СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deryabina G., Krasilnikov A. On some products of commutators in an associative ring // International Journal of Algebra and Computation. 2019. Vol. 29, № 2. P. 333-341.
2. Латышев В. Н. О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сибирский математический журнал. 1965. Том 6, № 6. С. 1432-1434.
3. Levin F., Sehgal S. On Lie nilpotent group rings // Journal of Pure and Applied Algebra. 1985. Vol. 37. P. 33-39.
4. Sharma R. K., Srivastava J. B. Lie ideals in group rings // Journal of Pure and Applied Algebra. 1990. Vol. 63. P. 67-80.
5. Гришин А. В., Пчелинцев С. В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности. // Математический сборник. 2015. Том 206, № 11. С. 1610-1627.
6. Deryabina G., Krasilnikov A. Products of commutators in a Lie nilpotent associative algebra // Journal of Algebra. 2017. Vol. 469. P. 84-95
7. Krasilnikov A. The additive group of a Lie nilpotent associative ring // Journal of Algebra. 2013. Vol. 392. P. 10-22.
8. Deryabina G., Krasilnikov A. Products of several commutators in a Lie nilpotent associative algebra // International Journal of Algebra and Computation. 2017. Vol. 27. P. 1027-1040.
9. Bhupatiraju S., Etingof P., Jordan D., Kuszmaul W., Li J. Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields // Journal of Algebra. 2012. Vol. 372. P. 251-274.
10. Deryabina G., Krasilnikov A. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3 // Journal of Algebra. 2015. Vol. 428. P. 230-255.

УДК 512.64

О длине матричных алгебр инцидентности[1]

Н. А. Колегов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: na.kolegov@yandex.ru
О. В. Маркова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

[1]Исследования второго автора получили финансовую поддержку гранта РНФ 17-11-01124

On length of matrix incidence algebras

N. A. Kolegov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: na.kolegov@yandex.ru
O. V. Markova (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: ov_markova@mail.ru

Пусть $(\mathcal{N}, \preceq)$ — конечное частично упорядоченное множество. Элементы $\mathcal{N}$ можно занумеровать, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n.

Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$. Пусть $M_n(\mathbb{F})$ — алгебра всех квадратных матриц размера $n \times n$. Тогда определим *матричную алгебру инцидентности* $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ как линейную оболочку множества матричных единиц $\{E_{ij} \mid i \preceq j\}$. Тот факт, что $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ замкнуто относительно матричного умножения сразу следует из транзитивности отношения $\preceq$. Таким образом, мы определили $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ как подалгебру $M_n(\mathbb{F})$.

Отметим, что существуют и более общие подходы к понятию алгебры инцидентности. Ещё в 1964 году Д.-К. Рота [9] определил ее над локально-конечным частично упорядоченным множеством. Если это множество бесконечно, то полученная алгебра окажется бесконечномерной. Введенные Д.-К. Ротой алгебры всесторонне исследовались, подробное введение в эту область можно найти в монографии [10]. Отметим, что в 2009 году Н. Крипченко и Б. Новиков [6] обобщили понятие алгебры инцидентности на произвольное частично упорядоченное множество. Это открыло новое интересное направление в этой области.

Однако мы будем рассматривать порождающие системы только конечномерных алгебр, т.е. алгебр вида $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$. В 2000 году В. Лонгстафф и П. Розенталь [7] получили критерий, когда заданное подмножество является порождающим. Это позволяет перейти к вопросу вычисления функции длины на матричных алгебрах инцидентности. Впервые этот вопрос рассматривался вторым докладчиком в работе [3]. Дадим необходимые определения.

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над произвольным полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим любое конечное непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Словом длины t над S назовем произведение любых t элементов множества S (повторения допускаются). Пустое слово ($t = 0$) отождествляем с единицей алгебры $\mathcal{A}$. Линейную оболочку всех слов длины $\leq k$ обозначим как $\mathcal{L}_k(S)$. Если S — порождающая система $\mathcal{A}$, то для некоторого натурального m выполнено $\mathcal{L}_k(S) = \mathcal{A}$ для всех $k \geq m$. Минимальное такое m назовем *длиной порождающей системы* S и обозначим как $l(S)$. Максимум длин по всем порождающим системам называется длиной алгебры $\mathcal{A}$:

$$l(A) = \max\{l(S) \mid S \subseteq \mathcal{A},\ S \text{ порождает } \mathcal{A}\}. \tag{1}$$

В 1984 году А. Паз [8] выдвинул гипотезу, утверждающую что длина полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ равна $2n-2$. Однако до сих пор никому не удалось ни подтвердить её ни опровергнуть, хотя известны различные частичные результаты. Так, в работе [4] было показано, что гипотеза верна в предположении, что порождающие системы содержат циклическую матрицу. Отдельный интерес представляет вычисление длины собственных подалгебр матричной алгебры.

Перейдем теперь к вопросу исследования длин матричных алгебр инцидентности. Приведем основные результаты, полученные на данный момент. Начнем с алгебр инцидентности специального вида. Пусть $D_n(\mathbb{F})$ и $T_n(\mathbb{F})$ — подалгебры $M_n(\mathbb{F})$, состоящие из всех диагональный и верхнетреугольных матриц соответственно. Непосредственно проверяется, что $D_n(\mathbb{F})$ и

$T_n(\mathbb{F})$ — алгебры инцидентности. Действительно, $D_n(\mathbb{F})$ соответствует тривиальному порядку (равенству) на $\mathcal{N}$, а $T_n(\mathbb{F})$ — обычному линейному порядку $\leq$ на $\mathcal{N}$. По определению любая алгебра инцидентности $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ содержит $D_n(\mathbb{F})$ в качестве подалгебры. Более того, согласно [10, лемма 1.2.5] всегда найдется матрица перестановки P такая, что $P^{-1}\mathcal{A}P \subseteq T_n(\mathbb{F})$. Таким образом, $D_n(\mathbb{F})$ — минимальная (по включению) алгебра инцидентности, тогда как $T_n(\mathbb{F})$ является «максимальной» с точностью до одновременной перестановки строк и столбцов матриц. Длины этих алгебр вычисляются следующим образом.

Теорема 1 ([3, теорема 4.1]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(T_n(\mathbb{F})) = n - 1$.*

Далее $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое, меньшее или равное x.

Теорема 2 ([2, теорема 5.4]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если $|\mathbb{F}| \geq n$, то $l(D_n(\mathbb{F})) = n - 1$. Если же $|\mathbb{F}| = q < n$, то $l(D_n(\mathbb{F})) = (q-1)\lfloor \log_q n \rfloor + \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor - 1$.*

Более того, оказывается, что алгебры $D_n(\mathbb{F})$, $T_n(\mathbb{F})$ экстремальны не только в смысле включения, но и с точки зрения значений длины.

Теорема 3 ([3, лемма 4.2] [3, следствие 4.6]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — произвольная алгебра инцидентности. Тогда*

$$l(D_n(\mathbb{F})) \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant l(T_n(\mathbb{F})). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, получаем, что если $|\mathbb{F}| \geq n$, то всегда $l(\mathcal{A}) = n - 1$

Значит, для «больших» полей вопрос вычисления длины закрыт. Однако для «маленьких» полей проблема остается нерешенной. Хотя известен целый ряд оценок для конкретных алгебр [3, теоремы 5.5, 5.6, 6.4–6.6], [1, лемма 4.8], [5]. Также была получена следующая оценка общего вида.

Теорема 4 ([1, теорема 4.12]). *Пусть $\mathbb{F}$ — поле мощности q, и $n > q$. Пусть d — максимальная мощность цепи в $(\mathcal{N}, \preceq)$. Тогда*

$$l(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})) \leq d \cdot ((q-1)\lfloor \log_q n \rfloor + \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor) - 1. \tag{3}$$

Отдельный интерес представляет вопрос реализуемости значений длины алгебр инцидентности. Согласно теореме 3, если $|\mathbb{F}| \geq n$, то длина может принимать одно единственное значение: $n - 1$. Однако если $|\mathbb{F}| < n$, то ситуация совершенно иная. Рассмотрим частный случай, когда индекс нильпотентности радикала Джекобсона алгебры равен 2.

Теорема 5 ([5]). *Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — матричная алгебра инцидентности такая, что индекс нильпотентности ее радикала Джекобсона равен 2. Если $n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$ или $(n, |\mathbb{F}|) = (3, 2)$, тогда $l(\mathcal{A}) = n - 1$. Пусть эти условия не выполнены. Введем функции*

$$\delta_+(n,q) = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor} + q^{\lfloor \log_q n \rfloor} - 1 - n, \quad \delta_-(n,q) = n - \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor}. \tag{4}$$

Тогда

$$l(D_n(\mathbb{F})) \leq l(\mathcal{A}) \leq l(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + l(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c, \tag{5}$$

где $q = |\mathbb{F}|$, константа c равна 1, если $\delta_-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, q\right) > \delta_+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, q\right)$, и $c = 0$ в противном случае. Более того, для всех натуральных k таких, что $l(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq l(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + l(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c$, найдется матричная алгебра инцидентности $\mathcal{A}_k \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с индексом нильпотентности радикала 2 и значением длины $l(\mathcal{A}_k) = k$.

Таким образом, проблема реализуемости полностью решается для случая, когда радикал алгебры квадратично-нильпотентен. Как следствие, можно решить эту же проблему реализуемости без ограничений на радикал, но при условии, что поле «не слишком маленькое».

Следствие 1 ([5]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — матричная алгебра инцидентности. Предположим дополнительно, что $\lceil \frac{n}{2} \rceil \le |\mathbb{F}| \le \infty$. Тогда для всех натуральных k таких, что $l(D_n(\mathbb{F})) \le k \le l(T_n(\mathbb{F}))$, найдется матричная алгебра инцидентности $\mathcal{A}_k \subseteq M_n(\mathbb{F})$ со значением длины $l(\mathcal{A}_k) = k$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колегов Н. А., Маркова О. В. Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 2018. Том 472. С. 120-144.
2. Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Матем. сб. 2009. Том 200, № 12. С. 41–62.
3. Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Том 13 № 4. С. 165–197.
4. Guterman A. E., Laffey T. J., Markova O. V., Šmigoc H. A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl. 2018. Volume 543. P. 234–250.
5. Kolegov N. A. On the lengths of matrix incidence algebras with radicals of square zero. Preprint
6. Khripchenko N. S., Novikov B. V. Finitary incidence algebras // Comm. Algebra. 2009. Volume 37, № 5. P. 1670–1676.
7. Longstaff W. E., Rosenthal P. Generators of matrix incidence algebras // Australas. J. Combin. 2000. Volume 22. P. 117-121.
8. Paz A. An application of the Cayley-Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. 1984. Volume 15, № 2. P. 161-170.
9. Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory, I. Theory of Möbius Functions // Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1964. Volume 2. P. 340-368.
10. Spiegel E., O'Donnell C. J. Incidence algebras. — New York (NY): Marcel Dekker, Inc., 1997. 335 p.

УДК 512.541

Кольца с факторно делимой аддитивной группой

Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)
Финансовый университет при Правительстве РФ, Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Т. К. Ч. Нгуен (Вьетнам, г. Ханой)
FPT Университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com