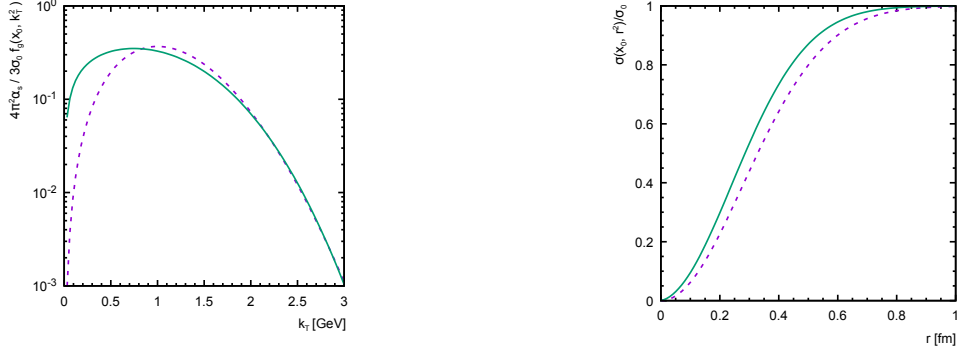


Рис. 4: Слева: зависимость функций распределения глюонов в протоне (57) и GBW от поперечного импульса $|\mathbf{k}_T| \equiv k_T$. Справа: зависимость эффективного сечения $\hat{\sigma}(x, r^2)$ от поперечного размера диполя r . Сплошные и штриховые кривые соответствуют результатам, полученным с использованием функций (57) и GBW при $x = x_0$.

было получено следующее выражение для эффективного сечения рассеяния $\hat{\sigma}(x, r^2)$:

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \sigma_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{r^2}{4R_0^2(x)} \right) \right], \quad (53)$$

где

$$R_0(x) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda/2}. \quad (54)$$

В рамках модели насыщения TMD функция распределения глюонов связана с эффективным сечением $\hat{\sigma}(x, r^2)$ следующим соотношением:

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \frac{4\pi^2\alpha_s}{3} \int \frac{d\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{k}_T^2} [1 - J_0(\mathbf{k}_T^2 r)] f_g(x, \mathbf{k}_T^2), \quad (55)$$

из которого, учитывая (53), можно получить аналитическое выражение для глюонной плотности:

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2\alpha_s} R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2 \exp(-R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2). \quad (56)$$

которую мы ниже будем называть функцией распределения глюонов GBW. Значения феноменологических параметров $\sigma_0 = 29.12$ мбн, $\lambda = 0.277$, $\alpha_s = 0.2$, $Q_0 = 1$ ГэВ и $x_0 = 4.1 \cdot 10^{-5}$ были определены из условия наилучшего описания поведения структурной функции протона $F_2(x, Q^2)$ в области $x < 10^{-2}$ [156]. При малых Q^2 сечение взаимодействия виртуального фотона и протона $\sigma(\gamma^* p)$, полученное в рамках модели насыщения GBW, перестает расти при $QR_0(x) < 1$. Таким образом, величина $Q_s \sim 1/R_0(x)$ представляет собой характерный масштаб насыщения глюонной плотности.

Быстрое падение функции распределения GBW с ростом поперечного импульса

$\mathbf{k}_T^2$ дает возможность рассматривать ее в качестве начального условия для эволюции CCFM (см. [155]). В последующих работах [159] было предложено использовать выражение (56) в несколько измененной форме, а именно

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2\alpha_s} c_1 (1-x)^{b_g} (R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2 + c_2 (R_0(x) |\mathbf{k}_T|)^a) \times \\ \times \exp(-R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2 - d(R_0(x) |\mathbf{k}_T|)^3), \quad (57)$$

для описания сечений рождения заряженных адронов в столкновениях протонов на коллайдере LHC в области небольших поперечных импульсов. Отметим, что выражение (57) также может быть получено в рамках модели кварк-глюонных струн (см. [160]). Значения параметров $a = 0.7$, $c_1 = 0.3295$, $c_2 = 2.3$, $\lambda = 0.22$, $b_g = 12$ и $d = 0.2$ были определены⁸ из экспериментальных данных коллабораций UA1 [161], CMS [162] и ATLAS [163] для спектров заряженных частиц в области центральных быстрот и $p_T \leq 2$ ГэВ [159, 164]. Как видно из рис. 4, функция распределения (57) отличается от функции GBW в области малых $|\mathbf{k}_T| \leq 1.5$ ГэВ и практически совпадает с последней при $|\mathbf{k}_T| \geq 1.5$ ГэВ. Эффективное сечение рассеяния, вычисленное согласно (55) с помощью (57), может быть представлено в виде⁹:

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \sigma_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{b_1 r}{R_0(x)} - \frac{b_2 r^2}{R_0^2(x)}\right) \right], \quad (58)$$

где $b_1 = 0.045$ и $b_2 = 0.3$ [164]. Режим насыщения глюонной плотности, при котором эффективное сечение рассеяния перестает зависеть от поперечного размера r цветного диполя, в случае распределения (57) достигается при несколько меньшем значении r по сравнению с функцией GBW, см. рис. 4.

Функция распределения (57) была использована [168] в качестве начальной глюонной плотности в уравнении эволюции CCFM. С помощью программы UPDFEVOLVE [148] это уравнение было решено численно, что позволило определить TMD функцию распределения глюонов в протоне в широкой области изменения переменных x , $\mathbf{k}_T^2$ и μ^2 . Было показано, что использование этой функции позволяет достичь хорошего согласия с экспериментальными данными коллабораций H1 [169] и ZEUS [170] для продольной структурной функции $F_L(x, Q^2)$ при $1 \lesssim Q^2 \lesssim 100$ ГэВ².

Предложенный подход [159, 164, 168] получил свое дальнейшее развитие в работах [171, 172]. Так, было продемонстрировано, что существенно лучшее описание спектров заряженных адронов, измеренных на коллайдере LHC в области $p_T \leq 4.5$ GeV, может быть достигнуто введением дополнительного слагаемого в выражение (57):

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) \rightarrow f_g(x, \mathbf{k}_T^2) + \lambda(x, \mathbf{k}_T^2, k_0^2) \tilde{f}_g(x, \mathbf{k}_T^2), \quad (59)$$

⁸Подробное описание соответствующих вычислений приведено в работе [160].

⁹Различные выражения для $\hat{\sigma}(x, r^2)$ были получены в работах [158, 165–167].

где

$$\lambda(x, \mathbf{k}_T^2, k_0^2) = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2\alpha_s} \left(\frac{x}{x_0}\right)^\gamma \exp \left[-k_0^2 \frac{R_0(x)}{|\mathbf{k}_T|} \right], \quad (60)$$

а функция $\tilde{f}_g(x, \mathbf{k}_T^2)$ является решением линейного уравнения BFKL в асимптотической области $|\mathbf{k}_T| \ll \Lambda_{\text{QCD}}(1/x)^\delta$ [126]:

$$\tilde{f}_g(x, \mathbf{k}_T^2) = \alpha_s^2 x^{-\Delta} t^{-1/2} \frac{1}{v} \exp \left[-\frac{\pi \ln^2 v}{t} \right], \quad (61)$$

при этом, как и ранее, $\Delta = 4\alpha_s N_c \ln 2/\pi$, $t = 14\alpha_s N_c \ln(1/x)\zeta(3)$, $\delta = \alpha_s N_c$, $v = |\mathbf{k}_T|/\Lambda_{\text{QCD}}$ и $k_0 = 1$ ГэВ. Существенным является тот факт, что второй член в выражении (59) отличен от нуля только в области малых поперечных импульсов. Это условие приводит к небольшому среднему значению $\langle |\mathbf{k}_T| \rangle \simeq 1.9$ ГэВ, что позволяет использовать функцию (59) в качестве начального распределения в уравнении эволюции CCFM. Значения параметров, определяющих ее поведение в области малых $x \sim 10^{-4} \dots 10^{-5}$, были найдены¹⁰ из условия одновременного описания экспериментальных данных коллабораций NA61 [175], CMS [162], ATLAS [163], ALICE [176–179] и STAR [180, 181] для сечений рождения заряженных частиц как в столкновениях протонов, так и в столкновениях тяжелых ядер (Pb + Pb, Au + Au) на коллайдерах LHC и RHIC: $a = 0.3$, $c_1 = 0.3295$, $c_2 = 2.3$ и $\gamma = 0.81$; при этом величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 0.9. С целью уточнения значений параметров b_g и d , которые определяют глюонную плотность (59) главным образом в области промежуточных и больших x , были использованы экспериментальные данные коллаборации CMS [182] для распределений по поперечному импульсу и быстроте t -кварков в процессах парного рождения $t\bar{t}$ в столкновениях протонов при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Действительно, простая оценка характерной величины x для таких процессов приводит к значению $x \sim 0.03$ при массе t -кварка $m_t \simeq 170$ ГэВ. При вычислении сечений рождения пар $t\bar{t}$ в рамках k_T -факторизационного подхода КХД использовалось семейство TMD глюонных распределений, полученных с помощью численного решения уравнения эволюции CCFM при различных значениях параметров b_g и d . Конечно, эти расчеты производились с учетом как глюонных, так и кварковых вкладов в полном соответствии с вычислениями [183]. Было показано, что наилучшее описание данных коллаборации CMS [182] достигается при $b_g = 10$ и $d = 0.4$. Значения остальных параметров приведены в таблице 11. На рис. 5 приведены результаты расчетов для распределений t -кварков по поперечному импульсу и быстроте, полученные с помощью функции распределения глюонов в протоне (59) с указанными выше значениями феноменологических параметров (ниже мы будем ее называть функцией MD’2018) и функции распределения JH’2013 set 2. Видно, что предложенная глюонная плотность MD’2018

¹⁰Подробное описание вычислений сечений рождения заряженных адронов в АА столкновениях приведено в работах [173, 174].

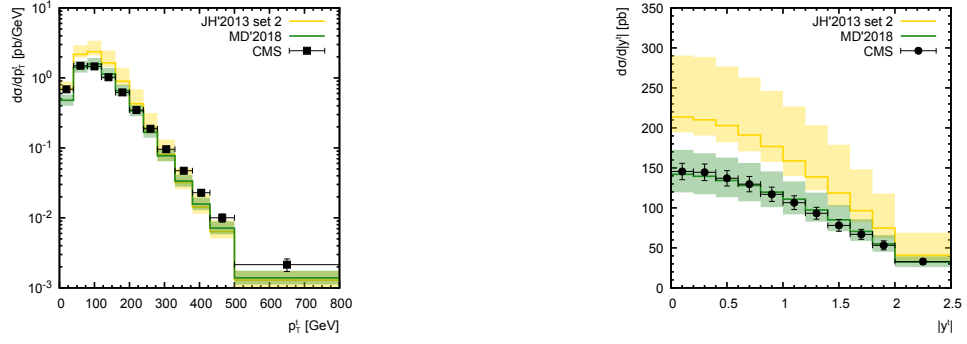


Рис. 5: Дифференциальные сечения процесса парного рождения t -кварков в pp столкновениях на коллайдере LHC при энергии $\sqrt{s} = 13$ TeV как функции поперечного импульса и быстроты лидирующего t -кварка. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации CMS [182].

обеспечивает лучшее согласие предсказаний с экспериментальными данными коллаборации CMS [182], чем функция распределения JH'2013 set 2.

Зависимость TMD распределения глюонов MD'2018 от переменной x и поперечного импульса k_T^2 для различных значений μ^2 приведена на рис. 6. Отметим, что используемый подход, при котором различные параметры начального глюонного распределения определяются в соответствующих кинематических областях, позволяет существенно уменьшить теоретические неопределенности рассчитанной в конечном итоге глюонной плотности по сравнению с методом, используемым в работах [67, 155] (см. рис. 5). Функция распределения глюонов MD'2018 входит в состав общедоступной библиотеки TMDLIB [103].

2.2.4 Аналитические выражения для TMD распределений глюонов и морских кварков в приближении двойного скейлинга

Как было показано в работе [184], в рамках формализма KMR могут быть получены аналитические выражения для TMD функций распределения партонов с использованием в качестве начальных условий коллинеарных партонных плотностей, вычисленных в так называемом приближении двойного скейлинга КХД (Double Asymptotic Scaling Approximation, или DAS) [185–187]. Это приближение основано на свойствах асимптотического поведения решений уравнений эволюции DGLAP при $x \rightarrow 0$ [188]. Так, в рамках подхода DAS функции распределения морских кварков и глюонов в протоне при начальном масштабе $\mu_0^2 \sim 1$ ГэВ² предполагаются плоскими (независящими от x):

$$xa(x, \mu_0^2) = A_a, \quad (62)$$

где $a = q_s$ или g . В работах [185, 186, 189] были получены простые аналитические

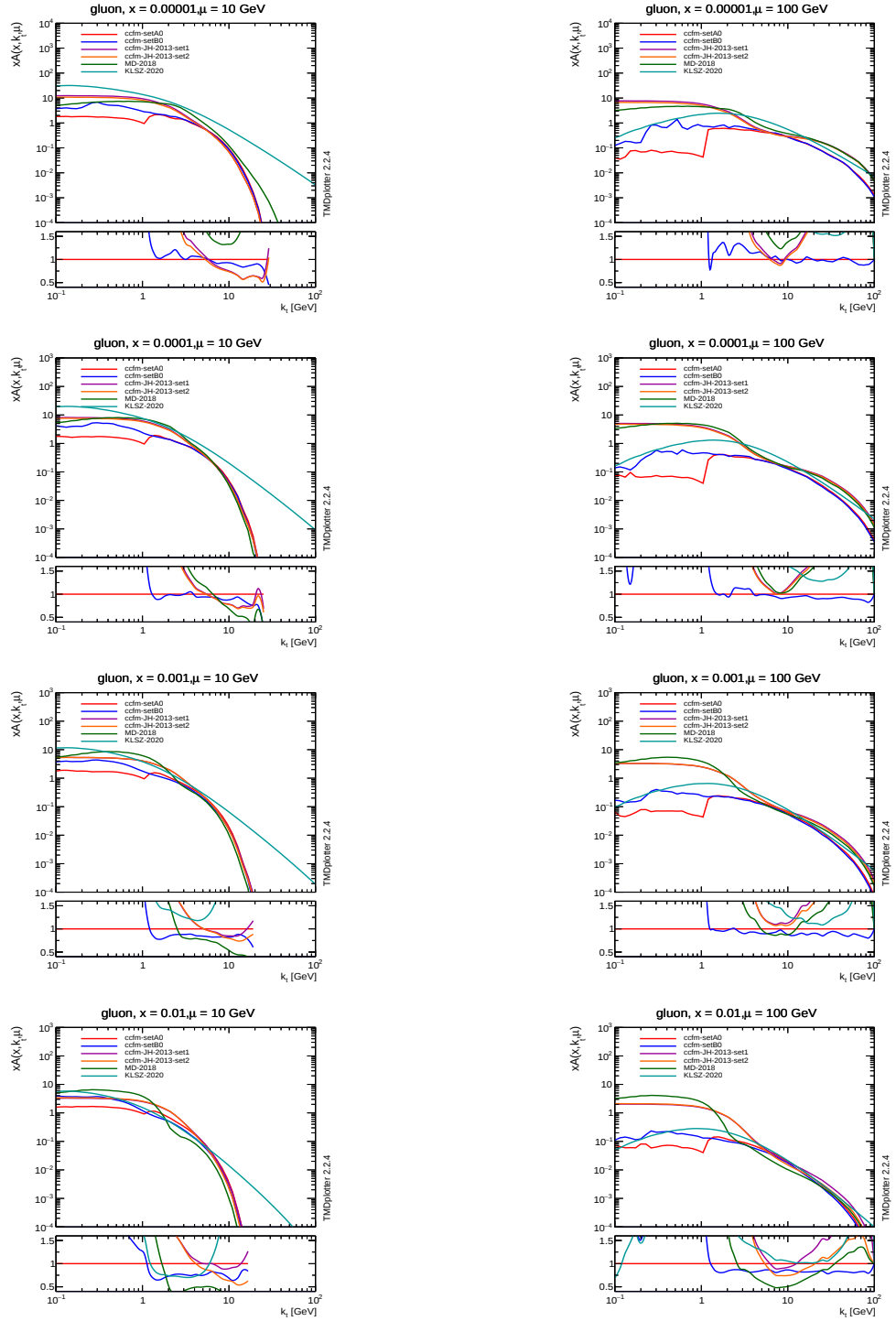


Рис. 6: Зависимость некоторых TMD функций распределения глюонов от переменной x и поперечного импульса k_T^2 для различных значений μ^2 . Рисунок сделан с помощью онлайн-сервиса <http://tmdplotter.desy.de>, составной части проекта TMDLIB [103].

выражения для решений уравнений DGLAP в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД в области малых x с использованием начальных условий (62). В ведущем порядке эти выражения имеют вид:

$$a(x, \mu^2) = a^+(x, \mu^2) + a^-(x, \mu^2), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} xq_s^+(x, \mu^2) &= \frac{\phi}{3} (A_g + CA_q) \tilde{I}_1(\sigma) e^{-\bar{d}_+ s} + O(\rho), \\ xq_s^-(x, \mu^2) &= A_q e^{-d_- s} + O(x), \\ xg^+(x, \mu^2) &= (A_g + CA_q) \bar{I}_0(\sigma) e^{-\bar{d}_+ s} + O(\rho), \\ xg^-(x, \mu^2) &= -CA_q e^{-d_- s} + O(x), \end{aligned} \quad (64)$$

и

$$\tilde{I}_n(\sigma) = \begin{cases} \rho^n I_n(\sigma), & \text{если } s \geq 0 \\ (-\tilde{\rho})^n J_n(\tilde{\sigma}), & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (65)$$

$$\bar{I}_n(\sigma) = \begin{cases} \rho^{-n} I_n(\sigma), & \text{если } s \geq 0 \\ \tilde{\rho}^{-n} J_n(\tilde{\sigma}), & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (66)$$

при этом

$$\begin{aligned} s &= \ln \left(\frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right), \quad \rho = \frac{\sigma}{2 \ln(1/x)}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\sigma}}{2 \ln(1/x)}, \\ \sigma &= 2\sqrt{|\hat{d}_+| s \ln(1/x)}, \quad \tilde{\sigma} = 2\sqrt{-|\hat{d}_+| s \ln(1/x)}, \quad \phi = \frac{N_f}{C_A}, \quad C = \frac{C_F}{C_A}, \\ \hat{d}_+ &= -\frac{4C_A}{\beta_0}, \quad \bar{d}_+ = 1 + \frac{4N_f(1-C)}{3\beta_0}, \quad d_- = \frac{4C_F}{3\beta_0}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_F. \end{aligned} \quad (67)$$

Функции $J_n(x)$ и $I_n(x)$ в выражениях (65) и (65) — обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода порядка n . Численные значения параметров A_a и μ_0^2 были определены [189–191] из экспериментальных данных HERA для структурной функции протона $F_2(x, Q^2)$ при $Q^2 < 18$ ГэВ². Отметим, что для описания данных в области малых $Q^2 \sim 0.5$ ГэВ² ренормализационный масштаб полагался равным $\mu^2 \rightarrow \mu^2 + m_\rho^2$, где m_ρ — масса ρ -мезона: $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \alpha_{\text{fr}}(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2 + m_\rho^2)$. Кроме того, значения этих параметров также были определены с помощью аналитического выражения для константы связи КХД, предложенного в работах [192, 193]:

$$\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \alpha_{\text{an}}(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2) - \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\mu^2 - \Lambda_{\text{QCD}}^2}. \quad (68)$$

Как было отмечено выше, партонные плотности (63) и (64) могут быть использованы для вычисления TMD функций распределения партонных с помощью метода KMR. Такие расчеты были проведены в работе [184]. Аналитические результаты, полученные с использованием интегральной формулировки (44) процедуры KMR, имеют вид:

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = 4C_a T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{4\pi} \left[\bar{D}_a(\Delta) a\left(\frac{x}{x_0}, \mathbf{k}_T^2\right) + \bar{D}_a^+(\Delta) a^+\left(\frac{x}{x_0}, \mathbf{k}_T^2\right) \right], \quad (69)$$

где

$$\bar{D}_a(\Delta) = D_a(\Delta) + D_a^-(\Delta), \quad \bar{D}_a^+(\Delta) = D_a^+(\Delta) - D_a^-(\Delta), \quad (70)$$

и

$$\begin{aligned} D_q(\Delta) &= \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) - \frac{1-\Delta}{4}(3-\Delta), \\ D_q^-(\Delta) &= -\frac{(1-\Delta)\phi}{6}(2-\Delta+2\Delta^2), \\ D_q^+(\Delta) &= \frac{3(1-\Delta)}{2C} \left[\frac{2-\Delta+2\Delta^2}{3\bar{\rho}_q} - \frac{13+\Delta+3\Delta^2}{18} \right], \\ D_g(\Delta) &= \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) - \frac{1-\Delta}{12}(13-5\Delta+4\Delta^2), \\ D_g^-(\Delta) &= 0, \quad D_g^+(\Delta) = \frac{1}{\bar{\rho}_g} + \frac{-3+2\Delta+\Delta^2}{4} + \frac{C\phi}{3}, \quad C_q = C_F, \quad C_g = C_A, \\ \bar{\rho}_a &= \rho_a(x \rightarrow x/x_0), \quad x_0 = 1-\Delta, \quad \rho_g = \frac{\bar{I}_0(\sigma)}{\bar{I}_1(\sigma)}, \quad \rho_q = \frac{\tilde{I}_1(\sigma)}{\bar{I}_0(\sigma)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Значения параметра Δ определяются в соответствии с условиями сильного упорядочивания (48) или углового упорядочивания (49) партонных эмиссий. Следует отметить, что, согласно (69) — (71), использование обычных предположений (46) подхода KMR относительно поведения TMD распределений партонных в области малых $\mathbf{k}_T^2$ не требуется.

Выражения (63) — (67) и, следовательно, аналитические выражения (69) — (71) для TMD распределений партонных справедливы в асимптотической области малых $x \leq 5 \cdot 10^{-2}$. Как было показано, например, в работах [196–198], функции распределения $a(x, \mu^2)$ при бóльших значениях $x \sim 0.1 - 0.2$ могут быть получены из (63) заменой вида

$$a(x, \mu^2) \rightarrow a(x, \mu^2)(1-x)^{\beta_a(s)}, \quad \beta_a(s) = \beta_a(0) + \frac{4C_a s}{\beta_0}, \quad (72)$$

при этом, согласно [199], справедлива оценка

$$\beta_{q_v}(0) \sim 3, \quad \beta_{q_s}(0) \sim \beta_{q_v}(0) + 2 \sim 5, \quad \beta_g(0) \sim \beta_{q_v}(0) + 1 \sim 4. \quad (73)$$

Однако значения $\beta_a(0)$ обычно определяются из экспериментальных данных [200–

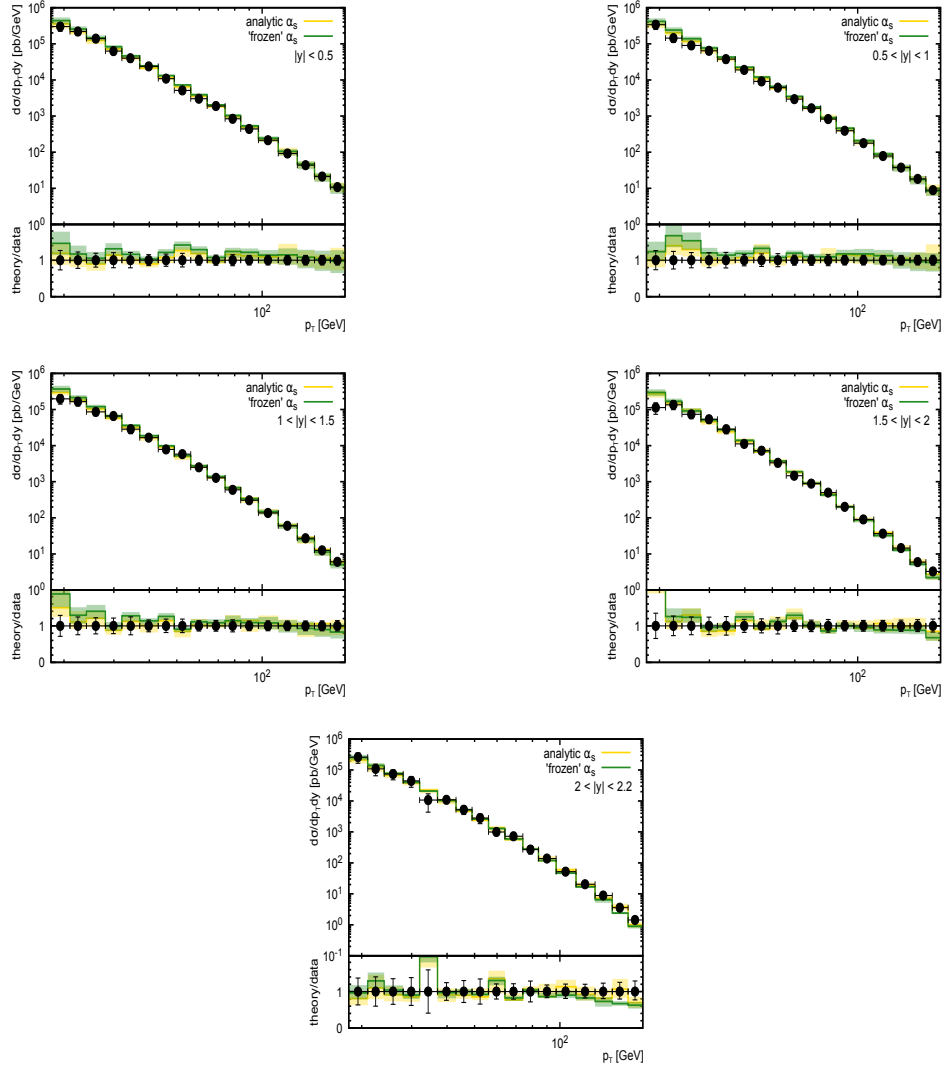


Рис. 7: Распределения по поперечному импульсу b -кварков в pp столкновениях, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот с использованием TMD функции распределения глюонов, определенной аналитическими выражениями (69) — (71) и (74). Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации CMS [194].

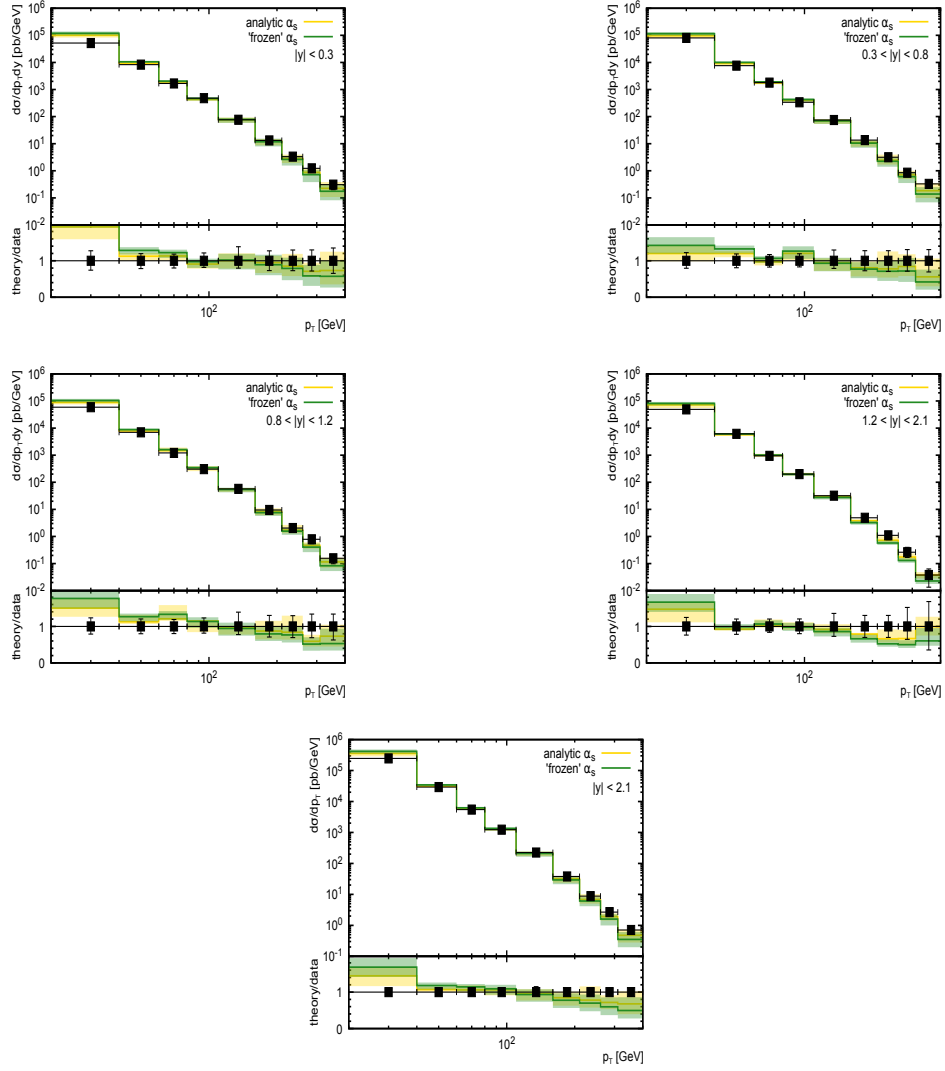


Рис. 8: Распределения по поперечному импульсу b -кварков в pp столкновениях, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Обозначения гистограмм соответствуют обозначениям на рис. 7. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [195].

202]. Следуя (72), в дальнейших расчетах предполагается, что в области $x > 5 \cdot 10^{-2}$ TMD распределения партонов могут быть представлены в виде

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) \rightarrow f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)(1 - x/x_0)^{\beta_a(s)}. \quad (74)$$

Из условия наилучшего описания экспериментальных данных коллабораций CMS [194] и ATLAS [195] для процессов инклюзивного рождения струй b -кварков в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ были получены значения $\beta_g(0) = 5.77$ и $\beta_g(0) = 3.84$, которые соответствуют использованию в расчетах выражений $\alpha_{\text{fr}}(\mu^2)$ и $\alpha_{\text{an}}(\mu^2)$ для константы связи КХД. Подробное описание соответствующих вычислений в рамках k_T -факторизационного подхода приведено в работах [203, 204]. Для уменьшения влияния случайных ошибок процедура определения величины $\beta_g(0)$ была проведена по отдельности в каждом из интервалов по быстрой b -кварков y , в которых были получены экспериментальные данные; при этом каждое из полученных значений рассматривалось как результат независимого ”измерения”. В качестве окончательного результата принималось их среднее значение. Соответствующие этим значениям предсказания для распределений b -кварков по поперечному импульсу p_T представлены на рис. 7 и 8, при этом закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Как легко видеть, полученные результаты хорошо описывают экспериментальные данные коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине во всех интервалах быстрой.

Зависимость TMD функции распределения глюонов, определенной согласно выражениям (69) — (71) и (74) от переменной x и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ для различных значений μ^2 приведена на рис. 9. В расчетах использовались значения параметра Δ , которые соответствуют как условию строгого упорядочивания (48), так и условию углового упорядочивания (49) партонных излучений. Отметим, что функция, параметры которой были определены при выборе условия (49) и константы связи КХД $\alpha_{\text{fr}}(\mu^2)$ входит в состав библиотеки TMDLIB [103] (функция KLSZ’2020, см. рис. 6) и Монте-Карло генератора PEGASUS [100].

2.3 Амплитуды партонных подпроцессов вне массовой поверхности

Согласно (2), сечения (и иные характеристики) различных физических процессов в рамках k_T -факторизационного подхода КХД определяются сверткой TMD распределений партонов в адроне (протоне) и амплитуд соответствующих жестких подпроцессов рассеяния. Ввиду отсутствия в общем случае условия строго упорядочивания по поперечным импульсам партонов, испускаемых во время КХД эволюции партонного каскада, в расчетах становится необходимо учитывать зависимость этих амплитуд от виртуальности начальных частиц, т.е. вычислять их более точно, без обычных

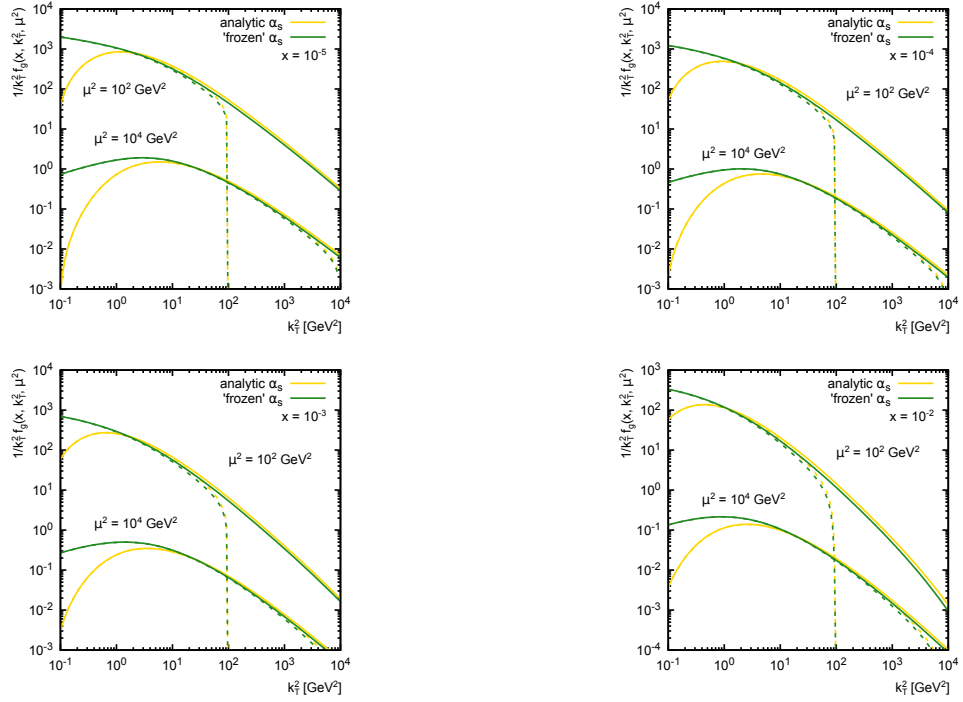


Рис. 9: Зависимость TMD функции распределения глюонов, определенной согласно выражениям (69) — (71) и (74) от переменной x и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ для различных значений μ^2 . Сплошные и штриховые линии представляют результаты, полученные в соответствии с условиями строгого упорядочивания (48) или углового упорядочивания (49) партонных эмиссий.

упрощений коллинеарного приближения КХД.

Такие вычисления могут быть выполнены в рамках формализма, основанного на эффективной теории поля в мультiredжевской кинематике [51–53] (см. также [205]). Эффективное действие для реджезованных глюонов и кварков обеспечивает t -канальную факторизацию древесных амплитуд в этом пределе и обеспечивает их калибровочную инвариантность во всех порядках теории возмущений. Согласно (12), асимптотическое выражение для амплитуды множественного рождения состоит из калибровочно-инвариантных эффективных вершин, описывающих процесс рождения обычных частиц, отделенных друг от друга большими интервалами по быстроте. Эти вершины связаны друг с другом с помощью обменов t -канальными виртуальными степенями свободы — реджезованными глюонами ($R^\pm$) и кварками ($Q^\pm$). Как и ранее, индексы ” $\pm$ ” обозначают большую компоненту импульса (в переменных светового конуса), которую переносит реджезованный партон, обладающий также и поперечным импульсом того же порядка. Эффективные вершины взаимодействия включают в себя нелокальные индуцированные вклады, обеспечивающие калибровочную инвариантность амплитуд в реджевском пределе, несмотря на виртуальность взаимодействующих партонов. Так, например, вершина $R^+ R^- g$ для процесса рождения Янг-Миллсовского глюона с импульсом $k = k_1 + k_2$ в столкновении двух реджезованных глюонов R^+ и R^- , обладающих импульсами k_1 и k_2 и цветовыми индексами a и b , имеет вид [206]:

$$\Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2) = -2g f^{abc} \left[(k_2 - k_1)_\mu + \left(\frac{k_1^2}{k_2^-} + k_1^+ \right) n_\mu^- - \left(\frac{k_2^2}{k_1^+} + k_2^- \right) n_\mu^+ \right]. \quad (75)$$

Вершины взаимодействия реджезованных глюонов и кварков, $R^\pm qq$, записываются как

$$\Gamma_\pm^a = g t^a \hat{n}^\mp, \quad (76)$$

а вершины рассеяния с участием реджезованных кварков, $Q^\pm qq$, могут быть представлены в форме [119, 207, 208]

$$\Gamma_{\pm\mu}^a(k, q) = g t^a \left(\gamma_\mu + n_\mu^\mp \frac{\hat{k}}{q^\mp} \right), \quad (77)$$

где k и q — импульсы реджезованного кварка и Янг-Миллсовского глюона с цветовым индексом a , соответственно. В системе центра масс сталкивающихся частиц 4-векторы $n^\pm$ направлены вдоль оси взаимодействия z , $n^\pm = (1, 0, 0, \mp 1)$. Правила Фейнмана для эффективной теории поля приведены и детально обсуждаются в работе [209].

Наиболее часто в последующих расчетах будут встречаться различные подпроцессы, при вычислении амплитуд вне массовой поверхности которых необходимо ис-

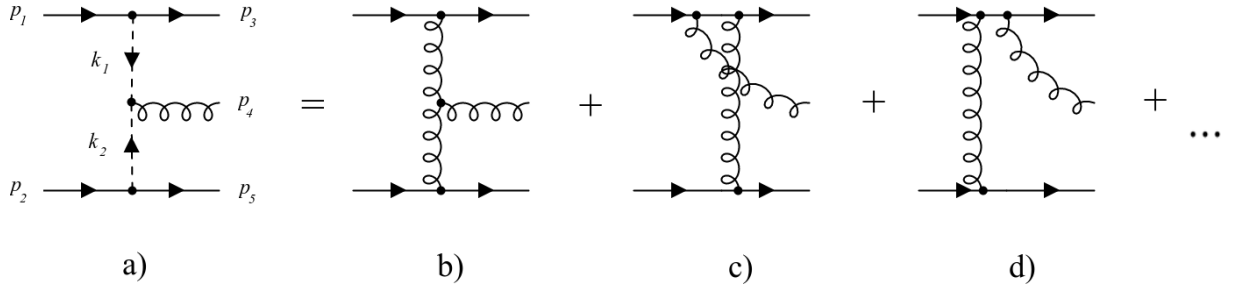


Рис. 10: Схематичное изображение амплитуды процесса $q + q' \rightarrow q + g + q'$ в мультиреджевской кинематике и соответствующие фейнмановские диаграммы. Две диаграммы, в которых конечный глюон испускается из нижней кварковой линии, не показаны.

пользовать эффективные вершины взаимодействия вида (75) с участием двух реджезованных глюонов. Ниже такие вычисления будут описаны несколько более подробно на примере процесса рассеяния $q(p_1) + q'(p_2) \rightarrow q(p_3) + g(p_4) + q'(p_5)$, где импульсы всех партонов указаны в скобках (см. рис. 10).

Кинематические особенности рассматриваемого процесса заключаются в следующем. В качестве системы отсчета выберем систему центра масс сталкивающихся частиц, так что их импульсы направлены вдоль оси взаимодействия: $p_1 = \sqrt{s}/2(1, 0, 0, 1)$, $p_2 = \sqrt{s}/2(1, 0, 0, -1)$. Пренебрегая массами всех партонов, т.е. полагая, в частности, $p_3^2 = p_3^+ p_3^- - \mathbf{p}_{3T}^2 = 0$ и $p_5^2 = p_5^+ p_5^- - \mathbf{p}_{5T}^2 = 0$, можно записать соотношения:

$$\begin{aligned} s_{34} &= (p_3 + p_4)^2 = s(1 - z_1)z_2 + \frac{z_1}{1 - z_1} \mathbf{p}_{3T}^2 - 2\mathbf{p}_{3T}\mathbf{p}_{4T}, \\ s_{45} &= (p_4 + p_5)^2 = s(1 - z_2)z_1 + \frac{z_2}{1 - z_2} \mathbf{p}_{5T}^2 - 2\mathbf{p}_{4T}\mathbf{p}_{5T}, \\ t_{13} &= (p_1 - p_3)^2 = -\frac{\mathbf{p}_{3T}^2}{1 - z_1}, \quad t_{25} = (p_2 - p_5)^2 = -\frac{\mathbf{p}_{5T}^2}{1 - z_2}, \end{aligned} \quad (78)$$

где $s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^+ p_2^-$, $z_1 = p_4^+/p_1^+$ и $z_2 = p_4^-/p_2^-$ — доли импульсов начальных частиц, передаваемых конечному глюону в переменных светового конуса. Учитывая, что $|\mathbf{p}_{3T}| \sim |\mathbf{p}_{5T}| \sim |\mathbf{p}_{4T}|$ и $\mathbf{p}_{4T}^2 = z_1 z_2 s$, нетрудно показать, что мультиреджевскому пределу

$$s_{34} \gg -t_{13}, \quad s_{45} \gg -t_{25}, \quad (79)$$

соответствует выполнение следующих условий:

$$z_1 \ll 1, \quad z_2 \ll 1, \quad \mathbf{p}_{3T}^2 \ll s, \quad \mathbf{p}_{5T}^2 \ll s. \quad (80)$$

В этом пределе для быстрот y_3 и y_5 справедлива оценка:

$$y_3 = \frac{1}{2} \ln \frac{p_3^+}{p_3^-} = \ln \frac{p_1^+(1-z_1)}{|\mathbf{p}_{3T}|} \rightarrow +\infty, \quad y_5 = \frac{1}{2} \ln \frac{p_5^+}{p_5^-} = -\ln \frac{p_2^-(1-z_2)}{|\mathbf{p}_{5T}|} \rightarrow -\infty, \quad (81)$$

тогда как быстрота y_4 остается конечной:

$$y_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{p_4^+}{p_4^-} = \ln \frac{z_1 p_1^+}{|\mathbf{p}_{4T}|} \equiv -\ln \frac{z_2 p_2^-}{|\mathbf{p}_{4T}|}. \quad (82)$$

Таким образом, действительно, в пределе (79) частицы в конечном состоянии отделены друг от друга значительным интервалом быстрот, при этом доли z_1 и z_2 продольных импульсов начальных частиц, передаваемые конечным частицам в центральной области быстрот $z_1 \sim z_2 \sim z \ll 1$. Поскольку компоненты импульсов t -канальных реджезованных партонов равны

$$\begin{aligned} k_1^+ &= z_1 p_1^+, & k_1^- &= -\frac{\mathbf{p}_{3T}^2}{p_1^+(1-z_1)}, & \mathbf{k}_{1T} &= -\mathbf{p}_{3T}, \\ k_2^- &= z_2 p_2^-, & k_2^+ &= -\frac{\mathbf{p}_{5T}^2}{p_2^-(1-z_2)}, & \mathbf{k}_{2T} &= -\mathbf{p}_{5T}, \end{aligned} \quad (83)$$

то в мультиреджевском пределе (79) имеем: $k_1^+ \sim |\mathbf{k}_{1T}| \gg k_1^-$ и $k_2^- \sim |\mathbf{k}_{2T}| \gg k_2^+$, что, как было отмечено выше, позволяет пренебрегать малыми компонентами импульсов k_1^- и k_2^+ .

Калибровочно-инвариантный набор фейнмановских диаграмм, дающих вклад в амплитуду рассматриваемого процесса, изображен на рис. 10. Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что в пределе (79) эта амплитуда может быть представлена в факторизованной форме (12) с обменом реджезованными глюонами в t -канале (см., например, [210]):

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(q + q' \rightarrow q + g + q') \sim \\ &\sim [\bar{u}(p_3)\Gamma_-^a u(p_1)] \frac{1}{t_{13}} \Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2) \epsilon_c^\mu(p_4) \frac{1}{t_{25}} [\bar{u}(p_5)\Gamma_+^b u(p_2)]. \end{aligned} \quad (84)$$

Выражение (84), конечно, удовлетворяет тождеству Славнова-Тейлора, поскольку $\Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2)(k_1 + k_2)^\mu = 0$.

В дальнейших расчетах широко используется метод, предложенный в работе [23, 24] (см. также [21, 22]). В рамках этого метода реджезованные глюоны, обладающие импульсами $k_1 = z_1 p_1 + k_{1T}$ и $k_2 = z_2 p_2 + k_{2T}$, рассматриваются как начальные виртуальные частицы, участвующие в жестком взаимодействии. Полагая светоподобные векторы $n^\pm$ равными $n_\mu^+ = 2p_{2\mu}/\sqrt{s}$, $n_\mu^- = 2p_{1\mu}/\sqrt{s}$ и выбирая специальную физическую (аксиальную) калибровку, $q_\mu A^\mu = 0$, в которой поляризационный тензор глюона

с импульсом k имеет вид

$$d^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu}{(k \cdot q)} - q^2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k \cdot q)^2}, \quad (85)$$

где q — некоторый 4-вектор, легко заметить, что

$$p_1^\mu d_{\mu\nu}(k_1) = k_{1T}^\nu / z_1, \quad p_2^\mu d_{\mu\nu}(k_2) = k_{2T}^\nu / z_2. \quad (86)$$

Из соотношений (86) следует, что специальный выбор вектора поляризации для реджезованного глюона с импульсом k — а именно, $\epsilon^\mu(k) = k_T^\mu / |\mathbf{k}_T|$ — позволяет исключить вклад диаграмм (с) и (d), изображенных на рис. 10 (а также аналогичной группы диаграмм, в которых конечный глюон испускается из нижней кварковой линии) в амплитуду рассматриваемого процесса. Более того, в этом случае эффективная вершина взаимодействия (75) может быть заменена обычной трехглюонной вершиной (см., например, [211]):

$$C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = g f^{abc} \left[(q_2 - q_1)^\lambda g^{\mu\nu} + (q_3 - q_2)^\mu g^{\nu\lambda} + (q_1 - q_3)^\nu g^{\mu\lambda} \right], \quad (87)$$

при этом, несмотря на виртуальность начальных глюонов, калибровочная инвариантность амплитуды рассеяния сохраняется [23, 24]. В случае абелевского взаимодействия, структура эффективной вершины (76) также обеспечивает калибровочную инвариантность рассчитанных амплитуд.

Отметим, что выражение для поляризационного тензора виртуальных глюонов также можно получить, рассматривая процесс испускания такого глюона находящимся на массовой поверхности кварком: $q(p) \rightarrow q'(p') + g(k)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum \epsilon^\mu(k) \epsilon^{*\nu}(k) &\sim L^{\mu\nu} = g^2 \frac{1}{k^2} \text{tr} [(\hat{p}' + m_q) \gamma^\mu (\hat{p} + m_q) \gamma^\nu] = \\ &= g^2 \frac{1}{k^2} [8p^\mu p^\nu - 4(p \cdot k) g^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (88)$$

где m_q — масса кварка. Пренебрегая вторым слагаемым в правой части соотношения (88) в рассматриваемой кинематической области, $k \ll p$, а также полагая в этом пределе $k = zp + k_T$, легко получить, что

$$\sum \epsilon^\mu(k) \epsilon^{*\nu}(k) = \frac{k_T^\mu k_T^\nu}{\mathbf{k}_T^2}. \quad (89)$$

В пределе $|\mathbf{k}_T| \rightarrow 0$ выражение (89) переходит в обычное выражение для матрицы плотности глюонов, находящихся на массовой поверхности: $\sum \epsilon^\mu(k) \epsilon^{*\nu}(k) \rightarrow -g^{\mu\nu}/2$. Следует подчеркнуть, что предложенный подход [23, 24] и, в частности, тензор поляризации (89) активно применяется при проведении различных феноменологических расчетов (см., например, [39, 40, 46, 47, 212]). Кроме того, в недавней работе [213] был предложен метод автоматического вычисления амплитуд вне массовой поверхности

(в древесном приближении) для определенного класса партонных подпроцессов. Этот метод, основанный на соотношениях рекурсии Бритто-Качасо-Фен-Виттена (BCFW), используется в Монте-Карло генераторе KATIE [98].

2.4 TMD факторизация эффектов физики больших и малых расстояний

Как уже было упомянуто выше, теоретической основой для изучения различных процессов рождения частиц при столкновении адронов высоких энергий является гипотеза факторизации эффектов физики больших и малых расстояний. Взаимодействие кварков и глюонов на малых расстояниях описывается методами теории возмущений КХД, а непертурбативные эффекты больших расстояний учитываются с помощью функций распределения (или фрагментации) партонных в адроне и/или волновых функций связанных состояний кварков. Так, например, сечение процесса инклюзивного рождения адрона H в столкновениях протонов обычно записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(pp \rightarrow H + X)}{dp_T} &= \int dx_1 dx_2 \sum_{a,b} a(x_1, \mu^2) b(x_2, \mu^2) \times \\ &\times \sum_c \int \frac{d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow c + X)}{dp_T^{(c)}} D_{c \rightarrow H}(z, \mu^2) \delta\left(z - \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}^{(c)}|}\right) dz, \end{aligned} \quad (90)$$

где $\hat{\sigma}(a + b \rightarrow c + X)$ — сечение жесткого подпроцесса партонного взаимодействия, μ^2 — характерный энергетический масштаб, x_1 и x_2 — доли продольных импульсов начальных протонов, переносимые сталкивающимися партонами, $D_{c \rightarrow H}(z, \mu^2)$ — функция фрагментации партона c в адрон H , а партонные распределения $a(x, \mu^2)$ и $b(x, \mu^2)$ могут быть получены из решений уравнений КХД эволюции DGLAP.

При описании экспериментальных данных для процессов, характеризующихся более чем одним энергетическим масштабом взаимодействия, как правило, становится необходимым учет значительного числа диаграмм высших порядков теории возмущений КХД. Кроме того, в области высоких энергий, когда масштаб взаимодействия партонных μ^2 удовлетворяет двойному неравенству $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu \ll \sqrt{s}$ — так, что $x \sim \mu/\sqrt{s} \ll 1$, а бегущая константа связи КХД все еще остается малой, $\alpha_s(\mu^2) \ll 1$ — уже нельзя пренебрегать зависимостью партонного сечения $\hat{\sigma}(a + b \rightarrow c + X)$ от поперечных импульсов начальных частиц. Теоретическое описание таких процессов в КХД может быть достигнуто путем обобщения факторизационной формулы (90) за рамки обычного коллинеарного приближения. Такое обобщение может быть выполнено с помощью k_T -факторизационного подхода КХД, предложенного в работах [21–24] и активно развиваемого в настоящее время (см., например, обзор [214]).

В рамках k_T -факторизационного подхода сечение физических процессов определяется сверткой TMD распределений партонных в протоне и сечений соответствующего

ющих жестких партонных подпроцессов вне массовой поверхности. Для процесса инклюзивного рождения адрона H в протон-протонных столкновениях оно может быть представлено в форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(pp \rightarrow H + X)}{dp_T} &= \int dx_1 dx_2 \sum_{a,b} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{1T}}{\pi\mathbf{k}_{1T}^2} \frac{d^2\mathbf{k}_{2T}}{\pi\mathbf{k}_{2T}^2} f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ &\times \sum_c \int \frac{d\hat{\sigma}^*(a + b \rightarrow c + X)}{dp_T^{(c)}} D_{c \rightarrow H}(z, \mu^2) \delta\left(z - \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}^{(c)}|}\right) dz. \end{aligned} \quad (91)$$

Следует подчеркнуть, что сечение $\hat{\sigma}^*(a + b \rightarrow c + X)$ зависит от виртуальности начальных партонов, а соответствующие TMD функции распределения подчиняются уравнениям эволюции типа BFKL. В общем случае рождения n частиц формула для сечения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow p_1 + \dots + p_n + X) &= \frac{\pi}{\hat{s}F} (4\pi)^{2-2n} \sum_{a,b} |\mathcal{A}(a + b \rightarrow p_1 + \dots + p_n)|^2 \times \\ &\times f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 \dots d\mathbf{p}_{(n-1)T}^2 dy_1 \dots dy_n \frac{d\phi_1}{2\pi} \dots \frac{d\phi_{n-1}}{2\pi}, \end{aligned} \quad (92)$$

где $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2$, а $\mathbf{p}_{iT}$, y_i и ϕ_i — поперечные импульсы, быстроты (в системе центра масс сталкивающихся протонов) и азимутальные углы конечных частиц. В формуле (92) $|\mathcal{A}(a + b \rightarrow p_1 + \dots + p_n)|^2$ — квадрат амплитуды вне массовой поверхности жесткого подпроцесса рассеяния, где, как обычно, проведено суммирование по поляризациям конечных частиц и усреднение по поляризациям начальных. Доли продольных импульсов начальных протонов x_1 и x_2 могут быть вычислены с помощью закона сохранения энергии-импульса:

$$x_1\sqrt{s} = \sum_{i=1}^n m_{iT} \exp(y_i), \quad x_2\sqrt{s} = \sum_{i=1}^n m_{iT} \exp(-y_i), \quad (93)$$

где поперечная масса i -ой частицы $m_{iT}^2 = m_i^2 + \mathbf{p}_{iT}^2$. Выражение для инвариантного потока F обычно выбирается в соответствии с общим определением [215]:

$$F = 2\lambda^{1/2}(\hat{s}, k_1^2, k_2^2), \quad \lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz. \quad (94)$$

Отметим, что выражение (92) используется, в частности, в Монте-Карло генераторе событий PEGASUS [100].

3 Процессы рождения тяжелых кварков при высоких энергиях

Данная глава посвящена исследованию процессов рождения тяжелых кварков в протон-протонных и электрон-протонных столкновениях при высоких энергиях. В рамках k_T -факторизационного подхода вычислены вклады тяжелых (c и b) кварков в структурные функции протона $F_2(x, Q^2)$ и $F_L(x, Q^2)$ в широком диапазоне изменения значений x и Q^2 . Изучены процессы инклюзивного рождения b -струй и одиночного рождения t -кварков в протон-протонных столкновениях на коллайдере ЛНС. Кроме того, с помощью фрагментационного механизма рассчитаны полные и дифференциальные сечения процессов одиночного и парного рождения ψ' и J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Все эти процессы позволяют непосредственно получать информацию о функции распределения глюонов в протоне, поскольку в рамках теории возмущений КХД тяжелые кварки рождаются в основном через фундаментальный подпроцесс фотон-глюонного или глюон-глюонного слияния. Расчеты проводились с использованием одного и того же набора численных параметров. Так, следуя [216], использовались следующие значения: $m_c = 1.5$ ГэВ, $m_b = 4.75$ ГэВ, $m_t = 173.0$ ГэВ, $m_{J/\psi} = 3.097$ ГэВ, $m_{\psi'} = 3.686$ ГэВ, $m_W = 80.403$ ГэВ, $\Gamma_W = 2.085$ ГэВ и $\sin^2 \theta_W = 0.23116$ (при этом массы всех легких кварков полагались равными нулю). Оценка теоретических неопределенностей, связанных с выбором масштабов ренормализации μ_R и факторизации μ_F , производилась обычным способом (уменьшение или увеличение значений этих параметров в 2 раза). Проведено сравнение с последними экспериментальными данными, полученными коллаборациями ZEUS, H1, CMS, ATLAS и LHCb. Изучены кинематические переменные, наиболее чувствительные к выбору TMD распределений глюонов в протоне.

3.1 Структурные функции ГНР

Как было отмечено выше, одним из основных инструментов исследования структуры протона являются процессы глубоконеупругого лептон-протонного рассеяния (ГНР). Лептоны, участвующие в таких процессах, являются либо заряженными лептонами (электронами или мюонами), либо нейтрино, которые рассеиваются на нуклонах мишени посредством электромагнитных или слабых взаимодействий соответственно. Так, в случае заряженных лептонов ГНР представляет собой "зондирование" структуры мишени виртуальными фотонами. Из принципа неопределенности следует, что фотон с виртуальностью Q^2 позволяет определить структуру в масштабе длин порядка $1/\sqrt{Q^2}$. С увеличением массы виртуального фотона структура протона "прощупывается" на все более малых расстояниях. Исследование вкладов тяжелых (c или b) кварков в структурные функции протона — в частности, в функцию $F_2(x, Q^2)$ — дает возможность напрямую получать информацию о глюонной состав-

ляющей протона, поскольку, как было отмечено выше, тяжелые кварки рождаются главным образом в подпроцессе фотон-глюонного слияния¹¹.

Пренебрегая массами электрона и протона по сравнению с массой тяжелого кварка и/или передаваемым импульсом, дифференциальное сечение процесса глубоконеупругого рассеяния электрона на протоне $e(k) + p(p) \rightarrow e'(k') + Q(p_1) + \bar{Q}(p_2) + X(p_X)$, где импульсы всех частиц указаны в скобках, можно представить в виде (см., например, [1]):

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow e' + Q + \bar{Q} + X)}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) F_2^Q(x, Q^2) - \frac{y^2}{2} F_L^Q(x, Q^2) \right]. \quad (95)$$

Здесь $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$ — вклады тяжелого кварка в соответствующие структурные функции протона. Переменные $x = Q^2/2(p \cdot q)$ и $y = (p \cdot q)/(p \cdot k)$ представляют собой долю продольного импульса начального протона, уносимую глюоном, и долю энергии электрона, переданную протону, соответственно; при этом передаваемый импульс $q = k - k'$ и $Q^2 = -q^2$. Согласно общей формуле (2), структурные функции $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$ в рамках k_T -факторизационного подхода КХД могут быть представлены в виде [226, 227]

$$F_k^Q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \int \frac{d\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{k}_T^2} C_k\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2\right) f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2), \quad (96)$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD функция распределения глюонов в протоне и $k = 2, L$. Коэффициентные функции $C_k(x, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2)$ определяются подпроцессом $\gamma^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q}$ и были вычислены в работе [226]:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^2 C_2(x, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2) &= e_Q^2 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} x \left[c^{(1)} + \frac{3}{2\tilde{\beta}^2} c^{(2)} \right], \\ \tilde{\beta}^2 C_L(x, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2) &= e_Q^2 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} x \left[4bx^2 c^{(1)} + \frac{1 + 2bx^2}{\tilde{\beta}^2} c^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (97)$$

¹¹Различные методы вычисления глюонной плотности (в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД) из экспериментальных данных для функций $F_2(x, Q^2)$, $F_L(x, Q^2)$ и логарифмической производной $\partial F_2(x, Q^2)/\partial \ln Q^2$ были предложены, например, в работах [217–221].

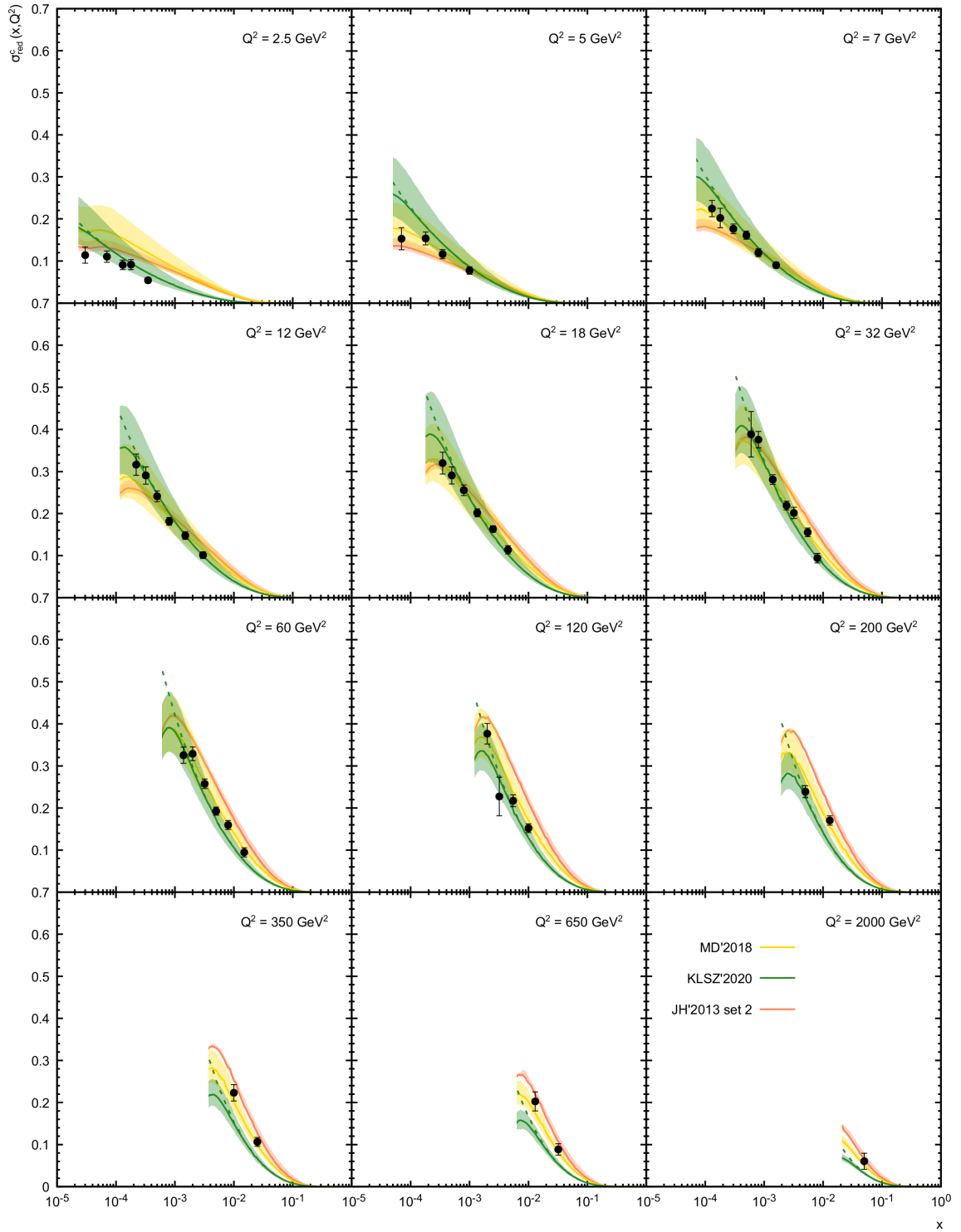


Рис. 11: Зависимость сечения $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 при $\sqrt{s} = 318$ ГэВ. Пунктирные кривые отвечают результатам для структурной функции $F_2^c(x, Q^2)$, полученным с помощью аналитической функции распределения глюонов в протоне KLSZ'2020 [184]. Экспериментальные данные коллабораций ZEUS и H1 [222].

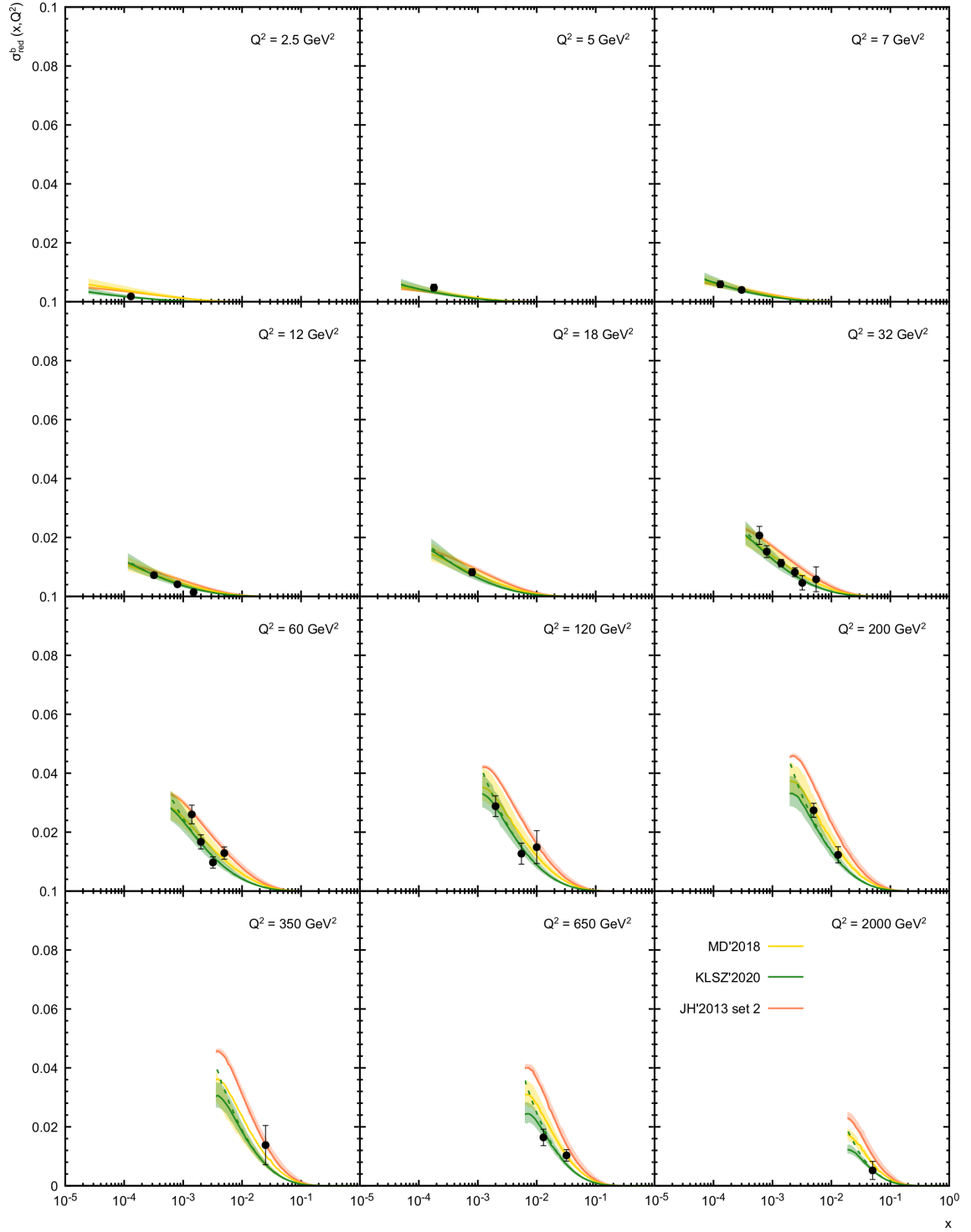


Рис. 12: Зависимость сечения $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 при $\sqrt{s} = 318$ ГэВ. Пунктирные кривые отвечают результатам для структурной функции $F_2^b(x, Q^2)$, полученным с помощью аналитической функции распределения глюонов в протоне KLSZ'2020 [184]. Экспериментальные данные коллабораций ZEUS и H1 [222].

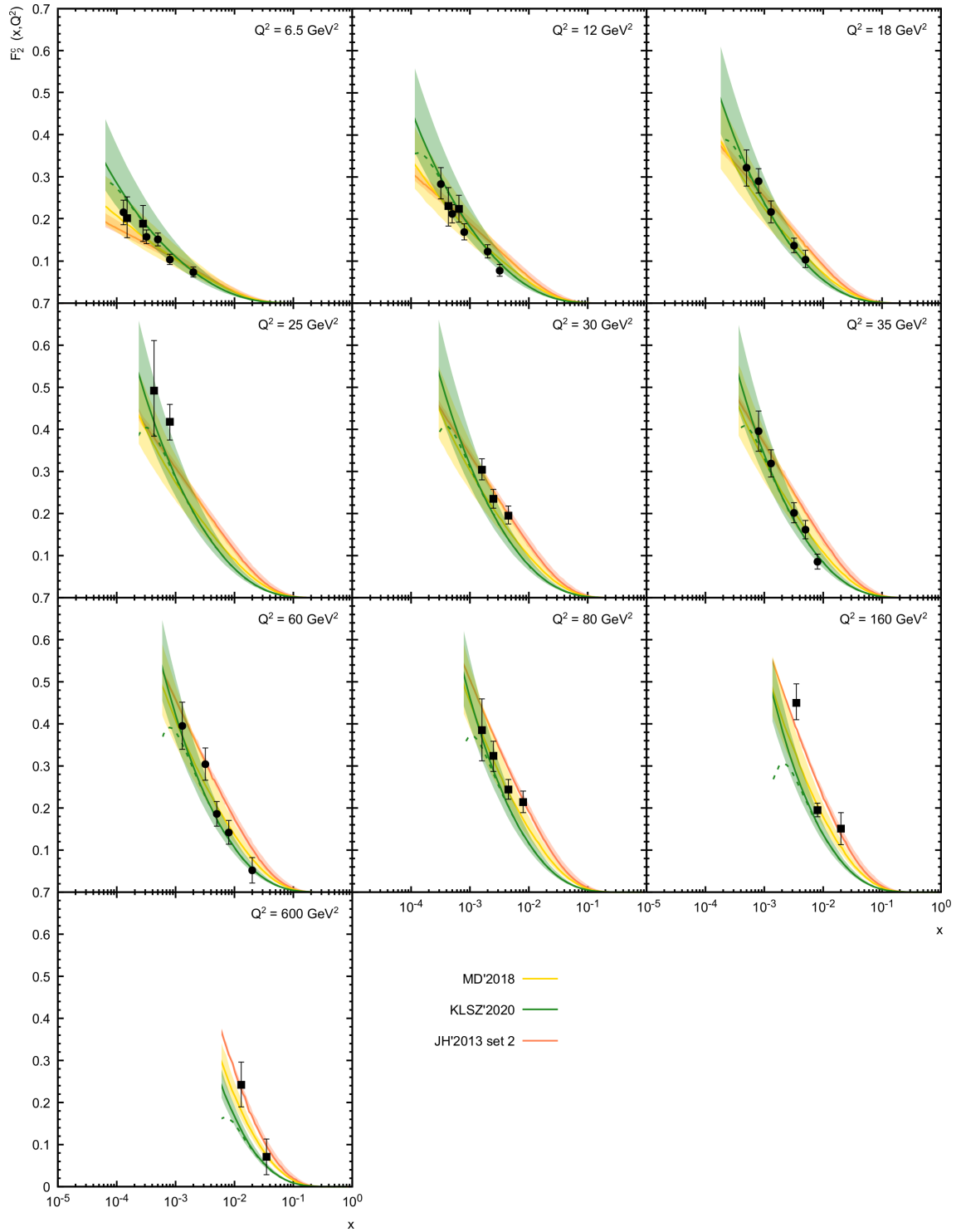


Рис. 13: Зависимость структурной функции протона $F_2^c(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 . Пунктирные кривые отвечают результатам для $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$, полученным с помощью аналитической функции распределения глюонов в протоне KLSZ'2020 [184]. Экспериментальные данные коллабораций ZEUS [223] и H1 [224, 225].

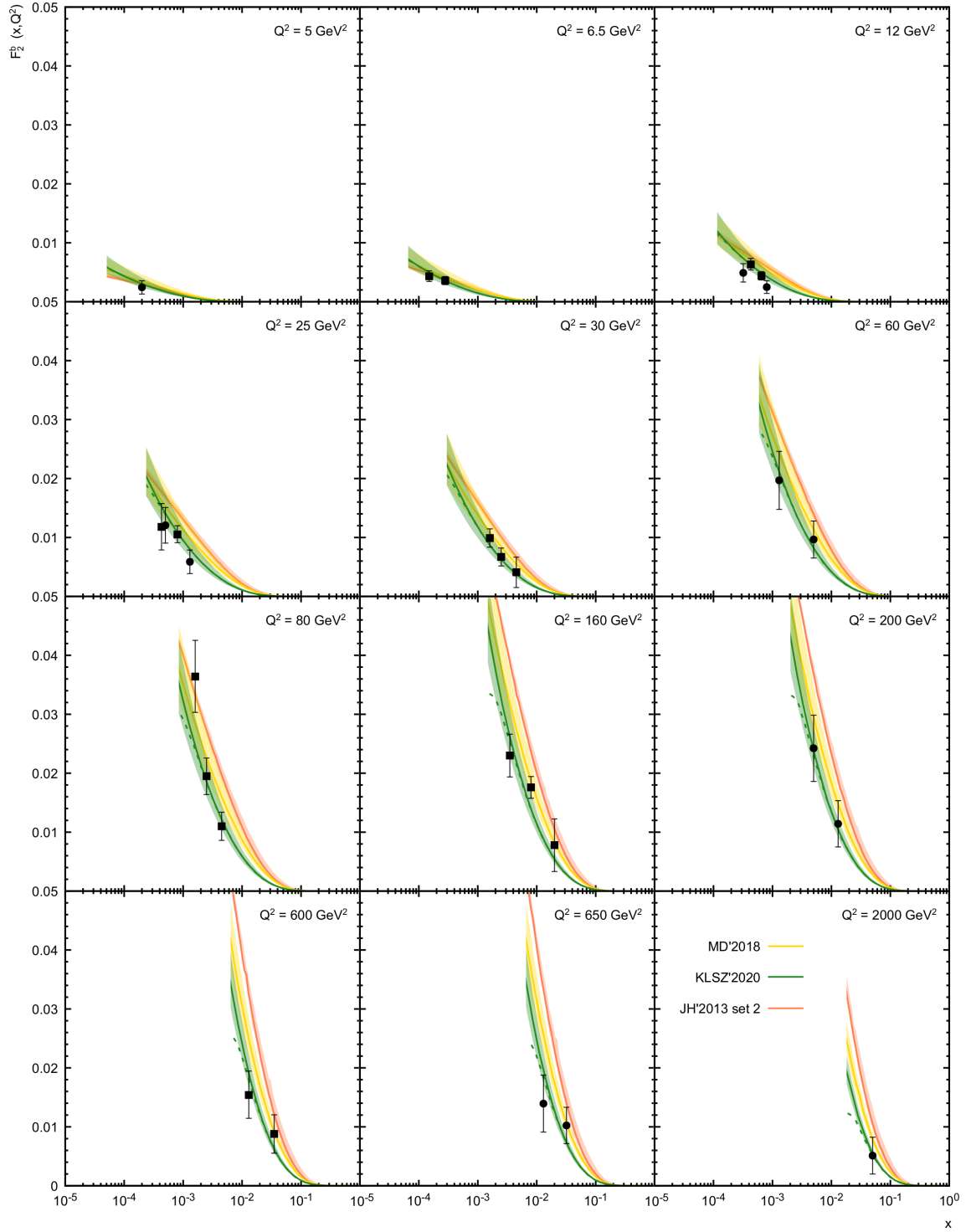


Рис. 14: Зависимость структурной функции протона $F_2^b(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 . Пунктирные кривые отвечают результатам для $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$, полученным с помощью аналитической функции распределения глюонов в протоне KLSZ'2020 [184]. Экспериментальные данные коллабораций ZEUS [223] и H1 [225].

при этом

$$\begin{aligned}
c^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{\beta}^4} \left[\tilde{\beta}^2 f^{(i)} - 3bx^2 g^{(i)} \right], \\
-\frac{1}{2\beta} f^{(1)} &= 1 - (1 - 2x(1 + b - 2a)[1 - x(1 + b + 2a)])f_1 + \\
&\quad + (2a - b)(1 - 2a)x^2 f_2, \\
\frac{1}{8x\beta} f^{(2)} &= (1 - (1 + b)x) - 2x(bx(1 - (1 + b)x)(1 + b - 2a) + a\tilde{\beta}^2)f_1 + \\
&\quad + bx^2(1 - (1 + b)x)(2a - b)f_2, \\
-\frac{1}{\beta} g^{(1)} &= \frac{1 - x(1 + b)}{x} - 2(x(1 - x(1 + b))(1 + b - 2a) + a\tilde{\beta}^2)f_1 - \\
&\quad - x(1 - x(1 + b))(1 - 2a)f_2, \\
\frac{1}{4\beta(1 - (1 + b)x)^2} g^{(2)} &= 2 - (1 + 2bx^2)f_1 - bx^2 f_2.
\end{aligned} \tag{98}$$

Здесь m_Q и e_Q — масса и электрический заряд тяжелого кварка в единицах заряда позитрона, $a = m_Q^2/Q^2$, $b = \mathbf{k}_T^2/Q^2$, $\tilde{\beta}^2 = 1 - 4bx^2$ и

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= 1 - \frac{4ax}{1 - (1 + b)x}, \\
f_1 &= \frac{1}{\beta\tilde{\beta}} \ln \frac{1 + \beta\tilde{\beta}}{1 - \beta\tilde{\beta}}, \quad f_2 = -\frac{4}{1 - \beta^2\tilde{\beta}^2}.
\end{aligned} \tag{99}$$

Отметим, что выражения (97) — (99) численно совпадают с результатами, полученными в работе [228]. Кроме того, в пределе $Q^2 \rightarrow 0$ они совпадают с результатами вычислений [23, 229]. Выражения (97) — (99) были использованы в недавних работах [184, 230] при вычислении вкладов c и b кварков в структурные функции протона $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$, а также при вычислении величины $\sigma_{\text{red}}^Q(x, Q^2)$:

$$\sigma_{\text{red}}^Q(x, Q^2) = F_2^Q(x, Q^2) - \frac{y^2}{1 + (1 - y)^2} F_L^Q(x, Q^2), \tag{100}$$

экспериментальные данные для которой были получены коллаборациями ZEUS и H1 на коллайдере HERA при $3 \cdot 10^{-5} < x < 5 \cdot 10^{-2}$, $2.5 < Q^2 < 2000 \text{ ГэВ}^2$ и $\sqrt{s} = 318 \text{ ГэВ}$ [222]. Измерения структурных функций $F_2^c(x, Q^2)$ и $F_2^b(x, Q^2)$ в аналогичной кинематической области также были представлены коллаборациями ZEUS [223] и H1 [224, 225].

Результаты наших расчетов представлены на рис. 11 — 14. Закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений, которые проводились с использованием TMD глюонных распределений JH'2013 set 2, MD'2018 и KLSZ'2020. Последняя функция определяется аналитическими выражениями (69) — (71) и (74). Пунктирными линиями на рис. 11 и 12 обозначены вклады структурных функций $F_2^c(x, Q^2)$ и $F_2^b(x, Q^2)$ в сечения $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$ и $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$, а на

рис. 13 и 14 — сечения $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$ и $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$, вычисленные с помощью распределения KLSZ'2020. В расчетах ренормализационный и факторизационный масштабы полагались равными $\mu_R^2 = 4m_Q^2 + Q^2$ и $\mu_F^2 = Q^2$. Легко видеть, что предсказания, полученные в рамках k_T -факторизационного подхода КХД для всех наблюдаемых, достаточно хорошо согласуются с данными коллабораций ZEUS и H1 как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей; при этом вклад от продольных структурных функций $F_L^c(x, Q^2)$ и $F_L^b(x, Q^2)$ становится заметен только в области достаточно малых x . К сожалению, достигнутая точность измерений не позволяет сделать однозначных выводов в пользу той или иной TMD глюонной плотности в протоне. Тем не менее, видно, что использование функции распределения JH'2013 set 2 приводит к некоторой переоценке данных для структурной функции $F_2^b(x, Q^2)$ и сечения $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$ в области $x \geq 0.01$ и достаточно больших Q^2 . Такого превышения не наблюдается при использовании в расчетах распределений MD'2018 и KLSZ'2020, параметры которых были определены с учетом данных LHC. Аналогичный вывод был сделан при описании сечений процессов рождения кварковых пар $t\bar{t}$ в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, в которых характерные значения переменной x также велики, $x \sim 0.03$. Таким образом, можно еще раз заключить, что процедуры определения параметров начальных распределений с учетом как данных HERA, так и экспериментальных данных LHC, предложенные в работах [172, 184], позволяют получать реалистичные предсказания k_T -факторизационного подхода в весьма широкой кинематической области.

3.2 Процессы инклюзивного рождения b -струй на коллайдере LHC

Исследование процессов инклюзивного рождения тяжелых (c или b) кварков в протон-протонных столкновениях при высоких энергиях также дает возможность получать информацию о функции распределения глюонов в протоне [22, 49, 50, 203, 204, 231–233]. Изучение таких процессов, в которых отсутствует ряд дополнительных эффектов, связанных с фрагментацией конечных частиц в наблюдаемые адроны, представляет особый интерес, поскольку позволяет проводить прямое соответствие между результатами измерений и теоретическими предсказаниями. В рамках k_T -факторизационного подхода КХД сечение процессов рождения тяжелых кварков определяется главным образом вкладом подпроцесса глюонного слияния вне массовой поверхности $g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow Q(p_1) + \bar{Q}(p_2)$ порядка $O(\alpha_s^2)$ [22, 23], где $Q = c$ или b и импульсы всех частиц указаны в скобках. Вклад подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии при энергиях коллайдера LHC пренебрежимо мал. Амплитуда подпроцесса глюонного слияния может быть представлена в следующем

ВИДЕ:

$$\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q}) = g^2 \epsilon^\mu(k_1) \epsilon^\nu(k_2) \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_i^{\mu\nu}, \quad (101)$$

где $\epsilon^\mu(k_1)$ и $\epsilon^\nu(k_2)$ — 4-векторы поляризации начальных виртуальных ($k_1^2 = -\mathbf{k}_{1T}^2 \neq 0$ и $k_2^2 = -\mathbf{k}_{2T}^2 \neq 0$) глюонов, $g^2 = 4\pi\alpha_s$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{\mu\nu} &= \bar{u}(p_1) t^a \gamma^\mu \frac{\hat{k}_1 - \hat{p}_1 + m_Q}{(k_1 - p_1)^2 - m_Q^2} t^b \gamma^\nu u(p_2), \\ \mathcal{A}_2^{\mu\nu} &= \bar{u}(p_1) t^b \gamma^\nu \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_1 + m_Q}{(k_2 - p_1)^2 - m_Q^2} t^a \gamma^\mu u(p_2), \\ \mathcal{A}_3^{\mu\nu} &= \bar{u}(p_1) \gamma^\lambda C^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, -k_1 - k_2) \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} f^{abc} t^c u(p_2). \end{aligned} \quad (102)$$

В этих формулах $C^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3)$ — обычная трехглюонная вершина (87), m_Q — масса тяжелого кварка Q , a , b и c — цветовые индексы и f^{abc} — структурные константы цветовой калибровочной группы $SU(3)$. Выражения для квадрата амплитуды вне массовой поверхности (101) — (102) были получены в работе [232] независимо от других авторов. Отметим, что суммирование по поляризациям начальных виртуальных глюонов выполнялось с помощью специального выбора тензора поляризации (89), что, как было показано ранее, обеспечивает калибровочную инвариантность амплитуды (101) — (102). Полученные выражения совпадают с результатами расчетов [23, 50] и были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100].

Согласно (92), сечение процесса парного рождения s или b кварков в рамках k_T -факторизационного подхода КХД может быть рассчитано в соответствии с формулой:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Q\bar{Q} + X) &= \int \frac{1}{16\pi(x_1 x_2 s)^2} |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q})|^2 \times \\ &\times f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \frac{d\mathbf{k}_{1T}^2}{\mathbf{k}_{1T}^2} \frac{d\mathbf{k}_{2T}^2}{\mathbf{k}_{2T}^2} d\mathbf{p}_{1T}^2 dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi}, \end{aligned} \quad (103)$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD функция распределения глюонов в протоне, ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 и ψ_2 — азимутальные углы начальных виртуальных глюонов и конечных кварков соответственно. Полагая, что b -кварк, возникающий в конечном состоянии, определяет кинематику соответствующей b -струи, выражение (103) будет использоваться в дальнейшем для вычисления сечений процессов инклюзивного рождения одной или двух лидирующих b -струй (струй, обладающих наибольшим поперечным импульсом), экспериментальные данные для которых были получены коллаборациями CMS [194] и ATLAS [195] на коллайдере LHC при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ.

Результаты наших расчетов с использованием глюонных плотностей JH'2013 set 2 и KLSZ'2020 представлены на рис. 15 — 17. Диапазон изменения быстроты b -струй

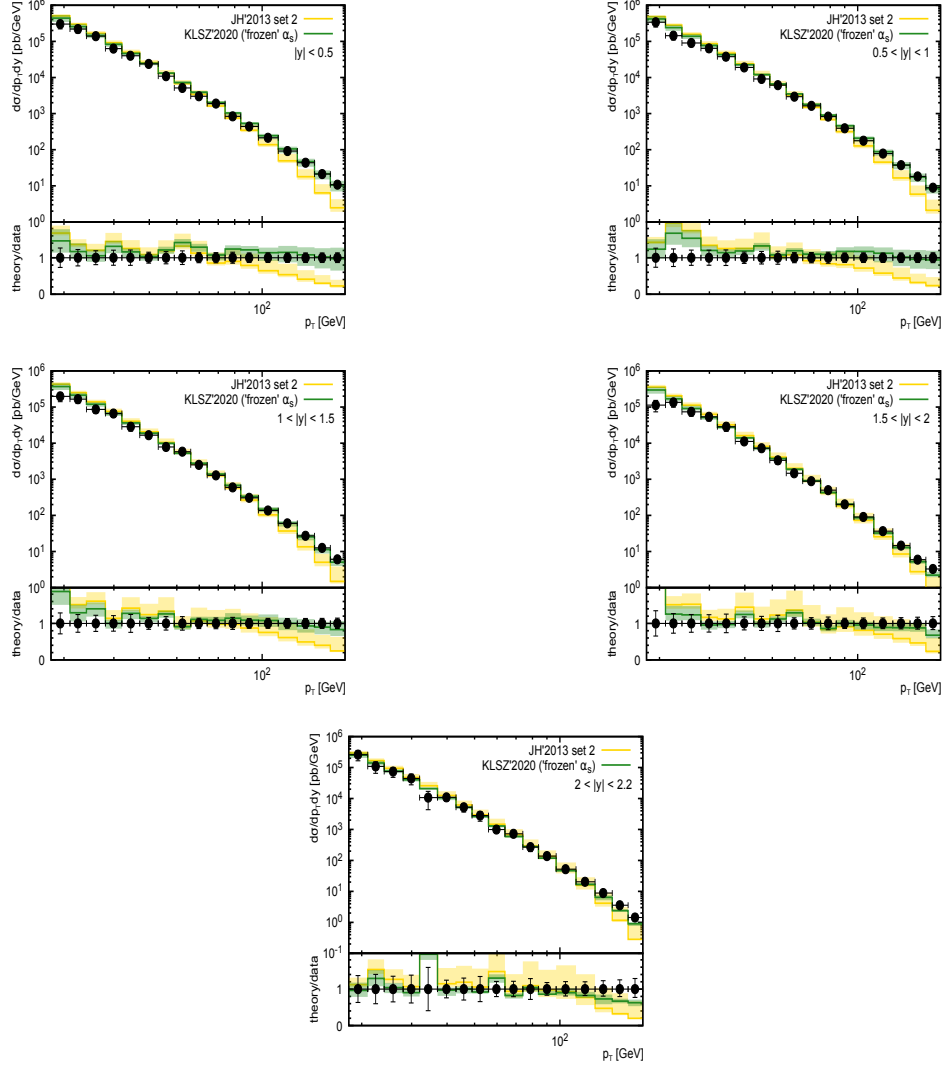


Рис. 15: Распределения по поперечному импульсу лидирующей b -струи в pp столкновениях, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации CMS [194].

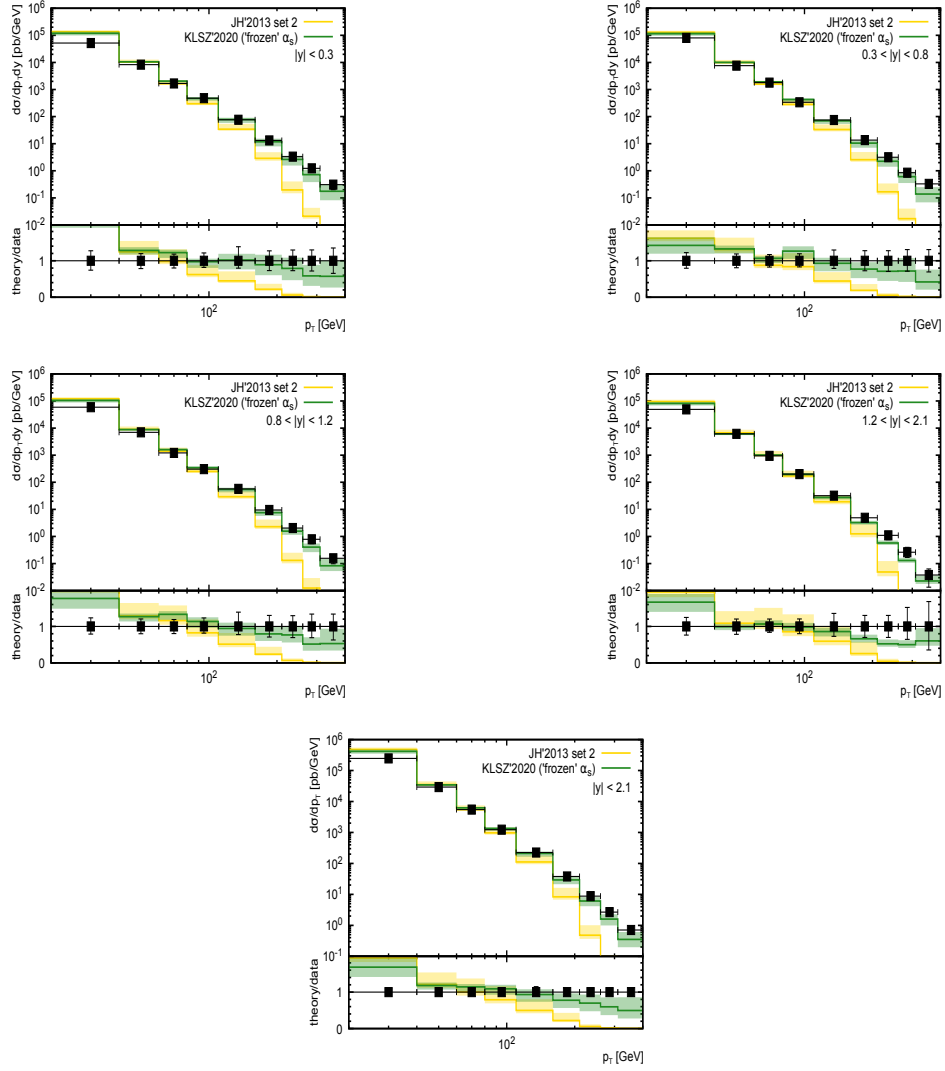


Рис. 16: Распределения по поперечному импульсу лидирующей b -струи в pp столкновениях, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Обозначения гистограмм соответствуют обозначениям на рис. 15. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [195].

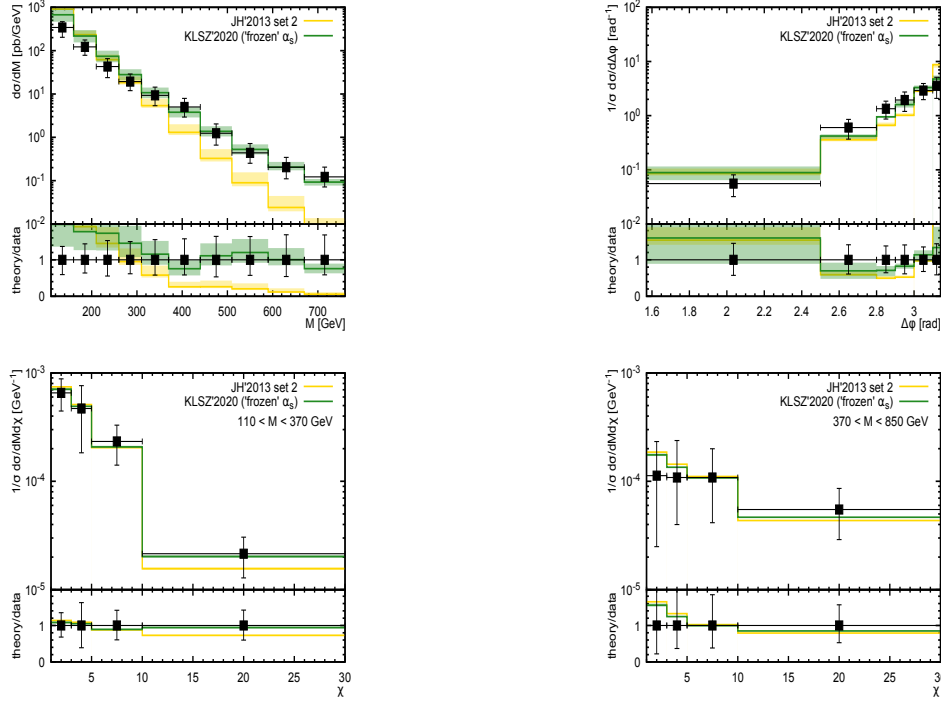


Рис. 17: Распределения по инвариантной массе M двух лидирующих b -струй, разности азимутальных углов между их импульсами $\Delta\phi$ и переменной χ , рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения гистограмм соответствуют обозначениям на рис. 15. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [195].

($|y| < 2.2$, данные CMS и $|y| < 2.1$, данные ATLAS) был разбит на несколько интервалов, в каждом из которых были измерены распределения по поперечному импульсу лидирующей b -струи. Кроме того, коллаборацией ATLAS были представлены экспериментальные данные для распределений двух лидирующих струй b -кварков по инвариантной массе M , разности азимутальных углов между их импульсами $\Delta\phi$ и угловой переменной $\chi = \exp|y_1 - y_2|$, полученные в области $110 < M < 760$ ГэВ и $p_T > 40$ ГэВ. Отметим, что измерения распределений по переменной χ были проведены с учетом дополнительного условия $|y_{\text{boost}}| = |y_1 + y_2|/2 < 1.1$ [195]. Как и ранее, закрашенные области на рис. 15 — 17 отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений, которые связаны главным образом с выбором ренормализационного и факторизационного масштабов. Видно, что предсказания, полученные с помощью аналитической функции KLSZ'2020, хорошо согласуются с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS для распределений по поперечному импульсу лидирующей b -струи как по форме, так и по абсолютной величине. Это согласие достигается в каждом из интервалов по быстроте струи y в широком диапазоне изменения значений поперечного импульса p_T . Результаты, полученные с помощью глюонной плотности JH'2013 set 2, находятся в несколько худшем согласии с данными в области больших $p_T \geq 100$ ГэВ. Наблюдаемые, связанные с кинематикой двух лидирующих струй, также лучше описываются функцией распределения

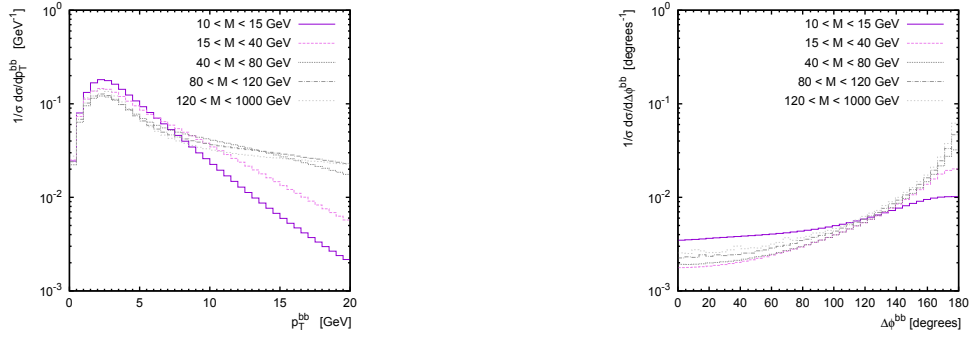


Рис. 18: Распределения по поперечному импульсу и разности азимутальных углов пары b -кварков, вычисленные для различных значений инвариантной массы M при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2.

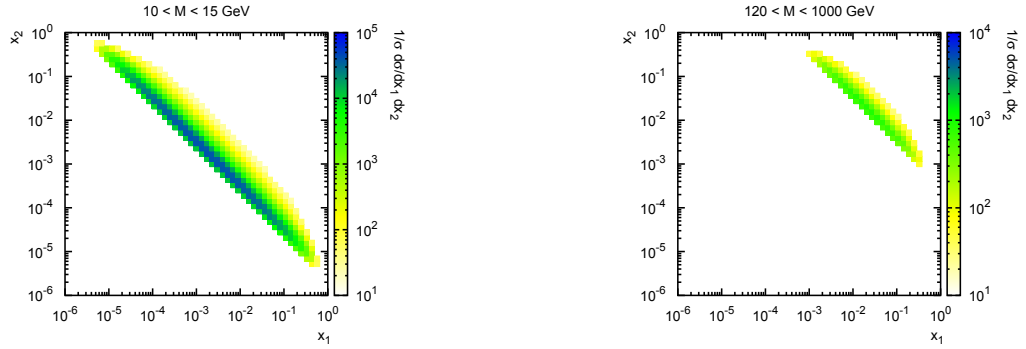


Рис. 19: Распределения по долям x_1 и x_2 продольных импульсов протонов, переносимых начальными глюонами, вычисленные для различных значений инвариантной массы M при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2.

KLSZ'2020. Действительно, использование функции JH'2013 set 2 приводит к значительной недооценке измеренных сечений в области больших инвариантных масс $M \geq 400$ ГэВ (см. рис. 17). Формы распределений по переменной χ , вычисленные с помощью рассматриваемых глюонных плотностей, практически совпадают между собой, тогда как экспериментальные данные коллаборации ATLAS для распределения по разности азимутальных углов между импульсами b -струй также лучше воспроизводятся функцией KLSZ'2020.

Отметим, что такие азимутальные корреляции в процессах рождения тяжелых кварков, наряду с распределениями по поперечному импульсу пары кварков, являются чувствительными к TMD распределениям глюонов в протоне (см., например, [22, 49, 50, 231]). Так, пренебрегая поперечными импульсами взаимодействующих глюонов, в ведущем порядке коллинеарного приближения КХД легко получить, что $\mathbf{p}_{1T} = -\mathbf{p}_{2T}$, поэтому распределение по разности углов $d\sigma/d\Delta\phi \sim \delta(\Delta\phi - \pi)$. Отклонения от этого соотношения возникают только в следующем (NLO) порядке теории возмущений. Учет поперечных импульсов начальных глюонов в рамках k_T -

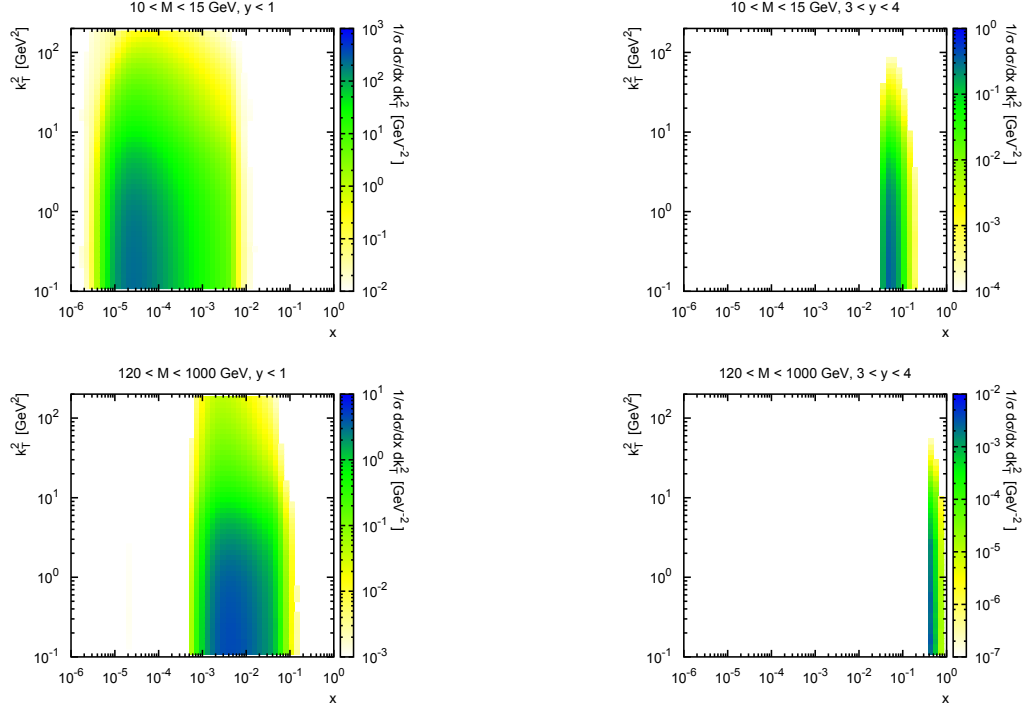


Рис. 20: Распределения по доле x продольного импульса протона, переносимой начальным глюоном, и его поперечному импульсу, вычисленные для различных значений инвариантной массы M и быстроты y пары b -кварков при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2.

факторизационного подхода КХД приводит к возникновению нетривиальных азимутальных корреляций между поперечными импульсами конечных частиц уже в ведущем порядке. Как видно из рис. 18, форма этих корреляций зависит от кинематической области (определяемой масштабом порядка M), в которой происходит жесткое взаимодействие. С ростом величины M характерное значение доли x продольного импульса протона, переносимой глюоном, увеличивается (см. рис. 19), что приводит к уменьшению среднего значения поперечного импульса глюона $|\mathbf{k}_T|$, возникающего в процессе КХД эволюции глюонного каскада в соответствии с рис. 6. Тем самым кинематическая конфигурация импульсов приближается к коллинеарной.

Отметим, что использование дополнительных кинематических ограничений, таких, например, как ограничения на быстроту y пары тяжелых кварков в конечном состоянии, дает возможность для более детального изучения TMD функций распределения глюонов в протоне [234]. Так, на рис. 20 приведены дважды дифференциальные сечения парного рождения b -кварков, рассчитанные при различных значениях M и y как функции доли x продольного импульса начального протона и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ одного из глюонов, участвующих в жестком взаимодействии. Легко видеть, что ограничения на инвариантную массу M и быстроту пары y позволяют выделить определенную область изменения как переменной x , так и поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$ и, следовательно, непосредственно из экспериментальных данных по-

лучать информацию о TMD функции распределения глюонов¹² в этой области при $\mu \sim M$.

3.3 Процессы рождения J/ψ и ψ' мезонов, возникающих из распадов b -адронов на коллайдере LHC

В дополнение к сечениям процессов инклюзивного рождения b -струй, в экспериментах на коллайдере LHC коллаборациями CMS, ATLAS и LHCb были измерены сечения процессов рождения различных адронов, включающих в себя b -кварки (b -адроны) и изучены их последующие распады, такие, например, как распады $b \rightarrow J/\psi + X$ и $b \rightarrow \psi' + X$. Конечно, сечения таких процессов также весьма чувствительны к функции распределения глюонов в протоне, поскольку они определяются подпроцессом глюон-глюонного слияния. Ниже будут рассмотрены процессы одиночного и парного рождения J/ψ и ψ' мезонов, возникающих из распадов b -кварков — так называемые процессы непрямого (“non-prompt”) рождения чармониев в столкновениях протонов на коллайдере LHC.

Сечения рождения пары b -кварков вычисляются в точности так, как было описано выше. Для описания перехода этих кварков в b -адроны и их последующего распада используется фрагментационный подход. Как известно, фрагментационная картина строится на предположении о доминирующих вкладах определенных диаграмм Фейнмана в соответствующие амплитуды, что позволяет существенно упростить громоздкие расчеты в рамках КХД. При этом предполагается, что понятие фрагментации универсально как в качественном описании процессов рождения частиц, так и в количественном описании с помощью функций фрагментации $D(z)$, определяющих распределение $d\sigma/dz$, где z — доля продольного импульса кварка, переносимая конечным адроном. Идентификация процесса, в котором возникает кварк (или глюон), влекущий за собой цепочку событий, заканчивающуюся образованием адрона, в этой ситуации становится несущественной. Так, фрагментация b -кварков в b -адроны производится с помощью функции Петерсона [235]:

$$D_{b \rightarrow B}(z) = \frac{z(1-z)^2}{[(1-z)^2 + \epsilon z]^2}, \quad (104)$$

где значение параметра $\epsilon = 0.0126$ отвечает наилучшему описанию данных коллаборации CMS [236] для распределений B^+ мезонов по поперечному импульсу при $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Ширина распада b -адрона $\Gamma(B \rightarrow Q + X)$, где $Q = \psi'$ или J/ψ , была вычислена в рамках нерелятивистского приближения КХД (в ведущем порядке разложения по константе связи α_s и скорости v_c относительного движения очарованных кварков, составляющих конечный чармоний) в работах [237–239]. В асимптотическом

¹²Аналогичный подход может быть использован для исследования TMD функции распределения кварков в протоне с помощью процессов Дрелла-Яна [234].

пределе $p_B \equiv |\mathbf{p}_B| \gg m_B$ она может быть представлена в виде:

$$\frac{d\Gamma(z, p_B)}{dz} = \frac{C_F^2 m_B^3 m_Q}{288\pi z} |V_{cb}|^2 \int_0^{(z-r)(1-z)} F(z, t, r) dt, \quad (105)$$

где

$$F(z, t, r) = \left(r(a-b) + \frac{a+b}{2}(z_+ + z_-)^2 \right) [f(z_+) + f(z_-)] + \\ + \frac{a+b}{2}(z_+ - z_-)^2 [f(z_+) - f(z_-)], \quad (106)$$

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{r+t}{z} \pm \sqrt{\left(z + \frac{r+t}{z} \right)^2 - 4r} \right), \quad (107)$$

и $r = m_Q^2/m_B^2 < z < 1$. В этих выражениях $f(z) \equiv D_{b \rightarrow B}(z)$, C_F — константа Ферми, p_B и m_B — абсолютная величина трехмерного импульса и масса распадающегося b -адрона, m_Q — масса конечного чармония и V_{cb} — элемент матрицы смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскавы. Параметры a и b в (106) связаны с непертурбативными матричными элементами S -волнового чармония Q (см. ниже):

$$a = (2C_+ - C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^Q[{}^3S_1^{(1)}] \rangle}{3m_c^2} + (C_+ + C_-)^2 \left[\frac{\langle \mathcal{O}^Q[{}^3S_1^{(8)}] \rangle}{2m_c^2} + \frac{\langle \mathcal{O}^Q[{}^3P_1^{(8)}] \rangle}{m_c^4} \right], \\ b = (C_+ - C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^Q[{}^1S_0^{(8)}] \rangle}{2m_c^2}, \quad (108)$$

где $C_+ = 0.868$ и $C_- = 1.329$ [239]. Выражения (105) — (107) также справедливы для распадов $B \rightarrow \chi_{cJ} + X$ при $J = 0, 1$ или 2 . В этом случае значения параметров a и b равны [239]

$$J = 0 : \quad a = (C_+ - C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle}{2m_c^2}, \quad b = 0, \\ J = 1 : \quad a = 2(2C_+ - C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle}{m_c^4} + 3(C_+ + C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle}{2m_c^2}, \quad b = 0, \\ J = 2 : \quad a = 5(C_+ - C_-)^2 \frac{\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle}{2m_c^2}, \quad b = 0. \quad (109)$$

Как было показано в работе [239], соотношения (105) — (109) справедливы с точностью около 11(5)% при величине $p_B \sim 10(20)$ ГэВ. Их использование позволяет достичь хорошего согласия с экспериментальными данными коллабораций CLEO [240] и BABAR [241] для распределений по трехмерному импульсу в процессах распада $B \rightarrow J/\psi + X$ и $B \rightarrow \psi' + X$. Они также будут применяться для расчетов в рам-

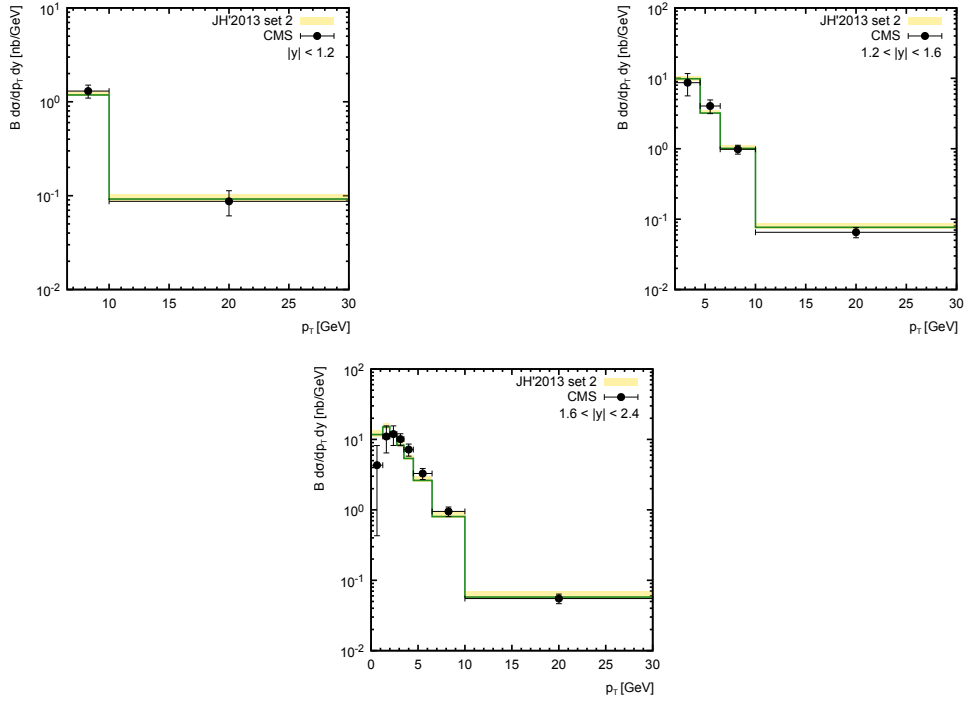


Рис. 21: Распределения по поперечному импульсу J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации CMS [244].

ках k_T -факторизационного подхода сечений процессов одиночного и парного рождения ψ' и J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов (см. [242, 243]). Конечно, в случае рождения J/ψ частиц должен быть учтен дополнительный вклад от распадов более тяжелых состояний: $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ и $\psi' \rightarrow J/\psi + X$. Отметим, что, следуя [216], относительные вероятности распадов b -адронов полагались равными $B(B \rightarrow J/\psi + X) = 0.68\%$, $B(B \rightarrow \psi' + X) = 0.18\%$, $B(B \rightarrow \chi_{c0} + X) = 0.015\%$, $B(B \rightarrow \chi_{c1} + X) = 0.21\%$ и $B(B \rightarrow \chi_{c2} + X) = 0.026\%$. Численные значения всех остальных параметров (массы чармониев, относительные вероятности их распадов и др.) выбирались в соответствии с [216] — как и для расчетов сечений процессов инклюзивного прямого (“prompt”) рождения чармониев (см. ниже).

Экспериментальные данные для процессов одиночного непрямого рождения ψ' и J/ψ мезонов в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC были получены коллаборациями CMS, ATLAS и LHCb. Коллаборацией CMS были измерены распределения по поперечному импульсу J/ψ мезонов p_T в нескольких интервалах по быстройте y при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [244]. Данные ATLAS были получены для распределений по поперечному импульсу ψ' и J/ψ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ [248]. Коллаборацией LHCb были представлены результаты измерений распределений по поперечному импульсу и быстройте J/ψ в области $p_T < 14$ ГэВ и $2 < y < 4.5$ при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ [245–247]. Предсказания k_T -факторизационного подхода для этих наблюдаемых представлены на рис. 21 — 24, при этом в расчетах

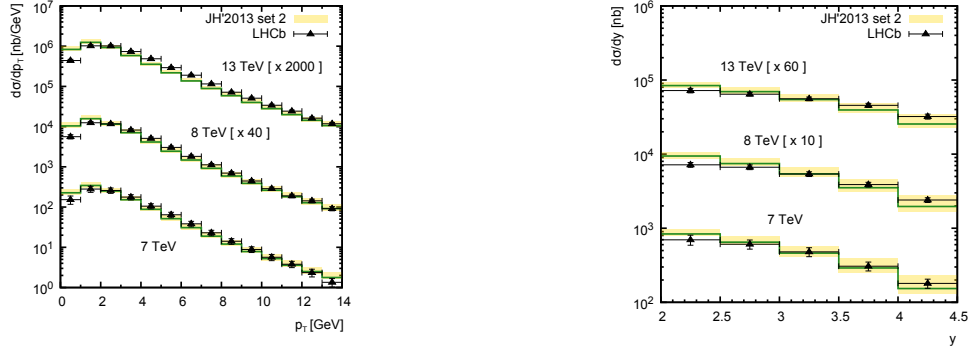


Рис. 22: Распределения по поперечному импульсу и быстройроте J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [245–247].

были использованы глюонные распределения JH'2013 set 2. Закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Видно, что наши предсказания хорошо согласуются с данными коллабораций CMS, ATLAS и LHCb как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Незначительные расхождения с результатами измерений обнаруживаются только в области малых значений поперечного импульса, что связано главным образом с использованием в расчетах асимптотических выражений (105) — (109) для функций фрагментации b -адронов в чармонии. Следует подчеркнуть, что предсказания k_T -факторизационного подхода КХД практически совпадают с предсказаниями обычной пертурбативной КХД, полученными в схеме FONLL (Fixed-Order Next-to-Leading-Log) [249, 250] с учетом вкладов высоких порядков (предсказания FONLL представлены в экспериментальных работах [244–248]). Этот факт еще раз показывает, что вклады следующих порядков теории возмущений КХД могут быть эффективно учтены с помощью TMD распределений глюонов, полученных из решений уравнения CCFM. Отметим также, что полные сечения процессов непрямого рождения J/ψ мезонов, измеренные коллаборациями CMS и LHCb при разных энергиях, практически совпадают с нашими теоретическими оценками. Действительно, экспериментальные значения равны $\sigma = 26.0 \pm 1.4(\text{стат.}) \pm 1.6(\text{сист.}) \pm 2.9(\text{светим.})$ нб, данные коллаборации CMS [244], $\sigma = 1.14 \pm 0.01(\text{стат.}) \pm 0.16(\text{сист.})$ мкб, $\sigma = 1.28 \pm 0.01(\text{стат.}) \pm 0.11(\text{сист.})$ мкб и $\sigma = 2.25 \pm 0.01(\text{стат.}) \pm 0.14(\text{сист.})$ мкб, данные коллаборации LHCb при $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ соответственно [245–247]. Наши расчеты приводят к значениям $\sigma = 24.75^{+2.90}_{-1.07}$ нб, $\sigma = 1.20^{+0.26}_{-0.11}$ мкб, $\sigma = 1.39^{+0.29}_{-0.12}$ мкб и $\sigma = 2.28^{+0.39}_{-0.16}$ мкб, которые полностью согласуются с результатами измерений.

Дополнительная информация как о динамике жесткого взаимодействия, так и о TMD функции распределения глюонов в протоне может быть получена из экспериментальных данных для процессов непрямого парного рождения J/ψ мезонов,

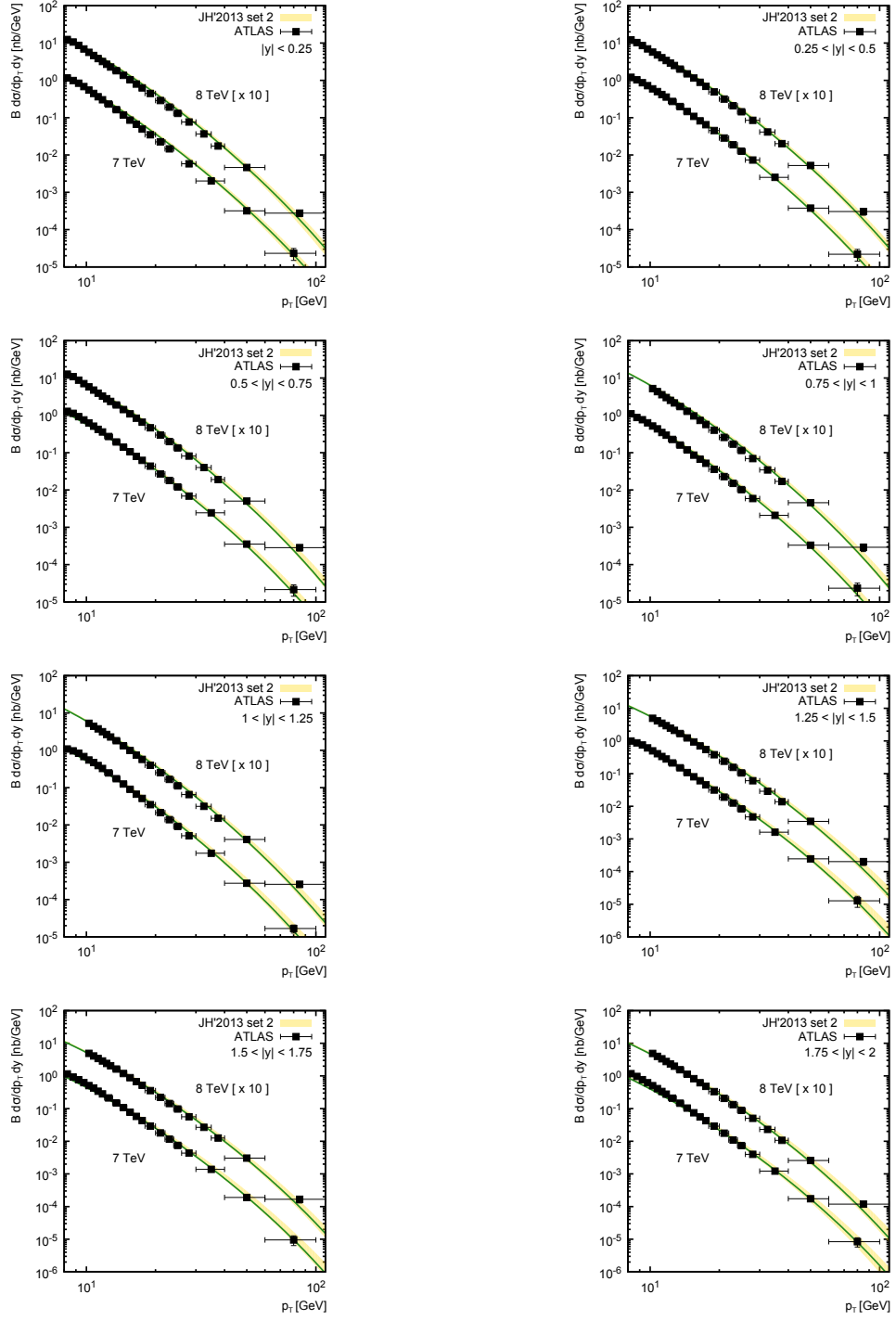


Рис. 23: Распределения по поперечному импульсу J/ψ мезонов, возникающих из распада b -адронов, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [248].

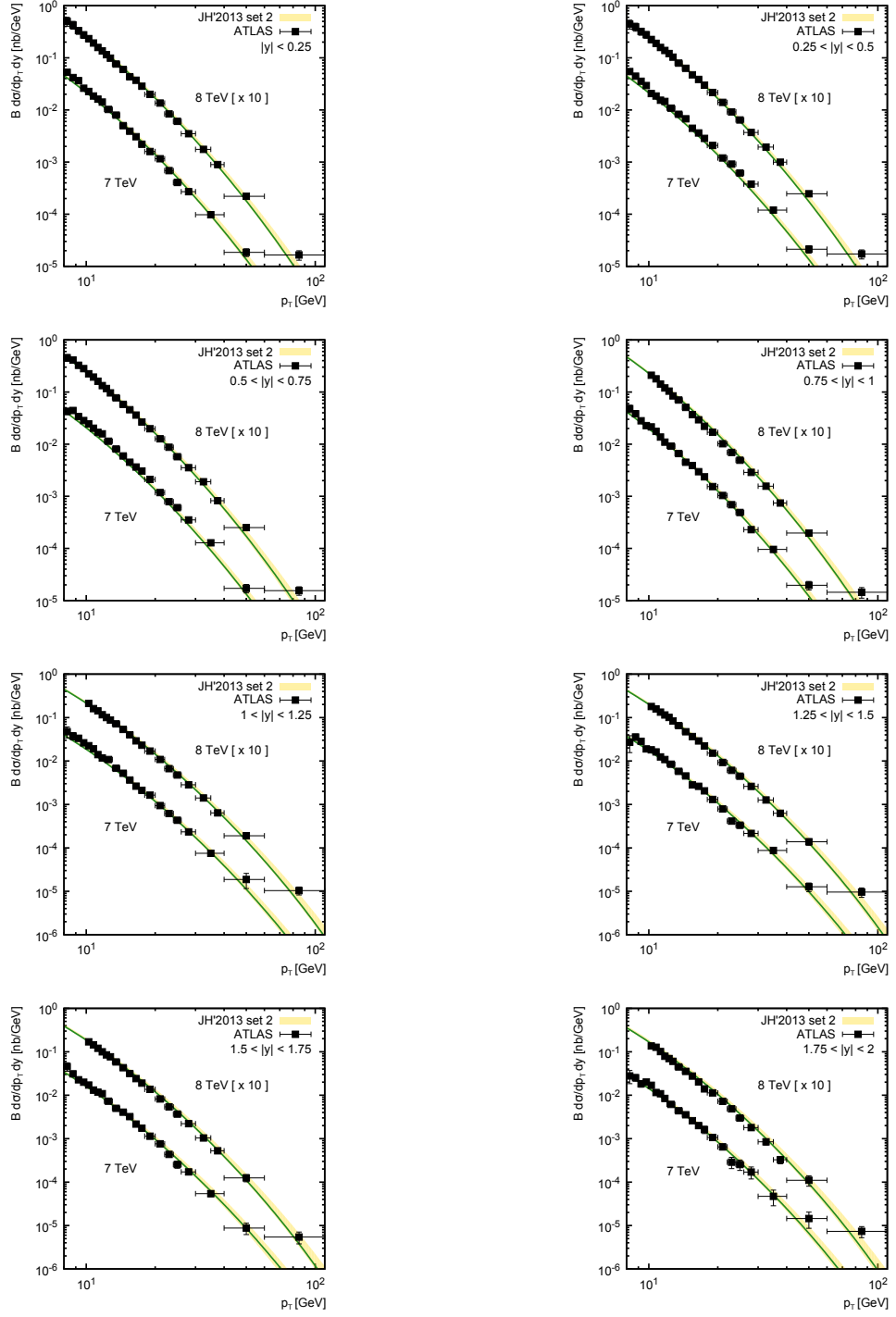


Рис. 24: Распределения по поперечному импульсу ψ' мезонов, возникающих из распада b -адронов, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [248].

а также процессов парного рождения b -адронов с последующими распадами $B \rightarrow J/\psi(\rightarrow \mu^+\mu^-) + X$ и $B \rightarrow \mu + X$ (так что в конечном состоянии наблюдаются три мюона). Такие измерения были проведены коллаборациями LHCb [251] и ATLAS [252] при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Так, экспериментальные данные коллаборации LHCb были получены в области $2 < y < 4.5$ для нормированных распределений по поперечному импульсу, быстрой и инвариантной массе пары J/ψ мезонов, разности между их азимутальными углами, быстротами и псевдобыстротами и переменной $\mathcal{A}_T$ [251]:

$$\mathcal{A}_T = \frac{p_T^{J/\psi_1} - p_T^{J/\psi_2}}{p_T^{J/\psi_1} + p_T^{J/\psi_2}}. \quad (110)$$

где p_T^{J/ψ_1} и p_T^{J/ψ_2} — поперечные импульсы лидирующего и следующего за ним J/ψ мезонов. Коллаборацией ATLAS впервые были получены данные для нормированных распределений по поперечному импульсу системы трех мюонов $p_T(J/\psi, \mu) \equiv p_T^{\mu\mu\mu}$, разности азимутальных углов и быстрот J/ψ мезона и мюона, $\Delta\phi(J/\psi, \mu)$ и $\Delta y(J/\psi, \mu)$, расстоянию $\Delta R(J/\psi, \mu)$ между J/ψ мезоном и мюоном в плоскости быстрой и азимутальных углов, переменной $y_{\text{boost}}(J/\psi, \mu) = (y^{J/\psi} + y^\mu)/2$, инвариантной массе системы трех мюонов $M(J/\psi, \mu) \equiv m^{\mu\mu\mu}$ и отношениям $m^{\mu\mu\mu}/p_T^{\mu\mu\mu}$ и $p_T^{\mu\mu\mu}/m^{\mu\mu\mu}$. Использовались следующие кинематические ограничения на псевдобыстроты и поперечные импульсы мюонов: $p_T > 6$ ГэВ, $|\eta| < 2.3$ для двух мюонов, образующихся в результате распада J/ψ мезона и $|\eta| < 2.5$ для третьего мюона, возникающего из распада b -адрона [252]. Исследование нормированных дифференциальных сечений позволяет провести более детальное сравнение между теоретическими предсказаниями и результатами измерений формы соответствующих спектров.

Результаты расчетов, выполненных с использованием TMD распределений глюонов JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2, а также функций, полученных с помощью подхода KMR в ведущем и следующем за ним порядках представлены на рис. 25 — 34. Как и ранее, закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей соответствующих вычислений. Легко видеть, что все наблюдаемые, изучаемые в экспериментальной работе коллаборации ATLAS, кроме, возможно, распределений по переменной $y_{\text{boost}}(J/\psi, \mu)$, в той или иной степени зависят от выбора TMD глюонной плотности. Существенное отличие в форме спектров, полученных с помощью распределений глюонов CCFM-типа (JH'2013 set 1 и set 2) и вычисленных в рамках подхода KMR, проявляется в случае переменных $\Delta\phi(J/\psi, \mu)$ и $\Delta R(J/\psi, \mu)$, а также $M(J/\psi, \mu)$ и $\Delta y(J/\psi, \mu)$. Из рис. 25 — 34 следует, что наилучшее описание экспериментальных данных достигается использованием функций распределения KMR, которые, в частности, позволяют достичь согласия с данными в области малых $\Delta\phi(J/\psi, \mu) \sim 0$, $\Delta R(J/\psi, \mu) \sim 0$ и небольших инвариантных масс $M(J/\psi, \mu)$. Предсказания, полученные с помощью этого подхода в ведущем и следующем за ним порядках достаточно близки друг к другу; более того, в пределах неопределенностей расчетов они совпадают между собой. Глюонные рас-

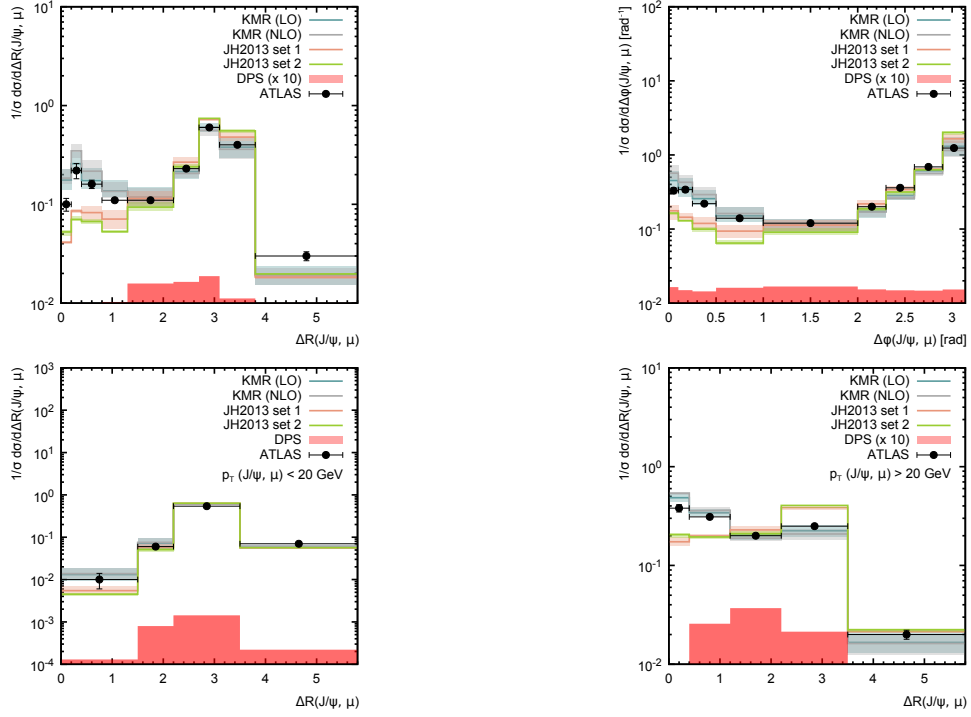


Рис. 25: Нормированные распределения по $\Delta R(J/\psi, \mu)$ и $\Delta \phi(J/\psi, \mu)$ рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [252].

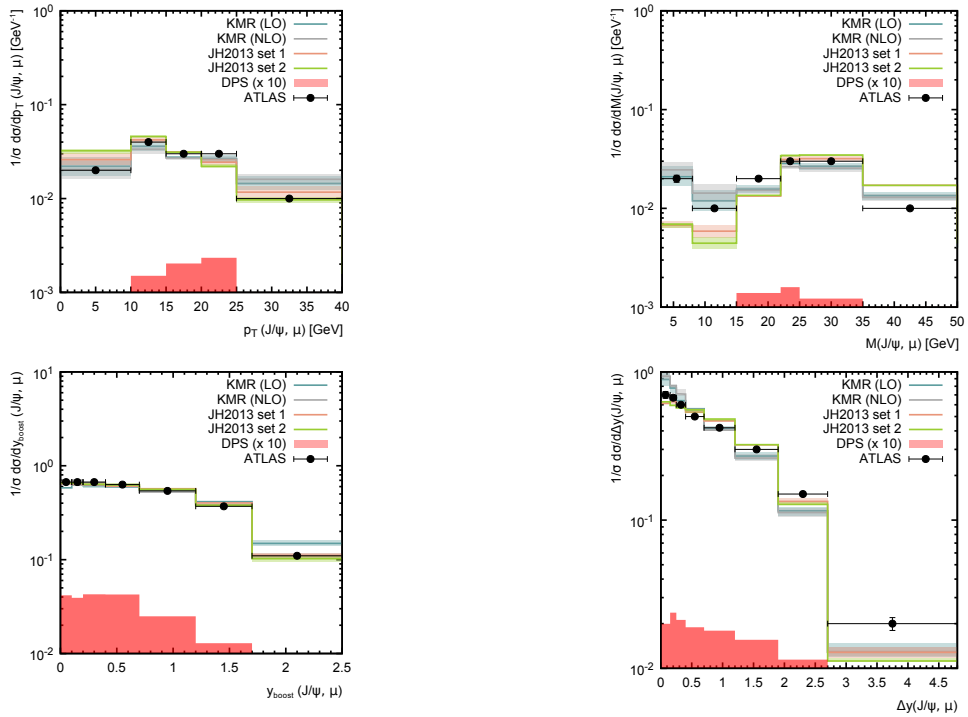


Рис. 26: Нормированные распределения по переменным $p_T(J/\psi, \mu)$, $M(J/\psi, \mu)$, $y_{\text{boost}}(J/\psi, \mu)$ и $\Delta y(J/\psi, \mu)$ рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [252].

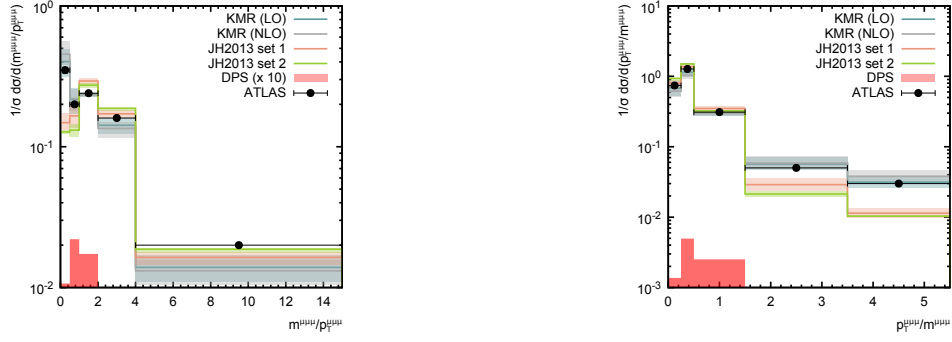


Рис. 27: Нормированные распределения по переменным $m^{\mu\mu\mu}/p_T^{\mu\mu\mu}$ и $p_T^{\mu\mu\mu}/m^{\mu\mu\mu}$, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [252].

пределения, полученные с помощью уравнения CCFM, не позволяют в достаточной мере воспроизвести форму спектров по $M(J/\psi, \mu)$, $\Delta\phi(J/\psi, \mu)$ и $\Delta R(J/\psi, \mu)$, при этом в области $\Delta\phi(J/\psi, \mu) \sim \pi$ соответствующие предсказания значительно переоценивают данные. Последнее согласуется с результатами расчетов азимутальных корреляций между импульсами двух лидирующих b -струй. Как видно из рис. 25, наиболее ярко отличие между предсказаниями функций распределения KMR и семейства JH'2013 проявляется в области больших поперечных импульсов системы трех мюонов $p_T(J/\psi, \mu) > 20$ ГэВ. Отметим, что форма распределений по переменной $p_T(J/\psi, \mu)$, а также угловых корреляций $\Delta\phi(J/\psi, \mu)$ и $\Delta R(J/\psi, \mu)$ определяется зависимостью TMD глюонных плотностей от поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$, которая для рассматриваемых функций распределения существенно различна (см. рис. 6). Следует также подчеркнуть, что отличия в форме $p_T(J/\psi, \mu)$ и $M(J/\psi, \mu)$ спектров приводят к значительной зависимости рассчитанных распределений по переменным $m^{\mu\mu\mu}/p_T^{\mu\mu\mu}$ и $p_T^{\mu\mu\mu}/m^{\mu\mu\mu}$ от используемых TMD глюонных плотностей. Таким образом, подобные наблюдаемые представляются весьма интересными, в том числе для будущих экспериментальных и теоретических исследований в свете выяснения (или уточнения) динамики глюонной эволюции в протоне. В то же время, как видно из рис. 28 — 34, экспериментальные данные коллаборации LHCb, полученные в области не очень больших поперечных импульсов, не позволяют отдать предпочтение той или иной глюонной плотности, несмотря на заметное расхождение предсказаний функций распределения JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2 с результатами измерений в области $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi) \sim \pi$.

Как было упомянуто выше, различные угловые корреляции между импульсами частиц в конечном состоянии в рассматриваемых процессах чувствительны к вкладам следующих порядков коллинеарного приближения теории возмущений КХД. Учет таких вкладов может быть выполнен, в частности, с помощью алгоритма генерации излучений глюонов и кварков (партонных ливней) в начальном и/или ко-

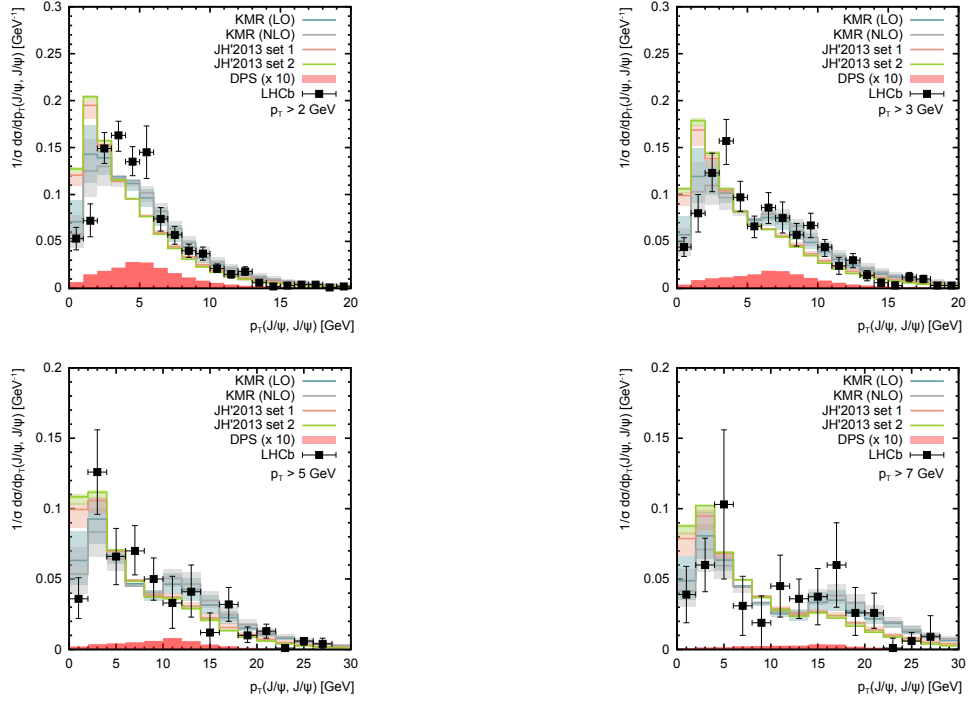


Рис. 28: Нормированные распределения по поперечному импульсу пары J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

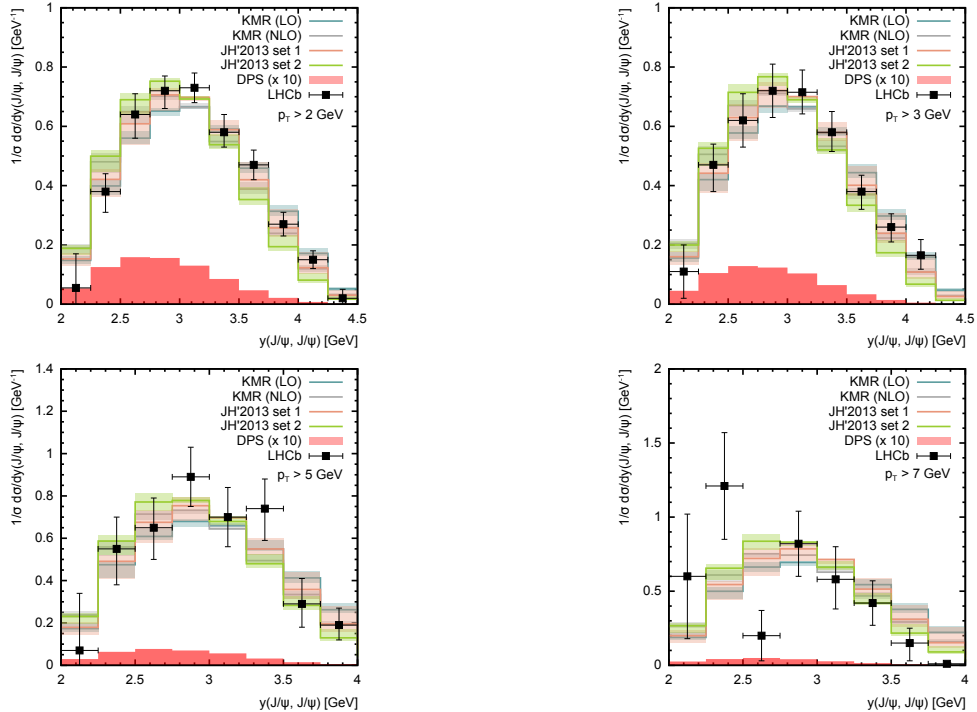


Рис. 29: Нормированные распределения по быстроте пары J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

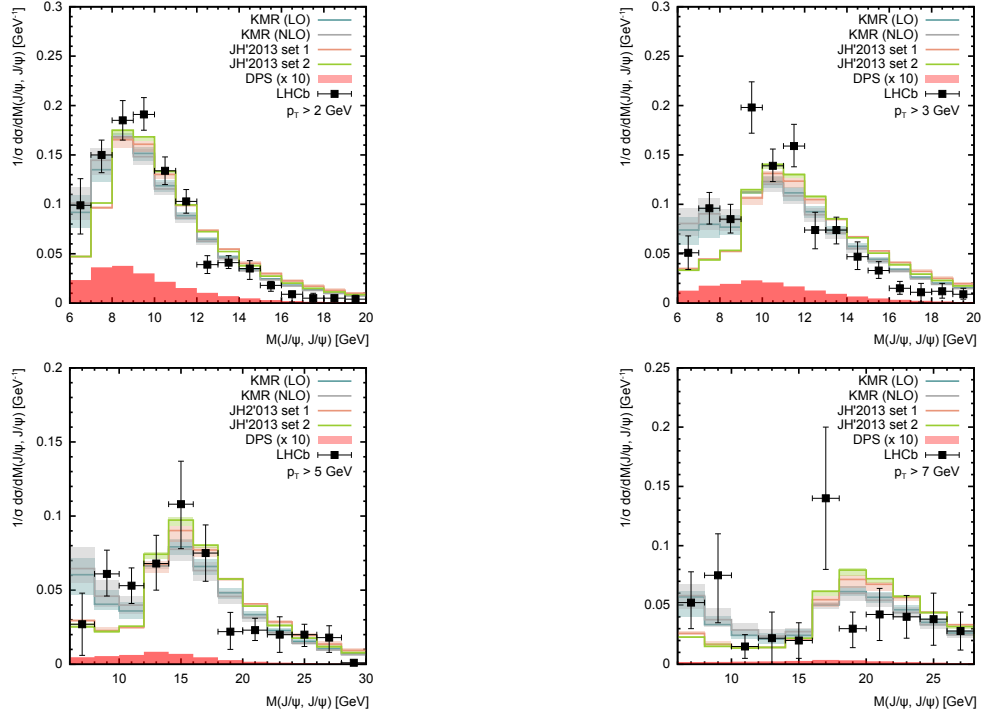


Рис. 30: Нормированные распределения по инвариантной массе пары J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

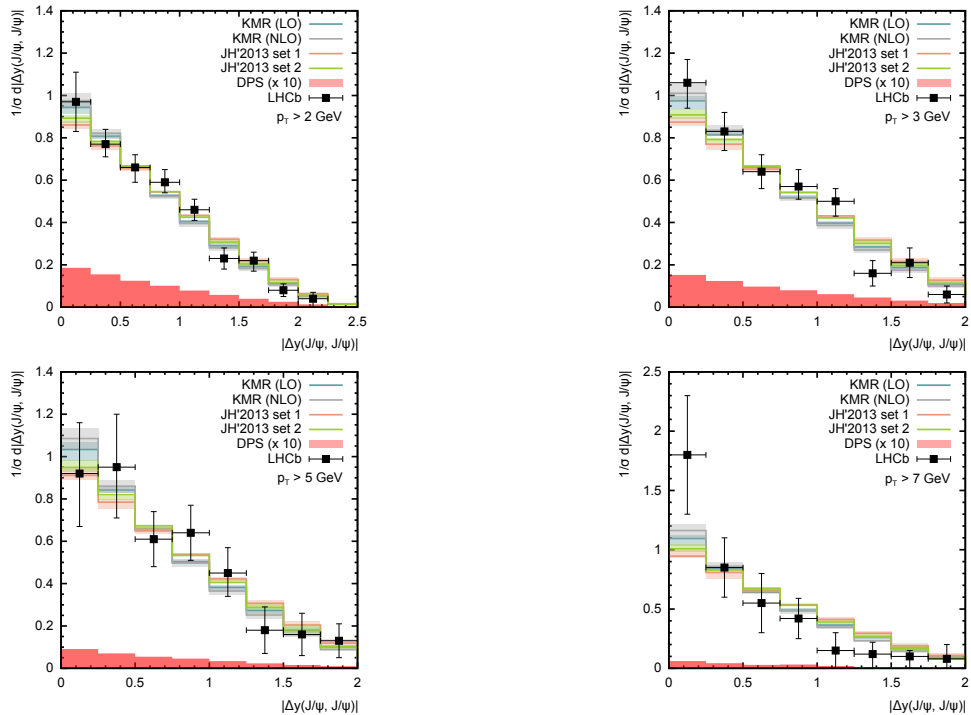


Рис. 31: Нормированные распределения по разности быстрот J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

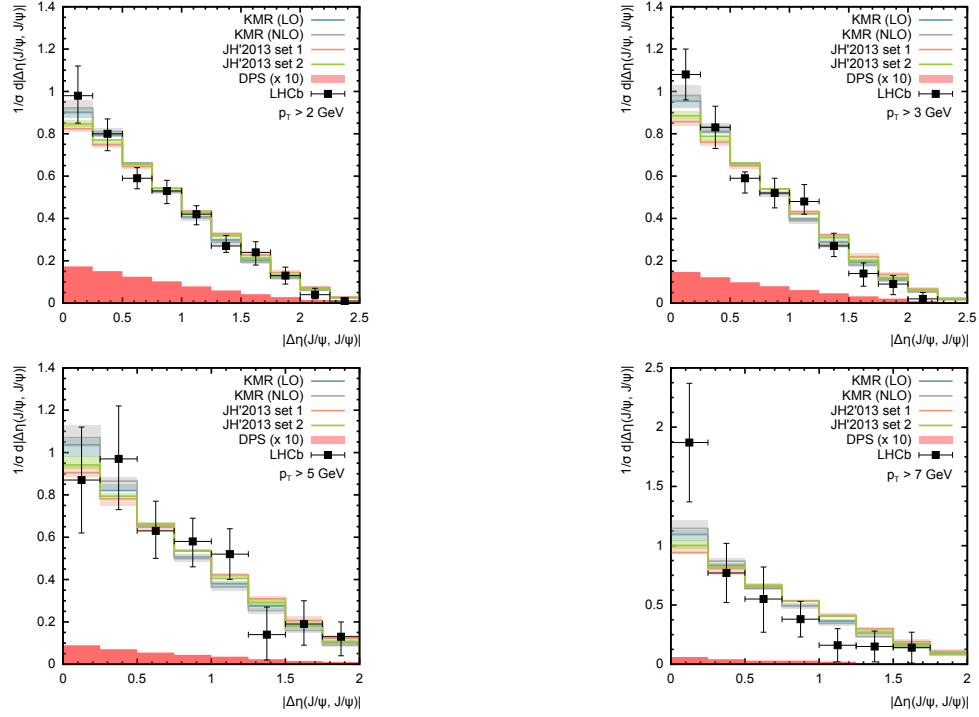


Рис. 32: Нормированные распределения по разности псевдобыстрот J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

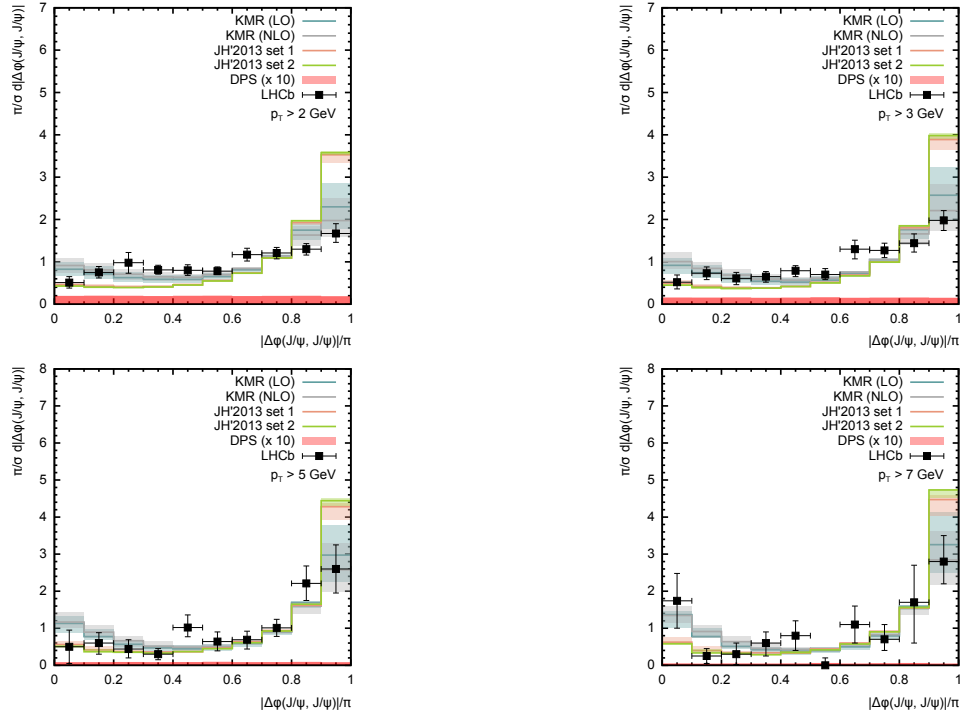


Рис. 33: Нормированные распределения по разности азимутальных углов J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

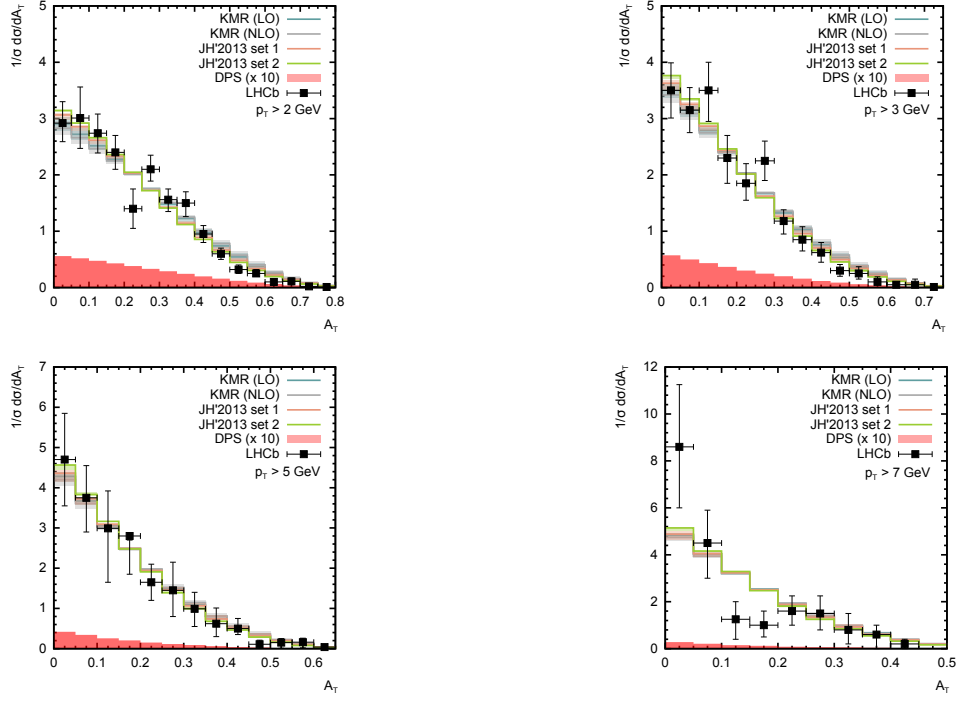


Рис. 34: Нормированные распределения по переменной A_T , рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

нечном состоянии. В рамках k_T -факторизационного подхода такие вклады (в начальном состоянии) уже учтены с помощью TMD распределений глюонов, удовлетворяющих соответствующим уравнениям эволюции. Эффекты, связанные с учетом партонных ливней в конечном состоянии достаточно малы и проявляются при малых $\Delta\phi(J/\psi, \mu) \sim 0$ и $\Delta\phi(J/\psi, J/\psi) \sim 0$, как легко видеть из рис. 35 и 36. Отметим, что численное моделирование этих вкладов было произведено с помощью алгоритма TMD генерации партонных ливней программы CASCADE [97].

В проведенных выше расчетах также был учтен возможный вклад от механизма двойного партонного рассеяния, который в настоящее время широко обсуждается в литературе (см., например, [253–257]). Этот вклад был рассчитан согласно обычной факторизационной формуле:

$$\sigma_{\text{DPS}}(J/\psi + \mu) = \frac{\sigma(J/\psi)\sigma(\mu)}{\sigma_{\text{eff}}}, \quad (111)$$

где значение феноменологического параметра $\sigma_{\text{eff}} \simeq 15$ мбн получено из анализа экспериментальных данных для различных процессов, изучаемых на коллайдерах Tevatron и LHC, таких, например, как процессы ассоциативного рождения W бозонов и двух струй [258, 259], пары фотонов и двух струй [260], прямых фотонов и трех струй [261], четырех струй [262], а также процессов ассоциативного рождения J/ψ и D^+ , J/ψ и D^0 , J/ψ и Λ_c^+ [263], $\Upsilon(1S)$ и D^0 мезонов [264]. В случае процесса парно-

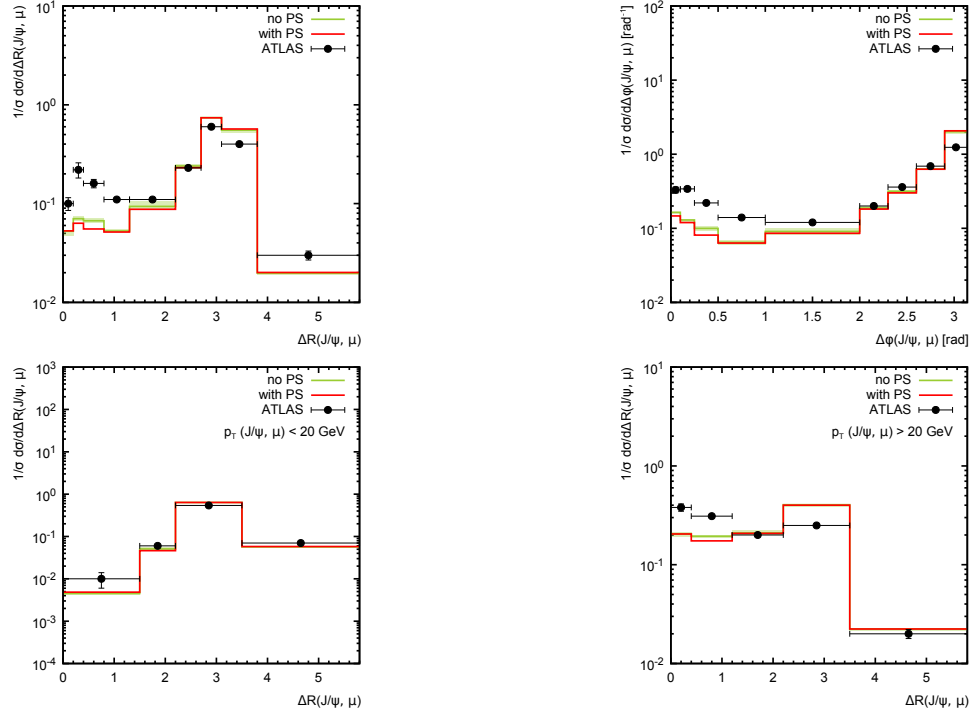


Рис. 35: Влияние эффектов партонных ливней на нормированные распределения по $\Delta R(J/\psi, \mu)$ и $\Delta \phi(J/\psi, \mu)$ рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [252].

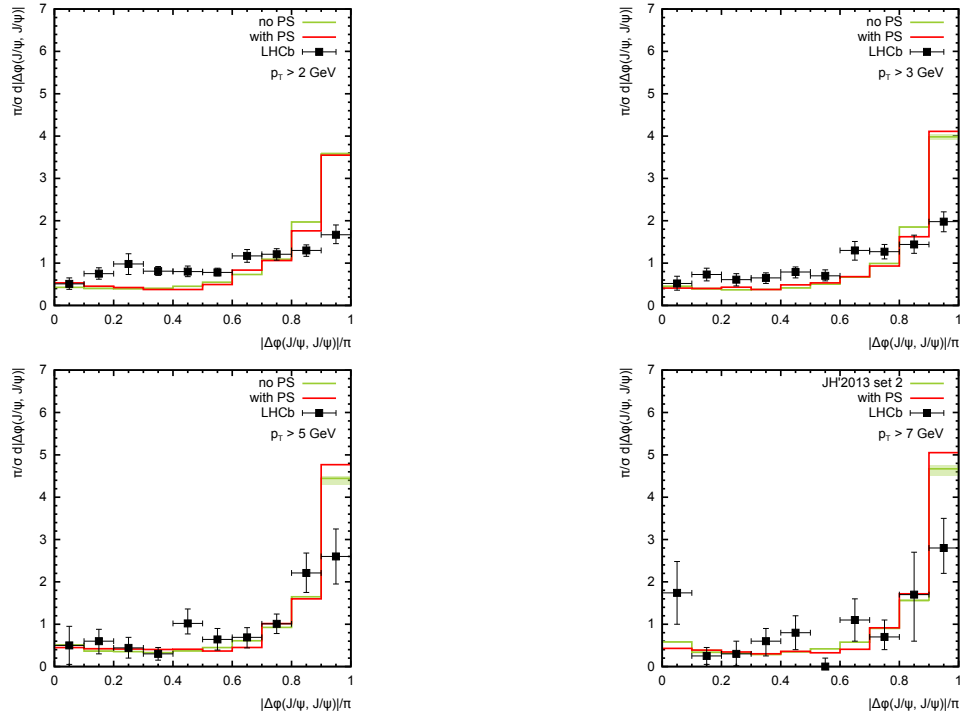


Рис. 36: Влияние эффектов партонных ливней на нормированные распределения по разности азимутальных углов J/ψ мезонов, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [251].

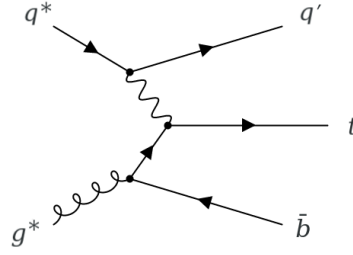


Рис. 37: Диаграмма Фейнмана для процесса одиночного рождения t -кварков в t -канале в ведущем порядке теории возмущений КХД.

го рождения J/ψ мезонов используется аналогичное выражение с дополнительным множителем $1/2$, который связан с появлением двух одинаковых частиц в конечном состоянии. Как следует из рис. 25 — 34, вклад механизма двойного партонного рассеяния в сечения рассматриваемых процессов пренебрежимо мал¹³ и составляет примерно 2% как в центральной, так и в передней кинематических областях (данные коллабораций ATLAS и LHCb соответственно).

3.4 Процессы одиночного рождения t -кварков на коллайдере LHC

Как известно, значительный интерес в свете уточнения информации о функциях распределения партонов в протоне представляют процессы рождения t -кварков на коллайдере LHC (см., например, [268, 269]). Недавно коллаборациями CMS и ATLAS были проведены измерения полных и дифференциальных (в зависимости от поперечного импульса и быстроты конечного кварка) сечений процессов одиночного рождения t -кварков (в t -канале) в протон-протонных столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ [270, 271]. Используя k_T -факторизационный подход КХД, ниже мы вычислим сечения этого процесса с учетом CCFM-динамики глюонных распределений и проведем сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

В рамках схемы 4FS, в которой количество кварковых ароматов полагается равным $N_f = 4$, основной вклад в сечение такого процесса вносит подпроцесс кварк-глюонного взаимодействия (см., например, [269]):

$$q^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow q'(p_1) + \bar{b}(p_2) + t(p), \quad (112)$$

которая соответствует расщеплению начального глюона на пару $b\bar{b}$ с последующим обменом W -бозоном между b -кварком и начальным легким кварком, как изображено на рис. 37. Импульсы всех частиц, участвующих в жестком взаимодействии, указаны в скобках. Следует отметить, что вклад u -канальной диаграммы, необходимый,

¹³Недавно коллаборацией CMS были зарегистрированы [265] события, в которых происходит рождение трех J/ψ мезонов с участием механизмов двойного и тройного партонного рассеяния (см. [266, 267]).

вообще говоря, для калибровочной инвариантности амплитуды подпроцесса (112), пренебрежимо мал из-за присутствия большой массы в пропагаторе t -кварка. Также значительно подавлен вклад s -канальных диаграмм $q^* + g^* \rightarrow q' + W^*(\rightarrow t + b)$. Как обычно, кварк и глюон в начальном состоянии находятся вне массовой поверхности и обладают ненулевыми поперечными импульсами: $k_1^2 = -\mathbf{k}_{1T}^2 \neq 0$, $k_2^2 = -\mathbf{k}_{2T}^2 \neq 0$. Таким образом, амплитуда вне массовой поверхности процесса (112) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{A}(q^* + g^* \rightarrow q' + \bar{b} + t) = g \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W} V_{qq'} V_{tb} \epsilon^\nu(k_2) t^a \frac{L_1^\mu L_2^{\mu\nu}}{(p_1 - k_1)^2 - m_W^2 + im_W \Gamma_W}, \quad (113)$$

где пропагатор промежуточного W бозона записан в форме Брейта-Вигнера и

$$\begin{aligned} L_1^\mu &= \bar{u}(p_1) \Gamma_+^\mu(k_1, k_1 - p_1) (1 - \gamma^5) u(x_1 p^{(1)}), \\ L_2^{\mu\nu} &= \bar{u}(p) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_2 + m_b}{(k_2 - p_2)^2 - m_b^2} \gamma^\nu u(p_2). \end{aligned} \quad (114)$$

В этих формулах $\epsilon^\mu(k_2)$ — вектор поляризации начального глюона, $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — импульсы сталкивающихся протонов, $g^2 = 4\pi\alpha_s$, e — заряд электрона, θ_W — угол Вайнберга, $V_{q_1 q_2}$ — элемент матрицы смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскавы, m_b и m_W — массы b -кварка и W бозона, Γ_W — полная ширина распада W бозона. Эффективная вершина $\Gamma_+^\mu(p, q)$ определяется выражением в круглых скобках в формуле (77), где векторы n^+ и n^- полагаются равными $n^+ = 2p^{(1)}/\sqrt{s}$, $n^- = 2p^{(2)}/\sqrt{s}$. Как было отмечено ранее, наличие этой вершины обеспечивает калибровочную инвариантность амплитуды (113) несмотря на то, что начальный кварк находится вне массовой поверхности. Суммирование по поляризациям виртуального глюона производится с помощью эффективного тензора (89). При проведении расчетов была использована система аналитических вычислений FORM [106].

В соответствии с общей формулой (92), сечение рассматриваемого процесса в рамках k_T -факторизационного подхода может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow t + X) &= \sum_q \int \frac{1}{256\pi^3(x_1 x_2 s)^2} |\mathcal{A}(q^* + g^* \rightarrow q' + \bar{b} + t)|^2 \times \\ &\times f_q(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy d_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (115)$$

где $f_q(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ и $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD функции распределения кварков и глюонов в протоне, y — быстрота конечного t -кварка, ϕ_1 и ϕ_2 — азимутальные углы начальных партонов, y_1 , y_2 , ψ_1 и ψ_2 — быстроты и азимутальные углы конечных кварков q' и $\bar{b}$. Представляя TMD функции распределения кварков в виде суммы распределений валентных и морских кварков, а именно

$$f_q(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = f_q^{(\text{val})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) + f_q^{(\text{sea})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2), \quad (116)$$

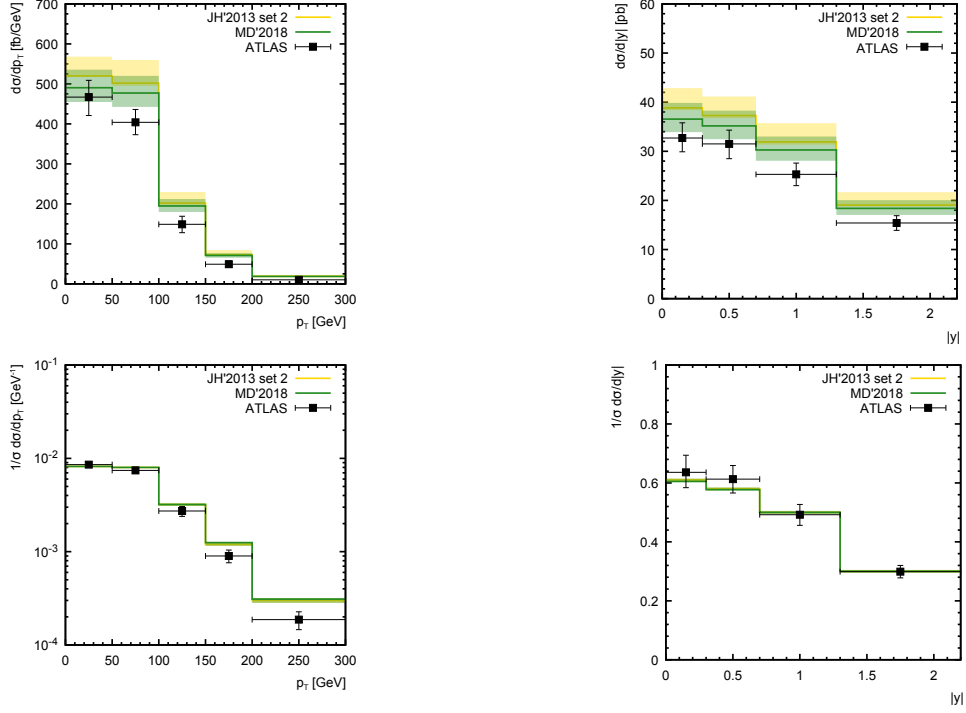


Рис. 38: Дифференциальные сечения процесса одиночного рождения t -кварков в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в зависимости от их поперечного импульса и быстроты. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [271].

ниже мы будем использовать приближение, в котором морские кварки рождаются главным образом в результате глюонного расщепления на последнем шаге эволюции ССФМ. В расчетах мы будем учитывать зависимость соответствующей функции расщепления от поперечного импульса. В таком приближении TMD функция распределения морских кварков может быть представлена в форме [272]

$$f_q^{(\text{sea})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \int \frac{d\mathbf{q}_T^2}{\Delta^2} P_{qg}(z, \mathbf{q}_T^2, \Delta^2) f_g\left(\frac{x}{z}, \mathbf{q}_T^2, \bar{\mu}^2\right), \quad (117)$$

где z — доля импульса глюона, уносимая кварком и $\Delta = \mathbf{k}_T - z\mathbf{q}_T$. Функция расщепления, входящая в (116), была вычислена в работах [273, 274] (см. также [275]):

$$P_{qg}(z, \mathbf{q}_T^2, \Delta^2) = T_R \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 + z(1-z)\mathbf{q}_T^2} \right)^2 \left[z^2 + (1-z)^2 + 4z^2(1-z)^2 \frac{\mathbf{q}_T^2}{\Delta^2} \right]. \quad (118)$$

В выражении (116) масштаб $\bar{\mu}^2$ либо полагается равным $\bar{\mu}^2 = \mu^2$, либо определяется из условия углового упорядочивания: $\bar{\mu}^2 = \Delta^2/(1-z)^2 + \mathbf{q}_T^2/(1-z)$ [272]. В численных расчетах будет применяться последнее соотношение.

Что касается вклада валентных кварков, то для его учета мы будем использовать TMD функцию распределения $f_q^{(\text{val})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$, полученную с помощью численного решения уравнения КХД эволюции типа ССФМ в рамках подхода, предложенно-

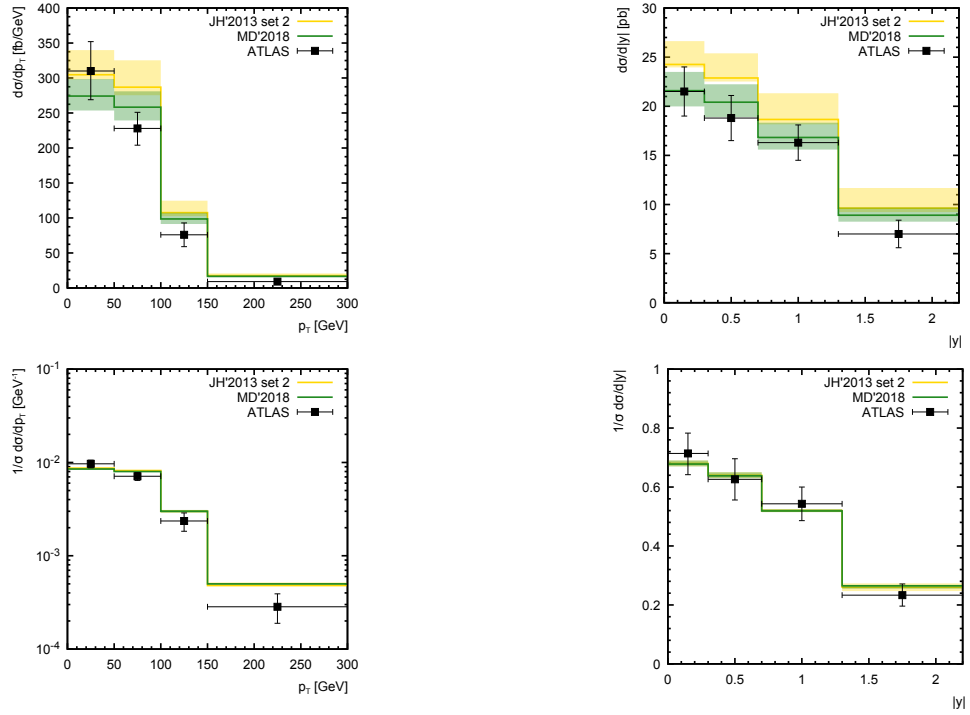


Рис. 39: Дифференциальные сечения процесса одиночного рождения $\bar{t}$ -кварков в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в зависимости от их поперечного импульса и быстроты. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [271].

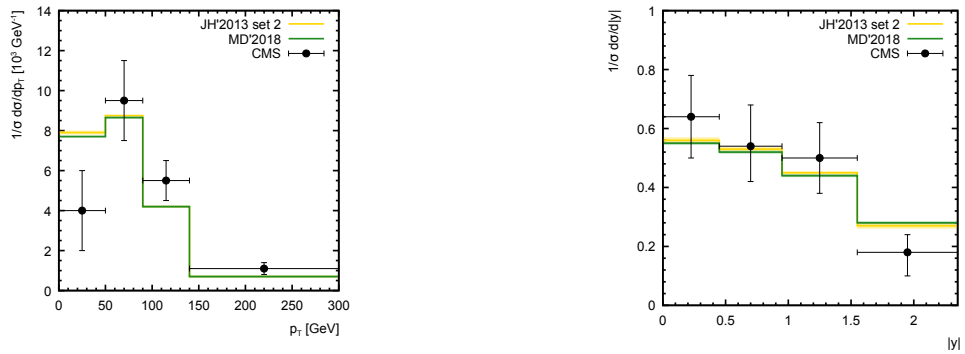


Рис. 40: Нормированные дифференциальные сечения процессов одиночного рождения t и $\bar{t}$ -кварков в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ в зависимости от их поперечного импульса и быстроты. Экспериментальные данные коллаборации CMS [270].

го в работах [67, 276]. Уравнение эволюции для $f_q^{(\text{val})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ имеет вид, в точности аналогичный уравнению (21) с заменой функции расщепления глюонов CCFM $P_{gg}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2)$ на функцию расщепления $P_{qq}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2)$:

$$P_{qq}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) = \frac{C_F}{2\pi} \alpha_s(\mathbf{q}_T^2(1-z)^2) \frac{1+z^2}{1-z^2}. \quad (119)$$

Начальная функция распределения выбирается в форме

$$f_{q0}^{(\text{val})}(x, \mathbf{k}_T^2, \mu_0^2) = \frac{2}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} f_{q0}^{(\text{val})}(x, \mu_0^2) \exp(-\mathbf{k}_T^2/\sigma^2), \quad (120)$$

где $\sigma^2 = \mu_0^2/2$ и $\mu_0 = 2.2$ ГэВ [67]. Численное решение уравнения эволюции для валентных кварков было выполнено с помощью программы UPDFEVOLVE [148] с использованием коллинеарных распределений $f_{q0}^{(\text{val})}(x, \mu_0^2)$ из набора ММНТ'2014 [70].

Предсказания для дифференциальных сечений процессов одиночного рождения t и $\bar{t}$ -кварков (в зависимости от их поперечного импульса и быстроты) на коллайдере ЛНС при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ представлены на рис. 38 — 40. В расчетах были использованы TMD глюонные распределения JH'2013 set 2 и MD'2018. Как обычно, закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Видно, что предсказания k_T -факторизационного подхода достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако, несмотря на то, что форма рассчитанных спектров (нормированные сечения) практически одинакова, наилучшее описание данных достигается с помощью TMD распределения глюонов MD'2018. Как уже было отмечено выше, это связано со специальными предположениями о форме начальной (стартовой) глюонной плотности и использованным алгоритмом определения значений соответствующих феноменологических параметров из данных HERA и ЛНС в широкой кинематической области. Действительно, функция JH'2013 set 2, параметры которой были определены при $x < 5 \cdot 10^{-3}$ [67], приводит к заметной переоценке рассчитанных сечений, см. рис. 38 и 39.

Таким образом, наряду с другими рассмотренными выше процессами, процессы с участием t -кварков в конечном состоянии обеспечивают возможность проверки динамики глюонных распределений в протоне и, в частности, представляют интерес в свете более точного определения начальных параметров различных TMD распределений глюонов.

4 Процессы рождения связанных состояний тяжелых кварков при высоких энергиях

Настоящая глава посвящена исследованию процессов инклюзивного рождения связанных состояний пар тяжелых (c и b) кварков — S - и P -волновых чармониев и боттомониев, а также B_c мезонов — при высоких энергиях. В рамках единого подхода будут вычислены полные и дифференциальные сечения процессов рождения J/ψ , ψ' , χ_{cJ} , η_c , $\Upsilon(nS)$ и $\chi_{bJ}(mP)$ мезонов в протон-протонных столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ и исследованы поляризационные свойства этих частиц. Само согласованное описание полного набора экспериментальных данных, полученных в последнее время на коллайдере LHC — распределений по поперечному импульсу тяжелых кваркониев и их поляризационных наблюдаемых — позволит решить одну из интригующих проблем современной физики высоких энергий. Кроме того, из анализа данных коллабораций CDF и LHCb, полученных на коллайдерах Tevatron и LHC в последние годы, будет получена оценка значения волновой функции B_c мезонов.

4.1 Амплитуды вне массовой поверхности

В основе теоретического описания процессов рождения чармониев и боттомониев лежит гипотеза о факторизации физических процессов, протекающих при различных энергетических масштабах. Наиболее важные из таких масштабов определяются массой тяжелого кварка m_Q , его импульсом $p = m_Q v$ и кинетической энергией $E = m_Q v^2/2$, где v — скорость относительного движения кварка или антикварка в системе покоя кваркония. Так, взаимодействие кварков и глюонов и образование пары тяжелых кварков происходит при характерном масштабе $\mu \sim m_Q$. Величина, обратная импульсу, определяет характерный размер связанного состояния, а энергия связана с временем взаимодействия кварков.

Скорость относительного движения кварков v уменьшается с ростом m_Q , $v \sim 1/\ln m_Q$. Для боттомониев и чармониев она равна $v_b^2 \sim 0.08$ и $v_c^2 \sim 0.23$ [76]. Это означает, что справедливо двойное соотношение $m_Q v^2 \ll m_Q v \ll m_Q$, определяющее иерархию масштабов физических процессов, а движение тяжелых кварков можно считать нерелятивистским: $v \ll 1$. Для описания процесса образования связанных состояний тяжелых кварков при таких значениях v была предложена эффективная теоретико-полевая модель, основанная на разложении ряда теории возмущений по степеням v и константы связи КХД α_s — нерелятивистская КХД (NRQCD) [76–78]. В рамках нерелятивистской КХД сечение процесса рождения тяжелого кваркония в столкновении партонов $a + b \rightarrow Q + X$ может быть представлено в виде

$$d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow Q + X) = \sum_n d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X) \langle \mathcal{O}^Q[n] \rangle, \quad (121)$$

где через a и b обозначены начальные взаимодействующие кварки и/или глюоны.

Сечение рождения пары тяжелых кварков $Q\bar{Q}$ в Фоковском состоянии $n = {}^{2S+1}L_J^{(a)}$ (индекс a обозначает цветовое представление: синглетное, $a = 1$, или октетное, $a = 8$) при энергетическом масштабе $\mu \sim m_Q$ описывается обычными методами теории возмущений КХД, поскольку $\alpha_s(m_Q^2) \ll 1$. Это соотношение выполняется как для боттомониев, так и для чармониев: $\alpha_s(m_b^2) \simeq 0.18$ и $\alpha_s(m_c^2) \simeq 0.24$ соответственно. Непертурбативный процесс перехода пары кварков в наблюдаемый кварконий $\mathcal{Q}$, происходящий при масштабах порядка $m_Q v$ и $m_Q v^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ с испусканием одного или нескольких мягких глюонов, описывается с помощью непертурбативных матричных элементов $\langle \mathcal{O}^{\mathcal{Q}}[n] \rangle$. Последние подчиняются определенной иерархии при разложении волновой функции кваркония по степеням скорости v , которая играет роль малого параметра разложения. Кроме того, они предполагаются универсальными, т.е. не зависящими как от рассматриваемого процесса, так и от энергии, не предсказываются теорией и должны быть определены из экспериментальных данных.

Разложение волновых функций псевдоскалярных мезонов η_c и η_b ($J^{PC} = 0^{-+}$) по степеням v имеет вид [76–78]:

$$|\eta\rangle = O(v^0)|Q\bar{Q}[{}^1S_0^{(1)}]\rangle + O(v^2)|Q\bar{Q}[{}^1P_1^{(8)}]g\rangle + O(v^4)|Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}]g\rangle + \dots \quad (122)$$

Для S -волновых векторных ($J^{PC} = 1^{--}$) мезонов $\psi = J/\psi$, ψ' , $\Upsilon(nS)$ и P -волновых ($J^{PC} = J^{++}$) кваркониев $\chi = \chi_{cJ}$, $\chi_{bJ}(mP)$, а также h_c и h_b частиц ($J^{PC} = 1^{+-}$) это разложение может быть представлено как

$$|\psi\rangle = O(v^0)|Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1)}]\rangle + O(v^1)|Q\bar{Q}[{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + O(v^2)|Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \\ + O(v^2)|Q\bar{Q}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + O(v^2)|Q\bar{Q}[{}^3D_J^{(1,8)}]gg\rangle + \dots, \quad (123)$$

$$|\chi\rangle = O(v^0)|Q\bar{Q}[{}^3P_J^{(1)}]\rangle + O(v^1)|Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}]g\rangle + \dots \quad (124)$$

$$|h\rangle = O(v^0)|Q\bar{Q}[{}^1P_1^{(1)}]\rangle + O(v^2)|Q\bar{Q}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + \dots \quad (125)$$

Первые слагаемые в выражениях (122) — (125) отвечают вкладам от соответствующих синглетных состояний ${}^1S_0^{(1)}$, ${}^3S_1^{(1)}$, ${}^3P_J^{(1)}$ и ${}^1P_1^{(1)}$ (где $J = 0, 1$ или 2), при этом пара тяжелых кварков $Q\bar{Q}$ обладает квантовыми числами конечных мезонов. Таким образом, в пределе $v \rightarrow 0$ нерелятивистская КХД переходит в известную модель цветовых синглетов [72–75]. Для описания процессов рождения и распада η_c и η_b мезонов в ведущем порядке разложения по степеням v и константы связи КХД α_s необходимо учитывать вклады ${}^1S_0^{(1)}$, ${}^1P_1^{(8)}$ и ${}^3S_1^{(8)}$ состояний, для J/ψ , ψ' и $\Upsilon(nS)$ мезонов — вклады ${}^3S_1^{(1)}$, ${}^1S_0^{(8)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ и ${}^3P_J^{(8)}$, а для χ_{cJ} , $\chi_{bJ}(mP)$ и h_c , h_b мезонов необходимо учитывать вклады ${}^3P_J^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ и ${}^1P_1^{(1)}$, ${}^1S_0^{(8)}$ состояний соответственно [76–78]. Непертурбативные матричные элементы семейства чармониев (η_c , J/ψ , ψ' , h_c) удо-

влетворяют соотношениям:

$$\langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'} [{}^3P_J^{(8)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{J/\psi, \psi'} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \quad (126)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3P_J^{(1)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle, \quad (127)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle = (2J+1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \quad (128)$$

которые справедливы с точностью до $O(v^2)$ в силу симметрии между состояниями с различным спином в нерелятивистской КХД (соотношения Heavy Quark Spin Symmetry, HQSS [76–78]). Кроме того,

$$\langle \mathcal{O}^{\eta_c} [{}^1S_0^{(1,8)}] \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1,8)}] \rangle, \quad (129)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\eta_c} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle = \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle, \quad (130)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\eta_c} [{}^1P_1^{(8)}] \rangle = 3 \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \quad (131)$$

$$\langle \mathcal{O}^{h_c} [{}^1P_1^{(1)}] \rangle = 3 \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle, \quad (132)$$

$$\langle \mathcal{O}^{h_c} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle = 3 \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle. \quad (133)$$

Аналогичные выражения также справедливы для семейства боттомониев. Соотношения симметрии HQSS (126) — (133) позволяют значительно уменьшить число независимых параметров (непертурбативных матричных элементов), необходимых для описания процессов рождения и распада тяжелых кваркониев. Кроме того, из (129) — (131), в частности, следует, что определение значений непертурбативных матричных элементов J/ψ и η_c мезонов должно быть проведено в рамках одной и той же процедуры (фита).

Как уже было отмечено выше, сечение рождения пары тяжелых кварков $Q\bar{Q}$ в определенном Фоковском состоянии $d\hat{\sigma}(a+b \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X)$ может быть вычислено с помощью обычной фейнмановской диаграммной техники. Известно, что при высоких энергиях основной вклад в сечение дает механизм глюон-глюонного слияния. Таким образом, в основе наших расчетов лежат следующие подпроцессы:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow Q\bar{Q}[{}^1P_1^{(1)}, {}^3S_1^{(1)}](p) + g(k), \quad (134)$$

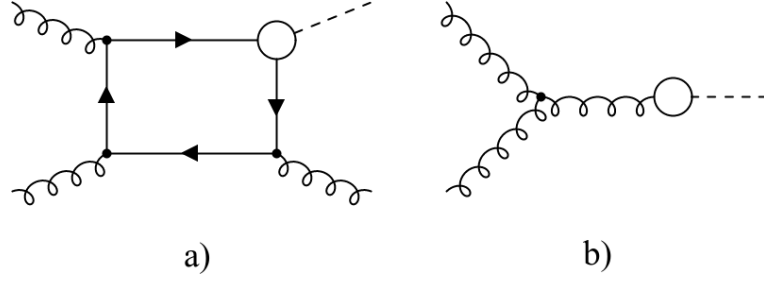


Рис. 41: Некоторые диаграммы Фейнмана для процессов рождения тяжелых кварконигов с помощью механизма глюон-глюонного слияния в ведущем порядке теории возмущений КХД с учетом вкладов синглетных (a) и октетных (b) по цвету состояний.

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow Q\bar{Q}[{}^1S_0^{(1,8)}, {}^1P_1^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1,8)}](p), \quad (135)$$

где в круглых скобках указаны 4-импульсы соответствующих частиц, а в квадратных перечислены все Фоковские состояния пары тяжелых кварков, которые необходимо учитывать в расчетах. Некоторые диаграммы ведущего порядка теории возмущений КХД изображены на рис. 41 a, b. Соответствующие им партонные амплитуды могут быть представлены в виде:

$$\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q}[n] + g) = g^3 \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho(k) C^{(a)} \sum_{i=1}^6 A_i^{\mu\nu\rho}, \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q}[n]) = g^2 \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) C^{(a)} \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\mu t^a \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_1 + m_Q}{(p_Q - k_1)^2 - m_Q^2} \gamma^\nu t^b + \right. \\ \left. + \hat{\Pi}_S \gamma^\nu t^b \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_2 + m_Q}{(p_Q - k_2)^2 - m_Q^2} \gamma^\mu t^a + i f^{abc} t^c \hat{\Pi}_S \gamma_\rho \frac{C^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)^2} \right], \end{aligned} \quad (137)$$

где

$$\mathcal{A}_1^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\mu t^a \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_1 + m_Q}{(p_Q - k_1)^2 - m_Q^2} \gamma^\nu t^b \frac{-\hat{p}_{\bar{Q}} - \hat{k} + m_Q}{(-p_{\bar{Q}} - k)^2 - m_Q^2} \gamma^\rho t^c \right], \quad (138)$$

$$\mathcal{A}_2^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\rho t^c \frac{\hat{p}_Q + \hat{k} + m_Q}{(p_Q + k)^2 - m_Q^2} \gamma^\mu t^a \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_{\bar{Q}} + m_Q}{(k_2 - p_{\bar{Q}})^2 - m_Q^2} \gamma^\nu t^b \right], \quad (139)$$

$$\mathcal{A}_3^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\mu t^a \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_1 + m_Q}{(p_Q - k_1)^2 - m_Q^2} \gamma^\rho t^c \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_{\bar{Q}} + m_Q}{(k_2 - p_{\bar{Q}})^2 - m_Q^2} \gamma^\nu t^b \right], \quad (140)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\nu t^b \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_2 + m_Q}{(p_Q - k_2)^2 - m_Q^2} \gamma^\mu t^a \frac{-\hat{p}_{\bar{Q}} - \hat{k} + m_Q}{(-p_{\bar{Q}} - k)^2 - m_Q^2} \gamma^\rho t^c \right], \quad (141)$$

$$\mathcal{A}_5^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\rho t^c \frac{\hat{p}_Q + \hat{k} + m_Q}{(p_Q + k)^2 - m_Q^2} \gamma^\nu t^b \frac{\hat{k}_1 - \hat{p}_{\bar{Q}} + m_Q}{(k_1 - p_{\bar{Q}})^2 - m_Q^2} \gamma^\mu t^a \right], \quad (142)$$

$$\mathcal{A}_6^{\mu\nu\rho} = \text{tr} \left[\hat{\Pi}_S \gamma^\nu t^b \frac{\hat{p}_Q - \hat{k}_2 + m_Q}{(p_Q - k_2)^2 - m_Q^2} \gamma^\rho t^c \frac{\hat{k}_1 - \hat{p}_{\bar{Q}} + m_Q}{(k_1 - p_{\bar{Q}})^2 - m_Q^2} \gamma^\mu t^a \right]. \quad (143)$$

Здесь $\epsilon(k_1)$, $\epsilon(k_2)$ и $\epsilon(k)$ — 4-векторы поляризации начальных и конечного глюонов, $p_Q = p/2 + q$ и $p_{\bar{Q}} = p/2 - q$ — 4-импульсы тяжелых кварков, q — 4-импульс их относительного движения и $C^{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3)$ — обычная трехглюонная вершина (87).

Проекционные операторы на синглетные и октетные по цвету состояния:

$$C^{(1)} = \frac{I}{\sqrt{N_c}}, \quad C^{(8)} = \sqrt{2}t^a, \quad (144)$$

где I — единичная матрица в пространстве цветов и $N_c = 3$. Проекционные операторы на состояния со спином $S = 0$ и $S = 1$ имеют вид [72–75]:

$$\hat{\Pi}_0 = \frac{1}{(2m_Q)^{3/2}} (\hat{p}_{\bar{Q}} - m_Q) \gamma_5 (\hat{p}_Q + m_Q), \quad (145)$$

$$\hat{\Pi}_1 = \frac{1}{(2m_Q)^{3/2}} (\hat{p}_{\bar{Q}} - m_Q) \hat{\epsilon}(S_z) (\hat{p}_Q + m_Q), \quad (146)$$

где состояния с различными проекциями спина на ось квантования описываются 4-вектором поляризации $\epsilon(S_z)$ (см. также [277]).

Амплитуда рождения тяжелого кваркония $\mathcal{Q}$ может быть получена из амплитуды рождения пары кварков с помощью интегрирования произведения этой амплитуды и соответствующей волновой функции связанного состояния $\Psi(q)$ по импульсу q . Такое интегрирование удобно провести, раскладывая амплитуду рождения пары кварков $\mathcal{A}$ в ряд по малому параметру q :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{Q}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{A}(q) \Psi(q) = \mathcal{A}|_{q=0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi(q) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^\mu} \right) \Big|_{q=0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^\mu \Psi(q) + \dots, \end{aligned} \quad (147)$$

при этом

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi(q) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{R}(0), \quad \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^\mu \Psi(q) = -i\epsilon^\mu(L_z) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{R}'(0), \quad (148)$$

где $\mathcal{R}(x)$ — пространственная часть волновой функции кваркония в координатном представлении [278, 279]. Первый член этого разложения отвечает образованию S -волновых состояний и не участвует в образовании P -волновых кваркониев, поскольку $\mathcal{R}(0) = 0$ для P -волн. Второе слагаемое в разложении отвечает только рождению P -волновых состояний, поскольку $\mathcal{R}'(0) = 0$ для S -волн. Состояния с различными проекциями орбитального момента на ось квантования описываются 4-вектором поляризации $\epsilon(L_z)$. Для S -волновых кваркониев $\mathcal{Q}$ справедливо выражение [78]:

$$\langle \mathcal{O}^{\mathcal{Q}}[{}^{2S+1}L_J^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1) \frac{|\mathcal{R}(0)|^2}{4\pi}. \quad (149)$$

Аналогичное соотношение для P -волновых кваркониев имеет вид [78]:

$$\langle \mathcal{O}^{\mathcal{Q}}[{}^{2S+1}L_J^{(1)}] \rangle = 6N_c(2J+1) \frac{|\mathcal{R}'(0)|^2}{4\pi}. \quad (150)$$

Численные значения волновых функций кваркониев в импульсном или координатном представлениях, $|\Psi(0)|^2$ или $|\mathcal{R}(0)|^2$, а также их производных, могут быть получены из решений нерелятивистского уравнения Шредингера с определенным потенциалом в рамках потенциальных моделей. Вычислению этих величин уделяется внимание в целом ряде работ [280–284].

Суммирование по поляризациям конечного глюона в (136) выполняется обычным образом. В то же время, согласно предписаниям k_T -факторизационного подхода [21, 22], суммирование по поляризациям начальных глюонов производится согласно (89). Суммирование по поляризациям ${}^3S_1^{(1,8)}$ и ${}^3P_J^{(1,8)}$ состояний в рамках нерелятивистской КХД обычно выполняется с использованием ковариантных формул [285]:

$$\sum_{J_z} \epsilon^\mu(p) \epsilon^{*\nu}(p) = L^{\mu\nu}(p) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}, \quad (151)$$

$$\epsilon_{(0)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(0)}^{*\rho\sigma}(p) = \frac{1}{3} L^{\mu\nu}(p) L^{\rho\sigma}(p), \quad (152)$$

$$\sum_{J_z} \epsilon_{(1)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(1)}^{*\rho\sigma}(p) = \frac{1}{2} [L^{\mu\rho}(p) L^{\nu\sigma}(p) - L^{\mu\sigma}(p) L^{\nu\rho}(p)], \quad (153)$$

$$\sum_{J_z} \epsilon_{(2)}^{\mu\nu}(p) \epsilon_{(2)}^{*\rho\sigma}(p) = \frac{1}{2} [L^{\mu\rho}(p) L^{\nu\sigma}(p) + L^{\mu\sigma}(p) L^{\nu\rho}(p)] - \frac{1}{3} L^{\mu\nu}(p) L^{\rho\sigma}(p), \quad (154)$$

где $m = 2m_Q$ и нижний индекс в круглых скобках тензоров поляризации ${}^3P_J^{(1,8)}$ состояний соответствует значению $J = 0, 1$ или 2 . Компоненты тензора $L^{\mu\nu}$ могут быть выражены через импульсы лептонов l_1 и l_2 , возникающих в процессе распада

S -волнового кваркония $Q \rightarrow l^+ l^-$:

$$L^{\mu\nu}(l_1, l_2) = \frac{3}{m^2} \left(l_1^\mu l_2^\nu + l_1^\nu l_2^\mu - \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu} \right), \quad (155)$$

что весьма удобно для вычисления поляризационных наблюдаемых.

Суммирование по поляризациям $^3S_1^{(1,8)}$ и $^3P_J^{(1,8)}$ состояний также может быть проведено с помощью явного определения 4-векторов поляризации $\epsilon(S_z)$ и/или $\epsilon(L_z)$, например:

$$\epsilon(\pm 1) = (0, \mp i, 1, 0)/\sqrt{2}, \quad \epsilon(0) = (|p|, 0, 0, E)/m \quad (156)$$

в системе покоя, где $p = (E, 0, 0, |p|)$. В этом случае тензор поляризации P -волновых состояний с определенными J и J_z вычисляется с помощью коэффициентов Клебша-Гордана:

$$\epsilon^{\mu\nu}(J, J_z) = \sum_{L_z, S_z} \langle 1, L_z; 1, S_z | J, J_z \rangle \epsilon^\mu(L_z) \epsilon^\nu(S_z). \quad (157)$$

Следует отметить, что при проведении расчетов с использованием выражений (151) — (154) предполагается, что импульс глюона(ов), испускаемых в процессе перехода пары $Q\bar{Q}$ из октетного состояния в синглетное, соответствующее квантовым числам конечного кваркония, пренебрежимо мал. Это предположение явно противоречит принципу конфайнмента в КХД, который запрещает излучение цветных частиц с бесконечно малым импульсом. Поэтому процесс испускания одного или нескольких мягких глюонов во время формирования связанного состояния тяжелых кварков должен происходить в результате некоторого взаимодействия между ними с заметной передачей импульса. Последняя, как было отмечено выше, должна быть порядка $mv^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}$. Пренебрежение этим фактом и использование в расчетах ковариантных выражений (151) — (154) приводит к предсказанной в рамках нерелятивистской КХД значительной поляризации S -волновых кваркониев (J/ψ , ψ' мезонов) в области средних и больших поперечных импульсов [80, 83, 286–288], что противоречит данным коллаборации CMS [89], которые указывают на неполяризованные частицы.

В свете вышеизложенного, вместо выражений (151) — (154) для описания процесса перехода пары тяжелых кварков $Q\bar{Q}$ из октетных состояний в наблюдаемые синглетные мы будем использовать механизм [96], который основан на классической теории мультипольного разложения. Так, предполагается, что испускание парой кварков глюона с энергией $E \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ во время перехода $Q\bar{Q}[^3P_J^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[^3S_1^{(1)}] + g$ осуществляется с помощью доминирующего дипольного ($E1$) хромо-электрического механизма. В этом случае амплитуды перехода могут быть записаны в виде [289]:

$$\mathcal{A}(Q\bar{Q}[^3P_0^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[^3S_1^{(1)}] + g) \sim q_\mu p^\mu \epsilon_\nu(k) \epsilon^\nu(q), \quad (158)$$

$$\mathcal{A}(Q\bar{Q}[{}^3P_1^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1)}] + g) \sim e^{\mu\nu\alpha\beta} q_\mu \epsilon_\nu(p) \epsilon_\alpha(k) \epsilon_\beta(q), \quad (159)$$

$$\mathcal{A}(Q\bar{Q}[{}^3P_2^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1)}] + g) \sim p^\mu \epsilon^{\alpha\beta}(p) \epsilon_\alpha(k) [q_\mu \epsilon_\beta(q) - q_\beta \epsilon_\mu(q)], \quad (160)$$

где p , k и $q = p - k$ — 4-импульсы начального ${}^3P_J^{(8)}$, конечного ${}^3S_1^{(1)}$ состояний и испущенного глюона, $\epsilon(p)$, $\epsilon(k)$ и $\epsilon(q)$ — их 4-векторы поляризации соответственно и $e^{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Переход октетного S -волнового состояния в S -волновое синглетное состояние рассматривается как два последовательных процесса $Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3P_J^{(8)}] + g$, $Q\bar{Q}[{}^3P_J^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1)}] + g'$ с участием всех трех P -волновых состояний с $J = 0, 1$ и 2 . Ключевое предположение модели [96] заключается в том, что время жизни промежуточных октетных состояний пары тяжелых кварков является достаточным для того, чтобы они могли рассматриваться как физические состояния, обладающие определенными полным моментом J и его проекцией J_z . Это приводит к несохранению проекций спина S_z и орбитального момента L_z во время дипольного ($E1$) хромо-электрического перехода октетной пары кварков в наблюдаемое синглетное состояние и тем самым к отсутствию значительной степени поляризации конечного кваркония. Так, для случая перехода с участием состояний с $J = 1$ соответствующая амплитуда может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3P_1^{(8)}] + g, Q\bar{Q}[{}^3P_1^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(1)}] + g') \sim \\ & \sim e^{\mu\nu\alpha\beta} e^{\rho\sigma\lambda\delta} q_\mu^{(g')} q_\rho^{(g)} \epsilon_\beta^{(g')} \epsilon_\delta^{(g)} \epsilon_\alpha^{(g)} \epsilon_\sigma^{(3S_1^{(1)})} \left[-g_{\nu\sigma} + \frac{r_\nu r_\sigma}{m_r^2} \right] \mathcal{A}^\lambda(g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}]), \end{aligned} \quad (161)$$

где r и m_r — 4-импульс и масса промежуточного ${}^3P_1^{(8)}$ состояния, а импульсы всех остальных частиц указаны явным образом. Конечно, выражение для $\mathcal{A}^\lambda(g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}])$ вычисляется согласно (137) и (146). Аналогичным образом могут быть выписаны амплитуды переходов с участием состояний с $J = 0$ и $J = 2$ в соответствии с амплитудами (158) — (160), что позволяет нам вычислить значения всех поляризационных параметров, определяющих спиновую матрицу плотности конечных кваркониев. Отметим, что амплитуды (158) — (160) также могут быть использованы (с точностью до цветового множителя) для описания радиационного распада P -волновых кваркониев $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ и $\chi_{bJ}(mP) \rightarrow \Upsilon(nS) + \gamma$ (при $m \geq n$).

Калибровочно-инвариантные амплитуды вне массовой поверхности подпроцессов (134) и (135) с учетом (158) — (160) были вычислены с помощью системы аналитических вычислений FORM [106]. Некоторые из них (амплитуды подпроцессов рождения пары тяжелых кварков в ${}^1P_1^{(1)}$ и ${}^1P_1^{(8)}$ состояниях) были получены впервые. Конечно, при использовании ковариантных формул суммирования по поляризациям (151) — (154) вместо механизма [96] наши результаты совпадают с ранее известными [290]. Аналитические выражения для всех рассчитанных амплитуд были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100].

4.2 Полные и дифференциальные сечения

Как обычно, сечение процесса рождения тяжелого кваркония $\mathcal{Q}$ в pp или $p\bar{p}$ столкновениях при высоких энергиях определяется выражением вида (92). Легко получить, что

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \mathcal{Q} + X) = & \int \frac{1}{8\pi x_1 x_2 s F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ & \times |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow \mathcal{Q} + g)|^2 d\mathbf{p}_T^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy_{\mathcal{Q}} dy_g \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (162)$$

для процессов (134) и

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow \mathcal{Q} + X) = & \int \frac{2\pi}{x_1 x_2 s F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ & \times |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow \mathcal{Q})|^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy_{\mathcal{Q}} \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (163)$$

для процессов (135). Здесь $\mathbf{k}_{1T}^2 = -k_1^2 \neq 0$ и $\mathbf{k}_{2T}^2 = -k_2^2 \neq 0$ — поперечные импульсы начальных виртуальных глюонов, ϕ_1 и ϕ_2 — их азимутальные углы, $y_{\mathcal{Q}}$ и y_g — быстроты кваркония $\mathcal{Q}$ и конечного глюона в системе центра масс сталкивающихся протонов, $\sqrt{s}$ — полная энергия столкновения, F — инвариантный потоковый фактор [215]. Из закона сохранения энергии-импульса следует, что

$$x_1 \sqrt{s} = m_{\mathcal{Q}T} e^{y_{\mathcal{Q}}} + |\mathbf{p}_{2T}| e^{y_g}, \quad x_2 \sqrt{s} = m_{\mathcal{Q}T} e^{-y_{\mathcal{Q}}} + |\mathbf{p}_{2T}| e^{-y_g}, \quad (164)$$

для процессов (134) и

$$x_1 \sqrt{s} = m_{\mathcal{Q}T} e^{y_{\mathcal{Q}}}, \quad x_2 \sqrt{s} = m_{\mathcal{Q}T} e^{-y_{\mathcal{Q}}}, \quad (165)$$

для процессов (135), где $m_{\mathcal{Q}T}^2 = m_{\mathcal{Q}}^2 + \mathbf{p}_T^2$.

4.3 Выбор параметров и теоретические неопределенности

При вычислении сечений в соответствии с (162) и (163) использовалась программа численного интегрирования VEGAS [291], позднее включенная в качестве одной из составных частей в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100]. В ходе расчетов обычно запрашивалось выполнение нескольких сотен итераций, каждой из которых отвечало порядка миллиона обращений к подынтегральной функции. Это позволило вывести погрешность численных вычислений на уровень менее 1% как для полных, так и для дифференциальных сечений рождения чармониев и боттомониев (и их поляризационных наблюдаемых). При этом определение значений непертурбативных матричных элементов проводилось с помощью алгоритма программы GNUPLOT [292] с точностью в среднем около 1 — 3%.

Среди теоретических неопределенностей, влияющих на величину рассчитанных

сечений, наибольшую роль играют неопределенности, связанные с выбором масштаба перенормировки μ_R в бегущей константе связи КХД (масштаба ренормализации) и факторизационного масштаба μ_F , а также неопределенности, связанные с выбором значений масс чармониев и боттомониев и соответствующих волновых функций (или их производных) при равных нулю относительных координатах тяжелых кварков. Для каждой из рассматриваемых TMD функций распределения глюонов масштабы μ_R и μ_F , а также значения параметров N_f и Λ_{QCD} выбираются в соответствии с таблицей 11. Изменение масштабов μ_R и/или μ_F в обычных пределах (уменьшение и увеличение в 2 раза) дает возможность оценить соответствующие неопределенности. Массы чармониев были взяты следующими: $m_{J/\psi} = 3.097$ ГэВ, $m_{\psi'} = 3.686$ ГэВ, $m_{\chi_{c0}} = 3.415$ ГэВ, $m_{\chi_{c1}} = 3.511$ ГэВ, $m_{\chi_{c2}} = 3.556$ ГэВ, $m_{\eta_c} = 2.984$ ГэВ и $m_{h_c} = 3.525$ ГэВ [216]. Массы боттомониев полагаются равными $m_{\Upsilon(1S)} = 9.460$ ГэВ, $m_{\Upsilon(2S)} = 10.023$ ГэВ, $m_{\Upsilon(3S)} = 10.355$ ГэВ, $m_{\chi_{b0(1P)}} = 9.859$ ГэВ, $m_{\chi_{b1(1P)}} = 9.893$ ГэВ, $m_{\chi_{b2(1P)}} = 9.912$ ГэВ, $m_{\chi_{b0(2P)}} = 10.232$ ГэВ, $m_{\chi_{b1(2P)}} = 10.255$ ГэВ, $m_{\chi_{b2(2P)}} = 10.269$ ГэВ, $m_{\chi_{b0(3P)}} = 10.511$ ГэВ, $m_{\chi_{b1(3P)}} = 10.513$ ГэВ и $m_{\chi_{b2(3P)}} = 10.524$ ГэВ [216].

При выборе значений волновых функций кваркониев $|\Psi(0)|^2$ или их производных $|\Psi'(0)|^2$ мы в значительной мере опирались на результаты расчетов, полученных в рамках потенциальной модели [280]. Однако, учитывая известные упрощения таких вычислений (в частности, пренебрежение спинами кварков), сильную зависимость полученных значений волновых функций от выбора потенциала и существенную величину поправок следующих порядков теории возмущений, в некоторых случаях (например, для χ_{cJ} и $\chi_{bJ}(1P)$ мезонов) численные значения этих волновых функций были определены из данных вместе с соответствующими непертурбативными матричными элементами в рамках единой процедуры (фита).

4.4 Определение значений непертурбативных матричных элементов чармониев

4.4.1 ψ' мезоны

Непертурбативные матричные элементы ψ' мезонов, $\langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle$, были определены [296, 297] из условия наилучшего описания экспериментальных данных для распределений ψ' мезонов по поперечному импульсу p_T , полученных коллаборациями CMS [293, 294] и ATLAS [248, 295] в pp столкновениях на коллайдере ЛНС при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Мы не используем данные коллаборации LHCb [298], поскольку они соответствуют главным образом области сравнительно малых p_T , в которой для получения теоретических предсказаний необходима специальная процедура пересуммирования ряда теории возмущений КХД [299, 300], позволяющая правильно учесть большие логарифмические вклады

	$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\psi^0}$	$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi^0}$	$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi^0}$	$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi^0}$
A0	0.7038	$(1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-2}$	$(2.3 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$	$(4.0 \pm 2.0) \cdot 10^{-3}$
JH'2013 set 1	0.7038	$(7.0 \pm 6.0) \cdot 10^{-3}$	$(7.4 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$	$(1.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-2}$
JH'2013 set 2	0.7038	$(3.0 \pm 3.0) \cdot 10^{-3}$	$(1.7 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$	$(2.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}$
KMR (MMHT'2014 LO)	0.7038	$(1.0 \pm 1.0) \cdot 10^{-3}$	$(6.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$	$(8.2 \pm 0.8) \cdot 10^{-3}$

Таблица 1: Значения непертурбативных матричных элементов ψ' мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [293, 294] и ATLAS [248, 295] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

вида $\alpha_s^n \ln^n m_{\psi'}/p_T$. Отметим, что данные коллабораций CMS и ATLAS были получены при $p_T \geq 8$ ГэВ, что вполне соответствует области применимости гипотезы факторизации (121) нерелятивистской КХД.

В экспериментальных работах [293, 294] коллаборации CMS диапазон изменения быстроты ψ' мезонов, $|y| < 1.2$, был разбит на 4 равных интервала, в каждом из которых были измерены распределения по поперечному импульсу. Более широкий диапазон изменения быстроты ψ' в экспериментах [248] коллаборации ATLAS, $|y| < 2$, был разбит на 8 равных интервалов. В работе [295] распределения по поперечному импульсу ψ' мезонов были измерены в пределах одной широкой области, $|y| < 0.75$. Для уменьшения влияния случайных ошибок процедура определения матричных элементов была проведена во всех этих интервалах по быстрой, при этом каждое из полученных значений рассматривалось как результат независимого ”измерения”. В качестве окончательного результата принималось их среднее значение. Оценка соответствующих погрешностей производилась с помощью распределения Стьюдента, коэффициент надежности полагался равным $P = 95\%$. Важным дополнительным условием для матричных элементов $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle$ являлось требование их положительной определенности, что отвечает физическим переходам согласно (158) — (160). В расчетах мы принимали, что $B(\psi' \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 0.0079$ [216].

Полученные численные значения $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle$ приведены в таблице 1 для некоторых TMD функций распределения глюонов в протоне. Соответствующие этим значениям предсказания для распределений ψ' мезонов по поперечному импульсу при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ представлены на рис. 42 и 43. Здесь для иллюстрации используются глюонные распределения A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2, при этом закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Легко видеть, что наши результаты хорошо описывают экспериментальные данные разных энергий коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине во всех интервалах быстрот. Более того, величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 1.03, 0.99 и 1.45 для распределений A0, JH'2013 set

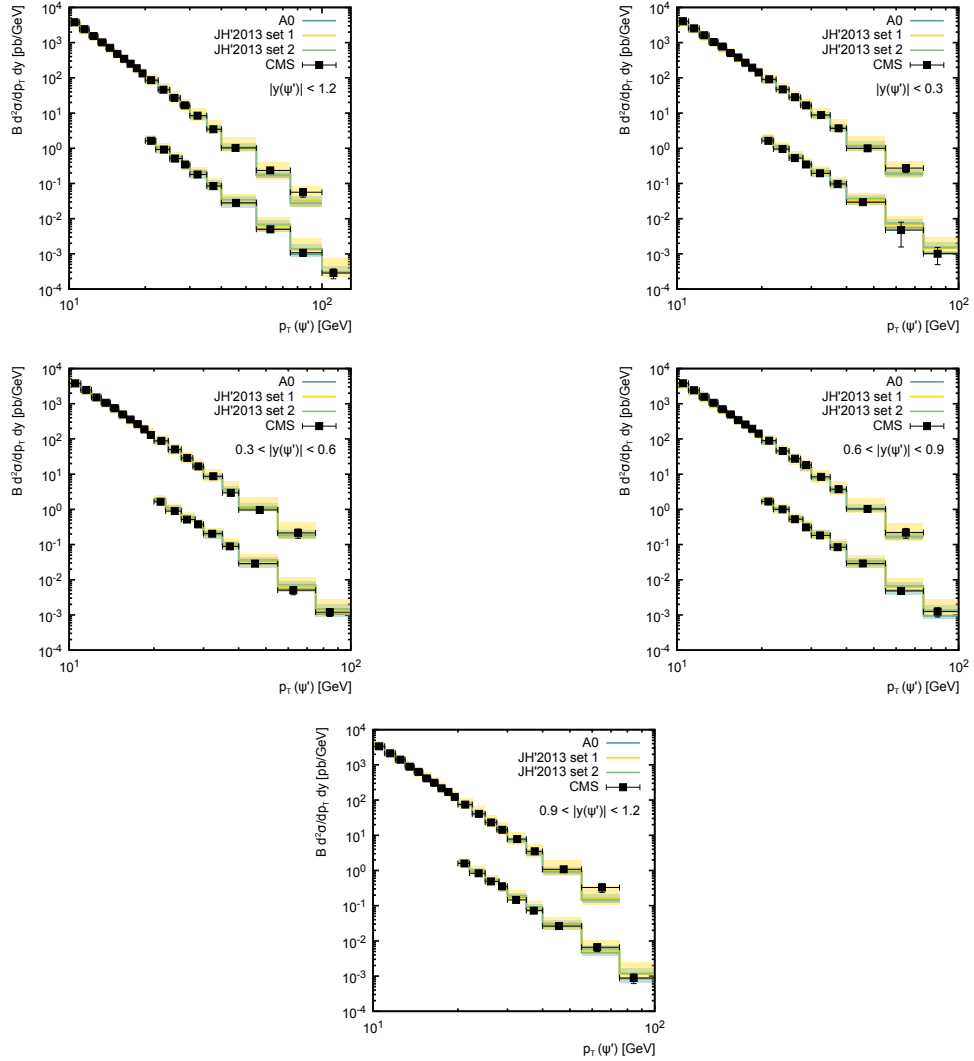


Рис. 42: Распределения по поперечному импульсу ψ' мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, умножены на 100. Экспериментальные данные коллаборации CMS [293, 294].

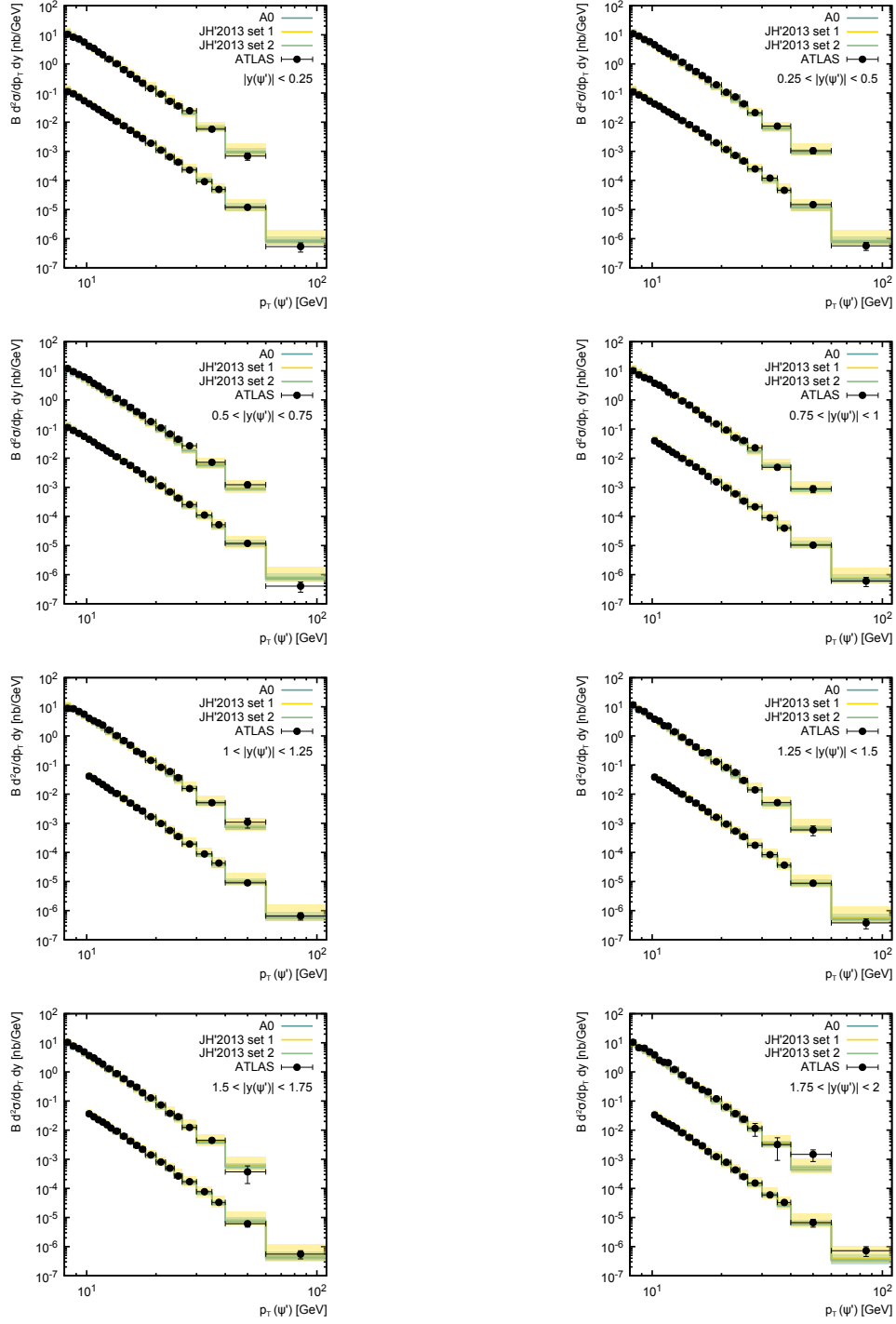


Рис. 43: Распределения по поперечному импульсу ψ' мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения гистограмм соответствуют обозначениям на рис. 42. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [248].

	$ \mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0) ^2/\Gamma\Xi B^5$	$ \mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0) ^2/\Gamma\Xi B^5$	$\langle\mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}]\rangle/\Gamma\Xi B^3$
A0	0.14 ± 0.03	0.035 ± 0.001	$(7.0 \pm 2.0) \cdot 10^{-4}$
JH'2013 set 1	0.17 ± 0.03	0.043 ± 0.004	$(7.0 \pm 2.0) \cdot 10^{-4}$
JH'2013 set 2	0.20 ± 0.04	0.050 ± 0.001	$(8.0 \pm 2.0) \cdot 10^{-4}$
KMR (MMHT'2014 LO)	0.08 ± 0.02	0.026 ± 0.002	$(4.0 \pm 1.0) \cdot 10^{-4}$

Таблица 2: Значения волновых функций и непертурбативных матричных элементов χ_{cJ} мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций ATLAS [301], CMS [302, 303] и LHCb [304, 305] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

1 и JH'2013 set 2. Теоретические неопределенности наших предсказаний, включающие в себя оценку неопределенностей, связанных с выбором характерных масштабов, определением значений непертурбативных матричных элементов и т.п., составляют в среднем 20 – 30%, что сравнимо с неопределенностями вычислений в рамках NLO-приближения нерелятивистской КХД. Отметим, что аналогичная степень согласия результатов расчетов и экспериментальных данных ЛНС достигается также при использовании других глюонных распределений.

В дальнейшем полученные значения непертурбативных матричных элементов ψ' частиц были использованы при вычислении вкладов в сечения рождения χ_{cJ} и J/ψ мезонов от распадов $\psi' \rightarrow \chi_{cJ} + \gamma$ и $\psi' \rightarrow J/\psi + X$ соответственно.

4.4.2 χ_{cJ} мезоны

Для определения значений непертурбативных матричных элементов χ_c мезонов в работах [296, 306] использовались экспериментальные данные ЛНС для различных наблюдаемых. Во-первых, были использованы измерения распределений χ_{c1} и χ_{c2} мезонов по поперечному импульсу p_T , а также данные для распределений по поперечному импульсу J/ψ мезонов (возникающих в процессе радиационного распада $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$), полученные коллаборацией ATLAS [301] при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Также были использованы экспериментальные данные для отношения сечений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ в зависимости от поперечного импульса J/ψ мезонов, полученные коллаборациями CMS [302], ATLAS [301] и LHCb [304, 305]. Изучение отношений сечений χ_c мезонов позволяет уменьшить неопределенности вычислений, поскольку множество факторов, влияющих на форму и абсолютную нормировку сечений (масштабы ренормализации и факторизации, распределения глюонов, массы кваркониев) частично или полностью сокращаются. Тем не менее, известно, что одних этих измерений недостаточно для достоверного определения величины $\langle\mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}]\rangle$. Действительно, хорошее описание распределений χ_{c1} и χ_{c2} мезонов по поперечному импульсу может быть

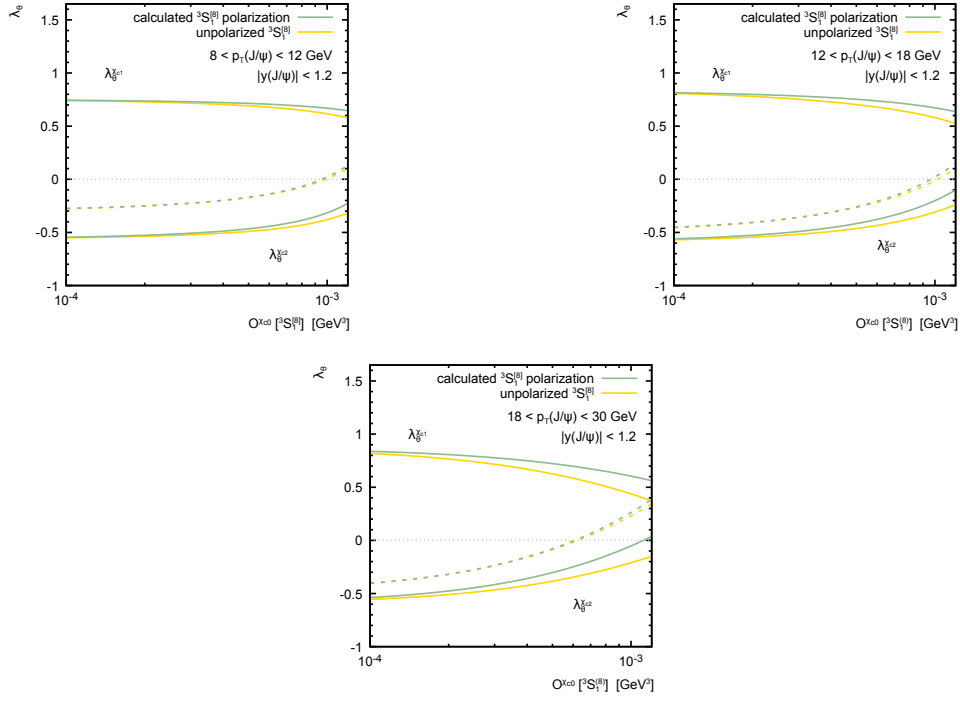


Рис. 44: Зависимость поляризационных параметров χ_{c1} и χ_{c2} мезонов от значения $\langle O^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, рассчитанная в спиральной системе J/ψ мезона при $|y(J/\psi)| < 1.2$ и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Штриховые кривые соответствуют экспериментально установленным корреляциям (166) — (168). Результаты получены с использованием TMD функции распределения глюонов JH'2013 set 2.

достигнуто при существенно разных $\langle O^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ с разумной величиной $\chi^2/d.o.f.$ в рамках NLO-приближения нерелятивистской КХД [307–309]. Кроме того, для описания отношения $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ предпочтительно значение $\langle O^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle \simeq 0$ [309]. Поэтому для более точного определения матричных элементов мы использовали [310] экспериментальные данные для поляризации χ_{c1} и χ_{c2} мезонов, полученные недавно коллаборацией CMS при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ [303]. При этом, согласно [311], значения волновых функций χ_{c1} и χ_{c2} мезонов, $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2$ и $|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2$, предполагались не обязательно равными (в отличие от предсказаний потенциальных моделей [280–284]) и также определялись из данных ЛНС. Отметим, что в численных расчетах был также учтен вклад от распадов $\psi' \rightarrow \chi_{cJ} + \gamma$, при этом принималось, что $B(\psi' \rightarrow \chi_{c0} + \gamma) = 0.0979$, $B(\psi' \rightarrow \chi_{c1} + \gamma) = 0.0975$ и $B(\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma) = 0.0952$ [216].

В работе [303] были измерены отношения дифференциальных сечений χ_{c1} и χ_{c2} мезонов как функции азимутального ϕ^* и полярного θ^* углов в спиральной системе конечного J/ψ мезона и установлены соотношения между параметрами $\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}$ и $\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}}$:

$$\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}} = (-0.94 + 0.90\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}) \pm (0.51 + 0.05\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}), \quad 8 < p_T < 12 \text{ GeV}, \quad (166)$$

$$\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}} = (-0.76 + 0.80\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}) \pm (0.26 + 0.05\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}), \quad 12 < p_T < 18 \text{ GeV}, \quad (167)$$

$$\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}} = (-0.78 + 0.77\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}) \pm (0.26 + 0.06\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}), \quad 18 < p_T < 30 \text{ GeV}, \quad (168)$$

которые связаны с угловыми распределениями лептонов в процессе распада $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi \rightarrow l^+l^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} \sim \frac{1}{3 + \lambda_{\theta}^{\chi_{cJ}}} (1 + \lambda_{\theta}^{\chi_{cJ}} \cos^2\theta^*). \quad (169)$$

Поскольку абсолютная величина отношений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ оставалась произвольной [303], то мы использовали соотношения (166) — (168).

Процедура определения значений непертурбативных матричных элементов χ_{c1} и χ_{c2} мезонов и их волновых функций из экспериментальных данных [301, 302, 304, 305] с учетом измерений поляризационных свойств [303] состоит в следующем. Сначала, исходя из условия наилучшего описания данных [301] для распределений по поперечным импульсам и отношений сечений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ [301, 302, 304, 305] были определены $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2$ и $|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2$ для каждого из нескольких десятков (порядка 20) значений $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, взятых в интервале $10^{-4} \leq \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle \leq 10^{-3} \text{ ГэВ}^5$. После этого была рассчитана зависимость параметров $\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}$ и $\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}}$ от величины $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ в соответствии с (169) и полученными значениями волновых функций χ_{c1} и χ_{c2} мезонов (см. рис. 44). Для этого также был использован алгоритм программы GNUPLOT [292]. Легко видеть, что полученная зависимость является достаточно существенной, что позволяет определить такие $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, при которых установленные соотношения (166) — (168), представленные на рис. 44 штриховыми кривыми, выполняются точно в каждом из трех интервалов поперечных импульсов. Как и ранее, в качестве окончательного результата принималось их среднее значение, а оценка погрешностей производилась с помощью распределения Стюдента, где коэффициент надежности полагался равным $P = 95\%$.

Определенное таким способом значение непертурбативного матричного элемента $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ практически не зависит от поляризации, предсказываемой октетным механизмом рождения (135). Для иллюстрации этого на рис. 44 приведены результаты, полученные в приближении изотропного перехода $Q\bar{Q}[{}^3S_1^{(8)}] \rightarrow Q\bar{Q}[{}^3P_J^{(1)}] + g$ (желтые кривые). Видно, что такое приближение дает практически те же результаты, что и точный расчет. Это связано с тем, что октетный механизм (135) приводит к одинаковой поляризации J/ψ мезонов, возникающих от распада χ_{c1} и χ_{c2} мезонов, которая в соотношениях (166) — (168) в значительной степени сокращается.

Полученные численные значения волновых функций χ_{c1} и χ_{c2} мезонов, $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2$ и $|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2$, а также непертурбативного матричного элемента $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ приведены в таблице 2 для некоторых TMD функций распределения глюонов в протоне. Как видно, предложенный выше способ определения $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2$ и $|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2$ из экспериментальных данных приводит к их существенно разным значениям, при этом отношение $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2/|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2 \sim 3 - 4$ для всех глюонных распределений, что хорошо согласуется с результатами [311]. Как уже было отмечено выше, отличие от

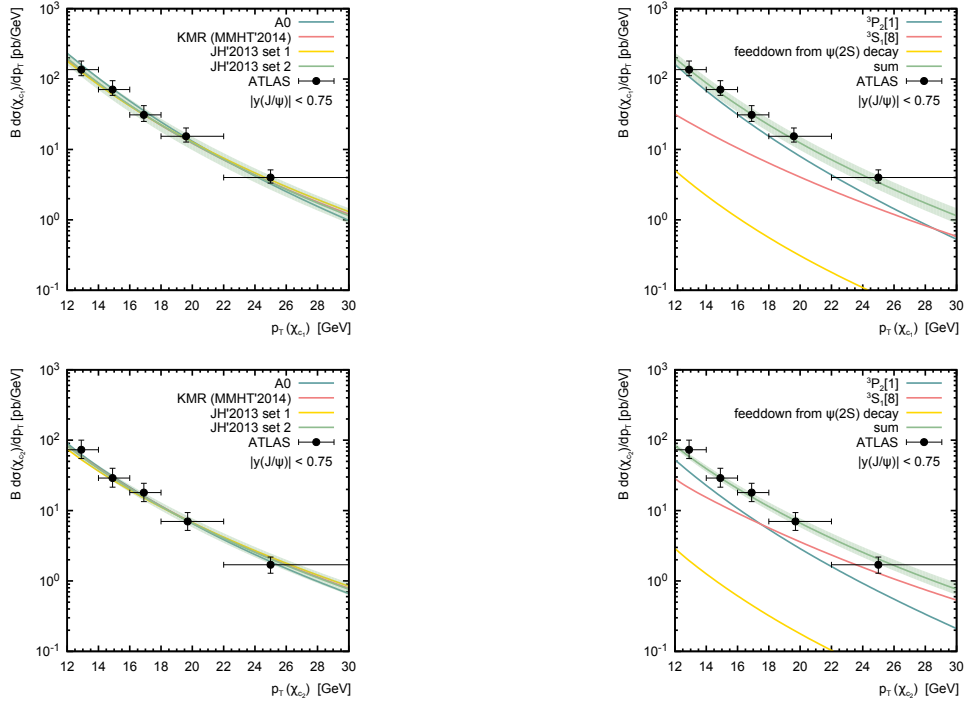


Рис. 45: Сечения рождения χ_{c1} and χ_{c2} мезонов в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ как функции их поперечных импульсов. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [301].

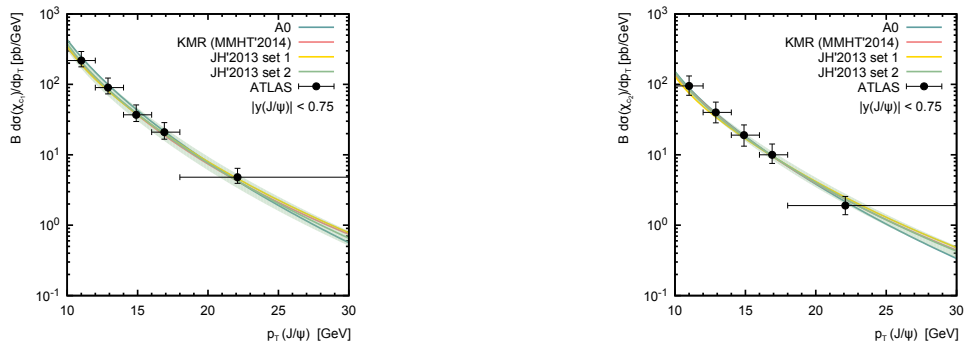


Рис. 46: Сечения рождения χ_{c1} and χ_{c2} мезонов в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ как функции поперечных импульсов J/ψ мезонов, возникающих из радиационных распадов $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [301].

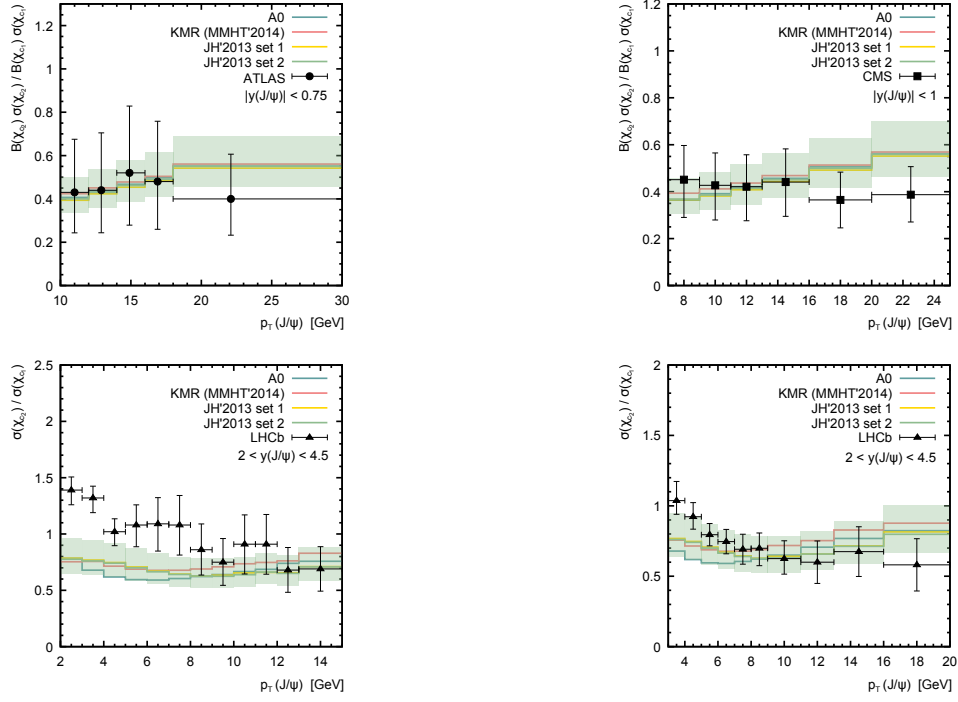


Рис. 47: Отношения сечений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$, вычисленные для pp столкновений при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ как функции поперечных импульсов J/ψ мезонов, возникающих из радиационных распадов $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [301], CMS [302] и LHCb [304, 305].

предсказания потенциальных моделей, $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2/|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2 \simeq 1$, может быть связано с известными приближениями этих моделей, а также со значительной величиной поправок следующих порядков к волновым функциям χ_{c1} и χ_{c2} мезонов. Отметим, что непертурбативные матричные элементы h_c мезонов могут быть легко получены с помощью соотношений симметрии HQSS (132) и (133).

Результаты наших вычислений для распределений по поперечному импульсу χ_{c1} и χ_{c2} мезонов (а также J/ψ мезонов, возникающих в процессе их радиационного распада) приведены на рис. 45 и 46. Отношения сечений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ показаны на рис. 47. В этих расчетах использовались распределения глюонов A0, JH'2013 set 1, JH'2013 set 2 и KMR. Как и ранее, закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Видно, что наши предсказания хорошо согласуются с экспериментальными данными коллабораций ATLAS, CMS и LHCb в пределах неопределенностей (за исключением области очень малых $p_T \sim 2 - 4$ ГэВ, которая находится за пределами области применимости нерелятивистской КХД). Величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 0.99, 1.18 и 0.63 для распределений A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2 соответственно. Отметим также, что отличие значений волновых функций $|\mathcal{R}'^{\chi_{c1}}(0)|^2$ и $|\mathcal{R}'^{\chi_{c2}}(0)|^2$, полученных из экспериментальных данных ЛНС, приводит к существенно разной роли октетного механизма для χ_{c1} и χ_{c2} мезонов. Так, сечение рождения χ_{c1} мезонов определяется в основном синглетным вкладом, тогда как для χ_{c2} мезонов октетный механизм рождения является более значимым

	$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\psi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\psi B^5}$
A0	1.16	0.0	$(2.5 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	$(1.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}$
JH'2013 set 1	1.16	0.0	$(4.2 \pm 0.9) \cdot 10^{-4}$	$(2.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}$
JH'2013 set 2	1.16	0.0	$(1.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}$	$(2.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}$

Таблица 3: Значения непертурбативных матричных элементов J/ψ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [293, 294], ATLAS [248] и LHCb [90] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

(см. рис. 45).

Полученные значения непертурбативных матричных элементов, а также волновых функций χ_c частиц были использованы при вычислении вкладов в сечения рождения J/ψ и η_c мезонов от распадов $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ и $h_c \rightarrow \eta + \gamma$ соответственно.

4.4.3 J/ψ и η_c мезоны

Как было подчеркнуто выше, из соотношений симметрии HQSS (129) — (131) следует, что определение значений непертурбативных матричных элементов J/ψ и η_c мезонов должно быть проведено в рамках одной процедуры. Для этого мы использовали [296, 312] экспериментальные данные для распределений J/ψ мезонов по поперечному импульсу, полученные коллаборациями CMS [293, 294] и ATLAS [248] в pp столкновениях на коллайдере LHC при $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ, а также недавние данные коллаборации LHCb для распределений по поперечному импульсу η_c мезонов при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ [90]. Все данные были получены при $p_T \geq 8$ ГэВ, что соответствует области применимости гипотезы факторизации (121) нерелятивистской КХД. Во всех численных расчетах были учтены вклады распадов $\psi' \rightarrow J/\psi + X$, $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ и $h_c \rightarrow \eta_c + \gamma$, при этом принималось, что $B(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.05961$, $B(\psi' \rightarrow J/\psi + X) = 0.614$, $B(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.339$, $B(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.192$ и $B(h_c \rightarrow \eta_c + \gamma) = 0.51$ [216]. Вклады от распадов χ_{c0} не учитывались ввиду их незначительности.

Аналогично измерениям сечений рождения ψ' мезонов, в работах коллаборации CMS [293, 294] диапазон изменения быстроты J/ψ , $|y| < 1.2$, был разбит на 4 равных интервала, в каждом из которых были измерены распределения по поперечному импульсу. Более широкий диапазон изменения быстроты J/ψ в экспериментах [248] коллаборации ATLAS, $|y| < 2$, был разбит на 8 равных интервалов. Коллаборацией LHCb распределения по поперечному импульсу η_c мезонов были измерены в пределах одной широкой области, $2 < y < 4.5$ [90]. Как и ранее, для уменьшения влияния случайных ошибок процедура определения непертурбативных матричных элементов [296, 312, 313] была проведена во всех интервалах быстрот, при этом каждое из полученных значений рассматривалось как результат независимого ”измерения”, а в

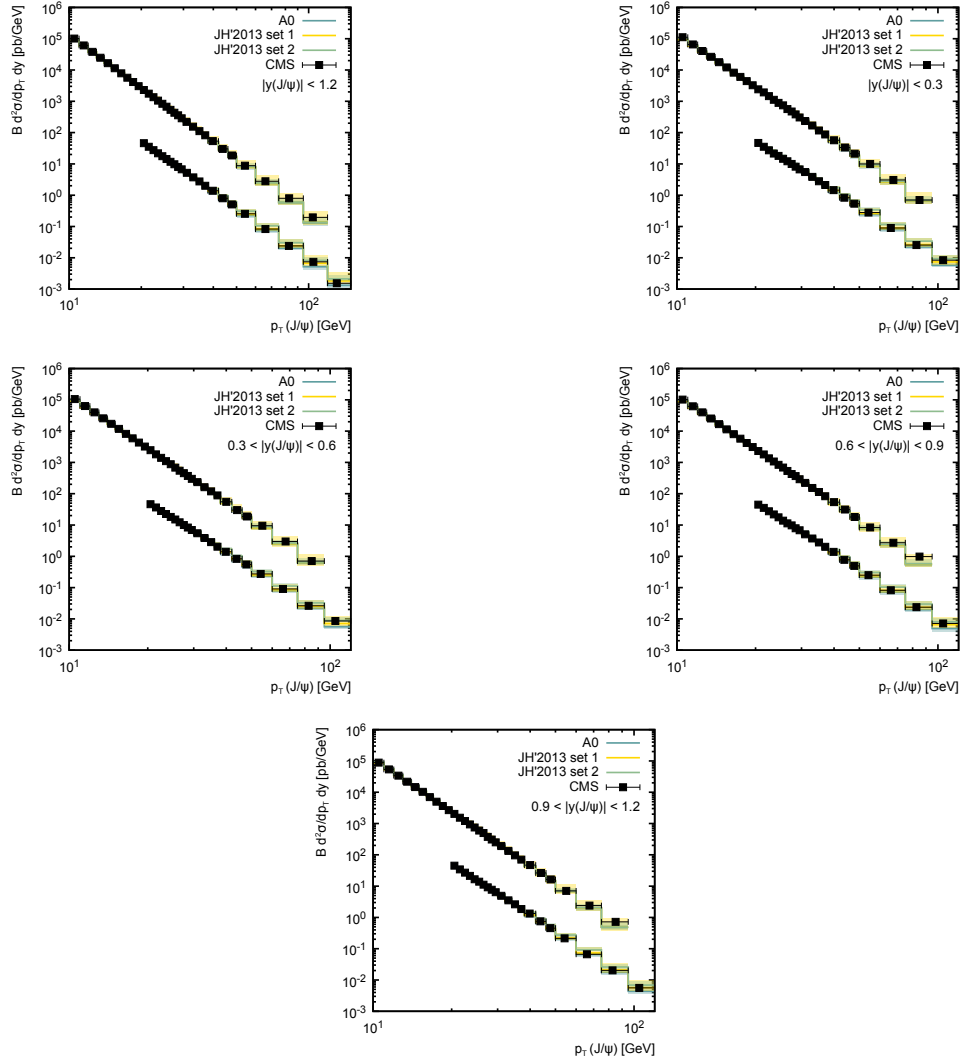


Рис. 48: Распределения по поперечному импульсу J/ψ мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, умножены на 100. Экспериментальные данные коллаборации CMS [293, 294].

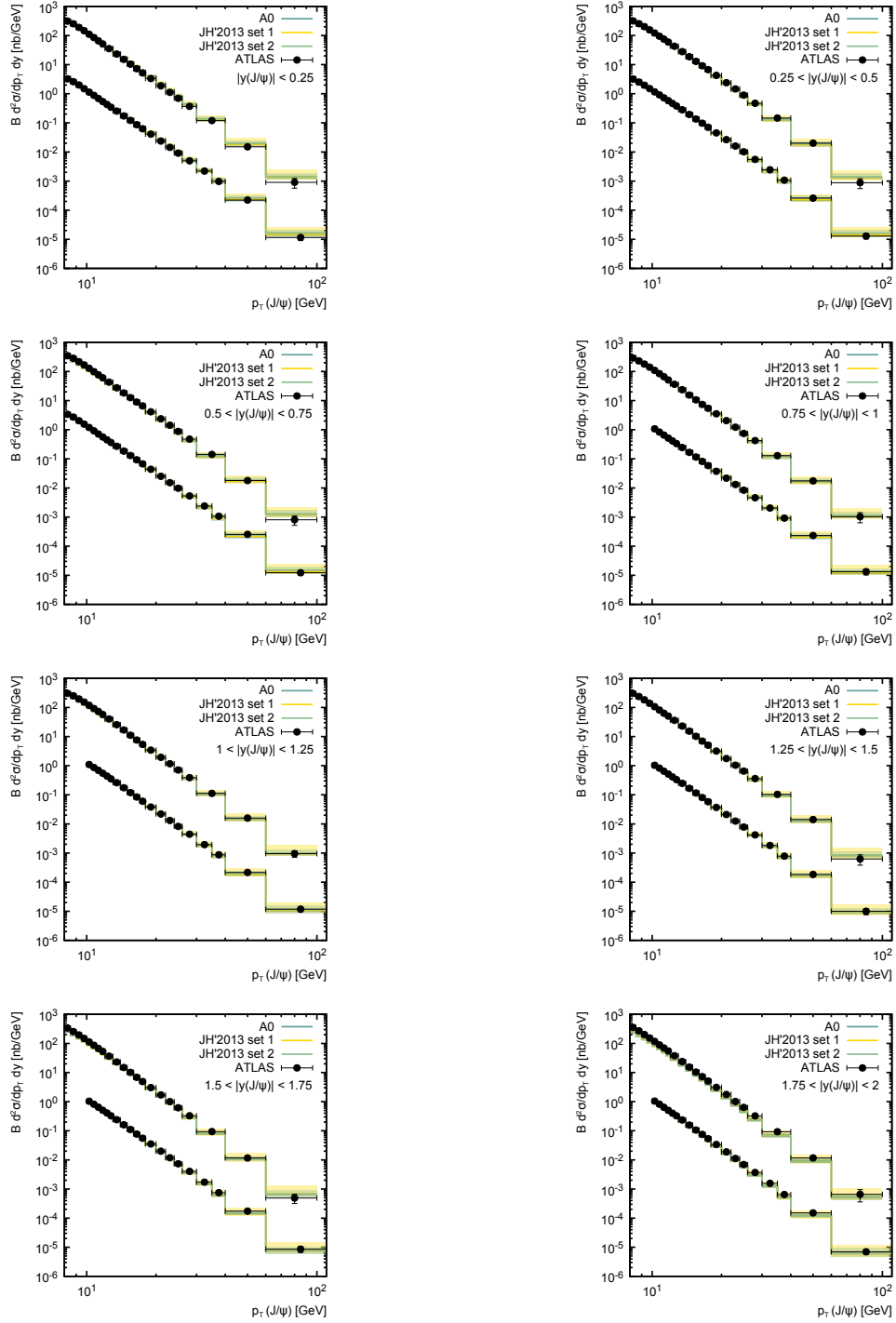


Рис. 49: Распределения по поперечному импульсу J/ψ мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 48. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, умножены на 100. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [248].

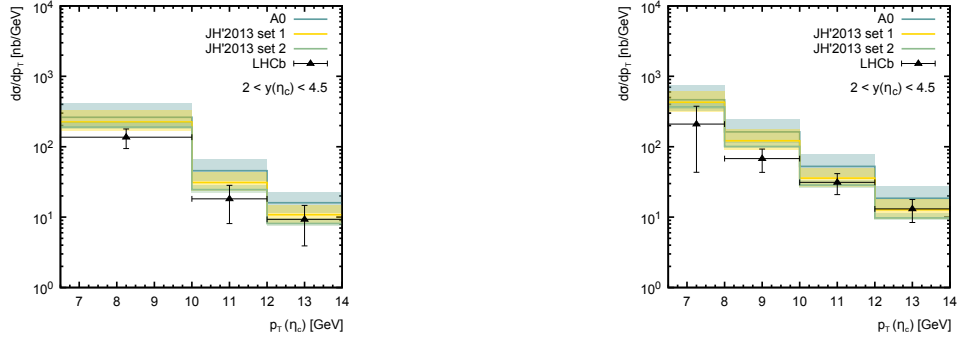


Рис. 50: Распределения по поперечному импульсу η_c мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (слева) и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ (справа). Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 48. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [90].

качестве окончательного результата принималось их среднее значение. Оценка погрешностей также производилась с помощью распределения Стьюдента, где коэффициент надежности P , как обычно, полагался равным $P = 95\%$. Необходимым дополнительным условием для всех непertурбативных матричных элементов являлось требование их положительной определенности, что отвечает физическим переходам согласно (158) — (160).

Полученные численные значения непertурбативных матричных элементов J/ψ мезонов приведены в таблице 3 для некоторых TMD распределений глюонов в протоне. Непertурбативные матричные элементы η_c мезонов могут быть легко получены с помощью соотношений симметрии HQSS (129) — (131). Предсказания для распределений J/ψ и η_c мезонов по поперечному импульсу при $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ представлены на рис. 48 — 50, где для иллюстрации были использованы глюонные распределения A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. Как и ранее, закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Как легко видеть, наши результаты хорошо описывают экспериментальные данные LHC как для J/ψ , так и для η_c мезонов по форме и абсолютной величине во всех интервалах быстрот при разных энергиях. Подчеркнем, что такого одновременного согласия с данными LHC для поперечных импульсов J/ψ и η_c мезонов не удастся достигнуть в рамках NLO-приближения нерелятивистской КХД [91]. Значения $\chi^2/d.o.f.$ составляют 2.29, 2.43 и 3.93 для распределений глюонов A0, JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. Отметим, что аналогичная степень согласия результатов расчетов и экспериментальных данных LHC достигается также при использовании других глюонных распределений. Кроме того, неопределенности наших вычислений сравнимы с неопределенностями расчетов в NLO-приближении нерелятивистской КХД.

4.5 Поляризационные свойства чармониев

Как известно, поляризационные свойства векторных S -волновых мезонов $\mathcal{Q}$ могут

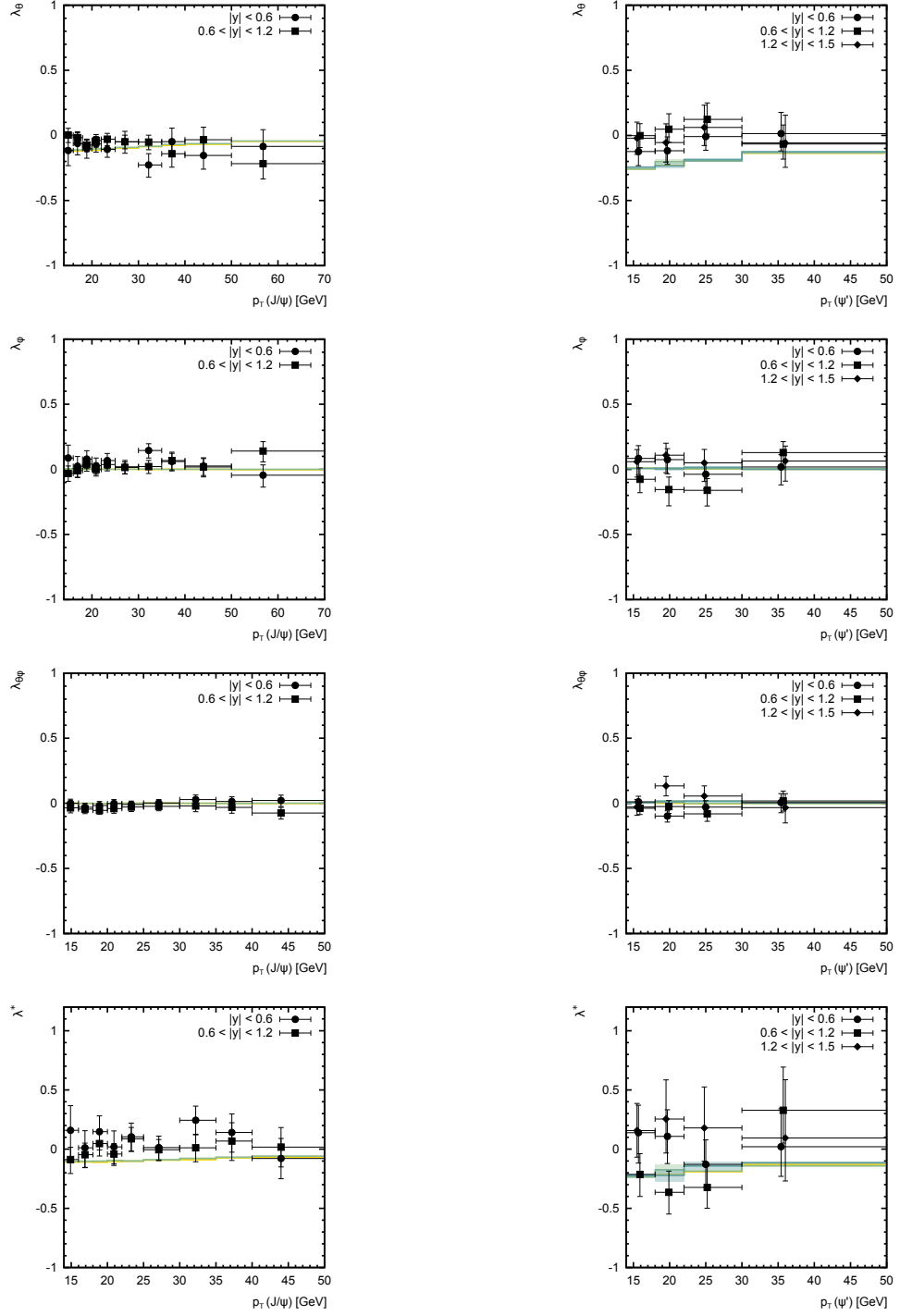


Рис. 51: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в системе Коллинза-Сопера, рассчитанная для J/ψ и ψ' мезонов (слева и справа соответственно) при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Желтые, голубые и зеленые гистограммы отвечают предсказаниям, полученным в области $|y| < 0.6$, $0.6 < |y| < 1.2$ и $1.2 < |y| < 1.5$. В расчетах была использована TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2. Экспериментальные данные коллаборации CMS [89].

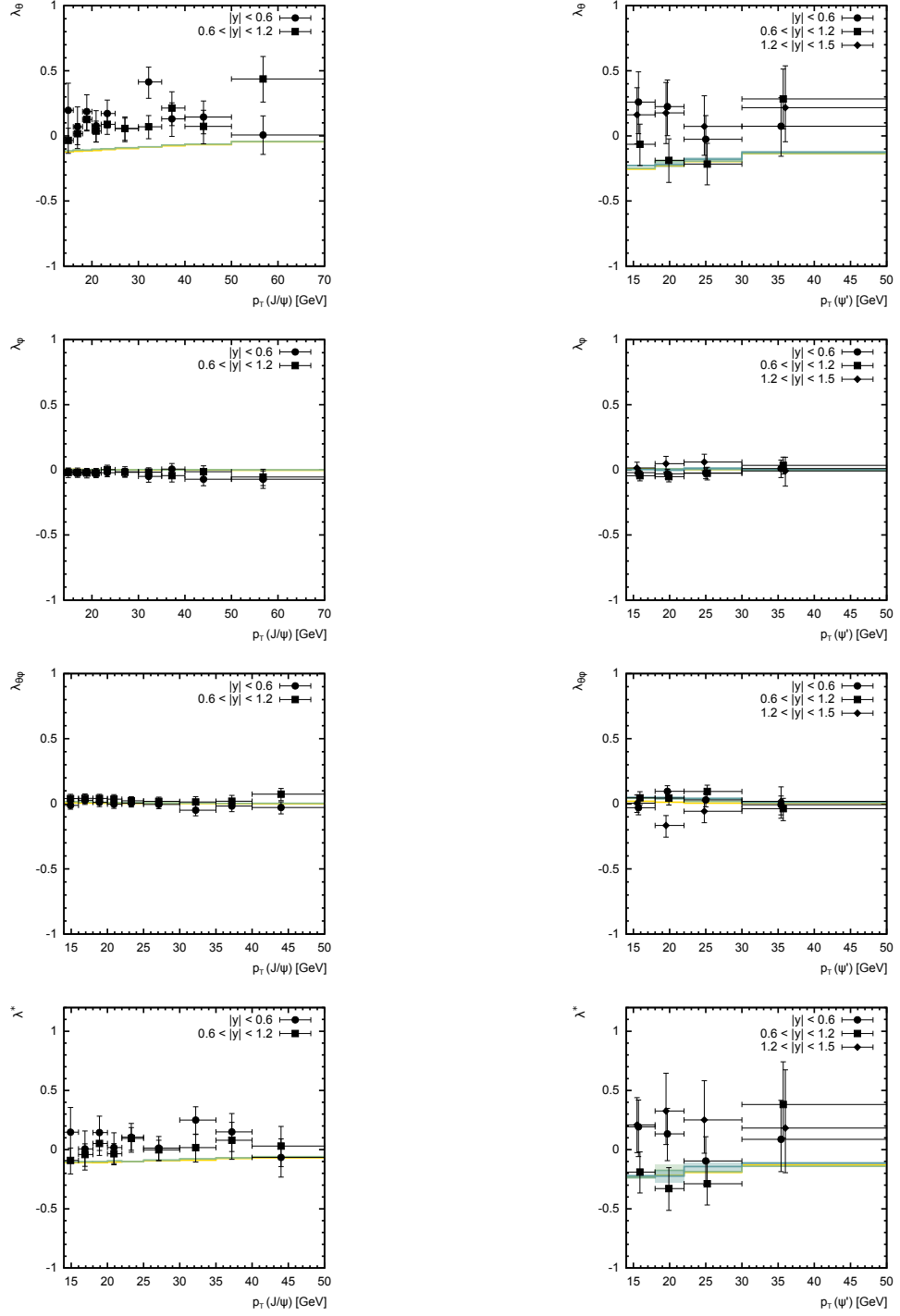


Рис. 52: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в спиральной системе, рассчитанная для J/ψ и ψ' мезонов (слева и справа соответственно) при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 51. Экспериментальные данные коллаборации CMS [89].

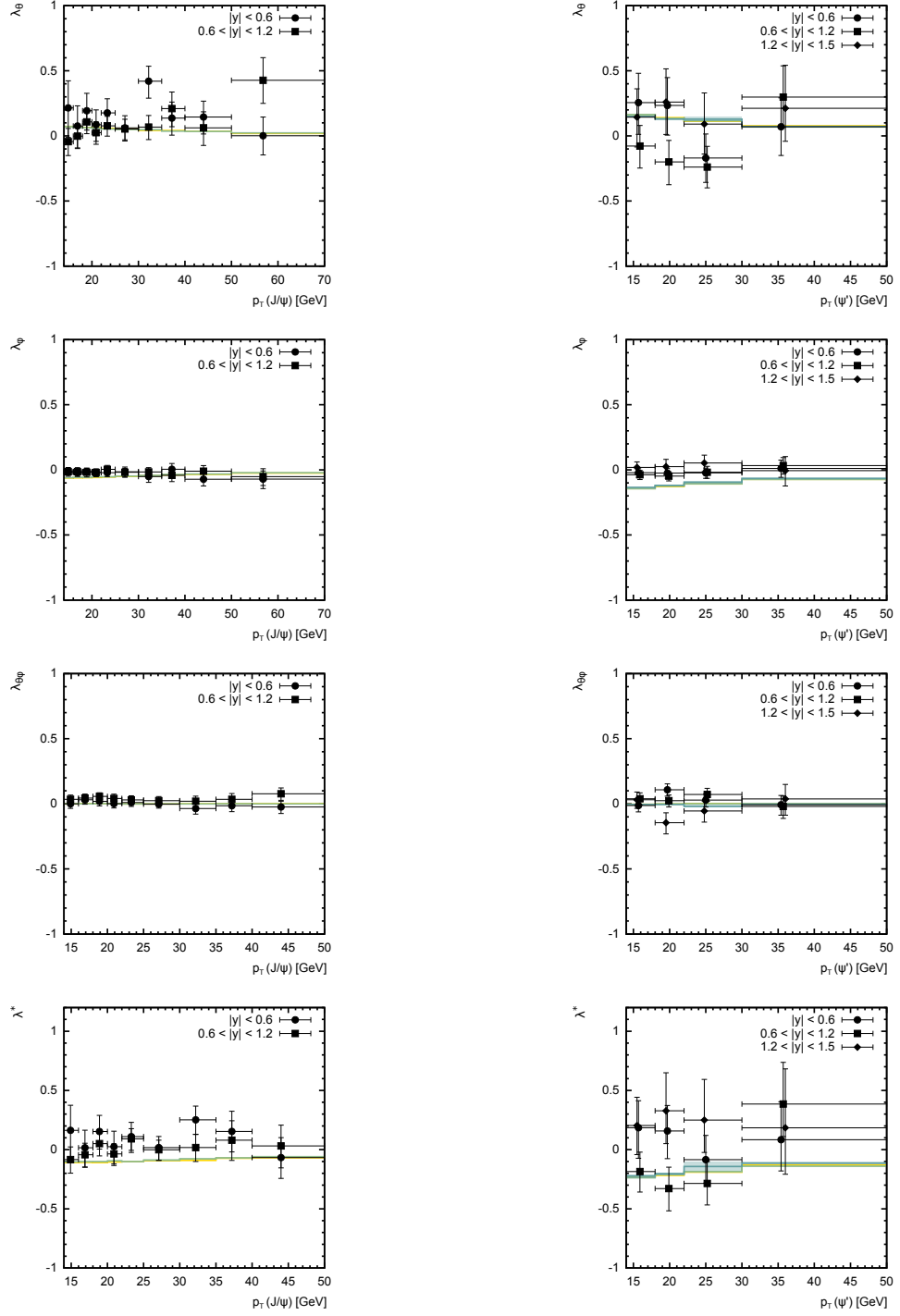


Рис. 53: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в перпендикулярной спиральной системе, рассчитанная для J/ψ и ψ' мезонов (слева и справа соответственно) при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 51. Экспериментальные данные коллаборации CMS [89].

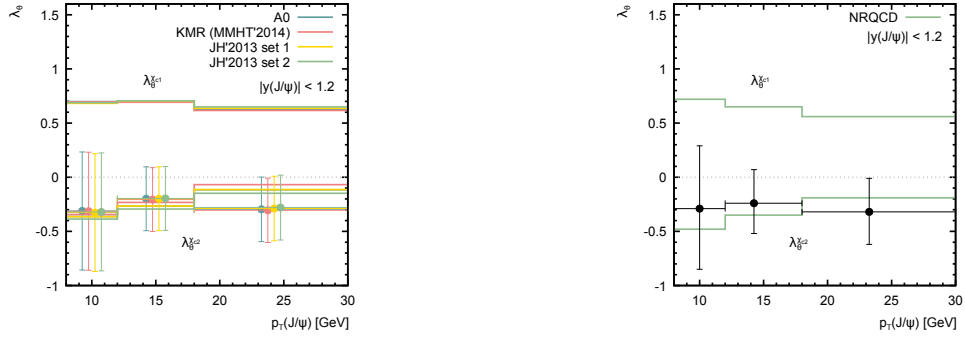


Рис. 54: Значения поляризационных параметров $\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}}$, определенные в соответствии с измеренными корреляциями (166) — (168) при вычисленных значениях $\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}$ (слева) или предсказанных в рамках нерелятивистской КХД (справа). Последние взяты из экспериментальной работы [303]. Данные коллаборации CMS [303].

быть описаны тремя независимыми параметрами λ_{θ} , λ_{ϕ} и $\lambda_{\theta\phi}$, которые связаны с угловыми распределениями лептонов в процессе распада $\mathcal{Q} \rightarrow l^+l^-$ (в системе покоя кваркония $\mathcal{Q}$):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta^* d\phi^*} \sim \frac{1}{3 + \lambda_{\theta}} (1 + \lambda_{\theta} \cos^2 \theta^* + \lambda_{\phi} \sin^2 \theta^* \cos 2\phi^* + \lambda_{\theta\phi} \sin 2\theta^* \cos \phi^*), \quad (170)$$

где θ^* и ϕ^* — полярный и азимутальный углы конечного лептона. Для исследования поляризационных характеристик J/ψ и ψ' мезонов была вычислена зависимость этих параметров от поперечного импульса и проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными коллаборацией CMS при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [89]. Кроме того, было проверено согласие рассчитанных ранее значений $\lambda_{\theta}^{\chi_{c1}}$ и $\lambda_{\theta}^{\chi_{c2}}$ с установленными соотношениями (166) — (168) при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ [303]. Во всех этих расчетах использовались определенные выше значения непертурбативных матричных элементов J/ψ , ψ' и χ_{cJ} мезонов. Сравнение с данными коллаборации ЛНСб [314,315] для поляризационных параметров J/ψ и ψ' не проводилось, поскольку эти данные были получены в области достаточно небольших поперечных импульсов, $p_T < 14$ ГэВ.

Результаты наших расчетов, выполненных в разных системах отсчета (Коллинза-Сопера, спиральной и перпендикулярной спиральной системах) приведены на рис. 51 — 53. Эти системы отсчета отличаются друг от друга направлением оси OZ в системе покоя распадающейся частицы: в системе Коллинза-Сопера ось OZ является биссектрисой угла, образованного сталкивающимися протонами; направление оси OZ в спиральной системе совпадает с импульсом кваркония в лабораторной системе отсчета; наконец, в перпендикулярной спиральной системе ось OZ ортогональна направлению OZ в системе Коллинза-Сопера и лежит в плоскости, образованной импульсами начальных протонов. Во всех случаях направление оси OY совпадает с направлением векторного произведения импульсов протонов или противоположно ему (для

положительных и отрицательных быстрот кваркония). Для определения λ_θ , λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$ в соответствии с (170) был использован алгоритм программы GNUPLOT [292]. Как видно, полученное значение параметра λ_θ при $p_T \sim 15$ ГэВ равно примерно $\lambda_\theta \sim -0.2$ в системе Коллинза-Сопера и спиральной системе и стремится к нулю с ростом поперечного импульса как для J/ψ , так и для ψ' мезонов. Остальные параметры также близки к нулю. В перпендикулярной спиральной системе наши вычисления дают практически нулевые значения для λ_θ , λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$ во всей области поперечных импульсов, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Также хорошо согласуются с данными (в пределах экспериментальных ошибок) предсказания для параметра $\lambda^* = (\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)/(1 - \lambda_\phi)$, который не зависит от выбора системы отсчета [316].

Следует подчеркнуть, что полученные результаты практически не зависят от выбора TMD функций распределения глюонов, энергетических масштабов и других параметров расчетов, а являются следствием использования амплитуд (158) — (160) и механизма [96]. Использование обычных ковариантных выражений (151) — (154) и пренебрежение импульсом одного или нескольких глюонов, испускаемых в процессе перехода пары тяжелых кварков из октетного в синглетное состояние, приводит к продольной поляризации векторных мезонов в рамках синглетного механизма [317, 318] и значительной поперечной поляризации в рамках доминирующего при больших поперечных импульсах $^3S_1^{(8)}$ октетного механизма рождения [80, 83, 286–288]. Таким образом, стандартные приближения и упрощения, часто используемые в нерелятивистской КХД, приводят к значительной степени поляризации J/ψ и ψ' мезонов в области больших p_T , что противоречит экспериментальным данным коллаборации CMS [89].

Что касается P -волновых чармониев, то полученные значения параметров $\lambda_\theta^{\chi_{c1}}$ и $\lambda_\theta^{\chi_{c2}}$ согласуются с установленными [303] соотношениями между ними (166) — (168) в пределах ошибок измерений и неопределенностей вычислений, как видно из рис. 54. Здесь наши результаты с большой степенью точности совпадают с предсказаниями нерелятивистской КХД [95] (в NLO-приближении).

4.6 Определение значений непертурбативных матричных элементов боттомониев

4.6.1 $\Upsilon(3S)$ и $\chi_{bJ}(3P)$ мезоны

Экспериментальные данные для распределений $\Upsilon(3S)$ мезонов по поперечному импульсу были получены коллаборациями CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [322, 323] на коллайдере LHC при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Алгоритм определения значений непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(3S)$ мезонов из этих данных во многом похож на изложенный выше алгоритм определения непертурбативных мат-

	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon [{}^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon [{}^1S_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon [{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon [{}^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$
A0	3.22	0.0	0.018 ± 0.001	0.0
JH'2013 set 1	3.22	0.0	0.007 ± 0.002	0.09 ± 0.03
JH'2013 set 2	3.22	0.0	0.017 ± 0.003	0.05 ± 0.03
KMR (NNPDF3.1 LO)	3.22	0.0	0.006 ± 0.001	0.073 ± 0.006

Таблица 4: Значения непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(3S)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$
A0	2.84	0.016 ± 0.003
JH'2013 set 1	2.84	0.009 ± 0.001
JH'2013 set 2	2.84	0.016 ± 0.003
KMR (NNPDF3.1 LO)	2.84	0.005 ± 0.001

Таблица 5: Значения непертурбативных матричных элементов $\chi_{b0}(3P)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

ричных элементов J/ψ мезонов, поскольку в обоих случаях необходимо учитывать вклады от радиационных распадов более тяжелых состояний. В случае $\Upsilon(3S)$ мезонов нужно учитывать значительный (порядка 40%) вклад от распада $\chi_{bJ}(3P) \rightarrow \Upsilon(3S) + \gamma$ [321]. Ситуация несколько осложняется отсутствием экспериментальных данных для распределений $\chi_{bJ}(3P)$ по поперечному импульсу, из анализа которых можно было бы непосредственно определить численные значения непертурбативных матричных элементов, необходимых для учета вкладов от распадов $\chi_{bJ}(3P)$. Однако их можно получить косвенным путем, используя данные коллаборации LHCb для отношений сечений $\chi_{bJ}(3P)$ и $\Upsilon(3S)$ мезонов в зависимости от поперечного импульса при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ [321]:

$$R_{\Upsilon(nS)}^{\chi_{bJ}(mP)} = \sum_{J=0}^2 \frac{\sigma(pp \rightarrow \chi_{bJ}(mP) + X)}{\sigma(pp \rightarrow \Upsilon(nS) + X)} \times B(\chi_{bJ}(mP) \rightarrow \Upsilon(nS) + \gamma). \quad (171)$$

Отметим, что вклад в сечение рождения $\Upsilon(3S)$ от распадов $\chi_{bJ}(3P)$ не был учтен в работах [84, 85, 87, 318, 324].

Процедура определения значений непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(3S)$

и $\chi_{bJ}(3P)$ мезонов из экспериментальных данных [294, 319, 320] с учетом отношений сечений [321] состоит в следующем [325]. Во-первых, поскольку вклады в сечение рождения $\Upsilon(3S)$ мезонов от механизма прямого рождения $\Upsilon(3S)[^3S_1^{(8)}]$ и распада $\chi_b(3P)[^3S_1^{(8)}]$ имеют практически одинаковую форму распределений по поперечному импульсу, то из данных ЛНС мы можем определить не сами $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(3S)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(3P)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$, а только их линейную комбинацию $M_{\Upsilon(3S)}^{\chi_b(3P)}$:

$$M_{\Upsilon(nS)}^{\chi_b(mP)} = \langle \mathcal{O}^{\Upsilon(nS)}[^3S_1^{(8)}] \rangle + r_{\Upsilon(nS)}^{\chi_b(mP)} \langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(mP)}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \quad (172)$$

где величина

$$r_{\Upsilon(nS)}^{\chi_b(mP)} = \sum_{J=0}^2 (2J+1) B(\chi_{bJ}(mP) \rightarrow \Upsilon(nS) + \gamma) \times \frac{d\sigma[\chi_{bJ}(mP), ^3S_1^{(8)}]/dp_T}{d\sigma[\Upsilon(nS), ^3S_1^{(8)}]/dp_T}, \quad (173)$$

$r_{\Upsilon(3S)}^{\chi_b(3P)} \simeq 0.654 \pm 0.005$ практически не зависит от TMD функции распределения глюонов в протоне в широкой области изменения p_T , $10 < p_T < 100$ ГэВ. После этого, используя экспериментально измеренные [321] отношения $R_{\Upsilon(3S)}^{\chi_b(3P)}$, искомые значения $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(3S)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(3P)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$ могут быть определены с помощью выражений (171) и (172). Для уменьшения влияния случайных ошибок процедура определения линейной комбинации $M_{\Upsilon(3S)}^{\chi_b(3P)}$ была проведена во всех интервалах быстрот, в которых были измерены распределения $\Upsilon(3S)$ мезонов по поперечному импульсу. Отметим, что при этом мы учитывали только область достаточно больших $p_T \geq 10$ ГэВ. Каждое из полученных значений рассматривалось как результат независимого "измерения", в качестве конечного результата принималось их среднее значение. Как и ранее, оценка соответствующих погрешностей производилась с помощью распределения Стюдента, где коэффициент надежности P полагался равным $P = 80\%$. Необходимым условием для всех непertурбативных матричных элементов являлось требование их положительной определенности согласно (158) — (160). В расчетах были использованы значения для относительных вероятностей распада: $B(\chi_{b1}(3P) \rightarrow \Upsilon(3S) + \gamma) = 0.1044$ и $B(\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(3S) + \gamma) = 0.0611$, вычисленные [88] в предположении, что полная ширина распада $\chi_{bJ}(mP)$ мезонов не зависит от m . Кроме того, мы принимали $B(\Upsilon(3S) \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 0.0218$ [216] и пренебрегали вкладом от распадов $\chi_{b0}(3P)$ ввиду его малости.

Полученные численные значения $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(3S)}[^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(3S)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(3S)}[^3P_0^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(3P)}[^3S_1^{(8)}] \rangle$ приведены в таблицах 4 и 5 для некоторых TMD функций распределения глюонов в протоне. Предсказания для распределений $\Upsilon(3S)$ мезонов по поперечному импульсу при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 13 ТэВ и отношений сечений $R_{\Upsilon(3S)}^{\chi_b(3P)}$ при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ представлены на рис. 55 — 57. В расчетах были использованы глюонные распределения A0, JH'2013 set 1 и KMR, при этом закрашенные области отве-

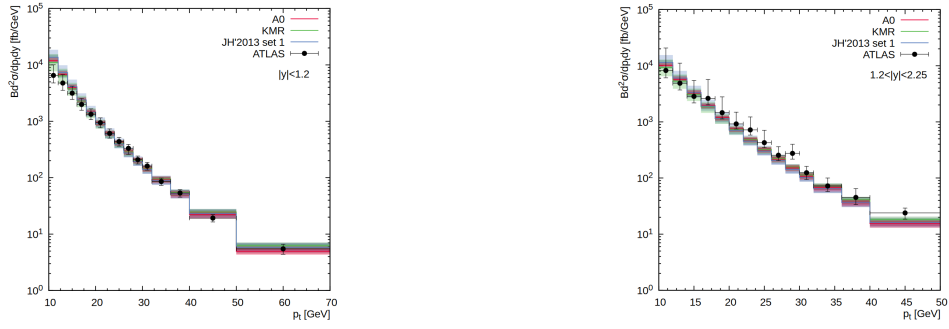


Рис. 55: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(3S)$ мезонов в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [320].

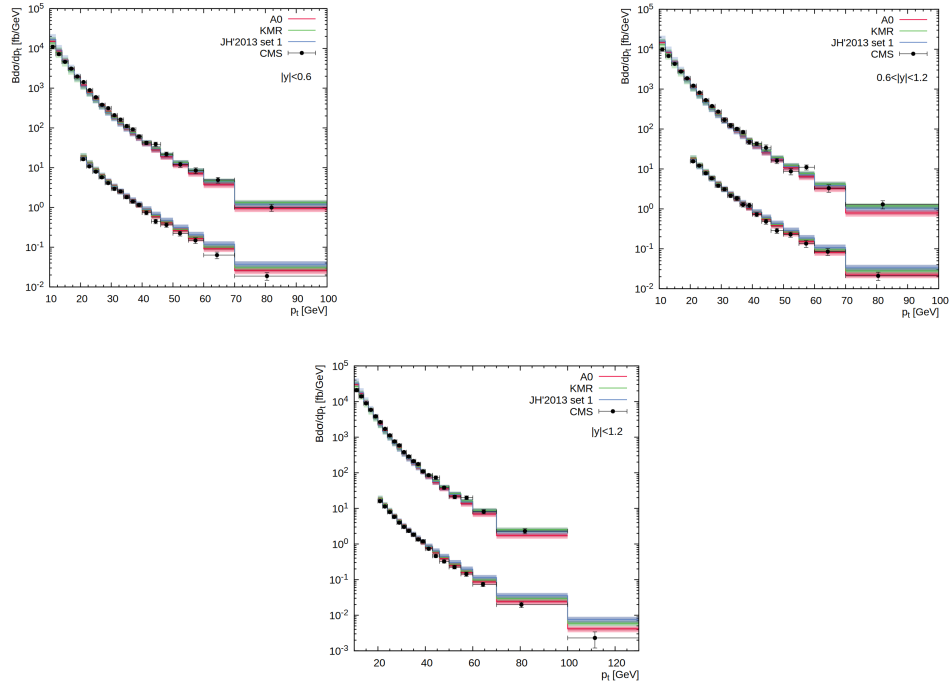


Рис. 56: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(3S)$ мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, умножены на 10^{-2} . Экспериментальные данные коллаборации CMS [294, 319].

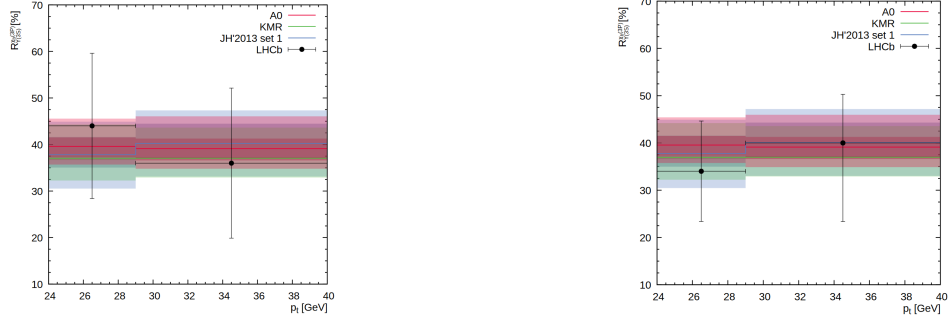


Рис. 57: Отношения сечений $R_{\Upsilon(3S)}^{b(3P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(3S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

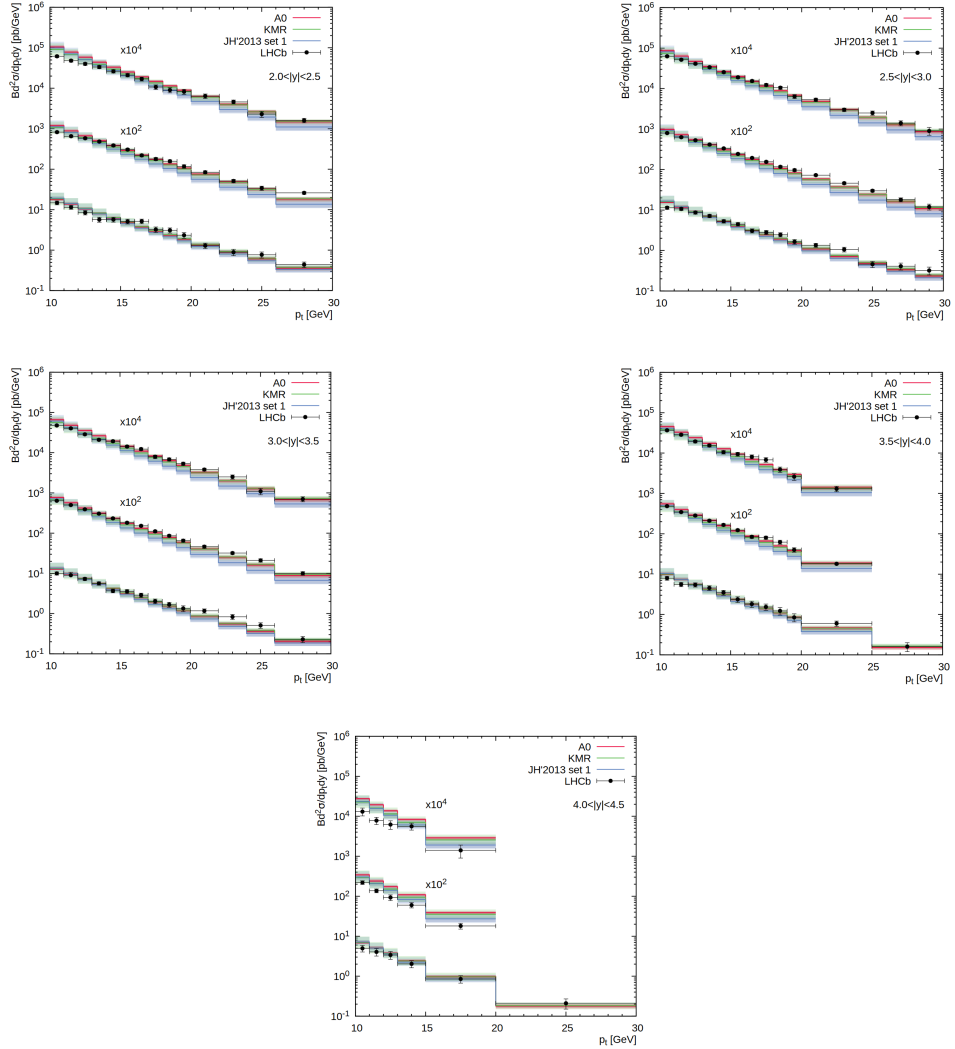


Рис. 58: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(3S)$ мезонов в pp столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху), 8 ТэВ (в середине) и 13 ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [322, 323].

	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^1S_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$
A0	4.15	0.0	0.024 ± 0.004	0.014 ± 0.009
JH'2013 set 1	4.15	0.0	0.007 ± 0.007	0.19 ± 0.05
JH'2013 set 2	4.15	0.0	0.008 ± 0.007	0.15 ± 0.05
KMR (NNPDF3.1 LO)	4.15	0.0	0.006 ± 0.0007	0.14 ± 0.02

Таблица 6: Значения непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(2S)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

чают оценкам неопределенностей вычислений. Видно, что наши результаты хорошо описывают экспериментальные данные коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321] как по форме, так и по абсолютной величине во всех интервалах быстрой. Следует подчеркнуть, что полученные значения непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(3S)$ и $\chi_{bJ}(3P)$ мезонов не противоречат данным LHCb [322, 323], которые не учитывались при их определении (см. рис. 58). Величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 2.35, 4.22 и 2.59 для распределений A0, JH'2013 set 1 и KMR соответственно. Однако отметим, что экспериментальные данные коллабораций ATLAS [320] и CMS [319], полученные при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (без учета недавних измерений коллаборации CMS [294], выполненных при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ) могут быть описаны со значительно более лучшим $\chi^2/d.o.f. \sim 1$. Кроме того, теоретические неопределенности наших расчетов (порядка 30 – 40%) вполне сравнимы с неопределенностями вычислений в рамках NLO-приближения КХД.

4.6.2 $\Upsilon(2S)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезоны

Процедура определения значений непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(2S)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезонов [326] практически полностью повторяет описанную выше процедуру для $\Upsilon(3S)$ и $\chi_{bJ}(3P)$ частиц. Некоторое отличие заключается лишь в том, что в расчетах были дополнительно учтены вклады в сечение рождения $\Upsilon(2S)$ мезонов от распадов $\chi_{bJ}(3P) \rightarrow \Upsilon(2S) + \gamma$, $\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(2S) + X$ наряду с вкладом от от распада $\chi_{bJ}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S) + \gamma$. Их относительные вероятности $B(\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(3S) + \gamma) = 0.0368$, $B(\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(3S) + \gamma) = 0.0191$ были вычислены [88] в предположении, что полная ширина распада $\chi_{bJ}(mP)$ мезонов не зависит от m . В расчетах также использовались следующие значения: $B(\Upsilon(2S) \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 0.0193$, $B(\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(2S) + X) = 0.1060$, $B(\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S) + \gamma) = 0.1810$ и $B(\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S) + \gamma) = 0.0890$ [216]. Вклады от распадов $\chi_{b0}(2P)$ и $\chi_{b0}(3P)$ не учитывались ввиду их незначительности.

Как и ранее, с помощью алгоритма программы GNUPLOT [292] были определены значения непертурбативных матричных элементов $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(2S)}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(2S)}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle$ и,

	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle / \Gamma \Xi B^5$	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma \Xi B^3$
A0	2.61	0.0096 ± 0.0005
JH'2013 set 1	2.61	0.0061 ± 0.0004
JH'2013 set 2	2.61	0.020 ± 0.001
KMR (NNPDF3.1 LO)	2.61	0.003 ± 0.0003

Таблица 7: Значения непертурбативных матричных элементов $\chi_{b0}(2P)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

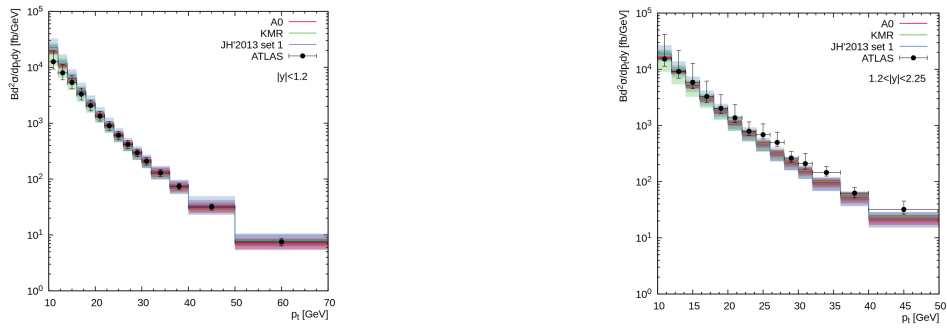


Рис. 59: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(2S)$ мезонов в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [320].

согласно (172), линейная комбинация $M_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(2P)}$ во всех интервалах быстрот, в которых коллаборациями CMS и ATLAS были выполнены измерения [294, 319, 320] распределений $\Upsilon(2S)$ мезонов по поперечному импульсу. Отметим, что учитывались только экспериментальные данные в области $p_T > 10$ ГэВ. Каждая из определенных таким образом величин рассматривалась как результат независимого ”измерения”, а их среднее значение принималось в качестве окончательного результата. Затем, используя вычисленное в соответствии с (173) значение $r_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(2P)} = 0.980 \pm 0.005$ (которое практически не зависит от TMD функции распределения глюонов) и данные коллаборации LHCb [321] для отношения сечений $R_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(2P)}$, были определены непертурбативные матричные элементы $\Upsilon(2S)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезонов. Как обычно, оценка погрешностей производилась с помощью распределения Стьюдента, где коэффициент надежности полагался равным $P = 80\%$.

Полученные численные значения $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(2S)} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(2S)} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(2S)} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(2P)} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ приведены в таблицах 6 и 7 для некоторых TMD глюонных плотностей. Соответствующие предсказания для распределений $\Upsilon(2S)$ мезонов по поперечному импульсу, а также для отношений сечений $R_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(2P)}$ и $R_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(3P)}$, рассчитанных при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ, представлены на рис. 59 — 62. Легко видеть, что наши результаты

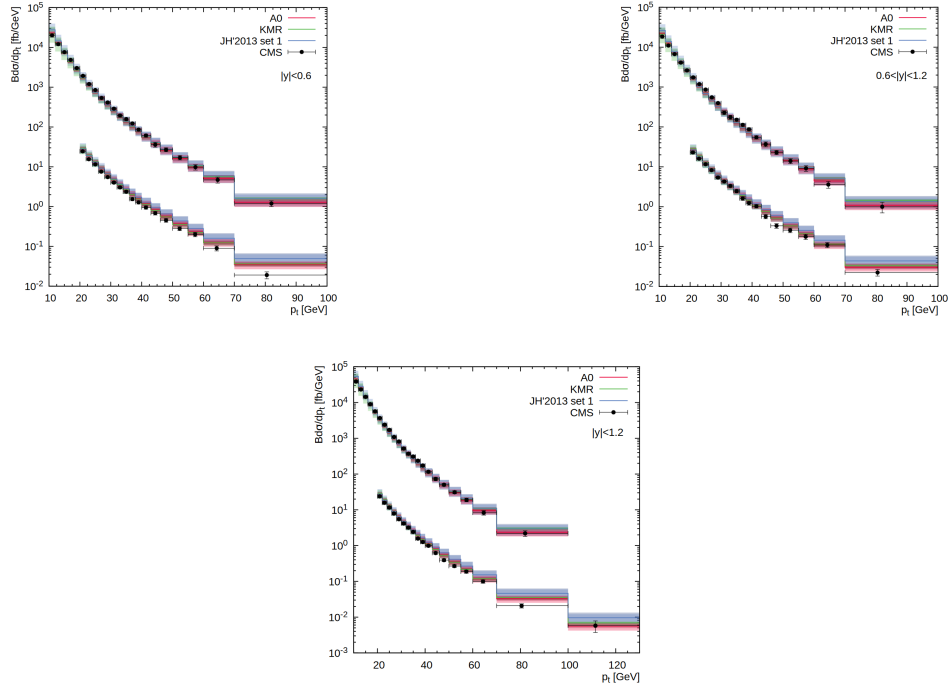


Рис. 60: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(2S)$ мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, умножены на 10^{-2} . Экспериментальные данные коллаборации CMS [294, 319].

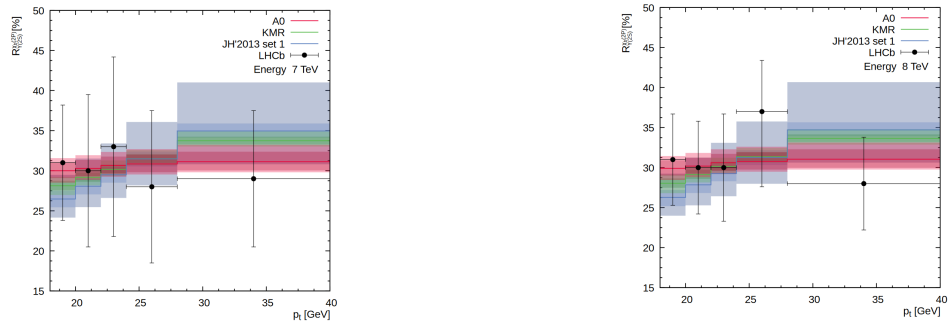


Рис. 61: Отношения сечений $R_{\Upsilon(2S)}^{\chi_b(2P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(2S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

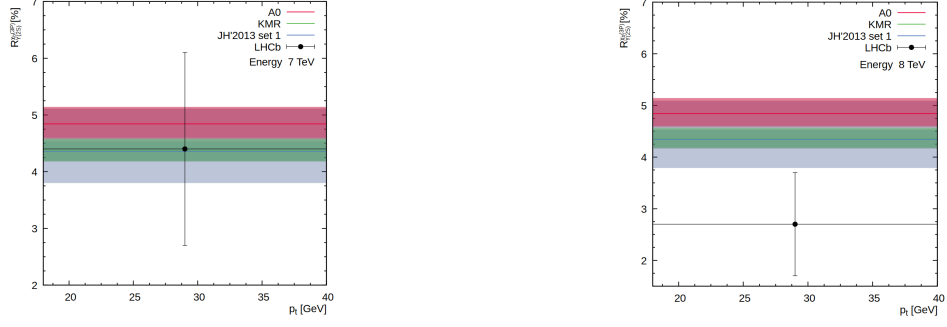


Рис. 62: Отношения сечений $R_{\Upsilon(2S)}^{b(3P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(2S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

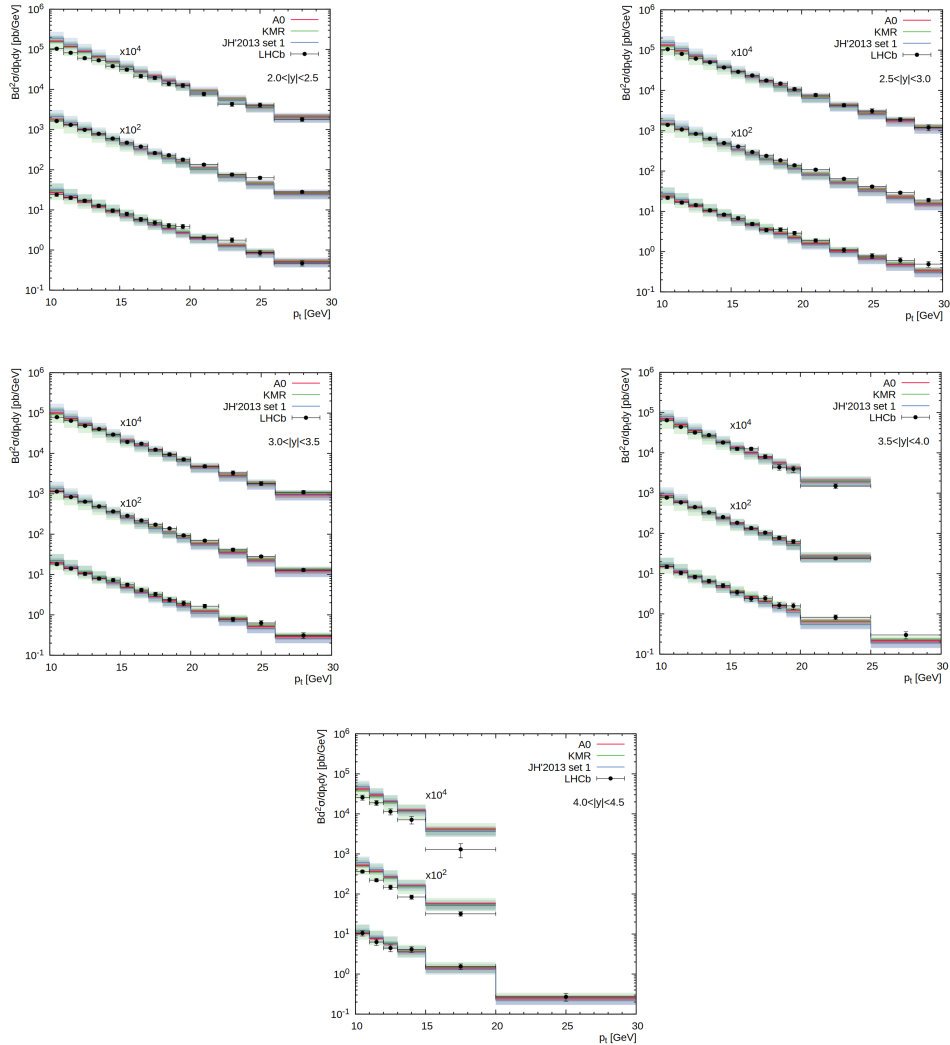


Рис. 63: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(2S)$ мезонов в pp столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху), 8 ТэВ (в середине) и 13 ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [322, 323].

	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3S_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^1S_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$	$\langle \mathcal{O}^\Upsilon[{}^3P_0^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$
A0	8.39	0.0	0.016 ± 0.006	0.07 ± 0.03
JH'2013 set 1	8.39	0.0	0.004 ± 0.002	0.2 ± 0.1
JH'2013 set 2	8.39	0.0	0.008 ± 0.003	0.2 ± 0.1
KMR (NNPDF3.1 LO)	8.39	0.0	0.003 ± 0.002	0.18 ± 0.06

Таблица 8: Значения непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(1S)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294, 319, 327], ATLAS [320] и LHCb [321, 328] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

хорошо согласуются с экспериментальными данными коллабораций CMS [294, 319], ATLAS [320] и LHCb [321], полученными в разных интервалах быстрот. Кроме того, определенные из этих данных непертурбативные матричные элементы $\Upsilon(2S)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезонов не противоречат данным коллаборации LHCb [322, 323], которые не были использованы при их извлечении (см. рис. 63). Для глюонных распределений A0, JH'2013 set 1 и KMR величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 2.72, 6.28 и 3.25. Однако следует отметить, что, как и в случае $\Upsilon(3S)$ мезонов, экспериментальные данные коллабораций ATLAS [320] и CMS [319], полученные при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (без учета последних данных коллаборации CMS [294]) могут быть описаны с заметно лучшими значениями $\chi^2/d.o.f.$, а именно 1.34, 2.84 и 1.62 соответственно.

4.6.3 $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезоны

Полученные ранее непертурбативные матричные элементы $\Upsilon(3S)$, $\Upsilon(2S)$, $\chi_{bJ}(3P)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ мезонов были использованы при определении значений непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезонов, поскольку распады более тяжелых состояний дают заметных вклад в сечение рождения $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$. В расчетах принималось, что $B(\Upsilon(1S) \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.0248$, $B(\Upsilon(2S) \rightarrow \Upsilon(1S) + X) = 0.2645$, $B(\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(1S) + X) = 0.0657$, $B(\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.352$, $B(\chi_{b2}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.18$, $B(\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.1153$ и $B(\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.077$ [216]. Относительные вероятности распадов $B(\chi_{b1}(3P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.0381$, $B(\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) = 0.0192$ были вычислены [88] в предположении, что полная ширина распада $\chi_{bJ}(mP)$ мезонов не зависит от m . Вклады от распадов $\chi_{b0}(1P)$, $\chi_{b0}(2P)$ и $\chi_{b0}(3P)$ не учитывались ввиду их незначительности.

Непертурбативные матричные элементы $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезонов были определены из условия наилучшего описания экспериментальных данных, полученных коллаборациями CMS [294, 319, 327], ATLAS [320] и LHCb [321, 328] в pp столкновениях на коллайдере LHC в области $p_T > 10$ ГэВ при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Для этого были использованы измерения распределений $\Upsilon(1S)$ частиц по поперечному

	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^5}$	$\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle / \Gamma_{\Xi B^3}$
A0	2.30	7.0 ± 3.0	2.4 ± 1.9	0.008 ± 0.002
JH'2013 set 1	2.30	11.0 ± 5.0	6.0 ± 4.0	0.002 ± 0.001
JH'2013 set 2	2.30	10.6 ± 4.9	5.1 ± 3.5	0.005 ± 0.003
KMR (NNPDF3.1 LO)	2.30	9.0 ± 2.0	6.0 ± 2.0	0.002 ± 0.001

Таблица 9: Значения непертурбативных матричных элементов $\chi_b(1P)$ мезонов, полученные из экспериментальных данных коллабораций CMS [294,319,327], ATLAS [320] и LHCb [321,328] для некоторых TMD глюонных распределений в протоне.

импульсу [294,319,320], а также экспериментальные данные для отношений сечений $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$ [327,328] и радиационных распадов $\chi_{bJ}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma$ [321]. При этом, как и в случае χ_{cJ} мезонов, значения волновых функций $\chi_{b1}(1P)$ и $\chi_{b2}(1P)$ предполагались не обязательно равными и также определялись из данных LHC (см. также [311]).

Метод определения значений непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезонов [329] в основном повторяет процедуру, примененную ранее для случаев $\Upsilon(3S)$, $\Upsilon(2S)$, $\chi_{bJ}(3P)$ и $\chi_{bJ}(2P)$ частиц. Так, из данных для распределений $\Upsilon(1S)$ по поперечному импульсу согласно (172) была определена линейная комбинация $M_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(1P)}$ во всех интервалах быстрот, в которых производились измерения, и найдено ее среднее значение. Расчеты показывают, что величина $r_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(1P)} = 1.743 \pm 0.010$, вычисленная в соответствии с (173), является постоянной в широкой кинематической области (поскольку вклады в сечение рождения $\Upsilon(1S)$ мезонов от механизма прямого рождения $\Upsilon(1S)[{}^3S_1^{(8)}]$ и распада $\chi_b(1P)[{}^3S_1^{(8)}]$ имеют практически одинаковую форму распределений по поперечному импульсу) и не зависит от используемой TMD функции распределения глюонов. Кроме того, в широкой области изменения поперечного импульса и быстрот являются постоянными отношения

$$r_1 = \frac{B(\chi_{b2}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) d\sigma[\chi_{b2}(1P), {}^3P_2^{(1)}]/dp_T}{B(\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) d\sigma[\chi_{b1}(1P), {}^3P_1^{(1)}]/dp_T} = 0.91 \pm 0.02 \quad (174)$$

и

$$r_2 = \frac{\sum_{J=0}^2 (2J+1) d\sigma[\Upsilon(1S), {}^3P_J^{(8)}]/dp_T}{B(\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S) + \gamma) d\sigma[\chi_{b1}(1P), {}^3P_1^{(1)}]/dp_T} = 104 \pm 2, \quad (175)$$

с помощью которых из данных коллабораций CMS [294,319] и ATLAS [320] для распределений по поперечному импульсу $\Upsilon(1S)$ мезонов может быть определена еще

одна линейная комбинация непертурбативных матричных элементов:

$$M_{r_1 r_2} = \langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}(1P)}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle + r_1 \langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}(1P)}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle + r_2 \langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle. \quad (176)$$

Действительно, форма распределений по поперечному импульсу у этих вкладов в сечение рождения $\Upsilon(1S)$ частиц практически одинакова. Отметим, что значения r_1 и r_2 также не зависят от TMD функций распределения глюонов в протоне. После этого, используя экспериментальные данные коллаборации LHCb [321] для отношений сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(1P)}$, мы можем определить численные значения матричных элементов $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(3P)}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, а также величину

$$M_{CS} = \langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}(1P)}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle + r_1 \langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}(1P)}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle. \quad (177)$$

Зная последнюю, можно легко получить значения $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}(1P)}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}(1P)}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle$ с помощью отношений сечений $R_{\chi_{b1}}^{\chi_{b2}} = \sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$, измеренных коллаборациями CMS [327] и LHCb [328]. Оценка соответствующих погрешностей производилась с помощью распределения Стьюдента, где коэффициент надежности полагался равным $P = 80\%$. Конечно, согласно (158) — (160), необходимым условием для всех непертурбативных матричных элементов являлось требование их положительной определенности.

Определенные таким образом значения непертурбативных матричных элементов $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\Upsilon(1S)}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(1P)}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle$, $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}(1P)}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}(1P)}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle$ приведены в таблицах 8 и 9 для некоторых TMD глюонных распределений в протоне. Видно, что предложенный выше способ определения волновых функций $\chi_{b1}(1P)$ и $\chi_{b2}(1P)$ мезонов из экспериментальных данных ЛНС приводит к их существенно разным значениям¹⁴. Так, из таблицы 9 следует, что отношение $\langle \mathcal{O}^{\chi_{b2}(1P)}[{}^3P_2^{(1)}] \rangle : \langle \mathcal{O}^{\chi_{b1}(1P)}[{}^3P_1^{(1)}] \rangle : \langle \mathcal{O}^{\chi_{b0}(1P)}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle \sim 2.6 : 4.8 : 1$, $1 : 3 : 1$ и $2.6 : 3.9 : 1$ для функций распределения глюонов JH'2013 set 1, A0 и KMR соответственно. Отличие от предсказаний потенциальных моделей для такого отношения с учетом числа степеней свободы (а именно, $5 : 3 : 1$) может быть связано с приближениями, которые используются при вычислении волновых функций связанных состояний в рамках таких моделей, а также с (возможной) значительной величиной поправок следующих порядков к волновым функциям $\chi_{b1}(1P)$ и $\chi_{b2}(1P)$ мезонов.

Предсказания для распределений $\Upsilon(1S)$ мезонов по поперечному импульсу при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 13 ТэВ, а также для отношений сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(1P)}$, $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(2P)}$ и $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(3P)}$, рассчитанных при $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ, представлены на рис. 64 — 70. Для иллюстрации были использованы TMD распределения глюонов A0, JH'2013 set 1 и KMR. Как и ранее, закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Легко видеть, что наши результаты достаточно хорошо описывают экспериментальные данные ЛНС как по форме, так и по абсолютной величине во всех

¹⁴Это согласуется с результатами, полученными ранее для χ_c мезонов.



Рис. 64: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(1S)$ мезонов в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [320].

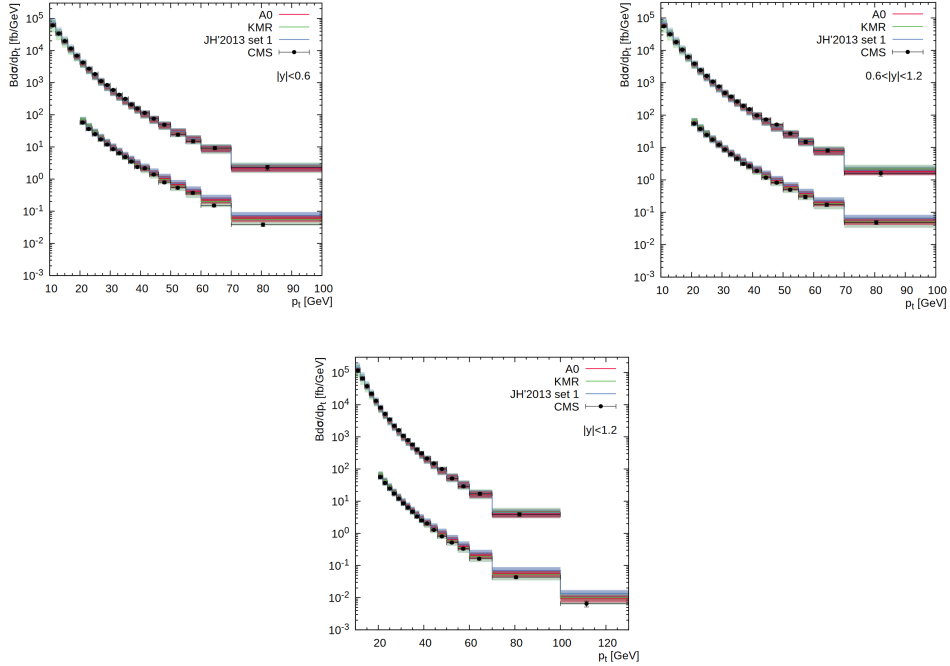


Рис. 65: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(1S)$ мезонов в pp столкновениях, рассчитанные при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Результаты, полученные при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, умножены на 10^{-2} . Экспериментальные данные коллаборации CMS [294, 319].

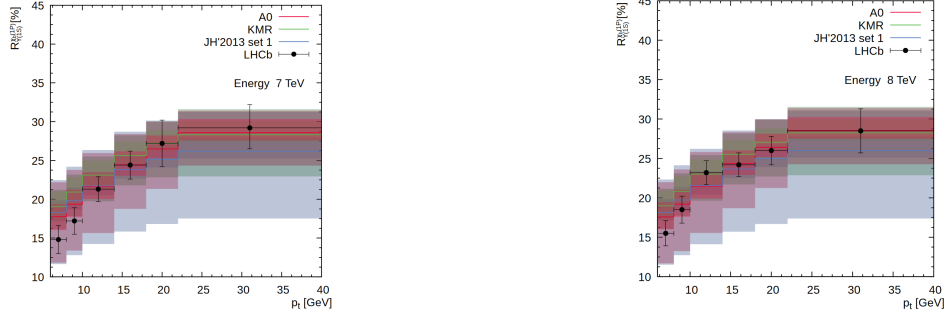


Рис. 66: Отношения сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{X_b(1P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(1S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

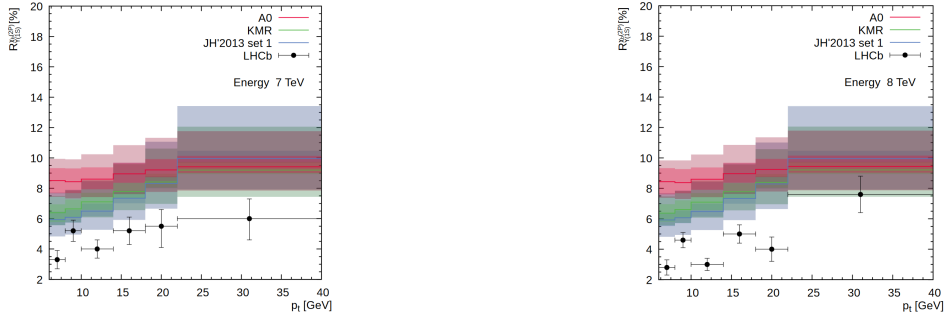


Рис. 67: Отношения сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{X_b(2P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(1S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

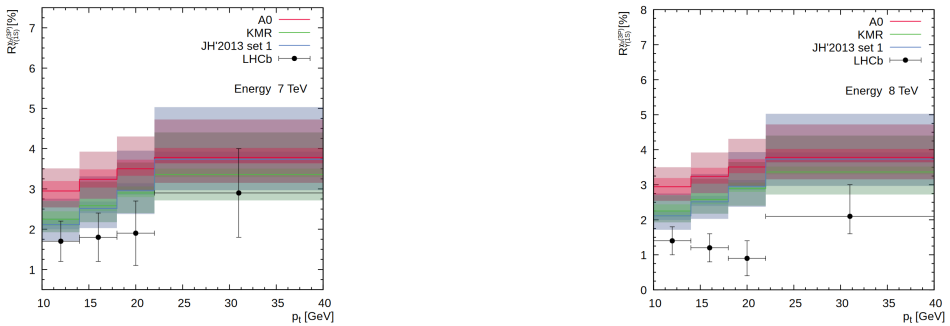


Рис. 68: Отношения сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{X_b(3P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(1S)$ мезонов при энергиях $\sqrt{s} = 7$ и 8 ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [321].

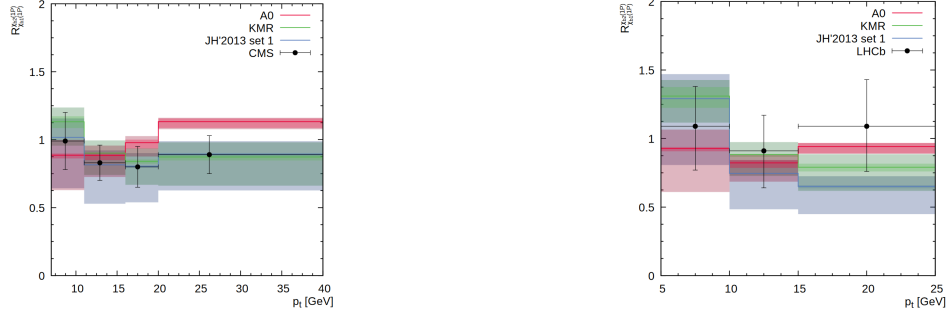


Рис. 69: Отношения сечений $R_{\chi_{b1}(1P)}^{\chi_{b2}(1P)}$ в зависимости от поперечного импульса $\Upsilon(1S)$ мезонов при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллабораций CMS [327] и LHCb [328].

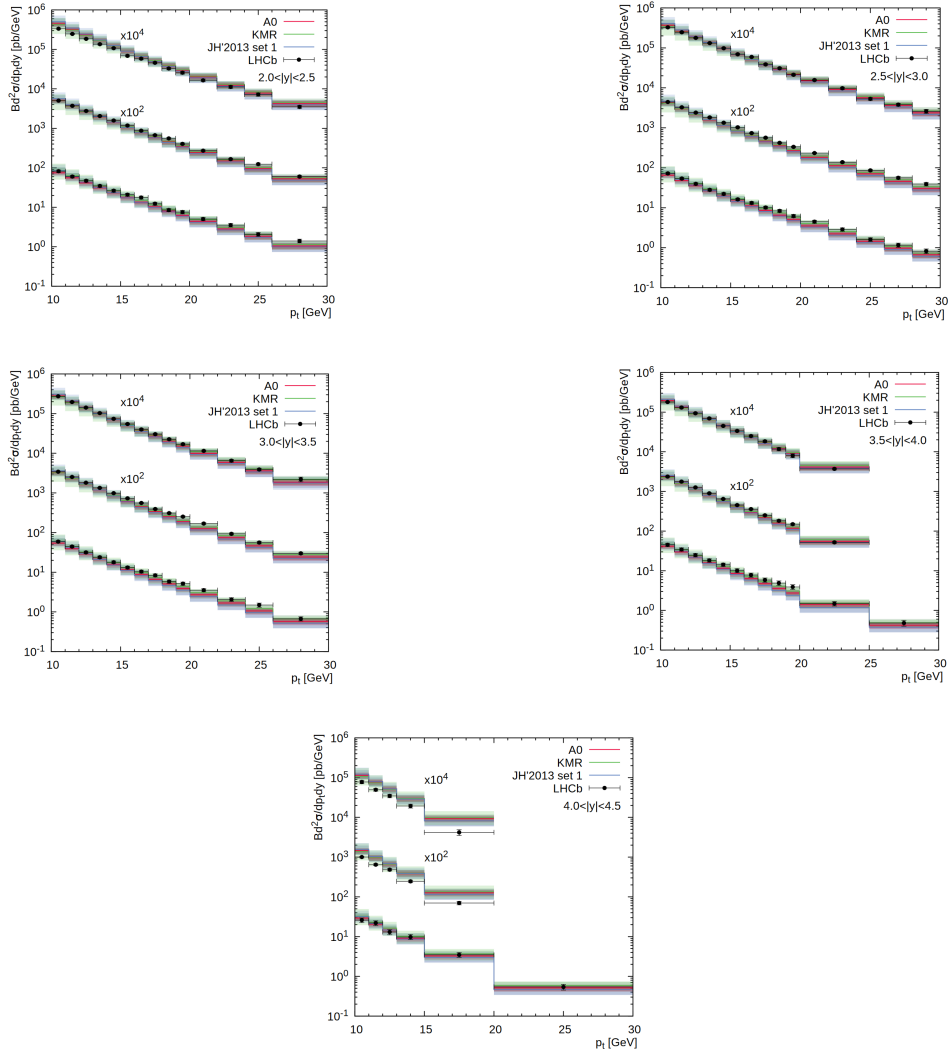


Рис. 70: Распределения по поперечному импульсу $\Upsilon(1S)$ мезонов в pp столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (вверху), 8 ТэВ (в середине) и 13 ТэВ (внизу) в различных интервалах быстрот. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 55. Экспериментальные данные коллаборации LHCb [322, 323].

интервалах быстрот при разных энергиях. Некоторое исключение составляют лишь предсказания для отношений сечений $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(2P)}$ и $R_{\Upsilon(1S)}^{\chi_b(3P)}$ (см. рис. 67 и 68), которые превосходят немного выше экспериментальных результатов, хотя и близко к ним в пределах неопределенностей вычислений и погрешностей измерений. Отметим, что недавние предсказания [86], полученные в рамках NLO приближения нерелятивистской КХД, также лежат выше экспериментальных данных [321]. Следует подчеркнуть, что значения непертурбативных матричных элементов $\Upsilon(1S)$ и $\chi_{bJ}(1P)$ мезонов, определенные из данных [294, 319–321, 327, 328], не противоречат результатам измерений коллаборации LHCb [322, 323] (см. рис. 70), которые были получены в области передних быстрот и относительно небольших поперечных импульсов и которые не учитывались при проведении процедуры фитирования. Величина $\chi^2/d.o.f.$ составляет 2.03, 3.68 и 1.72 для глюонных распределений A0, JH'2013 set 1 и KMR соответственно. Однако, как и в случае $\Upsilon(2S)$ и $\Upsilon(3S)$ мезонов, экспериментальные данные коллабораций ATLAS [320] и CMS [319], полученные при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ (без учета недавних измерений коллаборации CMS [294], выполненных при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ) могут быть описаны со значительно лучшими $\chi^2/d.o.f. \sim 1$, а именно 0.71, 1.35 и 0.77. Теоретические неопределенности наших расчетов (порядка 30 – 40%) вполне сравнимы с неопределенностями предсказаний [84–88, 318], полученных в рамках NLO-приближения нерелятивистской КХД.

4.7 Поляризационные свойства боттомониев

Поляризационные свойства $\Upsilon(nS)$ мезонов определяются значениями параметров λ_θ , λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$, которые связаны с угловыми распределениями лептонов в процессах распада $\Upsilon(nS) \rightarrow l^+l^-$ в соответствии с выражением (170). Для исследования этих характеристик была вычислена зависимость λ_θ , λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$ для всех $\Upsilon(nS)$ мезонов от их поперечного импульса в различных системах отсчета. Кроме того, проведено сравнение результатов расчетов с данными, полученными коллаборацией CMS при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [330] и данными коллаборации CDF, полученными на коллайдере Tevatron при энергии $\sqrt{s} = 1.96$ ТэВ [331]. Конечно, во всех этих расчетах были использованы определенные выше непертурбативные матричные элементы $\Upsilon(nS)$ и $\chi_{bJ}(mP)$ мезонов. Сравнение предсказаний с данными LHCb [332] не проводилось, поскольку последние были получены в области небольших поперечных импульсов.

Результаты наших расчетов, выполненных в разных системах отсчета (Коллинза-Сопера, спиральной и перпендикулярной спиральной) приведены на рис. 71 – 80. Как и при исследовании поляризационных свойств чармониев, для определения λ_θ , λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$ в соответствии с (170) был использован алгоритм программы GNUPLOT [292]. Видно, что наши расчеты приводят к незначительной поляризации, $\lambda_\theta \sim -0.3 \dots -0.2$ в системе Коллинза-Сопера для всех $\Upsilon(nS)$ мезонов при относительно небольших значениях $p_T \sim 15$ ГэВ. С ростом поперечного импульса p_T величина λ_θ уменьшается, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Аналогичная карти-

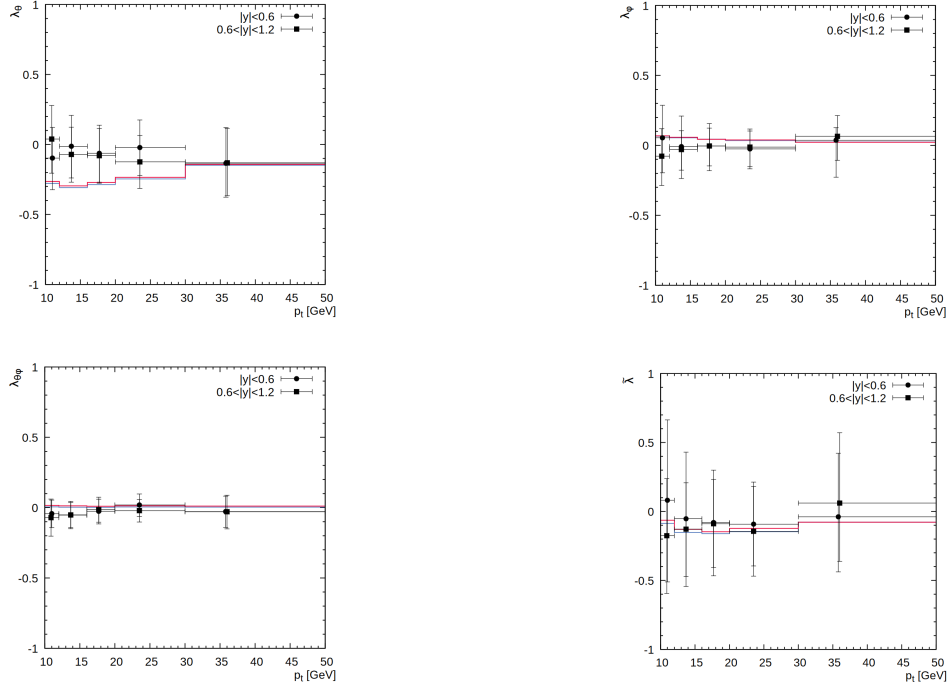


Рис. 71: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в системе Коллинза-Сопера, рассчитанная для $\Upsilon(1S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Синие и красные гистограммы отвечают предсказаниям, полученным в области $|y| < 0.6$ и $0.6 < |y| < 1.2$. В расчетах использовалась TMD функция распределения глюонов A0. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

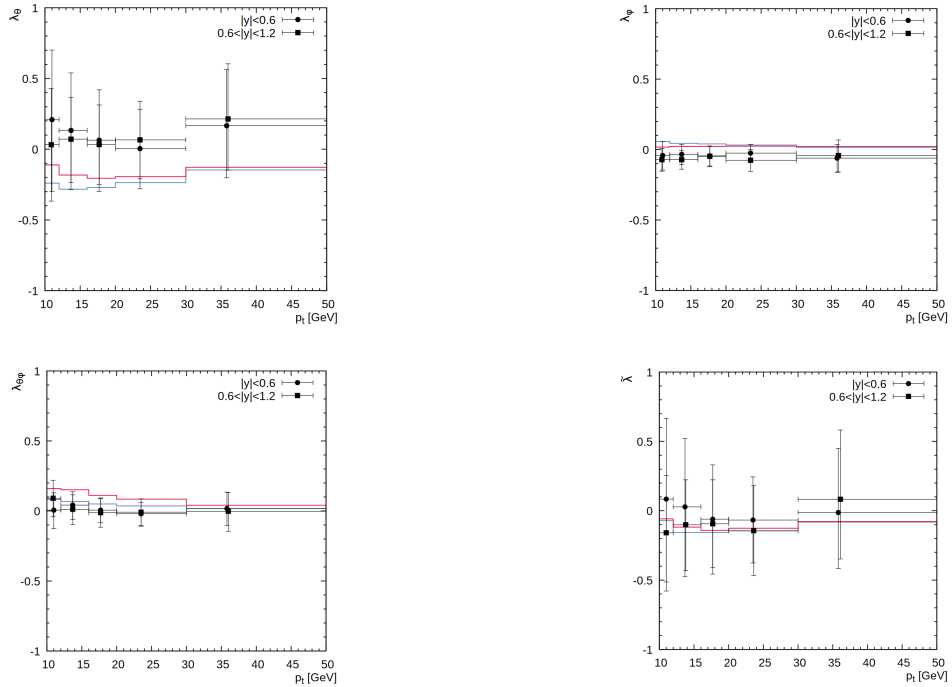


Рис. 72: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(1S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

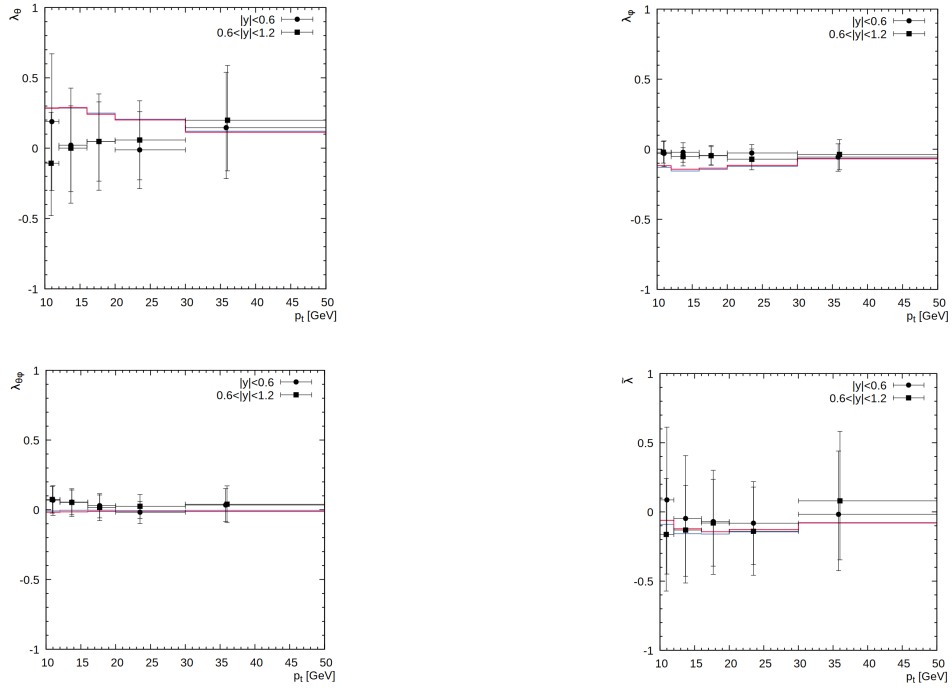


Рис. 73: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в перпендикулярной спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(1S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

на наблюдается в спиральной и перпендикулярной спиральной системах. Значения остальных поляризационных параметров, λ_ϕ и $\lambda_{\theta\phi}$, близки к нулю во всех интервалах быстрот. Отметим также хорошее описание данных (в пределах экспериментальных ошибок) для параметра λ^* , который не зависит от выбора системы отсчета [316].

Следует подчеркнуть еще раз, что полученное согласие с данными измерений для поляризационных параметров боттомониев является следствием использования в расчетах амплитуд перехода (158) — (160) и механизма [96]. Действительно, в соответствии с ключевым предположением модели [96] время жизни промежуточных октетных состояний пары тяжелых кварков является достаточным для того, чтобы они могли рассматриваться как физические состояния, обладающие определенными полным моментом J и его проекцией J_z . Последнее приводит к несохранению проекций спина S_z и орбитального момента L_z во время дипольного ($E1$) хромо-электрического перехода октетной пары кварков в наблюдаемое синглетное состояние и тем самым к отсутствию значительной степени поляризации конечного кваркония.

Достигнутое нами одновременное и самосогласованное описание полного набора экспериментальных данных для чармониев и боттомониев — распределений по поперечному импульсу тяжелых кваркониев и их поляризационных наблюдаемых — позволяет говорить о возможном решении одной из важных проблем современной физики высоких энергий.

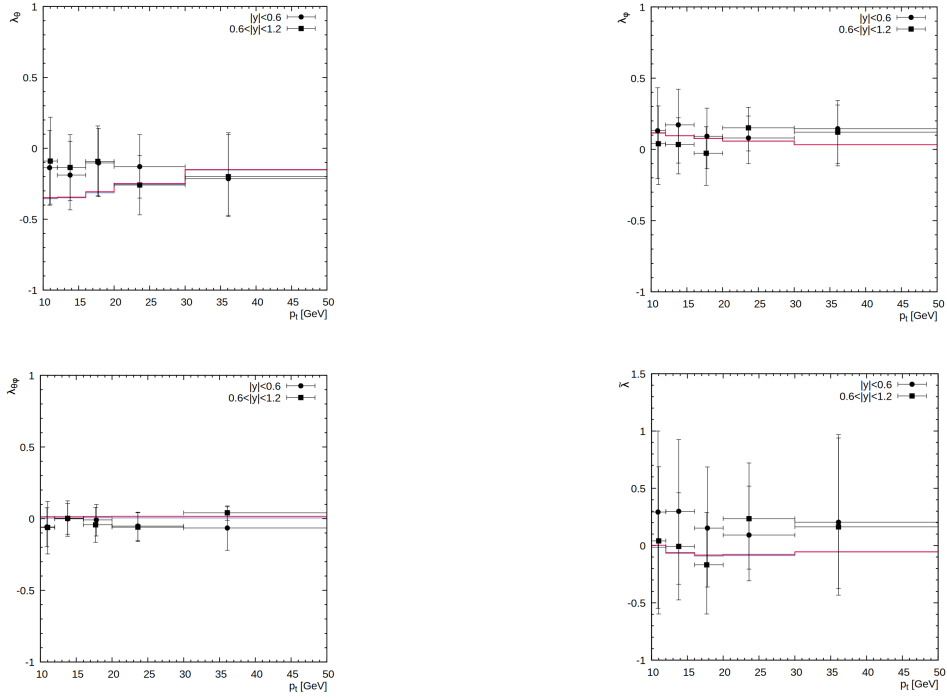


Рис. 74: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в системе Коллинза-Сопера, рассчитанная для $\Upsilon(2S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

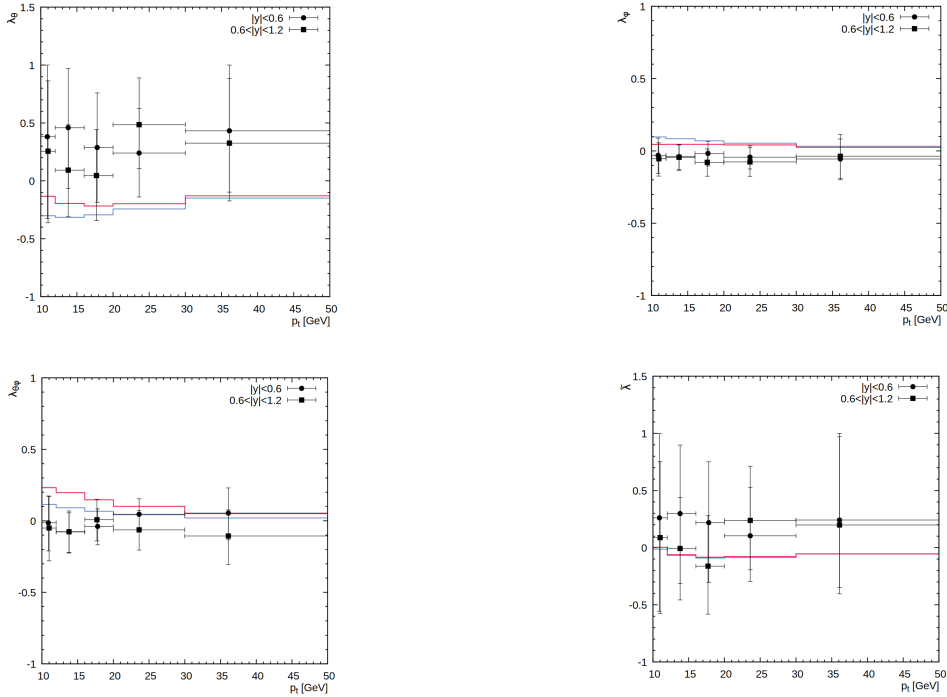


Рис. 75: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(2S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

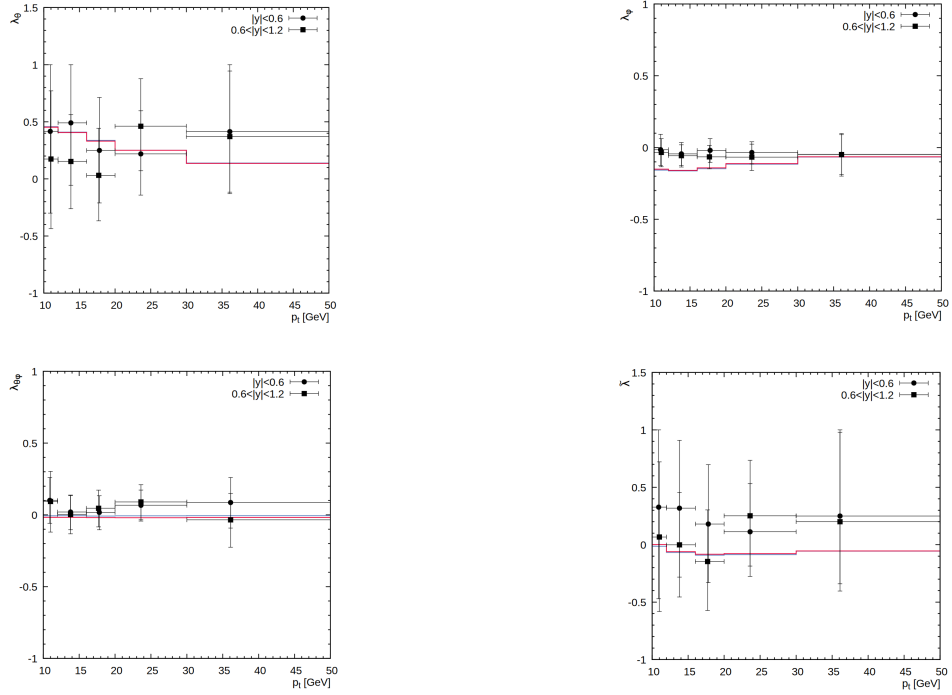


Рис. 76: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в перпендикулярной спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(2S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

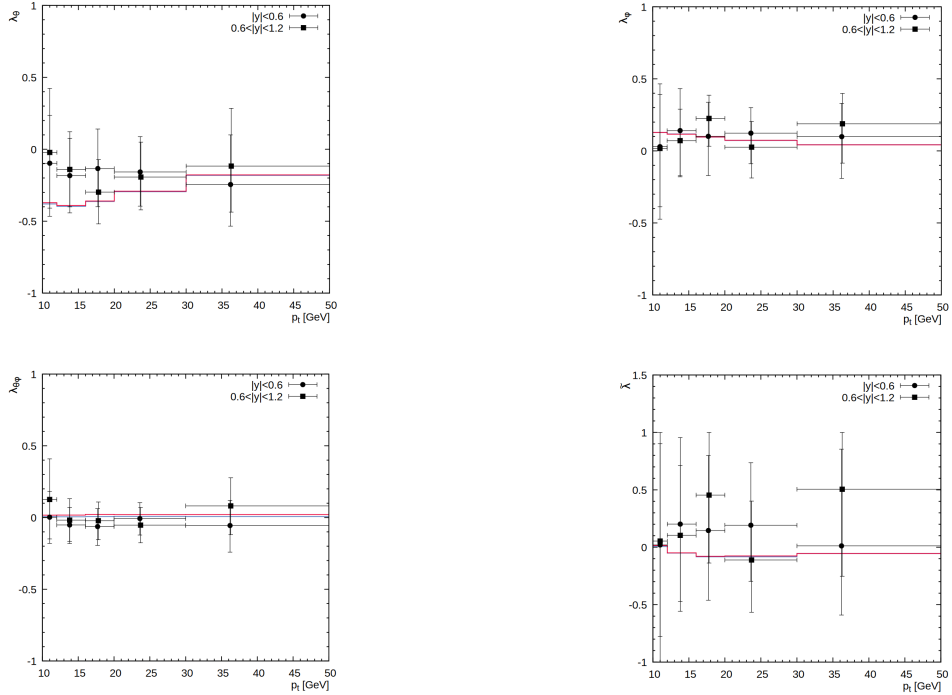


Рис. 77: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в системе Коллинза-Сопера, рассчитанная для $\Upsilon(3S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

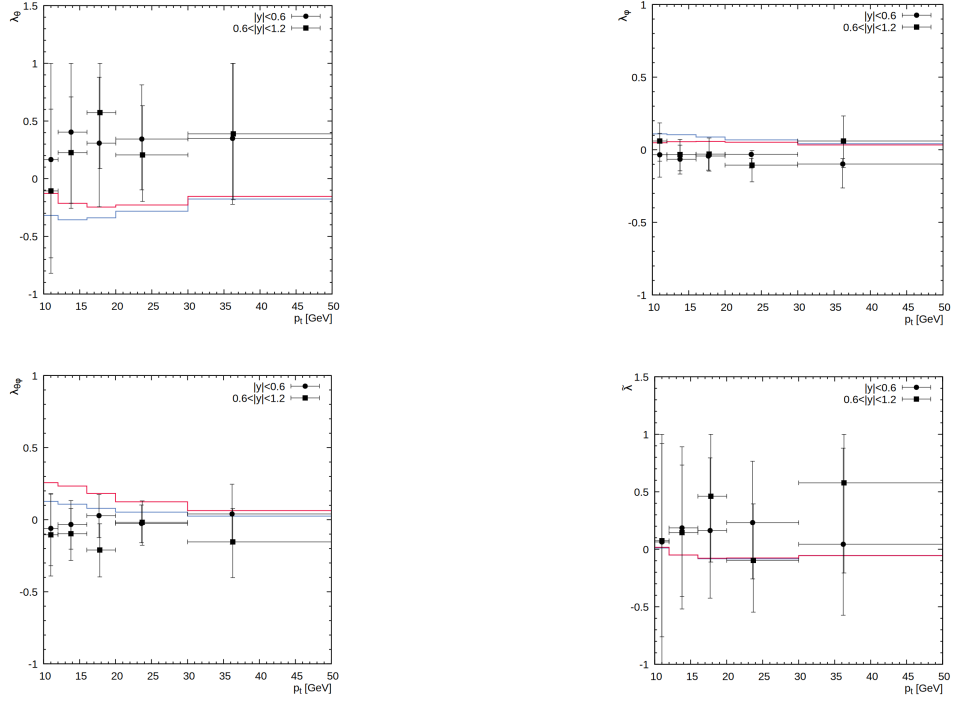


Рис. 78: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(3S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

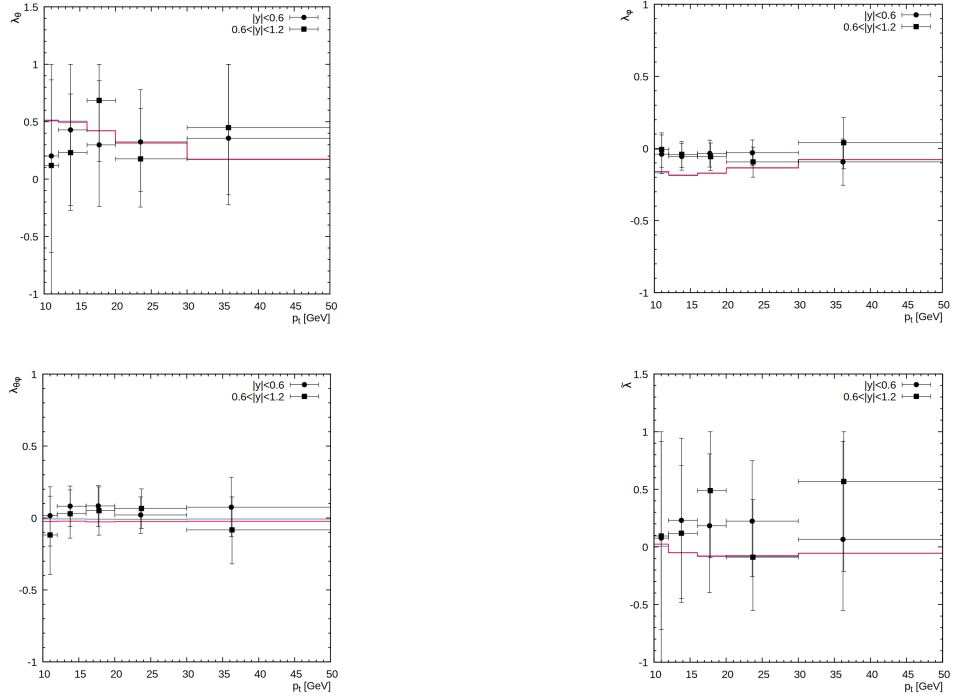


Рис. 79: Зависимость поляризационных параметров λ_θ , λ_ϕ , $\lambda_{\theta\phi}$ и λ^* от поперечного импульса в перпендикулярной спиральной системе, рассчитанная для $\Upsilon(3S)$ мезонов при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 71. Экспериментальные данные коллаборации CMS [330].

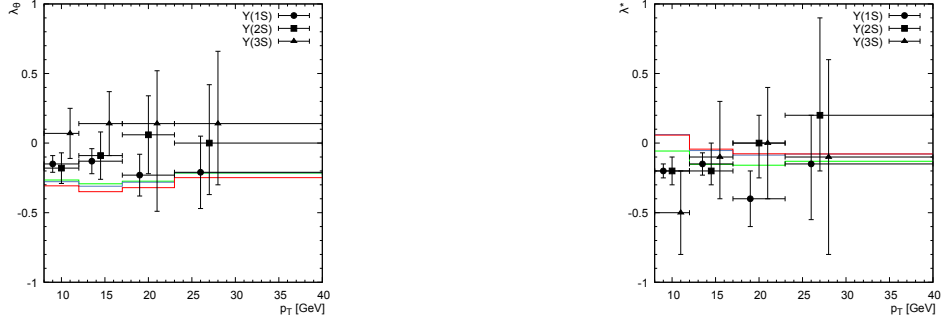


Рис. 80: Зависимость поляризационных параметров λ_θ (в спиральной системе) и λ^* от поперечного импульса $\Upsilon(nS)$ мезонов при $\sqrt{s} = 1.96$ ТэВ. Зеленые, синие и красные гистограммы соответствуют значениям $n = 1, 2$ и 3 . Экспериментальные данные коллаборации CDF [331].

4.8 Определение значения волновой функции B_c мезонов из экспериментальных данных

Формализм нерелятивистской КХД также может быть применен для описания формирования связанных состояний тяжелых кварков разных ароматов. Так, особый интерес представляет изучение семейства B_c мезонов, которые представляют собой связанное состояние $\bar{b}$ и c кварков. Эта система занимает промежуточное положение между рассмотренными выше семействами чармониев и боттомониев по массам и средним расстояниям между тяжелыми кварками. Псевдоскалярный (B_c) и векторный (B_c^*) мезоны, открытые в экспериментах на коллайдере Tevatron, являются долгоживущими частицами, не имеющими сильных и электромагнитных аннигиляционных каналов распада и распадающимися только за счет слабого взаимодействия. Теоретические и экспериментальные исследования специфических механизмов рождения и распада B_c мезонов позволяют значительно расширить наше понимание КХД и теории электрослабых взаимодействий как в количественном, так и качественном аспектах.

Следует отметить, что необходимость образования двух пар тяжелых кварков в жестком партонном подпроцессе для формирования B_c мезонов приводит к тому, что ведущий порядок теории возмущений имеет дополнительный множитель порядка α_s^2 по сравнению с ведущим порядком теории возмущений КХД для рождения пары тяжелых кварков одного аромата. Так, например, отношение сечений рождения B_c мезона и пары $b\bar{b}$ пропорционально $\sigma(B_c)/\sigma(b\bar{b}) \sim \alpha_s^2 |\mathcal{R}(0)|^2 / m_c^3$, где $\mathcal{R}(x)$ — пространственная часть волновой функции B_c -мезона в координатном представлении. Это обуславливает достаточно малый выход B_c мезонов по сравнению с B -мезонами и, соответственно, существенные экспериментальные трудности в их обнаружении. Тем не менее, непосредственные измерения подобных отношений позволяют определить [333] значение волновой функции B_c мезонов $|\mathcal{R}(0)|^2$ из данных — аналогично тому, как значения волновых функций чармониев и боттомониев могут быть

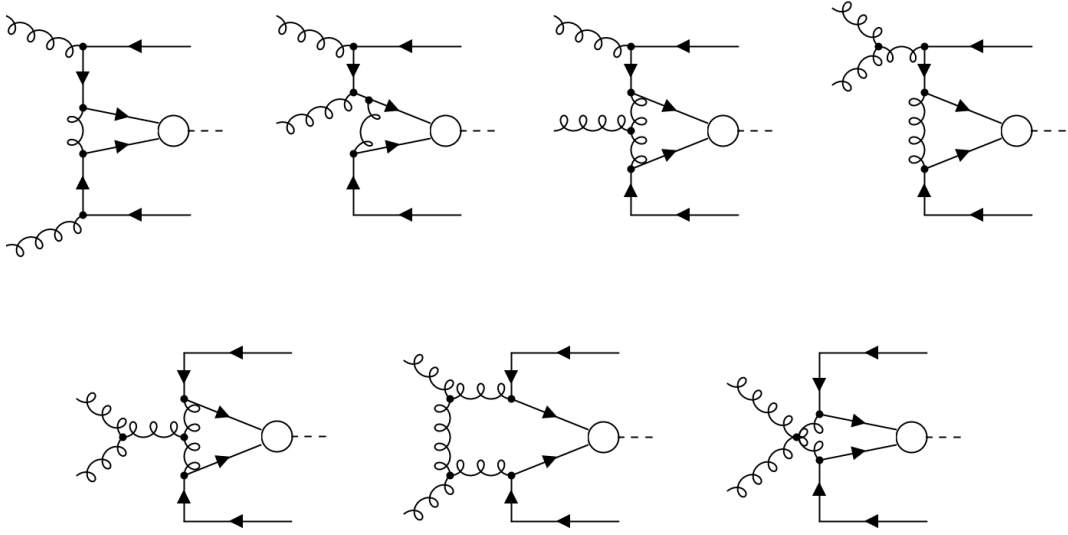


Рис. 81: Некоторые диаграммы Фейнмана для процесса рождения B_c мезонов в рамках синглетного механизма в ведущем порядке теории возмущений КХД.

определены из экспериментальных данных для соответствующих ширин лептонных распадов. Такая процедура, в принципе, может рассматриваться как альтернатива известным методам вычисления в рамках потенциальных моделей [280–284]. Конечно, сравнение результатов, полученных с помощью этих двух подходов, представляет несомненный интерес¹⁵. Ниже для определения величины $|\mathcal{R}(0)|^2$ мы будем использовать данные коллабораций CDF [334, 335] и LHCb [336, 337] для отношений сечений $\sigma(B_c)/\sigma(B^+)$ в зависимости от поперечного импульса, полученные при энергиях $\sqrt{s} = 1.8, 1.96, 7$ и 8 ТэВ.

В рамках k_T -факторизационного подхода КХД сечение процесса инклюзивного рождения B_c мезонов при высоких энергиях определяется подпроцессом глюонного слияния вне массовой поверхности:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow B_c^{(*)}(p) + b(p_1) + \bar{c}(p_2), \quad (178)$$

где обозначение $B_c^{(*)}$ соответствует либо псевдоскалярному ($S = 0$), либо векторному ($S = 1$) мезону; при этом импульсы всех частиц указаны в скобках ($k_1^2 = -\mathbf{k}_{1T}^2 \neq 0$, $k_2^2 = -\mathbf{k}_{2T}^2 \neq 0$). Примеры фейнмановских диаграмм, отвечающих синглетному механизму рождения, приведены на рис. 81. Амплитуда вне массовой поверхности этого подпроцесса была вычислена в работе [338]. Полученные выражения в коллинеарном пределе совпадают с результатами [339–343] и были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100]. Отметим, что вклад октетных механизмов в кинематической области экспериментов CDF и LHCb пренебрежимо мал [338–343] и, следовательно, не будет учитываться в расчетах. В соответствии с (92), сечение рас-

¹⁵Значение волновой функции J/ψ мезонов, полученное в работе [313] из условия наилучшего описания экспериментальных данных ЛХС для распределений по поперечному импульсу, практически совпадает с предсказаниями потенциальных моделей с учетом радиационных поправок.

смаатриваемого процесса определяется сверткой вида:

$$\sigma(pp \rightarrow B_c^{(*)} + X) = \int \frac{1}{256\pi^3(x_1x_2s)^2} |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow B_c^{(*)} + b + \bar{c})|^2 \times \\ \times f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \quad (179)$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD функция распределения глюонов в протоне, ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 и ψ_2 — азимутальные углы начальных виртуальных глюонов и конечных тяжелых кварков соответственно. Доли x_1 и x_2 продольных импульсов сталкивающихся протонов, переносимые взаимодействующими глюонами, могут быть вычислены с помощью закона сохранения энергии-импульса.

Что касается предсказаний k_T -факторизационного подхода КХД для сечений процессов рождения B^+ мезонов, необходимых для сравнения с данными коллабораций CDF [334, 335] и LHCb [336, 337], то они были получены в полном соответствии с описанными выше расчетами сечений рождения пар $b\bar{b}$. Для описания фрагментации b -кварков в B^+ мезоны была использована известная функция Петерсона [235], при этом значение параметра ϵ полагалось¹⁶ равным $\epsilon = 0.0126$. Согласно [216], относительная вероятность фрагментации равна $B(b \rightarrow B^+) = 0.398$. Численные расчеты проводились с помощью TMD функции распределения глюонов JH'2013 set 2.

Отношение сечений процессов рождения B_c и B^+ мезонов, измеренное коллаборацией CDF на коллайдере Tevatron в кинематической области $p_T(B_c) > 6$ ГэВ, $p_T(B^+) > 6$ ГэВ, $|y(B_c)| < 1$, $|y(B^+)| < 1$ при $\sqrt{s} = 1.8$ ТэВ, равно [334]

$$\frac{\sigma(B_c)B(B_c \rightarrow J/\psi + \mu + \nu)}{\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K)} = 0.132^{+0.061}_{-0.052}, \quad (180)$$

при этом учитывались события с участием как псевдоскалярных, так и векторных B_c мезонов, а также события с участием как частиц, так и соответствующих античастиц. Полагая значение волновой функции $|\mathcal{R}(0)|^2$ свободным параметром, из (179) можно получить, что

$$\begin{aligned} \sigma(B_c) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.247 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.516 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c + B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.763 \text{ нбн/ГэВ}^3. \end{aligned} \quad (181)$$

Кроме того, наши расчеты приводят к значению $\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K) = 7.13$ нбн, поскольку $B(B^+ \rightarrow J/\psi + K) = 1.026 \cdot 10^{-3}$ [216].

Результаты измерений [335], выполненных при $p_T(B_c) > 6$ ГэВ, $p_T(B^+) > 6$ ГэВ,

¹⁶При таком выборе величины ϵ достигается хорошее согласие результатов расчетов сечений процессов одиночного и парного рождения J/ψ мезонов, возникающих из распадов b -адронов, с экспериментальными данными LHC.

$|y(B_c)| < 0.6$, $|y(B^+)| < 0.6$ и энергии $\sqrt{s} = 1.96$ ТэВ, сводятся к следующему:

$$\frac{\sigma(B_c)B(B_c \rightarrow J/\psi + \mu + \nu)}{\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K)} = 0.211^{+0.024}_{-0.023}. \quad (182)$$

В этой кинематической области мы получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma(B_c) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.177 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.365 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c + B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 0.542 \text{ нбн/ГэВ}^3, \end{aligned} \quad (183)$$

и $\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K) = 4.99$ нбн.

Отношение сечений процессов рождения B_c и B^+ мезонов также было измерено коллаборацией LHCb при $p_T(B_c) > 4$ ГэВ, $p_T(B^+) > 4$ ГэВ, $2 < y(B_c) < 4.5$, $2 < y(B^+) < 4.5$ и $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [336]:

$$\frac{\sigma(B_c)B(B_c \rightarrow J/\psi + \pi^+)}{\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K)} = 0.0061 \pm 0.0012. \quad (184)$$

Соответствующие вычисления в рамках k_T -факторизационного подхода КХД приводят к результатам:

$$\begin{aligned} \sigma(B_c) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 2.37 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 3.03 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c + B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 5.40 \text{ нбн/ГэВ}^3, \end{aligned} \quad (185)$$

и $\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K) = 27.3$ нбн.

Наконец, в области $p_T(B_c) < 20$ ГэВ, $p_T(B^+) < 20$ ГэВ, $2 < y(B_c) < 4.5$, $2 < y(B^+) < 4.5$ и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ было получено, что [337]

$$\frac{\sigma(B_c)B(B_c \rightarrow J/\psi + \pi^+)}{\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K)} = 0.0068 \pm 0.0002. \quad (186)$$

Наши предсказания таковы:

$$\begin{aligned} \sigma(B_c) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 4.92 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 5.63 \text{ нбн/ГэВ}^3, \\ \sigma(B_c + B_c^*) &= |\mathcal{R}(0)|^2 \cdot 10.55 \text{ нбн/ГэВ}^3, \end{aligned} \quad (187)$$

и $\sigma(B^+)B(B^+ \rightarrow J/\psi + K) = 65.33$ нбн. Далее, с помощью экспериментальных данных коллаборации LHCb [344] для отношения вероятностей распадов B_c мезонов, а

ИМЕННО

$$\frac{B(B_c \rightarrow J/\psi + \pi^+)}{B(B_c \rightarrow J/\psi + \mu + \nu)} = 0.047, \quad (188)$$

а также вычисленной в работе [345] величины $B(B_c \rightarrow J/\psi + \pi^+) = 0.0033$ (см. также [337]), из соотношений (180) — (187) легко получить, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(0)|^2 &= 4.40 \pm 2.00 \text{ ГэВ}^3, & \text{данные CDF [334],} \\ |\mathcal{R}(0)|^2 &= 6.91 \pm 0.08 \text{ ГэВ}^3, & \text{данные CDF [335],} \\ |\mathcal{R}(0)|^2 &= 5.15 \pm 0.10 \text{ ГэВ}^3, & \text{данные LHCb [336],} \\ |\mathcal{R}(0)|^2 &= 7.05 \pm 0.20 \text{ ГэВ}^3, & \text{данные LHCb [337].} \end{aligned} \quad (189)$$

Следуя подходу, аналогичному использованному ранее при определении значений непертурбативных матричных элементов чармониев и боттомониев, каждое из полученных значений рассматривается как результат независимого ”измерения”. В качестве окончательной величины волновой функции $|\mathcal{R}(0)|^2$ мы принимаем среднее значение: $|\mathcal{R}(0)|^2 = 5.88 \pm 1.07 \text{ ГэВ}^3$. Оценка погрешности производилась с помощью распределения Стюдента, где коэффициент надежности полагался равным $P = 80\%$.

Соответствующие полученному значению предсказания для отношений сечений процессов рождения B_c и B^+ мезонов в зависимости от поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 8 \text{ ТэВ}$ представлены на рис. 82. Как обычно, закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Легко видеть, что результаты наших расчетов хорошо описывают экспериментальные данные коллаборации LHCb [337] как по форме, так и по абсолютной величине во всех интервалах быстрот. Следует подчеркнуть, что полученные результаты как для отношений сечений $\sigma(B_c)/\sigma(B^+)$, так и для величины $|\mathcal{R}(0)|^2$ практически не зависят от выбора TMD глюонной плотности в протоне, поскольку эта зависимость по большей части сокращается при вычислении рассматриваемых отношений. Теоретические неопределенности предсказаний составляют в среднем 30–40%, что, как было отмечено выше, связано с достаточно существенной зависимостью амплитуды подпроцесса (178) от константы связи α_s .

Значение волновой функции B_c мезонов, определенное нами из экспериментальных данных коллабораций CDF и LHCb, выше, чем предсказания [280], полученные в рамках потенциальных моделей. Действительно, использование в расчетах логарифмического потенциала [346] приводит к значению $|\mathcal{R}(0)|^2 = 1.508 \text{ ГэВ}^3$, потенциалов [283] и [282] — к значениями 1.642 и 1.710 ГэВ^3 соответственно, а потенциала Корнельской модели [281] — к величине $|\mathcal{R}(0)|^2 = 3.102 \text{ ГэВ}^3$. Такое отличие может быть связано с тем, что характерный масштаб μ_R жесткого подпроцесса рассеяния (178) несколько ниже, чем тот, который обычно используется в расчетах — а именно, поперечная масса конечного B_c мезона: $\mu_R^2 = m_{B_c}^2 + \mathbf{p}_T^2$. С другой стороны, это

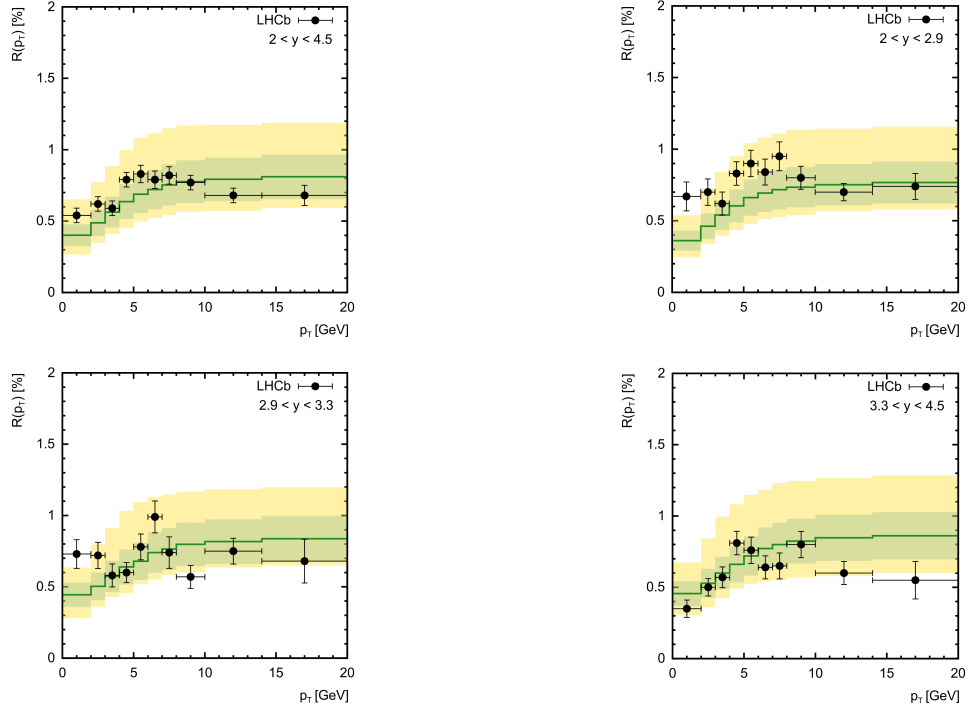


Рис. 82: Отношение сечений процессов инклюзивного рождения B_c и B^+ мезонов, $R = \sigma(B_c)/\sigma(B^+)$ в pp столкновениях, вычисленные в зависимости от поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в различных интервалах быстрот. В расчетах использовалась TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2. Область, закрашенная серым цветом, отвечает неопределенностям, связанным с определением значения волновой функции B_c мезонов $|\mathcal{R}(0)|^2$. Область, закрашенная желтым цветом, соответствует неопределенностям, связанным с выбором характерного масштаба μ_R . Экспериментальные данные коллаборации LHCb [337].

отличие также может служить указанием на значительную величину радиационных поправок к предсказаниям потенциальных моделей. Такие поправки, как известно, являются весьма существенными, как, например, в случае J/ψ мезонов.

5 Процессы ассоциативного рождения фотонов (или тяжелых калибровочных бозонов) и адронных струй на коллайдере LHC

Настоящая глава посвящена исследованию процессов рождения прямых фотонов или тяжелых калибровочных бозонов в сопровождении струй адронов при высоких энергиях. Такие (полуинклюзивные) процессы чувствительны к динамике эволюции глюонов и кварков в протоне и поэтому представляют существенный интерес. Отсутствие необходимости учитывать в расчетах дополнительные механизмы адронизации в конечном состоянии (в отличие от, например, процессов рождения D или B мезонов) лишь усиливает последний. Выделение определенного класса струй (например, струй только c или b кварков) позволяет проводить более четкое соответствие между экспериментальными данными и теоретическими предсказаниями. Кроме того, процессы с фотоном и тяжелыми кварками в конечном состоянии являются фоновыми к процессам за рамками СМ. В данной главе вычислены полные и дифференциальные сечения этих процессов, при этом учет основного вклада механизма глюон-глюонного слияния производится в рамках k_T -факторизационного подхода КХД. Вклад подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии, существенных в области достаточно больших поперечных импульсов (или больших значений переменной $x \sim m_T/\sqrt{s} \sim 0.1$, где m_T — поперечная масса конечного состояния) производится в рамках обычного коллинеарного приближения теории возмущений КХД. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными в последние годы на коллайдере LHC. Изучена роль партонных ливней в начальном и конечном состоянии. Установлено взаимное соответствие между результатами вычислений с использованием различных уравнений КХД эволюции (CCFM и PB) для глюонных и кварковых распределений в протоне. Получена оценка вклада внутреннего очарования в сечение процессов ассоциативного рождения фотонов и струй очарованных кварков.

5.1 Амплитуда вне массовой поверхности подпроцесса $g^* + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q + \bar{q}'$

Вычисление сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов (или калибровочных бозонов) и адронных струй в рамках k_T -факторизационного подхода КХД основано на учете доминирующего вклада от подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности порядка $O(\alpha\alpha_s^2)$:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q(p_1) + \bar{q}'(p_2), \quad (190)$$

где в скобках стоят 4-импульсы соответствующих частиц. Отметим, при этом эф-

фактивно учитывается вклад в сечение порядка $O(\alpha\alpha_s)$ от подпроцесса $q + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q$ с помощью излучения глюона в начальном состоянии. Конечно, в стандартной (коллинеарной) факторизации КХД оба этих подпроцесса должны учитываться по отдельности. Пренебрегая массой протона, в системе центра масс можем записать следующие соотношения:

$$p^{(1)} = \sqrt{s}/2(1, 0, 0, 1), \quad p^{(2)} = \sqrt{s}/2(1, 0, 0, -1), \quad (191)$$

где $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — 4-импульсы сталкивающихся протонов. В асимптотическом пределе высоких энергий

$$k_1 = x_1 p^{(1)} + k_{1T}, \quad k_2 = x_2 p^{(2)} + k_{2T}, \quad (192)$$

где поперечные импульсы начальных глюонов $k_{1T}^2 = -\mathbf{k}_{1T}^2 \neq 0$ и $k_{2T}^2 = -\mathbf{k}_{2T}^2 \neq 0$. С помощью закона сохранения энергии-импульса легко получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T} &= \mathbf{p}_T + \mathbf{p}_{1T} + \mathbf{p}_{2T}, \\ x_1 \sqrt{s} &= m_T e^y + m_{1T} e^{y_1} + m_{2T} e^{y_2}, \\ x_2 \sqrt{s} &= m_T e^{-y} + m_{1T} e^{-y_1} + m_{2T} e^{-y_2}, \end{aligned} \quad (193)$$

где p_T , m_T и y — поперечный импульс, поперечная масса и быстрота конечной частицы (фотон или калибровочный бозон с массой m), p_{1T} , p_{2T} , m_{1T} , m_{2T} , y_1 и y_2 — поперечные импульсы, поперечные массы и быстроты рождающихся кварков, обладающих массами m_1 и m_2 .

Восемь фейнмановских диаграмм, которые представляют собой калибровочно-инвариантный набор, описывающий в ведущем порядке $O(\alpha\alpha_s^2)$ процесс (190), изображены на рис. 83. Амплитуда вне массовой поверхности этого процесса может быть представлена в виде

$$\mathcal{A}(g^* + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q + \bar{q}') = g^2 \epsilon^\mu(k_1) \epsilon^\nu(k_2) \epsilon^{*\lambda}(p) \sum_{i=1}^8 \mathcal{A}_i^{\mu\nu\lambda}, \quad (194)$$

где $\epsilon^\mu(k_1)$, $\epsilon^\nu(k_2)$ и $\epsilon^\lambda(p)$ — 4-векторы поляризации начальных виртуальных глюонов

и конечного фотона (калибровочного бозона), $g^2 = 4\pi\alpha_s$ и

$$\mathcal{A}_1^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)t^a\gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m_1}{m_1^2 - (p_1 - k_1)^2} T_V^\lambda \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_2 + m_2}{m_2^2 - (k_2 - p_2)^2} t^b\gamma^\nu u(p_2), \quad (195)$$

$$\mathcal{A}_2^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)t^b\gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m_1}{m_1^2 - (p_1 - k_2)^2} T_V^\lambda \frac{\hat{k}_1 - \hat{p}_2 + m_2}{m_2^2 - (k_1 - p_2)^2} t^a\gamma^\mu u(p_2), \quad (196)$$

$$\mathcal{A}_3^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)t^a\gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m_1}{m_1^2 - (p_1 - k_1)^2} t^b\gamma^\nu \frac{-\hat{p}_2 - \hat{p} + m_1}{m_1^2 - (-p_2 - p)^2} T_V^\lambda u(p_2), \quad (197)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)t^b\gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m_1}{m_1^2 - (p_1 - k_2)^2} t^a\gamma^\mu \frac{-\hat{p}_2 - \hat{p} + m_1}{m_1^2 - (-p_2 - p)^2} T_V^\lambda u(p_2), \quad (198)$$

$$\mathcal{A}_5^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)T_V^\lambda \frac{\hat{p}_1 + \hat{p} + m_2}{m_2^2 - (p_1 + p)^2} t^b\gamma^\nu \frac{\hat{k}_1 - \hat{p}_2 + m_2}{m_2^2 - (k_1 - p_2)^2} t^a\gamma^\mu u(p_2), \quad (199)$$

$$\mathcal{A}_6^{\mu\nu\lambda} = \bar{u}(p_1)T_V^\lambda \frac{\hat{p}_1 + \hat{p} + m_2}{m_2^2 - (p_1 + p)^2} t^a\gamma^\mu \frac{\hat{k}_2 - \hat{p}_2 + m_2}{m_2^2 - (k_2 - p_2)^2} t^b\gamma^\nu u(p_2), \quad (200)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_7^{\mu\nu\lambda} = & \bar{u}(p_1)\gamma^\rho C^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_1 - k_2) \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} f^{abc} t^c \times \\ & \times \frac{-\hat{p}_2 - \hat{p} + m_1}{m_1^2 - (-p_2 - p)^2} T_V^\lambda u(p_2), \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_8^{\mu\nu\lambda} = & \bar{u}(p_1)T_V^\lambda \frac{\hat{p}_1 + \hat{p} + m_2}{m_2^2 - (p_1 + p)^2} \times \\ & \times \gamma^\rho C^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_1 - k_2) \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} f^{abc} t^c u(p_2). \end{aligned} \quad (202)$$

В этих формулах $C^{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3)$ — обычная трехглюонная вершина (87) и

$$T_\gamma^\mu = ee_q\gamma^\mu, \quad (203)$$

$$T_W^\mu = \frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}\gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{qq'}, \quad (204)$$

$$T_Z^\mu = \frac{e}{\sin 2\theta_W}\gamma^\mu \left[I_3^{(q)} (1 - \gamma^5) - 2e_q \sin^2\theta_W \right], \quad (205)$$

где $I_3^{(q)}$ и e_q — проекция изоспина и электрический заряд кварка q в единицах заряда электрона e , $V_{qq'}$ — элемент матрицы смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскавы (СКМ), θ_W — угол Вайнберга (см., например, [211]). Конечно, в случае рождения фотона или Z бозона кварки имеют один и тот же аромат, так что мы полагаем $m_1 = m_2$.

Следует отметить, что при вычислении амплитуды вне массовой поверхности для подпроцесса (190) необходимо, вообще говоря, также учитывать дополнительные диаграммы, в которых начальные виртуальные глюоны излучаются протонами, лежащими на массовой поверхности (см. рис. 10). Учет таких нефакторизуемых диаграмм в лидирующем порядке теории возмущений КХД приводит к эффективной вершине взаимодействия глюонов (75) [206]. Однако, как было показано выше, в специальной физической (аксиальной) калибровке ($n_\mu A^\mu$, где $n_\mu = ap_\mu^{(1)} + bp_\mu^{(2)}$) эти нефакторизуемые диаграммы дают нулевой вклад в амплитуду [23]. Таким образом,

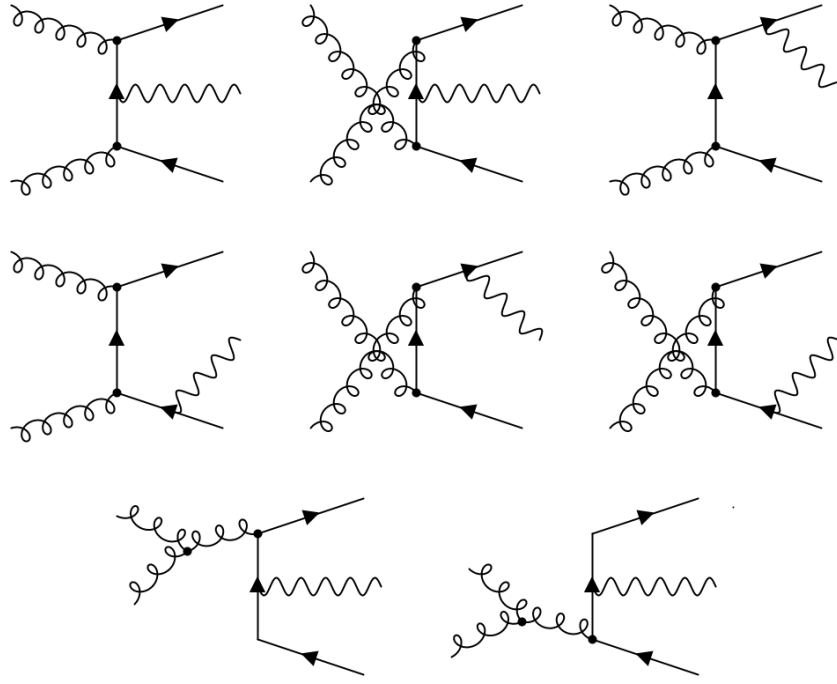


Рис. 83: Диаграммы Фейнмана для процесса рождения прямых фотонов или калибровочных бозонов с помощью механизма глюон-глюонного слияния в ведущем порядке теории возмущений КХД.

эффективная вершина (75) может быть заменена обычным выражением для трех-глюонной вершины (87) с учетом специального выбора тензора поляризации начальных виртуальных глюонов (89), что обеспечивает калибровочную инвариантность амплитуды (194).

Суммирование по поляризациям фотонов выполняется обычным образом. В случае рождения виртуальных фотонов или калибровочных бозонов такое суммирование производится с учетом лептонных распадов $Z/\gamma^* \rightarrow l^+l^-$ или $W^\pm \rightarrow l^\pm \nu_l(\bar{\nu}_l)$, при этом пропагатор промежуточного бозона записывается в форме Брейта-Вигнера. При проведении аналитических расчетов была использована система FORM [106].

Отметим, что существенной частью математических вычислений является разложение амплитуды вне массовой поверхности (194) по подходящему набору базисных векторов (метод ортогональных амплитуд). Этот метод был предложен в работе [347] и широко использовался ранее (см., например, [348–352]). Строгое обоснование метода дано в [348]. Использование метода ортогональных амплитуд позволяет значительно сократить объем и время компьютерных вычислений. Полученные аналитические выражения [353, 354] совпадают с результатами несколько более поздних расчетов [47] и были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100].

5.2 Вклад подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии

Кроме вклада подпроцессов глюон-глюонного слияния (190), в численных рас-

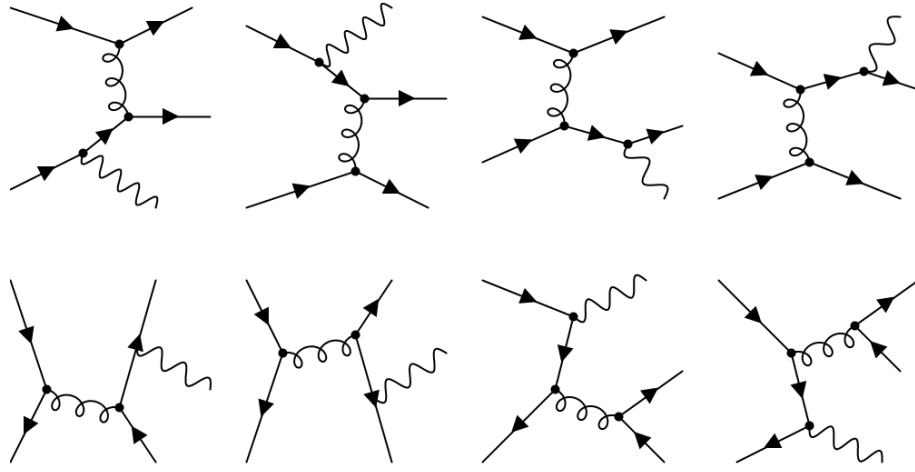


Рис. 84: Диаграммы Фейнмана для subprocessов (206) и (207), происходящих с участием кварков в начальном состоянии, которые учитываются в рамках коллинеарного приближения КХД.

четах [355–357] учитываются также вклады некоторых subprocessов, происходящих с участием кварков в начальном состоянии. Так, были рассмотрены (в древесном приближении) следующие subprocessы: рассеяния кварков

$$q(k_1) + q'(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q(p_1) + q'(p_2) \quad (206)$$

и их аннигиляции

$$q(k_1) + \bar{q}(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q'(p_1) + \bar{q}'(p_2), \quad (207)$$

где, как и ранее, 4-импульсы всех частиц указаны в скобках. Соответствующие диаграммы Фейнмана приведены на рис. 84. Такие процессы могут, в принципе, играть существенную роль в области достаточно больших значений поперечных импульсов (или, что эквивалентно, в области больших значений переменной $x \sim m_T/\sqrt{s}$), поскольку при значениях $x \sim 0.1$ или выше плотность кварковой материи в протоне сравнима с глюонной плотностью или даже превосходит ее. В этом случае величиной поперечного импульса начальных партонов (кварков) можно пренебречь и учитывать вклад в сечение от subprocessов (206) и (207) в рамках обычного коллинеарного приближения КХД. Отметим, что такой комбинированный подход позволяет использовать различную динамику партонных распределений (CCFM или DGLAP) в соответствующих кинематических режимах для описания экспериментальных данных как в области малых, так и больших значений переменной x .

Вычисление амплитуд этих процессов в древесном приближении не вызывает

трудностей. Так, например, амплитуду процесса (206) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q + q' \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q + q') &= g^2 t^a \delta^{ab} t^b g^{\mu\nu} \epsilon^{*\lambda}(p) \times \\ &\times \left[\frac{1}{(k_2 - p_2)^2} \mathcal{A}_1^{\mu\lambda} \mathcal{B}_1^\nu + \frac{1}{(k_1 - p_1)^2} \mathcal{A}_2^{\nu\lambda} \mathcal{B}_2^\mu \right], \end{aligned} \quad (208)$$

где

$$\mathcal{A}_1^{\mu\lambda} = \bar{u}(p_1) \left[T_V^\lambda \frac{\hat{p}_1 + \hat{p} + m_1}{(p_1 + p)^2 - m_1^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\hat{k}_1 - \hat{p} + m_2}{(k_1 - p)^2 - m_2^2} T_V^\lambda \right] u(k_1), \quad (209)$$

$$\mathcal{A}_2^{\nu\lambda} = \bar{u}(p_2) \left[T_V^\lambda \frac{\hat{p}_2 + \hat{p} + m_3}{(p_2 + p)^2 - m_3^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\hat{k}_2 - \hat{p} + m_4}{(k_2 - p)^2 - m_4^2} T_V^\lambda \right] u(k_2), \quad (210)$$

$$\mathcal{B}_1^\nu = \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2), \quad (211)$$

$$\mathcal{B}_2^\mu = \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1), \quad (212)$$

и справедливы соотношения $k_1^2 = m_1^2$, $k_2^2 = m_3^2$, $p_1^2 = m_2^2$, $p_2^2 = m_4^2$. Конечно, в случае рождения фотона или Z бозона $m_1 = m_2$ и $m_3 = m_4$. Суммирование по поляризациям начальных и конечных кварков, а также суммирование по поляризациям фотона производится стандартным образом. Как и в случае подпроцесса глюон-глюонного слияния, суммирование по поляризациям конечного виртуального фотона или калибровочного бозона выполняется с учетом лептонных распадов $Z/\gamma^* \rightarrow l^+ l^-$ или $W^\pm \rightarrow l^\pm \nu_l(\bar{\nu}_l)$, а пропагатор промежуточного бозона записывается в форме Брейта-Вигнера. Амплитуда подпроцесса аннигиляции (207) может быть легко получена из амплитуды (208) очевидной перестановкой соответствующих импульсов. Отметим, что аналитические выражения для рассматриваемых амплитуд совпадают с результатами, полученными с использованием Монте-Карло генератора MADGRAPH5_amc@NLO [358].

5.3 Полные и дифференциальные сечения

Как обычно, сечение рассматриваемых процессов при высоких энергиях в рамках k_T -факторизационного подхода КХД определяется сверткой вида (92). Из этого соотношения легко получить, что вклад от подпроцесса глюон-глюонного слияния (190)

может быть рассчитан согласно формуле:

$$\sigma(pp \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + X) = \int \frac{1}{256\pi^3(x_1x_2s)^2} |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q + \bar{q}')|^2 \times \\ \times f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \quad (213)$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD функция распределения глюонов в протоне, ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 и ψ_2 — азимутальные углы начальных виртуальных глюонов и конечных кварков соответственно. Для подпроцесса взаимодействия кварков (206) в рамках коллинеарного приближения выражение для сечения можно записать в виде

$$\sigma(pp \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + X) = \sum_{a,b'} \int \frac{1}{256\pi^3(x_1x_2s)^2} |\bar{\mathcal{A}}(q + q' \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q + q')|^2 \times \\ \times f_a(x_1, \mu^2) f_b(x_2, \mu^2) d\mathbf{p}_{1T}^2 d\mathbf{p}_{2T}^2 dy dy_1 dy_2 \frac{d\psi_1}{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi}, \quad (214)$$

где $a, b = q, q'$ и $f_a(x, \mu^2)$ — обычные (коллинеарные) функции распределения кварков в протоне, удовлетворяющие уравнению эволюции DGLAP [4–7]. Аналогичное выражение может быть легко получено для подпроцесса аннигиляции (207).

5.4 Коллинеарные расходимости, фрагментационный вклад и условие изоляции фотонов

Как известно, при вычислении сечений рождения прямых фотонов возникают так называемые коллинеарные расходимости, связанные с поведением соответствующих партонных амплитуд рассеяния в кинематической области, в которой конечный фотон, испущенный кварком, близок к последнему. Расходимости такого рода не удастся исключить с помощью учета виртуальных (петлевых) поправок следующих порядков теории возмущений КХД. Поэтому в расчетах обычно применяется фрагментационный механизм, в рамках которого конечный фотон рассматривается как продукт фрагментации цветного партона k . Технически фрагментационный вклад можно получить путем вычисления поправок следующих порядков к механизму прямого рождения, при этом возникающие расходимости факторизуются и учитываются с помощью перенормировки функции фрагментации партона k в фотон $D_{k \rightarrow \gamma}(z, \mu_{\text{F}}^2)$, которые имеют непertурбативную природу и определяются на некотором (достаточно произвольном) масштабе фрагментации μ_{F} [359, 360]. Конечно, фотоны, образующиеся за счет механизма партонной фрагментации, сопровождаются близко расположенными к ним адронными струями.

Для устранения коллинеарных расходимостей мы будем использовать подход, предложенный в работе [353]. Сущность этого подхода заключается в следующем. Как известно, теория возмущений неприменима, когда длина волны испущенного фотона в системе покоя родительского кварка становится больше характерного мас-

штаба адронизации $O(1 \text{ ГэВ}^{-1})$. Ниже этого порога сечение процесса рождения прямых фотонов определяется вкладами различных непertурбативных эффектов, связанных главным образом с фрагментацией партонов в фотоны. Таким образом, это сечение может быть представлено в виде суммы

$$\sigma = \sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2) + \sigma_{\text{fragm}}(\mu_{\text{reg}}^2), \quad (215)$$

где пертурбативный вклад $\sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2)$ вычисляется с помощью (194), (202), (213) и (214). Масштаб μ_{reg} , от которого зависят как пертурбативный, так и фрагментационный вклады, может быть использован для их разделения. Следуя [353], мы принимаем в качестве масштаба фрагментации величину инвариантной массы фотона и исходящего кварка, $\mu_{\text{fr}}^2 = (p + p_i)^2$, и затем ограничиваем пертурбативный вклад областью $\mu_{\text{fr}} \geq \mu_{\text{reg}} \sim 1 \text{ ГэВ}$, устраняя тем самым возникающие коллинеарные расходимости в $\sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2)$. Более того, при этом амплитуды (194) и (202) остаются конечными даже при нулевой массе рождающихся кварков. Зависимость результатов расчетов от выбора значения μ_{reg} исследована ниже. Отметим, что она достаточно мала по сравнению с другими неопределенностями вычислений.

Существенной частью экспериментального анализа (см., например, [361]) является выделение сигнала прямого рождения фотонов на фоне обычно значительно превосходящего его шума от вторичных фотонов, которые являются продуктами электромагнитных распадов различных образующихся в событии частиц (например, распадов $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0\gamma$ и других). Важным условием, которое позволяет значительно уменьшить фон вторичных фотонов, является так называемое условие изоляции. Оно заключается в следующем: фотон считается изолированным, если суммарная адронная поперечная энергия E_T^{had} внутри конуса с апертурой R в плоскости псевдобыстроты η и азимутального угла ϕ с осью вдоль направления импульса фотона меньше некоторого значения E^{max} :

$$\begin{aligned} E_T^{\text{had}} &\leq E^{\text{max}}, \\ (\eta^{\text{had}} - \eta)^2 + (\phi^{\text{had}} - \phi)^2 &\leq R^2. \end{aligned} \quad (216)$$

В экспериментах, проводимых на коллайдере LHC, значения параметров R и E^{max} обычно выбираются равными $R \sim 0.3 - 0.4$ и $E^{\text{max}} \sim 1 - 5 \text{ ГэВ}$ [361].

Условие изоляции фотонов (216) играет важную роль при проведении дальнейших вычислений. Как было показано [362, 363], оно значительно (более чем на порядок) подавляет фрагментационный вклад в сечение рождения прямых фотонов. Следовательно, применение этого (экспериментального) условия в теоретических расчетах позволяет пренебречь вкладом $\sigma_{\text{fragm}}(\mu_{\text{reg}}^2)$ по сравнению с другими теоретическими неопределенностями (связанными, например, с выбором ренормализационного и/или факторизационного масштабов), что значительно упрощает вычисления.

5.5 Выбор параметров и теоретические неопределенности

При вычислении сечений в соответствии с общими формулами (213) и (214) использовалась программа численного интегрирования VEGAS [291], включенная в качестве одной из составных частей в Монте-Карло генератор PEGASUS [100]. Как обычно, в расчетах запрашивалось выполнение нескольких сотен итераций, каждой из которых отвечало порядка миллиона обращений к подынтегральной функции, что позволяет минимизировать погрешность численных вычислений до уровня порядка 1% и ниже как для полных, так и для дифференциальных сечений. При вычислении сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй адронов использовались алгоритмы генерации партонных ливней Монте-Карло генераторов событий CASCADE [97] и PYTHIA [364]. Алгоритм генератора CASCADE позволяет, в частности, реконструировать цепочку эволюции TMD глюонных распределений в соответствии с уравнением CCFM, тем самым обеспечивая возможность точного определения кинематики адронных струй.

Среди теоретических неопределенностей, влияющих на величину рассчитанных сечений, наибольшую роль играют неопределенности, связанные с выбором масштабов ренормализации μ_R , факторизации μ_F и масштаба μ_{reg} . Как и ранее, значения параметров μ_R и μ_F , а также значения N_f и Λ_{QCD} для каждой из рассматриваемых TMD функций распределения глюонов выбираются в соответствии с таблицей 11. Изменение масштабов μ_R , μ_F и μ_{reg} в обычных пределах (уменьшение или увеличение в 2 раза) дает возможность оценить соответствующие неопределенности. В численных расчетах использовались следующие значения: $m_c = 1.5$ GeV, $m_b = 4.75$ GeV, $m_W = 80.403$ ГэВ, $m_Z = 91.1876$ ГэВ, $\Gamma_W = 2.085$ ГэВ, $\Gamma_Z = 2.4952$ ГэВ и $\sin^2 \theta_W = 0.23116$ [216]. Массы всех легких кварков полагались равными нулю. При вычислении вкладов от подпроцессов (206) и (207) с участием кварков в начальном состоянии использовались стандартные (коллинеарные) функции распределения партонов из набора MMHT'2014 (LO) [70].

5.6 Результаты расчетов

В этом разделе представлены результаты расчетов полных и дифференциальных сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов или калибровочных бозонов в сопровождении легких или тяжелых струй в pp столкновениях на коллайдере ЛНС при различных энергиях. Проведено сравнение полученных предсказаний с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS. Получена оценка вклада внутреннего очарования в сечение процессов ассоциативного рождения фотонов или Z бозонов и струй очарованных кварков.

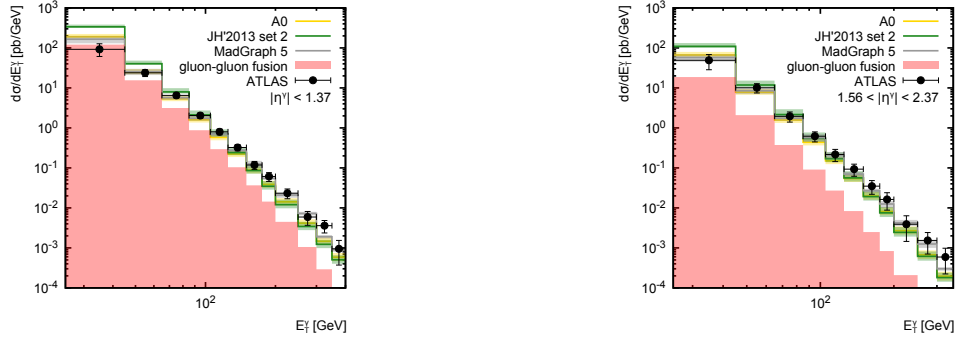


Рис. 85: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и струй очарованных кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отдельно показан вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (190). Результаты NLO вычислений, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MADGRAPH5_AMC@NLO [358] взяты из экспериментальной работы [361]. Данные коллаборации ATLAS [361].

5.6.1 Процессы ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков

Как было отмечено выше, изучение процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых (c или b) кварков представляет особый интерес, поскольку позволяет проводить четкое соответствие между результатами измерений и теоретическими предсказаниями. Первые экспериментальные данные для таких процессов на коллайдере ЛНС были недавно получены коллаборацией ATLAS [361]. Были измерены распределения по поперечной энергии конечных фотонов E_T^γ при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в кинематической области, определяемой соотношениями $E_T^\gamma > 25$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2.37$, $p_T^{\text{jet}} > 20$ ГэВ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2.5$, где η^γ и η^{jet} — псевдобыстроты фотона и струй соответственно. Для описания этих данных был использован изложенный выше комбинированный подход, в рамках которого различная динамика партонных распределений (CCFM или DGLAP) применяется в соответствующих кинематических областях¹⁷.

Результаты наших расчетов представлены на рис. 85 и 86. Закрашенные области на рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений, которые проводились с использованием TMD распределений глюонов A0 и JH'2013 set 2. Теоретические неопределенности включают в себя неопределенности, связанные с как с выбором ренормализационного масштаба, так и с выбором масштаба $\mu_{\text{тег}}$. Кроме того, на рис. 85 и 86 приведены результаты, полученные с помощью Монте-Карло генератора MADGRAPH5_AMC@NLO [358] в рамках NLO приближения

¹⁷Процессы ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков на коллайдере Tevatron в рамках k_T -факторизационного подхода были рассмотрены в работах [365, 366]. Кроме того, были изучены процессы инклюзивного рождения прямых фотонов в ep и pp столкновениях [367, 368], а также процессы рождения фотонных пар [369] (см. также [210]).

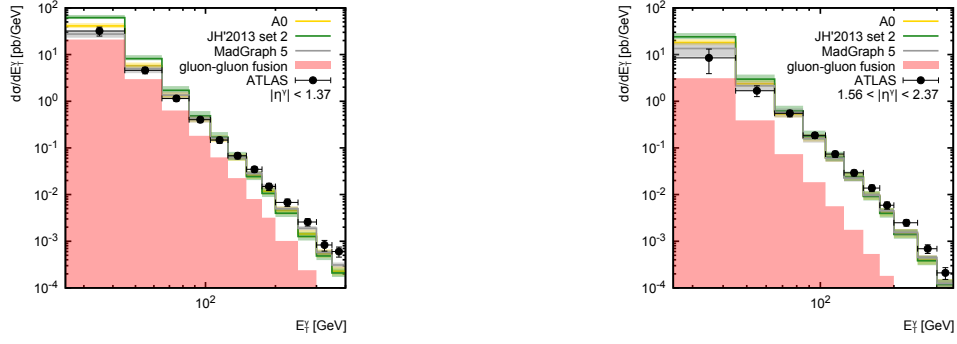


Рис. 86: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и струй b -кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 85. Данные коллаборации ATLAS [361].

обычной (коллинеарной) теории возмущений КХД. Видно, что наши предсказания достаточно хорошо согласуются с данными коллаборации ATLAS [361] как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. В области больших значений $E_T^\gamma \geq 150 - 200$ ГэВ полученные результаты лежат несколько ниже данных, что связано с использованием в расчетах древесного приближения для вкладов подпроцессов (206) и (207). Однако учет партонных ливней и поправок следующего (NLO) порядка с помощью генератора MADGRAPH5_amc@NLO позволяет достичь лучшего согласия с экспериментом при $E_T^\gamma \geq 200$ ГэВ. Как видно из рис. 85 и 86, подпроцессы с участием кварков в начальном состоянии действительно играют доминирующую роль в области больших поперечных импульсов и необходимы для количественного описания экспериментальных данных во всей кинематической области. Отметим, что использование в расчетах глюонного распределения A0 приводит к практическому совпадению результатов наших вычислений с результатами MADGRAPH5_amc@NLO. В то же время предсказания, полученные с помощью функции распределения JH'2013 set 2 несколько переоценивают последние в области не очень больших значений $E_T^\gamma \leq 50$ ГэВ. Кроме того, как видно из рис. 85 и 86, величина теоретических неопределенностей наших расчетов сравнима с величиной неопределенностей аналогичных вычислений в рамках NLO приближения теории возмущений КХД.

Как уже было упомянуто выше, изучение процессов связанного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков дает возможность непосредственной проверки предсказаний моделей с так называемыми внутренними очарованием (intrinsic charm, IC) и прелестью (intrinsic beauty, IB) [370–373] (см. также обзор [71]). В таких моделях предполагается существование внутри протона Фоковских состояний $|uudc\bar{c}\rangle$ и $|uudb\bar{b}\rangle$ с временем жизни, независимым от масштаба жесткого процесса. Наличие этих состояний связано с непертурбативными аспектами КХД; при этом ожидается, что вероятность обнаружить состояния IC намного (более чем на порядок, пропорционально отношению масс m_b^2/m_c^2) превышает вероятность обнаружения состояний

IV. Используя известную модель BHPS [370, 371], мы оценим величину возможного вклада от IC в сечение процесса рождения прямых фотонов и очарованных кварков и влияние таких состояний на количественное описание экспериментальных данных коллаборации ATLAS [361].

В рамках модели BHPS плотность c -кварков в протоне при некотором начальном масштабе μ_0 представляется в виде суммы [370, 371]

$$xc(x, \mu_0^2) = xc_{\text{ext}}(x, \mu_0^2) + xc_{\text{int}}(x, \mu_0^2), \quad (217)$$

где функция распределения $xc_{\text{ext}}(x, \mu_0^2)$ может быть вычислена в рамках КХД с использованием, например, подходов FFNS (Fixed Flavor Number Scheme, см., например, [374, 375]), ZMVFNS (Zero Mass Variable Flavor Number Scheme, см., например, [376]) или GMVFNS (General Mass Variable Flavor Number Scheme) [377–381]. Так, в рамках подхода FFNS при $N_f = 3$ предполагается, что очарованные кварки, обладающие ненулевой массой m_c , рождаются только в результате жесткого партонного взаимодействия, при этом три конституэнтных легких кварка внутри протона полагаются безмассовыми. В рамках схемы ZMVFNS используется безмассовое приближение для всех ароматов, справедливое в том случае, когда масштаб партонного подпроцесса существенно превышает порог рождения тяжелых кварков. В рамках подхода GMVFNS число безмассовых кварков внутри протона N_f зависит от масштаба μ : при $\mu \gg m_c$ очарованные кварки рассматриваются как конституэнтные ($N_f = 4$), при $\mu \ll m_c$ их вклад в структурную функцию отсутствует, а в области промежуточных значений μ используется¹⁸ ренормализационная схема [382]. Второе слагаемое в (217), соответствующее вкладу IC, имеет вид:

$$xc_{\text{int}}(x, \mu_0^2) = c_0 w_{\text{IC}} x^2 [(1-x)(1+10x+x^2) + 6x(1+x) \ln(x)], \quad (218)$$

где w_{IC} — вероятность обнаружить состояние IC в протоне и c_0 — некоторая нормализационная константа. С помощью решения уравнений эволюции DGLAP функция распределения $xc(x, \mu^2)$ может быть получена для любых значений масштаба μ . Такие расчеты были проведены в NLO [376] и NNLO [68] приближениях для нескольких фиксированных значений w_{IC} , например, для $w_{\text{IC}} = 1\%$ и $w_{\text{IC}} = 3.5\%$ [376]. Кроме того, было показано [383, 384], что при решении эволюционных уравнений интерференционными членами, возникающими согласно (217), можно пренебречь. Учитывая линейную зависимость плотности (218) от вероятности w_{IC} , это дает возможность использовать простое приближение для вклада IC для произвольных значений μ :

$$xc_{\text{int}}(x, \mu^2) = \frac{w_{\text{IC}}}{w_{\text{IC}}^{\text{max}}} xc_{\text{int}}(x, \mu^2)|_{w_{\text{IC}}=w_{\text{IC}}^{\text{max}}}, \quad (219)$$

где $w_{\text{IC}}^{\text{max}} = 3.5\%$ соответствует максимальному значению w_{IC} , определенному из ана-

¹⁸Аналогичный подход применяется также для вычисления плотности b -кварков в протоне.

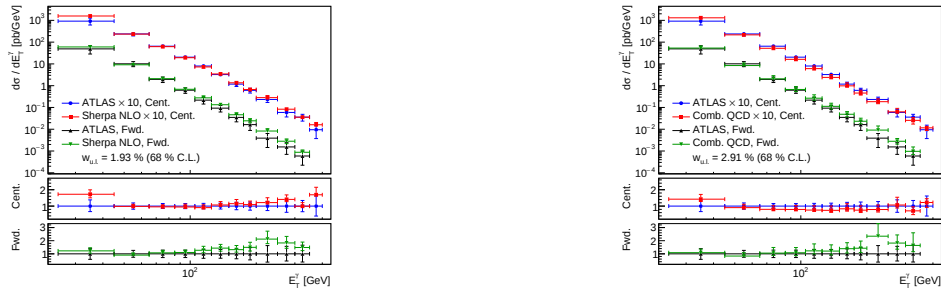


Рис. 87: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и струй очарованных кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ, рассчитанные в рамках комбинированного подхода и рамках NLO приближения теории возмущений КХД с помощью Монте-Карло генератора SHERPA при соответствующих значениях $w_{IC}^{u.l.}$. Данные коллаборации ATLAS [361].

лиза данных, полученных на коллайдере HERA (см. также [376]).

Соотношение (219) справедливо с точностью порядка 0.5% [385] и позволяет определить верхнюю границу $w_{IC}^{u.l.}$ для вероятности w_{IC} из анализа недавних экспериментальных данных коллаборации ATLAS [361]. Подчеркнем, что извлечь точное значение w_{IC} из этих данных достаточно затруднительно ввиду значительных погрешностей измерений и теоретических неопределенностей вычислений. Для определения верхней границы $w_{IC}^{u.l.}$ были рассчитаны [356] дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и c -струй как функции поперечной энергии фотонов E_T^γ для нескольких сотен значений w_{IC} , взятых в интервале $0 < w_{IC} < 3.5\%$. Расчеты были проведены в области центральных ($|\eta^\gamma| < 1.37$) и передних ($1.56 < |\eta^\gamma| < 2.37$) быстрот как в рамках описанного выше комбинированного подхода, так и в рамках NLO приближения теории возмущений КХД с использованием Монте-Карло генератора SHERPA [386]. Отметим, что при расчетах в рамках комбинированного подхода был дополнительно учтен вклад подпроцесса $c + g^* \rightarrow \gamma + c$, где в качестве плотности очарованных кварков в протоне использовалось выражение (219). Функции распределения кварков были взяты из набора CTEQ66 (NLO) [376]. Далее были вычислены значения χ^2 в зависимости от величины w_{IC} с учетом теоретических неопределенностей расчетов и были найдены верхние границы вероятности $w_{IC}^{u.l.}$, которые соответствуют увеличенным на единицу минимальным значениям χ^2 . Расчеты в рамках комбинированного подхода и в рамках NLO приближения теории возмущений КХД приводят к значениям $w_{IC}^{u.l.} = 2.91\%$ и $w_{IC}^{u.l.} = 1.93\%$ с коэффициентом надежности $P = 68\%$. Соответствующие предсказания для распределений по поперечной энергии фотонов представлены на рис. 87. Довольно существенное отличие между полученными значениями $w_{IC}^{u.l.}$ связано главным образом с учетом эффектов от партонных ливней и учетом дополнительных диаграмм в NLO вычислениях, выполненных с помощью генератора SHERPA. Следовательно, оценка верхней границы вероятности $w_{IC}^{u.l.} = 1.93\%$ представляется более

реалистичной¹⁹. В любом случае, можно заключить, что анализ данных коллаборации ATLAS [361] позволяет уточнить максимальное значение вероятности w_{IC} , определенное ранее из экспериментов на коллайдере HERA. Полученная верхняя оценка может быть в дальнейшем улучшена по мере накопления и появления новых экспериментальных данных (в частности, для процесса ассоциативного рождения Z бозонов и струй очарованных кварков, см. [385]), увеличения точности измерений и уменьшения неопределенностей теоретических предсказаний.

5.6.2 Процесс ассоциативного рождения прямых фотонов и лидирующей струи адронов

В отличие от процессов рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков, при описании сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй, возникающих в процессе адронизации легких кварков и глюонов, необходимо дополнительно учитывать в расчетах вклады подпроцессов порядка $O(\alpha\alpha_s)$:

$$q(k_1) + g(k_2) \rightarrow \gamma(p_1) + q(p_2), \quad (220)$$

$$q(k_1) + \bar{q}(k_2) \rightarrow \gamma(p_1) + g(p_2), \quad (221)$$

где в круглых скобках указаны 4-импульсы соответствующих частиц. Как было показано выше, такие подпроцессы играют существенную роль в области достаточно больших значений поперечных импульсов (или больших значений переменной x). Конечно, величиной поперечного импульса начальных партонов здесь также можно пренебречь и учитывать вклад подпроцессов (220) и (221) в рамках обычного коллинеарного приближения КХД. Вычисление соответствующих сечений не представляет трудностей. Отметим только, что во избежание двойного счета в (220) должен учитываться только вклад валентных кварков, поскольку вклад морских кварков уже учтен с помощью подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (190).

При проведении расчетов в рамках k_T -факторизационного подхода необходимо учитывать тот факт, что в дополнение к струям, образующимся в результате адронизации кварков в конечном состоянии (190), значительное число струй формируется в процессе эволюции начального глюонного каскада. В этом случае кинематические свойства адронных струй описываются с помощью уравнения глюонной эволюции²⁰. Изучение различных наблюдаемых, связанных с кинематикой струй адронов позволяет получить дополнительную информацию о динамике TMD глюонной эволюции в протоне. Для моделирования процессов излучения глюонов в начальном состоянии

¹⁹Недавно группой NNPDF на основе анализа экспериментальных данных LHC для широкого класса процессов была получена оценка $w_{\text{IC}} = 0.34 \pm 0.14\%$ [69].

²⁰В отличие от обычной коллинеарной теории возмущений КХД, где кинематика (и само наличие) струй определяется только соответствующей амплитудой партонного рассеяния.

в соответствии с уравнением ССФМ используется алгоритм генерации партонных ливней Монте-Карло генератора CASCADE [97], при этом вычисление полных и дифференциальных сечений выполняется в два этапа [387]. Так, события, отвечающие процессам рождения прямых фотонов в соответствии с (213) или (214), записываются в файл формата *.lhe (Les Houches Event [99]), который часто используется при проведении расчетов и позволяет легко проводить дальнейший анализ и обработку событий с помощью различных инструментов (таких, например, как PYTHIA [364]). На следующем этапе этот *.lhe файл используется для численной реконструкции цепочки эволюции ССФМ глюонных распределений (а также для учета эффектов от партонных ливней в конечном состоянии), что позволяет вести дальнейший отбор событий с любым числом адронных струй в соответствии с критериями экспериментального анализа. Вычисление вкладов от subprocessов (206), (207), (220) и (221) с участием кварков в начальном состоянии производилось аналогичным образом с использованием алгоритма генерации партонных ливней (как в начальном, так и в конечном состоянии) Монте-Карло генератора PYTHIA [364]. Отбор струй осуществлялся с использованием алгоритма, включенного в пакет программ FASTJET [388] при значении параметра $R_{\text{jet}} = 0.4$, что соответствует экспериментальным критериям.

Экспериментальные данные для процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй в pp столкновениях на коллайдере LHC были получены коллаборациями CMS [390, 393] и ATLAS [391, 392, 394, 395] при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Однако необходимо отметить, что данные [393–395] были получены в области достаточно больших значений $E_T^\gamma \geq 130 - 190$ ГэВ, что соответствует области $x \sim E_T^\gamma / \sqrt{s} \sim 0.1$, в которой основную роль играют subprocessы (206), (207), (220) и (221), весьма слабо зависящие от глюонной плотности в протоне. Поэтому ниже мы будем рассматривать только измерения [390–392], которые наиболее чувствительны к глюонным распределениям в области малых значений переменной x . Так, коллаборацией CMS были получены экспериментальные данные для дифференциального сечения $d\sigma/dE_T^\gamma d\eta^\gamma d\eta^{\text{jet}}$ с учетом различных соотношений между псевдобыстродами фотона и лидирующей струи адронов в области $E_T^\gamma > 40$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 30$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2.5$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2.5$ при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [390]. Коллаборацией ATLAS были измерены распределения по поперечной энергии фотона E_T^γ при $E_T^\gamma > 45$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 40$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2.37$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2.37$ при той же энергии [391]. Кроме того, были измерены распределения по поперечной энергии фотона E_T^γ , поперечному импульсу p_T^{jet} и быстрой y^{jet} адронной струи, а также распределения по разности азимутальных углов фотона и струи $\Delta\phi^{\gamma-\text{jet}}$, инвариантной массе $M^{\gamma-\text{jet}}$ и углу рассеяния $\cos\theta = \tanh(y^\gamma - y^{\text{jet}})/2$ в области $E_T^\gamma > 25$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 20$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 1.37$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 4.4$ [392].

Результаты наших расчетов представлены на рис. 88 — 91, где были использованы TMD глюонные распределения JH’2013 set 1 и JH’2013 set 2. Как обычно, закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей

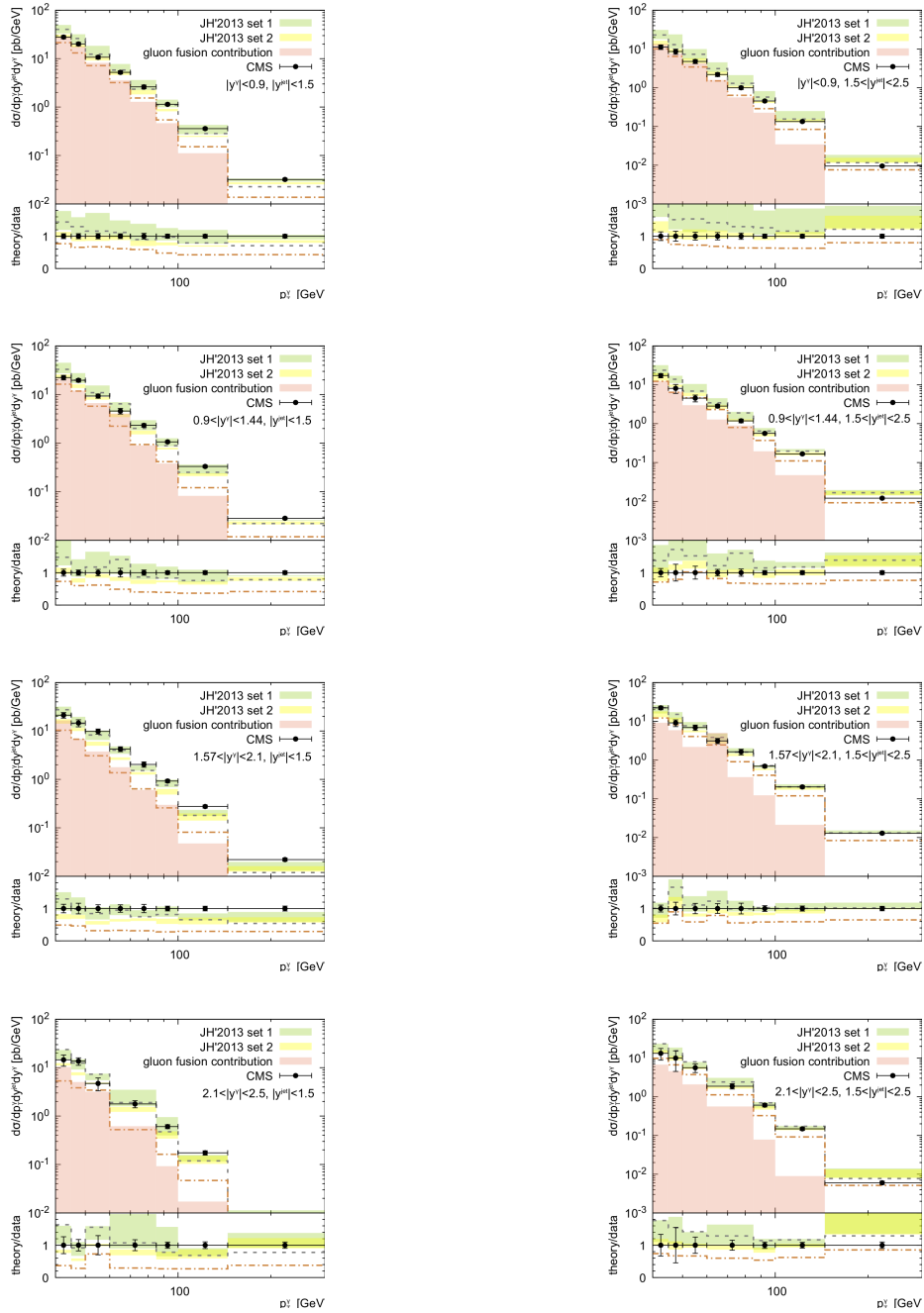


Рис. 88: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отдельно показан вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (190). Штриховые гистограммы соответствуют результатам расчетов с учетом партонных ливней только в начальном состоянии. Штрих-пунктирные гистограммы отвечают результатам вычислений в рамках приближения [389]. Экспериментальные данные коллаборации CMS [390].

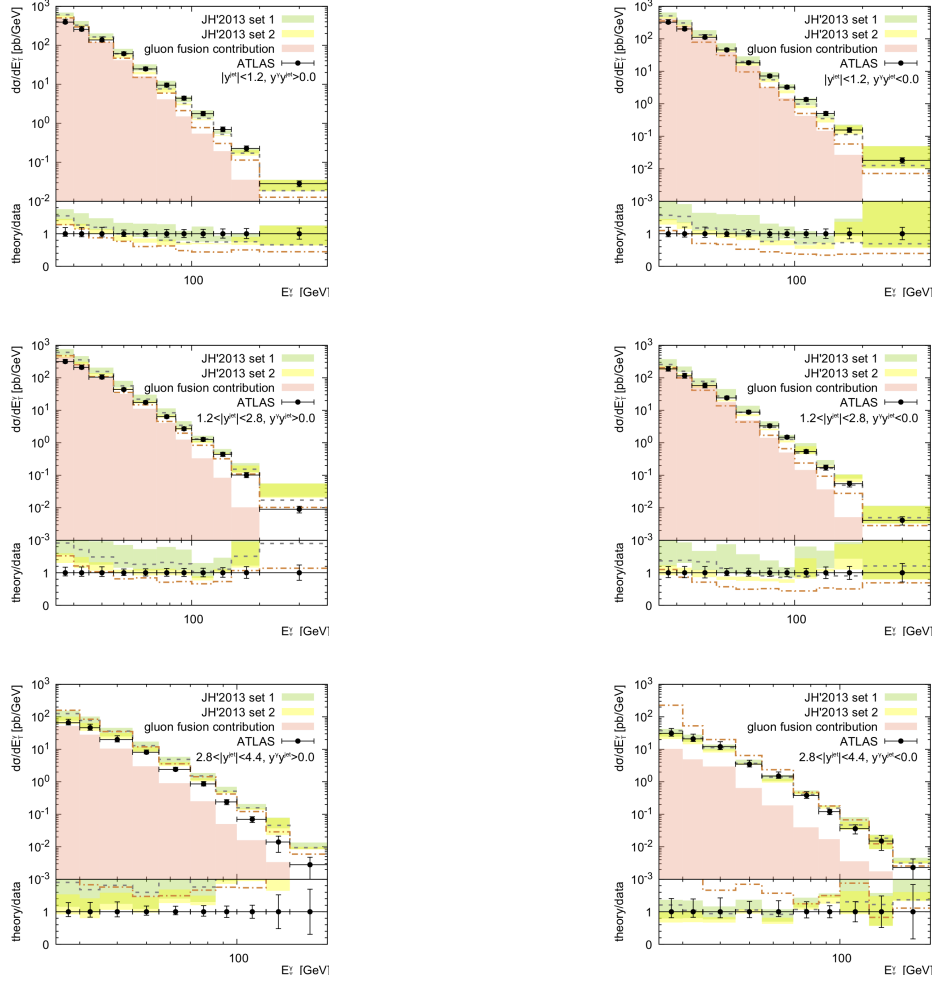


Рис. 89: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 88. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [391].

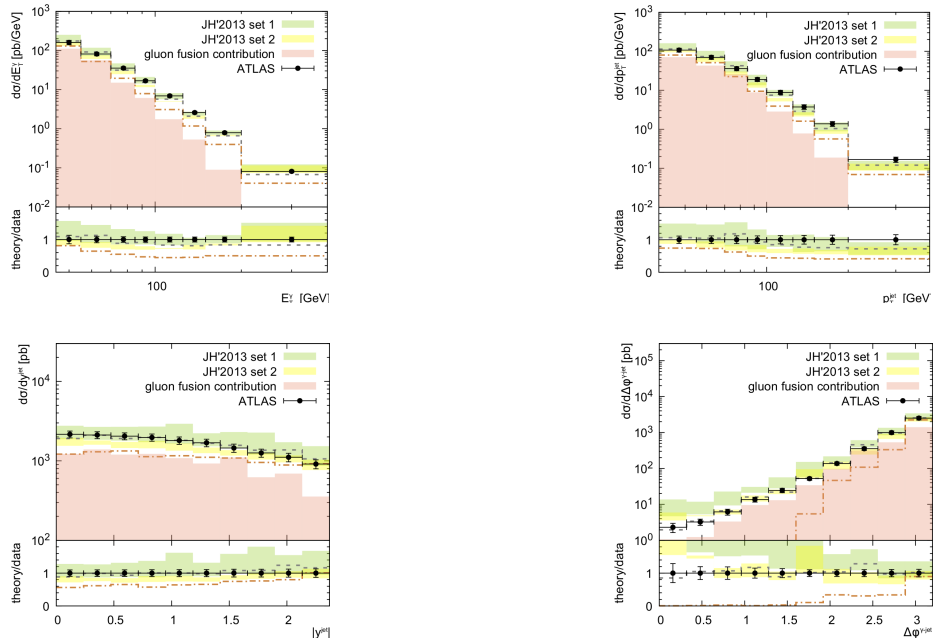


Рис. 90: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 88. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [392].

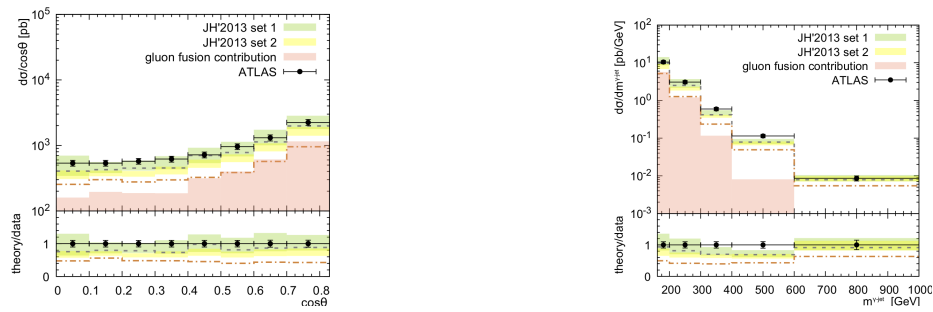


Рис. 91: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ с учетом дополнительных кинематических ограничений: $\cos\theta < 0.83$, $M^{\gamma\text{-jet}} > 161$ ГэВ и $|y^\gamma + y^{\text{jet}}| < 2.37$. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 88. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [392].

вычислений. Вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (190) показан отдельно. Видно, что полученные предсказания достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [390–392] коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Отдельно следует подчеркнуть достигнутое хорошее описание угловых корреляций между импульсами фотона и адронной струи (см. рис. 90 и 91), которые достаточно чувствительны к механизму образования конечного состояния. Как и ожидалось, подпроцесс глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности играет лидирующую роль в области не очень больших поперечных энергий $E_T^\gamma \leq 120 - 150$ ГэВ. При больших значениях E_T^γ вклад этого подпроцесса в сечение становится пренебрежимо мал и основную роль начинают играть подпроцессы с участием кварков в начальном состоянии (206), (207), (220) и (221). Видно, что учет таких процессов необходим для описания экспериментальных данных во всей кинематической области.

Для более детального изучения влияния эффектов партонных излучений (ливней) на теоретические предсказания были проведены вычисления, в которых учитывались излучения партонов только в начальном состоянии. Полученные результаты представлены штриховыми гистограммами на рис. 88 — 91. Как видно, эффект от партонных ливней в конечном состоянии достаточно мал для распределений по всем рассматриваемым кинематическим переменным, за исключением распределений по разности азимутальных углов $\Delta\phi^{\gamma\text{-jet}}$ в области $\Delta\phi^{\gamma\text{-jet}} \sim 0$ (см. рис. 90). Отметим, что в предыдущих работах [48, 367, 396, 397] влияние партонных ливней в начальном состоянии на кинематику адронных струй либо не рассматривалось вообще [48], либо учитывалось [367, 396, 397] только в рамках некоторого приближения [389]. Так, предполагалось, что партон (главным образом, глюон) k' , испущенный на последнем шаге эволюции, компенсирует поперечный импульс партона (глюона), участвующего в жестком подпроцессе взаимодействия: $\mathbf{k}'_T \simeq -\mathbf{k}_T$. Все остальные партоны, излученные во время КХД эволюции партонного каскада, относятся к протонному остатку, который, согласно предположениям [389], обладает поперечным импульсом, пренебрежимо малым по сравнению с $\mathbf{k}'_T$. Таким образом, партон k' формирует адронную струю с $E_T^{\text{jet}} = |\mathbf{k}'_T|$ в дополнение к струям, образующимся в жестком подпроцессе, из которых в дальнейшем выбирается одна, обладающая наибольшей поперечной энергией (лидирующая струя). Результаты, полученные с использованием этого предположения, также приведены на рис. 88 — 91 (штрих-пунктирные гистограммы). Как легко видеть, предложенный нами метод [387] позволяет значительно улучшить согласие результатов расчетов с экспериментальными данными по сравнению с предсказаниями приближения [389].

5.6.3 Процессы ассоциативного рождения Z бозонов и струй тяжелых кварков

Экспериментальные данные для сечений процессов ассоциативного рождения Z бозонов и одного или нескольких b -кварков в pp столкновениях на коллайдере LHC были получены коллаборациями ATLAS [398] и CMS [399]. Коллаборацией ATLAS были измерены распределения Z бозонов по поперечному импульсу p_T^Z и быстрой y^Z в процессе рождения Z бозонов и одной (лидирующей) b -струи в кинематической области $p_T^b > 20$ ГэВ, $|\eta^b| < 2.4$ и энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, при этом поперечные импульсы и псевдобыстры лептонов, возникающих от распада Z бозонов, должны удовлетворять условию $p_T^l > 20$ ГэВ, $|\eta^l| < 2.4$, а их инвариантная масса должна лежать в интервале $76 < M^{ll} < 106$ ГэВ [398]. В этой же области также были получены данные для ряда дифференциальных сечений процесса рождения Z бозонов и двух b -струй: распределений по поперечному импульсу и быстрой Z бозонов, инвариантной массе пары b -кварков M^{bb} и расстоянию ΔR^{bb} между b -струями в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов [398]. Коллаборацией CMS были проведены измерения дифференциальных сечений процесса ассоциативного рождения Z бозонов и двух b -адронов в кинематической области $p_T^b > 15$ ГэВ, $|\eta^b| < 2$, $p_T^l > 20$ ГэВ, $|\eta^l| < 2.4$ и $81 < M^{ll} < 101$ ГэВ при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [399]. Так, были изучены распределения по разности азимутальных углов b -адронов $\Delta\phi^{bb}$, расстоянию между ними в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов ΔR^{bb} , расстоянию $\min \Delta R^{Zb}$ между Z бозоном и ближайшим к нему b -адроном, а также переменной A^{Zbb} , определяемой с помощью соотношения

$$A^{Zbb} = \frac{\max \Delta R^{Zb} - \min \Delta R^{Zb}}{\max \Delta R^{Zb} + \min \Delta R^{Zb}}, \quad (222)$$

где $\max \Delta R^{Zb}$ — расстояние между Z бозоном и вторым b -адроном в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов. Такие корреляционные переменные полезны для изучения вкладов различных механизмов в сечение ассоциативного рождения Z бозонов и тяжелых кварков, а также для выяснения роли поправок следующих порядков теории возмущений КХД.

Результаты наших численных расчетов представлены на рис. 92 — 94, при этом была использована TMD функция распределения глюонов JH'2013 set 2. Как и ранее, закрашенные области на этих рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отметим, что для описания фрагментации b -кварков в b -адроны была использована известная параметризация Петерсона [235] с обычным для b -кварков значением параметра $\epsilon_b = 0.006$. Дополнительно был учтен возможный вклад от механизма двойного партонного рассеяния, который широко обсуждается в литературе (см., например, [253–257]). Этот вклад был рассчитан согласно известной

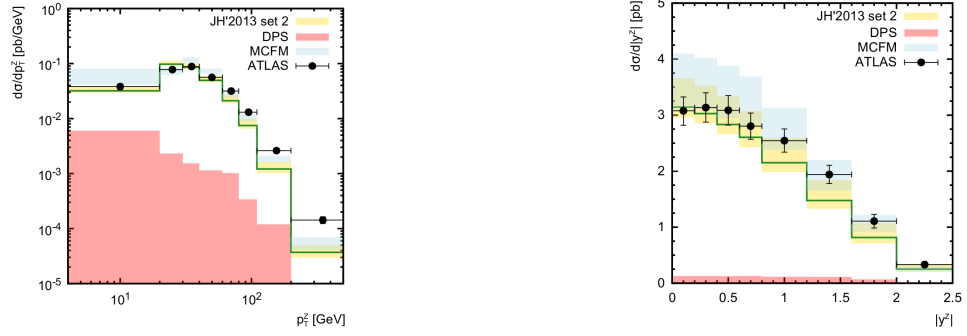


Рис. 92: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и лидирующей струи b -кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты вычислений в NLO приближении теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MCFM [400], взяты из экспериментальной работы [398]. Данные коллаборации ATLAS [398].

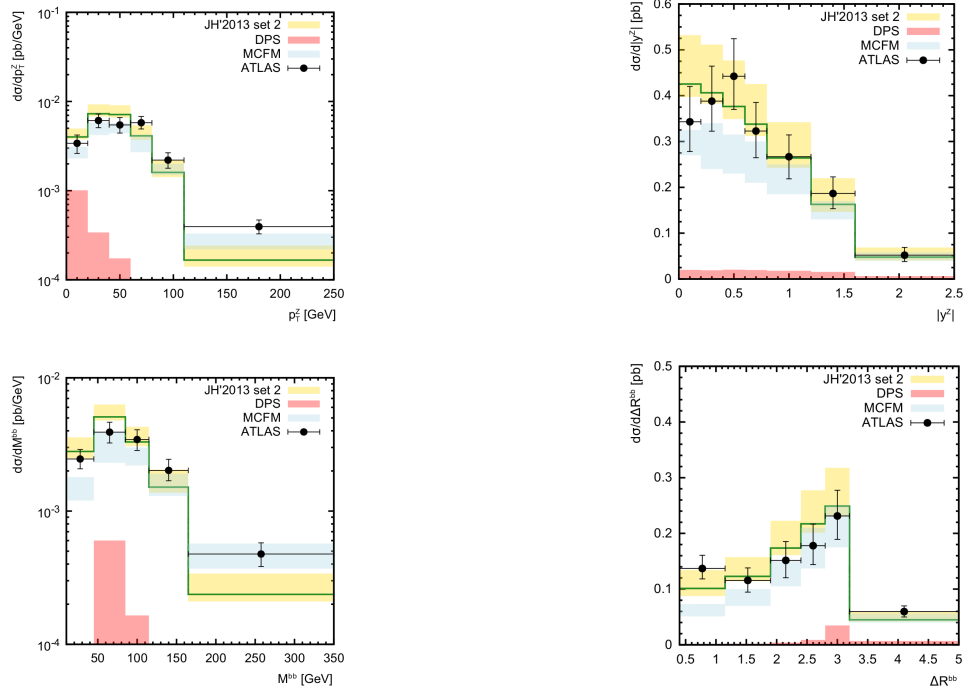


Рис. 93: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и двух b -струй в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 92. Данные коллаборации ATLAS [398].

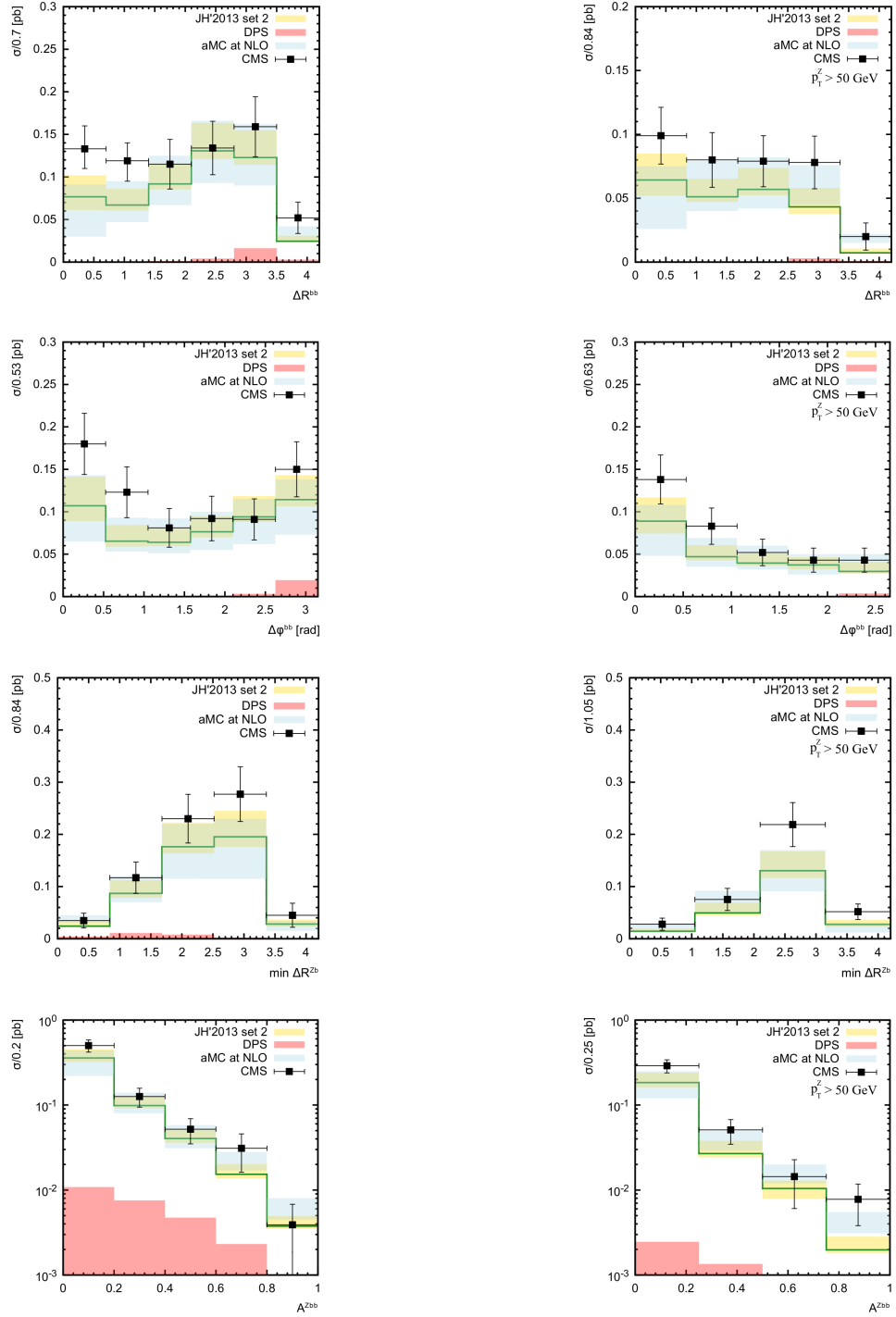


Рис. 94: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и двух b -адронов в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты вычислений в NLO приближении теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MADGRAPH5_amc@NLO [358], взяты из экспериментальной работы [399]. Данные коллаборации CMS [399].

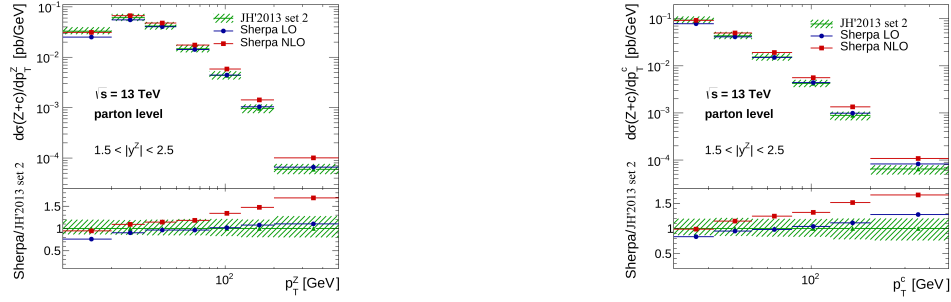


Рис. 95: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и струи очарованных кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты вычислений в NLO приближении теории возмущений КХД получены с помощью Монте-Карло генератора событий SHERPA [386].

факторизационной формуле:

$$\sigma_{\text{DPS}}(Z + Q + \bar{Q}) = \frac{\sigma(Z)\sigma(Q + \bar{Q})}{\sigma_{\text{eff}}}, \quad (223)$$

где значение феноменологического параметра (так называемое ”эффективное сечение”) $\sigma_{\text{eff}} \simeq 15$ мбн получено из анализа экспериментальных данных для различных процессов. Кроме того, на рис. 92 — 94 приведены предсказания, полученные с помощью Монте-Карло генераторов MCFM [400] и MADGRAPH5_AMC@NLO [358] в рамках NLO приближения обычной теории возмущений КХД. Легко видеть, что наши предсказания достаточно хорошо согласуются (в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей) с экспериментальными данными коллабораций ATLAS и CMS как по форме, так и по абсолютной величине. Исключение составляют лишь область больших значений поперечного импульса $p_T^Z \geq 100$ ГэВ и/или область больших инвариантных масс $M^{bb} \geq 150$ ГэВ, где вклад подпроцессов (206) и (207) является определяющим. Однако необходимо отметить, что в области больших p_T^Z поправки высших порядков теории возмущений КХД к этим вкладам начинают играть существенную роль. Так, на рис. 95 приведены результаты расчетов дифференциальных сечений процесса ассоциативного рождения Z бозонов и струй очарованных кварков в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генератора SHERPA [386]. Легко видеть, что учет NLO поправок к (206) и (207) приводит к значительному увеличению рассчитанных сечений, тем самым улучшая согласие численных результатов с экспериментальными данными. Следует также подчеркнуть, что предсказания k_T -факторизационного подхода и результаты NLO расчетов практически совпадают в области $p_T^Z \leq 100$ ГэВ, в которой основную роль играет вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния (190). Таким образом, использование k_T -факторизационного подхода и уравнения эволюции CCFM позволяет воспроизвести результаты традиционных, значительно более

трудоемких вычислений в рамках коллинеарного приближения КХД с учетом поправок высших порядков. Как видно из рис. 92 — 94, механизм двойного партонного рассеяния оказывает лишь небольшое влияние на предсказания в области малых значений поперечного импульса. В области средних и больших p_T^Z его вклад в сечения пренебрежимо мал. Зависимость полученных результатов от величины параметра ϵ_b невелика: изменение его значения от $\epsilon_b = 0.006$ до $\epsilon_b = 0.003$ приводит лишь к незначительному росту рассчитанных сечений, который, однако, намного меньше других неопределенностей вычислений.

5.6.4 Связь глюонной динамики ССФМ и динамики РВ

Проведенные расчеты сечений ассоциативного рождения прямых фотонов или калибровочных бозонов и адронных струй в рамках k_T -факторизационного подхода КХД были основаны главным образом на использовании динамики ССФМ [17–20] для распределений глюонов в протоне. Как было отмечено выше, это позволяет эффективно учесть вклад комптоновских диаграмм ведущего порядка $O(\alpha\alpha_s)$, зависящих от кварковых плотностей, с помощью подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности более высокого порядка $O(\alpha\alpha_s^2)$. Таким образом, в расчетах вместо недостаточно хорошо изученных TMD распределений кварков (не учитываемых уравнением эволюции ССФМ) используются только значительно лучше известные TMD функции распределения глюонов.

Однако такая возможность отсутствует в рамках подхода РВ [65,66], основанного на уравнениях КХД эволюции DGLAP [4–7]. В этом случае вместо (190) необходимо явным образом учитывать вклад подпроцесса порядка $O(\alpha\alpha_s)$:

$$q^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p_1) + q(p_2), \quad (224)$$

который зависит как от глюонных, так и кварковых (TMD) распределений в протоне. Кроме того, как было показано выше, для описания экспериментальных данных ЛНС во всей кинематической области необходим также учет вкладов (206) и (207). Конечно, представляется интересным сравнить результаты, полученные с помощью двух существенно различных подходов к вычислению партонных плотностей, но тем не менее основанных на одной и той же теореме факторизации (2).

Следует отметить, что непосредственное суммирование вкладов подпроцесса (224) и, например, (206) приведет к двойному счету в рамках подхода РВ. Действительно, часть фейнмановских диаграмм, соответствующих подпроцессу (206) будет уже эффективно учтена в (224) с помощью распределений РВ, включающих в себя члены, отвечающие испусканию кварков и глюонов в начальном состоянии согласно уравнениям КХД эволюции партонного каскада. Чтобы избежать такого двойного счета, ниже мы будем использовать метод, примененный ранее в работах [41,153,401]. Этот метод заключается в отделении партонов, испускаемых в процессе эволюции каскада от партонов, рождающихся непосредственно в жестком подпроцессе рассеяния

(вычисляемого в следующем порядке по константе связи КХД) с помощью введения некоторого дополнительного параметра k_T^{cut} . Так, при вычислении сечения подпроцесса (224) в соответствии с общей формулой k_T -факторизационного подхода (92) мы ограничиваем область интегрирования по поперечным импульсам начальных партонов, полагая $|\mathbf{k}_{1T}| < k_T^{\text{cut}}$ и $|\mathbf{k}_{2T}| < k_T^{\text{cut}}$. Тем самым мы исключаем из рассмотрения в рамках подпроцесса (224) такие кварки и глюоны, которые испускаются в процессе эволюции партонных распределений РВ и которые обладают поперечным импульсом $p_T > k_T^{\text{cut}}$. Однако вклад этих партонных эмиссий может быть учтен с помощью подпроцесса (206) и подпроцесса

$$q(k_1) + g(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + g(p_1) + q(p_2) \quad (225)$$

при отборе только тех событий, в которых конечные кварки и/или глюоны рождаются с поперечным импульсом, превышающим пороговое значение k_T^{cut} . Такое разделение партонных эмиссий между подпроцессами (224) и (206), (225) в соответствии с величиной k_T^{cut} позволяет исключить двойной счет при использовании партонных распределений РВ.

Конечно, параметр k_T^{cut} не является универсальным и его значение зависит как от самого изучаемого процесса, так и от конкретных кинематических условий. Для определенности рассмотрим процесс ассоциативного рождения Z бозонов и лидирующей струи b -кварков и определим значение k_T^{cut} в области, отвечающей условиям эксперимента ATLAS [398]. Для этого вычислим зависимость сечения подпроцесса (224) от величины поперечного импульса начального глюона и зависимость сечения подпроцесса (225) от поперечного импульса конечного глюона. Полученные результаты приведены на рис. 96, где использованы обозначения $k_T = |\mathbf{k}_{2T}|$ и $k_T = |\mathbf{p}_{1T}|$ для (224) и (225) соответственно. Расчеты были выполнены с помощью Монте-Карло генератора KATIE [98], который позволяет, в частности, в автоматическом режиме вычислять амплитуды вне массовой поверхности подпроцессов (224) и (225) в древесном приближении. Выбирая величину k_T^{cut} равной некоторому (достаточно произвольному) значению k_T , мы тем самым представляем дифференциальное сечение рассматриваемого процесса в виде суммы вклада (224) слева от вертикальной линии $k_T^{\text{cut}} = k_T$ и вклада подпроцесса (225) справа от нее, при этом итоговое распределение должно будет иметь ступеньчатую форму при $k_T = k_T^{\text{cut}}$. Оптимальному выбору параметра k_T^{cut} будет, очевидно, отвечать такое значение, при котором размер этой ступеньки будет минимальным. Как видно из рис. 96, это достигается при $k_T^{\text{cut}} \simeq 30$ ГэВ. Более того, при такой величине k_T^{cut} распределение процесса ассоциативного рождения Z бозонов и b -струй по поперечному импульсу k_T становится практически непрерывным. Зависимость полного сечения от k_T^{cut} весьма невелика: при изменении k_T^{cut} в широком диапазоне в области $k_T^{\text{cut}} > 20$ ГэВ сечение изменяется не более чем на 5% (см. рис. 96), что, конечно, намного меньше других неопределенностей расчетов, связанных, например, с выбором ренормализационного и/или факторизационного

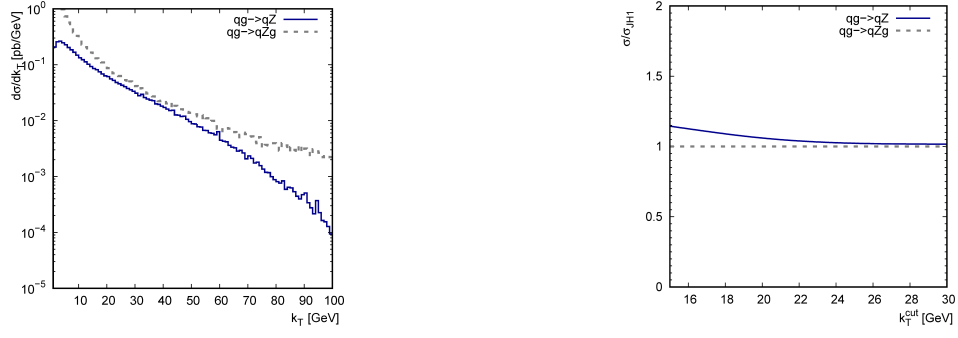


Рис. 96: Слева: дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и лидирующей струи b -кварков в pp столкновениях в зависимости от переменной k_T , вычисленные с помощью подпроцессов (224) и (225). Справа: зависимость полного сечения этого процесса от величины k_T^{cut} . Расчеты выполнены в кинематической области эксперимента коллаборации ATLAS при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [398].

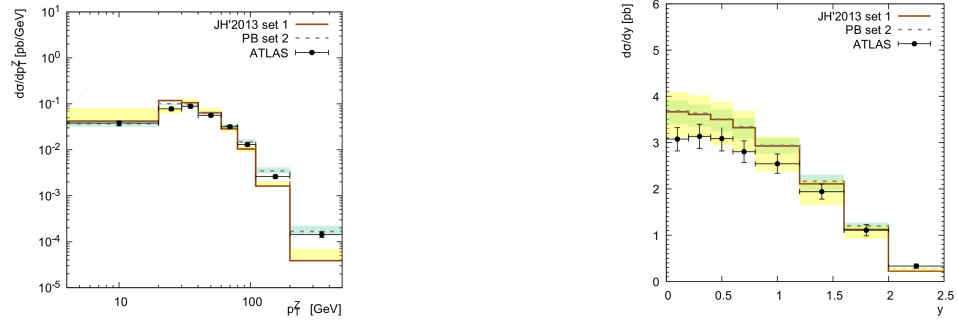


Рис. 97: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и лидирующей струи b -кварков в pp столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Данные коллаборации ATLAS [398].

масштабов.

Определенное таким образом значение $k_T^{\text{cut}} = 30$ ГэВ было использовано в дальнейших расчетах полного и дифференциальных сечений процесса ассоциативного рождения Z бозона и лидирующей струи b -кварков в кинематической области измерений коллаборации ATLAS [398]. Некоторые результаты, полученные с помощью партонных распределений из набора PB'2018 set 2, представлены на рис. 97. Здесь же приведены результаты расчетов в рамках подхода CCFM с использованием TMD глюонного распределения JH'2013 set 1. Отметим, что выбор именно этих функций связан главным образом с тем, что при определении численных значений параметров соответствующих начальных (стартовых) партонных распределений был использован один и тот же набор экспериментальных данных и применялись одинаковые условия углового упорядочивания испускаемых в процессе эволюции партонов. Конечно, такой выбор дает возможность для непосредственного сравнения результатов двух расчетов. Как легко видеть, предсказания, полученные в рамках рассматриваемых схем, находятся в очень хорошем согласии друг с другом. Действительно,

распределения по быстроте Z бозонов практически совпадают между собой. Распределения по поперечному импульсу p_T^Z также хорошо согласуются друг с другом в области $p_T^Z \leq 100$ ГэВ. При больших значениях p_T^Z подход РВ дает лучшее согласие с экспериментальными данными благодаря эффективному учету партонных ливней в начальном состоянии, а также за счет учета дополнительного вклада в сечение от подпроцесса (225). Таким образом, можно заключить [152], что при соответствующем выборе партонных подпроцессов и проведении необходимой процедуры устранения двойного счета может быть установлено взаимное соответствие между результатами вычислений, в которых используются различные уравнения КХД эволюции (CCFM и РВ) для TMD распределений кварков и/или глюонов в протоне. Отметим, что подобная связь между подходом РВ и методом KMR также была обнаружена [41] при изучении процессов парного рождения тяжелых кварков.

6 Процессы рождения бозонов Хиггса при высоких энергиях

Данная глава посвящена исследованию процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении адронных струй) рождения бозонов Хиггса при высоких энергиях. Так, при энергиях коллайдера ЛНС сечения процессов рождения хиггсовских частиц определяются главным образом поведением глюонных распределений при достаточно малых значениях переменной $x \sim m_H/\sqrt{s} \sim 0.008$ (считая массу бозона Хиггса равной $m_H = 125$ ГэВ и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ), что дает основания для использования в расчетах k_T -факторизационного подхода КХД. В рамках этого подхода вычислены полные и дифференциальные сечения процессов рождения хиггсовских частиц с последующим распадом по различным модам (а именно, $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ и $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm\mu^\mp\nu\bar{\nu}$) при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ. Проведено сравнение результатов расчетов как с экспериментальными данными, полученными в последние годы на коллайдере ЛНС, так и с результатами расчетов, выполненных в рамках NNLO-приближения теории возмущений КХД. Продemonстрировано, что значительная часть поправок высших порядков теории возмущений КХД может быть учтена с помощью TMD функций распределения глюонов в протоне. Показано, что распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу p_T чувствительны к TMD-динамике глюонной эволюции. Дополнительную информацию об этой динамике можно извлечь из наблюдаемых, связанных со кинематическими свойствами струй адронов в конечном состоянии.

6.1 Амплитуды вне массовой поверхности

В основе современной теории электрослабого взаимодействия Салама-Вайнберга-Глэшоу, как известно, лежит хиггсовский механизм спонтанного нарушения калибровочной симметрии, который представляет собой механизм генерации масс калибровочных бозонов. В рамках Стандартной Модели предполагается, что исходные комплексные поля Хиггса образуют дублет группы $SU(2) \times U(1)$. Далее в результате спонтанного нарушения симметрии в лагранжиане модели Салама-Вайнберга возникают массовые члены калибровочных векторных бозонов и скалярной хиггсовской частицы H . Ее экспериментальное обнаружение на коллайдере ЛНС [402, 403], без сомнения, стало новой вехой в развитии физики высоких энергий, а теоретические исследования процессов рождения и распада бозона H (с целью поиска эффектов новой физики за рамками Стандартной Модели) остаются актуальной задачей в рамках КХД (см., например, [404]). Кроме того, исследования таких процессов представляют значительный интерес также в свете изучения динамики глюонной эволюции в протоне, поскольку основным механизмом процесса рождения бозона Хиггса в pp столкновениях при энергиях коллайдера ЛНС является подпроцесс глюон-глюонного слияния [405–410].

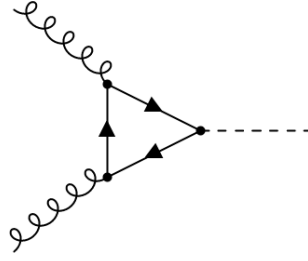


Рис. 98: Диаграмма Фейнмана для процесса рождения бозона Хиггса с помощью механизма глюон-глюонного слияния в ведущем порядке теории возмущений КХД.

Определяющий вклад в сечение дают диаграммы, содержащие треугольную петлю тяжелых (главным образом, t) кварков, см. рис. 98. В области больших значений поперечного импульса p_T существенный вклад ожидается также от подпроцессов с участием векторных ($W^\pm$ и Z) бозонов в начальном (Vector Boson Fusion, VBF) и конечном (VH) состояниях, а также от процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$ [411]. Вычисление соответствующих амплитуд, особенно с учетом поправок высших порядков теории возмущений КХД, представляет собой серьезную проблему ввиду необходимости учета значительного числа многопетлевых диаграмм. Однако в пределе $m_t \rightarrow \infty$ расчеты существенно упрощаются, поскольку в этом приближении треугольная петля t -кварков в диаграммах глюон-глюонного слияния заменяется эффективной вершиной взаимодействия [412, 413]. Такой подход справедлив с точностью порядка 5% в области малых и средних значений поперечного импульса бозона Хиггса $p_T < m_t$ при $m_H < 2m_t$ [414, 415]. В настоящее время в пределе $m_t \rightarrow \infty$ сечения процессов рождения хиггсовских частиц известны в N³LO-приближении теории возмущений КХД [416]. Учет поправок высших порядков значительно (почти в 3 раза) увеличивает величину полного сечения, рассчитанную в ведущем порядке [417, 418] (см. также [269]).

В рамках k_T -факторизационного подхода расчеты [419–422] сечений процессов рождения бозонов Хиггса основаны на следующих подпроцессах слияния глюонов вне массовой поверхности:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow H(p) \rightarrow \gamma/W^\pm/Z(p_1) + \gamma/W^\mp/Z(p_2), \quad (226)$$

где в круглых скобках указаны 4-импульсы всех соответствующих частиц. Эффективный лагранжиан взаимодействия поля Хиггса H и полей глюонов имеет вид [412, 413]:

$$\mathcal{L}_{ggH} = \frac{\alpha_s}{12\pi} \left(C_F \sqrt{2} \right)^{1/2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} H, \quad (227)$$

где C_F — константа Ферми и $G_{\mu\nu}^a$ — известный тензор глюонного поля. Эффективная вершина взаимодействия $T_{ggH}^{\mu\nu, ab}(k_1, k_2)$ двух глюонов, обладающих 4-импульсами k_1 и

k_2 и цветовыми индексами a и b , легко может быть получена²¹ из лагранжиана (227):

$$T_{ggH}^{\mu\nu,ab}(k_1, k_2) = i\delta^{ab}\frac{\alpha_s}{3\pi} \left(C_F\sqrt{2}\right)^{1/2} [k_2^\mu k_1^\nu - (k_1 \cdot k_2)g^{\mu\nu}]. \quad (228)$$

Отметим, что распад $H \rightarrow \gamma\gamma$ может быть описан аналогичным образом с помощью эффективного лагранжиана взаимодействия. Отличие состоит в том, что помимо тяжелых кварков, в этом случае необходимо учитывать другие заряженные частицы — векторные бозоны и лептоны. Эффективный лагранжиан распада $H \rightarrow \gamma\gamma$ имеет вид [412, 413]:

$$\mathcal{L}_{H\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{8\pi} \mathcal{F}(\tau_W, \tau_f) \left(C_F\sqrt{2}\right)^{1/2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} H, \quad (229)$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля и

$$\mathcal{F}(\tau_W, \tau_f) = \mathcal{F}_W(\tau_W) + N_c \sum_f e_f^2 \mathcal{F}_f(\tau_f). \quad (230)$$

Здесь $N_c = 3$ и e_f — электрический заряд лептона f (в единицах заряда электрона). Переменные τ_W и τ_f определяются как

$$\tau_W = \frac{m_H^2}{4m_W^2}, \quad \tau_f = \frac{m_H^2}{4m_f^2}, \quad (231)$$

где m_W и m_f — массы W -бозона и лептона, а функции $\mathcal{F}_W(\tau)$ и $\mathcal{F}_f(\tau)$ могут быть записаны в форме [412, 413]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f(\tau) &= 2[\tau + (\tau - 1)f(\tau)]/\tau^2, \\ \mathcal{F}_W(\tau) &= -[2\tau^2 + 3\tau + 3(2\tau - 1)f(\tau)]/\tau^2, \end{aligned} \quad (232)$$

при этом

$$f(\tau) = \begin{cases} \arcsin^2 \sqrt{\tau}, & \tau \leq 1 \\ -\frac{1}{4} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/\tau}}{1 - \sqrt{1 - 1/\tau}} - i\pi \right]^2, & \tau > 1. \end{cases} \quad (233)$$

Из лагранжиана (229) может быть получена эффективная вершина взаимодействия $T_{H\gamma\gamma}^{\mu\nu}(k_1, k_2)$:

$$T_{H\gamma\gamma}^{\mu\nu}(k_1, k_2) = i\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{F}(\tau_W, \tau_f) \left(C_F\sqrt{2}\right)^{1/2} [k_2^\mu k_1^\nu - (k_1 \cdot k_2)g^{\mu\nu}]. \quad (234)$$

С помощью вершин взаимодействия (228) и (234) легко получить простые аналитические выражения для квадратов амплитуд вне массовой поверхности подпроцессов

²¹См. также расчеты [46].

(226):

$$|\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow \gamma + \gamma)|^2 = \frac{1}{1152\pi^4} \alpha^2 \alpha_s^2 C_F^2 |\mathcal{F}|^2 \frac{\hat{s}^2 (\hat{s} + \mathbf{p}_T^2)^2}{(\hat{s} - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2} \cos^2 \phi, \quad (235)$$

$$|\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow V + V)|^2 = \frac{512\pi}{9} \alpha^3 \alpha_s^2 C_F \sqrt{2} m_Z^2 C_V \frac{(\hat{s} + \mathbf{p}_T^2)^2}{(\hat{s} - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2} \cos^2 \phi \times \\ \times \frac{(g_{(V)L}^4 + g_{(V)R}^4)(l_1 \cdot l_3)(l_2 \cdot l_4) + 2g_{(V)L}^2 g_{(V)R}^2 (l_1 \cdot l_4)(l_2 \cdot l_3)}{[(p_1^2 - m_V^2)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2][(p_2^2 - m_V^2)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2]}, \quad (236)$$

где $V = Z$ или $W^\pm$ и было выполнено усреднение по поляризациям начальных и суммирование по поляризациям конечных частиц. В выражениях (235) и (236) Γ_H, Γ_Z и Γ_W — полные ширины распадов хиггсовской частицы и калибровочных бозонов, $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2$, поперечный импульс бозона Хиггса $\mathbf{p}_T = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T}$, ϕ — азимутальный угол между поперечными импульсами начальных глюонов, $l_1(l_2)$ и $l_3(l_4)$ — 4-импульсы лептонов (антилептонов), возникающих в процессах распада калибровочных бозонов: $p_1 = l_1 + l_2$, $p_2 = l_3 + l_4$. Константы C_V , $g_{(V)L}$ и $g_{(V)R}$ определяются как

$$C_Z = \frac{4}{\sin^6 2\theta_W}, \quad C_W = \frac{\cot^2 \theta_W}{64 \sin^4 \theta_W}, \quad (237)$$

$$g_{(Z)L} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_{(Z)R} = \sin^2 \theta_W, \quad (238)$$

$$g_{(W)L} = 1, \quad g_{(W)R} = 0, \quad (239)$$

где θ_W — угол смешивания Вайнберга. Следует отметить, что при вычислении (236) все лептоны в конечном состоянии предполагались различными и, следовательно, соответствующие интерференционные эффекты не учитывались. Суммирование по поляризациям начальных виртуальных глюонов выполняется согласно (89). Наши результаты для амплитуды вне массовой поверхности с последующим распадом $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ совпадают с полученными ранее [40]. Аналитические выражения были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100].

6.2 Полные и дифференциальные сечения

В соответствии с общей формулой (92), сечение процессов рождения бозонов Хиггса в pp или $p\bar{p}$ столкновениях при высоких энергиях определяется сверткой амплитуд вне массовой поверхности (235) и/или (236) и TMD глюонных распределений

в протоне. В случае дифотонного распада бозона H легко получить, что

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \int \frac{1}{16\pi x_1 x_2 s F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ \times |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow \gamma + \gamma)|^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy d\hat{s} d\Omega^* \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \quad (240)$$

где $\mathbf{k}_{1T}^2 = -k_1^2 \neq 0$ и $\mathbf{k}_{2T}^2 = -k_2^2 \neq 0$ — поперечные импульсы начальных виртуальных глюонов, ϕ_1 и ϕ_2 — их азимутальные углы, y — быстрота бозона Хиггса в системе центра масс сталкивающихся частиц, $\sqrt{s}$ — энергия столкновения, F — инвариантный потоковый фактор [215], телесный угол Ω^* описывает ориентацию импульса фотона в системе покоя p . В случае распада хиггсовской частицы на $W^\pm$ или Z бозоны легко получить, что:

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \int \frac{\lambda^{1/2}(\hat{s}, p_1^2, p_2^2)}{2048\pi^5 x_1 x_2 s \hat{s} F} f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ \times |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow V + V)|^2 d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 dy d\hat{s} dp_1^2 dp_2^2 d\Omega^* d\Omega_1^* d\Omega_3^* \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi}, \quad (241)$$

где телесные углы Ω^* , Ω_1^* и Ω_3^* описывают ориентацию импульса калибровочного бозона в системе покоя хиггсовской частицы и импульсов лептонов, возникающих в процессе распада калибровочных бозонов в системах покоя распадающихся частиц. Из закона сохранения энергии-импульса следует, что

$$x_1 \sqrt{s} = m_{1T} e^{y_1} + m_{2T} e^{y_2}, \quad x_2 \sqrt{s} = m_{1T} e^{-y_1} + m_{2T} e^{-y_2}, \quad (242)$$

где m_{1T} , m_{2T} , y_1 и y_2 — поперечные массы и быстроты соответствующих частиц в системе центра масс сталкивающихся протонов. Конечно, $m_{1T} = |\mathbf{p}_{1T}|$ и $m_{2T} = |\mathbf{p}_{2T}|$ в случае распада $H \rightarrow \gamma\gamma$.

6.3 Реконструкция кинематики адронных струй

Как уже было отмечено ранее, при описании сечений процессов, происходящих с образованием струй адронов в конечном состоянии, принципиальные отличия между теоретическими подходами к вычислению сечений и/или иных характеристик таких процессов проявляются наиболее ярко. Так, в рамках обычной теории возмущений КХД для описания сечений процессов с образованием N струй необходимо вычислить матричный элемент как минимум N -частичного конечного состояния, что, вообще говоря, представляет собой весьма серьезную задачу в случае достаточно большого N . При использовании k_T -факторизационного подхода мы имеем принципиально иную картину: значительное число струй адронов формируется в процессе эволюции начального глюонного каскада, что позволяет при вычислении матричного элемента партонного взаимодействия ограничиться только ведущим порядком, тем самым значительно упрощая расчеты. В этом случае кинематические свойства адронных

струй описываются с помощью соответствующего уравнения глюонной эволюции, тогда как в обычной теории возмущений КХД они определяются только амплитудой партонного рассеяния. Таким образом, исследования процессов рождения бозонов Хиггса и струй и, в частности, изучение различных наблюдаемых, связанных с кинематикой струй адронов в рамках k_T -факторизационного подхода КХД позволяет получить дополнительную информацию о динамике глюонной эволюции в протоне.

Как и в случае процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй, вычисление полных и дифференциальных сечений рассматриваемых процессов выполняется в два этапа. Так, на первом этапе применяется Монте-Карло генератор событий PEGASUS [100], с помощью которого производятся численные расчеты в соответствии с (240) и (241) с использованием TMD распределений глюонов, полученных из решения уравнения эволюции CCFM [17–20]. События, отвечающие процессам рождения бозонов Хиггса в различных модах распада, записываются в файл *.lhe (формат Les Houches Event [99]). На следующем этапе подготовленный *.lhe файл используется для численной реконструкции цепочки эволюции глюонных распределений. С этой целью проводится моделирование процессов излучения глюонов в начальном состоянии с помощью алгоритма TMD генерации партонных ливней (в соответствии с уравнением эволюции CCFM) программы CASCADE [97], что позволяет вести отбор событий с любым числом адронных струй согласно критериям экспериментального анализа.

6.4 Выбор параметров и теоретические неопределенности

При вычислении сечений в соответствии с (240) и (241) использовалась программа численного интегрирования VEGAS [291], позднее включенная в качестве одной из составных частей в Монте-Карло генератор PEGASUS [100]. Как и ранее, в расчетах обычно запрашивалось выполнение нескольких сотен итераций, каждой из которых отвечало порядка миллиона обращений к подынтегральной функции. Это позволило вывести погрешность численных вычислений на уровень менее 1% как для полных, так и для дифференциальных сечений. Как было отмечено выше, при вычислении сечений процессов ассоциативного рождения хиггсовских частиц и струй адронов использовался алгоритм генерации партонных ливней Монте-Карло генератора CASCADE. Этот алгоритм позволяет реконструировать цепочку эволюции глюонных распределений в соответствии с уравнением CCFM, обеспечивая возможность точного определения кинематики адронных струй.

Среди теоретических неопределенностей, влияющих на величину рассчитанных сечений рождения хиггсовских частиц, наибольшую роль играют неопределенности, связанные с выбором масштабов ренормализации μ_R и факторизации μ_F . Значения этих параметров, а также значения N_f и Λ_{QCD} для каждой из рассматриваемых TMD функций распределения глюонов выбираются в соответствии с таблицей 11. Изменение масштабов μ_R или μ_F в обычных пределах (уменьшение или увеличение в

2 раза) дает возможность оценить соответствующие неопределенности. В численных расчетах использовались следующие значения: $m_H = 125.1$ ГэВ, $m_W = 80.403$ ГэВ, $m_Z = 91.1876$ ГэВ, $\Gamma_H = 4.3$ МэВ, $\Gamma_W = 2.085$ ГэВ, $\Gamma_Z = 2.4952$ ГэВ и $\sin^2 \theta_W = 0.23116$ [216].

6.5 Результаты расчетов

В этом разделе представлены результаты расчетов полных и дифференциальных сечений как процессов инклюзивного, так и ассоциативного (в сопровождении одной или нескольких адронных струй) рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях на коллайдере LHC при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ. Проведено сравнение полученных предсказаний с экспериментальными данными коллабораций CMS и ATLAS.

6.5.1 Процессы инклюзивного рождения бозона Хиггса

Экспериментальные данные для процесса инклюзивного рождения хиггсовских бозонов с последующим распадом по различным модам были получены коллаборациями CMS и ATLAS. Так, для распада $H \rightarrow \gamma\gamma$ были измерены распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу p_T и быстрой y , а также разности азимутальных углов фотонов $\Delta\phi^{\gamma\gamma}$ и углу рассеяния фотона $\cos\theta^*$ (в системе Коллинза-Сопера) при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ [423–426]. Коллаборацией CMS использовались следующие кинематические ограничения на псевдобыстры η и поперечные импульсы первого (обладающего наибольшим поперечным импульсом) и второго фотонов: $|\eta^{\gamma 1}| < 2.5$, $|\eta^{\gamma 2}| < 2.5$, $p_T^{\gamma 1}/m^{\gamma\gamma} > 1/3$, $p_T^{\gamma 2}/m^{\gamma\gamma} > 1/4$, где $m^{\gamma\gamma}$ — инвариантная масса пары фотонов, $m^{\gamma\gamma} > 90$ ГэВ [423, 425]. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS были получены в области $|\eta^{\gamma 1}| < 2.37$, $|\eta^{\gamma 2}| < 2.37$, $p_T^{\gamma 1}/m^{\gamma\gamma} > 0.35$, $p_T^{\gamma 2}/m^{\gamma\gamma} > 0.25$, $105 < m^{\gamma\gamma} < 160$ ГэВ [424, 426]. Предсказания для дифференциальных сечений представлены на рис. 99 — 101, при этом в расчетах были использованы глюонные распределения A0 и JH’2013 set 2. Закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отметим, что к вкладам в сечения от подпроцесса глюон-глюонного слияния (226) были добавлены вклады подпроцессов с участием векторных ($W^\pm$ и Z) бозонов в начальном (VBF) и конечном (VH) состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, которые являются существенными в области больших значений поперечного импульса бозона Хиггса p_T (см., например, [411]) и были взяты из экспериментальных работ [423–426]. Кроме того, на рис. 99 — 101 приведены результаты вычислений в рамках NNLO + NNLL приближения обычной (коллинеарной) теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генераторов событий HRES [427] и NNLOPS [428], также взятые из экспериментальных работ [423–426]. Видно, что наши предсказания хорошо согласуются с данными коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Следует особо подчеркнуть, что распределения

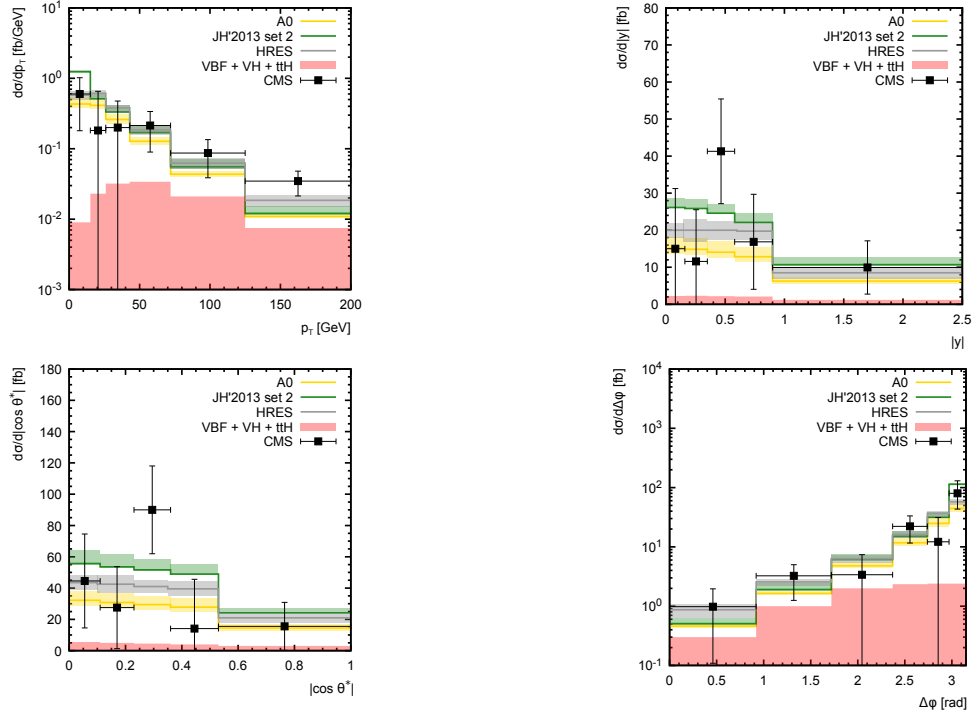


Рис. 99: Распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу p_T , быстроте y , углу рассеяния фотона $\cos \theta^*$ (в системе Коллинза-Сопера) и разности азимутальных углов фотонов $\Delta\phi^{\gamma\gamma}$, рассчитанные в дифотонной моде распада при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты NNLO + NNLL вычислений, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий HRES [427], вклады подпроцессов с участием векторных бозонов (VBF и VH), а также подпроцессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$ взяты из экспериментальной работы [423]. Данные коллаборации CMS [423].

по поперечному импульсу бозонов p_T , вычисленные в рамках k_T -факторизационного подхода, совпадают (за исключением области малых p_T) с предсказаниями обычной пертурбативной КХД с учетом вкладов высоких порядков. Поскольку форма этих распределений (в рамках k_T -факторизационного подхода КХД) в значительной мере определяется зависимостью TMD функций распределения глюонов от поперечного импульса, то отсюда следует, что вклады высших порядков теории возмущений КХД эффективно учитываются с помощью TMD распределений глюонов, полученных из решений уравнения CCFM. Отличия предсказаний k_T -факторизационного подхода, полученных с помощью разных TMD глюонных распределений в области небольших значений поперечного импульса бозонов Хиггса p_T (а также при $\Delta\phi^{\gamma\gamma} \sim \pi$) связаны с различным поведением этих распределений в области малых $\mathbf{k}_T^2$ (см. рис. 6). Этот же фактор влияет на абсолютную нормировку распределений хиггсовских частиц по быстроте y и углу рассеяния фотона $\cos \theta^*$. При увеличении энергии сталкивающихся протонов влияние области малых $\mathbf{k}_T^2$ на нормировку таких распределений становится более выраженным (см. рис. 99 — 101).

Экспериментальный анализ процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса

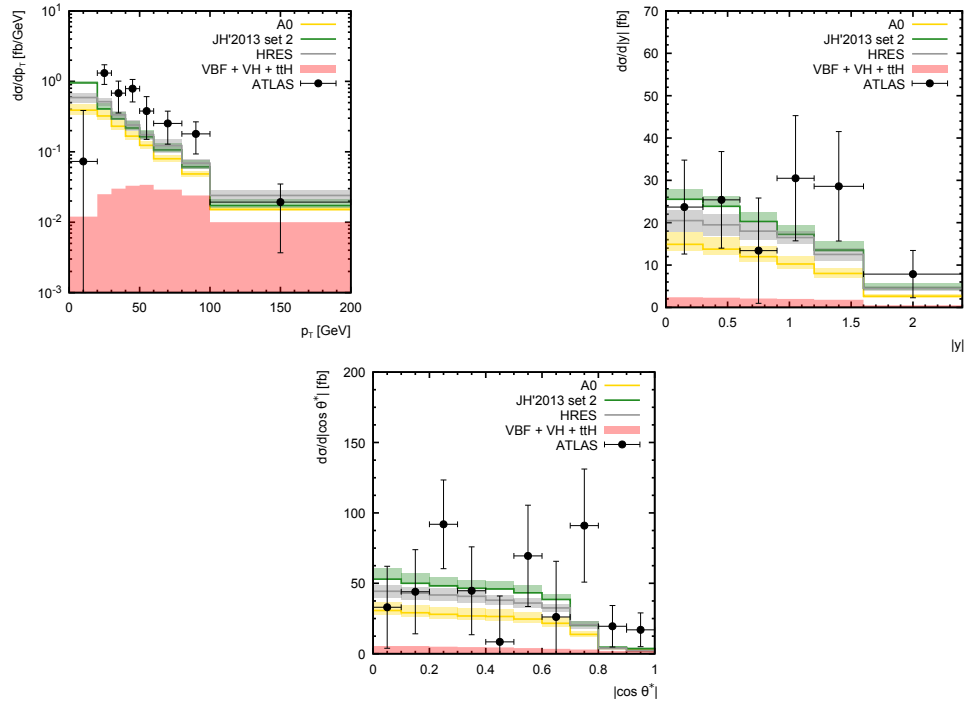


Рис. 100: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ (в дифотонной моде распада). Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор HRES [427]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [424]. Данные коллаборации ATLAS [424].

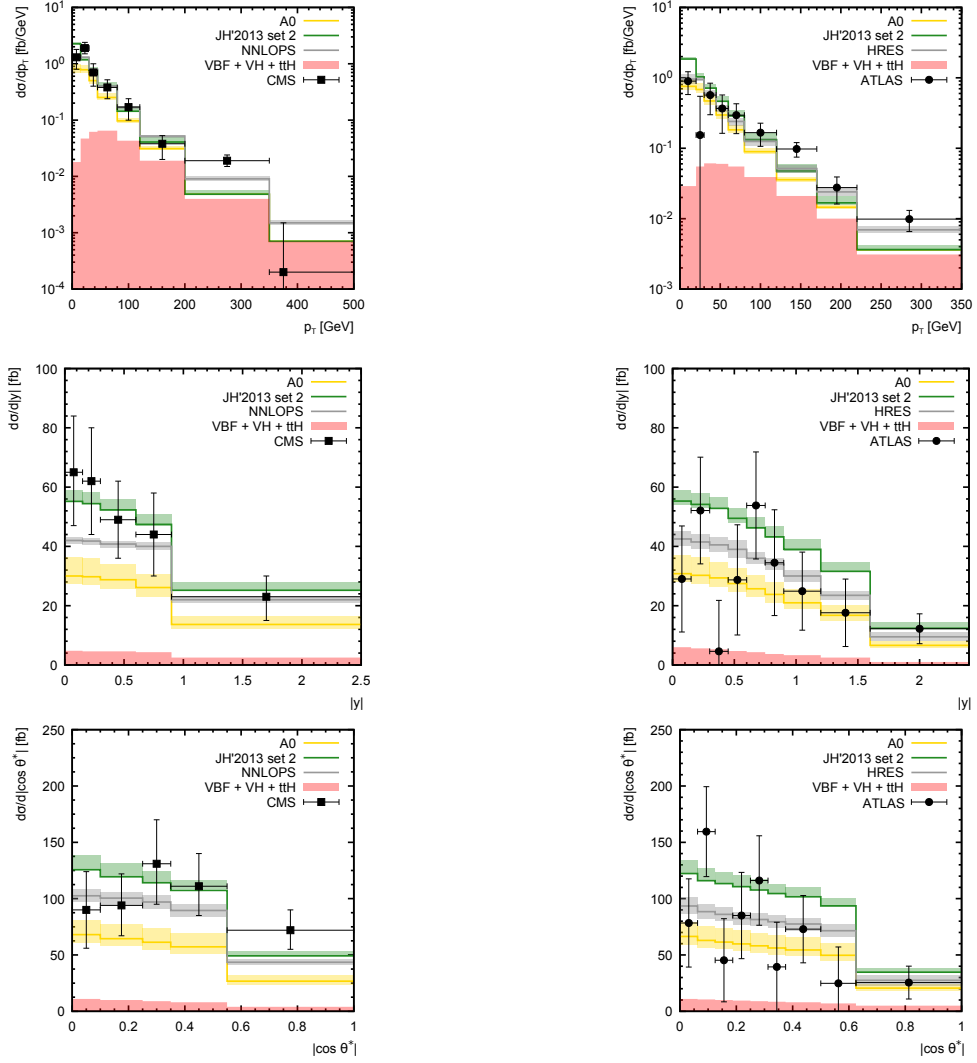


Рис. 101: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса при $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (в дифотонной моде распада). Результаты NNLO + NNLL вычислений (генераторы HRES [427] и NNLOPS [428]), вклады subprocessов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальных работ [425, 426]. Данные коллабораций CMS [425] и ATLAS [426].

с последующим распадом $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ или $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$ также был проведен коллаборациями CMS и ATLAS. В первом случае были измерены распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу, скорости, углу рассеяния $\cos \theta^*$ лидирующей лептонной пары (пары, обладающей инвариантной массой m_{12} , наиболее близкой к массе m_Z), инвариантным массам m_{12} и m_{34} лидирующей и следующей за ней пары лептонов, а также углам рождения $\cos \theta_1$ и $\cos \theta_2$ антилептонов (в системах покоя соответствующих Z бозонов) при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ [429–431]. Экспериментальные данные коллаборации CMS были получены в области $p_T^{l_1} > 20$ ГэВ, $p_T^{l_2} > 10$ ГэВ, $p_T^{l_3} > 7$ ГэВ, $p_T^{l_4} > 5$ ГэВ, $40 < m_{12} < 120$ ГэВ, $12 < m_{34} < 120$ ГэВ, $105 < m_{4l} < 140$ ГэВ, при этом псевдобыскроты всех лептонов удовлетворяют требованию $|\eta| < 2.4$ [429]. Данные коллаборации ATLAS получены при $p_T^{l_1} > 20$ ГэВ, $p_T^{l_2} > 15$ ГэВ, $p_T^{l_3} > 10$ ГэВ, $p_T^{l_4} > 6$ ГэВ, $50 < m_{12} < 106$ ГэВ, $12 < m_{34} < 115$ ГэВ, $118 < m_{4l} < 129$ ГэВ и $|\eta| < 2.47$ [430, 431]. При исследовании моды распада $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$ были измерены распределения по поперечному импульсу бозонов Хиггса p_T и скорости пары лептонной пары y^l в кинематической области $p_T^{l_1} > 20$ ГэВ, $p_T^{l_2} > 10$ ГэВ, $|\eta^{l_1}| < 2.5$, $|\eta^{l_2}| < 2.5$, $p_T^l > 30$ ГэВ, $m^l > 12$ ГэВ, $m_{T^{e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}}} > 50$ ГэВ [432] (данные коллаборации CMS) и $p_T^{l_1} > 22$ ГэВ, $p_T^{l_2} > 15$ ГэВ, $|\eta^{l_1}| < 2.47$, $|\eta^{l_2}| < 2.47$, $10 < m^l < 55$ ГэВ, $\Delta\phi^l < 1.8$ и $p_T^{\text{miss}} > 20$ ГэВ [433] (данные коллаборации ATLAS) при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ, где p_T^{miss} — импульс, уносимый нейтрино. Результаты наших расчетов представлены на рис. 102 — 105, где, как и ранее, к вкладам от подпроцессов глюон-глюонного слияния (226) были добавлены вклады подпроцессов с участием векторных бозонов в начальном (VBF) и конечном (VH) состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, взятые из экспериментальных работ [429–433]. Учет таких вкладов становится важен в области очень больших значений поперечного импульса $p_T \geq m_H$. Видно, что предсказания k_T -факторизационного подхода хорошо согласуются (в пределах неопределенностей теоретических вычислений и погрешностей измерений) с данными коллабораций CMS и ATLAS, полученными при различных энергиях. Это согласие наблюдается для распределений по всем кинематическим переменным, единственное исключение составляет область небольших p_T . Численные результаты, как и в случае дифотонной моды распада, существенно зависят от выбора TMD функции распределения глюонов в протоне, в частности, от ее формы и абсолютной нормировки в области малых значений поперечного импульса $\mathbf{k}_T^2$, приведенной на рис. 6. Таким образом, можно заключить, что экспериментальные данные ЛНС для процессов инклюзивного рождения бозонов Хиггса в дибозонных модах распада могут быть использованы для уточнения параметров TMD распределений глюонов. Также отметим, что наши предсказания достаточно близки к результатам расчетов в рамках NNLO + NNLL приближения обычной теории возмущений КХД. Последние были взяты из работ [429–433].

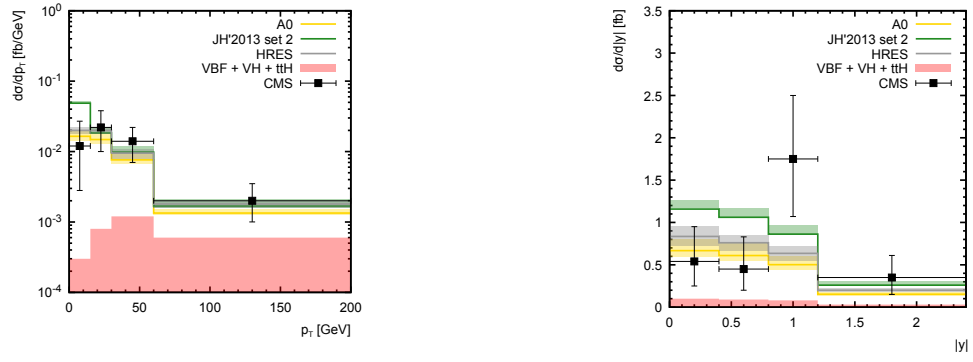


Рис. 102: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор HRES [427]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [429]. Данные коллаборации CMS [429].

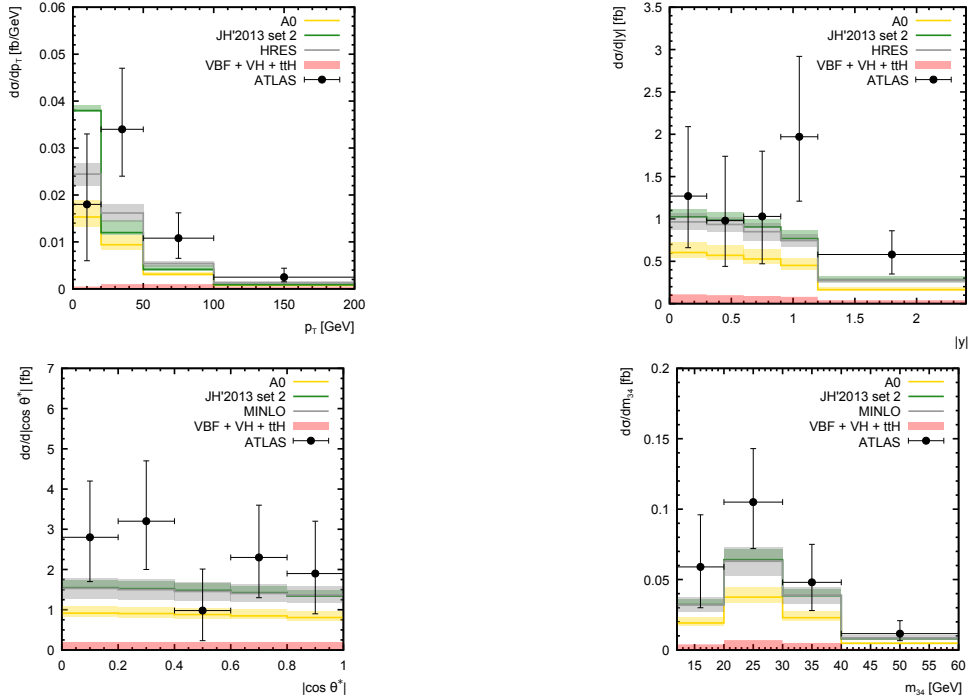


Рис. 103: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генераторы событий HRES [427] и MINLO [434]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [430]. Данные коллаборации ATLAS [430].

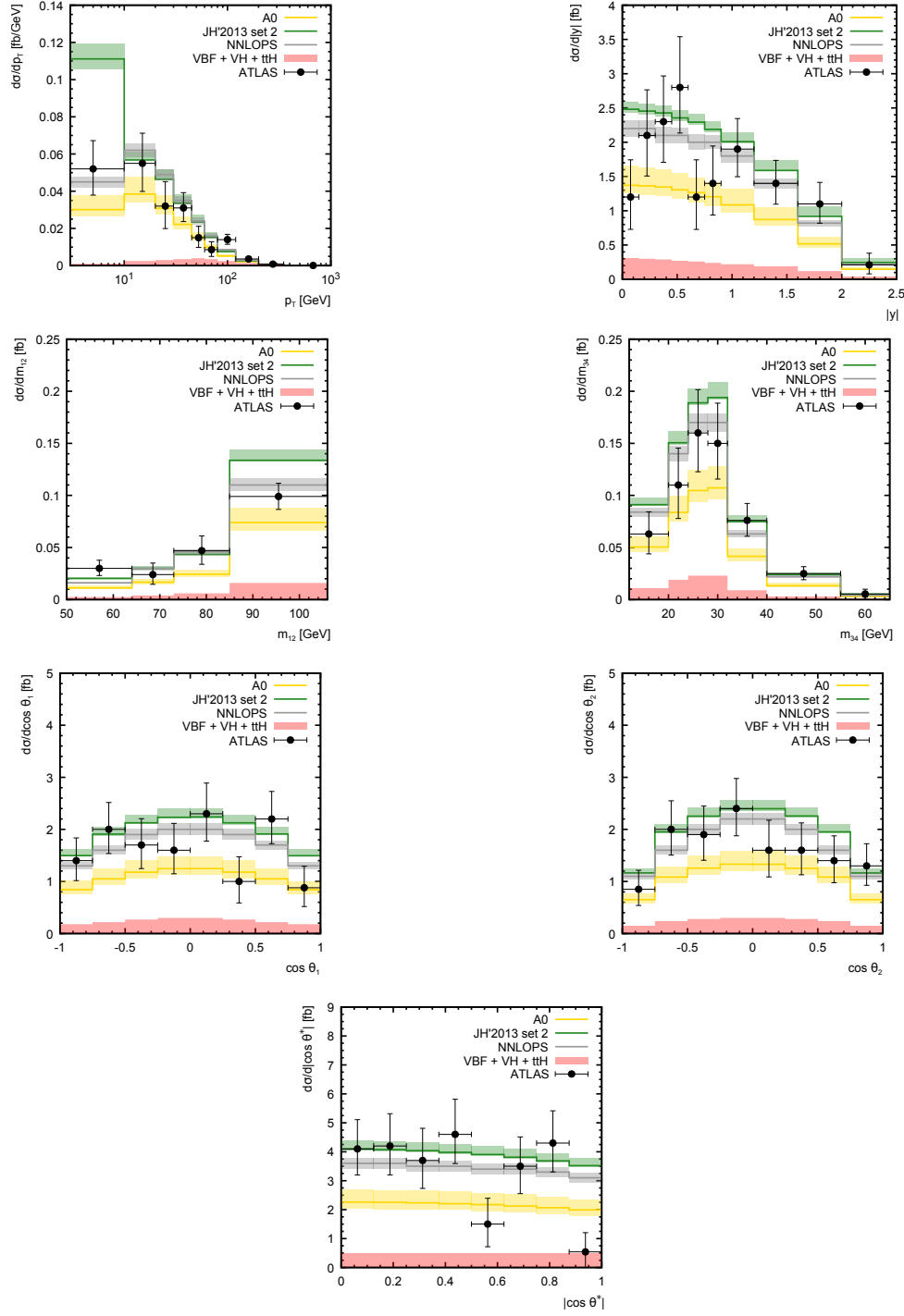


Рис. 104: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$. Результаты NNLO + NNLL вычислений, полученные с помощью Монте-Карло генератора NNLOPS [428], вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [431]. Данные коллаборации ATLAS [431].

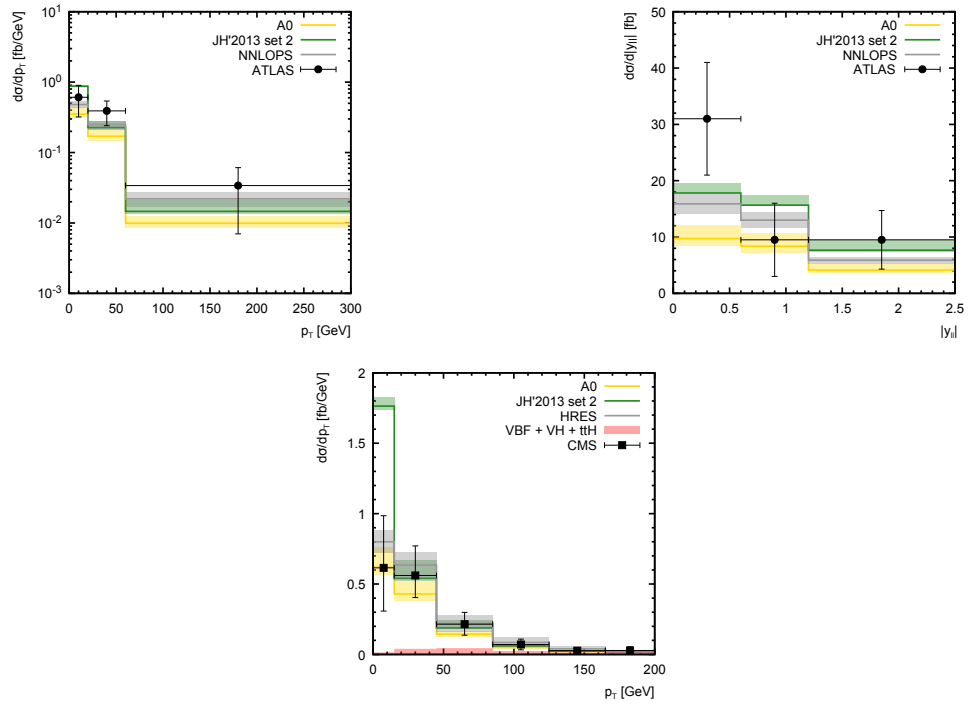


Рис. 105: Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в режиме распада $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генераторы событий HRES [427] и NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [432]. Данные коллабораций ATLAS [433] и CMS [432].

6.5.2 Процессы ассоциативного рождения бозонов Хиггса и струй адронов

Как было отмечено ранее, принципиальные отличия между методами вычисления полных и дифференциальных сечений процессов ассоциативного рождения бозонов Хиггса и струй в рамках k_T -факторизационного подхода КХД и обычной теории возмущений проявляются наиболее ярко. Кроме того, изучение таких процессов позволяет получить дополнительную информацию о динамике глюонной эволюции в протоне. С этой целью были вычислены сечения рождения рождения хиггсовских частиц и адронных струй (с последующим распадом бозона H по различным модам) в pp столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ в зависимости от ряда наблюдаемых. Кинематическая область, в которой проводились расчеты, соответствует указанным выше условиям экспериментов коллабораций CMS [425, 429, 435, 436] и ATLAS [426, 430, 433] для процессов инклюзивного рождения бозона Хиггса; при этом дополнительно накладывались ограничения на поперечный импульс и быстроту струй: $p_T^{\text{jet}} > 30$ ГэВ, $|\eta^{\text{jet}}| < 2.5$ (данные CMS [435]), $|\eta^{\text{jet}}| < 4.4$ (данные ATLAS [426, 430]), $|\eta^{\text{jet}}| < 4.5$ (данные ATLAS [433]) и $|\eta^{\text{jet}}| < 4.7$ (данные CMS [425, 429, 436]). Отбор струй осуществлялся с использованием алгоритма, включенного в пакет программ FASTJET [388] при значении параметра $R_{\text{jet}} = 0.4$, что соответствует экспериментальным критериям.

Полученные результаты представлены на рис. 106 — 111. В этих расчетах были использованы глюонные распределения A0 и JH'2013 set 2, при этом закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Как и ранее, к вкладам в сечения от подпроцесса глюон-глюонного слияния (226) были добавлены вклады подпроцессов с участием калибровочных бозонов в начальном и конечном состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, которые были взяты из экспериментальных работ [425, 426, 429, 430, 433, 435, 436]. Также на рис. 106 — 111 для сравнения приведены результаты вычислений в рамках NNLO + NNLL приближения обычной теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генераторов MINLO NJ [434] и NNLOPS [428], взятые из работ [425, 426, 429, 430, 433, 435, 436]. Видно, что, как и для процессов инклюзивного рождения бозонов Хиггса, наши предсказания достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными CMS и ATLAS (полученными при разных энергиях) как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Тем не менее, использование в расчетах функции распределения глюонов A0 приводит к некоторой недооценке измеренных сечений. Отличия между предсказаниями k_T -факторизационного подхода, полученными с различными TMD глюонными распределениями, наиболее ярко проявляются для наблюдаемых, связанных с кинематикой струй: в дифотонной моде распада для распределений по разности быстрот бозона Хиггса и лидирующей адронной струи и/или разности их азимутальных углов (см. рис. 106 и 107). В случае

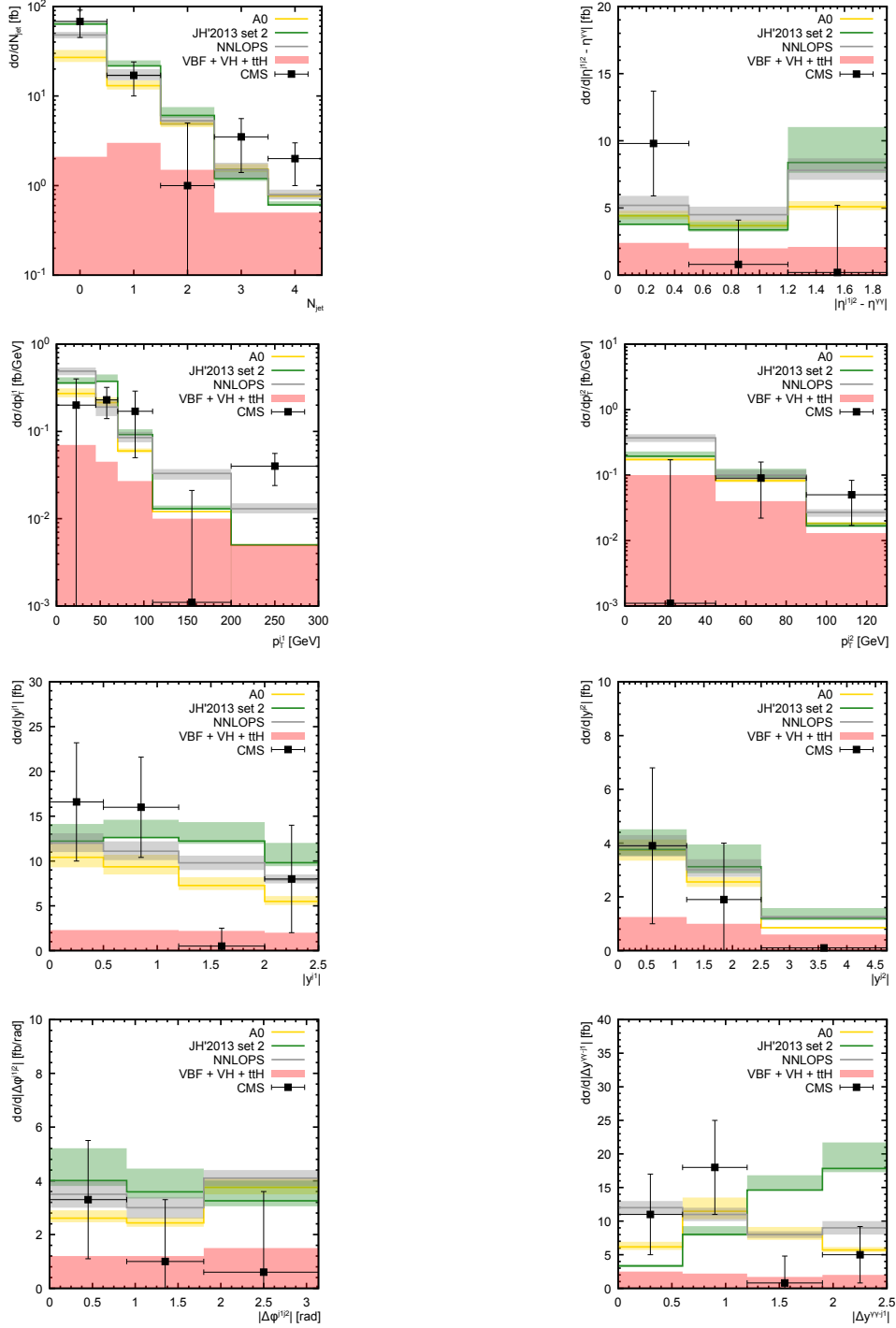


Рис. 106: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в дифотонной моде распада) в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [425]. Данные коллаборации CMS [425].

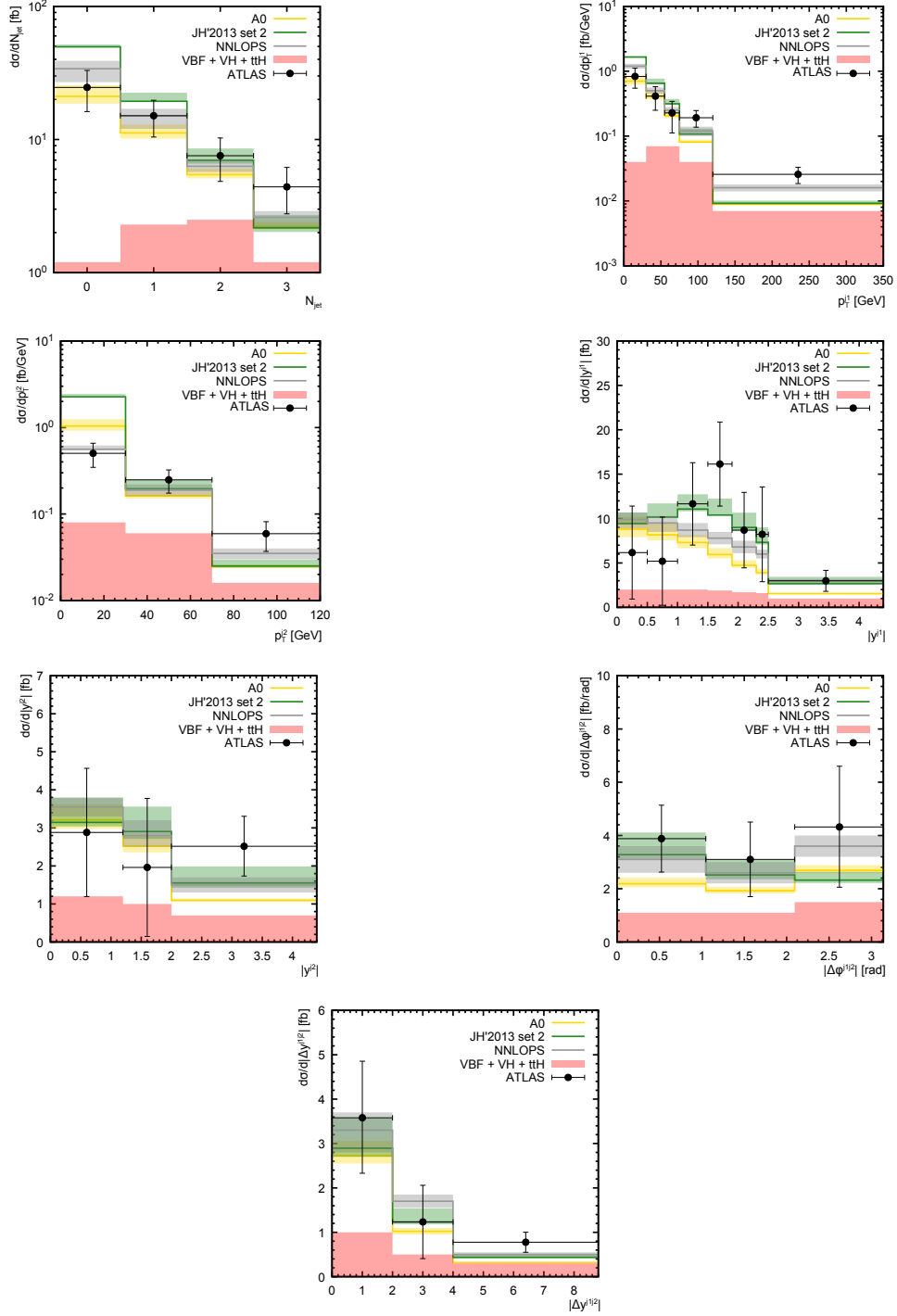


Рис. 107: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в дифотонной моде распада) в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [426]. Данные коллаборации ATLAS [426].

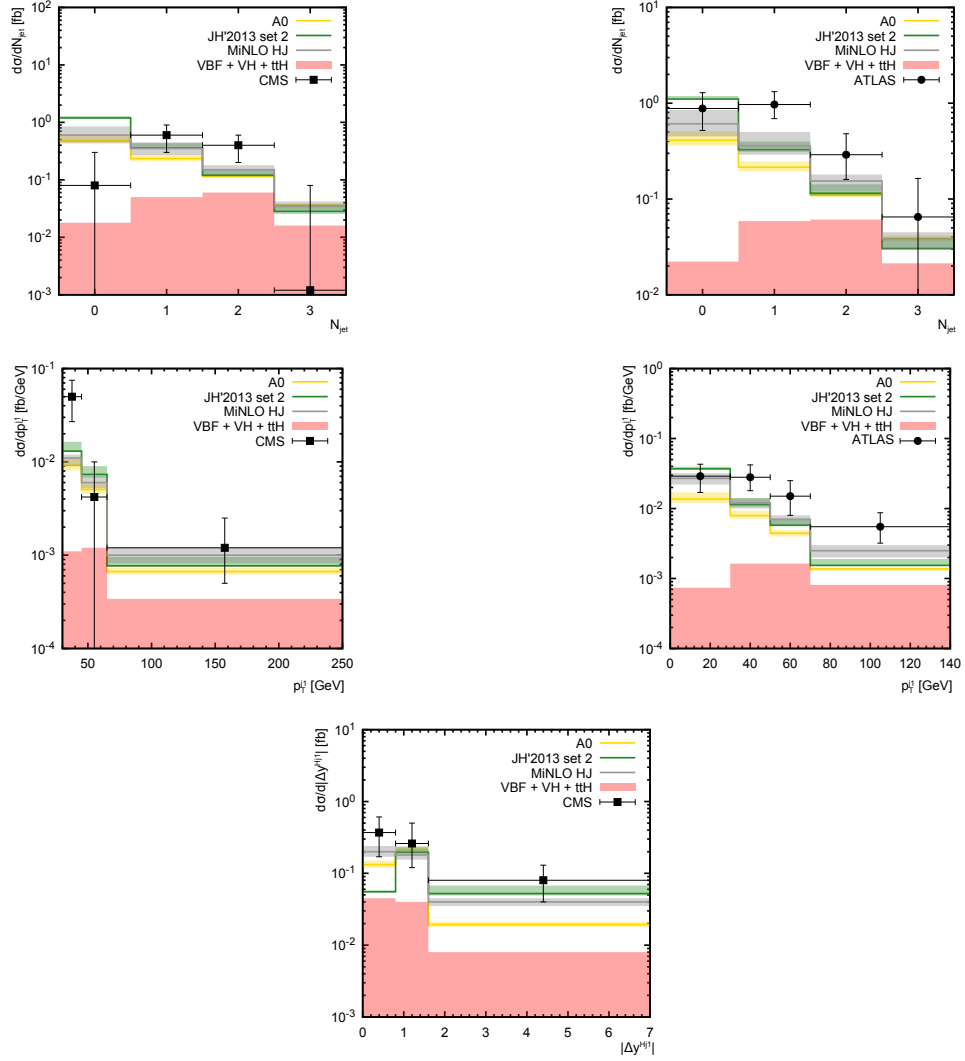


Рис. 108: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$) в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор minLO HJ [434]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальных работ [429, 430]. Данные коллабораций CMS [429] и ATLAS [430].

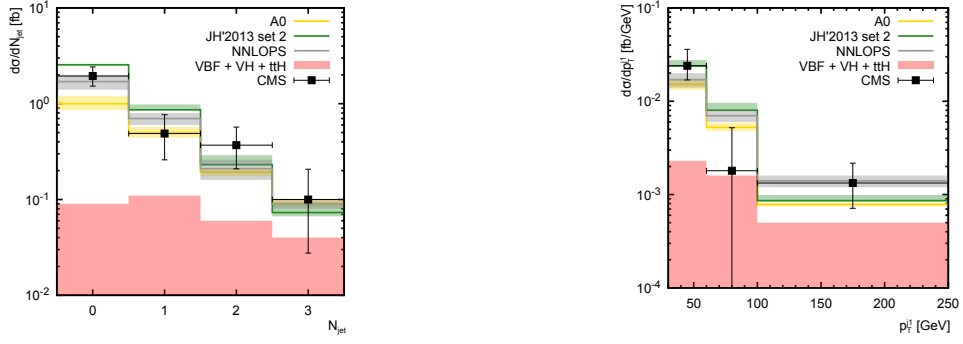


Рис. 109: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в моде распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$) в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [435]. Данные коллаборации CMS [435].

распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ такими характерными наблюдаемыми являются распределения по разности быстрот бозона Хиггса и лидирующей адронной струи, разности быстрот лидирующей и следующей за ней струй, а также распределения по инвариантным массам бозона Хиггса и лидирующей струи и/или бозона Хиггса и системы двух струй (см. рис. 108 и 110). К сожалению, в настоящее время достигнутая точность измерения таких сечений не позволяет сделать определенный вывод о предпочтительности той или иной TMD функции распределения глюонов в протоне. Тем не менее, указанные наблюдаемые могут быть использованы для уточнения параметров TMD глюонных распределений с использованием более точных данных, полученных в будущих экспериментах.

Следует подчеркнуть, что, как и в случае процесса инклюзивного рождения хиггсовских частиц, полученные предсказания k_T -факторизационного подхода для всех наблюдаемых близки (конечно, в пределах теоретических неопределенностей) к результатам расчетов в рамках NNLO + NNLL приближения теории возмущений КХД, несмотря на принципиальное отличие этих подходов к способу построения событий, содержащих струи адронов в конечном состоянии. Так, в первом случае кинематические свойства струй определяются уравнением КХД-эволюции глюонной плотности, а во втором - матричным элементом жесткого подпроцесса рассеяния. Таким образом, еще раз продемонстрировано, что использование уравнения эволюции CCFM позволяет воспроизвести традиционные, значительно более трудоемкие вычисления с учетом поправок высших порядков теории возмущений КХД.

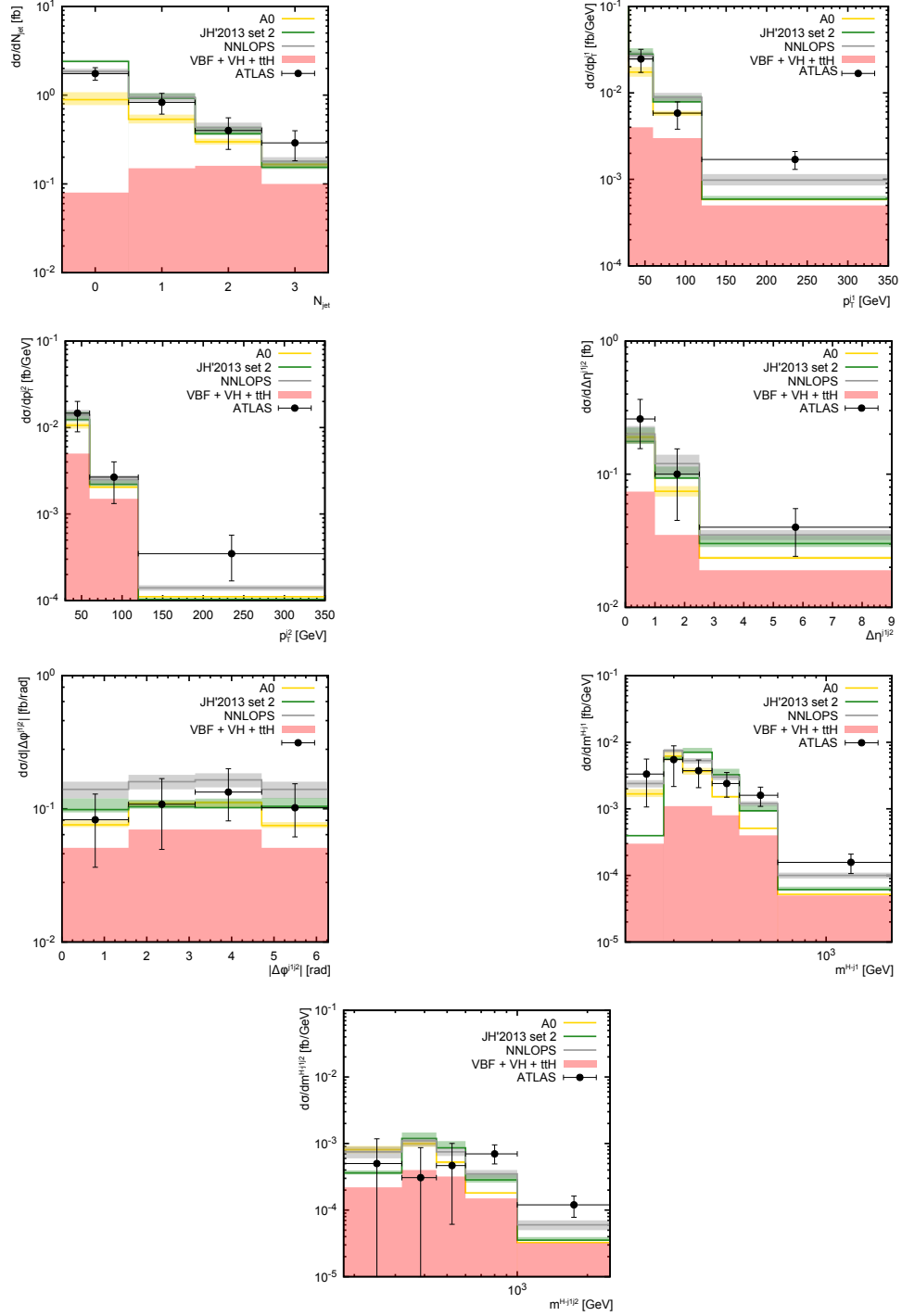


Рис. 110: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$) в pp столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [431]. Данные коллаборации ATLAS [431].

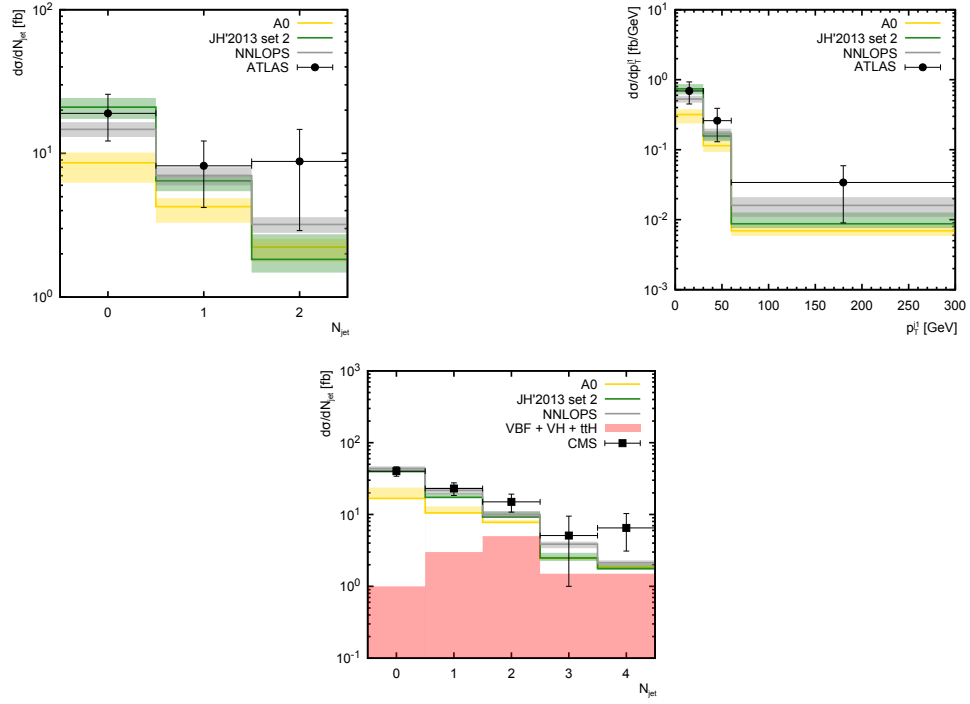


Рис. 111: Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в режиме распада $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$) в pp столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 8$ ТэВ (данные ATLAS) и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (данные CMS). Результаты NNLO + NNLL вычислений (генератор NNLOPS [428]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [436]. Данные коллабораций CMS [436] и ATLAS [433].

7 Монте-Карло генератор событий PEGASUS

Как известно, различные Монте-Карло генераторы событий широко используются в настоящее время как теоретическими группами, так и экспериментальными коллаборациями для анализа данных по рождению и распаду частиц на современных коллайдерах. Такие генераторы, как PYTHIA 8.2 [364], MCFM 9.0 [400], SHERPA 2.2 [386], MADGRAPH5_AMC@NLO [358] и другие позволяют проводить вычисления в рамках коллинеарного приближения КХД в ведущем или следующем за ним порядках теории возмущений. Различные алгоритмы численного моделирования партонных ливней в начальном и/или конечном состоянии расширяют возможности Монте-Карло генераторов и позволяют уточнить соответствующие предсказания (см., например, [434, 437–439]). В последнее время были разработаны генераторы событий CASCADE [97] и KATIE [98], в которых применяется k_T -факторизационный подход КХД для расчетов сечений жестких процессов при высоких энергиях. В основе генератора CASCADE лежит уравнение глюонной эволюции CCFM; в последней версии (3.0) также появилась возможность использовать подход РВ для вычисления TMD распределений как глюонов, так и кварков всех ароматов. С помощью генератора KATIE могут быть рассчитаны в автоматическом режиме амплитуды вне массовой поверхности для произвольных процессов Стандартной Модели (с участием до четырех частиц в конечном состоянии) в древесном приближении, при этом используется метод, основанный на соотношениях рекурсии BCFW [213]. Интерфейс к TMD функциям распределения партонов в протоне обеспечивает пакет TMDLIB [103].

Данная глава посвящена описанию основных возможностей Монте-Карло генератора событий PEGASUS (Particle Event Generator: A Simple-in-Use System) [100], недавно разработанного автором и его коллегами (свидетельство о государственной регистрации №2019616238 от 21 мая 2019 года). Этот генератор предназначен для проведения расчетов сечений широкого ряда процессов КХД в протон-протонных или протон-антипротонных столкновениях высоких энергий (которые изучаются или будут изучаться в экспериментах на современных коллайдерах и коллайдерах следующего поколения) с учетом TMD динамики партонных распределений. В его состав входит библиотека, включающая в себя значительное число амплитуд вне массовой поверхности различных подпроцессов взаимодействия кварков и глюонов, а также набор TMD функций распределения партонов в протоне, которые наиболее часто применяются в феноменологических исследованиях в настоящее время. Сгенерированные события (взвешенные или невзвешенные, в зависимости от желания пользователя) могут быть записаны в выходной файл в формате Les Houches Event (*.lhe) [99] для их дальнейшей обработки. PEGASUS является первым и (пока) единственным Монте-Карло генератором событий, в котором используется удобный и интуитивно понятный графический интерфейс для задания различных параметров численных расчетов, таких, например, как массы частиц, относительные вероятности их распадов и др. Встроенный инструмент PEGASUS PLOTTER позволяет отоб-

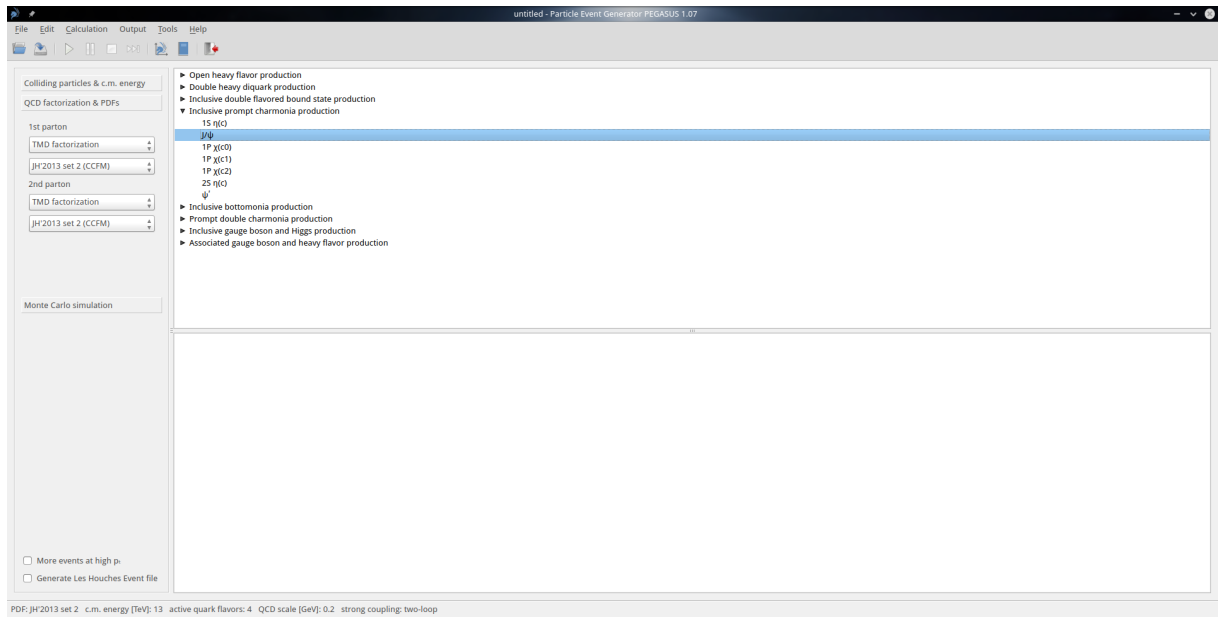


Рис. 112: Главное окно Монте-Карло генератора событий PEGASUS (Particle Event Generator: A Simple-in-Use System).

ражать (и даже использовать) результаты расчетов непосредственно во время набора статистики. Предусмотрена возможность работы с генератором из командной строки (в терминале), что может быть удобно в случае необходимости накопления достаточно большого числа событий. Кроме того, PEGASUS не требует специальной процедуры установки и свободно распространяется в виде исполняемого файла (вместе с несколькими необходимыми библиотеками) для компьютеров под управлением операционной системой Linux. Эти отличительные особенности, а также отсутствие необходимости для пользователя обладать специальными навыками программирования и/или опытом работы с другими генераторами, выгодно выделяют PEGASUS из ряда аналогичных программных средств. Несмотря на то, что PEGASUS был разработан относительно недавно, он уже был использован коллаборацией ALICE при анализе последних экспериментальных данных для сечений процесса инклюзивного рождения J/ψ мезонов в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергиях $\sqrt{s} = 5.02$ и 13 ТэВ [104, 105].

Программный код генератора написан на языке C++ с использованием ряда подпрограмм, написанных на языке Фортран. Интерфейс к некоторым функциям распределения партонов в протоне обеспечивается с помощью свободно распространяемых программ группы MMHT [70] и коллаборации CTEQ [68, 376], которые включены в состав генератора. Для выполнения численного интегрирования методом Монте-Карло применяется программа VEGAS [291]. Кроме того, генератор использует библиотеку QWTPLOT версии 6.1.3 (<https://qwt.sourceforge.io>). Актуальная информация о последней версии генератора и его новых возможностях публикуется на официальном сайте: <https://theory.sinp.msu.ru/doku.php/pegasus/news>.

7.1 Библиотека амплитуд партонных подпроцессов

В текущей версии (1.07) генератора PEGASUS доступны амплитуды вне массовой поверхности (вычисленные с учетом ненулевой виртуальности начальных глюонов) для следующих подпроцессов:

- $g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q}$, где $Q = c$ или b
- $g^* + g^* \rightarrow Q + b + \bar{c}$, где $Q = B_c$ или B_c^*
- $g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q} + \bar{Q}'$, где $Q = (QQ')_0$ или $(QQ')_1$ и $Q = c$ или b
- $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)} \right] + g \rightarrow Q + g$, где $Q = \psi'$, J/ψ или $\Upsilon(nS)$
- $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right] \rightarrow Q$, где $Q = \psi'$, J/ψ или $\Upsilon(nS)$
- $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3P_J^{(1)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^1P_1^{(8)} \right] \rightarrow Q$, где $Q = \chi_{cJ}(1P)$ или $\chi_{bJ}(mP)$
- $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^1P_1^{(8)} \right] \rightarrow Q$, где $Q = \eta_c(1S)$, $\eta_c(2S)$ или $\eta_b(nS)$
- $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)} \right] + Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)} \right] \rightarrow Q + Q$, где $Q = \psi'$, J/ψ или $\Upsilon(nS)$
- $g^* + g^* \rightarrow H^0 \rightarrow \gamma\gamma$
- $g^* + g^* \rightarrow H^0 \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$
- $g^* + g^* \rightarrow H^0 \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$
- $g^* + g^* \rightarrow V + Q + \bar{Q}$, где $V = \gamma$ или Z/γ^* и $Q = c$ или b

Кроме того, в состав генератора входят амплитуды подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии (а также некоторых подпроцессов глюон-глюонного слияния), вычисленные на массовой поверхности:

- $q + \bar{q} \rightarrow Q + \bar{Q}$, где $Q = c$ или b
- $g + g \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right] + g \rightarrow Q + g$, где $Q = \psi'$, J/ψ или $\Upsilon(nS)$
- $g + g \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3P_J^{(1)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^1P_1^{(8)} \right] + g \rightarrow Q + g$, где $Q = \chi_{cJ}(1P)$ или $\chi_{bJ}(mP)$
- $g + g \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^1P_1^{(8)} \right] + g \rightarrow Q + g$, где $Q = \eta_c(1S)$, $\eta_c(2S)$ или $\eta_b(nS)$
- $q + g \rightarrow V + q$, где $V = \gamma$ или Z/γ^*
- $q + Q \rightarrow V + q + Q$, где $V = \gamma$ или Z/γ^* и $Q = c$ или b
- $q + \bar{q} \rightarrow V + Q + \bar{Q}$, где $V = \gamma$ или $V = Z/\gamma^*$ и $Q = c$ или b
- $q + g \rightarrow q + V + Q + \bar{Q}$, где $V = \gamma$ или $V = Z/\gamma^*$ и $Q = c$ или b

7.2 Процессы, доступные для моделирования

Процессы, доступные для моделирования в текущей версии PEGASUS приведены в таблице 10, где, как обычно, $Q, Q' = c$ или b . Соответствующий список отображается в центральной части главного окна генератора, см. рис. 112. Расчеты сечений всех этих процессов (за исключением процессов рождения тяжелых дикварков и дважды тяжелых барионов) были подробно описаны в предыдущих главах. Однако следует упомянуть еще раз, что вклады всех подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии вычисляются в рамках коллинеарного приближения. Кроме того, по желанию пользователя может быть проведено моделирование следующих радиационных распадов P -волновых кваркониев $\chi_{cJ}(1P) \rightarrow J/\psi + \gamma$ и $\chi_{bJ}(mP) \rightarrow \Upsilon(nS) + \gamma$, а также лептонных распадов $J/\psi \rightarrow l^+l^-$, $\psi' \rightarrow l^+l^-$, $\Upsilon(nS) \rightarrow l^+l^-$ и $Z/\gamma^* \rightarrow l^+l^-$ с учетом спиновой структуры соответствующих амплитуд. Кроме того, может быть выполнено моделирование распадов S -волновых кваркониев $\psi' \rightarrow J/\psi + X$ и $\Upsilon(nS) \rightarrow \Upsilon(mS) + X$ (где $n > m$) в предположении, что последние происходят изотропно.

Что касается процессов рождения тяжелых дикварков $(QQ')_S$ — связанных скалярных ($S = 0$) или векторных ($S = 1$) состояний двух тяжелых кварков Q и Q' — то они подробно рассматриваются в работах [441, 442]. В их основе лежит квантовохромодинамический процесс испускания кварком Q виртуального глюона с его последующим расщеплением на пару из тяжелого кварка Q' и антикварка $\bar{Q}'$ и дальнейшим слиянием кварков Q и Q' в связанное состояние. Формализм, развитый в работе [442], реализован в генераторе PEGASUS без каких-либо изменений, за исключением дополнительного учета ненулевых виртуальностей начальных глюонов при вычислении соответствующих амплитуд подпроцессов глюон-глюонного слияния. Расчеты сечений процессов рождения дважды тяжелых барионов подразумевают следующий этап, на котором тяжелый дикварк $(QQ')_S$ с близкой к единице вероятностью адронизируется в барион $(QQ'q)$. В этом случае легкий кварк q является кварком аромата u , d либо s в соотношении $\sim 3 : 3 : 1$. Далее, учитывая, что адронизация скалярного дикварка может привести к образованию барионного состояния только со спином $1/2$, а адронизация векторного дикварка может привести к образованию барионов со спином как $1/2$, так и $3/2$, то с помощью соответствующих коэффициентов Клебша-Гордана можно легко вычислить сечения процессов рождения дважды тяжелых барионов, перечисленных в таблице 10. Более подробное освещение этого вопроса можно найти в литературе (см. [441–443]); последнее, однако, выходит за рамки настоящей работы.

7.3 Кинематика событий и интегрирование по фазовому объему

Генератор PEGASUS позволяет вычислять сечения и моделировать кинематику соответствующих событий для процессов с участием до $n = 4$ частиц в конечном со-

Процесс	Партонные подпроцессы, дающие вклад в сечение	
Парное рождение тяжелых кварков • $c\bar{c}$, $b\bar{b}$, $t\bar{t}$	$g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q}$ $q + \bar{q} \rightarrow Q + \bar{Q}$	[232]
Рождение тяжелых дикварков • $(bc)_0$ • $(cc)_1$, $(bc)_1$, $(bb)_1$	$g^* + g^* \rightarrow (QQ')_S + \bar{Q} + \bar{Q}'$	[338]
Рождение дважды тяжелых мезонов • B_c , B_c^*	$g^* + g^* \rightarrow B_c^{(*)} + b + \bar{c}$	[338]
Рождение дважды тяжелых барионов • Ξ_{cc}^+ , Ξ_{cc}^{++} , Ξ_{cc}^{*+} , Ξ_{cc}^{*++} , Ω_{cc}^+ , Ω_{cc}^{*+} • Ξ_{bc}^0 , Ξ_{bc}^+ , Ξ_{bc}^{*0} , Ξ_{bc}^{*+} , Ω_{bc}^0 , Ω_{bc}^{*0} • Ξ_{bb}^- , Ξ_{bb}^0 , Ξ_{bb}^{*-} , Ξ_{bb}^{*0} , Ω_{bb}^- , Ω_{bb}^{*-}	$g^* + g^* \rightarrow (QQ')_S + \bar{Q} + \bar{Q}'$	[338]
Инклюзивное рождение чармониев • $\eta_c(1S)$, $\eta_c(2S)$ • J/ψ , ψ' • χ_{cJ}	$g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)}, {}^1P_1^{(1)} \right] + g$ $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1)}, {}^1P_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right]$ $g + g \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1)}, {}^1P_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right] + g$	[297, 306, 312]
Инклюзивное рождение боттомониев • $\eta_b(1S)$, $\eta_b(2S)$, $\eta_b(3S)$ • $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$, $\Upsilon(3S)$ • $\chi_{bJ}(1P)$, $\chi_{bJ}(2P)$, $\chi_{bJ}(3P)$	$g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)}, {}^1P_1^{(1)} \right] + g$ $g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1)}, {}^1P_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right]$ $g + g \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^1S_0^{(1)}, {}^1S_0^{(8)}, {}^3S_1^{(8)}, {}^3P_J^{(1)}, {}^1P_1^{(8)}, {}^3P_J^{(8)} \right] + g$	[297, 306, 312]
Парное рождение чармониев • $J/\psi + J/\psi$	$g^* + g^* \rightarrow Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)} \right] + Q\bar{Q} \left[{}^3S_1^{(1)} \right]$	[440]
Инклюзивное рождение бозонов Хиггса • $H^0 \rightarrow \gamma\gamma$ • $H^0 \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ • $H^0 \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp \nu \bar{\nu}$	$g^* + g^* \rightarrow H^0$	[419–422]
Ассоциативное рождение калибровочных бозонов и тяжелых кварков • $\gamma + c$, $\gamma + b$ • $Z/\gamma^* + c$, $Z/\gamma^* + 2c$ • $Z/\gamma^* + b$, $Z/\gamma^* + 2b$	$g^* + g^* \rightarrow \gamma(Z/\gamma^*) + Q + \bar{Q}$ $q + g \rightarrow \gamma(Z/\gamma^*) + q$ $q + Q \rightarrow \gamma(Z/\gamma^*) + q + \bar{Q}$ $q + \bar{q} \rightarrow \gamma(Z/\gamma^*) + Q + \bar{Q}$ $q + g \rightarrow q + \gamma(Z/\gamma^*) + Q + \bar{Q}$	[353, 354]

Таблица 10: Список процессов, доступных для моделирования с помощью Монте-Карло генератора PEGASUS (версии 1.07).

стоянии. По умолчанию используется k_T -факторизационный подход КХД, при этом расчеты производятся в соответствии с общей формулой (92). Кинематика подпроцессов партонного рассеяния $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 4$ (с учетом отличного от нуля поперечного импульса начальных частиц) подробно описана в предыдущих разделах. Отметим, что для каждого из двух начальных партонов предусмотрен выбор вида факторизации соответствующих амплитуд рассеяния и партонных распределений в протоне, который осуществляется в левой части главного окна генератора (вкладка "QCD factorization & PDFs", см. рис. 112). В случае выбора коллинеарной факторизационной схемы (для любого начального партона) в выражении (92) производится автоматическая замена TMD функции распределения на обычную (коллинеарную) партонную плотность, при этом интегрирование по поперечному импульсу этого партона не выполняется²², а амплитуда жесткого подпроцесса рассеяния вычисляется в соответствующем коллинеарном пределе. Гибридный подход, в рамках которого учет поперечного импульса осуществляется только для одного из взаимодействующих партонов, часто используется в феноменологических исследованиях (см., например, [37, 38]).

Интегрирование по фазовому объему конечного состояния производится методом Монте-Карло с помощью программы VEGAS [291], которая включена в состав генератора. Параметры, определяющие общее число итераций и число событий в каждой из них могут быть указаны на соответствующей вкладке ("Monte Carlo simulation") в левой части главного окна, см. рис. 112. Время, необходимое для проведения вычислений, конечно, зависит от выбранного процесса и/или партонного подпроцесса. Однако оно вполне сравнимо с временем, которое требуется для расчетов с использованием других Монте-Карло генераторов, таких, как CASCADE или RUTHIA. Полученные результаты (а именно, распределения по кинематическим переменным, запрашиваемым пользователем с учетом указанных им кинематических ограничений, ширины соответствующих бинов и т.д.) отображаются в графическом виде непосредственно во время выполнения расчетов с помощью встроенного инструмента PEGASUS PLOTTER. Сгенерированные события также могут быть записаны в выходной файл в формате Les Houches Event для их дальнейшего анализа. Этот формат является общепризнанным и широко используется научным сообществом в настоящее время.

7.4 Поточный фактор

Выражение для потокового фактора F , входящее в формулу (92), выбирается согласно (94) в соответствии с общим определением [215]. Следует подчеркнуть, что выбор этого фактора в случае ненулевых виртуальностей начальных глюонов ($k_1^2 = -\mathbf{k}_{1T}^2 \neq 0$, $k_2^2 = -\mathbf{k}_{2T}^2 \neq 0$) не совсем очевиден и обсуждается в литературе (см., например, [210, 212]). Как показывают численные расчеты, для процессов $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 4$ с хорошей точностью можно полагать, что $F = 2\lambda^{1/2}(\hat{s}, k_1^2, k_2^2) \simeq 2\hat{s} \simeq 2x_1x_2s$,

²²В соответствии с формулой (15).

где $\hat{s}$ — энергия партонного подпроцесса, а x_1 и x_2 — доли продольных импульсов сталкивающихся протонов, переносимые взаимодействующими глюонами. Однако в случае процессов $2 \rightarrow 1$, в которых частица в конечном состоянии обладает небольшой массой m (по сравнению с поперечным импульсом p_T) различие между $\hat{s} \equiv m^2$ и величиной $x_1 x_2 s = m^2 + p_T^2$ может оказаться существенным. Результаты расчетов сечений процесса $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + \chi_c$, проведенных в рамках приближения эквивалентных фотонов (Equivalent Photon Approximation) показывают [212], что использование выражения (94) приводит к хорошему согласию полученных предсказаний с результатами точных расчетов, выполненных с учетом вкладов порядка $O(\alpha^4)$. Последнее тем самым обуславливает выбор потокового фактора [215], по умолчанию принятый в PEGASUS. Отметим, что такой же выбор реализован в генераторе KATIE. Тем не менее, перед проведением расчетов пользователь может указать желаемый вид фактора F с помощью соответствующего пункта главного меню (*Edit* $\rightarrow$ *Settings* $\rightarrow$ *Flux*).

7.5 Функции распределения глюонов и кварков в протоне

В отличие от многих других Монте-Карло генераторов, которые для доступа к функциям распределения партонов используют сторонние библиотеки (такие, как LHAUPDF [444] или TMDLIB [103]), генератор PEGASUS уже включает в себя набор TMD распределений глюонов, которые в настоящее время наиболее часто применяются в расчетах. Этот набор состоит из функций распределения, полученных с помощью решения уравнений эволюции CCFM, а также распределений, вычисленных в рамках подхода PB и формализма KMR. В последнем случае в качестве начальных условий использовались различные коллинеарные партонные плотности (NNPDF3.1 [69], MMHT'2014 [70] и др.). Полный список доступных в текущей (1.07) версии генератора TMD распределений глюонов приведен в таблице 11. Такие параметры, как число ароматов кварков N_f , величина Λ_{QCD} , точность, с которой вычисляется бегущая константа связи КХД (в однопетлевом или двухпетлевом приближении) определяются автоматически при выборе пользователем той или иной функции распределения в левой части главного окна генератора (вкладка "QCD factorization & PDFs", см. рис. 112). Все функции распределения представлены в виде таблиц данных, содержащихся в заранее подготовленных файлах в рабочей директории генератора — по умолчанию в папке `.../PEGASUS/data`, чтение которых производится автоматически в начале вычислений. Отметим, что предусмотрена возможность смены этой директории с помощью пункта главного меню *Edit* $\rightarrow$ *Settings* $\rightarrow$ *Path to data folder*. В случае отсутствия любого из необходимых файлов пользователь получит предупреждение при запуске программы; при этом возможность использования генератора для проведения любых расчетов будет заблокирована. Как правило, каждая таблица в таком файле данных состоит из $500 \times 500 \times 500$ полей, в которых содержатся значения величин $\ln x$, $\ln \mathbf{k}_T^2$ и $\ln \mu^2$ (в широком диапазоне изменения последних) и со-

Название	Порядок константы связи КХД	N_f	$\Lambda_{\text{QCD}}/\text{МэВ}$	
A0 (CCFM)	1	4	250	[155]
B0 (CCFM)	1	4	250	[155]
JH'2013 set 1 (CCFM)	2	4	200	[67]
JH'2013 set 2 (CCFM)	2	4	200	[67]
KMR (MMHT'2014 LO)	1	5	211	[60, 61]
KMR (NNPDF3.1 LO)	1	5	167	[60, 61]
KMR (DAS LO set 1)	1	4	143	[184]
KMR (DAS LO set 2)	1	4	143	[184]
PB-NLO-HERAI+II'2018 set 1	2	4	118	[66]
PB-NLO-HERAI+II'2018 set 2	2	4	118	[66]

Таблица 11: Список TMD функций распределения глюонов в протоне, доступных в текущей (1.07) версии Монте-Карло генератора PEGASUS.

ответствующие им значения TMD глюонных распределений в протоне. Необходимая процедура численной интерполяции (линейной по всем аргументам, т.е. $\ln x$, $\ln \mathbf{k}_T^2$ и $\ln \mu^2$) производится автоматически во время проведения расчетов.

Кроме TMD функций распределения глюонов, генератор PEGASUS включает в себя несколько наборов обычных (коллинеарных) распределений кварков и глюонов в протоне. В текущей версии (1.07) доступны следующие: MMHT'2014 (LO и NLO) [70], CT'14 (LO, NLO и NNLO) [68], MSTW'2008 (LO и NLO) [445], а также более старые наборы CTEQ6.6 (NLO) [376] и GRV'94 (LO) [446]. Свободно распространяемые программы группы MMHT и коллаборации CTEQ, которые позволяют проводить численную интерполяцию и вычислять значения партонных распределений для любых значений переменных x и μ^2 , включены в исходный код генератора.

7.6 Генератор псевдослучайных чисел

Обязательной составной частью любого Монте-Карло генератора событий является пакет программ генерации псевдослучайных чисел высокого качества. Проект PEGASUS в качестве такого генератора псевдослучайных чисел использует известную программу RANLUX48 [447]. Последняя широко применяется также и в других проектах, таких, например, как CASCADE. Инициализация генератора RANLUX48 производится автоматически при запуске PEGASUS; при этом в качестве начального параметра используется системное время компьютера (точнее, количество секунд, прошедших от полуночи 1 января 1970 года). При желании пользователь в любой момент до начала выполнения вычислений может инициализировать RANLUX48 произвольным неотрицательным числом с помощью соответствующей опции главного

меню PEGASUS (*Edit* → *Settings* → *Random seed*) или аналогичной опции всплывающего меню. Отметим, что использование в качестве начального параметра числа -1 приведет к инициализации генератора RANLUX48 системным временем.

7.7 Работа с генератором

Простой и интуитивно понятный графический интерфейс генератора PEGASUS значительно облегчает процесс работы с ним и позволяет проводить вычисления неподготовленному пользователю, не обладающему опытом работы с другими генераторами и/или специальными навыками программирования. Так, все параметры расчетов, связанные с выбором моделируемых партонных подпроцессов, масс участвующих во взаимодействии частиц, относительных вероятностей их распадов, а также различные кинематические ограничения, накладываемые на импульсы конечных частиц определяются в соответствующих окнах настроек генератора; при этом, конечно, отсутствует необходимость перекомпиляции исходного программного кода.

Основные этапы работы с генератором сводятся к следующим. Во-первых, выбор процесса, для которого будут генерироваться события, производится из списка в центральной части главного окна, см. рис. 112. Затем в левой части этого окна на вкладке "Colliding particles & c.m. energy" пользователем определяются полная энергия $\sqrt{s}$ и тип сталкивающихся частиц. По умолчанию, значения этих параметров соответствуют условиям коллайдера LHC (Run II). В текущей версии генератора (1.07) для моделирования доступны процессы, происходящие в протон-протонных или протон-антипротонных столкновениях. Как уже было отмечено выше, для каждой из взаимодействующих частиц доступен выбор факторизационной схемы и партонных распределений (вкладка "QCD factorization & PDFs"). Настройка параметров VEGAS, программы численного интегрирования методом Монте-Карло (а именно, определение общего числа итераций и числа событий в каждой из них) осуществляется на вкладке "Monte Carlo simulation". Далее пользователь может перейти к любому из возможных этапов:

- Определение кинематических ограничений, накладываемых на импульсы конечных частиц (или групп конечных частиц) при моделировании событий. Это может быть сделано в окне дополнительных настроек выбранного процесса, которое вызывается с помощью двойного нажатия левой кнопки мыши или путем выбора соответствующего пункта главного меню (*Edit* → *Task*), см. рис. 113.
- Выбор одного или нескольких партонных подпроцессов, вклад которых будет учитываться при вычислении сечения рассматриваемого процесса (в окне дополнительных настроек).
- Выбор ренормализационного и факторизационного масштабов, а также кинематических переменных, распределения по которым будут динамически отображаться в ходе выполнения расчетов с помощью встроенного инструмента

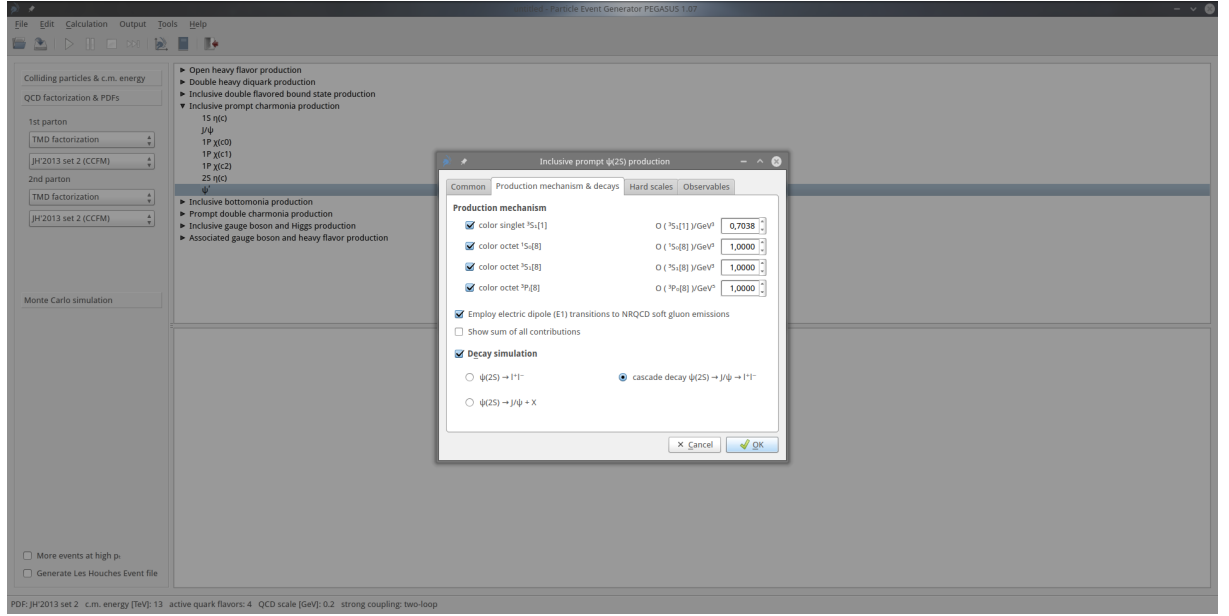


Рис. 113: Определение параметров вычислений. В качестве примера приведен процесс инклюзивного рождения ψ' мезонов в протон-протонных столкновениях.

PEGASUS PLOTTER. Отметим, что биннинг для каждой из таких наблюдаемых может быть как задан пользователем вручную, так и загружен из файла данных программы GNUPLOT либо проекта HepData; при этом поддерживаются несколько различных форматов (*.yoda, *.yaml, *.csv).

- Выбор типа генерируемых событий — взвешенных или невзвешенных — осуществляется с помощью пункта главного меню (*Edit* → *Settings* → *Produced events*) или аналогичной опции всплывающего меню.
- Ряд параметров Стандартной Модели, а также значения масс различных частиц, относительных вероятностей и/или ширин их распадов могут быть заданы с помощью встроенного инструмента PARTICLE DATA. По умолчанию, значения этих параметров определены в соответствии с данными коллаборации Particle Data Group [216]. Инструмент PARTICLE DATA может быть вызван как из главного меню генератора (*Edit* → *Particle data*), так и из всплывающего меню, а также путем нажатия соответствующей кнопки быстрого доступа на панели инструментов.
- По желанию пользователя (метка в левой нижней части главного окна) сгенерированные события могут быть записаны в выходной файл в стандартном формате Les Houches Event (*.lhe) [99] для их дальнейшей обработки. TMD функции распределения глюонов в протоне индексируются в соответствии со схемой, используемой в библиотеке TMDLIB [103], а индексация обычных (коллинеарных) распределений производится в соответствии со схемой, принятой в LHAPDF [444]. Отметим, что выбор этой опции несколько увеличивает время

расчетов.

- Все заданные пользователем параметры вычислений могут быть записаны на жесткий диск в виде конфигурационного файла в некотором собственном формате (*.pegasus). Это может быть сделано через главное (*File* → *Save*, *File* → *Save as*) или всплывающее меню генератора, а также с помощью соответствующей кнопки быстрого доступа. Конечно, этот конфигурационный файл может многократно использоваться в последующих расчетах (опция главного меню *File* → *Open*), а также применяться для вычислений с помощью консольной версии генератора.

Процедура моделирования событий может быть запущена пользователем путем выбора пункта *Calculation* → *Start* главного меню, аналогичной опции всплывающего меню или нажатием соответствующей кнопки на панели инструментов. Полученные результаты отображаются непосредственно во время накопления событий с помощью встроенного инструмента PEGASUS PLOTTER. В любой момент работа генератора может быть приостановлена (пункт главного меню *Calculation* → *Pause*) либо полностью прекращена (*Calculation* → *Stop*); при этом вычислительные мощности компьютера перестают быть задействованы. Отметим, что в случае, когда вклад в сечение рассматриваемого процесса дают несколько партонных подпроцессов, пользователь может завершить процедуру текущих вычислений и немедленно перейти к моделированию событий следующего подпроцесса выбором опции в главном меню генератора *Calculation* → *Next*, аналогичного пункта во всплывающем меню или с помощью нажатия соответствующей кнопки быстрого доступа на панели инструментов генератора.

7.8 PEGASUS PLOTTER

Одной из составных частей генератора PEGASUS является инструмент PEGASUS PLOTTER. С помощью этого инструмента осуществляется визуализация результатов расчетов (в виде распределений по различным кинематическим переменным, выбранных пользователем) непосредственно во время выполнения программы. Он совместим с базой данных проекта HepData (<https://www.hepdata.net>) и позволяет проводить сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, представленными в этой базе данных. Кроме того, PEGASUS PLOTTER является достаточно независимым программным средством и может быть использован по отдельности, вне всякой связи с генератором.

Как и сам PEGASUS, инструмент PEGASUS PLOTTER обладает простым и интуитивно понятным интерфейсом. Он может быть вызван из главного окна генератора нажатием кнопки быстрого доступа на панели инструментов (см. рис. 114), либо с помощью главного меню (*Tools* → *Plotter*), либо выбором соответствующего пункта всплывающего меню. Также он вызывается автоматически при начале накопления

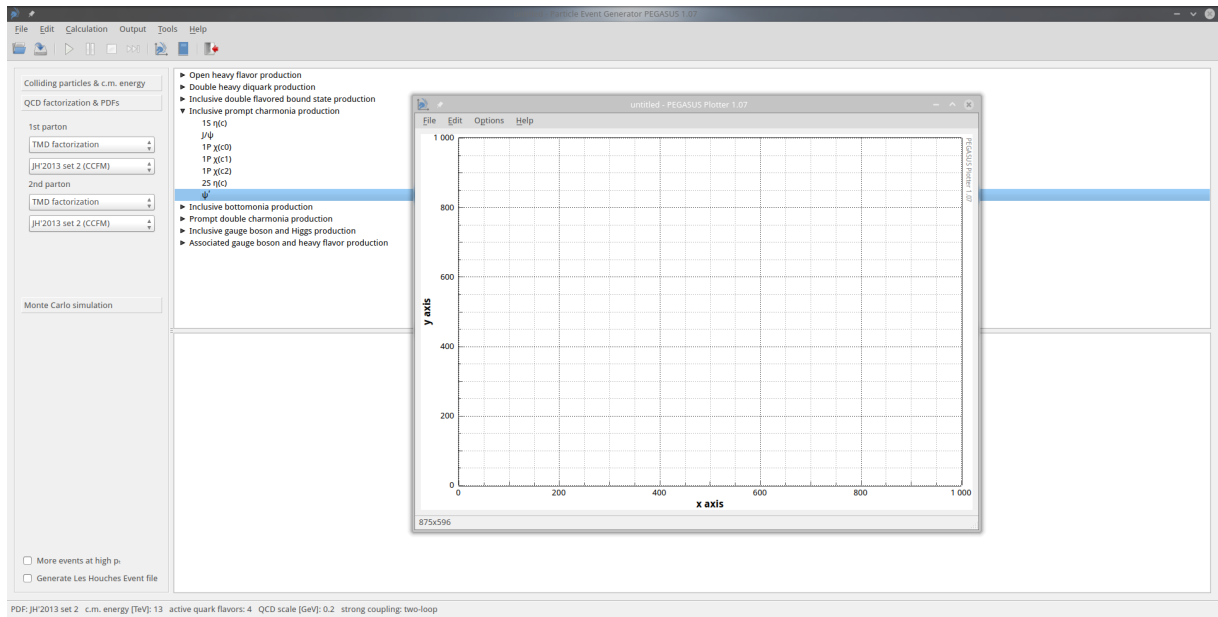


Рис. 114: Рабочая область встроенного инструмента PEGASUS PLOTTER.

событий в процессе моделирования. На рабочую область инструмента, ограниченную осями координат ('x axis' и 'y axis', см. рис. 114) пользователем может быть в произвольном порядке помещено любое число следующих объектов:

- *Curve* (кривая линия). Текстовый файл данных должен содержать два разделенных пробелом столбца, соответствующих абсциссам и ординатам точек, по которым строится кривая. Такой формат реализован и поддерживается программой GNUPLOT (www.gnuplot.info).
- *Histogram* (гистограмма). Аналогично, текстовый файл данных должен содержать два разделенных пробелом столбца, соответствующих абсциссам и ординатам точек, определяющих начало и конец каждого бина. Такой формат также реализован и поддерживается программой GNUPLOT.
- *Filled area* (закрашенная область). Текстовый файл данных должен содержать три разделенных пробелами столбца, соответствующих абсциссам и ординатам точек, определяющих нижнюю и верхнюю границы закрашенной области.
- *Text label* (текстовая заметка). Может содержать произвольную последовательность символов как латинского, так и русского или греческого алфавитов. Ввод символов греческого алфавита возможен с помощью команды, аналогичной принятой в программе GNUPLOT: `{/Symbol letter}`, где `letter` — обозначение символа (например, `alpha`, `sigma` и т.д.). Таким же образом осуществляется ввод заглавных букв греческого алфавита: `{/Symbol Upsilon}`, `{/Symbol Psi}`, `{/Symbol Delta}`. Для обозначения верхних и нижних индексов используется синтаксис, принятый в системе L^AT_EX: `^{\superscript}`, `_{\subscript}`.

- *Experimental data* (экспериментальные данные). Текстовый файл данных должен содержать шесть разделенных пробелом столбцов, соответствующих положениям экспериментальных точек и их ошибкам по осям абсцисс и ординат. Такой формат реализован и поддерживается программой GNUPLOT. Кроме того, поддерживаются стандартные форматы *.yoda or *.csv, которые широко используются подавляющим большинством экспериментальных коллабораций в рамках проекта HepData.

Эти объекты могут быть помещены на рабочую область с помощью главного или всплывающего меню инструмента PEGASUS PLOTTER (*Edit* → *Add to plot*), при этом масштабы осей координат пересчитываются автоматически. Параметры отображения любого из объектов (размер, цвет, тип и толщина линии, шрифт и т.д.) могут быть настроены в соответствии с пожеланиями пользователя (путем двойное нажатия левой кнопки мыши на выбранном объекте, либо с помощью опции *Edit* → *Plottable* главного меню, либо с помощью соответствующего пункта всплывающего меню). Выбор объекта осуществляется одиночным нажатием (щелчком) левой кнопки мыши. Конечно, выбранный объект может быть удален с рабочей области нажатием клавиши **Delete** либо через главное (*Edit* → *Delete from plot*) или всплывающее меню инструмента. Следует отметить, что при выделении объекта типа *Histogram* в строке состояния окна PEGASUS PLOTTER отображается значение определенного интеграла от соответствующей функции в пределах, задаваемых осью абсцисс. Последнее может быть весьма полезно для быстрой оценки полного сечения рассматриваемого процесса в указанной кинематической области. Кроме того, абсолютная величина (нормировка) выделенного объекта типа *Curve*, *Histogram* и *Filled area* может быть изменена с помощью опции *Edit* → *Multiply by a factor* главного или всплывающего меню инструмента.

Различные параметры отображения осей координат (шрифт, линейный или логарифмический масштаб и др.) также могут быть легко настроены в соответствии с пожеланиями пользователя путем двойного нажатия левой кнопки мыши на любой из осей, либо через главное меню (*Edit* → *Axes*). Размер рабочей области инструмента может задан с помощью главного (*Options* → *Plot size*) или всплывающего меню.

Изображение рабочей области инструмента PEGASUS PLOTTER может быть записано на жесткий диск в виде файла в собственном формате (*.pplot). В дальнейшем этот файл может использоваться для последующего анализа полученных результатов и творческой работы с объектами (опции главного меню *File* → *Save plot*, *File* → *Save plot as* и *File* → *Open* соответственно, а также аналогичные пункты всплывающего меню инструмента). Кроме того, изображение рабочей области может быть записано на жесткий диск в некоторых популярных графических форматах (таких, как *.png, *.jpg, *.bmp и др.) и использовано, например, для оформления публикации. В качестве примера на рис. 115 приведены результаты расчетов некоторых

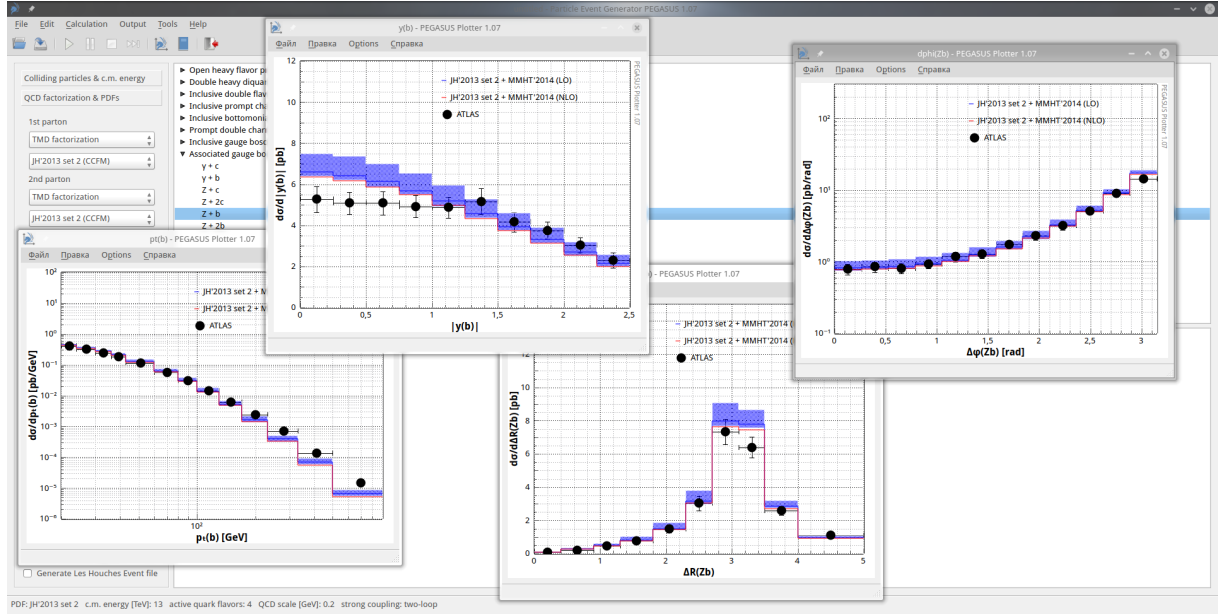


Рис. 115: Некоторые дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z бозонов и струй b -кварков в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, рассчитанные с помощью генератора PEGASUS. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [448].

дифференциальных сечений процесса ассоциативного рождения Z бозонов и b -струй в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (а именно, предсказания для распределений²³ по поперечному импульсу b -струй, быстрой Z бозонов, азимутальному углу между импульсами Z бозона и b -кварка и расстоянию ΔR между Z бозоном и b -кварком в плоскости псевдобыстрот и азимутальных углов) вместе с экспериментальными данными коллаборации ATLAS [448]. Отметим также, что все данные, по которым строятся объекты *Curve*, *Histogram* и *Filled area*, могут быть также сохранены на жестком диске в формате, поддерживаемом программой GNUPLOT (опции главного меню *Options* → *Export* → *Selected sample*, *Options* → *Export* → *All samples* или аналогичные пункты всплывающего меню).

7.9 Установка и запуск генератора

В отличие от многих других Монте-Карло генераторов, требующих специальной (и не всегда простой) процедуры установки, а также наличия в операционной системе предустановленных библиотек (таких, например, как LHAPDF и/или TMDLIB) процедура установки генератора PEGASUS предельно упрощена. Как уже было упомянуто выше, для удобства пользователя PEGASUS распространяется в виде исполняемого в среде Linux файла; при этом все необходимые для его запуска (свободно распространяемые) сторонние библиотеки, а также файлы, содержащие таблицы данных, необходимые для интерполяции партонных распределений, включены в состав рас-

²³Конечно, эти расчеты были выполнены в кинематической области соответствующих измерений.

пространяемого архива. После загрузки этого архива с официального сайта генератора (<https://theory.sinp.msu.ru/doku.php/pegasus/download>) и его распаковки генератор может запущен из терминала с помощью команды `./PEGASUS` (из домашней директории). Необходимые для запуска библиотеки (а именно, `libqwt.so.6`, `libc.so.6`, `libgfortran.so.3`, `libstdc++.so.6`, `libQtGui.so.4`, `libQtCore.so.4` и `libQtSvg.so.4`) находятся в домашней директории, а файлы, содержащие данные таблиц TMD распределений партонов, находятся в директории `data`. Конечно, путь к любой из библиотек также может быть указан явным образом командой `export LD_LIBRARY_PATH=/path/to/library`.

Отметим, что в случае необходимости накопления достаточно большого числа событий консольная версия генератора PEGASUS, также включенная в комплект поставки, может быть несколько более удобна в практическом использовании (в том числе для выполнения вычислений на компьютерных фермах). Консольная версия может быть запущена (из домашней директории) с помощью команды `./сPEGASUS filename.pegasus`. Конечно, при этом предполагается, что конфигурационный файл настроек `filename.pegasus` заранее подготовлен пользователем.

Стабильная работа генератора PEGASUS была протестирована на компьютерах под управлением операционных систем Ubuntu Linux 20.04, OpenSUSE 15.1, Rosa Linux R8.1, R11.1.

8 Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, сводятся к следующим:

1. Предложены две новые TMD функции распределения глюонов в протоне. Первая из них была получена с помощью численного решения уравнения эволюции CCFM, при этом выражение для соответствующего начального распределения было вычислено в рамках модели кварк-глюонных струн с учетом эффектов насыщения глюонной плотности. Вторая функция была получена аналитически в рамках подхода KMR (в ведущем порядке) с использованием в качестве начальных условий партонных плотностей, вычисленных в приближении двойного скейлинга. Соответствующие феноменологические параметры определены с помощью экспериментальных данных HERA, LHC и RHIC. Показано, что использование в расчетах этих глюонных плотностей приводит к лучшему согласию предсказаний (по сравнению с TMD распределениями, полученными недавно другими группами) с экспериментальными данными для сечений ряда жестких процессов, изучаемых на коллайдерах HERA и LHC.
2. Впервые в рамках k_T -факторизационного подхода КХД достигнуто одновременное описание экспериментальных данных LHC для сечений процессов рождения одной или двух b -струй и процессов одиночного и парного рождения ψ' и J/ψ мезонов, возникающих из распадов b -адронов. Продемонстрировано, что распределения по разности азимутальных углов между импульсами конечных частиц, разности их быстрот, расстоянию между этими частицами в плоскости азимутальных углов и быстрот, а также распределения по инвариантной массе и поперечному импульсу конечного состояния наиболее чувствительны к выбору TMD глюонной плотности в протоне. Вклад механизма двойного партонного рассеяния в сечения рассматриваемых процессов весьма мал и составляет около 2%.
3. Определены значения непертурбативных матричных элементов η_c , ψ' , J/ψ и χ_c мезонов из экспериментальных данных LHC для некоторых TMD функций распределения глюонов. Показано, что использование специальной модели (основанной на теории мультипольного разложения излучения) для описания перехода промежуточных октетных состояний пары очарованных кварков в наблюдаемое синглетное позволяет достичь самосогласованного описания как распределений по поперечному импульсу всего семейства чармониев, так и их поляризационных наблюдаемых.
4. Впервые достигнуто хорошее согласие предсказаний k_T -факторизационного подхода КХД и полного набора экспериментальных данных (включая отношения сечений и поляризационные характеристики) для процессов инклюзивного рож-

дения различных S - и P -волновых боттомониев, полученных на коллайдерах Tevatron и LHC.

5. Показано, что предсказания k_T -факторизационного подхода КХД (с учетом вычисленных в рамках коллинеарного приближения вкладов подпроцессов, включающих кварки в начальном состоянии) находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными LHC для широкого ряда процессов высоких энергий: процессов рождения фотонов или калибровочных бозонов в сопровождении адронных струй или тяжелых (c или b) кварков, процессов одиночного рождения t -кварков, процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении струй адронов) рождения бозонов Хиггса, наблюдаемых в различных модах распада. Продemonстрировано, что наиболее чувствительны к выбору TMD глюонной плотности в протоне наблюдаемые, связанные с кинематикой адронных струй (такие, как, например, распределения по разности быстрот конечной частицы и лидирующей струи, инвариантной массе этой системы, разности быстрот двух лидирующих струй).
6. Разработан новый общедоступный Монте-Карло генератор событий PEGASUS, который позволяет в автоматическом режиме вычислять сечения различных жестких процессов КХД с учетом TMD динамики глюонных распределений в протоне. Отличительными особенностями генератора являются обширная библиотека амплитуд вне массовой поверхности партонных подпроцессов (многие из которых отсутствуют в других генераторах) и исключительная простота использования.

Эти результаты были опубликованы в работах (индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus):

1. A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, P. Zhang, "Transverse momentum dependent parton densities in processes with heavy quark generations", Phys. Rev. D 104, 054042 (2021); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [230] в списке цитированной литературы.
2. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, "Associated Higgs + jet(s) production at the LHC and CCFM gluon dynamics in a proton", Phys. Rev. D 103, 094021 (2021); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [422] в списке цитированной литературы.
3. N.A. Abdulov, A. Bacchetta, S.P. Baranov, A. Bermudez Martinez, V. Bertone, C. Bissolotti, V. Candellise, L.I. Estevez Banos, M. Bury, P.L.S. Connor, L. Favart, F. Guzman, F. Hautmann, M. Hentschinski, H. Jung, L. Keersmaekers, A.V. Kotikov, A. Kusina, K. Kutak, A. Lelek, J. Lidrych, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, M.A. Malyshev, M. Mendizabal, S. Prestel, S. Sadeghi Barzani, S. Sapeta, M. Schmitz, A. Signori, G. Sorrentino, S. Taheri Monfared, A. van Hameren, A.M. van

- Kampen, M. Vanden Bemden, A. Vladimirov, Q. Wang, H. Yang, "TMDLIB2 and TMDPLOTTER: a platform for 3D hadron structure studies", Eur. Phys. J. C 81, 752 (2021); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [103] в списке цитированной литературы.
4. S.J. Brodsky, G.I. Lykasov, A.V. Lipatov, J. Smiesko, "Novel Heavy-Quark Physics Phenomena", Prog. Part. Nucl. Phys. 114, 103802 (2020); импакт-фактор журнала 16.281 (Scopus, 2020); ссылка [71] в списке цитированной литературы.
 5. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, " χ_{c1} and χ_{c2} polarization as a probe of color octet channel", Eur. Phys. J. C 80, 1022 (2020); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [310] в списке цитированной литературы.
 6. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, S.P. Baranov, "Particle Event Generator: A Simple-in-Use System PEGASUS version 1.0", Eur. Phys. J. C 80, 330 (2020); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [100] в списке цитированной литературы.
 7. A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, B.G. Shaikhatdenov, P. Zhang, "Transverse momentum dependent parton densities in a proton from the generalized DAS approach", JHEP 02, 028 (2020); импакт-фактор журнала 5.810 (Scopus, 2020); ссылка [184] в списке цитированной литературы.
 8. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, H. Jung, "Relation between the parton branching approach and Catani-Ciafaloni-Fiorani-Marchesini evolution", Phys. Rev. D 101, 034022 (2020); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [152] в списке цитированной литературы.
 9. N.A. Abdulov, A.V. Lipatov, "Bottomonia production and polarization in the NR-QCD with k_T -factorization. III: $\Upsilon(1S)$ and $\chi_b(1P)$ mesons", Eur. Phys. J. C 81, 1085 (2021); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [329] в списке цитированной литературы.
 10. N.A. Abdulov, A.V. Lipatov, "Bottomonia production and polarization in the NR-QCD with k_T -factorization. II: $\Upsilon(2S)$ and $\chi_b(2P)$ mesons", Eur. Phys. J. C 80, 486 (2020); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [326] в списке цитированной литературы.
 11. N.A. Abdulov, A.V. Lipatov, "Bottomonia production and polarization in the NR-QCD with k_T -factorization. I: $\Upsilon(3S)$ and $\chi_b(3P)$ mesons", Eur. Phys. J. C 79, 830 (2019); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [325] в списке цитированной литературы.

12. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, H. Jung, "TMD parton shower effects in associated $\gamma + jet$ production at LHC", Phys. Rev. D 100, 034028 (2019); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [387] в списке цитированной литературы.
13. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, "Are there any challenges in the charmonia production and polarization at the LHC?", Phys. Rev. D 100, 114021 (2019); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [296] в списке цитированной литературы.
14. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, "Prompt η_c meson production at the LHC in the NR-QCD with k_T -factorization", Eur. Phys. J. C 79, 621 (2019); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [312] в списке цитированной литературы.
15. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, "Associated non-prompt $J/\psi + \mu$ and $J/\psi + J/\psi$ production at LHC as a test for TMD gluon density", Eur. Phys. J. C 78, 820 (2018); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [242] в списке цитированной литературы.
16. N.A. Abdulov, H. Jung, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, M.A. Malyshev, "Employing RHIC and LHC data to determine TMD gluon density in a proton", Phys. Rev. D 98, 054010 (2018); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [172] в списке цитированной литературы.
17. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, "First estimates of the B_c wave function from the data on the B_c production cross section", Phys. Lett. B 785, 338 (2018); импакт-фактор журнала 4.771 (Scopus, 2020); ссылка [333] в списке цитированной литературы.
18. V.A. Bednyakov, S.J. Brodsky, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, M.A. Malyshev, J. Smiesko, S. Tokar, "Constraints on the intrinsic charm content of the proton from recent ATLAS data", Eur. Phys. J. C 79, 92 (2019); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [356] в списке цитированной литературы.
19. A.V. Lipatov, S.P. Baranov, H. Jung, M.A. Malyshev, "Charmonia production from b -hadron decays at LHC with k_T -factorization: J/ψ , $\psi(2S)$ and $J/\psi + Z$ ", Eur. Phys. J. C 78, 2 (2018); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [243] в списке цитированной литературы.
20. S.P. Baranov, H. Jung, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, "Associated production of Z bosons and b -jets at the LHC in the combined $k_T + collinear$ QCD factorization approach", Eur. Phys. J. C 77, 772 (2017); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [355] в списке цитированной литературы.
21. N.A. Abdulov, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, "Inclusive Higgs boson production at the LHC in the k_T -factorization approach", Phys. Rev. D 97, 054017 (2018); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [421] в списке цитированной литературы.

22. S.P. Baranov, H. Jung, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, "Testing the parton evolution with the use of two-body final states", Eur. Phys. J. C 77, 2 (2017); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [234] в списке цитированной литературы.
23. A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, Yu.Yu. Stepanenko, V.A. Bednyakov, "Probing proton intrinsic charm in photon or Z boson production accompanied by heavy jets at LHC", Phys. Rev. D 94, 053011 (2016); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [385] в списке цитированной литературы.
24. A.A. Grinyuk, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, N.P. Zotov, "Significance of non-perturbative input to TMD gluon density for hard processes at LHC", Phys. Rev. D 93, 014035 (2016); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [171] в списке цитированной литературы.
25. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, "Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. Part III: J/ψ meson", Phys. Rev. D 96, 034019 (2017); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [313] в списке цитированной литературы.
26. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. Part II: χ_c mesons", Phys. Rev. D 93, 094012 (2016); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [306] в списке цитированной литературы.
27. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. Part I: $\psi(2S)$ meson", Eur. Phys. J. C 75, 455 (2015); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [297] в списке цитированной литературы.
28. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, N.P. Zotov, "Phenomenology of k_T -factorization for inclusive Higgs boson production at LHC", Phys. Lett. B 735, 79 (2014); импакт-фактор журнала 4.771 (Scopus, 2020); ссылка [420] в списке цитированной литературы.
29. A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, N.P. Zotov, "LHC soft physics and transverse momentum dependent gluon density at low x ", Phys. Rev. D 89, 014001 (2014); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [168] в списке цитированной литературы.
30. A.A. Grinyuk, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, N.P. Zotov, "Transition between soft physics at LHC and low- x physics at HERA", Phys. Rev. D 87, 074017 (2013); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [164] в списке цитированной литературы.
31. A.V. Lipatov, M.A. Malyshev, N.P. Zotov, "Prompt photon and associated heavy quark production at hadron colliders with k_T -factorization", JHEP 05, 104 (2012);

импакт-фактор журнала 5.810 (Scopus, 2020); ссылка [366] в списке цитированной литературы.

32. Н. Jung, M. Krämer, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Investigation of beauty production and parton shower effects at LHC*", Phys. Rev. D 85, 034035 (2012); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [204] в списке цитированной литературы.
33. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Prompt J/ψ production at LHC: new evidence for the k_T -factorization*", Phys. Rev. D 85, 014034 (2012); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [277] в списке цитированной литературы.
34. A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Phenomenology of k_T -factorization for inclusive top quark pair production at hadron colliders*", Phys. Lett. B 704, 189 (2011); импакт-фактор журнала 4.771 (Scopus, 2020); ссылка [183] в списке цитированной литературы.
35. Н. Jung, M. Krämer, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Heavy Flavour Production at Tevatron and Parton Shower Effects*", JHEP 01, 085 (2011); импакт-фактор журнала 5.810 (Scopus, 2020); ссылка [203] в списке цитированной литературы.
36. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Production of electroweak gauge bosons in off-shell gluon-gluon fusion*", Phys. Rev. D 78, 014025 (2008); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [354] в списке цитированной литературы.
37. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Associated production of prompt photons and heavy quarks in off-shell gluon-gluon fusion*", Eur. Phys. J. C 56, 371 (2008); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [365] в списке цитированной литературы.
38. S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Prompt photon hadroproduction at high energies in off-shell gluon-gluon fusion*", Phys. Rev. D 77, 074024 (2008); импакт-фактор журнала 5.296 (Scopus, 2020); ссылка [353] в списке цитированной литературы.
39. A.V. Lipatov, N.P. Zotov, "*Higgs boson production at hadron colliders in the k_T -factorization approach*", Eur. Phys. J. C 44, 559 (2005); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [419] в списке цитированной литературы.
40. Н.П. Зотов, А.В. Липатов, В.А. Салеев, "*Процессы рождения тяжелых кварков на коллайдере Tevatron в рамках полужесткого подхода КХД и неинтегрированные распределения глюонов*", ЯФ 66, 786 (2003);
N.P. Zotov, A.V. Lipatov, V.A. Saleev, "*Heavy-quark production in $p\bar{p}$ collisions and unintegrated gluon distributions*", Phys. Atom. Nucl. 66, 755 (2003); импакт-фактор журнала 0.420 (Scopus, 2020); ссылка [232] в списке цитированной литературы.

- 41. A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, " *The contribution of off-shell gluons to the longitudinal structure function F_L* ", Eur. Phys. J. C 27, 219 (2003); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [227] в списке цитированной литературы.
- 42. A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, G. Parente, N.P. Zotov, " *The contribution of off-shell gluons to the structure functions F_2^c and F_L^c and the unintegrated gluon distributions*", Eur. Phys. J. C 26, 51 (2002); импакт-фактор журнала 4.590 (Scopus, 2020); ссылка [226] в списке цитированной литературы.

Благодарности

Я глубоко признателен доктору физико-математических наук Сергею Павловичу Баранову за живой интерес, полезные советы, многочисленные всесторонние обсуждения широкого ряда вопросов, возникающих в процессе подготовки этой диссертации. Приношу искреннюю благодарность своему другу и коллеге М.А. Малышеву за полезные советы, вклад в наши совместные работы и неоценимую помощь при проведении численных расчетов. Отдельную благодарность хочу выразить А.В. Котикову, Г.И. Лыкасову, Н.А. Абдулову и А.А. Прохорову за глубокие обсуждения полученных результатов и их вклад в совместные работы. Открытая и дружелюбная рабочая атмосфера создана в отделе теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ благодаря усилиям его руководителя В.И. Саврина и Е.Е. Боос. Кроме того, я искренне признателен Х. Юнгу (Hannes Jung, DESY) за гостеприимство и высоко ценю сложившееся за долгие годы конструктивное и плодотворное сотрудничество.

Развитие и распространение k_T -факторизационного подхода, а также укрепление авторитета этого метода в международном научном сообществе тесно связано с именем Николая Петровича Зотова. Я безмерно благодарен ему за предложенное много лет назад направление исследований и последующую всестороннюю поддержку.

Список литературы

- [1] *Collins J.C.* Foundations of perturbative QCD. — 2011.
- [2] *Efremov A.V., Radyushkin A.V.* Hard processes, parton model and QCD // *La Rivista del Nuovo Cimento*. — 1980. — Jan. — Vol. 3, no. 2. — P. 1. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02724326>.
- [3] *Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.* Factorization of hard processes in QCD // *Advanced Series on Directions in High Energy Physics*. — 1989. — Vol. 5. — Pp. 1–91.
- [4] *Грибов В.Н., Лунатов Л.Н.* Глубоконеупругое ep -рассеяние в теории возмущений // *Ядерная физика*. — 1972. — Vol. 15. — Pp. 781–807.
- [5] *Грибов В.Н., Лунатов Л.Н.* Аннигиляция e^+e^- -пар и глубоконеупругое ep -рассеяние в теории возмущений // *Ядерная физика*. — 1972. — Vol. 15. — Pp. 1218–1237.
- [6] *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic freedom in parton language // *Nuclear Physics B*. — 1977. — Vol. 126, no. 2. — Pp. 298–318. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844>.
- [7] *Докилицер Ю.Л.* Вычисление структурных функций для глубоконеупругого рассеяния и e^+e^- аннигиляции в теории возмущений квантовой хромодинамики // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1977. — Vol. 73. — Pp. 1216–1241.
- [8] Combined measurement and QCD analysis of the inclusive $e^\pm p$ scattering cross sections at HERA / F.D. Aaron, H. Abramowicz, I. Abt et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2010. — Jan. — Vol. 2010, no. 1. — P. 109.
- [9] Combination and QCD Analysis of Charm Production Cross Section Measurements in Deep-Inelastic ep Scattering at HERA / F.D. Aaron, H. Abramowicz, I. Abt et al. // *European Physical Journal C*. — 2013. — Feb. — Vol. 73, no. 2. — P. 2311.
- [10] Measurement of the transverse momentum distribution of Drell-Yan lepton pairs in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, D.C. Abbott et al. // *European Physical Journal C*. — 2020. — Vol. 80, no. 7. — P. 616.
- [11] Measurements of differential Z boson production cross sections in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2019. — Dec. — Vol. 2019, no. 12. — P. 059. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2019\)061](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2019)061).

- [12] *Collins J.C., Soper D.E.* Parton distribution and decay functions // *Nuclear Physics B.* — 1982. — Vol. 194, no. 3. — Pp. 445–492. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382900219>.
- [13] *Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.* Transverse momentum distribution in Drell-Yan pair and W and Z boson production // *Nuclear Physics B.* — 1985. — Vol. 250, no. 1. — Pp. 199–224. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385904791>.
- [14] *Кураев Э.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С.* Мульти-реджевские процессы в теории Янга-Миллса // *Журнал теоретической и экспериментальной физики.* — 1976. — Vol. 71. — Pp. 840–855.
- [15] *Кураев Э.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С.* Особенность Померанчука в неабелевых калибровочных теориях // *Журнал теоретической и экспериментальной физики.* — 1977. — Vol. 72. — Pp. 377–389.
- [16] *Балицкий Я.Я., Липатов Л.Н.* О Померанчуковской особенности в квантовой хромодинамике // *Ядерная физика.* — 1978. — Vol. 28. — Pp. 1597–1611.
- [17] *Ciafaloni M.* Coherence effects in initial jets at small Q^2/s // *Nuclear Physics B.* — 1988. — Vol. 296, no. 1. — Pp. 49–74. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138890380X>.
- [18] *Catani S., Fiorani F., Marchesini G.* QCD coherence in initial state radiation // *Physics Letters B.* — 1990. — Vol. 234, no. 3. — Pp. 339–345. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269390919388>.
- [19] *Catani S., Fiorani F., Marchesini G.* Small- x behaviour of initial state radiation in perturbative QCD // *Nuclear Physics B.* — 1990. — Vol. 336, no. 1. — Pp. 18–85. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090342B>.
- [20] *Marchesini G.* QCD coherence in the structure function and associated distributions at small x // *Nuclear Physics B.* — 1995. — Jul. — Vol. 445, no. 1. — Pp. 49–78. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00149-M](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(95)00149-M).
- [21] *Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G.* Semihard processes in QCD // *Physics Reports.* — 1983. — Vol. 100, no. 1. — Pp. 1–150. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157383900224>.
- [22] Рождение тяжелых кварков в полужестких взаимодействиях нуклонов / Е.М. Левин, М.Г. Рыскин, А.Г. Шуваев, Ю.М. Шабельский // *Ядерная физика.* — 1991. — Vol. 53. — Pp. 1059–1077.

- [23] *Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F.* High energy factorization and small- x heavy flavour production // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Vol. 366, no. 1. — Pp. 135–188. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391900553>.
- [24] *Collins J.C., Ellis R.K.* Heavy-quark production in very high energy hadron collisions // *Nuclear Physics B.* — 1991. — Vol. 360, no. 1. — Pp. 3–30. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391902889>.
- [25] *Collins J.C., Soper D.E.* Back-to-back jets in QCD // *Nuclear Physics B.* — 1981. — Vol. 193, no. 2. — Pp. 381–443. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321381903394>.
- [26] *Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.* Factorization for one-loop corrections in the Drell-Yan process // *Nuclear Physics B.* — 1983. — Vol. 223, no. 2. — Pp. 381–421. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383900627>.
- [27] *Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.* Does the Drell-Yan cross section factorize? // *Physics Letters B.* — 1982. — Vol. 109, no. 5. — Pp. 388–392. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382910978>.
- [28] *Meng R., Olness F.I., Soper D.E.* Semi-inclusive deeply inelastic scattering at small q_T // *Physical Review D.* — 1996. — Aug. — Vol. 54. — Pp. 1919–1935. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.1919>.
- [29] *Nadolsky P.M., Stump D.R., Yuan C.-P.* Semi-inclusive hadron production at DESY HERA: The effect of QCD gluon resummation // *Physical Review D.* — 1999. — Nov. — Vol. 61. — P. 014003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.014003>.
- [30] *Nadolsky P.M., Stump D.R., Yuan C.-P.* Phenomenology of multiple parton radiation in semi-inclusive deep-inelastic scattering // *Physical Review D.* — 2001. — Nov. — Vol. 64. — P. 114011. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.114011>.
- [31] *Ji X.-D., Ma J.-P., Yuan F.* QCD factorization for semi-inclusive deep-inelastic scattering at low transverse momentum // *Physical Review D.* — 2005. — Feb. — Vol. 71. — P. 034005. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.034005>.
- [32] *Ji X.-D., Ma J.-P., Yuan F.* QCD factorization for spin-dependent cross sections in DIS and Drell-Yan processes at low transverse momentum // *Physics Letters B.* — 2004. — Vol. 597, no. 3. — Pp. 299–308. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304010639>.
- [33] *Echevarria M.G., Idilbi A., Scimemi I.* Factorization theorem for Drell-Yan at low q_T and transverse-momentum distributions on-the-light-cone // *Journal of High*

- Energy Physics*. — 2012. — Jul. — Vol. 2012, no. 7. — P. 002. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)002](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2012)002).
- [34] Rapidity Renormalization Group / J.-Y. Chiu, A. Jain, D. Neill, I.Z. Rothstein // *Physical Review Letters*. — 2012. — Apr. — Vol. 108, no. 15. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.151601>.
- [35] Bermudez Martinez A. Connor P.L.S. Dominguez Damiani D. Estevez Banos L.I. Hautmann F. Jung H. Lidrych J. Lelek A. Mendizabal M. Schmitz M. Taheri Monfared S. Wang Q. Wening T. Yang H. Zlebcik R. The transverse momentum spectrum of low mass Drell-Yan production at next-to-leading order in the parton branching method // *European Physical Journal C*. — 2020. — Vol. 80, no. 7. — P. 598.
- [36] Production of Z bosons in the parton branching method / A. Bermudez Martinez, P.L.S. Connor, D. Dominguez Damiani et al. // *Physical Review D*. — 2019. — Oct. — Vol. 100. — P. 074027. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.074027>.
- [37] Maciula R., Szczurek A. Intrinsic charm in the nucleon and charm production at large rapidities in collinear, hybrid and k_T -factorization approaches // *Journal of High Energy Physics*. — 2020. — Oct. — Vol. 2020, no. 10. — P. 135. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2020\)135](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2020)135).
- [38] Schäfer W., Szczurek A. Low mass Drell-Yan production of lepton pairs at forward directions at the LHC: A hybrid approach // *Physical Review D*. — 2016. — Apr. — Vol. 93. — P. 074014. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.074014>.
- [39] Cisek A., Schäfer W., Szczurek A. Production of χ_c pairs with large rapidity separation in k_T -factorization // *Physical Review D*. — 2018. — Jun. — Vol. 97. — P. 114018. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.114018>.
- [40] Islam R., Kumar M., Rawoot V. k_T -factorization approach to the Higgs boson production in $ZZ^* \rightarrow 4l$ channel at the LHC // *European Physical Journal C*. — 2019. — Feb. — Vol. 79, no. 3. — P. 181. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6663-1>.
- [41] Maciula R., Szczurek A. Consistent treatment of charm production in higher-orders at tree-level within k_T -factorization approach // *Physical Review D*. — 2019. — Sep. — Vol. 100. — P. 054001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.054001>.
- [42] Pasechnik R.S., Szczurek A., Teryaev O.V. Polarization effects in the central exclusive χ_c production and the J/ψ angular distributions // *Physical*

- Review D.* — 2011. — Apr. — Vol. 83. — P. 074017. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.074017>.
- [43] *Pasechnik R.S., Szczurek A., Teryaev O.V.* Nonperturbative and spin effects in the central exclusive production of the tensor $\chi_c(2^+)$ meson // *Physical Review D.* — 2010. — Feb. — Vol. 81. — P. 034024. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.034024>.
- [44] *Pasechnik R.S., Szczurek A., Teryaev O.V.* Elastic double diffractive production of axial-vector $\chi_c(1^{++})$ mesons and the Landau-Yang theorem // *Physics Letters B.* — 2009. — Vol. 680, no. 1. — Pp. 62–71. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309009848>.
- [45] *Szczurek A., Pasechnik R.S., Teryaev O.V.* $pp \rightarrow pp\eta'$ reaction at high energies // *Physical Review D.* — 2007. — Mar. — Vol. 75. — P. 054021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.054021>.
- [46] *Pasechnik R.S., Teryaev O.V., Szczurek A.* Scalar Higgs boson production in fusion of two off-shell gluons // *European Physical Journal C.* — 2006. — Jun. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 429–435. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2006-02586-6>.
- [47] *Deak M., Schwennsen F.* Z and $W^\pm$ production associated with quark-antiquark pair in k_T -factorization at the LHC // *Journal of High Energy Physics.* — 2008. — Sep. — Vol. 2008, no. 09. — P. 035. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/09/035>.
- [48] *Pietrycki T., Szczurek A.* Photon-jet correlations in pp and $p\bar{p}$ collisions // *Physical Review D.* — 2007. — Aug. — Vol. 76. — P. 034003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.034003>.
- [49] Heavy-quark production as a sensitive test for an improved description of high-energy hadron collisions / P. Hägler, R. Kirschner, A. Schäfer et al. // *Physical Review D.* — 2000. — Sep. — Vol. 62. — P. 071502. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.071502>.
- [50] *Baranov S.P., Smizanska M.* Semihard b -quark production at high energies versus data and other approaches // *Physical Review D.* — 2000. — May. — Vol. 62. — P. 014012. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.014012>.
- [51] *Lipatov L.N.* Gauge invariant effective action for high energy processes in QCD // *Nuclear Physics B.* — 1995. — Vol. 452, no. 1. — Pp. 369–397. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500390E>.
- [52] *Lipatov L.N., Vyazovsky M.I.* Quasi-multi-Regge processes with a quark exchange in the t -channel // *Nuclear Physics B.* — 2001. — Vol. 597, no. 1. — Pp. 399–409. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321300007094>.

- [53] *Lipatov L.N.* Small- x physics in perturbative QCD // *Physics Reports*. — 1997. — Jul. — Vol. 286, no. 3. — Pp. 131–198. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(96\)00045-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(96)00045-2).
- [54] *Mulders P.J., Rodrigues J.* Transverse momentum dependence in gluon distribution and fragmentation functions // *Physical Review D*. — 2001. — Apr. — Vol. 63. — P. 094021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.094021>.
- [55] QCD evolution of (un)polarized gluon TMDPDFs and the Higgs q_T -distribution / *M.G. Echevarria, T. Kasemets, P.J. Mulders, C. Pisano* // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Jul. — Vol. 2015, no. 7. — P. 158. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)158](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2015)158).
- [56] *Sun P., Xiao B.-W., Yuan F.* Gluon distribution functions and Higgs boson production at moderate transverse momentum // *Physical Review D*. — 2011. — Nov. — Vol. 84. — P. 094005. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.094005>.
- [57] *Meissner S., Metz A., Goeke K.* Relations between generalized and transverse momentum dependent parton distributions // *Physical Review D*. — 2007. — Aug. — Vol. 76. — P. 034002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.034002>.
- [58] Universality of unintegrated gluon distributions at small x / *F. Dominguez, C. Marquet, B.-W. Xiao, F. Yuan* // *Physical Review D*. — 2011. — May. — Vol. 83. — P. 105005. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.105005>.
- [59] On the small- x evolution of the color quadrupole and the Weizsäcker-Williams gluon distribution / *F. Dominguez, A.H. Mueller, S. Munier, B.-W. Xiao* // *Physics Letters B*. — 2011. — Vol. 705, no. 1. — Pp. 106–111. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311012044>.
- [60] *Kimber M.A., Martin A.D., Ryskin M.G.* Unintegrated parton distributions // *Physical Review D*. — 2001. — May. — Vol. 63. — P. 114027. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.114027>.
- [61] *Watt G., Martin A.D., Ryskin M.G.* Unintegrated parton distributions and inclusive jet production at HERA // *European Physical Journal C*. — 2003. — Oct. — Vol. 31, no. 1. — Pp. 73–89. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2003-01320-4>.
- [62] *Martin A.D., Ryskin M.G., Watt G.* NLO prescription for unintegrated parton distributions // *European Physical Journal C*. — 2010. — Jan. — Vol. 66, no. 1-2. — Pp. 163–172. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1242-5>.
- [63] *Hentschinski M.* Transverse momentum dependent gluon distribution within high energy factorization at next-to-leading order // *Physical*

- Review D.* — 2021. — Sep. — Vol. 104. — P. 054014. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.054014>.
- [64] *Karpishkov A.V., Nefedov M.A., Saleev V.A.* $B\bar{B}$ angular correlations at the LHC in the parton Reggeization approach merged with higher-order matrix elements // *Physical Review D.* — 2017. — Nov. — Vol. 96. — P. 096019. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.096019>.
- [65] Soft-gluon resolution scale in QCD evolution equations / F. Hautmann, H. Jung, A. Lelek et al. // *Physics Letters B.* — 2017. — Vol. 772. — Pp. 446–451.
- [66] Collinear and TMD Quark and Gluon Densities from Parton Branching Solution of QCD Evolution Equations / F. Hautmann, H. Jung, A. Lelek et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2018. — Vol. 01. — P. 070.
- [67] *Hautmann F., Jung H.* Transverse momentum dependent gluon density from DIS precision data // *Nuclear Physics B.* — 2014. — Jun. — Vol. 883. — Pp. 1–19. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.03.014>.
- [68] CT14 intrinsic charm parton distribution functions from CTEQ-TEA global analysis / T.-J. Hou, S. Dulat, J. Gao et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2018. — Feb. — Vol. 2018, no. 2. — P. 059. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02\(2018\)059](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2018)059).
- [69] Parton distributions from high-precision collider data / R.D. Ball, V. Bertone, S. Carrazza et al. // *European Physical Journal C.* — 2017. — Vol. 77, no. 10. — P. 663.
- [70] Parton distributions in the LHC era: MMHT’2014 PDFs / L.A. Harland-Lang, A.D. Martin, P. Motylinski, R.S. Thorne // *European Physical Journal C.* — 2015. — May. — Vol. 75, no. 5. — P. 204. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3397-6>.
- [71] Novel Heavy-Quark Physics Phenomena / S. J. Brodsky, G. I. Lykasov, A. V. Lipatov, J. Smiesko // *Progress in Particle and Nuclear Physics.* — 2020. — Vol. 114. — P. 103802. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641020300491>.
- [72] *Chang C.-H.* Hadronic production of J/ψ associated with a gluon // *Nuclear Physics B.* — 1980. — Vol. 172. — Pp. 425–434. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380901753>.
- [73] *Berger E.L., Jones D.* Inelastic photoproduction of J/ψ and Υ by gluons // *Physical Review D.* — 1981. — Apr. — Vol. 23. — Pp. 1521–1530. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.1521>.

- [74] *Baier R., Rückl R.* Hadronic production of J/ψ and Υ : transverse momentum distributions // *Physics Letters B.* — 1981. — Vol. 102, no. 5. — Pp. 364–370. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381906365>.
- [75] *Герштейн С.С., Лиходед А.К., Слабоспицкий С.Р.* Инклюзивные спектры очарованных частиц в процессах фоторождения // *Ядерная физика.* — 1981. — Vol. 34. — P. 227.
- [76] *Cho P., Leibovich A.K.* Color-octet quarkonia production // *Physical Review D.* — 1996. — Jan. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 150–162. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [77] *Cho P., Leibovich A.K.* Color-octet quarkonia production. II // *Physical Review D.* — 1996. — Jun. — Vol. 53, no. 11. — Pp. 6203–6217. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [78] *Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P.* Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // *Physical Review D.* — 1995. — Vol. 51. — Pp. 1125–1171. — [Erratum: *Physical Review D* 55, 5853 (1997)].
- [79] Υ Production at Fermilab Tevatron and LHC Energies / P. Artoisenet, J. Campbell, J.P. Lansberg et al. // *Physical Review Letters.* — 2008. — Oct. — Vol. 101. — P. 152001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.152001>.
- [80] *Ma Y.-Q., Wang K., Chao K.-T.* J/ψ (ψ') production at the Tevatron and LHC at $O(\alpha_s^4 v^4)$ in nonrelativistic QCD // *Physical Review Letters.* — 2011. — Jan. — Vol. 106. — P. 042002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.042002>.
- [81] *Butenschön M., Kniehl B.A.* Reconciling J/ψ Production at HERA, RHIC, Tevatron, and LHC with Nonrelativistic QCD Factorization at Next-to-Leading Order // *Physical Review Letters.* — 2011. — Jan. — Vol. 106. — P. 022003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.022003>.
- [82] *Butenschön M., Kniehl B.A.* World data of J/ψ production consolidate nonrelativistic QCD factorization at next-to-leading order // *Physical Review D.* — 2011. — Sep. — Vol. 84. — P. 051501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.051501>.
- [83] *Gong B., Li X.Q., Wang J.-X.* QCD corrections to J/ψ production via color-octet states at the Tevatron and LHC // *Physics Letters B.* — 2009. — Vol. 673, no. 3. — Pp. 197–200. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309001944>.
- [84] *Gong B., Wang J.-X., Zhang H.-F.* QCD corrections to Υ production via color-octet states at the Tevatron and LHC // *Physical Review D.* — 2011. — Jun. — Vol. 83, no. 11. — P. 114021. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114021>.

- [85] Complete next-to-leading-order study on the yield and polarization of $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$ at the Tevatron and LHC / B. Gong, L.-P. Wan, J.-X. Wang, H.-F. Zhang // *Physical Review Letters*. — 2014. — Jan. — Vol. 112. — P. 032001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.032001>.
- [86] An updated study of Υ production and polarization at the Tevatron and LHC / Y. Feng, B. Gong, L.-P. Wan, J.-X. Wang // *Chinese Physics C*. — 2015. — Dec. — Vol. 39, no. 12. — P. 123102. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1674-1137/39/12/123102>.
- [87] Wang K., Ma Y.-Q., Chao K.-T. $\Upsilon(1S)$ prompt production at the Tevatron and LHC in nonrelativistic QCD // *Physical Review D*. — 2012. — Jun. — Vol. 85, no. 11. — P. 114003. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.114003>.
- [88] $\Upsilon(nS)$ and $\chi_b(nP)$ production at hadron colliders in nonrelativistic QCD / H. Han, Y.-Q. Ma, C. Meng et al. // *Physical Review D*. — 2016. — Jul. — Vol. 94. — P. 014028. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.014028>.
- [89] Measurement of the prompt J/ψ and $\psi(2S)$ polarizations in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Physics Letters B*. — 2013. — Vol. 727, no. 4. — Pp. 381–402. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313008629>.
- [90] Measurement of the $\eta_c(1S)$ production cross-section in proton–proton collisions via the decay $\eta_c(1S) \rightarrow p\bar{p}$ / R. Aaij, Abellan B. Beteta, C., M. Adinolfi et al. // *European Physical Journal C*. — 2015. — Jul. — Vol. 75, no. 7. — P. 311. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3502-x>.
- [91] Butenschoen M., He Z.-G., Kniehl B.A. η_c production at the LHC challenges nonrelativistic QCD factorization // *Physical Review Letters*. — 2015. — Mar. — Vol. 114. — P. 092004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.092004>.
- [92] Impact of η_c Hadroproduction Data on Charmonium Production and Polarization within the Nonrelativistic QCD Framework / H.-F. Zhang, Z. Sun, W.-L. Sang, R. Li // *Physical Review Letters*. — 2015. — Mar. — Vol. 114. — P. 092006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.092006>.
- [93] Faccioli P., Lourenco C., Madlener T. From prompt to direct J/ψ production: new insights on the χ_{c1} and χ_{c2} polarizations and feed-down contributions from a global-fit analysis of mid-rapidity LHC data // *European Physical Journal C*. — 2020. — Jul. — Vol. 80, no. 7. — P. 623. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8201-6>.
- [94] Faccioli P., Lourenco C. NRQCD colour-octet expansion vs. LHC quarkonium production: signs of a hierarchy puzzle? // *European Physical Journal C*. — 2019.

— May. — Vol. 79, no. 6. — P. 457. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6968-0>.

- [95] From identical S - and P -wave p_T spectra to maximally distinct polarizations: probing NRQCD with χ states / P. Faccioli, C. Lourenco, M. Araujo et al. // *European Physical Journal C*. — 2018. — Vol. 8, no. 3. — P. 268.
- [96] *Baranov S.P.* Possible solution of the quarkonium polarization problem // *Physical Review D*. — 2016. — Mar. — Vol. 93. — P. 054037. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.054037>.
- [97] The CCFM Monte Carlo generator CASCADE version 2.2.03 / H. Jung, S. Baranov, M. Deak et al. // *European Physical Journal C*. — 2010. — Vol. 70. — Pp. 1237–1249.
- [98] *van Hameren A.* KATIE : For parton-level event generation with k_T -dependent initial states // *Computer Physics Communications*. — 2018. — Vol. 224. — Pp. 371–380.
- [99] A standard format for Les Houches Event Files / J. Alwall, A. Ballestrero, P. Bartalini et al. // *Computer Physics Communications*. — 2007. — Feb. — Vol. 176, no. 4. — Pp. 300–304. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2006.11.010>.
- [100] *Lipatov A.V., Malyshev M.A., Baranov S.P.* Particle Event Generator: A Simple-in-Use System PEGASUS version 1.0 // *European Physical Journal C*. — 2020. — Vol. 80, no. 4. — P. 330.
- [101] Measurement of the differential photon + c -jet cross section and the ratio of differential photon + c and photon + b cross sections in proton-antiproton collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / V.M. Abazov, B. Abbott, B.S. Acharya et al. // *Physics Letters B*. — 2013. — Feb. — Vol. 719, no. 4-5. — Pp. 354–361. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2013.01.033>.
- [102] Measurement of the Cross Section for Direct-Photon Production in Association with a Heavy Quark in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / T. Aaltonen, S. Amerio, D. Amidei et al. // *Physical Review Letters*. — 2013. — Jul. — Vol. 111, no. 4. — P. 042003. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.042003>.
- [103] TMDlib2 and TMDplotter: a platform for 3D hadron structure studies / N.A. Abdulov, A. Bacchetta, S.P. Baranov et al. // *European Physical Journal C*. — 2021. — Vol. 81. — P. 752.
- [104] Inclusive J/ψ production at midrapidity in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / S. Acharya, D. Adamova, A. Adler et al. — 2021. — 8.

- [105] Prompt and non-prompt J/ψ production cross sections at midrapidity in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 5.02$ and 13 TeV / S. Acharya, D. Adamova, A. Adler et al. — 2021. — 8.
- [106] FORM version 4.0 / J. Kuipers, T. Ueda, J.A.M. Vermaseren, J. Vollinga // *Computer Physics Communications*. — 2013. — Vol. 184, no. 5. — Pp. 1453–1467. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465513000052>.
- [107] Curci G., Furmanski W., Petronzio R. Evolution of parton densities beyond leading order: The non-singlet case // *Nuclear Physics B*. — 1980. — Vol. 175, no. 1. — Pp. 27–92. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380900036>.
- [108] Furmanski W., Petronzio R. Singlet parton densities beyond leading order // *Physics Letters B*. — 1980. — Vol. 97, no. 3. — Pp. 437–442. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938090636X>.
- [109] Moch S., Vermaseren J.A.M., Vogt A. The three-loop splitting functions in QCD: the non-singlet case // *Nuclear Physics B*. — 2004. — Jun. — Vol. 688, no. 1-2. — Pp. 101–134. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.03.030>.
- [110] Vogt A., Moch S., Vermaseren J.A.M. The three-loop splitting functions in QCD: the singlet case // *Nuclear Physics B*. — 2004. — Jul. — Vol. 691, no. 1-2. — Pp. 129–181. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.04.024>.
- [111] Froissart M. Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation // *Physical Review*. — 1961. — Aug. — Vol. 123. — Pp. 1053–1057. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.123.1053>.
- [112] Botje M. QCDNUM: Fast QCD evolution and convolution // *Computer Physics Communications*. — 2011. — Vol. 182, no. 2. — Pp. 490–532. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465510004212>.
- [113] Salam G.P., Rojo J. A Higher Order Perturbative Parton Evolution Toolkit (HOPPET) // *Computer Physics Communications*. — 2009. — Vol. 180, no. 1. — Pp. 120–156. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465508002853>.
- [114] Bertone V., Carrazza S., Rojo J. APFEL: A PDF evolution library with QED corrections // *Computer Physics Communications*. — 2014. — Vol. 185, no. 6. — Pp. 1647–1668. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465514000873>.
- [115] Vogt A. Efficient evolution of unpolarized and polarized parton distributions with QCD-PEGASUS // *Computer Physics Communications*.

- 2005. — Vol. 170, no. 1. — Pp. 65–92. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465505002584>.
- [116] *Regge T.* Introduction to complex orbital momenta // *Nuovo Cimento*. — 1959. — Vol. 14. — Pp. 951–976. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02728177>.
- [117] Strong bootstrap conditions / V.S. Fadin, R. Fiore, M.I. Kotsky, A. Papa // *Physics Letters B*. — 2000. — Vol. 495, no. 3. — Pp. 329–337. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300012600>.
- [118] *М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин.* Квантовая хромодинамика при высоких энергиях // *Вестник НГУ. Серия: Физика*. — 2007. — Vol. 2. — Pp. 3–31.
- [119] *Фадин В.С.* Мульти-реджевские процессы в КХД // *Ядерная физика*. — 2003. — Vol. 66. — Pp. 2067–2082.
- [120] *Fadin V.S., Fiore R., Quartarolo A.* Reggeization of the quark-quark scattering amplitude in QCD // *Physical Review D*. — 1996. — Mar. — Vol. 53. — Pp. 2729–2741. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.2729>.
- [121] *Коцкий М.И., Фадин В.С.* Реджезация амплитуды глюон-глюонного рассеяния // *Ядерная физика*. — 1996. — Vol. 59. — Pp. 1080–1090.
- [122] *Fadin V.S., Fiore R., Kotsky M.I.* Gluon Reggeization in QCD in the next-to-leading order // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 359, no. 1. — Pp. 181–188. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939501016J>.
- [123] *Fadin V.S., Fiore R., Kotsky M.I.* Gluon Regge trajectory in the two-loop approximation // *Physics Letters B*. — 1996. — Vol. 387, no. 3. — Pp. 593–602. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269396010544>.
- [124] *Blümlein J., Ravindran V., van Neerven W.L.* Gluon Regge trajectory in $O(\alpha_s^2)$ // *Physical Review D*. — 1998. — Oct. — Vol. 58. — P. 091502. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.091502>.
- [125] *Del Duca V., Glover E.W.N.* The high energy limit of QCD at two loops // *Journal of High Energy Physics*. — 2001. — oct. — Vol. 2001, no. 10. — P. 035. — URL: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2001/10/035>.
- [126] *Kovchegov Yu.V.* Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus // *Physical Review D*. — 2000. — Mar. — Vol. 61. — P. 074018. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.074018>.
- [127] Measurement of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ in the low- x region at HERA / I. Abt., T. Ahmed, V. Andreev et al. // *Nuclear Physics B*. — 1993. — Vol. 407, no. 3. — Pp. 515–535. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139390090C>.

- [128] *Bartels J., Sabio Vera A., Schwennsen F.* NLO inclusive jet production in k_T -factorization // *Journal of High Energy Physics*. — 2006. — nov. — Vol. 2006, no. 11. — P. 051. — URL: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/11/051>.
- [129] Quark-antiquark contribution to the BFKL kernel / V.S. Fadin, R. Fiore, A. Flachi, M.I. Kotsky // *Physics Letters B*. — 1998. — Vol. 422, no. 1. — Pp. 287–293. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398000446>.
- [130] *Fadin V.S., Kotsky M.I., Lipatov L.N.* One-loop correction to the BFKL kernel from two gluon production // *Physics Letters B*. — 1997. — Vol. 415, no. 1. — Pp. 97–103. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397012100>.
- [131] *Fadin V.S., Lipatov L.N.* BFKL pomeron in the next-to-leading approximation // *Physics Letters B*. — 1998. — Vol. 429, no. 1. — Pp. 127–134. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398004730>.
- [132] *Ciafaloni M., Camici G.* Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation // *Physics Letters B*. — 1998. — Vol. 430, no. 3. — Pp. 349–354. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398005516>.
- [133] *Salam G.P.* A resummation of large sub-leading corrections at small x // *Journal of High Energy Physics*. — 1998. — jul. — Vol. 1998, no. 07. — P. 019. — URL: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1998/07/019>.
- [134] *Ciafaloni M., Colferai D., Salam G.P.* Renormalization group improved small- x equation // *Physical Review D*. — 1999. — Nov. — Vol. 60. — P. 114036. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.114036>.
- [135] *Ciafaloni M., Colferai D.* The BFKL equation at next-to-leading level and beyond // *Physics Letters B*. — 1999. — Vol. 452, no. 3. — Pp. 372–378. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399002816>.
- [136] Next-to-leading and resummed BFKL evolution with saturation boundary / E. Avsar, A.M. Stasto, D.N. Triantafyllopoulos, D. Zaslavsky // *Journal of High Energy Physics*. — 2011. — Oct. — Vol. 2011, no. 10. — P. 138. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2011\)138](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2011)138).
- [137] *Altarelli G., Ball R.D., Forte S.* Resummation of singlet parton evolution at small x // *Nuclear Physics B*. — 2000. — Vol. 575, no. 1. — Pp. 313–329. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321300000328>.
- [138] *Altarelli G., Ball R.D., Forte S.* Small- x resummation and HERA structure function data // *Nuclear Physics B*. — 2001. — Vol. 599, no. 1. — Pp. 383–423. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321301000232>.

- [139] *Altarelli G., Ball R.D., Forte S.* Factorization and resummation of small x scaling violations with running coupling // *Nuclear Physics B*. — 2002. — Vol. 621, no. 1. — Pp. 359–387. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321301005636>.
- [140] The QCD Pomeron with optimal renormalization / S.J. Brodsky, V.S. Fadin, V.T. Kim et al. // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. — 1999. — Aug. — Vol. 70, no. 3. — Pp. 155–160. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/1.568145>.
- [141] High-energy QCD asymptotics of photon-photon collisions / S.J. Brodsky, V.S. Fadin, V.T. Kim et al. // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. — 2002. — Sep. — Vol. 76, no. 5. — Pp. 249–252. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/1.1520615>.
- [142] *Brodsky S.J., Lepage G.P., Mackenzie P.B.* On the elimination of scale ambiguities in perturbative quantum chromodynamics // *Physical Review D*. — 1983. — Jul. — Vol. 28. — Pp. 228–235. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.228>.
- [143] *Balitsky I.* Operator expansion for high-energy scattering // *Nuclear Physics B*. — 1996. — Mar. — Vol. 463, no. 1. — Pp. 99–157. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00638-9](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(95)00638-9).
- [144] *Kovchegov Y.V.* Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple Pomeron exchanges // *Physical Review D*. — 1999. — Jun. — Vol. 60. — P. 034008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.034008>.
- [145] *Gyulassy M., McLerran L.* New forms of QCD matter discovered at RHIC // *Nuclear Physics A*. — 2005. — Mar. — Vol. 750, no. 1. — Pp. 30–63. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2004.10.034>.
- [146] *Kwiecinski J., Martin A.D., Sutton P.J.* Gluon distribution at small x obtained from a unified evolution equation // *Physical Review D*. — 1995. — Aug. — Vol. 52. — Pp. 1445–1458. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1445>.
- [147] *Kwiecinski J., Martin A.D., Sutton P.J.* Constraints on gluon evolution at small x // *Zeitschrift für Physik C*. — 1996. — Aug. — Vol. 71, no. 4. — Pp. 585–594. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02907019>.
- [148] *Hautmann F., Jung H., Monfared S. Taheri.* The CCFM uPDF evolution UPDFEVOLV version 1.0.00 // *European Physical Journal C*. — 2014. — Oct. — Vol. 74, no. 10. — P. 3082. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3082-1>.
- [149] *Webber B.R.* Monte Carlo Simulation of Hard Hadronic Processes // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 1986. — Vol. 36, no. 1. — Pp. 253–286. — URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.36.120186.001345>.

- [150] *Catani S., Webber B.R., Marchesini G.* QCD coherent branching and semi-inclusive processes at large x // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 349, no. 3. — Pp. 635–654. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139190390J>.
- [151] *Gieseke S., Stephens P., Webber B.R.* New formalism for QCD parton showers // *Journal of High Energy Physics*. — 2003. — Dec. — Vol. 2003, no. 12. — P. 045. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2003/12/045>.
- [152] *Lipatov A.V., Malyshev M.A., Jung H.* Relation between the parton branching approach and Catani-Ciafaloni-Fiorani-Marchesini evolution // *Physical Review D*. — 2020. — Feb. — Vol. 101, no. 3. — P. 034022. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.034022>.
- [153] Dynamical resolution scale in transverse momentum distributions at the LHC / F. Hautmann, L. Keersmaekers, A. Lelek, A.M. van Kampen // *Nuclear Physics B*. — 2019. — Dec. — Vol. 949. — P. 114795. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114795>.
- [154] *Golec-Biernat K., Stasto A.M.* On the use of the KMR unintegrated parton distribution functions // *Physics Letters B*. — 2018. — Vol. 781. — Pp. 633–638. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318303551>.
- [155] *Jung H.* Un-integrated PDFs in CCFM. — 2004. — URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0411287>.
- [156] *Golec-Biernat K., Wüsthoff M.* Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q^2 and its implications on diffraction // *Physical Review D*. — 1998. — Nov. — Vol. 59. — P. 014017. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.014017>.
- [157] *Golec-Biernat K., Wüsthoff M.* Saturation in diffractive deep inelastic scattering // *Physical Review D*. — 1999. — Nov. — Vol. 60. — P. 114023. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.114023>.
- [158] *Nikolaev N.N., Zakharov B.G.* Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering // *Zeitschrift für Physik C*. — 1990. — Dec. — Vol. 49. — P. 607. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01483577>.
- [159] Gluon distribution in proton at soft and hard pp collisions / G.I. Lykasov, V.A. Bednyakov, A.A. Grinyuk et al. // *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*. — 2011. — Vol. 219 - 220. — Pp. 225 – 228.
- [160] Role of Gluons in Soft and Semi-Hard Multiple Hadron Production in pp Collisions at LHC / V.A. Bednyakov, A.A. Grinyuk, G.I. Lykasov, M. Poghosyan // *International Journal of Modern Physics A*. — 2012. — Vol. 27. — P. 1250042.

- [161] A study of the general characteristics of proton-antiproton collisions at $\sqrt{s} = 0.2$ to 0.9 TeV / C. Albajar, M.G. Albrow, O.C. Allkofer et al. // *Nuclear Physics B*. — 1990. — Vol. 335, no. 2. — Pp. 261–287. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090493W>.
- [162] Transverse-Momentum and Pseudorapidity Distributions of Charged Hadrons in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physical Review Letters*. — 2010. — Jul. — Vol. 105, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.022002>.
- [163] Charged-particle multiplicities in pp interactions measured with the ATLAS detector at the LHC / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *New Journal of Physics*. — 2011. — May. — Vol. 13, no. 5. — P. 053033. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/5/053033>.
- [164] Transition between soft physics at the LHC and low- x physics at HERA / A.A. Grinyuk, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, N.P. Zotov // *Physical Review D*. — 2013. — Apr. — Vol. 87, no. 7. — P. 074017. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.87.074017>.
- [165] *Ivanov I.P., Nikolaev N.N.* Anatomy of the differential gluon structure function of the proton from the experimental data on $F_{2p}(x, Q^2)$ // *Physical Review D*. — 2002. — Jan. — Vol. 65. — P. 054004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.054004>.
- [166] Unitarization of structure functions at large $1/x$ / V. Barone, M. Genovese, N.N. Nikolaev et al. // *Physics Letters B*. — 1994. — Vol. 326, no. 1. — Pp. 161–167. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394912084>.
- [167] *Albacete J.L., Marquet C.* Single inclusive hadron production at RHIC and the LHC from the color glass condensate // *Physics Letters B*. — 2010. — Vol. 687, no. 2. — Pp. 174–179. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310002716>.
- [168] *Lipatov A.V., Lykasov G.I., Zotov N.P.* LHC soft physics and transverse momentum dependent gluon density at low x // *Physical Review D*. — 2014. — Jan. — Vol. 89. — P. 014001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.014001>.
- [169] Measurement of the inclusive $e^\pm p$ scattering cross section at high inelasticity y and of the structure function F_L / F.D. Aaron, C. Alexa, V. Andreev et al. // *European Physical Journal C*. — 2011. — Mar. — Vol. 71, no. 3. — P. 1579. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1579-4>.

- [170] Measurement of the longitudinal proton structure function at HERA / S. Chekanov, M. Derrick, S. Magill et al. // *Physics Letters B*. — 2009. — Nov. — Vol. 682, no. 1. — Pp. 8–22. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2009.10.050>.
- [171] Significance of nonperturbative input to the transverse momentum dependent gluon density for hard processes at the LHC / A.A. Grinyuk, A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, N.P. Zotov // *Physical Review D*. — 2016. — Jan. — Vol. 93, no. 1. — P. 014035. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.014035>.
- [172] Employing RHIC and LHC data to determine the transverse momentum dependent gluon density in a proton / N.A. Abdulov, H. Jung, A.V. Lipatov et al. // *Physical Review D*. — 2018. — Sep. — Vol. 98. — P. 054010. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.054010>.
- [173] *Artemenkov D.A., Lykasov G.I., Malakhov A.I.* Self-similarity of hadron production in pp and AA collisions at high energies // *International Journal of Modern Physics A*. — 2015. — Vol. 30, no. 21. — P. 1550127.
- [174] *Lykasov G.I., Malakhov A.I.* Self-consistent analysis of hadron production in pp and AA collisions at mid-rapidity // *European Physical Journal A*. — 2018. — Nov. — Vol. 54, no. 11. — P. 187. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epja/i2018-12614-3>.
- [175] Measurement of negatively charged pion spectra in inelastic $p + p$ interactions at $p_{\text{lab}} = 20, 31, 40, 80$ and 158 GeV / N. Abgrall, A. Aduszkiewicz, Y. Ali et al. // *European Physical Journal C*. — 2014. — Mar. — Vol. 74, no. 3. — P. 2794. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2794-6>.
- [176] Production of pions, kaons and protons in pp collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC / K. Aamodt, N. Abel, U. Abeysekara et al. // *European Physical Journal C*. — 2011. — Jun. — Vol. 71, no. 6. — P. 1655. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1655-9>.
- [177] Transverse momentum spectra of charged particles in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV with ALICE at the LHC / K. Aamodt, N. Abel, U. Abeysekara et al. // *Physics Letters B*. — 2010. — Sep. — Vol. 693, no. 2. — Pp. 53–68. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2010.08.026>.
- [178] Two-pion Bose-Einstein correlations in pp collisions at $\sqrt{s} = 900$ GeV / K. Aamodt, N. Abel, U. Abeysekara et al. // *Physical Review D*. — 2010. — Sep. — Vol. 82, no. 5. — P. 052001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.82.052001>.
- [179] Centrality dependence of π , K and pp production in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.76$ TeV / B. Abelev, J. Adam, D. Adamova et al. // *Physical Review C*. — 2013. — Oct. — Vol. 88, no. 4. — P. 044910. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.88.044910>.

- [180] Strange particle production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV / B.I. Abelev, J. Adams, M.M. Aggarwal et al. // *Physical Review C*. — 2007. — Jun. — Vol. 75. — P. 064901. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.75.064901>.
- [181] Identified Baryon and Meson Distributions at Large Transverse Momenta from Au + Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV / B.I. Abelev, M.M. Aggarwal, Z. Ahammed et al. // *Physical Review Letters*. — 2006. — Oct. — Vol. 97, no. 15. — P. 152301. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.152301>.
- [182] Measurement of differential cross sections for the production of top quark pairs and of additional jets in lepton+jets events from pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Physical Review D*. — 2018. — Jun. — Vol. 97, no. 11. — P. 112003. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.112003>.
- [183] Lipatov A.V., Zotov N.P. Phenomenology of k_T -factorization for inclusive top quark pair production at hadron colliders // *Physics Letters B*. — 2011. — Vol. 704, no. 3. — Pp. 189–192. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931101032X>.
- [184] Transverse momentum dependent parton densities in a proton from the generalized DAS approach / A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, B.G. Shaikhatdenov, P. Zhang // *Journal of High Energy Physics*. — 2020. — Feb. — Vol. 2020, no. 2. — P. 028. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02\(2020\)028](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2020)028).
- [185] Kotikov A.V., Parente G. Small x behavior of parton distributions with soft initial conditions // *Nuclear Physics B*. — 1999. — May. — Vol. 549, no. 1-2. — Pp. 242–262. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00107-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00107-8).
- [186] Illarionov A.Y., Kotikov A.V., Parente G. Small x behavior of parton distributions: a study of higher twist effects // *Physics of Particles and Nuclei*. — 2008. — May. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 307–347.
- [187] Mankiewicz L., Saalfeld A., Weigl T. On the analytical approximation to the GLAP evolution at small x and moderate Q^2 // *Physics Letters B*. — 1997. — Feb. — Vol. 393, no. 1-2. — Pp. 175–180. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(96\)01615-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(96)01615-2).
- [188] Possible non-Regge behavior of electroproduction structure functions / A. De Rújula, S.L. Glashow, H.D. Politzer et al. // *Physical Review D*. — 1974. — Sep. — Vol. 10. — Pp. 1649–1652. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.1649>.
- [189] Small- x behavior of the structure function F_2 and its slope $\partial \ln F_2 / \partial \ln(1/x)$ for “frozen” and analytic strong-coupling constants / G. Cvetic, A.Yu. Illarionov,

- B.A. Kniehl, A.V. Kotikov // *Physics Letters B*. — 2009. — Aug. — Vol. 679, no. 4. — Pp. 350–354. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2009.07.057>.
- [190] Kotikov A.V., Shaikhatdenov B.G. Q^2 -evolution of parton densities at small x values. Charm contribution in the combined H1 and ZEUS F_2 data // *Physics of Particles and Nuclei*. — 2017. — Sep. — Vol. 48, no. 5. — Pp. 829–831.
- [191] Kotikov A.V., Shaikhatdenov B.G. Q^2 evolution of parton distributions at small values of x : Effective scale for combined H1 and ZEUS data on the structure function F_2 // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2015. — Jun. — Vol. 78, no. 4. — Pp. 525–527.
- [192] Shirkov D.V., Solovtsov I.L. Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal $\bar{\alpha}_s(0)$ Value // *Physical Review Letters*. — 1997. — Aug. — Vol. 79. — Pp. 1209–1212. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1209>.
- [193] Solovtsov I.L., Shirkov D.V. The analytic approach in Quantum Chromodynamics // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 1999. — Sep. — Vol. 120, no. 3. — Pp. 1220–1244. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02557245>.
- [194] Inclusive b -jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Apr. — Vol. 2012, no. 4. — P. 084. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04\(2012\)084](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04(2012)084).
- [195] Measurement of the inclusive and dijet cross-sections of b -jets in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *European Physical Journal C*. — 2011. — Dec. — Vol. 71, no. 12. — P. 1846. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1846-4>.
- [196] New type of parametrization for parton distributions / A.Yu. Illarionov, A.V. Kotikov, S.S. Parzycki, D.V. Peshekhonov // *Physical Review D*. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 034014. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.034014>.
- [197] Kotikov A.V., Shaikhatdenov B.G., Zhang P. Antishadowing in the Rescaling Model at $x \sim 0.1$ // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. — 2019. — Jul. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 311–314. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1547477119040095>.
- [198] Kotikov A.V., Shaikhatdenov B.G., Zhang P. Application of the rescaling model at small Bjorken x values // *Physical Review D*. — 2017. — Dec. — Vol. 96. — P. 114002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.114002>.
- [199] Pade approximants, optimal renormalization scales, and momentum flow in Feynman diagrams / S.J. Brodsky, J. Ellis, E. Gardi et al. // *Physical Review D*. — 1997. — Dec. — Vol. 56. — Pp. 6980–6992. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.6980>.

- [200] *Jimenez-Delgado P., Reya E.* Delineating parton distributions and the strong coupling // *Physical Review D*. — 2014. — Apr. — Vol. 89. — P. 074049. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.074049>.
- [201] Parton distribution functions, α_s , and heavy-quark masses for LHC Run II / S. Alekhin, J. Blümlein, S. Moch, R. Placakyte // *Physical Review D*. — 2017. — Jul. — Vol. 96. — P. 014011. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.014011>.
- [202] *Kotikov A.V. Krivokhizhin V.G., Shaikhatdenov B.G.* Gottfried Sum Rule in QCD Nonsinglet Analysis of DIS Fixed-Target Data // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2018. — Apr. — Vol. 81. — Pp. 244–252.
- [203] Heavy flavour production at Tevatron and parton shower effects / H. Jung, M. Kraemer, A.V. Lipatov, N.P. Zotov // *Journal of High Energy Physics*. — 2011. — Jan. — Vol. 2011, no. 1. — P. 085. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2011\)085](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2011)085).
- [204] Investigation of beauty production and parton shower effects at the LHC / H. Jung, M. Kraemer, A.V. Lipatov, N.P. Zotov // *Physical Review D*. — 2012. — Feb. — Vol. 85. — P. 034035. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.034035>.
- [205] *Kim V.T., Pivovarov G.B.* Effective Regge QCD // *Physical Review Letters*. — 1997. — Aug. — Vol. 79. — Pp. 809–812. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.809>.
- [206] *Липатов Л.Н.* Реджезация векторного мезона и вакуумная особенность в неабелевых калибровочных теориях // *Ядерная физика*. — 1976. — Vol. 23. — Pp. 642–656.
- [207] *Фадин В.С. Шерман В.Е.* Реджезация фермиона в неабелевых калибровочных теориях // *Письма в ЖЭТФ*. — 1976. — Vol. 23. — Pp. 599–602.
- [208] *Фадин В.С. Шерман В.Е.* Процессы с фермионным обменом в неабелевых калибровочных теориях // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1977. — Vol. 72. — Pp. 1640–1658.
- [209] Feynman rules for effective Regge action / E.N. Antonov, I.O. Cherednikov, E.A. Kuraev, L.N. Lipatov // *Nuclear Physics B*. — 2005. — Aug. — Vol. 721, no. 1–3. — Pp. 111–135. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.05.013>.
- [210] *Nefedov M.A., Saleev V.A.* Diphoton production at the Tevatron and the LHC in the NLO approximation of the parton Reggeization approach // *Physical Review D*. — 2015. — Nov. — Vol. 92. — P. 094033. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.094033>.

- [211] *Borodulin V.I., Rogalyov R.N., Slabospitskii S.R.* CORE 3.1 (COmpendium of RElations, Version 3.1). — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1702.08246>.
- [212] *Baranov S.P., Szczurek A.* Inclusive production of J/ψ meson in proton-proton collisions at BNL RHIC // *Physica Review D*. — 2008. — Mar. — Vol. 77. — P. 054016. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.054016>.
- [213] *van Hameren A., Serino M.* BCFW recursion for TMD parton scattering // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Jul. — Vol. 2015, no. 7. — P. 010. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)010](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2015)010).
- [214] Transverse Momentum Dependent (TMD) Parton Distribution Functions: Status and Prospects / R. Angeles-Martinez, A. Bacchetta, I.I. Balitsky et al. // *Acta Physica Polonica B*. — 2015. — Vol. 46, no. 12. — P. 2501. — URL: <http://dx.doi.org/10.5506/APhysPolB.46.2501>.
- [215] *Бюклинг Е., Каянты К.* Кинематика элементарных частиц. — 1975.
- [216] Review of particle physics / M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. // *Physical Review D*. — 2018. — Aug. — Vol. 98. — P. 030001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.
- [217] *Chernikova N. Yu., Kotikov A. V.* Gluon density from the Berger-Block-Tan form of the structure function F_2 // *JETP Letters*. — 2017. — Feb. — Vol. 105, no. 4. — Pp. 223–226. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364017040014>.
- [218] *Illarionov A. Yu., Kotikov A. V., Parente G.* Small x behavior of parton distributions: a study of higher twist effects // *Physics of Particles and Nuclei*. — 2008. — May. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 307–347. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063779608030015>.
- [219] Measurement of the longitudinal structure function and the small x gluon density of the proton / A.M. Cooper-Sarkar, G. Ingelman, K.R. Long et al. // *Zeitschrift für Physik C*. — 1988. — Jun. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 281–290. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01551005>.
- [220] *Prytz K.* Approximate determination of the gluon density at low- x from the F_2 scaling violations // *Physics Letters B*. — 1993. — Vol. 311, no. 1. — Pp. 286–290. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269393905708>.
- [221] *Prytz K.* An approximate next-to-leading order relation between the low- x F_2 scaling violations and the gluon density // *Physics Letters B*. — 1994. — Vol. 332, no. 3. — Pp. 393–397. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939491270X>.
- [222] Combination and QCD analysis of charm and beauty production cross-section measurements in deep inelastic ep scattering at HERA / H. Abramowicz, I. Abt,

- L. Adamczyk et al. // *European Physical Journal C*. — 2018. — Vol. 78, no. 6. — P. 473.
- [223] Measurement of beauty and charm production in deep inelastic scattering at HERA and measurement of the beauty-quark mass / H. Abramowicz, I. Abt, L. Adamczyk et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Sep. — Vol. 2014, no. 9. — P. 127. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2014\)127](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2014)127).
- [224] Measurement of $D^{*\pm}$ meson production and determination of $F_2^{c\bar{c}}$ at low Q^2 in deep-inelastic scattering at HERA / F.D. Aaron, C. Alexa, V. Andreev et al. // *European Physical Journal C*. — 2011. — Oct. — Vol. 71, no. 10. — P. 1769. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1769-0>.
- [225] Measurement of the charm and beauty structure functions using the H1 vertex detector at HERA / F.D. Aaron, M. Aldaya Martin, C. Alexa et al. // *European Physical Journal C*. — 2009. — Nov. — Vol. 65, no. 1-2. — Pp. 89–109. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1190-0>.
- [226] The contribution of off-shell gluons to the structure functions F_2^c and F_L^c and the unintegrated gluon distributions / A.V. Kotikov, A.V. Lipatov, G. Parente, N.P. Zotov // *European Physical Journal C*. — 2002. — Nov. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 51–66. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2002-01036-y>.
- [227] Kotikov A.V., Lipatov A.V., Zotov N.P. The contribution of off-shell gluons to the longitudinal structure function F_L // *European Physical Journal C*. — 2003. — Mar. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 219–228. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2002-01107-1>.
- [228] Small- x one-particle-inclusive quantities in the CCFM approach / G. Bottazzi, G. Marchesini, G.P. Salam, M. Scroletti // *Journal of High Energy Physics*. — 1998. — Dec. — Vol. 1998, no. 12. — P. 011. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/1998/12/011>.
- [229] Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F. Gluon contributions to small x heavy flavour production // *Physics Letters B*. — 1990. — Vol. 242, no. 1. — Pp. 97–102. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269390916017>.
- [230] Kotikov A.V., Lipatov A.V., Zhang P.M. Transverse momentum dependent parton densities in processes with heavy quark generations // *Physical Review D*. — 2021. — Sep. — Vol. 104. — P. 054042. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.054042>.
- [231] Баранов С.П., Липатов А.В., Зотов Н.П. Рождение тяжелых кварков на протонах в рамках полужесткого подхода КХД // *Ядерная физика*. — 2004. — Vol. 67. — P. 856.

- [232] *Зотов Н.П., Лунатов А.В., Салеев В.А.* Процессы рождения тяжелых кварков на коллайдере Tevatron в рамках полужесткого подхода КХД и неинтегрированные распределения глюонов // *Ядерная физика*. — 2003. — Vol. 66. — P. 786.
- [233] *Lipatov A.V., Lönnblad L., Zotov N.P.* Study of the Linked Dipole Chain Model in heavy quark production at the Tevatron // *Journal of High Energy Physics*. — 2004. — Jan. — Vol. 2004, no. 01. — P. 010. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/010>.
- [234] Testing the parton evolution with the use of two-body final states / S.P. Baranov, H. Jung, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev // *European Physical Journal C*. — 2016. — Dec. — Vol. 77, no. 1. — P. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4562-2>.
- [235] Scaling violations in inclusive e^+e^- annihilation spectra / C. Peterson, D. Schlatter, I. Schmitt, P.M. Zerwas // *Physical Review D*. — 1983. — Jan. — Vol. 27. — Pp. 105–111. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.105>.
- [236] Measurement of the differential inclusive B^+ hadron cross sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physics Letters B*. — 2017. — Aug. — Vol. 771. — Pp. 435–456. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2017.05.074>.
- [237] *Palmer W.F., Paschos E.A., Soldan P.H.* Momentum distribution in the decay $B \rightarrow J/\psi + X$ // *Physical Review D*. — 1997. — Nov. — Vol. 56. — Pp. 5794–5804. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.5794>.
- [238] *Kniehl B.A., Kramer G.* Inclusive J/ψ and $\psi(2S)$ production from B decay in $p\bar{p}$ collisions // *Physical Review D*. — 1999. — May. — Vol. 60. — P. 014006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.014006>.
- [239] *Bolzoni P., Kniehl B.A., Kramer G.* Inclusive J/ψ and $\psi(2S)$ production from b -hadron decay in $p\bar{p}$ and pp collisions // *Physical Review D*. — 2013. — Oct. — Vol. 88. — P. 074035. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.074035>.
- [240] Inclusive decays of B mesons to charmonium / R. Balest, K. Cho, W.T. Ford et al. // *Physical Review D*. — 1995. — Sep. — Vol. 52. — Pp. 2661–2672. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.2661>.
- [241] Study of inclusive production of charmonium mesons in B decays / B. Aubert, D. Boutigny, J.-M. Gaillard et al. // *Physical Review D*. — 2003. — Feb. — Vol. 67, no. 3. — P. 032002. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.67.032002>.
- [242] *Baranov S.P., Lipatov A.V., Malyshev M.A.* Associated non-prompt $J/\psi + \mu$ and $J/\psi + J/\psi$ production at LHC as a test for TMD gluon density // *European*

Physical Journal C. — 2018. — Oct. — Vol. 78, no. 10. — P. 820. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6297-8>.

- [243] Charmonia production from b -hadron decays at LHC with k_T -factorization: J/ψ , $\psi(2S)$ and $J/\psi + Z$ / A.V. Lipatov, S.P. Baranov, H. Jung, M.A. Malyshev // *European Physical Journal C.* — 2017. — Dec. — Vol. 78, no. 1. — P. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5489-y>.
- [244] Prompt and non-prompt J/ψ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *European Physical Journal C.* — 2011. — Mar. — Vol. 71, no. 3. — P. 1575. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1575-8>.
- [245] Measurement of J/ψ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *European Physical Journal C.* — 2011. — May. — Vol. 71, no. 5. — P. 1645. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1645-y>.
- [246] Production of J/ψ and Υ mesons in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / R. Aaij, C. Beteta, B. Adeva et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2013. — Jun. — Vol. 2013, no. 6. — P. 064. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2013\)064](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2013)064).
- [247] Measurement of forward J/ψ production cross-sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2015. — Oct. — Vol. 2015, no. 10. — P. 172. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2015\)172](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2015)172).
- [248] Measurement of the differential cross-sections of prompt and non-prompt production of J/ψ and $\psi(2S)$ in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *European Physical Journal C.* — 2016. — May. — Vol. 76, no. 5. — P. 283. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4050-8>.
- [249] Cacciari M., Greco M., Nason P. The p_T spectrum in heavy-flavour hadroproduction // *Journal of High Energy Physics.* — 1998. — May. — Vol. 1998, no. 05. — P. 007. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/1998/05/007>.
- [250] QCD analysis of firstb cross section data at 1.96 TeV / M. Cacciari, S. Frixione, M.L. Mangano et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2004. — Jul. — Vol. 2004, no. 07. — P. 033. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/07/033>.
- [251] Study of $b\bar{b}$ correlations in high energy proton-proton collisions / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2017. — Dec. — Vol. 2017, no. 11. — P. 030. — URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2017\)030](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2017)030).

- [252] Measurement of b -hadron pair production with the ATLAS detector in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2017. — Nov. — Vol. 2017, no. 11. — P. 062. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2017\)062](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2017)062).
- [253] Four-jet production at LHC and Tevatron in QCD / B. Blok, Yu. Dokshitzer, L. Frankfurt, M. Strikman // *Physical Review D*. — 2011. — Apr. — Vol. 83. — P. 071501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.071501>.
- [254] Perturbative QCD correlations in multi-parton collisions / B. Blok, Yu. Dokshitzer, L. Frankfurt, M. Strikman // *European Physical Journal C*. — 2014. — Jun. — Vol. 74, no. 6. — P. 2926. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2926-z>.
- [255] Diehl M., Ostermeier D., Schäfer A. Elements of a theory for multiparton interactions in QCD // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Mar. — Vol. 2012, no. 3. — P. 089. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)089](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2012)089).
- [256] Ryskin M.G., Snigirev A.M. Fresh look at double parton scattering // *Physical Review D*. — 2011. — Jun. — Vol. 83. — P. 114047. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.114047>.
- [257] Snigirev A.M. Asymptotic behavior of double parton distribution functions // *Physical Review D*. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 034028. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.034028>.
- [258] Study of double parton scattering using $W + 2$ -jet events in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Mar. — Vol. 2014, no. 3. — P. 32. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2014\)032](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2014)032).
- [259] Measurement of hard double-parton interactions in $W(\rightarrow l\nu) + 2$ -jet events at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. // *New Journal of Physics*. — 2013. — mar. — Vol. 15, no. 3. — P. 033038.
- [260] Study of double parton interactions in diphoton + dijet events in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / V.M. Abazov, B. Abbott, B.S. Acharya et al. // *Physical Review D*. — 2016. — Mar. — Vol. 93. — P. 052008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.052008>.
- [261] Double parton interactions in $\gamma + 3$ jet and $\gamma + b/c$ jet + 2-jet events in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / V.M. Abazov, B. Abbott, B.S. Acharya et al. // *Physical Review D*. — 2014. — Apr. — Vol. 89. — P. 072006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.072006>.

- [262] Study of hard double-parton scattering in four-jet events in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS experiment / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Nov. — Vol. 2016, no. 11. — P. 110. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2016\)110](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2016)110).
- [263] Observation of double charm production involving open charm in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, C. Abellan Beteta, B. Adeva et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Jun. — Vol. 2012, no. 6. — P. 141. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2012\)141](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2012)141).
- [264] Production of associated Υ and open charm hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV via double parton scattering / R. Aaij, C. Abellan Beteta, B. Adeva et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Jul. — Vol. 2016, no. 7. — P. 052. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2016\)052](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2016)052).
- [265] Observation of triple J/ψ meson production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A. Tumasyan, W. Adam, J.W. Andrejkovic et al. — 2021. — 11.
- [266] *Snigirev A.M.* Triple parton scattering in collinear approximation of perturbative QCD // *Physical Review D*. — 2016. — Aug. — Vol. 94. — P. 034026. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.034026>.
- [267] *d'Enterria D., Snigirev A.M.* Triple Parton Scatterings in High-Energy Proton-Proton Collisions // *Physical Review Letters*. — 2017. — Mar. — Vol. 118. — P. 122001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.122001>.
- [268] Parton distribution functions, α_s , and heavy-quark masses for LHC Run II / S. Alekhin, J. Blümlein, S. Moch, R. Placakyte // *Physical Review D*. — 2017. — Jul. — Vol. 96. — P. 014011. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.014011>.
- [269] *Boos E.E., Dudko L.V., Slabospitskii S.R.* Top Quark: Results and Prospects // *Physics of Particles and Nuclei*. — 2019. — Mar. — Vol. 50. — Pp. 231–258. — URL: <https://doi.org/10.1134/S106377961903002X>.
- [270] Measurement of the differential cross section for t -channel single-top-quark production at $\sqrt{s} = 13$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. — 2016. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931500547X>.
- [271] Fiducial, total and differential cross-section measurements of t -channel single top-quark production in pp collisions at 8 TeV using data collected by the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *European Physical Journal C*. — 2017. — Aug. — Vol. 77, no. 8. — P. 531. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5061-9>.

- [272] *Hautmann F., Hentschinski M., Jung H.* Forward Z-boson production and the unintegrated sea quark density // *Nuclear Physics B.* — 2012. — Vol. 865, no. 1. — Pp. 54–66. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321312004087>.
- [273] *Catani S., Hautmann F.* High-energy factorization and small- x deep inelastic scattering beyond leading order // *Nuclear Physics B.* — 1994. — Vol. 427, no. 3. — Pp. 475–524. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139490636X>.
- [274] *Catani S., Hautmann F.* Quark anomalous dimensions at small x // *Physics Letters B.* — 1993. — Vol. 315, no. 1. — Pp. 157–163. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390174G>.
- [275] *Gituliar O., Hentschinski M., Kutak K.* Transverse-momentum-dependent quark splitting functions in k_T -factorization: real contributions // *Journal of High Energy Physics.* — 2016. — Jan. — Vol. 2016, no. 1. — P. 181. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2016\)181](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2016)181).
- [276] Forward Jets and Energy Flow in Hadronic Collisions / M. Deak, F. Hautmann, H. Jung, K. Kutak // *European Physical Journal C.* — 2012. — Vol. 72. — P. 1982.
- [277] *Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P.* Prompt J/ψ production at the LHC: New evidence for the k_T -factorization // *Physical Review D.* — 2012. — Jan. — Vol. 85. — P. 014034. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.014034>.
- [278] *Krasemann H.* Jets from $Q\bar{Q}$ P -waves // *Zeitschrift für Physik C.* — 1979. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 189–198. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01445410>.
- [279] Rare decays of the Z^0 / B. Guberina, J.H. Kühn, R.D. Peccei, R. Rückl // *Nuclear Physics B.* — 1980. — Vol. 174, no. 2. — Pp. 317–334. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380902874>.
- [280] *Eichten E.J., Quigg C.* Quarkonium wave functions at the origin // *Physical Review D.* — 1995. — Aug. — Vol. 52. — Pp. 1726–1728. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [281] Charmonium: comparison with experiment / E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita et al. // *Physical Review D.* — 1980. — Jan. — Vol. 21. — Pp. 203–233. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.21.203>.
- [282] *Martin A.D.* A fit of Υ and charmonium spectra // *Physics Letters B.* — 1980. — Vol. 9, no. 3. — Pp. 338–342. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380905274>.

- [283] *Buchmüller W., Tye S.-H.H.* Quarkonia and Quantum Chromodynamics // *Physical Review D*. — 1981. — Jul. — Vol. 24. — Pp. 132–156. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.132>.
- [284] *Richardson J.L.* The heavy quark potential and the Υ , J/ψ systems // *Physics Letters B*. — 1979. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 272–274. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379907536>.
- [285] NLO production and decay of quarkonium / A. Petrelli, M. Cacciari, M. Greco et al. // *Nuclear Physics B*. — 1998. — Vol. 514, no. 1. — Pp. 245–309. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321397008018>.
- [286] Polarization for prompt J/ψ and $\psi(2S)$ production at the Tevatron and LHC / B. Gong, L.-P. Wan, J.-X. Wang, H.-F. Zhang // *Physical Review Letters*. — 2013. — Jan. — Vol. 110. — P. 042002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.042002>.
- [287] *Butenschoen M., Kniehl B.A.* J/ψ polarization at the Tevatron and the LHC: nonrelativistic QCD factorization at the crossroads // *Physical Review Letters*. — 2012. — Apr. — Vol. 108. — P. 172002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.172002>.
- [288] J/ψ polarization at hadron colliders in nonrelativistic QCD / K.-T. Chao, Y.-Q. Ma, H.-S. Shao et al. // *Physical Review Letters*. — 2012. — Jun. — Vol. 108. — P. 242004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.242004>.
- [289] *Cho P., Wise M.B., Trivedi S.P.* Gluon fragmentation into polarized charmonium // *Physical Review D*. — 1995. — Mar. — Vol. 51. — Pp. R2039–R2043. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.R2039>.
- [290] *Kniehl B.A., Vasin D.V., Saleev V.A.* Charmonium production at high energy in the k_T -factorization approach // *Physical Review D*. — 2006. — Apr. — Vol. 73. — P. 074022. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.074022>.
- [291] *Lepage G.P.* A new algorithm for adaptive multidimensional integration // *Journal of Computational Physics*. — 1978. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 192–203. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999178900049>.
- [292] *Williams T., Kelley C., many others.* GNUPLOT 5.2: an interactive plotting program. — 2019. — December. — URL: <http://www.gnuplot.info>.
- [293] Measurement of J/ψ and $\psi(2S)$ prompt double-differential cross sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physical Review Letters*. — 2015. — May. — Vol. 114. — P. 191802. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.191802>.

- [294] Measurement of quarkonium production cross sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Physics Letters B.* — 2018. — Vol. 780. — Pp. 251–272. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318301357>.
- [295] Measurements of $\psi(2S)$ and $X(3872) \rightarrow J/\psi + \pi + \pi$ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2017. — Jan. — Vol. 2017, no. 1. — P. 117. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2017\)117](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2017)117).
- [296] *Baranov S.P., Lipatov A.V.* Are there any challenges in the charmonia production and polarization at the LHC? // *Physical Review D.* — 2019. — Dec. — Vol. 100. — P. 114021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.114021>.
- [297] *Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P.* Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. Part I: $\psi(2S)$ meson // *European Physical Journal C.* — 2015. — Sep. — Vol. 75, no. 9. — P. 455. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3689-x>.
- [298] Measurement of $\psi(2S)$ meson production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, C. Abellan Beteta, B. Adeva et al. // *European Physical Journal C.* — 2012. — Aug. — Vol. 72, no. 8. — P. 2100. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2100-4>.
- [299] *Dokshitzer Yu.L., D'yakonov D.I., Troyan S.I.* On the transverse momentum distribution of massive lepton pairs // *Physics Letters B.* — 1978. — Vol. 79, no. 3. — Pp. 269–272. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937890240X>.
- [300] *Parisi G., Petronzio R.* Small transverse momentum distributions in hard processes // *Nuclear Physics B.* — 1979. — Vol. 154, no. 3. — Pp. 427–440. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379900403>.
- [301] Measurement of χ_{c1} and χ_{c2} production with $\sqrt{s} = 7$ TeV pp collisions at ATLAS / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. // *Journal of High Energy Physics.* — 2014. — Jul. — Vol. 2014, no. 7. — P. 154. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2014\)154](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2014)154).
- [302] Measurement of the relative prompt production rate of χ_{c2} and χ_{c1} in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *European Physical Journal C.* — 2012. — Dec. — Vol. 72, no. 12. — P. 2251. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2251-3>.
- [303] Constraints on the χ_{c1} versus χ_{c2} polarizations in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. //

Physical Review Letters. — 2020. — Apr. — Vol. 124, no. 16. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.162002>.

- [304] Measurement of the cross-section ratio $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ for prompt χ_c production at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, B.C. Abellan, B. Adeva et al. // *Physics Letters B*. — 2012. — Vol. 714, no. 2. — Pp. 215–223. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200737X>.
- [305] Measurement of the relative rate of prompt χ_{c0} , χ_{c1} and χ_{c2} production at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Oct. — Vol. 2013, no. 10. — P. 115. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2013\)115](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2013)115).
- [306] Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P. Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. II. χ_c mesons // *Physical Review D*. — 2016. — May. — Vol. 93. — P. 094012. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.094012>.
- [307] Ma Y.-Q., Wang K., Chao K.-T. QCD radiative corrections to χ_{cJ} production at hadron colliders // *Physical Review D*. — 2011. — Jun. — Vol. 83. — P. 111503. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.111503>.
- [308] Global analysis of the experimental data on χ_c meson hadroproduction / H.-F. Zhang, L. Yu, S.-X. Zhang, L. Jia // *Physical Review D*. — 2016. — Mar. — Vol. 93. — P. 054033. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.054033>.
- [309] Likhoded A.K., Luchinsky A.V., Poslavsky S.V. Production of χ_c and χ_b mesons in high energy hadronic collisions // *Physical Review D*. — 2014. — Oct. — Vol. 90. — P. 074021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.074021>.
- [310] Baranov S.P., Lipatov A.V. χ_{c1} and χ_{c2} polarization as a probe of color octet channel // *European Physical Journal C*. — 2020. — Nov. — Vol. 80, no. 11. — P. 1022. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08617-0>.
- [311] Baranov S.P. $\sigma(\chi_{c1})/\sigma(\chi_{c2})$ ratio in the k_T -factorization approach // *Physical Review D*. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 034035. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.034035>.
- [312] Baranov S.P., Lipatov A.V. Prompt η_c meson production at the LHC in the NRQCD with k_T -factorization // *European Physical Journal C*. — 2019. — Jul. — Vol. 79, no. 7. — P. 621. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7134-4>.
- [313] Baranov S.P., Lipatov A.V. Prompt charmonia production and polarization at LHC in the NRQCD with k_T -factorization. Part III: J/ψ meson // *Physical Review D*. — 2017. — Vol. 96. — P. 034019.

- [314] Measurement of J/ψ polarization in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, C. Abellan Beteta, B. Adeva et al. // *European Physical Journal C*. — 2013. — Vol. 73, no. 11. — P. 2631.
- [315] Measurement of $\psi(2S)$ polarization in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *European Physical Journal C*. — 2014. — May. — Vol. 74, no. 5. — P. 2872. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2872-9>.
- [316] *Faccioli P., Lourenco C., Seixas J.* Rotation-invariant relations in vector meson decays into fermion pairs // *Physical Review Letters*. — 2010. — Aug. — Vol. 105, no. 6. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.061601>.
- [317] *Gong B., Wang J.-X.* Next-to-leading-order QCD corrections to J/ψ polarization at Tevatron and Large-Hadron-Collider energies // *Physical Review Letters*. — 2008. — Jun. — Vol. 100, no. 23. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.232001>.
- [318] *Campbell J., Maltoni F., Tramontano F.* QCD corrections to J/ψ and Υ production at hadron colliders // *Physical Review Letters*. — 2007. — Jun. — Vol. 98, no. 25. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.252002>.
- [319] Measurements of the $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ and $\Upsilon(3S)$ differential cross sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physics Letters B*. — 2015. — Vol. 749. — Pp. 14–34. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931500547X>.
- [320] Measurement of Υ production in 7 TeV pp collisions at ATLAS / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. // *Physical Review D*. — 2013. — Mar. — Vol. 87. — P. 052004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.052004>.
- [321] Study of χ_b meson production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV and observation of the decay $\chi_b \rightarrow \Upsilon(3S)\gamma$ / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *European Physical Journal C*. — 2014. — Oct. — Vol. 74, no. 10. — P. 3092. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3092-z>.
- [322] Forward production of Υ mesons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Nov. — Vol. 2015, no. 11. — P. 103. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2015\)103](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2015)103).
- [323] Measurement of Υ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2018. — Jul. — Vol. 2018, no. 7. — P. 134. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2018\)134](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2018)134).
- [324] *Kniehl B.A., Nefedov M.A., Saleev V.A.* $\psi(2S)$ and $\Upsilon(3S)$ hadroproduction in the parton Reggeization approach: yield, polarization, and the role of fragmentation // *Physical Review D*. — 2016. — Sep. — Vol. 94, no. 5. — P. 054007. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.054007>.

- [325] *Abdulov N.A., Lipatov A.V.* Bottomonia production and polarization in the NRQCD with k_T -factorization. I: $\Upsilon(3S)$ and $\chi_b(3P)$ mesons // *European Physical Journal C*. — 2019. — Oct. — Vol. 79, no. 10. — P. 830. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7365-4>.
- [326] *Abdulov N.A., Lipatov A.V.* Bottomonia production and polarization in the NRQCD with k_T -factorization. II: $\Upsilon(2S)$ and $\chi_b(2P)$ mesons // *European Physical Journal C*. — 2020. — May. — Vol. 80, no. 5. — P. 486. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8056-x>.
- [327] Measurement of the production cross section ratio $\sigma_{b2}(1P)/\sigma_{b1}(1P)$ in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physics Letters B*. — 2015. — Apr. — Vol. 743. — Pp. 383–402. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2015.02.048>.
- [328] Measurement of the $\chi_b(3P)$ mass and of the relative rate of $\chi_{b1}(1P)$ and $\chi_{b2}(1P)$ production / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Vol. 10. — P. 088.
- [329] *Abdulov N.A., Lipatov A.V.* Bottomonia production and polarization in the NRQCD with k_T -factorization. III: $\Upsilon(1S)$ and $\chi_b(1P)$ mesons // *European Physical Journal C*. — 2021. — Dec. — Vol. 81, no. 12. — P. 1085. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09880-5>.
- [330] Measurement of the $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ and $\Upsilon(3S)$ polarizations in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Physical Review Letters*. — 2013. — Feb. — Vol. 110. — P. 081802. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.081802>.
- [331] Measurements of the angular distributions of muons from Υ decays in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / T. Aaltonen, B. Álvarez González, S. Amerio et al. // *Physical Review Letters*. — 2012. — Apr. — Vol. 108. — P. 151802. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.151802>.
- [332] Measurement of the $\Upsilon(nS)$ polarizations in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2017. — Dec. — Vol. 2017, no. 12. — P. 110. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2017\)110](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2017)110).
- [333] *Baranov S.P., Lipatov A.V.* First estimates of the B_c wave function from the data on the B_c production cross section // *Physics Letters B*. — 2018. — Vol. 785. — Pp. 338–341. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318306993>.

- [334] Observation of B_c mesons in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV / F. Abe, H. Akimoto, A. Akopian et al. // *Physical Review D*. — 1998. — Nov. — Vol. 58, no. 11. — P. 112004. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.58.112004>.
- [335] Measurement of the $B_c^\pm$ production cross section in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV / T. Aaltonen, S. Amerio, D. Amidei et al. // *Physical Review D*. — 2016. — Mar. — Vol. 93, no. 5. — P. 052001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.052001>.
- [336] Measurements of B_c^+ Production and Mass with the $B_c^+ \rightarrow J/\psi\pi^+$ Decay / R. Aaij, C. Abellan Beteta, A. Adametz et al. // *Physical Review Letters*. — 2012. — Dec. — Vol. 109, no. 23. — P. 232001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.232001>.
- [337] Measurement of B_c^+ Production in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Physical Review Letters*. — 2015. — Apr. — Vol. 114, no. 13. — P. 132001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.132001>.
- [338] Baranov S.P. Production of doubly flavored baryons in pp , ep and $\gamma\gamma$ collisions // *Physical Review D*. — 1996. — Sep. — Vol. 54. — Pp. 3228–3236. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.3228>.
- [339] On hadronic production of the B_c meson / C.-H. Chang, Yu.-Q. Chen, G.-P. Han, H.-T. Jiang // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 364, no. 2. — Pp. 78–86. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269395012354>.
- [340] Kolodziej K., Leike A., Rückl R. Production of B_c mesons in hadronic collisions // *Physics Letters B*. — 1995. — Vol. 355, no. 1. — Pp. 337–344. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269395007103>.
- [341] Бережной А.В., Лиходед А.К., Шевлягин М.В. Адронное рождение B_c - мезонов // *Ядерная физика*. — 1995. — Vol. 58. — P. 730.
- [342] Бережной А.В., Лиходед А.К., Ющенко О.П. Особенности адронного рождения $B_c^{(*)}$ -мезонов при больших значениях поперечных импульсов // *Ядерная физика*. — 1996. — Vol. 59. — P. 742.
- [343] Бережной А.В., Киселев В.В., Лиходед А.К. Адронное рождение S - и P -волновых состояний $b\bar{s}$ -кваркония // *Ядерная физика*. — 1997. — Vol. 60. — P. 108.
- [344] Measurement of the ratio of B_c^+ branching fractions to $J/\psi\pi^+$ and $J/\psi\mu^+\nu_\mu$ final states / R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi et al. // *Physical Review D*. — 2014. — Aug. — Vol. 90, no. 3. — P. 032009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.032009>.

- [345] B_c exclusive decays to charmonium and a light meson at next-to-leading order accuracy / C.-F. Qiao, P. Sun, D. Yang, R.-L. Zhu // *Physical Review D*. — 2014. — Feb. — Vol. 89. — P. 034008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.034008>.
- [346] Quigg C., Rosner J.L. Quarkonium Level Spacings // *Physical Letters B*. — 1977. — Vol. 71. — Pp. 153–157.
- [347] Prange R.E. Dispersion Relations for Compton Scattering // *Physical Review*. — 1958. — Apr. — Vol. 110. — Pp. 240–252. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.110.240>.
- [348] Баранов С.П., Сладь В.Л. Рождение трижды очарованных Ω_{ccc} -барионов в e^+e^- аннигиляции // *Ядерная физика*. — 2004. — Vol. 67. — Pp. 829–836.
- [349] Baranov S.P. Production of doubly flavored baryons in pp , ep , and $\gamma\gamma$ collisions // *Physical Review D*. — 1996. — Sep. — Vol. 54. — Pp. 3228–3236. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.3228>.
- [350] Baranov S.P. Semiperturbative and nonperturbative production of hadrons with two heavy flavors // *Physical Review D*. — 1997. — Sep. — Vol. 56. — Pp. 3046–3056. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.3046>.
- [351] Баранов С.П., Сладь В.Л. Рождение Ω_{scb} -барионов в e^+e^- столкновениях // *Ядерная физика*. — 2003. — Vol. 66. — Pp. 1778–1784.
- [352] Баранов С.П., Сладь В.Л. Некоторые характеристики рождения барионов с тяжелыми кварками в e^+e^- столкновениях // *Ядерная физика*. — 2005. — Vol. 68. — Pp. 1265–1271.
- [353] Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P. Prompt photon hadroproduction at high energies in off-shell gluon-gluon fusion // *Physical Review D*. — 2008. — Apr. — Vol. 77. — P. 074024. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.074024>.
- [354] Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P. Production of electroweak gauge bosons in off-shell gluon-gluon fusion // *Physical Review D*. — 2008. — Jul. — Vol. 78. — P. 014025. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.014025>.
- [355] Associated production of Z bosons and b -jets at the LHC in the combined k_T + collinear QCD factorization approach / S.P. Baranov, H. Jung, A.V. Lipatov, M.A. Malyshev // *European Physical Journal C*. — 2017. — Nov. — Vol. 77, no. 11. — P. 772. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5369-5>.
- [356] Constraints on the intrinsic charm content of the proton from recent ATLAS data / V.A. Bednyakov, S.J. Brodsky, A.V. Lipatov et al. // *European Physical Journal C*. — 2019. — Vol. 79, no. 2. — P. 92.

- [357] Hard production of a Z boson plus heavy flavor jets at LHC and the intrinsic charm content of a proton / A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, M.A. Malyshev et al. // *Physical Review D*. — 2018. — Jun. — Vol. 97. — P. 114019. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.114019>.
- [358] The automated computation of tree-level and next-to-leading order differential cross sections, and their matching to parton shower simulations / J. Alwall, R. Frederix, S. Frixione et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Jul. — Vol. 2014, no. 7. — P. 079. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2014\)079](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2014)079).
- [359] Koller K., Walsh T.F., Zerwas P.M. Testing QCD: direct photons in e^+e^- collisions // *Zeitschrift für Physik C*. — 1979. — Sep. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 197–203. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01474661>.
- [360] Direct photons in e^+e^- annihilation / E. Laermann, T.F. Walsh, I. Schmitt, P.M. Zerwas // *Nuclear Physics B*. — 1982. — Vol. 207, no. 2. — Pp. 205–232. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382901626>.
- [361] Measurement of differential cross sections of isolated-photon plus heavy-flavour jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV using the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Physics Letters B*. — 2018. — Vol. 776. — Pp. 295–317. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317309462>.
- [362] Cross section of isolated prompt photons in hadron-hadron collisions / S. Catani, M. Fontannaz, J.-P. Guillet, E. Pilon // *Journal of High Energy Physics*. — 2002. — May. — Vol. 2002, no. 05. — P. 028. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2002/05/028>.
- [363] Recent critical study of photon production in hadronic collisions / P. Aurenche, J.-Ph. Guillet, E. Pilon et al. // *Physical Review D*. — 2006. — May. — Vol. 73. — P. 094007. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.094007>.
- [364] An introduction to PYTHIA 8.2 / T. Sjöstrand, S. Ask, J.R. Christiansen et al. // *Computer Physics Communications*. — 2015. — Jun. — Vol. 191. — Pp. 159–177. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2015.01.024>.
- [365] Baranov S.P., Lipatov A.V., Zotov N.P. Associated production of prompt photons and heavy quarks in off-shell gluon-gluon fusion // *European Physical Journal C*. — 2008. — Jul. — Vol. 56, no. 3. — P. 371. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-008-0654-y>.
- [366] Lipatov A.V., Malyshev M.A., Zotov N.P. Prompt photon and associated heavy quark production at hadron colliders with k_T -factorization // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — May. — Vol. 2012, no. 5. — P. 104. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2012\)104](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2012)104).

- [367] *Lipatov A.V., Malyshev M.A., Zotov N.P.* Extended study of prompt photon photoproduction at HERA with k_T -factorization // *Physical Review D*. — 2013. — Oct. — Vol. 88, no. 7. — P. 074001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.074001>.
- [368] *Lipatov A.V., Malyshev M.A.* Reconsideration of the inclusive prompt photon production at the LHC with k_T -factorization // *Physical Review D*. — 2016. — Aug. — Vol. 94. — P. 034020. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.034020>.
- [369] *Lipatov A.V.* Isolated prompt photon pair production at hadron colliders with k_T -factorization // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Feb. — Vol. 2013, no. 2. — P. 009. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02\(2013\)009](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2013)009).
- [370] The intrinsic charm of the proton / S.J. Brodsky, P. Hoyer, C. Peterson, N. Sakai // *Physics Letters B*. — 1980. — Vol. 93, no. 4. — Pp. 451–455. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380903640>.
- [371] *Brodsky S.J., Peterson C., Sakai N.* Intrinsic heavy-quark states // *Physical Review D*. — 1981. — Jun. — Vol. 23. — Pp. 2745–2757. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.2745>.
- [372] *Harris B.W., Smith J., Vogt R.* Reanalysis of the EMC charm production data with extrinsic and intrinsic charm at NLO // *Nuclear Physics B*. — 1996. — Vol. 461, no. 1. — Pp. 181–196. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321395006524>.
- [373] *Franz M., Polyakov M.V., Goeke K.* Heavy quark mass expansion and intrinsic charm in light hadrons // *Physical Review D*. — 2000. — Sep. — Vol. 62. — P. 074024. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.074024>.
- [374] *Alekhin S., Moch S.* Higher order QCD corrections to charged-lepton deep-inelastic scattering and global fits of parton distributions // *Physics Letters B*. — 2009. — Feb. — Vol. 672, no. 2. — Pp. 166–171. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2009.01.004>.
- [375] *Alekhin S., Blümlein J., Moch S.* Parton distribution functions and benchmark cross sections at next-to-next-to-leading order // *Physical Review D*. — 2012. — Sep. — Vol. 86, no. 5. — P. 054009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.054009>.
- [376] Implications of CTEQ global analysis for collider observables / P. Nadolsky, H.-L. Lai, Q.-H. Cao et al. // *Physical Review D*. — 2008. — Jul. — Vol. 78, no. 1. — P. 013004. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.013004>.

- [377] *Aivazis M.A.G., Olness F.I., Tung W.-K.* Leptoproduction of heavy quarks. I. General formalism and kinematics of charged current and neutral current production processes // *Physical Review D*. — 1994. — Sep. — Vol. 50, no. 5. — P. 3085. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3085>.
- [378] Leptoproduction of heavy quarks. II. A unified QCD formulation of charged and neutral current processes from fixed-target to collider energies / M.A.G. Aivazis, J.C. Collins, F.I. Olness, W.-K. Tung // *Physical Review D*. — 1994. — Sep. — Vol. 50, no. 5. — Pp. 3102–3118. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3102>.
- [379] *Thorne R.S., Roberts R.G.* Ordered analysis of heavy flavor production in deep-inelastic scattering // *Physical Review D*. — 1998. — Jun. — Vol. 57. — Pp. 6871–6898. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.6871>.
- [380] *Thorne R.S., Roberts R.G.* A practical procedure for evolving heavy flavour structure functions // *Physics Letters B*. — 1998. — Mar. — Vol. 421, no. 1-4. — Pp. 303–311. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)01580-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01580-3).
- [381] Heavy quark coefficient functions at asymptotic values $Q^2 \gg m^2$ / M. Buza, Y. Matiounine, J. Smith et al. // *Nuclear Physics B*. — 1996. — Vol. 472, no. 3. — Pp. 611–658. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321396002283>.
- [382] *Collins J., Wilczek F., Zee A.* Low-energy manifestations of heavy particles: Application to the neutral current // *Physical Review D*. — 1978. — Jul. — Vol. 18. — Pp. 242–247. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.242>.
- [383] *Rostami S., Khorramian A., Aleedaneshvar A.* The impact of the intrinsic charm quark content of a proton on the differential $\gamma+c$ cross section // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2016. — apr. — Vol. 43, no. 5. — P. 055001.
- [384] On the intrinsic bottom content of the nucleon and its impact on heavy new physics at the LHC / F. Lyonnet, A. Kusina, T. Jezo et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Vol. 07. — P. 141.
- [385] Probing proton intrinsic charm in photon or Z boson production accompanied by heavy jets at the LHC / A.V. Lipatov, G.I. Lykasov, Yu.Yu. Stepanenko, V.A. Bednyakov // *Physical Review D*. — 2016. — Sep. — Vol. 94. — P. 053011. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.053011>.
- [386] Event generation with SHERPA 1.1 / T. Gleisberg, S. Höche, F. Krauss et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2009. — Feb. — Vol. 2009, no. 02. — P. 007. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/02/007>.

- [387] *Lipatov A.V., Malyshev M.A., Jung H.* TMD parton shower effects in associated γ + jet production at the LHC // *Physical Review D*. — 2019. — Aug. — Vol. 100. — P. 034028. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.034028>.
- [388] *Cacciari M., Salam G.P., Soyez G.* FASTJET user manual // *European Physical Journal C*. — 2012. — Mar. — Vol. 72, no. 3. — P. 1986. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1896-2>.
- [389] *Baranov S.P., Zotov N.P.* BFKL gluon dynamics and resolved photon processes in D^* and dijet associated photoproduction at HERA // *Physics Letters B*. — 2000. — Vol. 491, no. 1. — Pp. 111–116. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300009990>.
- [390] Measurement of the triple-differential cross section for photon + jets production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Jun. — Vol. 2014, no. 6. — P. 009. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2014\)009](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2014)009).
- [391] Measurement of the production cross section of an isolated photon associated with jets in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Physical Review D*. — 2012. — May. — Vol. 85. — P. 092014. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.092014>.
- [392] Dynamics of isolated-photon plus jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. // *Nuclear Physics B*. — 2013. — Oct. — Vol. 875, no. 3. — Pp. 483–535. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2013.07.025>.
- [393] Measurement of differential cross sections for inclusive isolated-photon and photon+jet production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *European Physical Journal C*. — 2019. — Jan. — Vol. 79, no. 1. — P. 20. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6482-9>.
- [394] High- E_T isolated-photon plus jets production in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Nuclear Physics B*. — 2017. — May. — Vol. 918. — Pp. 257–316. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.03.006>.
- [395] Measurement of the cross section for isolated-photon plus jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV using the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Physics Letters B*. — 2018. — Vol. 780. — Pp. 578–602. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318302247>.

- [396] *Lipatov A.V., Zotov N.P.* Prompt photon photoproduction at DESY HERA in the k_T -factorization approach // *Physical Review D*. — 2005. — Sep. — Vol. 72, no. 5. — P. 054002. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.72.054002>.
- [397] *Lipatov A.V., Zotov N.P.* Transverse momentum dependent parton densities in associated real and virtual photon and jet production at the LHC // *Physical Review D*. — 2014. — Nov. — Vol. 90. — P. 094005. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.094005>.
- [398] Measurement of differential production cross-sections for a Z boson in association with b -jets in 7 TeV proton-proton collisions with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Oct. — Vol. 2014, no. 10. — P. 141. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2014\)141](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2014)141).
- [399] Measurement of the cross section and angular correlations for associated production of a Z boson with b hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Dec. — Vol. 2013, no. 12. — P. 039. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2013\)039](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2013)039).
- [400] *Campbell J., Ellis R.K.* Next-to-leading order corrections to $W + 2$ jet and $Z + 2$ jet production at hadron colliders // *Physical Review D*. — 2002. — Jun. — Vol. 65, no. 11. — P. 113007. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.65.113007>.
- [401] *Karpishkov A.V., Saleev V.A., Shipilova A.V.* Large- p_T production of D mesons at the LHCb in the parton reggeization approach // *Physical Review D*. — 2016. — Dec. — Vol. 94. — P. 114012. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.114012>.
- [402] Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan et al. // *Physics Letters B*. — 2012. — Vol. 716, no. 1. — Pp. 30–61. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312008581>.
- [403] Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. // *Physics Letters B*. — 2012. — Sep. — Vol. 716, no. 1. — Pp. 1–29. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020>.
- [404] *Ilyushin M., Mandrik P., Slabospitskii S.R.* Constraints on the Higgs boson anomalous FCNC interactions with light quarks // *Nuclear Physics B*. — 2020. — Mar. — Vol. 952. — P. 114921. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2020.114921>.

- [405] *Wilczek F.* Decays of heavy vector mesons into Higgs particles // *Physical Review Letters*. — 1977. — Nov. — Vol. 39. — Pp. 1304–1306. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.1304>.
- [406] Higgs bosons from two-gluon annihilation in proton-proton collisions / H.M. Georgi, S.L. Glashow, M.E. Machacek, D.V. Nanopoulos // *Physical Review Letters*. — 1978. — Mar. — Vol. 40. — Pp. 692–694. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.692>.
- [407] Is the mass of the Higgs boson about 10 GeV? / J. Ellis, M.K. Gaillard, D.V. Nanopoulos, C.T. Sachrajda // *Physics Letters B*. — 1979. — Vol. 83, no. 3. — Pp. 339–344. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379911225>.
- [408] *Rizzo T.G.* Gluon final states in Higgs-boson decay // *Physical Review D*. — 1980. — Jul. — Vol. 22. — Pp. 178–183. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.178>.
- [409] *Graudenz D., Spira M., Zerwas P.M.* QCD corrections to Higgs-boson production at proton-proton colliders // *Physical Review Letter*. — 1993. — Mar. — Vol. 70. — Pp. 1372–1375. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1372>.
- [410] Higgs boson production at the LHC / M. Spira, A. Djouadi, D. Graudenz, P.M. Zerwas // *Nuclear Physics B*. — 1995. — Oct. — Vol. 453, no. 1-2. — P. 17–82. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00379-7](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(95)00379-7).
- [411] Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 4. Deciphering the Nature of the Higgs Sector / D. De Florian, C. Grojean, F. Maltoni et al. — 2016. — 10. — Vol. 2/2017.
- [412] *Ellis J., Gaillard M.K., Nanopoulos D.V.* A phenomenological profile of the Higgs boson // *Nuclear Physics B*. — 1976. — Vol. 106. — Pp. 292–340. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321376903825>.
- [413] Низкоэнергетические теоремы для взаимодействия хиггсовского бозона с фотонами / А.И. Вайнштейн, М.Б. Волошин, В.И. Захаров, М.А. Шифман // *Ядерная физика*. — 1979. — Vol. 30. — Pp. 1368–1378.
- [414] Gluon-fusion contributions to $H + 2$ jet production / V. Del Duca, W. Kilgore, C. Oleari et al. // *Nuclear Physics B*. — 2001. — Nov. — Vol. 616, no. 1-2. — P. 367–399. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(01\)00446-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(01)00446-1).
- [415] Kinematical limits on Higgs boson production via gluon fusion in association with jets / V. Del Duca, W. Kilgore, C. Oleari et al. // *Physical Review D*. — 2003. — Apr. — Vol. 67. — P. 073003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.073003>.

- [416] High precision determination of the gluon fusion Higgs boson cross-section at the LHC / C. Anastasiou, C. Duhr, F. Dulat et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Vol. 05. — P. 058.
- [417] Dawson S. Radiative corrections to Higgs boson production // *Nuclear Physics B*. — 1991. — Vol. 359, no. 2. — Pp. 283–300. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391900612>.
- [418] Djouadi A., Spira M., Zerwas P.M. Production of Higgs bosons in proton colliders. QCD corrections // *Physics Letters B*. — 1991. — Vol. 264, no. 3. — Pp. 440–446. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190375Z>.
- [419] Lipatov A.V., Zotov N.P. Higgs boson production at hadron colliders in the k_T -factorization approach // *European Physical Journal C*. — 2005. — Dec. — Vol. 44, no. 4. — Pp. 559–566. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2005-02393-7>.
- [420] Lipatov A.V., Malyshev M.A., Zotov N.P. Phenomenology of k_T -factorization for inclusive Higgs boson production at LHC // *Physics Letters B*. — 2014. — Vol. 735. — Pp. 79–83. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269314004092>.
- [421] Abdulov N.A., Lipatov A.V., Malyshev M.A. Inclusive Higgs boson production at the LHC in the k_T -factorization approach // *Physical Review D*. — 2018. — Mar. — Vol. 97. — P. 054017. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.054017>.
- [422] Lipatov A.V., Malyshev M.A. Associated Higgs boson + jets production at the LHC and Catani-Ciafaloni-Fiorani-Marchesini gluon dynamics in a proton // *Physical Review D*. — 2021. — May. — Vol. 103. — P. 094021. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.094021>.
- [423] Measurement of differential cross sections for Higgs boson production in the diphoton decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *European Physical Journal C*. — 2016. — Jan. — Vol. 76, no. 1. — P. 13. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3853-3>.
- [424] Measurements of fiducial and differential cross sections for Higgs boson production in the diphoton decay channel at $\sqrt{s} = 8$ TeV with ATLAS / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Sep. — Vol. 2014, no. 9. — P. 112. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2014\)112](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2014)112).
- [425] Measurement of inclusive and differential Higgs boson production cross sections in the diphoton decay channel in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2019. — Jan. — Vol. 2019, no. 1. — P. 183. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2019\)183](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2019)183).

- [426] Measurements of Higgs boson properties in the diphoton decay channel with 36 fb^{-1} of pp collision data at $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ with the ATLAS detector / M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott et al. // *Physical Review D*. — 2018. — Sep. — Vol. 98, no. 5. — P. 052005. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.052005>.
- [427] Higgs boson production at the LHC: transverse momentum resummation effects in the $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow WW \rightarrow l\nu l\nu$ and $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l$ decay modes / D. de Florian, G. Ferrera, M. Grazzini, D. Tommasini // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Jun. — Vol. 2012, no. 6. — P. 132. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2012\)132](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2012)132).
- [428] NNLOPS simulation of Higgs boson production / K. Hamilton, P. Nason, E. Re, G. Zanderighi // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Oct. — Vol. 2013, no. 10. — P. 222. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2013\)222](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2013)222).
- [429] Measurement of differential and integrated fiducial cross sections for Higgs boson production in the four-lepton decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Apr. — Vol. 2016, no. 4. — P. 005. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04\(2016\)005](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04(2016)005).
- [430] Fiducial and differential cross sections of Higgs boson production measured in the four-lepton decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Physics Letters B*. — 2014. — Nov. — Vol. 738. — Pp. 234–253. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2014.09.054>.
- [431] Measurements of the Higgs boson inclusive and differential fiducial cross sections in the $4l$ decay channel at $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. — 2020.
- [432] Measurement of the transverse momentum spectrum of the Higgs boson produced in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ using $H \rightarrow WW$ decays / V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2017. — Mar. — Vol. 2017, no. 3. — P. 032. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2017\)032](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2017)032).
- [433] Measurement of fiducial differential cross sections of gluon-fusion production of Higgs bosons decaying to $WW^* \rightarrow e\nu\mu\nu$ with the ATLAS detector at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Aug. — Vol. 2016, no. 8. — P. 104. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2016\)104](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2016)104).
- [434] Hamilton K., Nason P., Zanderighi G. MINLO: multi-scale improved NLO // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Oct. — Vol. 2012, no. 10. — P. 155. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2012\)155](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2012)155).

- [435] Measurements of properties of the Higgs boson decaying into the four-lepton final state in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2017. — Nov. — Vol. 2017, no. 11. — P. 047. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2017\)047](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2017)047).
- [436] Measurement of the inclusive and differential Higgs boson production cross sections in the leptonic WW decay mode at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2021. — Mar. — Vol. 2021, no. 3. — P. 003. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2021\)003](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2021)003).
- [437] QCD Matrix Elements + Parton Showers / S. Catani, F. Krauss, B.R. Webber, R. Kuhn // *Journal of High Energy Physics*. — 2001. — Nov. — Vol. 2001, no. 11. — P. 063. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2001/11/063>.
- [438] Comparative study of various algorithms for the merging of parton showers and matrix elements in hadronic collisions / J. Alwall, S. Höche, F. Krauss et al. // *European Physical Journal C*. — 2007. — Dec. — Vol. 53, no. 3. — Pp. 473–500. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0490-5>.
- [439] *Frederix R., Frixione S.* Merging meets matching in MCNLO // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Dec. — Vol. 2012, no. 12. — P. 061. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2012\)061](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2012)061).
- [440] *Baranov S.P., Rezaeian A.H.* Prompt double J/ψ production in proton-proton collisions at the LHC // *Physical Review D*. — 2016. — Jun. — Vol. 93. — P. 114011. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.114011>.
- [441] *Бережной А.В., Киселев В.В., Лиходед А.К.* Адронное рождение барионов, содержащих два тяжелых кварка // *Ядерная физика*. — 1996. — Vol. 59. — P. 909.
- [442] *Baranov S.P.* Production of doubly flavored baryons in pp , ep , and $\gamma\gamma$ collisions // *Physical Review D*. — 1996. — Sep. — Vol. 54. — Pp. 3228–3236. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.3228>.
- [443] *Kiselev V.V., Likhoded A.K., Shevlyagin M.V.* Double charmed baryon production at B -factory // *Physics Letters B*. — 1994. — Vol. 332, no. 3. — Pp. 411–414. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394912734>.
- [444] LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era / A. Buckley, J. Ferrando, S. Lloyd et al. // *European Physical Journal C*. — 2015. — Mar. — Vol. 75, no. 3. — P. 132. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3318-8>.
- [445] Parton distributions for the LHC / A.D. Martin, W.J. Stirling, R.S. Thorne, G. Watt // *European Physical Journal C*. — 2009. — Jul. — Vol. 63, no. 2. — Pp. 189–285. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.

- [446] *Gluck M., Reya E., Vogt A.* Dynamical parton distributions of the proton and small x physics // *Zeitschrift für Physik C*. — 1995. — Vol. 67. — Pp. 433–448.
- [447] *Lüscher M.* A portable high-quality random number generator for lattice field theory simulations // *Computer Physics Communications*. — 1994. — Vol. 79, no. 1. — Pp. 100–110. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465594902321>.
- [448] Measurements of the production cross-section for a Z boson in association with b -jets in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector / G. Aad, B. Abbott, D.C. Abbott et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2020. — Jul. — Vol. 2020, no. 7. — P. 044. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2020\)044](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2020)044).