

УДК 534.222.2

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ПЕРЕГРЕТОЙ ОБЛАСТИ МАЛОГО РАЗМЕРА

© 2017 г. Е. А. Анненкова^{1, *}, У. Крайдер², О. А. Сапожников^{1, 2}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”

²Центр промышленного и медицинского ультразвука, Лаборатория прикладной физики,
Университет штата Вашингтон

*E-mail: a-a-annenkova@yandex.ru

Теоретически исследован рост парогазового пузыря в жидкости при его расположении в центре сферически-симметричной перегретой области миллиметрового размера. Модель динамики пузыря основывается на учете гидродинамических и тепловых процессов как внутри него, так и в окружающей жидкости.

DOI: 10.7868/S0367676517010033

ВВЕДЕНИЕ

Высокоинтенсивный фокусированный ультразвуковой пучок может перегреть среду, в которой он распространяется, и инициировать кипение. Нужные для этого условия возникают в определенных режимах ультразвуковой терапии, таких как режим теплового разрушения и гистотрипсия [1]. Поглощение фокусированного пучка приводит к образованию локализованной нагретой области миллиметрового размера, которая совпадает с фокальной областью пучка. Если среда перегрета, т.е. ее температура превышает температуру кипения, и в ней имеется микроскопический пузырь (зародыш кавитации), то под действием давления пара этот пузырь может увеличиться до миллиметрового размера за несколько миллисекунд или даже быстрее. Такой быстрый рост приводит к увеличению механических напряжений вокруг пузыря и последующему излучению слышимого звука. Эти звуки могут быть полезны при контроле в некоторых видах лечения. Более того, пузыри миллиметрового размера, возникающие при кипении, являются сильными акустическими рассеивателями и поэтому создают участки повышенной яркости на ультразвуковом изображении, что чрезвычайно полезно для надежной визуализации области воздействия. Данная статья посвящена теоретическому исследованию динамики парогазового пузыря в локально перегретой жидкости в условиях сферической симметрии.

БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Аналогично подходу, описанному в работе [2], строится теория, основанная на уравнениях баланса массы, импульса и энергии, уравнении состояния и законах переноса тепла и массы [3, 4]. Жидкость, которая расталкивается расширяющимся пузырем, при выводе уравнений для динамики пузырька предполагается несжимаемой. Хотя перегретые области, образованные высокоинтенсивным фокусированным ультразвуковым пучком, имеют форму эллипсоида, целесообразно упростить задачу, рассматривая сферически симметричную перегретую область. При таком упрощении и с учетом того, что начальный зародыш кипения располагается в центре перегретой области, задача становится сферически симметричной. Уравнение движения жидкости вокруг пузыря имеет вид уравнения типа Рэлея–Плессета для радиуса пузыря [5, 6]. В модели переноса тепла учитываются и жидкая, и газовая фазы. Акустическое давление, создаваемое растущим пузырем, так же, как и другие параметры, характеризующие рост, может быть рассчитано из системы уравнений, которая связывает эти параметры друг с другом.

Эволюционные уравнения для основных параметров

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка для четырех независимых переменных, которые зависят только от времени: радиус пузыря R , скорость стенки пузыря V , дав-

ление внутри пузыря p_i и количество молей пара внутри пузыря n_v [2]:

$$\dot{R} = V, \quad (1)$$

$$\dot{V} = k_{2V} \left\{ \frac{k_{1V}}{C} \left(\dot{p}_i + \frac{2\sigma}{R^2} V + \frac{4\mu}{R^2} V^2 \right) + \frac{1}{R(1-V/C)} \left[\left(1 + \frac{V}{C} \right) H - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{V}{3C} \right) V^2 \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\dot{p}_i = \gamma p_i \left(\frac{\dot{n}_v}{n_v} - \frac{3V}{R} \right) + (\gamma - 1) \frac{3k_g T_w - \theta}{R \delta_\theta}, \quad (3)$$

$$\dot{n}_v = 4\pi R^2 \frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{2\pi M R T_w}} (p_{sat} - p_v). \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) используются следующие обозначения: $k_{1V} = [p_*/(p_* + p_w - p_0)]^{1/\Gamma} / \rho_0$, $k_{2V} = [1 + 4\mu k_{1V}/(CR)]^{-1}$. Также вводятся следующие параметры жидкости: $p_* = \rho_0 c_0^2 / \Gamma$ – характерное внутреннее давление, $p_w = p_i - 2\sigma/R - 4\mu V/R$ – давление на стенку пузыря, σ – коэффициент поверхностного натяжения, c_0 – скорость звука, $C = \sqrt{c_0^2 + (\Gamma - 1)H}$ – скорость звука на стенке пузыря, Γ – эмпирическая константа ($\Gamma = 6.5$ для воды), ρ_0 – плотность, p_0 – давление вдали от пузыря, μ – вязкость. Газовая составляющая пузыря описывается следующими параметрами: γ – показатель адиабаты, k_g – теплопроводность газа, θ – температура (которая предполагается одинаковой во всем пузыре, за исключением погранслоя вблизи стенки пузыря), δ_θ – толщина теплового погранслоя, M – молярный вес пара; R – универсальная газовая постоянная, p_v – парциальное давление пара, p_{sat} – давление насыщенного пара. Энтальпия жидкости на стенке пузыря выражается следующим образом:

$$H = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p_*}{\rho_0} \left[\left(1 + \frac{p_w - p_0}{p_*} \right)^{(\Gamma-1)/\Gamma} - 1 \right]. \quad (5)$$

Уравнения для температуры на границе пузыря

Для учета неоднородно перегретой жидкости к системе уравнений (1)–(4) нужно добавить аналогичное эволюционное уравнение для температуры жидкости T_w на границе пузыря. Оно может быть получено из решения уравнения теплопроводности и уравнения баланса энергии на границе пузыря. Последнее может быть записано следующим образом:

$$4\pi R^2 \left(k_g \frac{T_w - \theta}{\delta_\theta} - k_L \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) + \dot{n}_v L = 0. \quad (6)$$

Здесь k_L – теплопроводность жидкости, $\partial T/\partial r|_{r=R}$ – пространственная производная температуры жидкости на границе пузыря, L – теплота парообразования. Так же как в уравнении (3), градиент температуры газа в погранслое приближен конечной разностью $(T_w - \theta)/\delta_\theta$.

Решение задачи теплопроводности в жидкости можно представить в виде суммы решений двух более простых краевых задач – начальной и граничной. Тогда температура будет состоять из двух соответствующих частей: $T = T_1 + T_2$. Начальное распределение температуры в перегретой области для определенности будем считать гауссовским: $T|_{r=0} = T_{00} \exp(-r^2/r_{00}^2)$, где r – радиальная координата, r_{00} – радиус перегретой области, T_{00} – температура в центре области. С учетом приближений, использованных в [5, 6], получаются следующие аналитические выражения для температуры:

$$T_1 = \frac{T_{00}}{\sqrt{4\pi D\tau}} \int_0^\infty dh' e^{-\frac{(3h'+R_0)^2/3}{r_{00}^2}} \left[e^{-\frac{(h-h')^2}{4D\tau}} - e^{-\frac{(h+h')^2}{4D\tau}} \right], \quad (7)$$

$$T_2 = \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\tau' \frac{T_w(\tau')}{[D(\tau - \tau')]^{3/2}} e^{-\frac{h^2}{4D(\tau - \tau')}}. \quad (8)$$

Здесь были введены новые переменные: $h = (r^3 - R^3)/3$ и $\tau = \int_0^r R^4(r') dr'$. Также $R_0 = R(0)$ – начальный радиус пузыря, $D = k_L/(\rho_0 c_p)$ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Решения уравнений (7) и (8) позволяют рассчитать пространственную производную температуры жидкости на границе пузыря $\partial T/\partial r|_{r=R}$. Так как эта величина определяется и уравнением (6), выражение для \dot{T}_w может быть рассчитано численно.

РОСТ ПАРОВОГО ПУЗЫРЯ В ОДНОРОДНО ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Для оценки характерного поведения парогазового пузыря рассмотрим упрощенную задачу для случая, когда температура жидкости постоянна во времени и пространстве. Жидкость предполагается невязкой, т.е. $\mu = 0$. Кроме того, пренебрежем изменением давления внутри пузыря ($\dot{p}_i = 0$), т.е. влиянием охлаждения пара при испарении, и силой поверхностного натяжения, которая мала в сравнении с давлением внутри ($\sigma = 0$). Тогда остаются только два уравнения – для ради-

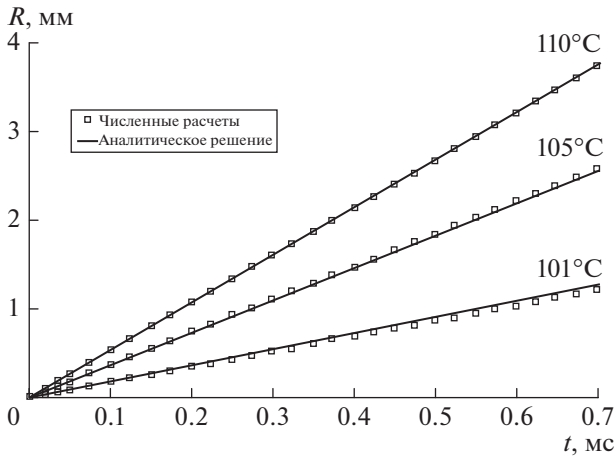


Рис. 1. Зависимость радиуса пузыря от времени при разных температурах жидкости.

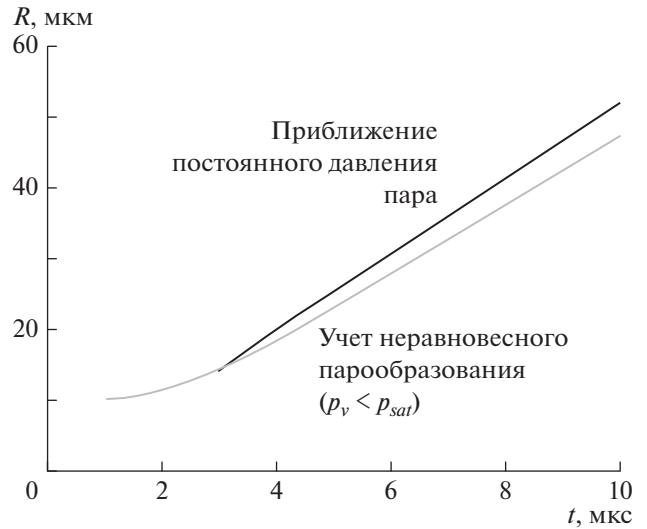


Рис. 2. Зависимость радиуса пузыря от времени без учета и с учетом неравновесного парообразования.

уса пузыря (1) и следующее из (2) уравнение для скорости стенки пузыря:

$$\dot{V} = \frac{1}{R(1-V/C)} \left[\left(1 + \frac{V}{C}\right) H - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{V}{3C}\right) V^2 \right]. \quad (9)$$

Результаты численного моделирования уравнений (1) и (9) представлены на рис. 1. В этих расчетах начальный радиус пузыря равен $R_0 = 10$ мкм. Другие значения R_0 тоже рассматривались, но результирующие кривые зависимости радиуса пузыря от времени на стадии роста, когда радиус пузыря много больше начального радиуса, практически не зависели от выбора конкретного значения R_0 . Радиус пузыря имеет почти линейный рост и, как и следовало ожидать, скорость роста увеличивается с температурой жидкости.

Этот численный результат может быть проверен аналитически, если жидкость рассматривать несжимаемой. Тогда уравнение для энтальпии принимает вид $H = (p_w - p_0)/\rho_0$ и уравнение динамики пузыря превращается в известное уравнение Рэлея

$$R\ddot{R} + 3\dot{R}^2/2 = (p_v - p_0)/\rho_0. \quad (10)$$

Если теплопроводность в жидкости и газе считать достаточно сильной для того, чтобы при росте пузыря температура успевала выравниваться, а процесс парообразования считать достаточно быстрым для того, чтобы пар внутри пузыря всегда был насыщенным, то правую часть в уравнении (10) можно считать не зависящей от времени. Тогда решение может быть найдено аналогично решению Рэлея для коллапсирующей пустой по-

лости [7]. Экспериментальные кривые на рис. 1 хорошо согласуются с аналитическим решением.

При учете неравновесного парообразования, описываемого уравнением (4), скорость роста пузыря уменьшается (см. рис. 2). Это связано с тем, что пар образуется с задержкой, из-за чего давление внутри пузыря падает и пузырь растет не так быстро.

Влияние теплопроводности также выражается в замедлении роста пузыря, что обусловлено заметным падением давления пара из-за его охлаждения вследствие увеличения объема. Были проделаны численные расчеты роста пузыря с учетом и парообразования, и теплопроводности для различных случаев перегрева жидкости (см. рис. 3а) в программе, написанной на основе алгоритма, представленного в работе [2].

ИЗЛУЧЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН РАСТУЩИМ ПАРОВЫМ ПУЗЫРЕМ

Растущие паровые пузыри излучают сферические волны. Известно, что в таком случае [8] потенциал скорости можно выразить в виде $\varphi(r,t) = F(t - r/c_0)/r$, и давление выражается через потенциал как $p = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t = -\rho_0 \dot{F}(t - r/c_0)/r$. Учитывая граничное условие $\partial\varphi/\partial r|_{r=R} = \dot{R}$, получим $F(t - R/c_0) = -R^2(t) \dot{R}(t)$, откуда следует

$$p(r,t) = \frac{\rho_0}{3r} \frac{d^2(R^3)/dt_R^2}{1 + c_0^{-1} dR/dt_R}. \quad (11)$$

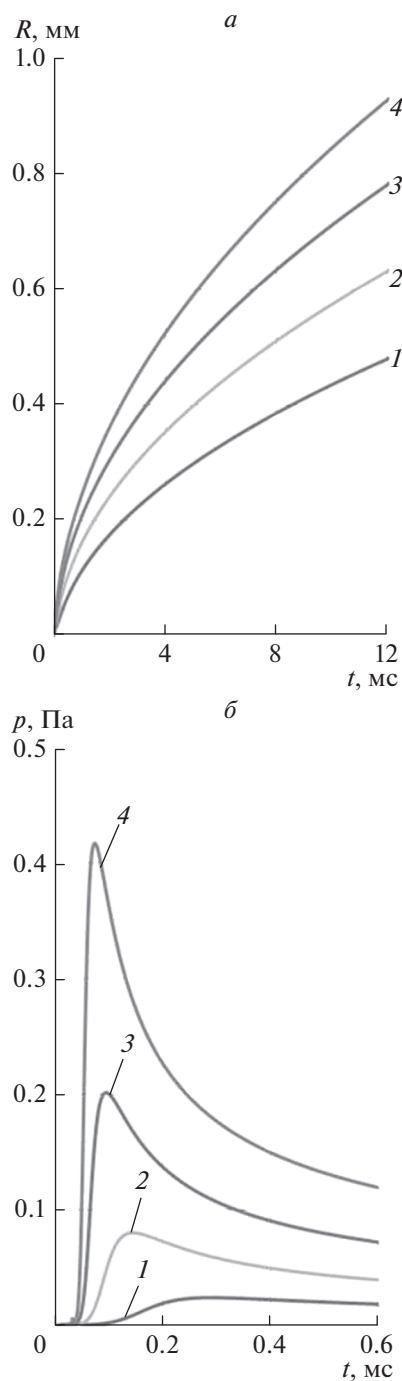


Рис. 3. Зависимости радиуса пузыря (а) и акустического давления излучаемой им волны на расстоянии $r = 5$ см от центра пузыря (б) от времени при различных температурах перегрева: 1 – 103, 2 – 104, 3 – 105, 4 – 106°C.

Здесь радиус пузыря $R = R(t_R)$ рассматривается в момент времени t_R , когда происходит излучение

того акустического возмущения, которое доходит до точки наблюдения позже, в момент времени $t = t_R + [r - R(t_R)]/c_0$. Отметим, что в рассматриваемом процессе скорость стенки пузыря намного меньше скорости звука, поэтому знаменатель во втором множителе правой части при расчетах можно опустить.

На рис. 3б для различных случаев перегрева жидкости представлены кривые акустического давления растущего пузыря, рост которого представлен на рис. 3а. Также проделывали расчеты для разных начальных условий, и было установлено, что зависимость максимума давления от способа возбуждения роста пузыря незначительна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система уравнений, представленная в данной работе, является основой для моделирования роста перегретых паровых пузырей в условиях сферической симметрии. Предварительные результаты, представленные на рис. 1, показывают, что даже при малом перегреве на 101°C пузырь с начальным радиусом 10 мкм вырастает до миллиметрового размера менее чем за 1 мс. Если температура жидкости составляет 110°C, то соответствующее время еще меньше: около 0.2 мс. При учете неравновесного парообразования и теплопроводности рост пузыря замедляется, но все равно достигает миллиметрового размера за несколько миллисекунд. В экспериментах по гистотрипсии температура кипения достигается за несколько миллисекунд, и парогазовая полость наблюдается на тех же временах [1]. Данные указанного наблюдения находятся в согласии с численными результатами работы.

Работа поддержана грантом РНФ-14-15-00665.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell A., Sapozhnikov O., Bailey M. et al. // *Acoust. Today*. 2012. V. 8. № 4. P. 24.
2. Kreider W. Gas-Vapor Bubble Dynamics in Therapeutic Ultrasound: Ph. D. thesis, University of Washington, 2008.
3. Kreider W., Crum L.A., Bailey M.R. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. № 130. P. 3511.
4. Kreider W., Crum L.A., Bailey M.R. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. № 130. P. 3531.
5. Plesset M.S., Zwick S.A. // *J. Appl. Physics*. 1952. № 23. P. 95.
6. Plesset M.S., Zwick S.A. // *J. Appl. Physics*. 1954. № 25. P. 493.
7. Lord Rayleigh // *Philos. Mag. Ser.* 1917. № 6. P. 94.
8. Vokurka K. // *Czech. J. Phys.* 1985. V. B35. P.28.