На правах рукописи

Абдикалыков Абдикожа Кожанасиридинович

# Вычисление собственных значений для нормальных матриц специальной структуры и смежные вопросы теории матриц

01.01.07 — Вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2017

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Икрамов Хаким Дододжанович**, доктор физико–математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Книжнерман Леонид Аронович**, доктор физико–математических наук, руководитель отдела математического моделирования АО «Центральная Геофизическая Экспедиция»

**Горейнов Сергей Анатольевич**, кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт вычислительной математики Российской академии наук»

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего профессионального образования «Сколковский институт науки и технологий»

Защита состоится 10 мая 2017 года в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, кабинет 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан "____" ______________ 2017 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.43,
доктор физико–математических наук, профессор Е.В. Захаров

## Общая характеристика работы

### Актуальность работы

Задачи на собственные значения являются одним из важнейших разделов вычислительной линейной алгебры. В данной работе исследуется задача нахождения всех собственных значений матрицы, называемая в дальнейшем для краткости спектральной задачей. В численной практике решения спектральной задачи для матриц не слишком высокого порядка наибольшей популярностью пользуется QR-алгоритм. В частности, в широко известной среде инженерных вычислений Matlab этот метод реализован стандартной функцией eig. Для эрмитовых (или, в вещественном случае, симметричных) матриц существует значительно более эффективная модификация QR-алгоритма, что привело к вопросу построения алгоритма такой же или сопоставимой эффективности для всего класса нормальных матриц. Кажется вполне естественным, что такой алгоритм должен существовать, поскольку нормальные матрицы обладают тем же набором хороших свойств, что и вещественные симметричные и комплексные эрмитовы матрицы, за исключением вещественности собственных значений, которая не играет особой роли.

Однако, несмотря на многие усилия, удовлетворительные результаты были до сих пор получены только для некоторых частных случаев. Например, в статье *Calvetti D., Reichel L., Xu H.* (Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 476. P. 197–232) предлагается метод решения спектральной задачи для унитарных матриц. Что касается нормальных матриц общего вида, то для них всё ещё не найдено метода, сравнимого по эффективности с симметричным QR-алгоритмом.

Таким образом, задача построения эффективного алгоритма решения спектральной задачи для всего класса нормальных матриц оказалась весьма сложной. Поэтому в диссертации рассматривается менее амбициозная задача, а именно разработка приёмов ускорения спектральных алгоритмов для нормальных матриц специальных типов, таких как тёплицевы, ганкелевы матрицы, а также некоторые типы матриц, представимых в виде суммы тёплицева и ганкелева слагаемых (так называемые (T+H)-матрицы).

Отметим, что, подобно QR-алгоритму, все предлагаемые в диссертации методы подразумевают хранение в памяти вычислительной машины всей матрицы в явном виде, требуя таким образом порядка $n^2$ ячеек памяти, где $n$ — порядок матрицы, спектр которой мы ищем. Таким образом, данная задача рассматривается относительно матриц умеренного порядка. Единственным исключением могут быть (T+H)-циркулянты и подобные им подмножества (T+H)-матриц, рассматриваемые в §3 главы 2: для них были выведены явные формулы вычисления спектра, которые затрагивают элементы только первой строки или только первого столбца. Мы называем (T+H)-циркулянтами матрицы, представимые в виде суммы (тёплицевого) циркулянта и ганкелевого циркулянта. Циркулянтами, в свою очередь, называются матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_0 \end{pmatrix},$$

а ганкелевыми циркулянтами — матрицы вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_{n-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_{n-1} \\ h_{n-2} & \dots & h_0 & h_{n-1} & h_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & \dots & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Мотивация теоретической части работы была почерпнута из статьи *Wilkes D.M., Morgera S.D., Noor F., Hayes M.H.* (IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39. № 9. P. 2146–2148). Основным результатом данной публикации являлось следующее утверждение: каждое из отображений

$$A \mapsto Q_i^* A Q_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_n + iP_n), \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_n - iP_n),$$
$$Q_3 = \frac{1}{2}((1+i)I_n + (1-i)P_n).$$

переводит множество эрмитовых тёплицевых матриц в множество вещественных (T+H)-матриц. Здесь $P_n$ — так называемая перъединичная матрица, содержащая единицы на побочной диагонали и нули вне неё. Как видим, эти преобразования переводят одно подмножество комплексных (T+H)-матриц порядка $n$ (эрмитовы тёплицевы матрицы) в другое (вещественные (T+H)-матрицы) путём унитарного подобия, причём, как можно показать, эти подобия овеществляют любую центроэрмитову матрицу. Поскольку переход к вещественной арифметике позволяет быстрее проводить машинные вычисления, возникает логичный вопрос: какие ещё унитарные подобия могут облегчить решение спектральной задачи для тёплицевых, ганкелевых или (T+H)-матриц? В связи с этим вопросом исследуются группы унитарных автоморфизмов $\mathrm{UAut}(T_n)$, $\mathrm{UAut}(H_n)$, $\mathrm{UAut}(TH_n)$, где

$$U \in \mathrm{UAut}(T_n) \Leftrightarrow \forall A \in T_n \qquad U^*AU \in T_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}(H_n) \Leftrightarrow \forall A \in H_n \qquad U^*AU \in H_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}(TH_n) \Leftrightarrow \forall A \in TH_n \qquad U^*AU \in TH_n.$$

Здесь $T_n$, $H_n$, $TH_n$ — множества тёплицевых, ганкелевых и (T+H)-матриц порядка $n$ соответственно, $U$ — унитарная матрица. Первые две группы ($\mathrm{UAut}(T_n)$ и $\mathrm{UAut}(H_n)$) были описаны Х.Д. Икрамовым. В диссертации анализ структуры этих групп, во многом отличающийся от рассуждений Х.Д. Икрамова, дан с целью упростить понимание значительно более сложного анализа группы $\mathrm{UAut}(TH_n)$. Как выяснилось, матрицы $Q_i$, $i = 1, 2, 3$, входят в $\mathrm{UAut}(TH_n)$, то есть, осуществляют автоморфизм пространства (T+H)-матриц. В диссертации дано исчерпывающее описание группы $\mathrm{UAut}(TH_n)$. Кроме того, в диссертации приведён анализ групп автоморфизмов, действующих в пространствах тёплицевых и ганкелевых матриц посредством конгруэнции:

$$U \in \mathrm{UAut}_c(T_n) \Leftrightarrow \forall A \in T_n \qquad U^TAU \in T_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}_c(H_n) \Leftrightarrow \forall A \in H_n \qquad U^TAU \in H_n.$$

Поскольку унитарные конгруэнции являются частным случаем псевдоподобий ($A \mapsto U^{-1}A\bar{U}$), то такие автоморфизмы могут быть использованы для упрощения процедуры нахождения псевдоспектра.

**Цель работы**

Целями данной работы являются построение эффективных спектральных алгоритмов для нормальных матриц специального вида, а также получение описаний групп унитарных автоморфизмов множеств тёплицевых, ганкелевых и (T+H)-матриц, осуществляемых путём подобий и конгруэнций.

Унитарные автоморфизмы, осуществляемые путём подобий, могут быть применены для решения спектральной задачи посредством перехода к подобным матрицам более простой структуры. Аналогично, унитарные автоморфизмы, действующие посредством конгруэнций, могут быть использованы при вычислении псевдособственных значений, определяемых так же, как в статье *George A., Ikramov Kh.D., Matushkina E.V., Tang W.-P.* (SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1995. Vol. 16. № 4. P. 1107–1126).

**Новые научные результаты, выносимые на защиту**

1. Получены эффективные алгоритмы решения спектральной задачи для нормальных тёплицевых, нормальных ганкелевых матриц и некоторых алгебр, состоящих из (T+H)-матриц.

2. Получено описание групп унитарных автоморфизмов, действующих посредством конгруэнций в пространствах тёплицевых и ганкелевых матриц.

3. Дано объяснение связи между полученными группами.

4. Получено описание группы унитарных автоморфизмов пространства (T+H)-матриц, осуществляемых путём подобия.

**Научная новизна работы, основные идеи**

Классификация нормальных тёплицевых и нормальных ганкелевых матриц была получена не так давно, поэтому алгоритмы для таких матриц, использующие особенности их структуры, действительно новы. Для повышения эффективности алгоритмов использовались такие идеи, как переход к вещественному случаю, разбиение задачи порядка $n$ на две или более задач меньшего порядка, использование быстрого дискретного преобразования Фурье, диагонализация (или приведение к квазидиагональному виду с малыми порядками диагональных блоков) матриц из специальных алгебр (T+H)-матриц. Исследования автоморфизмов матриц специальной структуры, в особенности (T+H)-матриц, впервые привязываются к спектральной задаче. Также впервые были получены описания группы автоморфизмов (T+H)-матриц, осуществляемых с помощью унитарных подобий.

**Практическая значимость работы**

Разработаны методы для нахождения собственных значений нормальных ганкелевых, нормальных тёплицевых и некоторых классов (T+H)-матриц. Все алгоритмы реализованы в виде функций Matlab. Они успешно используют специальную структуру матриц и существенно превосходят по скорости стандартные спектральные алгоритмы.

**Личный вклад автора**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все выносимые на защиту результаты получены лично автором.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности**

Содержание и результаты работы соответствуют паспорту специальности 01.01.07, а именно соответствуют областям исследований:

1. Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники.

2. Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности.

3. Особенности численных методов и связанных с ними программных комплексов, отражающие рост производительности современных ЭВМ и способствующие повышению эффективности вычислений.

**Апробация работы**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

научный семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ под руководством профессора А. В. Гулина;

семинар “Матричные методы и вычисления”; научный руководитель — чл.-корр. РАН Е. Е. Тыртышников; Институт вычислительной математики РАН;

международная конференция “Matrix Methods in Mathematics and Applications”, Москва, август 2015 г.

**Публикации**

По теме диссертации опубликовано 10 научных работ, из них 8 в следующих журналах из списка ВАК: Вестник Московского университета, серия 15, Вычислительная математика и кибернетика; Журнал вычислительной математики и математической физики; Записки научных семинаров ПОМИ; Доклады РАН; Сибирский журнал вычислительной математики.

**Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, трёх глав основного текста, заключения, списка литературы и приложения.

Объем диссертации — 190 страниц.

Библиография включает в себя 61 наименование.

### Краткое содержание работы

**Глава 1.** В этой главе содержатся необходимые для формулировки поставленной задачи вводные определения, обозначения и теоремы. §1 представляет собой краткий обзор QR-метода для решения спектральной задачи. Особо указывается, что, в отличие от случая эрмитовых (в вещественном случае — симметричных) матриц, для нормальных матриц ещё не найдено алгоритма, эффективно использующего свойство нормальности. В силу нетривиальности данной задачи ставится цель нахождения такого алгоритма для нормальных матриц специального вида, например, нормальных тёплицевых и нормальных ганкелевых.

§2 содержит вводную информацию о тёплицевых, ганкелевых и (T+H)-матрицах. Даются определения циркулянтов, косых циркулянтов и $\phi$-циркулянтов. Кроме того, приводится классификация нормальных тёплицевых и ганкелевых матриц, на которой основываются алгоритмы, построенные во второй главе.

В §3 объясняется происхождение теоретической задачи, решаемой в третьей главе диссертации, как обобщения исследования, представленного в статье *Wilkes D.M., Morgera S.D., Noor F., Hayes M.H.* (IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39. № 9. P. 2146–2148). Если в данной статье были найдены лишь некоторые примеры подобий, переводящих эрмитовы тёплицевы матрицы в вещественные (T+H)-матрицы, то в диссертации приводится полное решение задачи описания унитарных автоморфизмов (T+H)-матриц путём подобия.

**Глава 2.** Данная глава содержит предлагаемые спектральные алгоритмы: их полные описания, указания к генерации тестовых матриц для проверки корректности и сравнения скорости работы программных реализаций этих алгоритмов в Matlab со скоростью стандартной Matlab-функции eig. В основу §1 положена классификация нормальных тёплицевых матриц, полученная в 1990-х годах Х.Д. Икрамовым и В.Н. Чугуновым. Согласно этой классификации, все такие матрицы могут быть лишь одного из двух типов, а именно линейные многочлены от эрмитовых матриц и $\phi$-циркулянты для некоторого числа $\phi$ с модулем 1. Алгоритм для матриц 1-го типа, описанный в §1, достигает ускорения в 8-11 раз по сравнению с функцией eig. В более очевидном циркулянтном случае радикально — с $O(n^3)$ до $O(n \log n)$ — снижается асимптотика числа арифметических операций.

В §2 используется классификация нормальных ганкелевых матриц, завершённая в сравнительно недавних работах В.Н. Чугунова и Х.Д. Икрамова. Она значительно сложнее, чем в тёплицевом случае, и её полное описание состоит из десяти различных классов. Мы не приводим её здесь, но в диссертации она воспроизводится в §2 главы 1. В соответствии с многочисленностью различных типов нормальных ганкелевых матриц применяется большая номенклатура приёмов ускорения. Среди них: овеществление комплексной матрицы, приведение к блочно-диагональному виду с диагональными блоками порядка 1 или 2, применение быстрого дискретного преобразования Фурье. Для классов 7 и 8 новой классификации, состоящих соответственно из ганкелевых циркулянтов и косых циркулянтов, достигается такое же улучшение асимптотики числа арифметических операций, как и для нормальных тёплицевых матриц 2-го типа. В остальных случаях при сравнении предлагаемого алгоритма со стандартным QR-алгоритмом коэффициент выигрыша по времени варьируется в диапазоне от 2 до 10.

В статье *Bevilacqua R., Bonannie N., Bozzo E.* (Linear Algebra and its Applications. 1995. Vol. 223/224. P. 99-118) доказывается, что централизаторы специальных матриц вида $\widetilde{S} = S + \widetilde{E}$ являются алгебрами (T+H)-матриц. Здесь $S$ — трёхдиагональная матрица с нулём на главной диагонали и единицами на двух соседних с ней, $\widetilde{E} = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{n1}E_{n1} + \alpha_{nn}E_{nn}$, где $E_{jk}$ — матричная единица, то есть матрица, единственный ненулевой элемент которой равен единице и находится в позиции $(j,k)$. В §3 приводятся алгоритмы вычисления собственных значений для матриц из четырёх таких алгебр. Каждая алгебра однозначно определяется набором чисел $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn})$; например, четвёрке (0, 1, 1, 0) соответствует множество (T+H)-циркулянтов, а четвёрке (0, -1, -1, 0) — множество косых (T+H)-циркулянтов. Для всех случаев выписываются явные формулы для нахождения спектра, что позволяет не использовать для этой цели итерационные методы. Асимптотика сложности вычисления всех собственных значений — $O(n^2)$, однако применение быстрого дискретного преобразования Фурье позволяет улучшить эту оценку до $O(n \log n)$.

**Глава 3.** В последней главе приводится описание групп унитарных автоморфизмов матриц специального вида с последующим доказательством сформулированных положений. Другими словами, исследуются множества $\mathrm{UAut}(T_n)$, $\mathrm{UAut}(H_n)$, $\mathrm{UAut}_c(T_n)$, $\mathrm{UAut}_c(H_n)$, $\mathrm{UAut}(TH_n)$, где

$$U \in \mathrm{UAut}(T_n) \Leftrightarrow \forall A \in T_n \qquad U^*AU \in T_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}_c(T_n) \Leftrightarrow \forall A \in T_n \qquad U^TAU \in T_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}(H_n) \Leftrightarrow \forall A \in H_n \qquad U^*AU \in H_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}_c(H_n) \Leftrightarrow \forall A \in H_n \qquad U^TAU \in H_n,$$

$$U \in \mathrm{UAut}(TH_n) \Leftrightarrow \forall A \in TH_n \qquad U^*AU \in TH_n.$$

Мотивы, побуждающие к исследованию этих групп, были изложены в разделе «Актуальность работы».

В первых двух параграфах обсуждаются результаты Х.Д. Икрамова по описанию групп $\mathrm{UAut}(T_n)$ и $\mathrm{UAut}(H_n)$. Их доказательства существенно изменены по сравнению с рассуждениями Х.Д. Икрамова с тем, чтобы приблизить аргументацию к той, что применяется в оригинальных результатах автора. Включение данного материала необходимо для лучшего понимания дальнейшего текста.

§3 посвящён описанию группы автоморфизмов $\mathrm{UAut}_c(T_n)$. Основным результатом данного параграфа служит теорема 3.3.

*Теорема 3.3. Справедливы следующие утверждения:*

*1. Для $n = 2$ любая матрица $U \in \mathrm{UAut}_c(T_2)$ представима в виде $\sigma T$, где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, $T$ — элемент группы, порождённой матрицами $\Lambda_2 = \mathrm{diag}\ (1, -1)$, $P_2$ и матрицами такого вида:*

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & i\sin\phi \\ i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

*для произвольных аргументов $\phi$.*

*2. При $n > 2$ любая матрица $U \in \mathrm{UAut}_c(T_n)$ представима в виде $\sigma T$, где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, $T$ — матрица из дискретной мультипликативной группы, образующими которой являются диагональная матрица $\Lambda_n = \mathrm{diag}\ (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$ и перъединичная матрица $P_n$.*

В §4 содержится описание группы $\mathrm{UAut}_c(H_n)$. Оно выделено в теорему 3.4.

*Теорема 3.4. Справедливы следующие утверждения:*

*1. При $n = 2$ множество $\mathrm{UAut}_c(H_n)$ совпадает с унитарной группой $\mathbb{U}_2$.*

*2. При $n > 2$ все матрицы $U \in \mathrm{UAut}_c(H_n)$ представимы в одном из двух следующих видов:*

*а) $U = \sigma \cdot \mathrm{diag}\ (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$;*

*б) $U = \sigma P_n \cdot \mathrm{diag}\ (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$.*

*В обоих случаях $\sigma$ и $\varepsilon$ — комплексные числа, равные по модулю единице.*

В §5 выясняются причины возникновения отношений двойственности между найденными группами автоморфизмов. Под отношением двойственности понимаются равенства

$$\mathrm{UAut}(T_n) = \mathrm{UAut}_c(H_n)$$

и

$$\mathrm{UAut}(H_n) = \mathrm{UAut}_c(T_n)$$

для $n > 2$, вытекающих из результатов предыдущих двух параграфов. Естественным образом возникает вопрос, можно ли было предугадать совпадение этих групп. На этот вопрос дан ответ, заключающийся в доказательстве равенств $\mathrm{UAut}(T_n) = \mathrm{UAut}_c(H_n)$ и $\mathrm{UAut}(H_n) = \mathrm{UAut}_c(T_n)$, не использующем теорем 3.3 и 3.4.

Самой сложной теоретической задачей диссертации является исследование группы $\mathrm{UAut}(TH_n)$, которому посвящён наиболее объёмный параграф третьей главы — §6. Главным результатом данного параграфа и всей главы является теорема 3.7.

*Теорема 3.7. Справедливы следующие утверждения:*

*1. Для $n = 3$ любая матрица $U \in \mathrm{UAut}(TH_3)$ представима в виде $\sigma T$, где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, $T$ — элемент группы, порождённой матрицами $\Lambda_3$, $P_3$, а также всеми матрицами вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1}$$

*где*

$$\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon), \qquad \beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon), \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}},$$

*$\varepsilon \in [0, 1]$ и $\xi \in (-\pi, \pi]$.*

*2. Для $n = 4$ любая матрица $U \in \mathrm{UAut}(TH_4)$ представима в одном из четырёх следующих видов:*

*а)*

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos\gamma & i\sin\gamma & -\cos\gamma & -i\sin\gamma \\ i\sin\gamma & -\cos\gamma & i\sin\gamma & -\cos\gamma \\ -\cos\gamma & i\sin\gamma & -\cos\gamma & i\sin\gamma \\ -i\sin\gamma & -\cos\gamma & i\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{2}$$

*где $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$;*

*б)*

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos\gamma & i\sin\gamma & -\cos\gamma & -i\sin\gamma \\ -i\sin\gamma & \cos\gamma & -i\sin\gamma & \cos\gamma \\ -\cos\gamma & i\sin\gamma & -\cos\gamma & i\sin\gamma \\ i\sin\gamma & \cos\gamma & -i\sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{3}$$

*где снова* $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$*;*

*в)* $U = e^{i\phi}(\cos\psi \cdot I_4 + i \sin\psi \cdot P_4)$*, где* $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$*;*

*г)* $U = e^{i\phi}(\cos\psi \cdot I_4 + i \sin\psi \cdot P_4)\Lambda_4$*, где* $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$.

*3. Для* $n \geqslant 5$ *любая матрица* $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$ *представима в одном из двух следующих видов:*

*а)* $U = e^{i\phi}(\cos\psi \cdot I_n + i \sin\psi \cdot P_n)$*, где* $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$*;*

*б)* $U = e^{i\phi}(\cos\psi \cdot I_n + i \sin\psi \cdot P_n)\Lambda_n$*, где* $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$.

Ввиду сложности доказательства этой теоремы оно предваряется несколькими леммами и утверждениями, фиксирующими отдельные этапы исследования. Вначале доказывается лемма о (косо-)центросимметричности всех матриц из $\mathrm{UAut}(TH_n)$.

*Лемма 3.3. При* $n > 2$ *любая матрица из* $\mathrm{UAut}(TH_n)$ *центросимметрична либо косоцентросимметрична, причём косоцентросимметричной она может быть только при чётном* $n$.

После этого приводится доказательство теоремы 3.7 для $n = 3$. Дальше представляется результат исследования тех матриц из группы $\mathrm{UAut}(TH_n)$ ($n \geqslant 4$), которые не содержат нулевых элементов в своей первой строке, кроме, быть может, угловых позиций.

*Лемма 3.4. При* $n \geqslant 4$ *унитарная матрица* $U$*, для которой* $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \ldots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$*, тогда и только тогда принадлежит множеству* $\mathrm{UAut}(TH_n)$*, когда существуют нижнетреугольная вещественная тёплицева матрица* $R$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{C}$*,* $p, q \in \mathbb{R}$ *такие, что* $U^*RU = S + \widetilde{E}$*, где* $\widetilde{E} = \alpha E_{11} + \overline{\alpha} E_{nn} + pE_{1n} + qE_{n1}$*, а* $S$ *— трёхдиагональная тёплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицей на двух соседних с ней.*

Доказательство основной теоремы продолжается уже с учётом лемм 3.3 и 3.4, разделяясь естественным образом на две ветви: для порядка $n = 4$ и для $n > 4$.

## Заключение

### Основные выводы

В работе предлагаются численные алгоритмы, решающие спектральную задачу для нормальных тёплицевых, ганкелевых и некоторых классов (T+H)-матриц. Для всех алгоритмов приводится теоретическое обоснование. Экспериментально подтверждается эффективность этих алгоритмов. Достижение выигрыша в каждом алгоритме основано на использовании специальной структуры матриц.

Получены полные описания групп унитарных автоморфизмов $\mathrm{UAut}_c(T_n)$, $\mathrm{UAut}_c(H_n)$, $\mathrm{UAut}(TH_n)$, осуществляемых путём подобий и конгруэнций.

**Рекомендации по применению результатов**

Результаты, полученные в данной работе, могут быть применены в задачах прикладной математики, в которых требуется найти спектр нормальных матриц специальной структуры, в исследованиях нормальных матричных пучков $A + \lambda B$, если обе матрицы $A$ и $B$ имеют специальную структуру, в некоторых спектральных задачах для полиномиальных матриц, а также при дальнейшем изучении спектральной теории. Некоторые алгоритмы применимы и для более общих случаев: например, для нормальных ганкелевых циркулянтов предложен эффективный алгоритм, работающий для всех ганкелевых циркулянтов вообще. Программная реализация построенных алгоритмов рекомендуется к использованию в среде Matlab.

Теоретическая часть работы может быть применена в задачах в исследованиях спектра и псевдоспектра комплексных матриц специальной структуры.

## Публикации по теме диссертации

**Публикации в журналах из перечня ВАК:**


1. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О некоторых приёмах ускорения при вычислении собственных значений нормальных тёплицевых матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1835–1838.

2. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О вычислении собственных значений для некоторых классов ганкелевых матриц // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2014. № 1. С. 5–10.

3. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О собственных значениях (T+H)-циркулянтов и косых (T+H)-циркулянтов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 111–124.

4. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Унитарные конгруэнции и ганкелевы матрицы // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 457, № 5. С. 507–509.

5. Абдикалыков А. К. Об унитарных автоморфизмах пространства (T+H)-матриц // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 5–12.

6. Икрамов Х. Д., Абдикалыков А. К., Чугунов В. Н. Унитарные автоморфизмы пространства (T+H)-матриц порядка 3 // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 137–151.

7. Абдикалыков А. К. Центросимметричность унитарных матриц, сохраняющих множество (T+H)-матриц путём подобия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 739–741.

8. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Унитарные автоморфизмы пространства (T+H)-матриц порядка 4 // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 4. С. 3–6.

**Публикации в журналах вне перечня ВАК:**

9. Abdikalykov A.K., Chugunov V.N., Ikramov Kh.D. Unitary congruence automorphisms of the space of Toeplitz matrices // Linear and Multilinear Algebra. 2015. Vol. 63, no. 6. P. 1195–1203.

10. Abdikalykov A.K., Chugunov V.N., Ikramov Kh.D. Unitary automorphisms of the space of Toeplitz-plus-Hankel matrices // Special Matrices. 2015. Vol. 3, no. 1. P. 58–68.