

**Отзыв официального оппонента на диссертацию
Максаева Артема Максимовича на тему
«Характеризации гомоморфизмов графов матричных
отношений», представленную на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук по
специальности 1.1.5 — «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»
(01.01.06 — «Математическая логика,
алгебра и теория чисел»)**

Диссертация посвящена задачам, находящимся на стыке алгебры матриц и теории графов. В комбинаторной теории матриц, начало которой, видимо, следует вести от результатов Фробениуса о собственных значениях неотрицательных матриц, естественным образом возникают неразрешимые и примитивные матрицы: неразрешимые матрицы соответствуют сильно связанным ориентированным графам, а примитивные — сильно связанным орграфам, для которых не существует нетривиального общего делителя длин всех циклов. Теория Перрона-Фробениуса нашла множество интересных и разнообразных приложений: в биологии (модель распределения популяции по возрастным группам), экономике (модель производства/потребления Леонтьева), информатике (алгоритм PageRank для ранжирования результатов поиска), вычислительной математике (оценка скорости сходимости итерационных методов) и в других областях.

Целью диссертации является исследование гомоморфизмов и автоморфизмов графов нескольких вариантов матричных отношений: (1) отношений, определяемых определенными значениями скрамблинг индекса; (2) отношений Грина на моноиде матриц над полем; (3) отношения вырожденности суммы матриц над полем.

Глава 1 диссертации посвящена скрамблинг-индексу ориентированного графа. В пионерских работах, в которых был введен скрамблинг-индекс, он был определен только для примитивных графов. Автор расширяет определение на произвольные орграфы, дает критерий конечности скрамблинг-индекса и формулирует алгоритм проверки, имеющий полиномиальную сложность. Аналогичные результаты также сформулированы и доказаны для раскрашенных мультиграфов автоматного типа. Доказаны верхние оценки для скрамблинг-индекса для произвольных графов, вычислен скрамблинг-индекс для некоторых классов орграфов.

В главе 2 исследуются линейные отображения, сохраняющие значения скрамблинг-индекса. Общая техника, применяемая здесь, заключается в доказательстве утверждений для матриц над булевым полукольцом с последующим обобщением на произвольное антинегативное коммутативное полукольцо с единицей и без делителей нуля. В этой главе в качестве еще одного

обобщения рассматривается понятие λ -скрамблинг-индекса. Структура λ -скрамблинг матриц для произвольного λ оказывается довольно сложной, в работе приведена конструкция построения нетривиальных примеров таких матриц. Описание линейных отображений, сохраняющих множество λ -скрамблинг матриц, помогает понять структуру этого множества.

Очень приятно, что автор мотивирует вводимые теоретические понятия и постановки задач, описывая их приложения: скрамблинг-индекс дает оценку коэффициентов эргодичности стохастической матрицы (матрицы переходов марковской цепи), многомерный скрамблинг-индекс дает подход к гипотезе Черни о пороге синхронизации конечного автомата, λ -скрамблинг-индекс описывает системы связи без памяти в теории коммуникаций.

В главе 3 решается задача описания линейных отображений квадратных матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$, которые сохраняют отношения Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$. Задача решена для произвольных полей в случае отношения $\mathcal{J}$, для алгебраически замкнутых полей в случае отношения $\mathcal{H}$, и для полей, в которых каждый многочлен степени n имеет корень (в частности, для алгебраически замкнутых полей), в случае отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$.

В главе 4 вводится понятие тотального графа $T_n(\mathbb{F})$ для кольца матриц $M_n(\mathbb{F})$. Вершинами тотального графа являются все матрицы, а две матрицы A и B соединяются ребром в том случае, если $\det(A+B) = 0$. Очевидно, что отображения вида $T(A) = PAQ$ и $T(A) = PA^TQ$ являются автоморфизмами тотального графа, а еще Фробениус доказал, что все линейные отображения, сохраняющие определитель, имеют такой вид. Однако для при изучении группы автоморфизмов тотального графа условие линейности не является обязательным. Эффективным условием показало себя условие пучковости, которое немного усиливает требование сохранения вырожденности матрицы, но зато позволяет отказаться от условия линейности. Лучший результат, имевшийся в данном направлении, был сформулирован для поля комплексных чисел, требовал дополнительно сюръективность или непрерывность отображения (а в доказательстве использовались топологические свойства поля). Автору диссертации удалось обобщить этот результат на случай произвольного алгебраически замкнутого поля, заменив требование непрерывности или сюръективности на требование существования матрицы D такой, что $T(D)$ – невырождена. На мой взгляд, это является очень существенным продвижением.

В главе 5 понятие тотального и регулярного графа распространяется на произвольное подмножество A векторного пространства $\mathbb{F}^n$, $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. Основные результаты тут касаются случая, когда A – множество нулей многочлена от n переменных. Доказано, что кликовое число регулярного графа в этом случае конечно, а в тотальном графе над бесконечным полем для любого $s \in \mathbb{N}$ существует конечный подграф такой, что степени всех его вершин не меньше s . Последний результат автор интерпретирует как указание на то, что конечность хроматического числа тотального графа не может быть доказана простыми аргументами.

Работа выполнена на высоком уровне, получен целый спектр нетривиальных результатов, потребовавших весьма техничных доказательств. Во вводных частях к каждой главе автор дает качественный обзор имеющейся литературы по данному вопросу и объясняет мотивацию, приводящую именно к такой постановке задачи. Есть некоторое количество незначительных замечаний к тексту диссертации:

1) Во введении опечатка на стр.16: вместо $V(p) \subseteq \mathbb{F}$ должно быть $V(p) \subseteq \mathbb{F}^n$ (в тексте главы 5 правильно).

2) Определение 1.1.6 (простой путь) – не совсем корректно, оно допускает совпадение конечной вершины и одной из промежуточных.

3) В формулировке теоремы 1.2.14 стоит указать, что s_t – минимальная из длин циклов (иначе формулировка не симметрична по s_i).

4) В формулировках теорем 4.1.5 и 4.1.6 упоминается одно отображение T там, где должна быть пара отображений T_1, T_2 (в автореферате это уже исправлено).

5) Не приведено никаких доводов в поддержку Гипотезы 5.2.11. Сама ее формулировка допускает разночтения: предполагается, что должны существовать многочлен произвольной заданной степени n или любой? Более того, отсутствие требования алгебраической замкнутости поля $\mathbb{F}$ вызывает сомнение, что в такой формулировке она может быть верна. Думаю, что было бы лучше сформулировать гипотезу просто как открытый вопрос.

Перечисленные замечания не являются существенными и не снижают научную ценность диссертации.

Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы. Считаю, что диссертационная работа Максаева А.М. «Характеризации гомоморфизмов графов матричных отношений» является научно-квалифицированной работой, соответствующей критериям, определенным пп. 2.1 – 2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформленной согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
кафедры теоретической информатики
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Адрианов Николай Михайлович
17 мая 2022 г.



подпись заверю спец. комис. по кат.м
А.И. Карасяков