Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.643

Таранин Константин Александрович

Значения функции перманента $(0, 1)$-матриц и $(-1, 1)$-матриц

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Гутерман Александр Эмилевич

Москва, 2022

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Определение (1.1.1)[1]. Пусть A – матрица порядка n над полем действительных чисел. Функция, сопоставляющая матрице A число

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n – группа перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, называется функцией перманента, а само это число – перманентом матрицы A.

Функция перманента была впервые введена Бине [5] и Коши [10], а её современное название ей дал Мюир [27], который также доказал для перманента аналоги некоторых базовых свойств детерминанта. Литтлвуд и Ричардсон [23, 24] ввели понятие иммананта, обобщающее перманент и детерминант.

Важное отличие перманента от детерминанта состоит в том, что он не инвариантен по отношению к одному из преобразований Гаусса — прибавлению строки с коэффициентом к другой строке (аналогично в случае столбцов). Более общо, перманент не мультипликативен. Как следствие, к нему не применимы методы быстрого вычисления, применимые в случае детерминанта. Более того, на данный момент не найдено алгоритма вычисления перманента полиномиальной или меньшей сложности. Один из наиболее быстрых алгоритмов, вычисляющий перманент за $O(2^{n-1}n)$ итераций, где n — порядок матрицы, принадлежит Райзеру (см. [30, глава 2 теорема 4.1] или [2, глава 7 пункт 2]). Напомним, что задачей класса $\#P$ называется любая вычислительная задача, для которой соответствующая задача разрешимости лежит в классе NP; $\#P$-сложной называется любая задача, к которой за полиномиальное время сводятся все задачи класса $\#P$; а $\#P$-полной называется любая $\#P$-сложная задача из класса $\#P$ (определение 1.1.10).

[1]Здесь и далее во введении после названия утверждения или определения указан его номер в основном тексте диссертации, т.е. в главах 1 и 2.

Вэлиант [32] доказал, что вычисление перманента является $\#P$-сложной задачей, а для $(0,1)$-матриц — $\#P$-полной, т.е. из наличия полиномиального алгоритма вычисления перманента следовало бы равенство $P = NP$. Читателя, интересующегося вопросами алгоритмической сложности в связи с вычислением перманента и смежными задачами, адресуем к работам Кука [12], Гэри и Джонсона [15], Ласло и Пламмера [25], а также Карпа [18].

Помимо интереса с точки зрения теории сложности вычислений, функция перманента представляет также и практический интерес. Приложения перманента можно найти как в смежных областях математики, например, в комбинаторике и теории графов, так и в других науках – экономике, генетике, квантовой физике. Необходимость вычислять значения перманентов $(0,1)$-матриц и, более общо, матриц с целыми неотрицательными элементами возникает в задачах теории механизмов в экономике, использующей теорию графов как один из инструментов, а перманенты $(-1,1)$-матриц используются в квантовой механике. Подробнее о примерах см. в разделе 1.1.2 для $(0,1)$-матриц и в разделе 2.1.2 для $(-1,1)$-матриц. Таким образом, принимая во внимание используемость в приложениях и сложность вычисления функции перманента, можно заключить, что исследование расположения (реализации) её значений является актуальной задачей. Это исследование традиционно ведётся в двух направлениях: предложенный Полиа [29] вопрос конвертации перманента и детерминанта, историю развития которого можно найти в книге [26] МакКуэйга, и вопрос непосредственного поиска значений перманента и соответствующих матриц, о котором далее пойдёт речь в диссертации.

Одним из первых результатов, относящихся к проблеме реализации значений перманента, был критерий обращения в 0 перманента неотрицательной матрицы, полученный Фробениусом [14] и Кёнигом [20]. Аналогичные критерии для небольших положительных значений перманента $(0,1)$-матриц были получены Гордоном, Моцкином и Уэлчем [16]. Бруальди и Ньюмен [6] получили следующую нижнюю оценку на границу значений перманента, принимаемых последовательно: все целые числа от 0 до 2^{n-1} включительно являются значениями функции перманента на множестве $(0,1)$-матриц порядка n (теорема 1.1.16).

В случае $(-1,1)$-матриц одним из основных направлений в исследовании реализации значений перманента является проверка обращения перманента в 0, что продиктовано спецификой использования этого класса матриц: например, в квантовой физике нулевой перманент знакового портрета системы уравнений, описывающей некоторую квантовую систему, означает отсутствие ненулевого решения этой системы уравнений, что в свою очередь гарантирует квантовую запутанность системы (подробнее см. пример 2.1.6). Достаточным условием того, что перманент целочисленной матрицы не обращается в ноль, является отсутствие делимости на натуральное число. Классическими результатами в этом направлении являются результаты Кройтера и Сейфтера о делимости на степени 2 [22, предложение 4 и лемма 5], см. предложения 2.2.12–2.2.14 в разделе 2.2.1 диссертации, а одним из наиболее современных результатов является классификация всех$(-1,1)$-матриц порядка 4 с перманентом 0 с точностью до умножения строк и столбцов на (-1) и их перестановки, полученная Кимом, Кэ и На [19, теорема 3.6] в 2015 году. Альтернативная формулировка последнего результата, учитывающая также эквивалентность с точностью до транспонирования, приведена с доказательством в разделе 2.2.2 диссертации (теорема 2.2.29).

Полученные в диссертации результаты относятся к направлениям исследований, заданным теоремой 1.1.16 Бруальди и Ньюмена и предложениями 2.2.12–2.2.14 Кройтера и Сейфтера, т.е. непосредственно к реализации значений перманента $(0,1)$-матриц и к делимости на степени 2 и обращению в 0 перманента $(-1,1)$-матриц. В частности, был более чем в 2 раза улучшен результат Бруальди и Ньюмена, сформулирован и доказан критерий делимости перманента на более высокую степень 2, чем у Кройтера и Сейфтера, а также классифицированы все $(-1,1)$-матрицы порядка 5 с перманентом 0.

Цели и задачи работы

Целью диссертации является исследование реализации значений функции перманента на множествах квадратных $(0,1)$-матриц и $(-1,1)$-матриц, в частности, исследование вопроса последовательной реализации значений перманента для $(0,1)$-матриц, а также обращения перманента в 0 и делимости на степени 2 для $(-1,1)$-матриц.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты диссертации выносятся на защиту:

- Улучшение оценки Бруальди-Ньюмена границы последовательных значений перманента $(0, 1)$-матриц более чем в 2 раза.

- Вычисление наибольшего нечётного и наибольшего не делящегося на 3 значения перманента. Предъявление для всех простых $p < n$ и натуральных j, $2 \leq j < n$, матриц, на которых функция перманента достигает наибольшего не делящегося на p значения и наибольшего не делящегося на $j!$ значения соответственно. Оценка количества значений перманента на множестве $(0, 1)$-матриц порядка n, превосходящих наибольший нечётный перманент.

- Предъявление и доказательство формулы для перманента $(-1, 1)$-матриц, позволяющей вычислять степень вхождения 2 как простого сомножителя в значение перманента. Прямые доказательства предложений Кройтера и Сейфтера о делимости перманента на степени 2. Предъявление и доказательство критерия делимости перманента $(-1, 1)$-матриц на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$.

- Классификация $(-1, 1)$-матриц порядка не более 5 с перманентом 0 с точностью до эквивалентности.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются множества квадратных $(0, 1)$-матриц порядка n, $(-1, 1)$-матриц порядка n и соответствующие множества значений функции перманента, где $n \in \mathbb{N}$.

Предметом исследования является функция перманента на множествах квадратных $(0, 1)$-матриц и $(-1, 1)$-матриц и её свойства.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

- Оценка Бруальди-Ньюмена границы последовательных значений перманента $(0,1)$-матриц улучшена более чем в 2 раза.

- Получена оценка количества значений перманента на $\mathfrak{A}_n$, превосходящих $[\frac{(n+1)!}{ne}]$. В качестве промежуточных результатов:

  – Найдены наибольшее нечётное значение перманента и наибольшее не делящееся на 3 значение перманента на $\mathfrak{A}_n$.

  – Для всех простых $p < n$ найдены матрицы, перманенты которых являются наибольшими на $\mathfrak{A}_n$ среди не делящихся на p.

  – Для всех натуральных $2 \leq j < n$ найдены матрицы, перманенты которых являются наибольшими на $\mathfrak{A}_n$ среди не делящихся на $j!$.

- Получена формула для перманента $(-1,1)$-матриц, позволяющая вычислять степень вхождения 2 как простого сомножителя в значение перманента. Получены прямые доказательства предложений Кройтера и Сейфтера о делимости перманента на степени 2. Найден критерий делимости перманента $(-1,1)$-матриц на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}$.

- С точностью до эквивалентности классифицированы $(-1,1)$-матрицы порядка не более 5 с перманентом 0.

Методы исследования

В исследовании используются классические результаты, методы и понятия алгебры, комбинаторики и теории чисел. Также автором предложен новый метод построения $(0,1)$-матриц заданного порядка с заданным перманентом от 0 до 2^n и найдена формула перманента $(-1,1)$-матриц, позволяющая проверять его делимость на степени 2.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в задачах линейной алгебры, комбинаторики, теории графов, теории сложности вычислений, экономики, генетики, квантовой механики.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты опубликованы в 4 работах автора [37, 38, 39, 40] в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI. Автор выступал с докладами по результатам работы на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и на семинаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры.

Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

- XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2014», Москва, 2014.
- XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015», Москва, 2015.
- 4$^{\text{th}}$ International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (MMMA-2015), Москва, Сколково, 2015.
- XXIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2016», Москва, 2016.
- XXIV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 2017.
- XXV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018», Москва, 2018.
- Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (1908–1971), Москва, 2018.
- XXVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва, 2020.

Структура работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 81 страницу. Список литературы включает 40 наименований.

Содержание работы

Введение посвящено краткой истории вопроса, актуальности рассматриваемых проблем, изложению цели работы, методов и основных результатов.

Глава 1. В главе 1 исследуются два вопроса, относящиеся к теме реализации значений перманента $(0,1)$-матриц:

1. Поиск границы подряд идущих значений перманента.

2. Описание и оценка количества значений, превосходящих наибольшее нечётное значение перманента.

В разделе 1.1.1 введены основные определения и обозначения, а в разделе 1.1.2 приведены примеры использования перманента $(0,1)$-матриц.

Пусть $\mathfrak{A}_n$ обозначает множество $(0,1)$-матриц порядка n (обозначение 1.1.3). Граница подряд идущих значений перманента определяется следующим образом.
Определение (1.1.17). Число B_n назовём границей подряд идущих значений перманента на $\mathfrak{A}_n$, если B_n — наименьшее натуральное число с тем свойством, что не существует $A \in \mathfrak{A}_n$ с $\mathrm{per}\,(A) = B_n + 1$.

Из теоремы Бруальди-Ньюмена (1.1.16) следует, что $B_n \geq 2^{n-1}$. Однако, как показано в разделе 1.2.1, этот результат может быть улучшен более чем в 2 раза.
Теорема (1.2.23). При $n \geq 6$ $B_n \geq \frac{85}{64}2^n$.

Всюду далее строки и столбцы матриц называются линиями (определение 1.1.2). В разделе 1.2.2 исследуются значения перманента, превосходящие наибольшее нечётное значение. Для этого сначала доказываются следующие два свойства делимости перманента $(0,1)$-матриц.
Следствие (1.2.31). Пусть p — простое число, $2 \leq p < n$. Матрица с наибольшим на $\mathfrak{A}_n$ не делящимся на p значением перманента имеет в точности $n-p+1$ нулевых

элементов, причём никакие два из них не расположены на одной линии.

Следствие (1.2.32). Пусть j — целое число, $2 \leq j < n$. Матрица с наибольшим на $\mathfrak{A}_n$ не делящимся на $j!$ значением перманента имеет в точности $n-j+1$ нулей, причём никакие два из них не расположены на одной линии.

После этого вычисляются наибольший нечётный перманент и наибольший не кратный 3 перманент. $[x]$ обозначает ближайшее к числу x целое число, а $\{x\}_l = |x-[x]|$ (определение 1.1.5).

Теорема (1.2.33). Наибольшее нечётное значение функции перманета на $\mathfrak{A}_n$ равно $[\frac{(n+1)!}{ne}]$, причём $\{\frac{(n+1)!}{ne}\}_l \leq \frac{1}{n(n+2)}$.

Теорема (1.2.34). Если $n > 1$, то наибольшее не делящееся на 3 значение функции перманента на $\mathfrak{A}_n$ равно $[\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)]$, причём $\{\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)\}_l \leq \frac{4}{n^3-n}$.

Далее эти результаты используются для получения оценки на количество значений перманента, превосходящих наибольшее нечётное значение.

Теорема (1.2.35). При $n \geq 4$ на промежутке $\left(\left[\frac{(n+1)!}{ne}\right], n!\right]$ количество значений функции перманента на множестве матриц $\mathfrak{A}_n$ не превосходит

$$\frac{e-2}{2}((n-1)!+(n-3)!) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Глава 2 посвящена вопросам обращения в 0 и делимости значений перманента $(-1,1)$-матриц. Рассмотрены следующие два вопроса:

1. Зависимость делимости перманента на степени двойки от порядка матрицы.
2. Классификация матриц с перманентом 0 с точностью до преобразований, не меняющих модуль перманента, а именно перестановок линий, домножения линий на (-1) и транспонирования матрицы.

В разделе 2.1.1 введены основные определения и обозначения, а в разделе 2.1.2 приведен пример использования функции перманента $(-1,1)$-матриц в квантовой физике, связывающий перманент с понятием квантовой запутанности.

Множество $(-1,1)$-матриц порядка n обозначим через Ω_n (обозначение 2.1.1). Для данной матрицы $A \in \Omega_n$ количество всевозможных различных наборов (-1) мощности j, таких, что никакие два элемента (-1) из набора не расположены на одной линии, обозначим через k_j (определение 2.2.1 и обозначение 2.2.2). В разделе 2.2.1 получены следующие результаты. Сначала доказана формула для вычисления перманента $(-1,1)$-матрицы.

Лемма (2.2.3). Пусть $A \in \Omega_n$. Тогда

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!.$$

Далее эта формула использована для получения прямого доказательства предложений 2.2.12–2.2.14, а также для получения нового результата, заключаещегося в теореме ниже, где через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(n)$ обозначено множество таких целых неотрицательных чисел m, меньших n, что $n - m$ в своём двоичном представлении имеет ровно $t-1$ единиц, где t определяется неравенствами $2^{t-1} \leq n \leq 2^t - 1$ (определение 2.2.15).

Теорема (2.2.16). Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \leq n < 2^t - 1$, и $\mathfrak{M}(n)$. Для любой $A \in \Omega_n$ верно, что

$$\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-t+2} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{m \in \mathfrak{M}} k_m \,\vdots\, 2.$$

В том же разделе выведено несколько следствий теоремы 2.2.16.

В разделе 2.2.2 с помощью ряда вспомогательных утверждений (леммы 2.2.23–2.2.26, 2.2.28 и 2.2.30, следствие 2.2.27) с точностью до перестановок линий, домножения линий на (-1) и транспонирования классифицированы все $(-1,1)$-матрицы порядка $n = 5$ с перманентом 0 (теорема 2.2.31), а также приведён результат для $n = 4$ (теорема 2.2.29).

Заключение. В заключении перечислены основные результаты работы.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе, поддержку и ценные обсуждения, а также коллективу кафедры высшей алгебры за доброжелательную и творческую атмосферу.

Глава 1

(0,1)-матрицы

1.1 Основные определения и обозначения

1.1.1 Проблема расположения значений перманента на действительной оси

Определение 1.1.1. Пусть A – матрица порядка n над полем действительных чисел. Функция, сопоставляющая матрице A число

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n – группа перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, называется функцией перманента, а само это число – перманентом матрицы A.

Определение 1.1.2. Линиями называют строки и столбцы матриц.

Обозначение 1.1.3. Вслед за Бруальди и Ньюменом [6] через $\mathfrak{A}_n$ обозначим подмножество $(0,1)$-матриц из M_n, то есть матриц с элементами из множества $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$.

Заметим, что перманентами матриц из $\mathfrak{A}_n$ являются целые неотрицательные числа со стандартным отношением порядка.

Обозначение 1.1.4. Матрицу порядка n, все элементы которой равны 1, обозначим J_n.

Определение 1.1.5. Ближайшим целым к вещественному числу x, или целой частью x, назовём такое целое число $[x]$, что $|x - [x]| < \frac{1}{2}$. Для чисел вида $\frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, целая часть не определена. Если целая часть определена, то число $\{x\}_l = |x - [x]|$ мы будем называть меньшей дробной частью x. Нижняя целая часть x — это такое целое число $\lfloor x \rfloor$, что $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Дробной частью вещественного числа x называется число $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Пример 1.1.6. Непосредственно проверяется, что при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ наибольшим значением перманента как функции на $\mathfrak{A}_n$ является $n!$. Это значение достигается на матрице J_n.

Пример 1.1.7. Значения 0 и 1 также достигаются – на нулевой и единичной матрице соответственно.

Пример 1.1.8. Число $n!-1$ не является перманентом ни для какой $(0,1)$-матрицы порядка n.

Утверждение 1.1.9. Наибольший перманент на $\mathfrak{A}_n \backslash \{J_n\}$ равен $n! - (n-1)!$.

Доказательство. Из определения перманента следует, что перманент $(0,1)$-матрицы не увеличивается при замене на ноль любого элемента, равного единице, при условии, что другие элементы остаются неизменны: в сумме $\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ каждое слагаемое равно либо нулю, либо единице, и при замене некоторого элемента 1 в матрице на 0 количество нулевых слагаемых в сумме не убывает. Следовательно, перманент любой матрицы с 2 и более нулевыми элементами не превосходит перманента матрицы с одним нулевым элементом, равного $n! - (n-1)!$. $\square$

Несмотря на схожесть определений детерминанта и перманента, науке не известно ни одного быстрого способа вычисления последнего. Для более детального объяснения нам понадобится следующее определение.

Определение 1.1.10. Задача вида «вычислить $f(x)$», где f – функция из множества $\{0,1\}^*$ конечных последовательностей 0 и 1 в натуральный ряд $\mathbb{N}$, принадлежит *классу сложности* $\#P$, если существует такая недетерминированная машина Тьюринга M, что $f(x)$ совпадает с количеством допускающих состояний M на x для любого $x \in \{0,1\}^*$. Задача называется $\#P$*-сложной*, если к ней за полиномиальное время сводится любая задача класса $\#P$. Если $\#P$-сложная задача находится в классе $\#P$, то она называется $\#P$*-полной*.

Иначе говоря, вычислительная задача принадлежит классу $\#P$, если соответствующая ей задача разрешимости принадлежит классу NP. Вэлиант [32] показал, что задача вычисления перманента $(0,1)$-матриц является $\#P$-полной и, таким образом, что обнаружение способа вычисления перманента за полиномиальное время означало бы, что $P = NP$. Однако ни одного полиномиального алгоритма пока не найдено. Таким образом, целесообразно было бы решить следующую проблему.

Проблема 1.1.11. Какие целые числа из отрезка $[0, n!]$ являются перманентами матриц из $\mathfrak{A}_n$? На каких матрицах эти значения достигаются?

Один из первых содержательных результатов в этом направлении был получен ещё в начале XX века Фробениусом [14] и Кёнигом [20], доказательство в современной терминологии см. в монографии [2] Минка.

Предложение 1.1.12. (Фробениус, 1917, Кёниг, 1936, [2, теорема 2.2]). *Перманент матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$ равен нулю если и только если A содержит нулевую подматрицу размера $r \times s$ с $r + s > n$.*

Аналогичные критерии были позже получены для значений 1, 2 и 3.

Теорема 1.1.13. (Гордон, Моцкин, Уэлч, 1974, [16, теорема 1]). *Перманент матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$ равен 1 тогда и только тогда, когда A равна, с точностью до перестановки строк, столбцов и транспонирования, следующей матрице:*

$$\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Теорема 1.1.14. (Гордон, Моцкин, Уэлч, 1974, [16, теорема 2]). *Перманент матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$ равен 2 тогда и только тогда, когда A равна, с точностью до* *перестановки строк, столбцов и транспонирования, следующей матрице:*

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & * & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
& & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\
& & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & & & \\
& & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& 0 & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

Аналогичный результат для значения 3 функции перманента [16, теорема 3], как и доказательства двух теорем выше, можно найти в работе [16] Гордона, Моцкина и Уэлча.

Если не накладывать ограничений на порядок матрицы, то можно получить следующее утверждение.

Теорема 1.1.15. (Гордон, Моцкин, Уэлч, 1974, [16, теорема 5]). *Пусть* $r(k) := \min\{n : \exists A \in \mathfrak{A}_n \,|\, \mathrm{per}\,(A) = k\}$. *Тогда* $r(k) \leq \lfloor \log_2(k-1) \rfloor + 2$ *для любого* $k \geq 2$.

Т.е. для всякого числа $k \geq 2$ существует $(0,1)$-матрица порядка $n \leq \lfloor \log_2(k-1) \rfloor + 2$ с перманентом k.

Для случая матриц фиксированного порядка известен следующий результат об оценке наименьшего числа, не являющегося значением перманента. Этот результат показывает, что существуют довольно длинные последовательности подряд идущих целых чисел, являющихся перманентами матриц из $\mathfrak{A}_n$.

Теорема 1.1.16. (Бруальди, Ньюмен, 1965, [6, теорема 2.1 и следствие 2.2]). *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и любого целого неотрицательного* $j \leq 2^{n-1}$ *существует такая матрица* $A \in \mathfrak{A}_n$, *что* $\mathrm{per}\,(A) = j$.

Введём следующее определение.

Определение 1.1.17. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число B_n назовём границей подряд идущих значений перманента матриц из $\mathfrak{A}_n$, если B_n — наименьшее натуральное число с тем свойством, что не существует такой матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$, что $\operatorname{per}(A) = B_n + 1$.

Таким образом, теорема 1.1.16 даёт нижнюю оценку для B_n: $B_n \geq 2^{n-1}$. В главе 1 мы улучшим эту оценку, показав, что, начиная с $n = 6$, $B_n \geq \frac{85}{64}2^n$. Поскольку $\frac{85}{64} > 1$, то отсюда следует, что $B_n > 2^n$. Также мы оценим количество значений функции перманента в правой части отрезка $[0, n!]$, подробнее см. в разделе 1.2.2.

1.1.2 Использование перманента $(0, 1)$-матриц

Ниже приведены классические примеры использования функции перманента, которые можно найти, например, в главах 1 и 7 книги [7] Бруальди и Райзера.

Пример 1.1.18. Рассмотрим следующую задачу: имеется n пар ученик-учитель, причём у каждого учителя ровно один ученик, а у каждого ученика ровно один учитель, и требуется рассадить все n пар за круглым столом с $2n$ стульями так, чтобы никто не оказался рядом со своим напарником и любые два соседа имели разный статус (один – ученик, другой – учитель). Обозначим число всех таких рассадок через M_n. Любая такая рассадка однозначно определяется рассадкой учеников на места $1, 3, \ldots, 2n-1$ и последующей рассадкой учителей на оставшиеся места, с запретом сажать учителя справа или слева от его ученика. Следовательно, $M_n = 2 \cdot (n!) \cdot U_n$, где U_n есть количество разрешённых рассадок учителей, не зависящее от выбранной рассадки учеников. Пронумеруем отдельно учительские и ученические стулья номерами от 1 до n так, чтобы учительский и ученический стулья с номером i были соседними. Тогда при любой рассадке учеников множество разрешённых рассадок учителей определяется условием, что учитель не может сидеть на учительских стульях с номерами i и $i + 1$, если его ученик сидит на ученическом стуле с номером i (полагая $n + 1 \equiv 1$). Таким образом, количество разрешённых рассадок учителей равно перманенту $\mathrm{per}\,(V_n)$ следующей матрицы

$$V_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, $M_n = 2 \cdot (n!) \cdot \mathrm{per}\,(V_n)$.

Пример 1.1.19. Рассмотрим компанию, в которой есть n вакансий, и n кандидатов на эти вакансии, про каждого из которых известно, на какие вакансии он подходит. Построим двудольный граф, вершины которого суть вакансии и кандидаты, и между вершиной, соотвествующей некоторой вакансии, и вершиной, соответствующей некоторому кандидату, есть ребро тогда и только тогда, когда этот кандидат подходит на эту вакансию. Рассмотрим соответствующую этому графу $(0,1)$-матрицу A порядка n (матрицу инцидентности вакансий и кандидатов): $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда соответствующая кандидату i вершина соединена ребром с соответствующей вакансии j вершиной. Тогда перманент $\mathrm{per}\,(A)$ полученной матрицы A равен количеству способов трудоустроить всех кандидатов на все вакансии так, чтобы каждый из кандидатов оказался на вакансии, на которую он подходит.

Известно, что определение перманента можно обобщить на случай прямоугольных матриц следующим образом.

Определение 1.1.20. Пусть A – $\mathbb{R}$-матрица размера $m \times n$, где без ограничения общности $m \leq n$. Тогда

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-m} \leq n} \mathrm{per}\,(A_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}),$$

где $A_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}$ обозначает квадратную подматрицу, полученную из A вычёркиванием столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}$.

Такое обобщение определения перманента приводит к следующему обобщению примера 1.1.19.

Пример 1.1.21. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $X_1, X_2, \ldots, X_m$ – набор подмножеств X, не обязательно различных. Элемент $a \in X$ назовём представителем множества X_i, если $a \in X_i$. Системой различных представителей упорядоченного набора множеств $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ называется такой упорядоченный набор элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, что $a_i \in X_i$ при всех i от 1 до m и $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Построим матрицу инцидентности набора $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, т.е. такую $(0, 1)$-матрицу A размера $m \times n$, что $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $j \in X_i$. Тогда, согласно теореме 1.2.3 [7], количество систем различных представителей набора $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ равно перманенту матрицы A. Подробнее об этой задаче и решении см. также [17].

1.2 Граница подряд идущих значений как функция размера матрицы

1.2.1 Оценка снизу

1.2.1.1 Похожие матрицы и свойства их перманента

Нижеследующая конструкция применима для построения матриц с заданным значением перманента.

Определение 1.2.1. Назовём две матрицы похожими, если после применения перестановок линий и, быть может, транспонирования к первой из них полученная матрица отличается от второй лишь по последней строке. Отметим, что таким образом определённое отношение похожести рефлексивно и симметрично, но, вообще говоря, не транзитивно.

Пример 1.2.2. Примеры пар похожих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2.3. Примеры пар непохожих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.2.4. *Пусть матрицы* $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_n$ *похожи, и пусть* $\mathrm{per}\,(A_1) = x$, $\mathrm{per}\,(A_2) = y$. *Тогда существуют такие* $X, Y, Z \in \mathfrak{A}_{n+1}$, *что* $\mathrm{per}\,(X) = 2x$, $\mathrm{per}\,(Y) = 2y$, $\mathrm{per}\,(Z) = x + y$ *и матрица* Z *похожа и на* X, *и на* Y.

Доказательство. Заметим, что перманент не меняется при перестановках линий и транспонировании.

В соответствии с определением похожих матриц, можно без ограничения общности считать, что A_1 и A_2 отличаются только по последней строке, то есть мы можем записать их следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n} \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие три матрицы из $\mathfrak{A}_{n+1}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1\,n} & \dots & a_{n-1\,n} \\ 1 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 1 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1\,n} & \dots & a_{n-1\,n} \\ 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \\ 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1\,n} & \dots & a_{n-1\,n} \\ 1 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Видно, что по построению Z похожа как на X, так и на Y. Согласно формуле разложения перманента по столбцу, имеем $\mathrm{per}\,(X) = \mathrm{per}\,(A_1) + \mathrm{per}\,(A_1) = 2x$, $\mathrm{per}\,(Y) = \mathrm{per}\,(A_2) + \mathrm{per}\,(A_2) = 2y$, $\mathrm{per}\,(Z) = \mathrm{per}\,(A_1) + \mathrm{per}\,(A_2) = x + y$. $\square$

Следующее следствие позволяет строить матрицы с подряд идущими значениями перманента.

Следствие 1.2.5. *Пусть* $(n, Z) \in \mathbb{N}^2$*, и для каждого целого* x *в промежутке* $0 \leq x \leq Z - 1$ *существует такая пара похожих матриц* $A_x, B_x \in \mathfrak{A}_n$*, что* $\mathrm{per}\,(A_x) = x, \mathrm{per}\,(B_x) = x + 1$*. Тогда для всякого целого* z *в промежутке* $0 \leq z \leq 2Z - 1$ *существует пара таких похожих матриц* $C_z, D_z \in \mathfrak{A}_{n+1}$*, что* $\mathrm{per}\,(C_z) = z, \mathrm{per}\,(D_z) = z + 1$.

Доказательство. Для всех таких x, что $0 \leq x \leq Z - 1$, применим лемму 1.2.4 к матрицам A_x, B_x, и получим две пары похожих матриц (X, Z) и $(Z, Y) \in \mathfrak{A}^2_{n+1}$, где $\mathrm{per}\,(X) = 2x$, $\mathrm{per}\,(Z) = 2x + 1$, $\mathrm{per}\,(Y) = 2x + 2$. Далее, для всякой пары $(z, z+1)$ последовательных целых чисел в промежутке $[0, 2Z - 1]$ верно, что одно из этих чисел чётно. Если чётно z, то, взяв $x = \frac{1}{2}z$, получим, что искомая пара — это $X, Z \in \mathfrak{A}_{n+1}$. Если же чётно $z + 1$, то, полагая $x = \frac{1}{2}(z + 1)$, получаем, что искомой парой похожих матриц с перманентами z и $z+1$ являются соответственно $Z, Y \in \mathfrak{A}_{n+1}$, и, таким образом, следствие 1.2.5 доказано. $\square$

Следствие 1.2.6. *Если выполнены условия предыдущего следствия, то для любого натурального* $k \geq 0$ *граница* B_{n+k} *подряд идущих значений перманента матриц из* $\mathfrak{A}_{n+k}$ *превосходит* $2^k Z - 1$.

Доказательство. Достаточно k раз подряд применить следствие 1.2.5. $\square$

Пример 1.2.7. Пара чисел ($n = 1$, $Z = 1$), очевидно, удовлетворяет условиям следствия 1.2.5: $\mathrm{per}\,(0) = 0$, $\mathrm{per}\,(1) = 1$.

Замечание 1.2.8. Применение следствия 1.2.6 к паре $(n = 1,\ Z = 1)$ доказывает теорему 1.1.16.

1.2.1.2 Вычисление перманентов некоторых последовательностей похожих матриц

Следствие 1.2.6 позволяет строить более длинные последовательности подряд идущих значений перманента. Например, как уже было отмечено в замечании 1.2.8, взяв в качестве исходной пары чисел пару $(n = 1,\ Z = 1)$, можно получить результат Бруальди и Ньюмена. Ниже мы построим несколько семейств похожих матриц с последовательными значениями перманента с той целью, чтобы далее применить к ним следствие 1.2.6 и улучшить оценку границы подряд идущих значений.

Пример 1.2.9. Рассмотрим четыре следующие матрицы порядка 4:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 8, 9, 10, 11 соответственно. Из них можно составить 5 пар похожих матриц: $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_3\}$, $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_4\}$, $\{A_3, A_4\}$.

Пример 1.2.10. Применяя лемму 1.2.4, построим нижеследующие шесть матриц порядка 5. Применяя лемму 1.2.4 к паре $\{A_1, A_2\}$, получаем три матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с перманентами $\mathrm{per}\,(B_1) = 16$, $\mathrm{per}\,(B_2) = 17$, $\mathrm{per}\,(B_3) = 18$. Применяя ту же лемму к паре $\{A_3, A_4\}$, находим

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

с перманентами $\mathrm{per}\,(B_4) = 20$, $\mathrm{per}\,(B_5) = 21$, $\mathrm{per}\,(B_6) = 22$. Видно, что пары $\{B_1, B_2\}$, $\{B_2, B_3\}$, $\{B_4, B_5\}$ и $\{B_5, B_6\}$ являются парами похожих матриц.

Пример 1.2.11. Рассмотрим следующие две пары матриц:

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 18, 19; 19, 20 соответственно. $\{B_7, B_8\}$ и $\{B_9, B_{10}\}$ — две пары похожих матриц.

Определение 1.2.12. Назовём упорядоченное множество (0,1)-матриц порядка n цепью похожих матриц, если любые две соседние матрицы в нём похожи, и перманент следующей на единицу больше перманента (непосредственно) предыдущей.

Определение 1.2.13. Назовём упорядоченное множество (0,1)-матриц порядка n цепью матриц или просто цепью, если любые две соседние матрицы в нём либо имеют одинаковый перманент, либо являются соседями (с тем же порядком следования) в некоторой цепи похожих матриц.

Пример 1.2.14. Всякая $(0,1)$-матрица A размера $(n-1)\times n$ содержит n подматриц из $\mathfrak{A}_{n-1}$. Добавляя к A строку, мы можем получить 2^n различных $(0,1)$-матриц порядка n, перманенты которых представляют собой всевозможные суммы перманентов подматриц порядка $(n-1)$ матрицы A. По построению любые две полученные таким образом матрицы порядка n будут похожи друг на друга. Рассмотрим следующую матрицу размера 4×5:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У неё пять подматриц порядка 4:

$$A_{5,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A_{5,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A_{5,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{5,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A_{5,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 11, 7, 7, 6 и 5 соответственно. Следовательно, на множестве матриц порядка 5, полученных из A_5 добавлением строки, перманент достигает следующих значений:

$$0, 5, 6, 7, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 36.$$

Из этих матриц порядка 5 нам понадобятся:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

перманенты которых равны 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 36 соответственно. Пользуясь перечисленными выше похожими матрицами порядка 5, мы можем построить несколько цепей похожих матриц порядка 6, как в приведённых ниже примерах.

Пример 1.2.15. Матрицы A_{11}, A_{12}, A_{13} и A_{14} дают нам следующую цепь

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с перманентами

$$44 = 22 + 22, 45 = 22 + 23, 46 = 23 + 23, 47 = 23 + 24,$$

$$48 = 24 + 24, 49 = 24 + 25, 50 = 25 + 25$$

соответственно.

Пример 1.2.16. Используя матрицы A_{10}, A_{16} и A_{17}, построим следующую цепь (точнее, пару) похожих матриц:

$$B_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с перманентами

$$50 = 20 + 30, 51 = 20 + 31$$

соответственно.

Пример 1.2.17. Следующая цепь похожих матриц получена из A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} и A_{18}:

$$B_{20}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},B_{21}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},B_{22}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$B_{23}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},B_{24}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

перманенты равны

$$52=36+16,53=36+17,54=36+18,55=36+19,56=36+20$$

соответственно.

Пример 1.2.18. Из матриц A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} и A_{18} получаем цепь похожих матриц

$$B_{25}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},B_{26}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$B_{27} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{28} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с перманентами

$$58 = 36 + 22, 59 = 36 + 23, 60 = 36 + 24, 61 = 36 + 25$$

соответственно.

Пример 1.2.19. Наконец, матрицы A_{15}, A_{16}, A_{17} и A_{18} дают нам цепь

$$B_{29} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

похожих матриц с перманентами

$$65 = 36 + 29, 66 = 36 + 30, 67 = 36 + 31$$

соответственно.

Пример 1.2.20. По аналогии с примером 1.2.14, рассмотрим следующую матрицу размера 4×5:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У неё 5 подматриц порядка 4 с перманентами 8, 10, 10, 11, 11. Следовательно, из неё можно получить матрицы порядка 5 с перманентами 28, 29, 30, 31, 32, 39, 40, 42, 50. Вот они, в порядке перечисления их перманентов:

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

Из них можно построить две цепи матриц порядка 6: с перманентами от 67 до 74 и от 78 до 82. Первая цепь:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты равны соответственно 67, 68, 69, 70, 71; 71, 72, 73, 74. Вторая цепь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты равны 78, 79, 80, 81, 82 соответственно.

Пример 1.2.21. Помимо перечисленных выше цепей матриц, нам понадобятся в дальнейшем также следующие пары похожих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с перманентами 74, 75; 75, 76; 76, 77; 77, 78; 82, 83; 83, 84; 84, 85 соответственно.

1.2.1.3 Доказательство основного результата

Лемма 1.2.22. *Пара чисел $n = 6,\ Z = 85$ удовлетворяет условиям следствия 1.2.5, то есть для всякого $x,\ 0 \le x \le 84$, существует такая пара похожих матриц $A_x, B_x \in \mathfrak{A}_6$, что* $\operatorname{per}(A_x) = x, \operatorname{per}(B_x) = x + 1$.

Доказательство. Применим следствие 1.2.6 при $k = 4$ к паре $n = 1,\ Z = 1$, см. пример 1.2.7. Получим, кроме прочего, что пара $(n = 5,\ Z = 16)$ тоже удовлетворяет условиям следствия 1.2.5. Примеры 1.2.10 и 1.2.11 дают нам пары похожих матриц для каждой из шести пар соседних значений перманента от 16 до 22 при $n = 5$. Значит, согласно следствию 1.2.5, пара чисел $(n = 6,\ Z = 44)$ также удовлетворяет условиям следствия 1.2.5. Примеры 1.2.14–1.2.19 дают нам пять цепей похожих матриц с последовательными значениями перманента: 44–50, 50–51, 52–56, 58–61 и 65–67. Примеры 1.2.20 и 1.2.21 дают нам одну цепь матриц с перманентами от 67 до 85 включительно.

Теперь рассмотрим следующие две матрицы размера 4×5:

$$A_{19} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты их подматриц порядка 4 равны 11, 8, 7, 7, 6 и 10, 8, 7, 7, 6 соответственно. Следовательно, перманенты матриц, полученных из A_{19} и A_{20} добавлением строки, подобно тому, как это было сделано в примере 1.2.14, могут принимать следующие значения (соответственно):

$$0, 6, 7, 8, 11, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 31, 32, 33, 39;$$

$$0, 6, 7, 8, 10, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 30, 31, 32, 38.$$

Следовательно, используя A_{19}, мы можем построить цепи похожих матриц с перманентами 51-52, 56-58 и 62-65. Эти цепи приведены ниже (разделены знаком ";"):

$$B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{35} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{36} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{37} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{38} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{39} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{40} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты этих матриц равны 51, 52, 56, 57, 58, 62, 63, 64, 65 соответственно. Из A_{20} можем сконструировать пару похожих матриц с перманентами 61 и 62:

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы построили цепи со значениями перманента 0-44, 44-50, 50-51, 51-52, 52-56, 56-58, 58-61, 61-62, 62-65, 65-67 и 67-85. Объединив их, получим цепь со значениями перманента 0-85. Это и завершает доказательство леммы. □

Теорема 1.2.23. *Для любого $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$, верно, что $B_n \geq \frac{85}{64} 2^n$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2.22, мы можем применить следствие 1.2.6 в случае $n = 6$, $Z = 85$. Тогда для любого $m \geq 6$ имеем

$$B_m = B_{6+k} \geq 2^k \cdot 85 = \frac{85}{64} 2^m.$$

□

Следствие 1.2.24. *При $n \geq 6$ $B_n > 2^n$.*

Заметим, что в оригинальной работе [40] был приведён немного более слабый результат: было доказано, что $B_n \geq \frac{67}{64} 2^n$. Однако через некоторое время после публикации были построены цепи матриц из примеров 1.2.20 и 1.2.21, что дало возможность усилить результат.

Замечание 1.2.25. Существует также цепь похожих матриц с перманентами от 86 до 94 включительно. Она приведена ниже:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты равны 86, 87; 87, 88; 88, 89; 89, 90; 90, 91; 91, 92; 92, 93; 93, 94 соответственно.

Вопрос 1.2.26. Существует ли пара похожих матриц с перманентами 85 и 86?

1.2.2 Значения перманента, близкие к максимальному

В этом разделе мы исследуем значения функции перманента, близкие к $n!$, а именно, как будет видно далее, превосходящие $\frac{n!}{3}$. Вычислив наибольшие значения, не делящиеся на 2 и на 3, мы затем даём верхнюю оценку для количества значений в промежутке между наибольшим нечётным перманентом и $n!$. Для этого нам понадобятся следующие понятия.

Определение 1.2.27. Обобщённая диагональ квадратной матрицы A — это набор пар индексов

$$\{(1, \sigma(1)), \ldots, (n, \sigma(n))\},$$

где $\sigma \in S_n$.

Определение 1.2.28. Нулевая частичная обобщённая диагональ длины j — это такое подмножество $\{(i_1, l_1), \ldots, (i_j, l_j)\}$ обобщённой диагонали матрицы A, что $a_{i_1 l_1} = \ldots = a_{i_j l_j} = 0$.

Обозначение 1.2.29. Обозначим через k_j, $j = 1, \dots, n$, количество различных нулевых частичных обобщённых диагоналей длины j. Будем считать, что $k_0 = 1$, а нулевая частичная обобщённая диагональ длины 0 есть пустое множество.

Лемма 1.2.30. *Пусть $A \in \mathfrak{A}_n$. Тогда*

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!. \tag{1}$$

Доказательство. 1. По определению,

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

Здесь каждое слагаемое $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ взаимно-однозначно соответствует некоторой обобщённой диагонали и равняется либо единице, либо нулю, в зависимости от того, есть ли на этой обобщённой диагонали хоть один нулевой элемент матрицы или там их нет.

Рассмотрим правую часть (1) и докажем, что она равна количеству ненулевых слагаемых в правой части (2).

2. Всякая нулевая частичная обобщённая диагональ длины j может быть дополнена до обобщённой диагонали $(n-j)!$ различными способами, то есть содержится в $(n-j)!$ различных обобщённых диагоналях. Дополним каждую нулевую частичную обобщённую диагональ длины j до полной обобщённой диагонали всеми возможными способами и разметим все полученные диагонали, чтобы различать их. Получим множество K_j размеченных обобщённых диагоналей, содержащих все нулевые частичные обобщённые диагонали длины j. Мощность K_j равна $|K_j| = k_j \cdot (n-j)!$. Заметим при этом, что не все элементы K_j отличаются как обобщённые диагонали матрицы A.

3. Пусть D_m — произвольная обобщённая диагональ матрицы A, содержащая m нулей и $n - m$ единиц. По определению, D_m содержит в точности $\binom{m}{j}$ различных нулевых частичных обобщённых диагоналей длины j. Можно считать, что D_m содержит $1 = \binom{m}{0}$ нулевую частичную обобщённую диагональ длины 0. Таким образом, каждая D_m содержится в K_j в количестве $\binom{m}{j}$, $j = 0, \dots, n$. (Здесь мы полагаем $\binom{m}{j} = 0$ при $m < j$). Пусть $\mathfrak{D}_m$ обозначает множество различных обобщённых диагоналей матрицы A, содержащих ровно m нулей.

4. Для правой части (1) имеем

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot k_j \cdot (n-j)! = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot |K_j| = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{D_m \in \mathfrak{D}_m} \binom{m}{j}\right). \qquad (3)$$

5. Согласно пункту 3, в правой части (3) посчитана каждая обобщённая диагональ матрицы A. Вычислим, с каким коэффициентом. Меняя порядок суммирования, заключаем, что для всякого m и каждой $D_m \in \mathfrak{D}_m$ её коэффициент в сумме (3) равен

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{m}{j} = \delta_0^m,$$

где δ_j^i — символ Кронекера. То есть, если $\mathcal{D}$ обозначает множество всех обобщённых диагоналей матрицы A, то правая часть (3) и , следовательно, правая часть (1) обе равны $\sum\limits_{D_m \in \mathcal{D}} \delta_0^m$. По пункту 1 это и есть значение перманента. □

Следствие 1.2.31. *Пусть p — простое число, $2 \leq p < n$, $n \in \mathbb{N}$. Матрица с наибольшим не делящимся на p значением перманента имеет в точности $n-p+1$ нулевых элементов, причём никакие два из них не расположены на одной линии.*

Доказательство. Заметим, что если $k_{n-p+1} = 0$, то количество нулевых частичных обобщённых диагоналей длины более $n-p+1$ тоже равно нулю, и, следовательно, каждое слагаемое в (1) делится на p. То есть, если перманент не делится на p, то $k_{n-p+1} > 0$. Рассмотрим матрицу с ровно $n-p+1$ нулём на главной диагонали и единицами на всех остальных позициях. Так как все нули находятся на одной диагонали и $n > 2$, то для каждой единицы существует не менее одной обобщённой диагонали без нулей, содержащей эту единицу. Следовательно, при замене любой единицы на ноль перманент уменьшится. Значит, значение перманента рассматриваемой матрицы является наибольшим не делящимся на p значением. □

Следствие 1.2.32. *Пусть j — целое число, $2 \leq j < n$. Тогда матрица порядка n с перманентом, наибольшим среди не делящихся на $j!$, имеет в точности $n-j+1$ нулей, причём никакие два из них не расположены на одной линии.*

Доказательство. Заметим, что если $k_{n-j+1} = 0$, то количество нулевых частичных обобщённых диагоналей длины более $n - j + 1$ тоже равно нулю, и, следовательно, каждое слагаемое в (1) делится на $j!$. То есть, если перманент не делится на $j!$, то $k_{n-j+1} > 0$. Рассмотрим матрицу с ровно $n - j + 1$ нулём на главной диагонали и единицами на всех остальных позициях. Так как все нули находятся на одной диагонали и $n > 2$, то для каждой единицы существует не менее одной обобщённой диагонали без нулей, содержащей эту единицу. Следовательно, при замене любой единицы на ноль перманент уменьшится. Значит, значение перманента рассматриваемой матрицы является наибольшим не делящимся на $j!$ значением. $\square$

В следующих ниже теоремах 1.2.33 и 1.2.34 используется обозначение, введённое в определении 1.1.5.

Теорема 1.2.33. *Наибольшее нечётное значение функции перманета на* $\mathfrak{A}_n$ *равно* $[\frac{(n+1)!}{ne}]$, *причём* $\{\frac{(n+1)!}{ne}\}_l \leq \frac{1}{n(n+2)}$.

Доказательство. Согласно следствию 1.2.31, при $n > 2$ матрица A с наибольшим не делящимся на 2 значением перманента имеет ровно $n - 1$ нулевых элементов, никакие два из которых не расположены на одной линии, поэтому будем считать что все нули расположены на главной диагонали матрицы. Тогда $k_j = \binom{n-1}{j}$, и формула (1) принимает следующий вид:

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$

Рассмотрим сначала случай $n > 3$. Применив тождество

$$\binom{n-1}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} - \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}, \;\; 2 \leq k \leq n-1,$$

преобразуем всю сумму, кроме первых двух слагаемых, в следующую комбинацию

$n!$ и $(n-1)!$ с некоторыми коэффициентами:

$$\sum_{k=2}^{n-1} t_k = \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! =$$
$$= \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}(n-k)! - \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}(n-k)! =$$
$$= n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}.$$

Первые два слагаемых исходной суммы, не задействованные в предыдущем преобразовании, дают $(n-1)!$:

$$\sum_{k=0}^{1} t_k = \sum_{k=0,1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! = n! - (n-1)(n-1)! = (n-1)!.$$

Таким образом, получаем

$$\mathrm{per}\,(A) = (n-1)! + n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} = n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

К правой части последнего равенства добавим $0 \equiv \frac{n!}{n!}(-1)^n + \frac{(n-1)!}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$:

$$n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = n! s_n + (n-1)! s_{n-1},$$

где

$$s_j = \sum_{k=2}^{j} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Заменяя s_n и s_{n-1} на e^{-1}, получаем

$$\mathrm{per}\,(A) = \frac{(n+1)!}{ne} - \varepsilon_n.$$

Вычислим ε_n.

$$\varepsilon_n = \left(e^{-1} - s_n\right) n! + \left(e^{-1} - s_{n-1}\right)(n-1)!$$

Используя представление e^{-1} в виде ряда Тейлора e^x при $x = -1$, получаем

$$\left(e^{-1} - s_n\right) n! + \left(e^{-1} - s_{n-1}\right) (n-1)! = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{n+l} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{n+l}.$$

Применяя тождество

$$0 \equiv \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=0,1} (-1)^{n+k} \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{n+l}$$

(то есть первые два члена второго ряда в сумме с первым членом первого ряда дают ноль), получаем

$$|\varepsilon_n| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{n+k} \left(\prod_{l=0}^{k} \frac{1}{n+l} + \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{n+l} \right) \right|.$$

Так как

$$\prod_{l=0}^{k} \frac{1}{n+l} + \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{n+l} = \frac{1}{n} \prod_{l=2}^{k} \frac{1}{n+k}$$

для любого $k \geq 2$ и любого n, то

$$|\varepsilon_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{n+k} \prod_{l=2}^{k} \frac{1}{n+l} \right| < \frac{1}{n(n+2)}.$$

Следовательно, для $n > 3$ имеем $\operatorname{per}(A) = [\frac{(n+1)!}{ne}]$ и $|\varepsilon_n| = \{\frac{(n+1)!}{ne}\}_l \leq \frac{1}{n(n+2)}$. Теперь заметим, что при $n = 1, 2, 3$ утверждение теоремы также выполняется:

$$\left[\frac{(1+1)!}{e}\right] = 1, \ \left[\frac{(2+1)!}{2e}\right] = \left[\frac{3}{e}\right] = 1, \ \left[\frac{(3+1)!}{3e}\right] = \left[\frac{8}{e}\right] = 3,$$

эти значения совпадают со значениями, полученными по формуле (1) при $k_j = \binom{n-1}{j}$, $n = 1, 2, 3$, и соответствующие меньшие дробные части удовлетворяют неравенству в утверждении теоремы. □

Теорема 1.2.34. *Если $n > 1$, то наибольшее не делящееся на 3 значение функции перманента на $\mathfrak{A}_n$ равно $[\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)]$, причём $\{\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)\}_l \leq \frac{4}{n^3-n}$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущего утверждения, согласно следствию 1.2.31, при $n > 2$ матрица A с наибольшим не делящимся на 3 значением перманента имеет ровно $n-2$ нулей, никакие два из которых не расположены на одной линии, поэтому мы можем считать, что все нули расположены на главной диагонали матрицы. Заметим, что тогда $k_j = \binom{n-2}{j}$, и формула (1) принимает следующий вид:

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} (n-k)! \equiv \sum_{k=0}^{n-2} t_k.$$

Сначала рассмотрим случай $n > 5$. Применяя тождество

$$\binom{n-2}{k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} - 2\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-2)!}$$

$(3 \le k \le n-2)$, преобразуем всю сумму, кроме первых трёх слагаемых, в следующую комбинациюе $n!$, $(n-1)!$ и $(n-2)!$ с некоторыми коэффициентами:

$$\sum_{k=3}^{n-2} t_k = \sum_{k=3}^{n-2} (-1)^k \frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}(n-k)! -$$
$$-2\sum_{k=3}^{n-2}(-1)^k \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}(n-k)! + \sum_{k=3}^{n-2}(-1)^k\frac{(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-2)!}(n-k)! =$$
$$= n!\sum_{k=3}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} - 2(n-1)!\sum_{k=3}^{n-2}\frac{(-1)^k}{(k-1)!} + (n-2)!\sum_{k=3}^{n-2}\frac{(-1)^k}{(k-2)!}.$$

А первые три слагаемых исходной суммы преобразуем следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{3} t_k = n! - (n-2)(n-1)! + \frac{(n-2)(n-3)}{2}(n-2)! = 2(n-1)! + \frac{n!}{2} -$$
$$-2(n-1)! + (n-2)! = \frac{n!}{2} + (n-2)!.$$

Суммируя всё преобразованное выше, имеем

$$\operatorname{per}(A) = n!\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} + 2(n-1)!\sum_{k=2}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)!\sum_{k=2}^{n-4}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Как и в предыдущем доказательстве, расширим пределы суммирования, добавляя шесть слагаемых, сумма которых равна нулю:

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(A) = n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + 2(n-1)!\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)!\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} = \\ = n!s_n + 2(n-1)!s_{n-1} + (n-2)!s_{n-2},\end{aligned}$$

и заменим s_n, s_{n-1} и s_{n-2} на ряд Тейлора для e^{-1}:

$$\operatorname{per}(A) = \frac{n! + 2(n-1)! + (n-2)!}{e} - \varepsilon_n = \frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1) - \varepsilon_n.$$

Вычислим ε_n:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = (e^{-1} - s_n)n! + 2(e^{-1} - s_{n-1})(n-1)! + (e^{-1} - s_{n-2})(n-2)! = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(n+1)\cdots(n+k)} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{n\cdots(n+k)} + \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(n-1)\cdots(n+k)}.\end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=1,2}\frac{(-1)^{n+k}}{(n+1)\cdots(n+k)} + 2\sum_{k=0,1}\frac{(-1)^{n+k}}{n\cdots(n+k)} + \sum_{k=-1,0}\frac{(-1)^{n+k}}{(n-1)\cdots(n+k)} = 0,$$

то

$$|\varepsilon_n| = \left|\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(n+1)\cdots(n+k)} + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{n\cdots(n+k)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(n-1)\cdots(n+k)}\right|.$$

Первое слагаемое каждого из последних трёх рядов превосходит по абсолютной величине сумму всего соответствующего ряда; кроме того, первое слагаемое третьего ряда больше по модулю первых слагаемых двух других рядов. Значит,

$$|\varepsilon_n| < \frac{4}{(n-1)n(n+1)}.$$

Следовательно, при $n > 5$ имеем $\operatorname{per}(A) = [\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)]$ и $|\varepsilon_n| = \{\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)\}_l < \frac{4}{n^3-n}$. Теперь заметим, что при $n = 2, 3, 4, 5$ утверждение теоремы тоже выполняется:

$$[\frac{1}{e}(4+2-1)] = 1,\ [\frac{1}{e}(9+3-1)] = 4,\ [\frac{2}{e}(16+4-1)] = 14,\ [\frac{6}{e}(25+5-1)] = 64,$$

эти значения совпадают с вычисленными непосредственно по формуле (1) при $k_j = \binom{n-2}{j}$, $n = 2, 3, 4, 5$, и соответствующие меньшие дробные части удовлетворяют неравенству из условия теоремы. $\square$

Теперь дадим верхнюю оценку для количества значений перманента между наибольшим нечётным перманентом и $n!$.

Теорема 1.2.35. *При $n \geq 4$ на промежутке $\left(\left[\frac{(n+1)!}{ne}\right], n!\right]$ количество значений функции перманента на множестве матриц $\mathfrak{A}_n$ не превосходит*

$$\frac{e-2}{2}((n-1)! + (n-3)!) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую матрицу порядка n:

$$\begin{pmatrix} n! & -\binom{n-1}{1}(n-1)! & \binom{n-1}{2}(n-2)! & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}2! & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} \\ n! & -\binom{n-2}{1}(n-1)! & \binom{n-2}{2}(n-2)! & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}2! & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n! & -\binom{2}{1}(n-1)! & \binom{2}{2}(n-2)! & \dots & 0 & 0 \\ n! & -\binom{1}{1}(n-1)! & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n! & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Её элемент с парой индексов (i, j) равен $(-1)^{j-1}\binom{n-i}{j-1}(n-j+1)!$ при $i + j \leq n + 1$, и равен 0 в противном случае.

Обозначим через A_j сумму элементов её j-й строки R_j, $1 \leq j \leq n$. Согласно следствию 1.2.32, A_j является наибольшим не делящимся на $(j+1)!$ значением перманента на $\mathfrak{A}_n$. Также, из следствия 1.2.32 нам известно, что $A_{j-1} < A_j$. Эти два соображения позволяют нам сделать первый шаг доказательства.

1. Первый шаг: для всех k, $2 \leq k \leq n$, оцениваем количество значений функции перманента между A_{k-1} и A_k, и складываем полученные оценки. В качестве верхней оценки для количества значений функции перманента мы берём количество делящихся на $k!$ целых чисел между A_{k-1} и A_k:

$$|\{\mathrm{per}\,(B) \ : \ A_{k-1} < per(B) \leq A_k\}| \leq \frac{1}{k!}(A_k - (A_{k-1} - k! + (k-1)!))$$

если k и n одной чётности, и

$$|\{\mathrm{per}\,(B)\ :\ A_{k-1} < per(B) \leq A_k\}| \leq \frac{1}{k!}(A_k - (A_{k-1} - (k-1)!))$$

если они разной чётности. Таким образом, количество значений функции перманента между A_1 и $A_n = n!$ не превосходит

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A_2 - A_1 + 2 - 1) + \frac{1}{6}(A_3 - A_2 + 2) + \ldots + \frac{1}{n!}(A_n - A_{n-1} + n! - (n-1)!) = \\ &= \frac{1}{2}(A_2 - A_1) + \frac{1}{6}(A_3 - A_2) + \ldots + \frac{1}{n!}(A_n - A_{n-1}) + \frac{n}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \\ &= S + \frac{n}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned} \tag{5}$$

если n делится на 2, и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A_2 - A_1 + 1) + \frac{1}{6}(A_3 - A_2 + 6 - 2) + \ldots + \frac{1}{n!}(A_n - A_{n-1} + n! - (n-1)!) = \\ &= \frac{1}{2}(A_2 - A_1) + \frac{1}{6}(A_3 - A_2) + \ldots + \frac{1}{n!}(A_n - A_{n-1}) + \frac{n-1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \\ &= S + \frac{n-1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned} \tag{6}$$

если не делится, где

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) \frac{1}{(k+1)!}.$$

2. На втором шаге оценим S. Рассмотрим матрицу размера $n-1 \times n$ со строками вида

$$\frac{1}{(i+1)!}(R_{i+1} - R_i),$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(n-1)! & -\frac{1}{2}\binom{n-2}{1}(n-2)! & \frac{1}{2}\binom{n-2}{2}(n-3)! & \ldots & \frac{1}{2}(-1)^{n-3}\binom{n-2}{n-3}2! & \frac{1}{2}(-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2} \\ 0 & \frac{1}{6}(n-1)! & -\frac{1}{6}\binom{n-3}{1}(n-2)! & \frac{1}{6}\binom{n-3}{2}(n-3)! & \ldots & \frac{1}{6}(-1)^{n-3}\binom{n-3}{n-3}2! & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(n-2)!}(n-1)! & -\frac{1}{(n-2)!}\binom{2}{1}(n-2)! & \frac{1}{(n-2)!}\binom{2}{2}(n-3)! & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n-1)!}(n-1)! & -\frac{1}{(n-1)!}\binom{1}{1}(n-2)! & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}(n-1)! & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Её элемент с номерами (i,j) равен 0, если $j=1$ или $i+j>n+1$, и равен

$$(-1)^{j-1}\frac{1}{(i+1)!}\binom{n-i-1}{j-2}(n-j+1)!$$

если $j>1$ и $i+j\le n+1$. Заметим, что ненулевые элементы любой строки l этой матрицы не возрастают по абсолютной величине слева направо, так как

$$\binom{n-l}{k+1}(n-k-2)!\le\binom{n-l}{k}(n-k-1)!.$$

Значит, сумма S_3 элементов четырёх левых столбцов матрицы (7) не меньше, чем сумма всех элементов матрицы:

$$S_3\ge\frac{1}{2}(A_2-A_1)+\ldots+\frac{1}{n!}(A_n-A_{n-1})=S. \tag{8}$$

3. Вычислим S_3.

$$S_3=(n-1)!\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}-(n-2)!\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!}\binom{n-k}{1}+(n-3)!\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k!}\binom{n-k}{2}=$$
$$=(n-1)!\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}-(n-2)!\sum_{k=2}^{n-1}\frac{n-k}{k!}+\frac{1}{2}(n-3)!\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(n-k)(n-k-1)}{k!}.$$

Здесь и далее считаем, что если нижний предел суммирования больше верхнего, то сумма равна нулю. Применяя следующие два тождества

$$\frac{n-k}{k!}=\frac{n}{k!}-\frac{1}{(k-1)!}\ \text{ and }\ \frac{(n-k)(n-k-1)}{k!}=\frac{n(n-1)}{k!}-\frac{2(n-1)}{(k-1)!}+\frac{1}{(k-2)!},$$

преобразуем второе и третье слагаемые S_3 (то есть $(n-2)!$ и $(n-3)!$ с некоторыми коэффициентами):

$$S_3=(n-1)!\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}-(n-2)!\left(n\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k!}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}(n-3)!\left(n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k!}-2(n-1)\sum_{k=1}^{n-3}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{n-4}\frac{1}{k!}\right).$$

Далее, представляя каждую сумму вида $\sum_{k=x}^{y}$ как разность между экспонентой и остатком её ряда Тейлора, получаем

$$S_3=(n-1)!\left(e-2-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)-(n-2)!\left(n(e-2)-n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}-(e-1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{2}(n-3)!\left(n(n-1)(e-2)-n(n-1)\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{1}{k!}-2(n-1)(e-1)+\right.$$
$$\left.+2(n-1)\sum_{k=n-2}^{\infty}\frac{1}{k!}+e-\sum_{k=n-3}^{\infty}\frac{1}{k!}\right).$$

Раскроем скобки вокруг коэффициентов факториалов $(n-1)!$, $(n-2)!$ и $(n-3)!$, и обозначим через r_n сумму всех появившихся членов, содержащих бесконечное суммирование:

$$r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(n-2)!n}{k!}-\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-2)!}{k!}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-3)!n(n-1)}{k!}+\sum_{k=n-2}^{\infty}\frac{(n-3)!(n-1)}{k!}-\frac{1}{2}\sum_{k=n-3}^{\infty}\frac{(n-3)!}{k!}. \quad (9)$$

Таким образом,

$$S_3-r_n=$$
$$=(n-1)!(e-2)-(n-2)!(n(e-2)-(e-1))+\frac{1}{2}(n-3)!(n(n-1)(e-2)-2(n-1)(e-1)+e).$$

Используя это представление, а также тождества

$$(n-2)!(n(e-2)-(e-1))=(n-1)!(e-2)-(n-2)!$$

и

$$\frac{1}{2}(n-3)!(n(n-1)(e-2)-2(n-1)(e-1)+e)=\frac{e-2}{2}(n-1)!-(n-2)!+\frac{e-2}{2}(n-3)!,$$

преобразуем S_3:

$$S_3=(n-1)!(e-2)-(n-1)!(e-2)+(n-2)!+\frac{e-2}{2}(n-1)!-(n-2)!+$$
$$+\frac{e-2}{2}(n-3)!+r_n=\frac{e-2}{2}((n-1)!+(n-3)!)+r_n.$$

Теперь преобразуем r_n с целью сравнить его с нулём. Представление (9) содержит шесть бесконечных сумм. Вторая и третья суммы вместе дают нам

$$-\frac{1}{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}.$$

Складывая это с первой суммой, получаем

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}. \tag{10}$$

Четвёртая и пятая суммы вместе дают

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}+\frac{n-1}{n-2},$$

мы можем переписать это следующим образом

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+1+\frac{1}{n-2}. \tag{11}$$

Шестая бесконечная сумма в (9) преобразуется следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-3)!}{k!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n-2)}. \tag{12}$$

Из (9), (10), (11) и (12) заключаем

$$r_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+1+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{2}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-3)!}{k!}-\frac{1}{2}-$$
$$-\frac{1}{2(n-2)}=-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{k!}-\frac{1}{2}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{(n-3)!}{k!}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-2)}.$$

Три последних члена дают нам

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)n},$$

что, очевидно, меньше, чем абсолютное значение первого члена второй бесконечной суммы:

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)n}<\frac{1}{2}\frac{1}{(n-2)(n-1)},$$

при $n \geq 3$. Таким образом, заметив, что $r_n < 0$ (и, кроме того, $r_n = O(n^{-2})$), получаем

$$S_3 \leq \frac{e-2}{2}((n-1)! + (n-3)!). \tag{13}$$

4. Теперь доказываемое утверждение следует из (5), (6), (8) и (13):

$$|\{\mathrm{per}\,(M):\ A_1 < \mathrm{per}\,(M) \leq n!\}| \leq S + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \leq$$

$$\leq S_3 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \leq \frac{e-2}{2}((n-1)! + (n-3)!) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

□

Следствие 1.2.36. *На множестве $\mathfrak{A}_4$ функция перманента достигает следующих значений:*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 24,$$

и только их.

Доказательство. Из теорем 1.2.33 и 1.2.34 следует, что из чисел, превосходящих 11, перманентами могут быть только 12, 14, 18 и 24. 11 — наибольшее нечётное значение. 14 — наибольшее не делящееся на 3 значение. 12 — перманент матрицы с двумя нулями и двумя единицами, например, в первой строке, и единицами на остальных позициях. 18 — перманент любой матрицы с единственным нулём. 24 — перманент J_4. Значения от 0 до 8 принимаются по теореме 1.1.16. 9 — перманент матрицы с четырьмя нулями на главной диагонали и единицами на остальных позициях. Наконец, десяти равен перманент следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Следствие 1.2.37. *Функция перманента на множестве $\mathfrak{A}_5$ достигает на промежутке $(53, 120]$ следующих значений:*

$$54, 60, 64, 72, 78, 96, 120,$$

и только их.

Доказательство. 120 — перманент матрицы J_5. 96 — перманент матрицы с единственным нулевым элементом. 72 — перманент матрицы с двумя нулевыми элементами на некоторой линии и единицами на остальных позициях. 78 — перманент матрицы с двумя нулевыми элементами на некоторой обобщённой диагонали и единицами на остальных позициях, то есть это наибольшее значение, не делящееся на 4!. 64 — наибольшее значение, не делящееся на 3. 53 — наибольшее нечётное значение. Таким образом, нам осталось проверить, существуют ли матрицы из $\mathfrak{A}_5$ с перманентами 54, 56, 58, 60, 62, 66 (так как после 64 все значения делятся на 6, а после 78 — на 24). Следующие три матрицы представляют собой все ещё не рассмотренные случаи матриц с тремя нулевыми элементами с точностью до эквивалентности, т.е. до перестановок линий и транспонирования; другими словами, любая матрица с тремя нулями может быть приведена перестановкой линий и транспонрованиями либо к одному из следующих трёх видов, либо к виду матрицы с перманентом 64 (три нуля на диагонали):

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix} = 54, \quad \operatorname{per}\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix} = 60, \quad \operatorname{per}\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix} = 48.$$

Таким образом, на множестве (0,1)-матриц порядка 5 с тремя нулями перманент может достигать только четырёх значений: 48, 54, 60, 64, и все они меньше, чем 66. В то же время, перманент любой матрицы с двумя нулями больше 66, значит, 66 не является значением функции перманента. Далее, попробуем получить матрицу с перманентом 56, 58 или 62, заменяя в матрице с тремя нулями какую-нибудь единицу нулём. При этом не будем рассматривать матрицы, которые могут быть таким образом получены из матриц с перманентами 54 и 48, так как 48 и 54 меньше, чем 56, 58 и 62. Значит, достаточно рассмотреть лишь две матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 48 и 50 соответственно. Таким образом, все значения перманентов матриц с четырьмя нулями меньше 56. Значит, числа 56, 58 и 62 не являются значениями функции перманента. $\square$

Глава 2

$(-1,1)$-матрицы

2.1 Основные определения и обозначения

2.1.1 Проблема обращения перманента в 0

Обозначение 2.1.1. Матрицу, элементы которой суть 1 и (-1), будем называть $(-1,1)$-матрицей. Вслед за Кройтером и Сейфтером [22] через Ω_n обозначим множество $(-1,1)$-матриц порядка n.

В этой главе мы изучаем свойства перманента $(-1,1)$-матриц. А именно, мы исследуем вопрос обращения перманента в 0 и тесно связанную с ним проблему делимости перманента на степени 2.

В отличие от перманента $(0,1)$-матрицы, перманент $(-1,1)$-матрицы может принимать отрицательные значения и не монотонен по количеству (-1) в матрице.

Пример 2.1.2. При фиксированном n максимальное значение перманента, как и в случае $(0,1)$-матриц, равно $n!$, но достигается оно не только на J_n, но и, например, на любой матрице, полученной из J_n умножением чётного числа линий на (-1).

Пример 2.1.3. Минимальное значение перманента равно $-n!$ и достигается на любой матрице, полученной из J_n умножением нечётного числа линий на (-1). Как следствие, матрица с двумя строками (-1) имеет больший перманент, чем матрица с одной строкой (-1) и матрица с тремя строками (-1), т.е. перманент не монотонен.

Пример 2.1.4. При чётных n перманент любой матрицы, в которой (-1) занимают k целых строк и половину какой-либо ещё одной строки, равен нулю.

Для нечётных n, как будет видно далее, вопрос отыскания матриц с перманентом 0 не столь тривиален. В общем случае, для $(-1, 1)$-матриц не найдено аналога предложения 1.1.12, что приводит нас к следующей проблеме.

Проблема 2.1.5. Сколько существует $(-1, 1)$-матриц порядка n с перманентом 0? Какие это матрицы?

Искать ответы на эти вопросы принято с точностью до преобразований матрицы, сохраняющих абсолютную величину перманента, т.е. с точностью до перестановки линий, транспонирования и умножения линий на (-1).

Проблема существования $(-1, 1)$-матриц с нулевым перманентом при заданном порядке была впервые сформулирована и частично решена в работе Уонга [33], а полное её решение можно найти, например, в работе Уонлесса [34]. Вопросы поиска таких матриц и оценки их количества пока остаются открытыми. Ещё одна проблема, сформулированная Уонгом [33], а именно, проблема поиска верхней оценки значения перманента при заданном ранге, была недавно решена Будревичем и Гутерманом [9] доказательством гипотезы Кройтера [21]. Есть также исследования, посвящённые оценке количества матриц с фиксированным, но не обязательно нулевым перманентом [1]. Проблемам из списка Уонга [33] посвящены работы Кройтера и Сейфтера [22] и Симиона и Шмидта [31], а о текущем положении дел можно прочитать в работах Бапата [4], Чхона и Уонлесса [11], Уонлесса [34] и Чжана [36].

Один из способов проверки того, что перманент целочисленной матрицы не обращается в 0, — доказательство отсутствия делимости перманента на некоторое число. Как будет видно далее (см. лемму 2.2.3), в случае $(-1, 1)$-матриц наиболее удобно исследовать делимость на степени двойки.

Известно, что для функции определителя выполняется следующее свойство: $\det(A) \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$ для всех $A \in \Omega_n$, см. [3, задача 526]. Аналогичное свойство для перманента было получено Уонгом в [33], где было показано, что

$$\operatorname{per} A \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^{n/2}} & \text{если} \quad n \text{ чётно}, \\ 0 \pmod{2^{(n-1)/2}} & \text{если} \quad n \text{ нечётно}. \end{cases} \tag{14}$$

Позже Кройтер и Сейфтер [22] получили первые результаты о неделимости перманента на степени двойки. Это предложения 2.2.12, 2.2.13 и 2.2.14. Однако доказательства этих утверждений, представленные Кройтером и Сейфтером [22], ссылаются нетривиальные результаты из работы Пёрфект [28]. Мы приводим прямые комбинаторные доказательства в разделе 2.2.1. Далее текст главы 2 организован следующим образом: в разделе 2.1.2 мы приводим примеры использования перманентов $(-1,1)$-матриц; в разделе 2.2.1 мы предъявляем прямые доказательства результатов Кройтера и Сейфтера о делимости, а также получаем ряд новых результатов; в разделе 2.2.2 мы классифицируем матрицы малых порядков с перманентом 0.

Результаты данной главы опубликованы в работах [37], [38] и [39].

2.1.2 Использование перманента $(-1,1)$-матриц

Пример ниже является выдержкой из общей постановки задачи, решаемой Кимом, Кэ и На в [19].

Пример 2.1.6. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathbb{C}^{d_j}$. Пусть $S \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Для вектора $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$ определим с точностью до константы вектор $|\psi\rangle^{\Gamma(S)}$ следующим образом:

$$(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle)^{\Gamma(S)} := |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_n\rangle\,,$$

где $|\phi_j\rangle = |\psi_j\rangle$ если $j \notin S$, и $|\phi_j\rangle = |\overline{\psi_j}\rangle$ иначе. Далее, для набора $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ подмножеств $\{1,2,\ldots,n\}$ и набора $\{D_1, D_2, \ldots, D_r\}$ подпространств $\mathbb{H}$ рассмотрим следующую систему:

$$|\psi\rangle^{\Gamma(S_i)} \in D_i,\ i = 1,2,\ldots,r, \tag{15}$$

с неизвестными $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$, принадлежащими произведению $\mathbb{CP}^{d_1-1} \times \mathbb{CP}^{d_2-1} \times \cdots \times \mathbb{CP}^{d_n-1}$ комплексных проективных пространств. Для этой системы построим следующую $(-1,1)$-матрицу $[\sigma_{ij}] = \Sigma$ размера $r \times n$: $\sigma_{ij} = -1$ если $j \in S_i$, и $\sigma_{ij} = 1$ иначе.

Один из результатов [19] заключается в следующей теореме.

Теорема 2.1.7. [19, теорема 3.1]. *Пусть $r = n$, и D_i суть подпространства $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^2$ с $\dim D_i^\perp = 1$ при всех i. Тогда если* $\operatorname{per}(\Sigma) \neq 0$, *то система* (15) *имеет ненулевое решение.*

Отсутствие решений системы (15), в свою очередь, является достаточным условием запутанности соответствующей квантовой системы. Известны и другие примеры использования перманента в квантовой физике [35], однако их цитирование потребовало бы изложения основ квантовой механики, поэтому мы их здесь не приводим. Об использовании перманентов $(-1,1)$-матриц в экономике можно прочитать, например, в [8, глава 1].

2.2 Обращение перманента в 0

2.2.1 Делимость значений

2.2.1.1 Формула для перманента ± 1-матрицы

Пусть $A \in \Omega_n$. Определение обобщённой диагонали было дано в разделе 1.2.2, см. определение 1.2.27.

Определение 2.2.1. Отрицательной частичной обобщённой диагональю длины j назовём такое подмножество

$$\{(i_1, l_1), \ldots, (i_j, l_j)\}$$

обобщённой диагонали матрицы A, что $a_{i_1 l_1} = \ldots = a_{i_j l_j} = -1$.

Обозначение 2.2.2. Через k_j, $j = 1, \ldots, n$, обозначим количество различных отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины j. Положим, что $k_0 = 1$

и, соответственно, что отрицательная частичная обобщённая диагональ длины 0 есть пустое множество.

Лемма 2.2.3. *Пусть $A \in \Omega_n$. Тогда*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!. \tag{16}$$

Доказательство. 1. По определению,

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}. \tag{17}$$

Здесь каждое слагаемое вида $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ соответствует ровно одной обобщённой диагонали, и равняется либо 1, либо (-1), в зависимости от чётности количества отрицательных элементов обобщённой диагонали.

Рассмотрим правую часть равенства (16) и докажем, что она содержит в точности столько слагаемых, равных $(+1)$ и (-1) (по отдельности), сколько, соответственно, содержит правая часть равенства (17).

2. Каждая отрицательная частичная обобщённая диагональ длины j может быть дополнена до обобщённой диагонали $(n-j)!$ различными способами, следовательно, она содержится в $(n-j)!$ различных обобщённых диагоналях. Дополним каждую отрицательную частичную обобщённую диагональ длины j до обобщённой диагонали всеми возможными способами и разметим полученные диагонали, чтобы различать их. Получим множество K_j размеченных обобщённых диагоналей, содеращих в совокупности все отрицательные частичные обобщённые диагонали длины j. Значит, мощность множества K_j равна $|K_j| = k_j \cdot (n-j)!$. Заметим, что не все элементы K_j различны как обобщённые диагонали матрицы A.

3. Пусть D_m — произвольная обобщённая диагональ матрицы A, имеющая m отрицательных элементов и $(n-m)$ положительных элементов. По определению, D_m содержит ровно $\binom{m}{j}$ различных отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины j. Скажем также, что D_m содержит $1 = \binom{m}{0}$ отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 0. Таким образом, каждая D_m встречается в K_j ровно $\binom{m}{j}$ раз, $j = 0, \ldots, n$. Здесь мы считаем, что $\binom{m}{j} = 0$ если $m < j$. Через $\mathfrak{D}(m)$ обозначим множество различных обобщённых диагоналей матрицы A, содержащих ровно m отрицательных элементов.

4. Для правой части (16) имеем

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)! = \sum_{j=0}^{n}(-2)^j \cdot |K_j| = \sum_{j=0}^{n}(-2)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{D_m \in \mathfrak{D}(m)} \binom{m}{j}\right). \quad (18)$$

5. Согласно пункту 3, в последней сумме учтена каждая обобщённая диагональ матрицы A. Вычислим, с каким коэффициентом. Меняя порядок суммирования, получаем, что для всякого m и произвольной $D_m \in \mathfrak{D}(m)$ её коэффициент в формуле (18) равен

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j \binom{m}{j} = (1-2)^m = (-1)^m.$$

Таким образом, если через $\mathcal{D}$ обозначить множество всех обобщённых диагоналей матрицы A, то правая часть (18) и, следовательно, правая часть (16) будут равны $\sum\limits_{D_m \in \mathcal{D}} (-1)^m$. Согласно пункту 1, это и есть значение перманента. □

Замечание 2.2.4. Заметим, что это представление аналогично доказанному в лемме 1.2.30 главы 1 для $(0,1)$-матриц, см. также [7, теорема 7.2.1, формула (7.11)].

2.2.1.2 Вспомогательные факты

Напомним, что суммирование, верхний предел которого меньше нижнего, а также суммирование по пустому множеству считаются равными нулю.

Лемма 2.2.5. *Для любого $x \in (0, +\infty)$ верно, что*

$$\left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

Доказательство. Так как $\lfloor \log_2 x \rfloor = \log_2 x - \{\log_2 x\}$, то, обозначая $\{\log_2 x\}$ через ε, имеем

$$2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} = x \cdot 2^{-\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right\rfloor = \lfloor 2^{\varepsilon} \rfloor = 1,$$

где последнее равенство верно в силу $0 \le \varepsilon < 1$. □

Определение 2.2.6. Пусть $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Положим $\nu_p(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}\}$.

Замечание 2.2.7. Заметим, что если p — простое число, то $\nu_p(x\,y) = \nu_p(x)+\nu_p(y)$.

Лемма 2.2.8. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $m < n$, имеем*

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = n - 1 - \left\{\frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}}\right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{\frac{n-m}{2^k}\right\}. \tag{19}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим левую часть равенства (19):

$$\Lambda := \nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = \nu_2(2^m) + \nu_2((n-m)!) = m + \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\lfloor \frac{n-m}{2^k} \right\rfloor.$$

Применяя тождество $\lfloor a \rfloor = a - \{a\}$ к слагаемым вида $\left\lfloor \frac{n-m}{2^k} \right\rfloor$ и вынося общий множитель, имеем

$$\Lambda = m + (n-m) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \frac{1}{2^k} \right) - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{\frac{n-m}{2^k}\right\}.$$

Применяя тождество $\sum_{k=1}^{t} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^t}$ ко второму слагаемому, получаем:

$$\Lambda = m + (n-m) \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}}\right) - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{\frac{n-m}{2^k}\right\}.$$

Теперь раскроем круглые скобки и применим $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$:

$$\Lambda = n - \left\lfloor \frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right\rfloor - \left\{\frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}}\right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{\frac{n-m}{2^k}\right\}.$$

Заметим, что, согласно лемме 2.2.5, второе слагаемое в Λ тождественно равно (-1). Поэтому

$$\Lambda = n - 1 - \left\{\frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}}\right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{\frac{n-m}{2^k}\right\}. \tag{20}$$

$\square$

Лемма 2.2.9. *Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \le n < 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, и пусть s обозначает количество единиц в двоичном представлении n. Тогда $\nu_2(n!) = n - s$.*

Доказательство. 1. В силу выбора n имеем $\lfloor \log_2 n \rfloor = t-1$. Тогда, согласно лемме 2.2.8,

$$\nu_2(n!) = n - 1 - \left\{ \frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} \right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\{ \frac{n}{2^k} \right\}. \tag{21}$$

2. Пусть $\overline{a_{t-1}a_{t-2}\ldots a_1 a_0}$ — двоичное представление n:

$$n = \sum_{k=0}^{t-1} a_k 2^k,$$

где $a_{t-1} = 1$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le t-1$, имеем:

$$\left\{ \frac{n}{2^j} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{t-1} a_k 2^{k-j} \right\} = \sum_{0 \le k < j} a_k 2^{k-j}. \tag{22}$$

Числа (дробные части) $\left\{ \frac{n}{2^j} \right\}$ и $\left\{ \frac{n}{2^{j+1}} \right\}$ соотносятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\{ \frac{n}{2^j} \right\} &\overset{(22)}{=} \frac{1}{2} \sum_{0 \le k < j} a_k 2^{k-j} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{0 \le k < j} a_k 2^{k-j} + \left(\frac{1}{2}a_j - \frac{1}{2}a_j\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{0 \le k \le j} a_k 2^{k-j} - \frac{1}{2}a_j = \sum_{0 \le k < j+1} a_k 2^{k-j-1} - \frac{1}{2}a_j \overset{(22)}{=} \\
&= \left\{ \frac{n}{2^{j+1}} \right\} - \frac{1}{2}a_j,
\end{aligned}$$

то есть,

$$2\left\{ \frac{n}{2^{j+1}} \right\} = \left\{ \frac{n}{2^j} \right\} + a_j. \tag{23}$$

3. Для каждого целого j, $1 \le j \le t-1$, рассмотрим следующую сумму:

$$\mathfrak{S}_j := \sum_{k=1}^{j} \left\{ \frac{n}{2^k} \right\} + \left\{ \frac{n}{2^j} \right\}. \tag{24}$$

Из равенства (23) следует, что для всех рассматриваемых j верно

$$\mathfrak{S}_j = \mathfrak{S}_{j-1} + a_{j-1}, \tag{25}$$

где $\mathfrak{S}_0 := 0$. Следовательно, выполнено равенство

$$\mathfrak{S}_{t-1} = \mathfrak{S}_0 + \sum_{k=0}^{t-2} a_k = s - 1. \tag{26}$$

4. Применяя равенства (24) и (26) к (21), получаем

$$\nu_2(n!) \overset{(21)}{=} n - 1 - \left\{\frac{n}{2^{t-1}}\right\} - \sum_{k=1}^{t-1} \left\{\frac{n}{2^k}\right\} \overset{(24)}{=}$$
$$= n - 1 - \mathfrak{S}_{t-1} \overset{(26)}{=}$$
$$= n - 1 - (s-1) = n - s.$$

$\square$

Следствие 2.2.10. *Для любых таких $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $m \le n$, верно*

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = n - s, \tag{27}$$

где s обозначает количество единиц в двоичном представлении $n - m$.

2.2.1.3 Делимость перманентов на степени двойки

Предложение 2.2.11. *Пусть двоичное представление числа $n \in \mathbb{N}$ содержит s единиц. Тогда существует такая матрица $A \in \Omega_n$, что*

$$\operatorname{per}(A) \vdots 2^{n-s}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2.9,

$$\operatorname{per}(J_n) = n! \vdots 2^{n-s}.$$

$\square$

Предложение 2.2.12. [22, лемма 5 и предложение 4]. *Пусть $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $A \in \Omega_n$ верно, что*

$$\operatorname{per}(A) \vdots 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}.$$

Доказательство. Двоичное представление n содержит t цифр, и все они единицы. Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, представление числа $(n-m)$ содержит не более t единиц. Это соображение вместе со следствием 2.2.10 дают нам, что каждое слагаемое в правой части (16) делится на $2^{n-t} = 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$. □

Предложение 2.2.13. [22, лемма 5]. *В условиях предложения 2.2.12*

$$\mathrm{per}\,(A) \not\vdots\; 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}.$$

Доказательство. Если целое неотрицательное число $(n - m)$ меньше n, то его двоичное представление содержит менее t единиц. Следовательно, в правой части (16) каждое слагаемое, кроме первого, делится на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}$, а первое слагаемое (то есть $n!$) не делится, и, таким образом, $\mathrm{per}\,(A) \not\vdots\; 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}$. □

Предложение 2.2.14. [22, предложение 5]. *Если $n \neq 2^t - 1$ ни для какого $t \in \mathbb{N}$, то для всякой $A \in \Omega_n$*

$$\mathrm{per}\,(A) \;\vdots\; 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}.$$

Доказательство. Пусть $t := \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$, то есть, $2^{t-1} \leq n < 2^t - 1$. Из условия $n < 2^t - 1$ следует, что всякое целое неотрицательное $(n-m) \leq n$ имеет менее t единиц в своём двоичном представлении. Значит, согласно следствию 2.2.10, получаем, что каждое слагаемое в правой части (16) делится на $2^{n-t+1} = 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}$. □

Определение 2.2.15. Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \leq n \leq 2^t - 1$. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(n)$ — это множество всех таких целых неотрицательных чисел, меньших n, что двоичное представление любого числа из множества $\{n - m \mid m \in \mathfrak{M}\}$ имеет ровно $(t - 1)$ единиц.

Теорема 2.2.16. *Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \leq n < 2^t - 1$, и $\mathfrak{M}(n)$. Для любой $A \in \Omega_n$ верно, что*

$$\mathrm{per}\,(A) \;\vdots\; 2^{n-t+2} \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{m \in \mathfrak{M}} k_m \;\vdots\; 2. \tag{28}$$

Доказательство. 1. Согласно следствию 2.2.10, для любого $(n - m) \in \mathbb{N}$ имеем

$$\nu_2(2^m (n-m)!) = n - s_{n-m}, \tag{29}$$

где s_{n-m} — число единиц в двоичном представлении $(n-m)$. Из (29) следует, что если $s_{n-m} \leq t-2$, то

$$\nu_2(2^m(n-m)!) \geq n-t+2. \tag{30}$$

2. Согласно выбору n, двоичное представление любого неотрицательного числа вида $(n-m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, имеет менее t единиц. Значит, согласно (16), имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(A) &\overset{(16)}{=} \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)! = \\ &= \sum_{\substack{m \notin \mathfrak{M} \\ 0 \leq m \leq n}} (-2)^m \cdot k_m \cdot (n-m)! + \sum_{m \in \mathfrak{M}} (-2)^m \cdot k_m \cdot (n-m)! =: \Sigma_1 + \Sigma_2, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\Sigma_1 \,\vdots\, 2^{n-t+2}$ в силу (30). Но, согласно следствию 2.2.10 и определению $\mathfrak{M}$, для любого $m \in \mathfrak{M}$ выполнено

$$\nu_2(2^m(n-m)!) = n-t+1. \tag{32}$$

Таким образом, обозначая $(n-m)! \cdot (-2)^{m-(n-t+1)}$ через α_m, можем заключить, что

$$\Sigma_2 = 2^{n-t+1} \left(\sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ 2 \,|\, k_m}} k_m \alpha_m + \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ 2 \nmid k_m}} k_m \alpha_m \right) =: 2^{n-t+1} \left(\Sigma_{21} + \Sigma_{22} \right), \tag{33}$$

где $\Sigma_{21} \,\vdots\, 2$, и в сумме Σ_{22} все слагаемые нечётны.

3. Из (31) и (33) следует, что $\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-t+2}$ тогда и только тогда, когда количество слагаемых в сумме Σ_{22} чётно, то есть, тогда и только тогда, когда чётно количество нечётных коэффициентов k_m $(m \in \mathfrak{M})$, что эквивалентно условию

$$\sum_{m \in \mathfrak{M}} k_m \,\vdots\, 2.$$

□

Замечание 2.2.17. При выполнении условий предложения 2.2.16:

1. $\max\{m \mid m \in \mathfrak{M}\} \leq \frac{n}{2}+1$, так как если $m > \frac{n}{2}+1$, то $n-m < \frac{n}{2}-1 < 2^{t-1}-1$, что, в свою очередь, означает, что количество единиц в двоичном представлении $n-m$ меньше $t-1$.

2. Мощность множества $\mathfrak{M}$ не превосходит $\binom{t}{1} = t$.

Следствие 2.2.18. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая матрица $A \in \Omega_n$, что*

$$\mathrm{per}\,(A) \not\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}.$$

Доказательство. 1. Если $n = 2^t - 1$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, то это следует из предложения 2.2.13. Значит, далее мы можем считать, что $n \neq 2^t - 1$ ни для какого $t \in \mathbb{N}$.

2. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}(n)$. Ясно, что оно непусто, так как содержит число $m_1 = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 1$: двоичное представление $n - m_1 = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} - 1$ имеет ровно $\lfloor \log_2 n \rfloor$ единиц. Пусть m_0 — наименьшее число, содержащееся в $\mathfrak{M}$.

3. Рассмотрим матрицу $A \in \Omega_n$ с ровно m_0 отрицательными элементами на главной диагонали и положительными элементами на остальных позициях. Для такой матрицы формула (16) содержит только $m_0 + 1$ ненулевых слагаемых, поскольку $k_j = 0$ для любого $j > m_0$, а $k_{m_0} = 1$ (в A есть только одна отрицательная частичная обобщённая диагональ длины m_0).

4. Из определения m_0 следует, что все ненулевые слагаемые в (16), кроме последнего, (то есть $m_0 + 1$-го) кратны $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}$, а последнее ненулевое слагаемое (равное $(-2)^{m_0} \cdot (n - m_0)!$) не кратно. Значит, и вся сумма не кратна $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}$. $\square$

2.2.1.4 Примеры

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\tag{34}
$$

Пример 2.2.19. Пусть $n = 32$ (или $33, 34, \ldots, 45, 46$ соответственно), и $A \in \Omega_n$.

$$\operatorname{per}(A) \not\vdots\ 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \text{ *тогда и только тогда, когда*}$$

число отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 1 (или $2, 3, \ldots, 14, 15$ соответственно) в матрице A нечётно. Заметим, что число отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 1 — это число элементов, равных (-1). Например, матрица (34) порядка 33 имеет 9 отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 2, и поэтому её перманент не делится на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} = 2^{29}$.

Определение 2.2.20. Введём следующее отношение порядка на множестве векторов длины n над полем действительных чисел: $x \succsim y$, если $x_i \geq y_i$ для всех i от 1 до n.

Пример 2.2.19 может быть обобщён следующим образом.

Предложение 2.2.21. *Пусть* $2^{t-1} \leq n < 2^{t-1} + 2^{t-2} - 1$, $A \in \Omega_n$. *Тогда*

1)

$$\mathrm{per}\,(A) \not\vdots\, 2^{n-t+2}$$

тогда и только тогда, когда число отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины $n - 2^{t-1} + 1$ нечётно;

2) Если матрица A перестановкой линий и транспонированиями может быть приведена к виду без отрицательных элементов вне главной диагонали, то

$$\mathrm{per}\,(A) \not\vdots\, 2^{n-t+2} \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$\overline{k_1} \gtrsim \overline{n - 2^{t-1} + 1}$, *где $\overline{x}$ обозначает такой вектор $(x_0, \ldots, x_{t-1})$, что $x = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{t-1-i} x_i$.*

Пункт 1) — простое следствие того факта, что, в условиях предложения 2.2.21, множество $\mathfrak{M}$ содержит только один элемент: $m = n - 2^{t-1} + 1$. Чтобы доказать пункт 2), нам нужна следующая лемма о чётности биномиальных коэффициентов, доказательство которой можно найти в [13].

Лемма 2.2.22. [13, теорема 1]. *Пусть $n = \overline{a_{t-1}a_{t-2}\ldots a_1a_0}$ и $k = \overline{b_{q-1}b_{q-2}\ldots b_1b_0}$, $t \geq q$,— двоичные представления целых неотрицательных n и k соответственно, $n \geq k$. Тогда число $\binom{n}{k}$ нечётно тогда и только тогда, когда*

$$b_i \leq a_i \text{ для всех } i = 0, 1, 2, \ldots, q-1.$$

Теперь докажем предложение 2.2.21.

Доказательство. 1. Доказательство пункта 1). Согласно предложению 2.2.16, мы знаем, что $\mathrm{per}\,(A) \vdots 2^{n-t+2}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{m\in\mathfrak{M}} k_m \vdots 2$. По определению $\mathfrak{M}$, содержащиеся в этом множестве числа имеют вид $m = n + 2^j - \sum_{i=0}^{t-1} 2^i$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, t-1\}$. Таким образом, для рассматриваемых n множество $\mathfrak{M}$ содержит только один элемент $m_0 = n + 2^{t-1} - \sum_{i=0}^{t-1} 2^i = n - \sum_{i=0}^{t-2} 2^i$, потому что если $j < t-1$, то

$$n - m = -2^j + \sum_{i=0}^{t-1} 2^i > 2^{t-1} + 2^{t-2} - 1 = n.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае условие $\sum_{m\in\mathfrak{M}} k_m \not\vdots\, 2$ сводится к тому, что количество отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины $m_0 = n - 2^{t-1} + 1$ нечётно.

2. Доказательство пункта 2). Если матрица A имеет вид из условия пункта 2), то все её отрицательные частичные обобщённые диагонали длины $n-2^{t-1}+1$ содержатся в её самой длинной отрицательной частичной обобщённой диагонали. Обозначим длину этой отрицательной частичной обобщённой диагонали через L. Количество отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины $n-2^{t-1}+1$ тогда будет равно $\binom{L}{n-2^{t-1}+1}$. Значит, согласно пункту 1), $\operatorname{per}(A)$ не кратен 2^{n-t+2} тогда и только тогда, когда $\binom{L}{n-2^{t-1}+1}$ нечётно, что по лемме 2.2.22 эквивалентно условию из пункта 2). □

2.2.2 Матрицы с нулевым перманентом

Эта часть главы 2 посвящена классификации $(-1,1)$-матриц с перманентом 0.

2.2.2.1 Общий случай

Здесь мы сформулируем и докажем несколько утверждений, позволяющих ограничить количество рассматриваемых матриц при поиске минимальных по числу (-1) матриц с нулевым перманентом.

Лемма 2.2.23. *Всякая матрица из Ω_n умножением некоторых строк и столбцов на (-1) может быть приведена к виду с не более чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ отрицательными элементами в каждой строке и каждом столбце.*

Доказательство. Действительно, умножая на (-1) строку или столбец с более чем половиной отрицательных элементов, мы уменьшаем общее количество (-1) в матрице. Таким образом, в силу конечности количества отрицательных элементов в матрице, мы за конечное число умножений получим матрицу требуемого вида. □

Лемма 2.2.24. *При $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, и $A \in \Omega_n$, $\operatorname{per}(A)$ может обращаться в ноль только если количество отрицательных элементов в матрице A чётно.*

Доказательство. Применяя предложение 2.2.16, получаем, что при $n = 2^t$ перманент $(-1,1)$-матрицы делится на 2^{n-t+1} тогда и только тогда, когда k_1 делится на 2, то есть в случае нечётного k_1 перманент не может обращаться в ноль. □

Лемма 2.2.25. *При $n = 2^t + 1$, $3 \leq t \in \mathbb{N}$, перманент матрицы $A \in \Omega_n$ может быть нулевым только если число k_2 отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 2 чётно.*

Доказательство. Аналогично лемме 2.2.24 следует из предложения 2.2.16. $\square$

Лемма 2.2.26. *Если некоторая $(-1, 1)$-матрица порядка $2k$ имеет не менее k строк $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ с не менее k отрицательными элементами $a_{i_q j_1}, \ldots, a_{i_q j_k}$ в каждой, $q = 1, \ldots, k$, а также отрицательный элемент на позиции (i, j), отличной от (i_q, j_m) при всех $q, m = 1, \ldots, k$, то количество отрицательных элементов можно уменьшить умножением некоторых строк и столбцов на (-1).*

Доказательство. Если существует строка, содержащая $k + 1$ или более отрицательных элементов, то умножим на (-1) эту строку.

Теперь предположим, что таких строк нет. Рассмотрим строки $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ и столбец j. Через l обозначим число строк среди данных k, с которыми этот столбец имеет общий элемент (-1). Умножим столбец j на (-1).

1. Если $k = l$, то столбец j содержал не менее $k + 1$ отрицательных элементов, и тогда общее число отрицательных элементов в матрице уменьшилось после домножения.

2. Если $l < k$, то после домножения количество (-1) в матрице увеличится не более чем на $(2k - 2l - 2)$. Оно может и уменьшиться, если столбец j пересекался по (-1) с достаточным количеством других k строк. Далее домножим на (-1) те $(k - l)$ строк, которые пересекались с данным столбцом по положительному элементу до умножения столбца на (-1). Количество (-1) в каждой из этих строк после умножения столбца на (-1) стало равно $k+1$. Значит, после умножения этих строк на (-1) количество (-1) в матрице уменьшится на

$$2(k - l) = 2k - 2l > 2k - 2l - 1,$$

то есть в итоге количество (-1) в матрице уменьшилось на два или более. $\square$

Следствие 2.2.27. *Если n чётно, а матрица $A \in \Omega_n$ имеет более $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1$ отрицательных элементов, то она может быть приведена к виду с меньшим количеством отрицательных элементов умножением некоторых строк и столбцов на (-1).*

Доказательство. Если A содержит строку с более чем $\frac{n}{2}$ отрицательными элементами, то мы можем получить искомую матрицу умножением этой строки на (-1). Если таких строк нет, то в матрице есть не менее $\frac{n}{2}$ строк с $\frac{n}{2}$ отрицательными элементами в каждой и дополнительный (-1) в некоторой другой строке (иначе общее число (-1) не будет превышать требуемое условием следствия). Значит, доказываемое утверждение следует из леммы 2.2.26. □

2.2.2.2 Матрицы порядка $n \leq 4$

Ясно, что при $n = 1$ $(-1, 1)$-матриц порядка n с нулевым перманентом не существует, а при $n = 2$ таких матриц ровно половина – это все матрицы с нечётным количеством (-1). При $n = 3$ таких матриц не существует в силу предложения 2.2.13.

Лемма 2.2.28. *Всякая матрица $A \in \Omega_4$ с перманентом 0 может быть приведена к виду с двумя или четырьмя (-1) домножением некоторых строк и столбцов на (-1).*

Доказательство. В силу леммы 2.2.23, мы можем рассматривать только матрицы с не более чем восемью (-1), причём в каждой строке и каждом столбце не более двух (-1). Согласно предложению 2.2.16, перманент $(-1, 1)$-матрицы порядка 4 делится на 8 тогда и только тогда, когда число k_1 отрицательных элементов чётно. Следовательно, если число отрицательных элементов нечётно, то перманент не может быть нулевым. Осталось рассмотреть матрицы с шестью и восемью (-1).

1. Пусть матрица содержит восемь (-1), по два (-1) в каждом столбце и каждой строке. Домножая какую-нибудь строку на (-1), получаем матрицу с восемью (-1), два столбца которой содержат по три (-1). Домножая эти столбцы на (-1), получаем матрицу с четырьмя (-1).

2. Пусть матрица содержит шесть (-1). Если есть строка и столбец с двумя (-1), пересекающиеся по 1, то мы можем умножить их на (-1), уменьшая общее количество (-1) в матрице. Следовательно, в случае, когда матрица содержит

шесть (-1), нам достаточно рассмотреть матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Но здесь мы можем умножить на (-1) сначала строку с единственным элементом (-1), а потом два получившихся столбца с тремя (-1), получив матрицу с четырьмя (-1). Это завершает доказательство леммы, но вдобавок можно ещё заметить, что в полученной матрице есть строка с тремя (-1), так что мы можем получить матрицу с двумя отрицательными элементами, домножив эту строку на (-1). □

Теорема 2.2.29. *При $n = 4$ любая $(-1, 1)$-матрица с нулевым перманентом эквивалентна одной из следующих:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2.28, нам достаточно рассмотреть матрицы с двумя или четырьмя отрицательными элементами, а в силу леммы 2.2.23 можно считать, что никакие три из них не стоят в одной строке или в одном столбце. Таким образом, надо рассмотреть восемь случаев (с точностью до транспонирования и перестановки строк и столбцов):

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A_2 эквивалентна матрице B_4, матрица B_1 эквивалентна матрице B_3, а матрица B_2 эквивалентна матрице B_5. Теперь, применяя лемму 2.2.3 в случае $n = 4$, заметим, что при $k_1 = 4$ перманент делится на 16 тогда и только тогда, когда разность $(k_2 - k_3)$ нечётна, то есть перманент не может быть нулевым, когда она чётна, как, например, в случае матрицы B_1. Далее, вычисляя перманенты матриц A_1, A_2, B_5 и B_6, получаем 0, за исключением $\operatorname{per}(A_2)$. Теорема доказана. □

2.2.2.3 Матрицы порядка 5

Лемма 2.2.30. *Всякая матрица из Ω_5 с нулевым перманентом эквивалентна некоторой матрице с не более чем семью отрицательными элементами.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2.23, нет необходимости рассматривать матрицы с более чем десятью отрицательными элементами, а также матрицы с тремя и более (-1) в одной строке или одном столбце. Если в матрице десять или девять (-1), то существуют строка с двумя (-1) и два столбца с двумя (-1) в каждом, пересекающие эту строку по 1. Тогда мы умножим эту строку и эти столбцы на (-1), уменьшив тем самым количество (-1) в матрице. В случае восьми (-1) в матрице это может быть неприменимо, а именно, так происходит, когда существуют два (-1), каждый из которых является единственным отрицательным элементом в своей строке и своём столбце. Получается матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя её перманент, получаем -8, то есть не ноль. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 2.2.31. *При $n = 5$ всякая $(-1, 1)$-матрица порядка n с нулевым перманентом эквивалентна одной из 11 матриц ниже:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2.30, нам достаточно рассмотреть матрицы, в которых не более семи отрицательных элементов, никакие три из которых не стоят в одной строке или одном столбце. Непосредственным вычислением проверяется, что перманент матриц с двумя и менее (-1) не обращается в 0. Далее рассмотрим оставшиеся опции для количества (-1): 3, 4, 5, 6 и 7.

0. Заметим, что, в силу предложения 2.2.16, перманент $(-1,1)$-матрицы порядка 5 обращается в ноль только если сумма $(k_0 + k_2)$ чётна, то есть только при нечётном k_2.

1. $k_1 = 7$. Если существует подматрица порядка 4, содержащая все семь (-1), то в матрице есть три строки и три столбца с двумя (-1), строка и столбец с одним (-1) и строка и столбец только с 1. Следовательно, либо существует строка с двумя (-1), пересекающая столбец с одним (-1) по этому (-1), либо матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае мы можем домножить ту строку на (-1), а затем сделать то же самое с полученными двумя столбцами с тремя (-1), уменьшив общее количество (-1) до шести. А во втором случае перманент равен нулю.

Теперь предположим, что все семь (-1) занимают ровно четыре строки и пять столбцов. Как и выше, в случае, если строка с одним отрицательным элементом пересекает столбец с двумя отрицательными элементами по (-1), то можно домножить на (-1) сначала этот столбец, а затем две строки, к которым добавился третий (-1), уменьшив общее количество (-1). Если же такого пересечения в матрице нет, то существует подматрица размера 3×4, содержащая шесть (-1). Если она содержит блок размера 2×2 из (-1), то мы можем умножить на (-1) строку из подматрицы, не участвующую в этом блоке, а затем два столбца из блока, получив шесть (-1) в матрице вместо семи. Если же в подматрице нет такого блока, то матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 8.

Наконец, если семь (-1) занимают все пять строк и пять столбцов, то с точностью до перестановки строк и столбцов и транспонирования матрицы существует три случая, к которым неприменимы описанные способы уменьшения количества отрицательных элементов домножением строк и столбцов на (-1):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перманент первой матрицы равен -16, а второй и третьей – нулю.

2. $k_1 = 3$. Из пункта 0 этого доказательства и леммы 2.2.23 следует, что нам достаточно вычислить перманенты следующих двух матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 32 и 0 соответственно.

3. $k_1 = 4$. Из леммы 2.2.23 и пункта 0 этого доказательства следует, что нам

достаточно вычислить перманенты следующих двух матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, все остальные матрицы с четырьмя (-1) либо имеют три (-1) в одной строке (или столбце), либо имеют чётное k_2. Далее, перманент первой матрицы равен 0, а перманент второй матрицы равен 16.

4. $k_1 = 5$.

Если отрицательные элементы занимают все пять строк и столбцов, то они образуют диагональ длины 5, и тогда $k_2 = 10$, то есть перманент не может быть нулевым в силу пункта 0 этого доказательства.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и пять столбцов, то получаем матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 16.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и четыре столбца, то имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент обеих матриц равен 8.

Если все отрицательные элементы занимают три строки и пять столбцов, то матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 8.

Если все отрицательные элементы занимают три строки и четыре столбца, то имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом перманент равен 0, а во втором 16.

Наконец, предположим, что все отрицательные элементы расположены в некоторой подматрице порядка 3. Опять имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом перманент равен 8, а во втором -8.

5. $k_1 = 6$. Если все шесть отрицательных элементов расположены в некоторой подматрице порядка 3, то вся матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 16.

Если отрицательные элементы занимают три строки и четыре столбца, то матрица принимает один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент в обоих случаях равен 8.

Если отрицательные элементы занимают три строки и пять столбцов, то матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент равен 0.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и четыре столбца, то матрица принимает один из следующих пяти видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В третьей матрице из приведённого списка количество (-1) можно уменьшить до пяти домножением строк и столбцов на (-1), перманент пятой равен 16, а перманент первой, второй и четвёртой равен 0.

Если отрицательные элементы занимают пять строк и четыре столбца, то матрица принимает один из следующих трёх видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки и столбцы первой матрицы можно домножить на (-1) так, чтобы количество (-1) стало равно пяти. Перманент второй и третьей матрицы равен 8.

Наконец, если отрицательные элементы занимают все пять строк и пять столбцов, то матрица принимает один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае перманент равен 16, а во втором он равен 0.

Теорема доказана. □

Заключение

В данной работе были исследованы следующие два вопроса теории функции перманента: реализация значений перманента $(0,1)$-матриц и обращение в 0 перманента $(-1,1)$-матриц. Изучение первого вопроса важно для таких наук как линейная алгебра, теория алгоритмов, комбинаторика, теория графов, генетика, экономика. Результаты исследований, посвящённых второму вопросу, также находят применение в упомянутых областях математики и, кроме того, в квантовой механике и в экономике.

Получены следующие результаты:

- Улучшена более чем в 2 раза оценка Бруальди-Ньюмена границы последовательных значений перманента квадратных $(0,1)$-матриц. В частности, разработан новый метод конструирования матриц с требуемым перманентом, доказывающий теорему Бруальди-Ньюмена и позволяющий её усилить.

- Для всех простых $p < n$ и натуральных $2 \leq j < n$ найдены матрицы, на которых функция перманента достигает наибольшего не делящегося на p значения перманента и наибольшего не делящегося на $j!$ значения перманента, соответственно. В частности, найдены наибольшее нечётное и наибольшее не делящееся на 3 значения перманента. С использованием этих результатов в качестве промежуточных получена оценка количества значений перманента на множестве $(0,1)$-матриц порядка n, превосходящих наибольший нечётный перманент.

- Получена формула для перманента $(-1,1)$-матриц, позволяющая исследовать его делимость на степени 2, в том числе напрямую доказать результаты Кройтера и Сейфтера. Найден критерий делимости перманента $(-1,1)$-матриц на степень двойки, превосходящую исследованные ранее в связи с этим вопросом.

- С точностью до перестановки строк и столбцов, их домножения на (-1) и транспонирования, приведены все $(-1,1)$-матрицы порядка не более 5 с перманентом 0.

Список литературы

[1] А.Д. Коршунов. О числе $(-1,1)$-матриц порядка n с фиксированным перманентом. *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **3(1)**:23–42, 1996.

[2] Х. Минк. *Перманенты.* Мир, М., 1982.

[3] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. *Сборник задач по высшей алгебре.* Наука, М., 1968.

[4] R.B. Bapat. Recent developments and open problems in the theory of permanents. *Math. Student*, **76(1–4)**:55–69, 2007.

[5] J.P.M. Binet. Mémoire sur un systeme de formules analytiques, et leur application a des considerations géométriques. *J. École Polytechnique*, **9**:280–302, 1812.

[6] R.A. Brualdi, M. Newman. Some theorems on permanent. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, **69B(3)**:159–163, 1965.

[7] R.A. Brualdi, H.J. Ryser. *Combinatorial Matrix Theory.* Cambridge Univ. Press, 1991.

[8] R.A. Brualdi, B.L. Shader. *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[9] M.V. Budrevich, A.E. Guterman. Kräuter conjecture on permanents is true. *J. Comb. Theory, Ser. A*, **162**:306–343, 2019.

[10] A.L. Cauchy. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *J. École Polytechnique*, **10**:91–169, 1815.

[11] G.-S. Cheon, I.M. Wanless. An update on Minc's survey of open problems involving permanents. *Linear Algebra Appl.* **403**:314–342, 2005.

[12] S.A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *Proc. 3rd Ann. ACM Symp. Theory of Computing*, 151–158, 1971.

[13] N. Fine. Binomial coefficients modulo a prime. *American Mathematical Monthly*, **54**:589–592, 1947.

[14] G. Frobenius. Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 274–277, 1917.

[15] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completness*. W.H. Freeman, San Francisco, 1979.

[16] B. Gordon, T. S. Motzkin, L. Welch. Permanents of 0,1-Matrices. *J. Combin. Theor. (A)*, **17**:145–155, 1974.

[17] Ph. Hall. On Representatives of Subsets. *J. London Math. Soc.*, **10(1)**:26–30, 1935.

[18] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, 85–103, 1972.

[19] Y.-H. Kiem, S.-H. Kye, J. Na. Product vectors in the ranges of multi-partite states with positive partial transposes and permanents of matrices. *Commun. Math. Phys.*, **338(2)**:621–639, 2015.

[20] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.

[21] A.R. Kräuter. Recent results on permanents of $(1,-1)$-matrices. *Ber. Math. Statist. Sekt. Forsch. Graz*, **249**:1–25, 1985.

[22] A.R. Kräuter, N. Seifter. On some questions concerning permanents of $(1,-1)$-matrices. *Israel J. Math.* **45**, No. 1 (1983), 53–62.

[23] D.E. Littlewood. *The Theory of Group Characters and Matrix Representation of Groups (2nd ed.)*. Oxford Univ. Press, 1950.

[24] D.E. Littlewood, A.R. Richardson. Group characters and algebras. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **233**:99–141, 1934.

[25] L. Lovász, M.D. Plummer. *Matching Theory*. Elsevier, 1986.

[26] W. McCuaig. Pólya's permanent problem. *Electron. J. Combin.*, **11**:R79, 2004.

[27] T. Muir. On a class of permanent symmetric functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **11**:409–418, 1882.

[28] H. Perfect. Positive diagonals of ± 1-matrices. *Monatsh. Math.*, **77**:225–240, 1973.

[29] G. Pólya. Aufgabe 424. *Arch. Math. Phys.*, **20(3)**:271, 1913.

[30] H.J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. Math. Assoc. Amer., 1963.

[31] R. Simion, F.W. Schmidt. On $(+1, -1)$-matrices with vanishing permanent. *Discrete Mathematics*, **46**:107–108, 1983.

[32] L.G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoret. Comput. Sci.*, **8**:189–201, 1979.

[33] E.T.H. Wang. On permanents of $(1, -1)$-matrices. *Israel J. Math.*, **18**:353–361, 1974.

[34] I.M. Wanless. Permanents of matrices of signed ones. *Linear Multilinear Algebra*, **53(6)**:427–433, 2005.

[35] T.-C. Wei, S. Severini. Matrix permanent and quantum entanglement of permutation invariant states. *J. Math. Phys.*, **51(9)**, 2010.

[36] F. Zhang. An update on a few permanent conjectures. *Spec. Matrices*, **4**:305–316, 2016.

Публикации автора по теме диссертации

[37] М.В. Будревич, А.Э. Гутерман, К.А. Таранин. О делимости парманента (± 1)-матриц. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **439**:26–37, 2015.
M. V. Budrevich, A. E. Guterman, K. A. Taranin. On the divisibility of permanents for (± 1)-matrices. *J. Math. Sc.*, **216(6)**:738–745, 2016.
Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[38] М.В. Будревич, А.Э. Гутерман, К.А. Таранин. К теореме Кройтера-Сейфтера о делимости перманентов. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**:25–35, 2017.

M. V. Budrevich, A. E. Guterman, K. A. Taranin. On the Kräuter-Seifter theorem on permanent divisibility. *J. Math. Sc.*, **232(6)**:760–767, 2018.

Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[39] К.А. Таранин. О ± 1-матрицах с нулевым перманентом. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **482**:244–258, 2019.

K. A. Taranin. ± 1-matrices with vanishing permanent. *J. Math. Sc.*, **249(2)**:271–280, 2020.

Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[40] A.E. Guterman, K.A. Taranin. On the values of the permanent of $(0, 1)$-matrices. *Linear Algebra Appl.*, **552**:256–276, 2018.

Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).