А.А.Лазарев

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассматриваются задачи теории расписаний для одного исполнителя, прибора. Введены два преобразования над расписаниями, с помощью которых доказывается оптимальность расписаний. Показана связь трех рассматриваемых задач.

Необходимо упорядочить работы с номерами $1, 2, \ldots, n$. Множество номеров обозначим через N

$$N = \{1, 2, \ldots, N\} .$$

Каждая работа $j \in N$ характеризуется следующими исходными данными : r'_j - момент времени , с которого может быть начато выполнение работы j (момент работы поступления); p_j - время , в течение которого прибор обслуживает j-ю работу (продолжительность работы).

Ограничения на порядок выполнения работ: а) запрещаются прерывания в обслуживании работ; б) в каждый момент времени исполнитель может обслуживать не более одной работы.

Будем обозначать через $\omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ некоторый порядок обслуживания работ исходного множества, где через j_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначен номер работы, стоящей на k - ом месте в расписании ω.

Через π будем обозначать участок расписания ω

$$\pi = (j_\alpha, j_{\alpha+1}, \ldots, j_\beta), \quad 1 \le \alpha < \beta \le n .$$

Введем величины d_j :

$$d_j = r'_j + p_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Не ограничивая общности, будем считать, что работы пронумерованы в порядке неубывания величин d_j, т.е.

$$d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$$

при $d_k = d_{k+1}$ выполняется $r'_k \le r'_{k+1}$.

Будем рассматривать задачи составления оптимальных расписаний с некоторого наперед заданного момента времени T. Тогда работа $j \in N$ может быть начата обслуживаться с момента времени

$$\tau_j = \max \{ \tau'_j , T \} . \qquad (1)$$

Обозначим через t_j момент окончания обслуживания работы j в расписании ω. Для расписания $\omega = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, положив по определению $t_{j_0} = 0$, легко вычислить

$$t_{j_k} = \max \{ t_{j_{k-1}}, \tau_{j_k} \} + p_{j_k}, k = 1, 2, \ldots, n .$$

Будем называть пролеживанием работы $j \in N$ величину

$$t_j - d_j = t_j - \tau'_j - p_j .$$

Сформулируем задачи. Необходимо найти такое расписание, чтобы величина

I задача : $\max\limits_{j=\overline{1,n}} \{ t_j - d_j \}$ была минимальной. Критерий минимизации максимального пролеживания.

2 задача : $\max\limits_{j=\overline{1,n}} t_j$ была минимальной. Критерий быстродействия.

Наряду с этими задачами будет рассматриваться

3 задача : необходимо найти такое расписание $\omega^* = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ со значением максимального пролеживания $q^* = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \{ t_{i_k} - d_{i_k} \}$ и общим моментом окончания t_{i_n}, что не существовало бы никакого другого расписания ω со значениями критериев q и t, для которых было бы верно $q \le q^*$ и $t \le t_{i_n}$, хотя бы одно из неравенств должно быть строгим.

Для нахождения оптимальных расписаний введем два преобразования над расписаниями. Чтобы сформулировать преобразования P_1 и P_2, необходимо определить номера работы k и ℓ из множества N следующим образом.

Вычислим величину

$$\tau^1 = \min_{j \in N} \tau_j , \qquad (2)$$

работу с номером k определим

$$k = \min \{ i \in N : r_i = r^1 \} . \qquad (3)$$

Вычислим

$$r^2 = \min_{j \in N \setminus \{k\}} r_j \qquad (4)$$

и определим номер работы

$$\ell = \max \{ i \in N : r_i = r^2 \} . \qquad (5)$$

Введем преобразование P_1 . Пусть расписание ω имеет вид

$$\omega = (j_1 , j_2 , \dots , j_m , \dots , j_n) .$$

Расписание $P_1(\omega)$ строится следующим образом :

если работа с номером k стоит на первом месте в расписании ω , т.е. $j_1 = k$, то $P_1(\omega) = \omega$;

если работа k стоит на месте $m > 1$, проделаем следующее.

Определим множество номеров работ B

$$B = \{ j_\ell : j_\ell < k , \ell = \overline{1, m-1} \} .$$

B - множество номеров работ с номерами, меньшими чем k и стоящими перед работой с номером k в расписании ω . В расписание $P_1(\omega)$ работа с номером k ставится на первое место. Вслед за ней выстраиваем работы из множества B в порядке возрастания их номеров. Работы с номерами j_{m+1} , j_{m+2} , ..., j_n ставим на места m +I, m +2, ..., n , т.е. оставляем их на тех же местах, что и в расписании ω . На оставшихся местах располагаем оставшиеся неупорядоченные работы, сохраняя взаимное расположение, которое у них было в раписании ω .

Л е м м а I . При $k < \ell$ любое расписание ω с помощью преобразования P_1 приводится к расписанию $P_1(\omega)$, у которого значение обоих критериев не превосходит значения этих же критериев у расписания ω .

<u>Доказательство</u>. Пусть расписание ω имеет вид

$$\omega = (j_1 , j_2 , \dots , j_{m-1} , j_m , j_{m+1} , \dots , j_n) .$$

Если $j_1 = k$, то утверждение леммы очевидно. Пусть работа с номером k обслуживается m-ой по порядку в расписании ω. После применения преобразования P_1 к расписанию ω получим

$$P_1(\omega) = (k, i_2, i_3, \ldots, i_{m-1}, i_m, j_{m+1}, \ldots, j_n).$$

Будем обозначать через t_j момент окончания обслуживания работы j в расписании ω, а через t_j' – в расписании $P_1(\omega)$.

Из определения номера работы k (2) и (3), как работы, у которой

$$r_k = \min_{j \in N} r_j,$$

и из способа построения расписания $P_1(\omega)$ видно, что

$$t_{i_m}' \le t_{j_m} = t_k . \qquad (6)$$

Тогда, очевидно,

$$t_{j_i}' \le t_{j_i}, \quad i = m+1, \ldots, n \qquad (7)$$

и

$$t_{j_n}' \le t_{j_n} . \qquad (8)$$

Следовательно, общий момент окончания обслуживания работ не увеличился в результате преобразования P_1.

Из (7) видно, что пролеживание работ $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$ не увеличится

$$t_{j_i}' - d_{j_i} \le t_{j_i} - d_{j_i}, \quad i = m+1, \ldots, n . \qquad (9)$$

По построению работы множества B поставлены сразу же за работой с номером k, т.е.

$$B = \{i_2, i_3, \ldots, i_\alpha\}, \quad \{i_{\alpha+1}, \ldots, i_m\} \cap B = \varnothing .$$

Для работ множества $\{i_{\alpha+1}, \ldots, i_m\}$ из (6) видно

$$t_{i_\gamma}' \le t_k, \quad \gamma = \overline{\alpha+1, m} . \qquad (10)$$

Так как работы из этого множества не вошли в множество B, то

$$d_{i_\gamma} \ge d_k, \quad \gamma = \overline{\alpha+1, m} . \qquad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$t'_{i_\gamma} - d_{i_\gamma} \le t_k - d_k \quad, \gamma = \overline{\alpha+1, m} \;. \qquad (12)$$

(I2) показывает, что пролеживание работ $i_{\alpha+1}, \ldots, i_m$ не превысило максимального из пролеживаний расписания ω.

Если множество B пусто, $B = \varnothing$, то доказательство закончено. Пусть $B \ne \varnothing$. Сравним пролеживание работ из множества B с пролеживанием работы ℓ, которая определяется из (4) и (5)

$$\ell = max\,\{ i \in N ;\; r_i = r^2 \}, \qquad \text{где} \quad r^2 = \min_{j \in N \setminus \{k\}} r_j \,.$$

По условиям леммы $k < \ell$, поэтому работа с номером ℓ будет стоять после работ из множества B, т.е.

$$t'_i < t'_\ell \quad , \quad i \in B \;.$$

Отсюда

$$t'_i - p_i < t'_\ell - p_\ell \quad , \quad i \in B \,. \qquad (13)$$

Из определения множества B следует, что

$$r'_i \geqslant r_2 = r_\ell \quad , \quad i \in B \,. \qquad (14)$$

Если бы существовала работа $i \in B$, что $r'_i < r^2$, то $r'_i \le r^1$. Но $r^1 = \min_{j \in N} r_j$, а $k = min\{ j \in N : r_j = r^1 \}$, и в то же время $i < k$, отсюда следует (I4).

Так как $r_\ell = max\{ r'_\ell, T \}$, то $r_\ell \geqslant r'_\ell$, поэтому

$$r'_i \geqslant r'_\ell \quad , \quad i \in B \,. \qquad (15)$$

Из (I3), (I5) следует

$$t'_i - r'_i - p_i < t'_\ell - r'_\ell - p_\ell \quad , \quad i \in B \,,$$

и

$$t'_i - d_i < t'_\ell - d_\ell \quad , \quad i \in B \,, \qquad (16)$$

т.е. пролеживание работ множества B меньше пролеживания работы ℓ в расписание $P_1(\omega)$. Но из (9), (I2) видно, что $t'_\ell - d_\ell \le t_\ell - d_\ell$, тогда

$$t'_i - d_i < t_\ell - d_\ell \ , \ i \in B \ . \tag{17}$$

(9), (12), (17) показывают, что максимальное пролеживание расписания $P_1(\omega)$ не превышает максимального пролеживания работ в расписании ω. Учитывая (8), убеждаемся в правильности леммы.

Введем преобразование P_2. Пусть расписание ω имеет вид

$$\omega = (j_1, j_2, \dots, j_n) = (\pi_1, \bar f, \pi_2, f, \pi_3), \text{ где}$$

$\bar f$ – номер одной из двух работ (либо k, либо ℓ), которая обслуживается раньше другой в раписании ω, а f – номер работы, обслуживающейся позже. π_1, π_2, π_3 – участки расписания ω, расположенные между работами с номерами k и ℓ. Преобразование P_2 заключается в перестановке работы с номером $\bar f$ на первое место. Расписание P_2 будет иметь вид

$$P_2(\omega) = (\bar f, \pi_1, \pi_2, f, \pi_3) \ . \tag{18}$$

Лемма 2. При $\ell < k$ любое расписание ω с помощью преобразования P_2 приводится к расписанию $P_2(\omega)$, у которого значения обоих критериев не превосходят значений этих критериев расписания ω.

<u>Доказательство</u>. Если $j_1 = \bar f$, то $P_2(\omega) = \omega$, тогда утверждение леммы очевидно. Пусть $j_1 \neq \bar f$. Как и в доказательстве леммы I, будем обозначать через t_j и t'_j моменты окончания обслуживания работы j в расписаниях ω и $P_2(\omega)$.

Обозначим через $\{\pi_i\}$, i =1,2,3, множество номеров работ, входящих в участок расписания π_i. Так как $\tau_{\bar f} \leq \tau_j$ для всех $j \in \{\pi_1\}$, то от перестановки работы с номером $\bar f$ в начало расписания получим

$$t'_j \leq t_{\bar f} \quad , \ j \in \{\pi_1\} \ . \tag{19}$$

Следовательно,

$$t'_j \leq t_j \quad , \ j \in \{\pi_2\} \cup f \cup \{\pi_3\} \ . \tag{20}$$

Отсюда,

$$t'_{j_n} \leq t_{j_n} \ , \tag{21}$$

т.е. общий момент окончания не увеличился.

Из (20) следует

$$t'_j - d_j \leq t_j - d_j, \; j \in \{\pi_2\} \cup f \cup \{\pi_3\}. \qquad (22)$$

Рассмотрим пролеживания работ из множества $\{\pi_1\}$. Сравним их с пролеживанием работы f в расписании ω. Произвольно выберем работу $j \in \{\pi_1\}$. Сравним моменты поступления работ j и f. Возможны два случая :

I) Пусть $r'_j \leq r'_f$. Но при выборе номеров работ f и $\bar{f}$ (или k и ℓ) должно выполняться $r_f \leq r_j$, $r_{\bar{f}} \leq r_j$. Тогда

$$r_f = r_{\bar{f}} = r_j = r^1.$$

Но в этом случае $k < \ell$, что противоречит условию леммы. Следовательно, будет выполняться только случай

2) $r'_j > r'_f$. Из (I9) следует

$$t'_j - p_j < t_{\bar{f}} + \sum_{i \in \{\pi_2\}} p_i .$$

Тогда

$$t'_j - p_j - r'_j < t_{\bar{f}} + \sum_{i \in \{\pi_2\}} p_i + p_f - p_f - r'_f ,$$

$$t'_j - d_j < t_{\bar{f}} + \sum_{i \in \{\pi_2\}} p_i + p_f - d_f \leq t_f - d_f . \qquad (23)$$

Так как мы выбрали работы j произвольно из множества $\{\pi_1\}$, то из (23) следует, что пролеживание работ множества $\{\pi_1\}$ в расписании $P_2(\omega)$ не превышает пролеживания работы f в расписании ω. Учитывая (22), заключаем, что максимальное пролеживание расписания $P_2(\omega)$ не превышает максимального пролеживания расписания ω. Лемма доказана.

Пусть задано множество работ $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Необходимо найти оптимальные расписания для трех поставленных задач с момента времени T, тогда работа с номером j может быть начата обслуживаться не раньше

$$r_j = \max\{r'_j, T\}, \; j = 1,2,\ldots, n .$$

Согласно (2)-(5), определим номера работ k и ℓ. Предположим, что $k = n$, т.е.

$$r_n = r_k < r_j = r'_j, \; j = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (24)$$

$$d_j < d_k = d_n .$$

Тогда, очевидно, $\ell < n = k$.

Для нахождения оптимальных расписаний трех задач построим вспомогательное множество расписаний, которое обозначим через Ω_1. Обозначим $k_1=k$, $\ell_1=\ell$. Составим расписание ω_1 следующим образом. На первое место расписания поставим работу с номером $k_1=n$. Момент окончания обслуживания работы n

$$t_n = r_n + p_n .$$

Как видно из (24), $d_j < d_n$, $j=1,\dots,n-1$, тогда

$$r_j < r_j' + p_j < r_n' + p_n \le r_n + p_n = t_n , \; j=\overline{1,n-1} .$$

Следовательно, работы с номерами I,2,...,$n-1$ поступят в систему к моменту времени t_n. С момента времени t_n работы I,2,..., n -I упорядочим оптимальным образом. Для критерия минимизации максимального пролеживания, согласно теореме Джексона [I], оптимальным продолжением будет порядок обслуживания работ (I,2,..., n -I). Для критерия минимизации общего момента окончания порядок обслуживания работ множества $N\setminus\{n\}$ с момента времени t_n безразличен. Следовательно, и для двухкритериальной задачи порядок обслуживания (I,2,... , n -I) будет оптимальным. Расписание ω_1 примет вид

$$\omega_1 = (n, 1, 2, \dots, n-1) = (k_1, \pi_1) , \text{ где}$$

π_1 – частичное расписание, π_1 = (I,2,..., n -I). Построим расписание ω_2. На первое место поставим работу с номером ℓ_1. С момента завершения обслуживания этой работы

$$t_{\ell_1} = r_{\ell_1}' + p_{\ell_1}$$

находим среди работ множества $N\setminus\{\ell_1\}$, согласно формулам (2)-(5), номера работ k и ℓ. Величины r_j определяются при $T=t_{\ell_1}$

$$r_j = \max\{r_j', t_{\ell_1}\} , \quad j\in N\setminus\{\ell_1\} .$$

Из (24) будет следовать $r_n = t_{\ell_1}$. Поэтому один из номеров – k или ℓ – будет совпадать с номером n. Обозначим

$$k_2 = \max\{k,\ell\} = n ; \quad \ell_2 = \min\{k,\ell\} .$$

Очевидно, что работы множества $N\setminus\{\ell_1, k_2\}$ поступят в систему к моменту времени

$$t_n = r'_{\ell_1} + p_{\ell_1} + p_n .$$

Работу $k_2 = n$ мы поставили на второе место расписания ω_2. Проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были при построении участка π_1 расписания ω_1, получим

$$\omega_2 = (\ell_1, k_2, 1, 2, \dots, \ell_1 - 1, \ell_1 + 1, \dots, n-1) = (\ell_1, k_2, \pi_2),$$

где $\pi_2 = (1, 2, \dots, \ell_1 - 1, \ell_1 + 1, \dots, n-1)$.

Для получения расписания ω_3 работы с номерами ℓ_1 и ℓ_2 поставим на первое и второе места соответственно. С момента времени t_{ℓ_2} среди работ множества $N\setminus\{\ell_1, \ell_2\}$ находим номера работ k и ℓ.

$$k_3 = \max\{k, \ell\} = n$$

$$\ell_3 = \min\{k, \ell\} .$$

Расписание

$$\omega_3 = (\ell_1, \ell_2, k_3, \pi_3),$$

где π_3 – частичное расписание, в котором работы множества $\{\pi_3\} = N\setminus\{\ell_1, \ell_2, k_3\}$ упорядочены в порядке возрастания их порядковых номеров.

Расписание ω_m будет иметь вид

$$\omega_m = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{m-1}, k_m, \pi_m) = (\ell_1, \dots, \ell_{m-1}, n, \pi_m),$$

где π_m – участок расписания, в котором работы множества $\{\pi_m\} = N\setminus\{\ell_1, \dots, \ell_{m-1}, n\}$ упорядочены в порядке возрастания их номеров. Множество расписаний Ω_1 объединяет n построенных расписаний

$$\Omega_1 = \{\omega_i\}_{i=1}^{n} .$$

Л е м м а 3 . Если множество работ $N=\{I,2,\dots,n\}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \tau_n < \tau_j = \tau_j' \\ d_j < d_n \end{cases}, \quad j=1,2,\dots,n-1,$$

то любое расписание ω может быть приведено к некоторому расписанию из множества Ω_1 с помощью конечного числа пре - образований P_1 и P_2 .

Доказательство. Пусть расписание ω имеет вид

$$\omega = (j_1, j_2, \dots, j_n).$$

По формулам (2)-(5) найдем из множества работ N номера работ k и ℓ . В нашем случае $k=n$, $\ell<k$. Согласно лемме 2, применив преобразование P_2 , получим расписание $P_2(\omega)$, которое будет начинаться либо с работы под номером k , либо - ℓ . Переобозначим $\omega = P_2(\omega)$.

Предположим $j_1=n$, но $\omega \neq \omega_1$. С момента времени $t_{j_1}=t_n$ среди работ множества $N\setminus\{n\}$ находим номера работ k и ℓ . Так как $\tau_j' < t_n$ для всех $j\in N\setminus\{n\}$, то из (2) - (5) видно, что $k=I$, $\ell=n-I$, $k<\ell$. Для распи - сания $\pi=(j_2, j_3, \dots, j_n)$, составленного с момента времени t_n , применим преобразование P_1 . Получим расписание $P_1(\pi)$, в котором на первом месте стоит работа под номером I. С момента времени $t_1=\tau_n+p_n+p_1$ среди работ множества $N\setminus\{n,1\}$ находим номера работ k и ℓ . Очевидно, $k=2$, $\ell=n-I$. Применим преобразование P_1 . Повто - рив еще (n -3) раза преобразование P_1 , получим расписание ω_1 .

Предположим $j_1\neq n$, тогда $j_1=\ell=\ell_1$. Далее доказательство будет проводиться в виде следующего алгоритма. Пусть расписание ω имеет вид

$$\omega = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{m-1}, \pi),\ m>1,\ \omega \bar{\in} \Omega_1.$$

Шаг I. С момента времени $t_{\ell_{m-1}}$ среди работ множества $\{\pi\}$ находим по формулам (I)-(5) номера работ k и ℓ . Так как $\tau_n = t_{\ell_{m-1}}$, то $n=\max\{k,\ell\}=k_m$.

Шаг 2. Если $k < \ell = n$, т.е. $\ell_m = n$, то применив преобразование P_1 над расписанием π , получим расписание $P_1(\pi) = (k, \pi')$, начинающееся с работы $k = \ell_m$. Получим расписание

$$\omega' = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{m-1}, P_1(\pi)) = (\ell_1, \ldots, \ell_m, \pi').$$

Переобозначим $\omega = \omega'$. $m = m+1$. Иди на шаг I.

Шаг 3. Если же $k > \ell$, тогда $k = n$, $k_m = k$, $\ell_m = \ell$. Применим преобразование P_2 над расписанием π . Получим

$$\omega' = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{m-1}, P_2(\pi)).$$

Шаг 4. Если $\omega' = (\ell_1, \ldots, \ell_{m-1}, \ell_m, \pi')$, то переобозначим $\omega = \omega'$. $m = m+1$. Иди на шаг I.

Шаг 5. Пусть $P_2(\pi) = (k, \pi') = (n, \pi')$, т.е. $\omega' = (\ell_1, \ldots, \ell_{m-1}, n, \pi')$. Работы множества $\{\pi'\}$ к моменту окончания обслуживания работы n в расписание ω' поступят в систему. Выберем номера работ k и ℓ .

$$k = \min\{\pi'\}, \quad \ell = \max\{\pi'\}.$$

Применив $(n-m)$ раз преобразование P_1 , приведем расписание ω к расписанию $\omega_m \in \Omega_1$.

Из алгоритма видно, что не более чем через n преобразований P_1 и P_2 придем к расписанию из множества Ω_1 . Как следует из лемм I и 2, значения критериев полученного расписания не превышают значений критериев расписания ω . Лемма доказана.

Обозначим через q_i и T_i значения критериев расписания $\omega_i \in \Omega_1$:

$$q_i = \max_{1 \le j \le n} \{t_j - d_j\},$$

$$T_i = \max_{1 \le j \le n} \{t_j\}.$$

Из построения множества расписаний Ω_1 видно, что $T_1 < T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Расписания ω_i , у которых $q_1 \le q_i$ не будут являться решениями трех рассматриваемых задач. Исключим из множества Ω_1 эти расписания. Оставшиеся расписания заново пронумеруем в порядке возрастания величин T_i , т.е. $T_1 < T_2 \le T_3 \le \ldots \le T_{m_1}$. Если $T_i = T_{i+1}$, то $q_i \le q_{i+1}$.

Рассмотрим расписания ω_i, для которых верны неравенства

$$\begin{cases} q_2 \le q_i \\ T_2 \le T_i \end{cases}, \quad i = 3, \dots, m_1 .$$

Такие расписания ω_i можно исключить из рассмотрения, так как значения критериев раписания ω_2 не больше значений критериев этих расписаний. Оставшиеся расписания заново пронумеруем $T_1 < T_2 < T_3 \le \dots \le T_{m_2}$, если $T_i = T_{i+1}$ то $q_i \le q_{i+1}$. После некоторого числа таких сокращений получим множество расписаний, которое обозначим через $\Omega_2 = \{\omega_i\}_{i=1}^{m}$. Для значений критериев расписаний множества Ω_2 верны соотношения:

$$T_1 < T_2 < \dots < T_m ,$$

$$q_1 > q_2 > \dots > q_m .$$

Из леммы 3 и из сокращений множества расписаний Ω_1 видно, что расписание ω_m будет являться решением для первой задачи. Расписание $\omega_1 = (n, 1, 2, \dots, n-1)$ есть решение второй задачи. А расписания $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, т.е. все множество Ω_2, будут являться решениями задачи 3.

Л и т е р а т у р а

I. К о н в е й Р. В., М а к с в е л л В. Л., М и л л е р Л. В. Теория расписаний.-М.: Наука, 1975, с.46-47.

Т.К.Белялов, Р.Ф.Хабибуллин

О ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ПАРТИЙ

В статье рассматривается задача оптимального выбора размеров партий продукции (изделий, деталей) для многономенклатурного серийного производства. Эта задача здесь сформулиро -