Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Таранин Константин Александрович

Значения функции перманента $(0,1)$-матриц и $(-1,1)$-матриц

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2022

Работа выполнена на кафедре алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Гутерман Александр Эмилевич,** доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Казарян Максим Эдуардович,** доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, профессор.

Кривулин Николай Кимович, доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, Кафедра статистического моделирования, профессор.

Тараненко Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, лаборатория алгебраической комбинаторики, старший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 3 июня 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *sbgashkov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»:
`https://istina.msu.ru/dissertations/450303893/`

Автореферат разослан 29 апреля 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ **С. Б. Гашков**
доктор физико-математических наук,
профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Определение. Пусть A – матрица порядка n над полем действительных чисел. Функция, сопоставляющая матрице A число

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n – группа перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, называется функцией перманента, а само это число – перманентом матрицы A.

Функция перманента была впервые введена Бине[1] и Коши[2], а её современное название ей дал Мюир[3], который также доказал для перманента аналоги некоторых базовых свойств детерминанта. Литтлвуд[4] и Ричардсон[5] ввели понятие иммананта, обобщающее перманент и детерминант.

Важное отличие перманента от детерминанта состоит в том, что он не инвариантен по отношению к одному из преобразований Гаусса — прибавлению строки с коэффициентом к другой строке (аналогично в случае столбцов). Более общо, перманент не мультипликативен. Как следствие, к нему не применимы методы быстрого вычисления, применимые в случае детерминанта. Более того, на данный момент не найдено алгоритма вычисления перманента полиномиальной или меньшей сложности. Один из наиболее быстрых алгоритмов, вычисляющий перманент за $O(2^{n-1}n)$ итераций, где n — порядок матрицы, принадлежит Райзеру[6] (глава 2 теорема 4.1)[7], см. также пункт 2 главы 7 книги Минка[8]. Напомним, что задачей класса $\#P$ называется любая вычислительная задача, для которой соответствующая задача разрешимости лежит в классе NP; $\#P$-сложной называется любая задача, к которой за полиномиальное время сводятся все задачи класса $\#P$; а $\#P$-полной называется любая $\#P$-сложная задача из класса $\#P$. Вэлиант[9]

[1] J.P.M. Binet. Mémoire sur un systeme de formules analytiques, et leur application a des considerations géométriques. *J. École Polytechnique*, **9**:280–302, 1812.

[2] A.L. Cauchy. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *J. École Polytechnique*, **10**:91–169, 1815.

[3] T. Muir. On a class of permanent symmetric functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **11**:409–418, 1882.

[4] D.E. Littlewood. *The Theory of Group Characters and Matrix Representation of Groups (2nd ed.)*. Oxford Univ. Press, 1950.

[5] D.E. Littlewood, A.R. Richardson. Group characters and algebras. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **233**:99–141, 1934.

[6] H.J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. Math. Assoc. Amer., 1963.

[7] В скобках после имён указаны номера теорем в соответствующих книгах или статьях.

[8] Х. Минк. *Перманенты*. Мир, М., 1982.

[9] L.G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoret. Comput. Sci.*, **8**:189–201, 1979.

доказал, что вычисление перманента является $\#P$-сложной задачей, а для $(0,1)$-матриц — $\#P$-полной, т.е. из наличия полиномиального алгоритма вычисления перманента следовало бы равенство $P = NP$. Читателя, интересующегося вопросами алгоритмической сложности в связи с вычислением перманента и смежными задачами, адресуем к работам Кука[10], Гэри и Джонсона[11], Ласло и Пламмера[12], а также Карпа[13].

Помимо интереса с точки зрения теории сложности вычислений, функция перманента представляет также и практический интерес. Приложения перманента можно найти как в смежных областях математики, например, в комбинаторике и теории графов, так и в других науках – экономике, генетике, квантовой физике. Необходимость вычислять значения перманентов $(0,1)$-матриц и, более общо, матриц с целыми неотрицательными элементами возникает в задачах теории механизмов в экономике, использующей теорию графов как один из инструментов, а перманенты $(-1,1)$-матриц используются в квантовой механике. Подробнее о примерах см. в разделе 1.1.2 диссертации для $(0,1)$-матриц и разделе 2.1.2 диссертации для $(-1,1)$-матриц. Таким образом, принимая во внимание используемость в приложениях и сложность вычисления функции перманента, можно заключить, что исследование расположения (реализации) её значений является актуальной задачей. Это исследование традиционно ведётся в двух направлениях: предложенный Полиа[14] вопрос конвертации перманента и детерминанта, историю развития которого можно найти в книге МакКуэйга[15], и вопрос непосредственного поиска значений перманента и соответствующих матриц, о котором далее пойдёт речь в диссертации.

Одним из первых результатов, относящихся к проблеме реализации значений перманента, был критерий обращения в 0 перманента неотрицательной матрицы, полученный Фробениусом[16] и Кёнигом[17]. Аналогичные критерии для небольших положительных значений перманента $(0,1)$-матриц были получены Гордоном, Моцкином и Уэлчем[18]. Бруальди и Ньюмен[19] получили следующую нижнюю оценку на границу значений перманента, принимаемых последовательно: все целые числа от 0 до 2^{n-1} включительно являются значениями функции перманента

[10] S.A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *Proc. 3rd Ann. ACM Symp. Theory of Computing*, 151–158, 1971.

[11] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completness*. W.H. Freeman, San Francisco, 1979.

[12] L. Lovász, M.D. Plummer. *Matching Theory*. Elsevier, 1986.

[13] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, 85–103, 1972.

[14] G. Pólya. Aufgabe 424. *Arch. Math. Phys.*, **20(3)**:271, 1913.

[15] W. McCuaig. Pólya's permanent problem. *Electron. J. Combin.*, **11**:R79, 2004.

[16] G. Frobenius. Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 274–277, 1917.

[17] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.

[18] B. Gordon, T. S. Motzkin, L. Welch. Permanents of 0,1-Matrices. *J. Combin. Theor. (A)*, **17**:145–155, 1974.

[19] R.A. Brualdi, M. Newman. Some theorems on permanent. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, **69B(3)**:159–163, 1965.

на множестве $(0, 1)$-матриц порядка n.

В случае $(-1, 1)$-матриц одним из основных направлений в исследовании реализации значений перманента является проверка обращения перманента в 0, что продиктовано спецификой использования этого класса матриц: например, в квантовой физике нулевой перманент знакового портрета системы уравнений, описывающей некоторую квантовую систему, означает отсутствие ненулевого решения этой системы уравнений, что в свою очередь гарантирует квантовую запутанность системы (подробнее см. пример в разделе 2.1.2 диссертации). Достаточным условием того, что перманент целочисленной матрицы не обращается в 0, является отсутствие делимости на натуральное число. Классическими результатами в этом направлении являются результаты Кройтера и Сейфтера[20] (предложение 4 и лемма 5) о делимости на степени 2, а одним из наиболее современных результатов является классификация всех$(-1, 1)$-матриц порядка 4 с перманентом 0 с точностью до умножения строк и столбцов на (-1) и их перестановки, полученная Кимом, Кэ и На[21] (теорема 3.6) в 2015 году. Альтернативная формулировка последнего результата, учитывающая также эквивалентность с точностью до транспонирования, приведена с доказательством в разделе 2.2.2 диссертации.

Полученные в диссертации результаты относятся к направлениям исследований, заданным теоремой Бруальди и Ньюмена о подряд идущих значениях и предложениями Кройтера и Сейфтера о делимости, т.е. непосредственно к реализации значений перманента $(0, 1)$-матриц и к делимости на степени 2 и обращению в 0 перманента $(-1, 1)$-матриц. В частности, был более чем в 2 раза улучшен результат Бруальди и Ньюмена, сформулирован и доказан критерий делимости перманента на более высокую степень 2, чем у Кройтера и Сейфтера, а также классифицированы все $(-1, 1)$-матрицы порядка 5 с перманентом 0.

Цели и задачи работы

Целью диссертации является исследование реализации значений функции перманента на множествах квадратных $(0, 1)$-матриц и $(-1, 1)$-матриц, в частности, исследование вопроса последовательной реализации значений перманента для $(0, 1)$-матриц, а также обращения перманента в 0 и делимости на степени 2 для $(-1, 1)$-матриц.

[20] A.R. Kräuter, N. Seifter. On some questions concerning permanents of $(1, -1)$-matrices. *Israel J. Math.* **45**, No. 1 (1983), 53–62.

[21] Y.-H. Kiem, S.-H. Kye, J. Na. Product vectors in the ranges of multi-partite states with positive partial transposes and permanents of matrices. *Commun. Math. Phys.*, **338(2)**:621–639, 2015.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты диссертации выносятся на защиту:

- Улучшение оценки Бруальди-Ньюмена границы последовательных значений перманента $(0,1)$-матриц более чем в 2 раза.
- Вычисление наибольшего нечётного и наибольшего не делящегося на 3 значения перманента. Предъявление для всех простых $p < n$ и натуральных j, $2 \le j < n$, матриц, на которых функция перманента достигает наибольшего не делящегося на p значения и наибольшего не делящегося на $j!$ значения соответственно. Оценка количества значений перманента на множестве $(0,1)$-матриц порядка n, превосходящих наибольший нечётный перманент.
- Предъявление и доказательство формулы для перманента $(-1,1)$-матриц, позволяющей вычислять степень вхождения 2 как простого сомножителя в значение перманента. Прямые доказательства предложений Кройтера и Сейфтера о делимости перманента на степени 2. Предъявление и доказательство критерия делимости перманента $(-1,1)$-матриц на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}$.
- Классификация $(-1,1)$-матриц порядка не более 5 с перманентом 0 с точностью до эквивалентности.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются множества квадратных $(0,1)$-матриц порядка n, $(-1,1)$-матриц порядка n и соответствующие множества значений функции перманента, где $n \in \mathbb{N}$.

Предметом исследования является функция перманента на множествах квадратных $(0,1)$-матриц и $(-1,1)$-матриц и её свойства.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

- Оценка Бруальди-Ньюмена границы последовательных значений перманента $(0,1)$-матриц улучшена более чем в 2 раза.
- Получена оценка количества значений перманента на $\mathfrak{A}_n$, превосходящих $[\frac{(n+1)!}{ne}]$. В качестве промежуточных результатов:
  - Найдены наибольшее нечётное значение перманента и наибольшее не делящееся на 3 значение перманента на $\mathfrak{A}_n$.

- – Для всех простых $p < n$ найдены матрицы, перманенты которых являются наибольшими на $\mathfrak{A}_n$ среди не делящихся на p.
  – Для всех натуральных $2 \le j < n$ найдены матрицы, перманенты которых являются наибольшими на $\mathfrak{A}_n$ среди не делящихся на $j!$.

- Получена формула для перманента $(-1, 1)$-матриц, позволяющая вычислять степень вхождения 2 как простого сомножителя в значение перманента. Получены прямые доказательства предложений Кройтера и Сейфтера о делимости перманента на степени 2. Найден критерий делимости перманента $(-1, 1)$-матриц на $2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor+1}$.

- С точностью до эквивалентности классифицированы $(-1, 1)$-матрицы порядка не более 5 с перманентом 0.

Методы исследования

В исследовании используются классические результаты, методы и понятия алгебры, комбинаторики и теории чисел. Также автором предложен новый метод построения $(0, 1)$-матриц заданного порядка с заданным перманентом от 0 до 2^n и найдена формула перманента $(-1, 1)$-матриц, позволяющая проверять его делимость на степени 2.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в задачах линейной алгебры, комбинаторики, теории графов, теории сложности вычислений, экономики, генетики, квантовой механики.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты опубликованы в 4 работах автора [1, 2, 3, 4] в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI. Автор выступал с докладами по результатам работы на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и на семинаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры.

Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

- XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2014», Москва, 2014.

- XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015», Москва, 2015.

- 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (MMMA-2015), Москва, Сколково, 2015.

- XXIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2016», Москва, 2016.

- XXIV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 2017.

- XXV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018», Москва, 2018.

- Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (1908–1971), Москва, 2018.

- XXVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва, 2020.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 81 страницу. Список литературы включает 40 наименований.

Содержание работы

Введение посвящено краткой истории вопроса, актуальности рассматриваемых проблем, изложению цели работы, методов и основных результатов.

Глава 1. В главе 1 исследуются два вопроса, относящиеся к теме реализации значений перманента $(0,1)$-матриц:

1. Поиск границы подряд идущих значений перманента.

2. Описание и оценка количества значений, превосходящих наибольшее нечётное значение перманента.

В разделе 1.1.1 введены основные определения и обозначения, а в разделе 1.1.2 приведены примеры использования перманента $(0,1)$-матриц.

Пусть $\mathfrak{A}_n$ обозначает множество $(0,1)$-матриц порядка n. Граница подряд идущих значений перманента определяется следующим образом.

Определение. Число B_n назовём границей подряд идущих значений перманента на $\mathfrak{A}_n$, если B_n — наименьшее натуральное число с тем свойством, что не существует $A \in \mathfrak{A}_n$ с $\operatorname{per}(A) = B_n + 1$.

Из теоремы Бруальди-Ньюмена следует, что $B_n \geq 2^{n-1}$. Однако, как показано в разделе 1.2.1, этот результат может быть улучшен более чем в 2 раза.

Теорема. *При $n \geq 6$ $B_n \geq \frac{85}{64}2^n$.*

Всюду далее строки и столбцы матриц называются линиями. В разделе 1.2.2 исследуются значения перманента, превосходящие наибольшее нечётное значение. Для этого сначала доказываются следующие два свойства делимости перманента $(0,1)$-матриц.

Следствие. *Пусть p — простое число, $2 \leq p < n$. Матрица с наибольшим на $\mathfrak{A}_n$ не делящимся на p значением перманента имеет в точности $n-p+1$ нулевых элементов, причём никакие два из них не расположены на одной линии.*

Следствие. *Пусть j — целое число, $2 \leq j < n$. Матрица с наибольшим на $\mathfrak{A}_n$ не делящимся на $j!$ значением перманента имеет в точности $n-j+1$ нулей, причём никакие два из них не расположены на одной линии.*

После этого вычисляются наибольший нечётный перманент и наибольший не кратный 3 перманент. $[x]$ обозначает ближайшее к числу x целое число, а $\{x\}_l = |x - [x]|$.

Теорема. *Наибольшее нечётное значение функции перманета на $\mathfrak{A}_n$ равно $[\frac{(n+1)!}{ne}]$, причём $\{\frac{(n+1)!}{ne}\}_l \leq \frac{1}{n(n+2)}$.*

Теорема. *Если $n > 1$, то наибольшее не делящееся на 3 значение функции перманента на $\mathfrak{A}_n$ равно $[\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)]$, причём $\{\frac{(n-2)!}{e}(n^2+n-1)\}_l \leq \frac{4}{n^3-n}$.*

Далее эти результаты используются для получения оценки на количество значений перманента, превосходящих наибольшее нечётное значение.

Теорема. *При $n \geq 4$ на промежутке $\left(\left[\frac{(n+1)!}{ne}\right], n!\right]$ количество значений функции перманента на множестве матриц $\mathfrak{A}_n$ не превосходит*

$$\frac{e-2}{2}((n-1)! + (n-3)!) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (-1)^{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Глава 2 посвящена вопросам обращения в 0 и делимости значений перманента $(-1,1)$-матриц. Рассмотрены следующие два вопроса:

1. Зависимость делимости перманента на степени двойки от порядка матрицы.

2. Классификация матриц с перманентом 0 с точностью до преобразований, не меняющих модуль перманента, а именно перестановок линий, домножения линий на (-1) и транспонирования матрицы.

В разделе 2.1.1 введены основные определения и обозначения, а в разделе 2.1.2 приведен пример использования функции перманента $(-1,1)$-матриц в квантовой физике, связывающий перманент с понятием квантовой запутанности.

Множество $(-1,1)$-матриц порядка n обозначим через Ω_n. Для данной матрицы $A \in \Omega_n$ количество всевозможных различных наборов (-1) мощности j, таких, что никакие два элемента (-1) из набора не расположены на одной линии, обозначим через k_j. В разделе 2.2.1 получены следующие результаты. Сначала доказана формула для вычисления перманента $(-1,1)$-матрицы.

Лемма. *Пусть $A \in \Omega_n$. Тогда*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!.$$

Далее эта формула использована для получения прямого доказательства предложений Кройтера и Сейфтера, а также для получения нового результата, предъявленного в теореме ниже, где через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(n)$ обозначено множество таких целых неотрицательных чисел m, меньших n, что $n-m$ в своём двоичном представлении имеет ровно $t-1$ единиц, где t определяется неравенствами $2^{t-1} \leq n \leq 2^t - 1$.

Теорема. *Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \leq n < 2^t - 1$, и $\mathfrak{M}(n)$. Для любой $A \in \Omega_n$ верно, что*

$$\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-t+2} \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{m \in \mathfrak{M}} k_m \,\vdots\, 2.$$

В том же разделе выведено несколько следствий данной теоремы.

В разделе 2.2.2 с помощью ряда вспомогательных утверждений с точностью до перестановок линий, домножения линий на (-1) и транспонирования классифицированы все $(-1,1)$-матрицы порядка $n=5$ с перманентом 0, а также приведён результат для $n=4$.

Заключение. В заключении перечислены основные результаты работы.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Александру Эмилевичу Гутерману за

постановку задачи, постоянное внимание к работе, поддержку и ценные обсуждения, а также коллективу кафедры высшей алгебры за доброжелательную и творческую атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] М.В. Будревич, А.Э. Гутерман, К.А. Таранин. О делимости парманента (± 1)-матриц. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **439**:26–37, 2015.
M. V. Budrevich, A. E. Guterman, K. A. Taranin. On the divisibility of permanents for (± 1)-matrices. *J. Math. Sc.*, **216(6)**:738–745, 2016.
Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[2] М.В. Будревич, А.Э. Гутерман, К.А. Таранин. К теореме Кройтера-Сейфтера о делимости перманентов. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**:25–35, 2017.
M. V. Budrevich, A. E. Guterman, K. A. Taranin. On the Kräuter-Seifter theorem on permanent divisibility. *J. Math. Sc.*, **232(6)**:760–767, 2018.
Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[3] К.А. Таранин. О ± 1-матрицах с нулевым перманентом. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **482**:244–258, 2019.
K. A. Taranin. ± 1-matrices with vanishing permanent. *J. Math. Sc.*, **249(2)**:271–280, 2020.
Scopus, RSCI. IF SJR 0.330 (2020).

[4] A.E. Guterman, K.A. Taranin. On the values of the permanent of $(0, 1)$-matrices. *Linear Algebra Appl.*, **552**:256–276, 2018.
WoS, Scopus, RSCI. IF SJR 0.951 (2020).