
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Физтех-кластер академической и научной карьеры (Фундаментальные проблемы физики квантовых технологий)

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ДИНАМИКА КВАНТОВОЙ ПЕРЕПУТАННОСТИ В ГАУССОВСКИХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

(магистерская диссертация)

Студент:

Терманова Алёна Андреевна

(подпись студента)

Научный руководитель:

Филиппов Сергей Николаевич,
канд. физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2022

Аннотация

Квантовая запутанность часто является ключевым ресурсом во многих протоколах квантовой информатики. К сожалению, перепутанность квантовых состояний может уменьшаться из-за процессов декогеренции, вызванных внешними воздействиями, и в конечном итоге состояние может стать сепарабельным, тем самым нивелируются все преимущества протокола, основанного на ресурсе перепутанности. В связи с этим встаёт фундаментальная проблема стойкости квантовой перепутанности к внешним шумам. В настоящей работе исследована динамика перепутанности двухмодовых бозонных состояний под действием несимметричных локальных шумов, описываемых гауссовскими бозонными каналами ослабления или усиления. Были найдены негауссовские двухмодовые состояния, обладающие большей стойкостью к потере перепутанности по сравнению с произвольными гауссовскими состояниями.

Содержание

Введение	5
1. Системы тождественных бозонов	9
1.1. Принцип неразличимости частиц	9
1.2. Симметрии волновой функции системы тождественных частиц	9
1.3. Базис n -частичных состояний	12
1.4. Многочастичное пространство	13
1.5. Операторы рождения и уничтожения	14
1.6. Представление чисел заполнения	16
1.7. Операторы в многочастичном пространстве	17
2. Бозонные гауссовские состояния	19
2.1. Одномодовый случай	19
2.1.1. Когерентные состояния	19
2.1.2. Операторы сдвига	20
2.2. Многомодовый случай	21
2.2.1. Операторы Вейля	21
2.2.2. Характеристическая функция	23
2.3. Гауссовские состояния	24
2.3.1. Примеры гауссовских состояний и гауссовских унитарных преобразований	25
3. Бозонные гауссовские каналы	28
3.1. Открытые бозонные системы	28
3.2. Определение гауссовского канала	29
3.3. Одномодовые гауссовские каналы	30
3.3.1. Физический смысл аттенюатора и усилителя	31
4. Бозонные гауссовские каналы в формализме когерентных состояний	33
4.1. Канал с минимальным шумом	33
4.2. Композиция каналов с минимальным шумом	34
4.3. Интегральное представление Крауса	34
4.4. Действие канала на когерентные состояния и операторные обобщения когерентных состояний	37

5. Динамика квантовой перепутанности	39
5.1. Односторонний шум	39
5.2. Двусторонний шум: постановка задачи	39
5.3. Двусторонний шум: методы	40
5.4. Анализ результатов	44
6. Заключение	50
Список литературы	51

Введение

Квантовая запутанность часто является ключевым ресурсом во многих протоколах квантовой информатики, таких как квантовое распределение ключей [8, 26], сверхплотное кодирование [2], увеличение классической пропускной способности при использовании ресурса перепутанности [3], а также в физических приложениях, таких как квантовая метрология [13]. К сожалению, квантовые системы никогда не бывают полностью изолированы от внешних воздействий, поэтому приготовленные перепутанные состояния в процессе декогеренции общего вида теряют перепутанность, в результате чего в некоторый момент времени состояние перестаёт быть перепутанным (эффект "внезапной потери перепутанности" [29]) и, следовательно, все преимущества протокола, основанного на ресурсе перепутанности, нивелируются. В связи с этим встаёт фундаментальная проблема стойкости квантовой перепутанности к внешним шумам. Нахождение состояний, которые проявляют большую стойкость к потере перепутанности для фиксированной модели шума, чрезвычайно важно для дальнейшего развития квантовых технологий. Даже если состояние после действия шума является слабо перепутанным, то существуют протоколы очищения (дистилляции) квантовой перепутанности [19, 25]; однако если состояние становится распутанным, то все преимущества протоколов, основанных на эффекте перепутанности, становятся безвозвратно утеряны. Это приводит к задаче определения максимального уровня шума, превышение которого приводит к потере перепутанности у любого начального состояния.

Действие шумов описывается в формализме теории открытых квантовых систем [5]. Взаимодействие открытой системы с окружением, например при длительном прохождении сигнала по шумной квантовой линии связи, может приводить к эффектам диссипации и декогеренции, которые в конечном итоге способствуют разрушению квантовой запутанности. Динамика открытой квантовой системы уже не может быть описана посредством унитарных преобразований, но может быть смоделирована с помощью действия квантового канала, то есть вполне положительного и сохраняющего след отображения [31]. Наиболее пагубный для перепутанных квантовых состояний вид динамики описывается каналами, разрушающими перепутанность, которые преобразуют любое входное перепутанное состояние в сепарабельное [18]. Нахождение состояний, запутанность которых будет сохраняться под продолжительным действием шумных каналов - актуальная задача исследования, решение которой позволит расширить границы использования перепутанных состояний в задачах квантовой информатики.

Хотя конечномерные системы, такие как кубиты, являются удобными для описания, многие реальные приложения требуют рассмотрения систем с непрерывными переменными [4], т.е. систем, описываемых с помощью канонических операторов координаты и импульса. В данной работе мы сосредоточимся на бозонных квантовых системах, которые подходят для описания, в частности, мод электромагнитного поля. Важным классом состояний бозонных систем является множество гауссовских состояний, характеризующихся гауссовскими функцией Вигнера и характеристической функцией [7, 27]. Такие состояния полностью характеризуются первыми и вторыми моментами матрицы плотности. Гауссовские состояния естественным образом возникают в системах, динамика которых может быть описана или аппроксимирована с помощью гамильтониана, квадратичного по каноническим операторам координаты и импульса [21, 30].

С понятием гауссовских состояний тесно связано понятие гауссовских квантовых каналов, то есть тех каналов, которые отображают любое гауссовское состояние в гауссовское [31]. Бозонные гауссовские каналы широко распространены в физике, возникая всякий раз при взаимодействии бозонных систем друг с другом посредством квадратичного гамильтониана. Гауссовские каналы могут служить реалистичной моделью шума в различных квантово-оптических системах и каналах связи, например, передача информации по оптическим волокнам может быть в хорошем приближении описана с помощью гауссовских квантовых каналов [27]. Типичным таким примером является канал с потерями, или аттенюатор, в котором состояния теряют энергию по пути от отправителя к получателю. В свою очередь, эффект потерь обычно моделируют, рассматривая взаимодействие каждой входной моды с модой окружающей среды (в тепловом или вакуумном состоянии) посредством светоделителя, коэффициент пропускания которого определяет уровень потерь. Для компенсации потерь часто используют линейные фазонечувствительные усилители, которые тоже являются примером гауссовских бозонных каналов [6, 15]. Гауссовские каналы могут быть реализованы с помощью простых квантово-оптических инструментов, например, фазовращателей, светоделителей, одномодовых и двухмодовых операций сжатия [27]. Все эти элементы в той или иной степени доступны в современных оптических лабораториях. Несмотря на то, что в случае гауссовского канала эволюция гауссовских состояний является наиболее удобной для математического описания, и пропускные способности гауссовских каналов часто достигаются именно на ансамблях гауссовских состояний [14, 16, 17, 28], удивительным и контринтуитивным является тот факт, что перепутанность гауссовских состояний может быть менее устойчивой к шумам в гауссовских каналах, чем в случае специальных негауссовских состояний [12].

Точное описание динамики перепутанности квантового состояния бозонной системы оказывается едва ли возможным, так как зависит от используемой меры перепутанности, рассматриваемой модели взаимодействия системы и окружения, их начального состояния, а так же взаимодействия между частицами внутри самой системы. Однако, во многих приложениях важно присутствие квантовой запутанности как таковой,

безотносительно к величине самой перепутанности. Таким образом, основополагающим является выявление условий, при которых перепутанность квантового состояния будет полностью разрушаться из-за шумов, вызванных взаимодействием с окружением.

В данной работе мы будем изучать условия разрушения перепутанности двухмодовой бозонной системы, когда ее эволюция может быть представлена как действие фазонечувствительного аттенюатора или усилителя. Условия, при которых такие каналы будут преобразовывать любое входное двухмодовое состояние в сепарабельное, были найдены в [31] для случая одностороннего воздействия, то есть когда только одна мода подвержена ослаблению или усилению, и эволюция описывается каналом $\Phi_1 \otimes \text{Id}_2$. Однако, более общим является случай, когда обе моды подвержены внешнему воздействию: $\Phi_1 \otimes \Phi_2$. Как уже отмечалось, перепутанность гауссовских состояний может оказаться менее устойчивой к шумам при воздействии такого вида каналов, а при достаточно большом коэффициенте усиления перепутанность любого гауссовского состояния будет разрушаться даже при минимально возможном значении шума [12]. В работе [1] было продемонстрировано, что перепутанность состояний вида $|\psi_n\rangle = (|n, 0\rangle + |0, n\rangle)/\sqrt{2}$ более устойчива, чем в состоянии двухмодового сжатого вакуума, как к процессу усиления одной моды $\Phi^{\text{ampl}} \otimes \text{Id}$, так и к симметричному усилению обеих мод $\Phi^{\text{ampl}} \otimes \Phi^{\text{ampl}}$. Этот результат для симметричного усиления был обобщен в работе [23], где было показано, что перепутанность состояния $|\psi_n\rangle$ для $n = 5$ сохраняется в более широком диапазоне шумов по сравнению с диапазоном шумов, где сохраняется перепутанность хоть какого-нибудь двухмодового гауссовского состояния. В работе [23] также рассматривалась динамика перепутанности в процессе симметричного ослабления обеих мод $\Phi^{\text{att}} \otimes \Phi^{\text{att}}$, однако использованные в этой работе методы не позволили продемонстрировать, что некоторые негауссовские состояния обладают более стойкой перепутанностью по сравнению с гауссовскими в случае сильных потерь (малого коэффициента прохождения). Этот эффект был продемонстрирован с использованием других методов в работе [12]. Предложенные этой в работе состояния, которые остаются перепутанными после симметричного действия и аттенюатора, и усилителя $\Phi \otimes \Phi$ с произвольным коэффициентом ослабления/усиления в большем диапазоне шумов, чем любое двухмодовое гауссовское состояние, имеют вид $|\psi_\gamma\rangle \propto |\gamma, 0\rangle - |0, \gamma\rangle$, где $|\gamma\rangle$ - когерентное. Однако в случае несимметричного ослабления/усиления, т.е. канала вида $\Phi_1 \otimes \Phi_2$, предложенные негауссовские состояния не могут превзойти произвольные гауссовские состояния в стойкости к потере перепутанности во всём диапазоне усиления/ослабления сигналов. Это обстоятельство является мотивацией настоящего исследования, нацеленного на дальнейшее обобщение полученных ранее результатов на случай несимметричных гауссовских каналов.

Цель настоящей работы – нахождение двухмодовых негауссовских состояний, обладающих большей стойкостью к потере перепутанности по сравнению с произвольными гауссовскими состояниями при действии несимметричных локальных шумов, описываемых гауссовскими бозонными каналами ослабления или усиления. Для достиже-

ния этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Определить действие гауссовского канала фазонечувствительного ослабления или усиления с произвольным привнесенным шумом на когерентные состояния (операторы плотности $|\gamma\rangle\langle\gamma|$) и их операторные обобщения (операторы вида $|\gamma\rangle\langle\delta|$);
2. Исследовать наличие перепутанности в состоянии $|\psi\rangle \propto |\gamma, 0\rangle - |0, \delta\rangle$ после воздействия фазонечувствительного ослабления или усиления на каждую из мод в формализме «свидетеля перепутанности», предложенного в работе [12];
3. Определить условия, при которых рассмотренные состояния обладают большей стойкостью к потере перепутанности по сравнению с гауссовскими состояниями.

Научная новизна работы заключается в рассмотрении несимметричных шумов, действующих на каждую из мод, а также несимметричных состояний вида $|\psi\rangle \propto |\gamma, 0\rangle - |0, \delta\rangle$.

Научная и практическая значимость заключается в сравнении устойчивости перепутанности двухмодовых гауссовских и негауссовских состояний бозонных систем к привнесенным шумам в случае различных сценариев фазонечувствительного ослабления или усиления каждой из мод. Полученные результаты позволяют расширить границы использования локально ослабленных или усиленных сигналов в задачах квантовой информатики, требующих наличия перепутанности.

Глава 1

СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ БОЗОНОВ

1.1 Принцип неразличимости частиц

Рассмотрим систему из одинаковых частиц, то есть частиц, обладающих тождественными физическими свойствами. В **классической механике** можно в некоторый момент времени «пронумеровать» эти частицы и следить за дальнейшим движением каждой из них отдельно. Тем самым есть возможность различить их в любой момент времени. В **квантовой механике** же, даже если локализовать и «пронумеровать» все частицы в некоторый момент времени t_1 , то невозможно следить за их «траекториями» движения, так как уже в следующий момент времени координаты каждой из частиц не имеют определенного значения. Поэтому обнаружив частицу в некоторой точке пространства в момент времени t_2 , мы не сможем точно сказать какую именно частицу мы обнаружили. В невозможности экспериментально различить одинаковые частицы и заключается принцип тождественности одинаковых частиц.

1.2 Симметрии волновой функции системы тождественных частиц

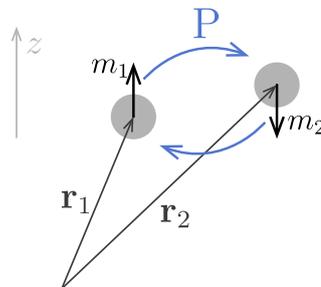


Рис. 1. Действие оператора перестановки двух тождественных частиц P

Рассмотрим систему, состоящую из двух неразличимых тождественных частиц, как показано на Рис. 1. Пусть $\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2)$ – волновая функция этой системы, где \mathbf{r}_k – координата частицы, а m_k – проекция ее спина на ось z для каждого $k = 1, 2$. Обозначим

за P оператор перестановки двух тождественных частиц:

$$P\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2) = \psi(\mathbf{r}_2, m_2; \mathbf{r}_1, m_1).$$

В силу тождественности двух частиц состояние системы физически не изменится, если переставить их местами. То есть волновая функция системы в результате перестановки может измениться лишь на фазовый множитель:

$$P\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2) = \psi(\mathbf{r}_2, m_2; \mathbf{r}_1, m_1) = e^{i\lambda}\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2).$$

В результате повторной перестановки, так как $P^2 = \mathbb{I}$ (тождественный оператор), система вернется в исходное состояние, и волновая функция станет равна $\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2)$, с одной стороны, с другой – $e^{2i\lambda}\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2)$. Отсюда следует, что $e^{2i\lambda} = 1$, а значит $e^{i\lambda} = \pm 1$ и, в конце концов,

$$\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2) = \zeta\psi(\mathbf{r}_2, m_2; \mathbf{r}_1, m_1), \quad (1)$$

где $\zeta = \pm 1$. Таким образом, волновая функция системы двух тождественных частиц при их перестановке либо **симметрична** ($\zeta = 1$), либо **антисимметрична** ($\zeta = -1$). Очевидно, что не существует двух состояний одной и той же системы с разными симметриями волновых функций. Так как иначе волновая функция состояния, являющегося суперпозицией состояний с симметричной и антисимметричной волновыми функциями, не обладала бы ни симметрией, ни антисимметрией, что противоречит доказанному выше свойству волновой функции системы двух тождественных частиц.

Понятие симметрии волновой функции легко обобщается на системы из произвольного числа тождественных частиц. Очевидно, что симметрия не зависит от выбора пары частиц системы в силу их тождественности. Поэтому волновую функцию системы тождественных частиц называют **симметричной**, если она не меняется при перестановке любой пары частиц, и **антисимметричной**, если при перестановке любой пары частиц она меняет знак. При произвольной же перестановке P частиц системы, следовательно, симметричная волновая функция будет оставаться неизменной, а изменение знака антисимметричной будет зависеть от четности перестановки $(-1)^P$:

$$\psi(\mathbf{r}_1, m_1; \mathbf{r}_2, m_2; \dots; \mathbf{r}_n, m_n) = \zeta^P \psi(\mathbf{r}_{P(1)}, m_{P(1)}; \mathbf{r}_{P(2)}, m_{P(2)}; \dots; \mathbf{r}_{P(n)}, m_{P(n)}). \quad (2)$$

Симметрия волновой функции системы тождественных частиц зависит от рода этих частиц. *Бозоны*, являющиеся частицами с целым спином $(0, 1, 2, \dots)$, описываются симметричными волновыми функциями. В то время как *фермионы*, обладая полуцелым спином $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots)$, характеризуются антисимметричными волновыми функциями. Таким образом

$$\zeta = \begin{cases} +1 & \text{для бозонов,} \\ -1 & \text{для фермионов.} \end{cases}$$

В настоящей работе мы исследуем динамику состояний многочастичных бозонных систем, поэтому нам необходимо построить многочастичные состояния с нужной симметрией из одночастичных состояний.

Рассмотрим систему из n тождественных бозонов, взаимодействием которых между собой можно пренебречь. Пусть $|\psi_k\rangle \in \mathcal{H}$ - одночастичные состояния, в которых может находиться каждая из частиц в отдельности, $k = 1, 2, \dots, n$, где \mathcal{H} - гильбертово пространство одной частицы. Если бы частицы были различимы, состояние всей системы $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle$ описывалось бы тензорным произведением одночастичных состояний:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (3)$$

а гильбертовым пространством системы частиц было бы тензорное произведение $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Для системы же *тождественных* бозонов нужно соответствующим образом симметризовать это состояние. Следуя [9], определим его как

$$|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_P |\psi_{P(1)}\rangle \otimes |\psi_{P(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{P(n)}\rangle, \quad (4)$$

где суммирование проходит по всем возможным перестановкам n аргументов. Состояние (4) описывает такое состояние системы, в котором одна из частиц находится в состоянии $|\psi_1\rangle$, другая в состоянии $|\psi_2\rangle$ и так далее, но в отличие от случая различных частиц, мы не можем достоверно определить, какая из частиц в каком состоянии находится. Легко убедиться в том, что состояние (4) удовлетворяет условию (2) в случае бозонной системы, то есть является симметричным.

Скалярное произведение двух таких n -частичных состояний задаётся формулой [9]

$$\langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \rangle = \left| \begin{array}{cccc} \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle & \langle \phi_1 | \psi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_1 | \psi_n \rangle \\ \langle \phi_2 | \psi_1 \rangle & \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_2 | \psi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_n | \psi_1 \rangle & \langle \phi_n | \psi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_n | \psi_n \rangle \end{array} \right|_+, \quad (5)$$

где $|M|_+$ обозначает перманент $n \times n$ матрицы $M = (M_{kj})$, который определяется как $|M|_+ := \sum_P M_{1P(1)} \cdot \dots \cdot M_{nP(n)}$.

Система из двух тождественных бозонов

Пусть $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$ – два различных одночастичных состояния. Тогда согласно (4) состояние системы, в котором одна из неразличимых частиц находится в состоянии $|\psi\rangle$, а вторая в состоянии $|\phi\rangle$, равно

$$|\psi, \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi\rangle |\phi\rangle + |\phi\rangle |\psi\rangle), \quad (6)$$

здесь и далее при тензорном произведении для простоты будем опускать символ \otimes .

Гильбертово пространство двух частиц порождается всеми состояниями вида (6) для всевозможных $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$. Обозначим двухчастичное гильбертово пространство как $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$, что обозначает симметризацию двухчастичных состояний. Определим размерность $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$.

Пусть $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве одной частицы \mathcal{H} ($\dim(\mathcal{H}) = d$), то есть

$$\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbb{I} \quad \text{и} \quad \langle k|j\rangle = \delta_{kj}. \quad (7)$$

Произвольные состояния $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ можно разложить по этому базису: $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |k\rangle$ и $|\phi\rangle = \sum_l \phi_l |l\rangle$, а значит любое двухчастичное состояние может быть выражено через $\{|k, l\rangle\}_{k,l=1}^d$ как

$$|\psi, \phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi\rangle |\phi\rangle + |\phi\rangle |\psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k,l} \psi_k \phi_l (|k\rangle |l\rangle + |l\rangle |k\rangle) = \sum_{k,l} \psi_k \phi_l |k, l\rangle.$$

Заметим, что так как $|k, l\rangle = |l, k\rangle$, то в наборе $\{|k, l\rangle\}_{k,l=1}^d$ встречаются одинаковые состояния. Исключив линейно зависимые векторы состояний, получим $\frac{d(d+1)}{2}$ линейно независимых векторов $\{|k, l\rangle\}_{k \leq l}$. Таким образом, размерность двухчастичного гильбертова пространства равна

$$\dim(\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Заметим так же, что в силу ортогональности одночастичных базисных состояний:

$$\langle k_1, l_1 | k_2, l_2 \rangle = \delta_{k_1 k_2} \delta_{l_1 l_2}, \quad \text{если } k_1 < l_1 \text{ и } k_2 < l_2.$$

1.3 Базис n -частичных состояний

Полученные для двух тождественных частиц результаты легко обобщаются на случай n тождественных бозонов. Рассмотрим полный ортонормированный набор $\{|k\rangle\}$ ($k = 1, 2, \dots$) одночастичных состояний из \mathcal{H} , то есть удовлетворяющий условиям (7). Полный набор n -частичных состояний определяется как

$$|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle, \quad \text{где } k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n. \quad (8)$$

Эти состояния ортогональны друг другу, но не нормированы, так как, например, $\langle k, k | k, k \rangle = 2$. Но эти состояния легко нормировать, используя формулу (5):

$$\frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} |k_1, k_2, \dots, k_n\rangle, \quad \text{где } k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n, \quad (9)$$

где числа n_k показывают, сколько раз k встречается в наборе k_1, k_2, \dots, k_n .

Условие полноты такого базиса в пространстве $\mathcal{H}^{\otimes_s n}$ симметризованных n -частичных состояний можно записать как

$$\frac{1}{n!} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} |k_1, \dots, k_n\rangle \langle k_1, \dots, k_n| = \mathbb{I}, \quad (10)$$

где с помощью множителя $\frac{1}{n!}$ и нормировки учитывается появление в сумме нескольких одинаковых состояний. Это условие полноты легко проверяется, если подействовать оператором левой части равенства (10) на произвольное состояние $|k_1^i, k_2^i, \dots, k_n^i\rangle$ и использовать формулу скалярного произведения (5).

1.4 Многочастичное пространство

Для каждого фиксированного n мы уже построили гильбертово пространство всевозможных состояний системы из n тождественных бозонов. Однако, во многих физических процессах число частиц в системе может меняться: частицы могут создаваться или уничтожаться. Для описания систем с непостоянным или неизвестным числом частиц вводится так называемое **многочастичное пространство** или **пространство Фока**, которое является прямой суммой всех n -частичных пространств:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}^1 \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{\otimes_s n} \oplus \dots, \quad (11)$$

где \mathbb{C}^1 соответствует отсутствию частиц в системе: $\mathbb{C}^1 = \{c|vac\rangle, c \in \mathbb{C}\}$, где $|vac\rangle$ – состояние с нулем частиц. Произвольное многочастичное состояние $|\psi\rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ можно представить, таким образом, как суперпозицию

$$|\psi\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + |\psi^{(1)}\rangle + |\psi^{(2)}\rangle + \dots + |\psi^{(n)}\rangle + \dots, \quad (12)$$

где $|\psi^{(n)}\rangle$ является n -частичным состоянием, то есть $|\psi^{(n)}\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes_s n}$. Состояния с разным числом частиц ортогональны друг другу, поэтому скалярное произведение двух многочастичных состояний вида (12) запишется в виде

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi^{(0)}|\psi^{(0)}\rangle + \langle\phi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle + \dots.$$

Например, в случае одной моды электромагнитного поля ($\dim(\mathcal{H}) = 1$) произвольное состояние можно представить как суперпозицию состояний с определенным числом фотонов: $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \dots + c_n|n\rangle + \dots$, где $c_n|n\rangle = |\psi^{(n)}\rangle$ – состояние из n тождественных фотонов.

Пусть $\{|k\rangle\}$ ($k = 1, 2, \dots$) – полный ортонормированный набор одночастичных состояний из \mathcal{H} . Тогда, пользуясь ортогональностью состояний с разным числом частиц и формулой скалярного произведения для состояний с одинаковым числом частиц (5),

получим формулу

$$\langle k_1, \dots, k_n | l_1, \dots, l_m \rangle = \delta_{nm} \begin{vmatrix} \delta_{k_1 l_1} & \dots & \delta_{k_1 l_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{k_n l_1} & \dots & \delta_{k_n l_n} \end{vmatrix}_+, \quad (13)$$

обобщающую условие ортогональности состояний $|k_1, \dots, k_n\rangle, \forall n = 0, 1, 2, \dots$. Условие полноты в пространстве Фока при этом можно записать, используя (10), как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} |k_1, \dots, k_n\rangle \langle k_1, \dots, k_n| = \mathbb{I}. \quad (14)$$

1.5 Операторы рождения и уничтожения

Для произвольного одночастичного состояния $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ определим линейный оператор $a^\dagger(\phi) : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$ как

$$\begin{aligned} a^\dagger(\phi) |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle &:= |\phi, \psi_1, \dots, \psi_n\rangle, \\ a^\dagger(\phi) |0\rangle &= |\phi\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где $|\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$ – произвольное n -частичное состояние ($\forall n = 1, 2, \dots$), $|0\rangle \equiv |vac\rangle$ – вакуумное состояние. Оператор $a^\dagger(\phi)$ преобразует n -частичное состояние в $(n+1)$ -частичное, поэтому его называют **оператором рождения** частицы в состоянии $|\phi\rangle$. Заметим, что для произвольного $|\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$

$$\begin{aligned} a^\dagger(\phi_1) a^\dagger(\phi_2) |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle &= a^\dagger(\phi_1) |\phi_2, \psi_1, \dots, \psi_n\rangle = |\phi_1, \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_n\rangle, \\ a^\dagger(\phi_2) a^\dagger(\phi_1) |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle &= |\phi_2, \phi_1, \psi_1, \dots, \psi_n\rangle = |\phi_1, \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_n\rangle, \end{aligned}$$

то есть $\{a^\dagger(\phi_2) a^\dagger(\phi_1) - a^\dagger(\phi_1) a^\dagger(\phi_2)\} |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle = 0$. Так как это справедливо для произвольного n -частичного состояния $|\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$, следовательно

$$[a^\dagger(\phi_2), a^\dagger(\phi_1)] = 0. \quad (16)$$

Таким образом, в случае бозонной системы операторы рождения коммутируют между собой.

Оператор уничтожения $a(\phi)$ частицы в состоянии $|\phi\rangle$ определим как сопряженный оператору рождения:

$$a(\phi) := (a^\dagger(\phi))^\dagger, \quad (17)$$

$a(\phi)$ также действует в пространстве многочастичных состояний, и более того, переводит n -частичное состояние в $(n-1)$ -частичное, а при действии на вакуумное состояние дает 0. Чтобы показать это, найдем чему равно действие оператора уничтожения на произвольное n -частичное состояние $a(\phi) |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$. Для этого умножим его слева на

произвольное $(n - 1)$ -частичное состояние $\langle \chi_1, \dots, \chi_{n-1} |$:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_1, \dots, \chi_{n-1} | a(\phi) | \psi_1, \dots, \psi_n \rangle &= \langle \psi_1, \dots, \psi_n | a^\dagger(\phi) | \chi_1, \dots, \chi_{n-1} \rangle^* = \\
&= \langle \psi_1, \dots, \psi_n | \phi, \chi_1, \dots, \chi_{n-1} \rangle^* = \left| \begin{array}{cccc} \langle \psi_1 | \phi \rangle & \langle \psi_1 | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_1 | \chi_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_n | \phi \rangle & \langle \psi_n | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_n | \chi_{n-1} \rangle \end{array} \right|_+^* = \\
&= \langle \psi_1 | \phi \rangle^* \left| \begin{array}{ccc} \langle \psi_2 | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_2 | \chi_{n-1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_n | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_n | \chi_{n-1} \rangle \end{array} \right|_+^* + \langle \psi_2 | \phi \rangle^* \left| \begin{array}{ccc} \langle \psi_1 | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_1 | \chi_{n-1} \rangle \\ \vdots & (\text{нет } \psi_2) & \vdots \\ \langle \psi_n | \chi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_n | \chi_{n-1} \rangle \end{array} \right|_+^* + \dots = \\
&= \sum_{k=1}^n \langle \phi | \psi_k \rangle \langle \chi_1, \dots, \chi_{n-1} | \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n \rangle.
\end{aligned}$$

Так как это справедливо для произвольного $\langle \chi_1, \dots, \chi_{n-1} |$, окончательно находим, что оператор уничтожения действует на произвольное n -частичное состояние как

$$a(\phi) | \psi_1, \dots, \psi_n \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \phi | \psi_k \rangle | \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n \rangle. \quad (18)$$

Мы видим, что после действия оператора уничтожения n -частичное состояние переходит в суперпозицию $(n - 1)$ -частичных. Таким образом, с помощью уравнений (15) и (18) мы описали действие операторов рождения и уничтожения на произвольные n -частичные состояния, а с помощью (12) полученный результат легко обобщить на произвольные многочастичные состояния из $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Из коммутационного соотношения операторов рождения (16) и из определения оператора уничтожения (17) с помощью эрмитова сопряжения легко установить, что

$$[a(\phi_1), a(\phi_2)] = 0. \quad (19)$$

Теперь получим коммутационное соотношение между операторами рождения и уничтожения. Во-первых, найдем

$$\begin{aligned}
a(\phi_1) a^\dagger(\phi_2) | \psi_1, \dots, \psi_n \rangle &= a(\phi_1) | \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_n \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle | \psi_1, \dots, \psi_n \rangle + \\
&+ \sum_{k=1}^n \langle \phi_1 | \psi_k \rangle | \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n \rangle.
\end{aligned}$$

Во-вторых, определим

$$\begin{aligned}
a^\dagger(\phi_2) a(\phi_1) | \psi_1, \dots, \psi_n \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \phi_1 | \psi_k \rangle a^\dagger(\phi_2) | \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^n \langle \phi_1 | \psi_k \rangle | \phi_2, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n \rangle, \quad (20)
\end{aligned}$$

и наконец, вычтя из первого второе, получим, что для произвольного n -частичного состояния $|\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$ выполняется равенство $\{a(\phi_1)a^\dagger(\phi_2) - a^\dagger(\phi_2)a(\phi_1)\} |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$. Следовательно

$$[a(\phi_1), a^\dagger(\phi_2)] = \langle\phi_1|\phi_2\rangle, \quad (21)$$

где в правой части равенства мы для краткости не пишем единичный оператор в пространстве Фока. Коммутационные соотношения (16), (19) и (21) обычно записывают для операторов рождения и уничтожения состояний из ортонормированного базиса.

Пусть $\{|\alpha_k\rangle\}, k = 1, 2, \dots$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве одной частицы \mathcal{H} . Обозначим $a_k \equiv a(\alpha_k)$ и $a_k^\dagger \equiv a^\dagger(\alpha_k)$. Тогда $\langle\alpha_k|\alpha_l\rangle = \delta_{kl}$, и коммутационные соотношения примут вид

$$\begin{aligned} [a_k, a_l] = 0 \quad \text{и} \quad [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \\ [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (22)$$

для любых $k, l = 1, 2, \dots$

1.6 Представление чисел заполнения

Пусть $\{|\alpha_k\rangle\}$ ($k = 1, 2, \dots$) - ортонормированный базис одночастичных состояний из \mathcal{H} . Обозначим нормированные состояния (9) как

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots}} |\alpha_1, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_2, \dots\rangle, \quad (\alpha_k \text{ упорядочены}) \quad (23)$$

где числа n_k показывают, сколько раз α_k встречается в таком многочастичном состоянии. Все состояния вида $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}_{n_k=0,1,\dots}$ образуют ортонормированный базис в пространстве Фока $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, их скалярное произведение $\langle n_1, n_2, \dots | m_1, m_2, \dots \rangle = \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} \dots$. А состояние, где все $n_k = 0$, соответствует вакуумному состоянию.

Определим, как операторы рождения и уничтожения действуют на состояния (23) в представлении чисел заполнения. По определению (15)

$$\begin{aligned} a_k^\dagger |n_1, \dots, n_k, \dots\rangle &= a_k^\dagger \frac{|\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \overbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}^{n_k \text{ раз}}, \dots\rangle}{\sqrt{n_1! \dots n_k! \dots}} = \\ &= \frac{|\alpha_k, \alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \overbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}^{n_k \text{ раз}}, \dots\rangle}{\sqrt{n_1! \dots n_k! \dots}} = \sqrt{n_k + 1} \frac{|\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \overbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}^{n_k + 1 \text{ раз}}, \dots\rangle}{\sqrt{n_1! \dots (n_k + 1)! \dots}} = \\ &= \sqrt{n_k + 1} |n_1, \dots, n_k + 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Для оператора уничтожения с помощью (18) получим

$$\begin{aligned} a_k |n_1, \dots, n_k, \dots\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_k! \dots}} a_k |\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \overbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}^{n_k \text{ раз}}, \dots\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_k! \dots}} \sum_{l=1}^{n_k} |\alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \overbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}^{n_k-1 \text{ раз}}, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_1, \dots, n_k - 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как состояния (23) образуют базис в пространстве Фока, с помощью уравнений (24) и (25) можно описать действие операторов рождения и уничтожения на любое многочастичное состояние.

1.7 Операторы в многочастичном пространстве

Поставим себе цель найти оператор $A : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$, действующий в многочастичном пространстве, порождаемый оператором из одночастичного пространства $A^{(1)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Действие такого оператора на произвольное n -частичное состояние $|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle$ будет равно сумме действий одночастичного оператора $A^{(1)}$ на каждую из n частиц:

$$A = A^{(1)} \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes A^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} + \dots + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes A^{(1)},$$

где \mathbb{I} – единичный оператор в одночастичном пространстве, то есть:

$$A |\psi\rangle = |\tilde{\psi}_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle + |\psi_1, \tilde{\psi}_2, \dots, \psi_n\rangle + \dots + |\psi_1, \psi_2, \dots, \tilde{\psi}_n\rangle, \quad (26)$$

где введено обозначение $|\tilde{\psi}_k\rangle = A^{(1)} |\psi_k\rangle$. Заметим, что если все $|\psi_k\rangle$ являются собственными состояниями одночастичного оператора $A^{(1)}$, то есть если $A^{(1)} |\psi_k\rangle = c_k |\psi_k\rangle$, тогда многочастичное состояние $|\psi\rangle$ будет собственным для оператора A , поскольку $A |\psi\rangle = (c_1 + \dots + c_n) |\psi\rangle$. Таким образом, например, тождественный оператор в одночастичном пространстве $A^{(1)} = \mathbb{I}$ порождает оператор числа частиц в многочастичном пространстве, так как в этом случае все $c_k = 1$ и $c_1 + \dots + c_n = n$.

Чтобы найти A , порождаемый произвольным одночастичным оператором, рассмотрим сначала простой случай, когда $A^{(1)} = |\alpha\rangle\langle\beta|$, где $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ – векторы из одночастичного гильбертова пространства \mathcal{H} . Тогда $|\tilde{\psi}_k\rangle = A^{(1)} |\psi_k\rangle = |\alpha\rangle\langle\beta|\psi_k\rangle$, и уравнение (26) в этом случае имеет вид

$$A |\psi\rangle = \langle\beta|\psi_1\rangle |\alpha, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle + \langle\beta|\psi_2\rangle |\psi_1, \alpha, \dots, \psi_n\rangle + \dots + \langle\beta|\psi_n\rangle |\psi_1, \psi_2, \dots, \alpha\rangle. \quad (27)$$

Теперь, используя формулу (20), полученную из определения операторов рождения и

уничтожения, заметим, что

$$\begin{aligned} a^\dagger(\alpha)a(\beta)|\psi\rangle &= \sum_{k=1}^n \langle\beta|\psi_k\rangle |\alpha, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \langle\beta|\psi_k\rangle |\psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \alpha, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n\rangle, \end{aligned}$$

что полностью совпадает с (27), то есть $A|\psi\rangle = a^\dagger(\alpha)a(\beta)|\psi\rangle$, в случае когда $A^{(1)} = |\alpha\rangle\langle\beta|$. Это верно для любого состояния $|\psi\rangle$, а значит

$$A = a^\dagger(\alpha)a(\beta), \quad \text{в случае } A^{(1)} = |\alpha\rangle\langle\beta|, \quad (28)$$

то есть оператор в многочастичном пространстве A , порожденный одночастичным оператором $|\alpha\rangle\langle\beta|$, действуя на многочастичное состояние сначала «уничтожает» частицу в состоянии $|\beta\rangle$, а затем «рождает» частицу в состоянии $|\alpha\rangle$.

Теперь можно обобщить полученный результат на случай многочастичного оператора, порождаемого произвольным одночастичным. Для этого выберем базис $\{|k\rangle\}$ в одночастичном гильбертовом пространстве \mathcal{H} и разложим произвольный $A^{(1)}$ по этому базису, используя свойство полноты:

$$A^{(1)} = \sum_{k,m} |k\rangle\langle k| A^{(1)} |m\rangle\langle m| = \sum_{k,m} A_{km}^{(1)} |k\rangle\langle m|, \quad (29)$$

где $A_{km}^{(1)} = \langle k| A^{(1)} |m\rangle$ – матричные элементы оператора $A^{(1)}$ в базисе $\{|k\rangle\}$. Тогда, используя линейность разложения (29) и уже известный результат для проективного одночастичного оператора (28), получим

$$A = \sum_{k,m} A_{km}^{(1)} a_k^\dagger a_m \quad (30)$$

В качестве примера многочастичного оператора рассмотрим оператор числа частиц N . Как мы уже отметили, он порождается тождественным оператором в одночастичном пространстве: $A^{(1)} = \mathbb{I} = \sum_k |k\rangle\langle k|$, поэтому оператор числа частиц, согласно (30), равен

$$N = \sum_k a_k^\dagger a_k. \quad (31)$$

Глава 2

Бозонные гауссовские состояния

2.1 Одномодовый случай

Рассмотрим систему бозонов, у которой размерность одночастичного пространства $\dim(\mathcal{H}) = 1$. В пространстве Фока такой системы можно выбрать ортонормированный базис состояний с определенным числом частиц $|n\rangle_{n=0,1,\dots}$, который соответствует представлению чисел заполнения (23). Как уже упоминалось, произвольное состояние системы в этом случае можно представить как суперпозицию состояний с определенным числом частиц:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (32)$$

Действие операторов рождения и уничтожения тождественных бозонов в одной моде на состояния с определенным числом частиц, как и в (24,25), будет равно

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (33)$$

2.1.1 Когерентные состояния

Для каждого $\alpha \in \mathbb{C}$ найдем такие нормированные состояния бозонной системы $|\alpha\rangle$, которые удовлетворяют уравнению

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (34)$$

выразив их через базис состояний с определенным числом частиц. Пусть $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, тогда (34) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle,$$

а значит

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle.$$

После умножения слева на $\langle m|$ последнего равенства и использования условия ортонормированности базиса состояний с определенным числом частиц, получим, что $c_{m+1}\sqrt{m+1} = \alpha c_m$. Отсюда по индукции находим, что $c_m = \alpha^m c_0 / \sqrt{m!}$, а значит $|\alpha\rangle = c_0 \sum_n \alpha^n |n\rangle / \sqrt{n!}$. Нормируя это состояние на 1, получим $\langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_n |\alpha|^{2n} / n! = |c_0|^2 \exp\{|\alpha|^2\} = 1$. Окончательно получаем

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (35)$$

Состояния $|\alpha\rangle$, являющиеся по определению собственными состояниями оператора уничтожения, называются **когерентными**. Из формулы (35) видно, что состояние $|\alpha = 0\rangle$ соответствует вакуумному состоянию. Когерентные состояния не ортогональны друг другу. Величина перекрытия двух когерентных состояний равна

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta \right], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Система когерентных состояний $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ является переполненной, в том смысле, что

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = I. \quad (37)$$

2.1.2 Операторы сдвига

Введем унитарные операторы

$$\mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \quad (38)$$

называемые **операторами сдвига** для одной моды. Если подействовать оператором сдвига на вакуумное состояние, то получится когерентное:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha) |0\rangle &= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}[\alpha a^\dagger, -\alpha^* a]} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle, \end{aligned}$$

где мы воспользовались коммутационным соотношением (22) и формулой Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \quad \text{если } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (39)$$

С помощью формулы выше можно также доказать коммутационное соотношение для операторов сдвига:

$$\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{D}(\beta) = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)}\mathcal{D}(\alpha + \beta), \quad (40)$$

из которого с учетом свойства унитарности оператора сдвига можно заключить, что $\mathcal{D}^\dagger(\beta) = \mathcal{D}(-\beta)$, и

$$\mathcal{D}^\dagger(\beta)\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{D}(\beta) = e^{2i\text{Im}(\alpha\beta^*)}\mathcal{D}(\alpha). \quad (41)$$

Из формулы (40) можно также легко найти, как оператор сдвига действует на когерентное состояние:

$$\mathcal{D}(\alpha)|\beta\rangle = \mathcal{D}(\alpha)\mathcal{D}(\beta)|0\rangle = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)}|\alpha + \beta\rangle.$$

2.2 Многомодовый случай

Теперь будем рассматривать бозонные системы с количеством мод равным s , то есть с размерностью гильбертова пространства одной частицы $\dim(\mathcal{H}) = s$.

Помимо операторов рождения a_k^\dagger и уничтожения a_k ($k = 1, \dots, s$), бозонная система может быть описана с помощью канонически сопряженных операторов координаты и импульса q_k и p_k , определенных через операторы рождения и уничтожения как

$$q_k = \frac{a_k + a_k^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad p_k = \frac{a_k - a_k^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (42)$$

Эти операторы удовлетворяют *каноническим коммутационным соотношениям* Гейзенберга:

$$\begin{aligned} [q_j, q_k] &= 0, & [p_j, p_k] &= 0, \\ [q_j, p_k] &= i\delta_{jk}\mathbb{I}, \end{aligned} \quad (43)$$

для любых $j, k = 1, \dots, s$. В случае электромагнитного поля в резонаторе, например, операторам координаты и импульса с точностью до множителя соответствуют операторы напряженностей магнитного и электрического поля соответственно [24].

2.2.1 Операторы Вейля

Введем унитарные операторы, зависящие от $2s$ вещественных параметров

$$W(z) = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^s (x_k q_k + y_k p_k) \right\}, \quad (44)$$

где $z = (x_1, y_1, \dots, x_s, y_s)^T \in \mathbb{R}^{2s}$ – вектор-столбец из $2s$ чисел $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Для удобства дальнейшего повествования будем использовать обозначение

$$Rz = \sum_{k=1}^s (x_k q_k + y_k p_k),$$

где $R = (q_1, p_1, \dots, q_s, p_s)$ – вектор-строка, элементами которой являются операторы. С помощью нее **операторы Вейля** (44) записываются в упрощенной форме:

$$W(z) = e^{iRz}, \quad z \in \mathbb{R}^{2s}. \quad (45)$$

Перед тем как найти коммутационные соотношения для операторов Вейля, найдем, чему равен коммутатор $[Rz, R\tilde{z}]$:

$$\begin{aligned} [Rz, R\tilde{z}] &= \left[\sum_{k=1}^s (x_k q_k + y_k p_k), \sum_{l=1}^s (\tilde{x}_l q_l + \tilde{y}_l p_l) \right] = \sum_{k,l=1}^s (x_k \tilde{y}_l [q_k, p_l] + \tilde{x}_l y_k [p_k, q_l]) = \\ &= i \sum_{k=1}^s (x_k \tilde{y}_k - \tilde{x}_k y_k) = -iz^T \Delta \tilde{z}, \end{aligned}$$

где Δ – матрица симплектической формы:

$$\Delta = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (46)$$

Пространство $Z = \mathbb{R}^{2s}$, снабженное невырожденной кососимметричной формой $\Delta(z, z') = z^T \Delta z'$, где $z, z' \in Z$, является симплектическим пространством. Коммутатор $[Rz, R\tilde{z}]$ можно представить как матричное произведение $z^T ([R_u, R_v])_{uv} \tilde{z}$, где матрица $([R_u, R_v])_{uv}$ равна

$$([R_u, R_v])_{u,v=1}^{2s} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right) = -i\Delta. \quad (47)$$

Теперь, используя полученный выше результат и формулу (39), легко показать, что операторы Вейля удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям Вейля-Сигала:

$$W(z)W(\tilde{z}) = e^{iRz} e^{iR\tilde{z}} = e^{iR(z+\tilde{z})} e^{-\frac{i}{2}[Rz, R\tilde{z}]} = e^{\frac{i}{2}z^T \Delta \tilde{z}} W(z + \tilde{z}), \quad (48)$$

откуда с учетом унитарности операторов Вейля следует, в частности, что

$$W(-z) = W^\dagger(z), \quad (49)$$

а также

$$W^\dagger(\tilde{z})W(z)W(\tilde{z}) = e^{iz^T \Delta \tilde{z}} W(z). \quad (50)$$

Операторы Вейля в одномодовом случае

Трудно не заметить сходства между коммутационными соотношениями операторов Вейля (48) и операторов сдвига в случае одной моды (40). И действительно, операторы Вейля с точностью до параметризации – это ничто иное как многомодовое обобщение операторов сдвига. Докажем, что в случае $s = 1$

$$\mathcal{D}(\alpha) = W(z), \quad \text{где } z = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \operatorname{Im} \alpha \\ -\sqrt{2} \operatorname{Re} \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \quad (51)$$

Действительно, по определению оператора сдвига и операторов q, p (42):

$$\mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{\alpha \frac{q-ip}{\sqrt{2}} - \alpha^* \frac{q+ip}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \alpha^*)q - \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*)p} = W(\sqrt{2} \operatorname{Im} \alpha, -\sqrt{2} \operatorname{Re} \alpha), \quad (52)$$

где для одномодового случая введено обозначение $W(x, y) \equiv W(z)$, при $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, что и требовалось доказать.

2.2.2 Характеристическая функция

Характеристической функцией квантового состояния с матрицей плотности ρ называется след произведения оператора плотности с оператором Вейля

$$\chi(z) = \operatorname{Tr}\{\rho W(z)\}, \quad z \in \mathbb{R}^{2s}. \quad (53)$$

Пусть оператор плотности ρ имеет конечные вторые моменты, то есть

$$\operatorname{Tr}\{q_k^2 \rho\} < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{Tr}\{p_k^2 \rho\} < \infty \quad \forall k = 1, \dots, s.$$

Тогда можно определить **вектор средних значений**

$$m := \operatorname{Tr}\{R\rho\}^T \equiv (\operatorname{Tr}\{q_1\rho\} \quad \operatorname{Tr}\{p_1\rho\} \quad \dots \quad \operatorname{Tr}\{q_s\rho\} \quad \operatorname{Tr}\{p_s\rho\})^T \in \mathbb{R}^{2s} \quad (54)$$

и **матрицу ковариаций**

$$B := \left(\operatorname{Tr} \left\{ \rho \frac{R_u R_v + R_v R_u}{2} \right\} - \operatorname{Tr} \{ \rho R_u \} \operatorname{Tr} \{ \rho R_v \} \right)_{uv}. \quad (55)$$

Обозначим $\langle R_u \rangle = \operatorname{Tr}(\rho R_u)$ и $\langle R_v \rangle = \operatorname{Tr}(\rho R_v)$. Заметим, что матрица с элементами $(\operatorname{Tr} \{ \rho (R_u - \langle R_u \rangle)(R_v - \langle R_v \rangle) \})_{uv}$ является неотрицательно определённой. Действитель-

но, для любого вектора $(c_1, \dots, c_{2s})^T$ из \mathbb{R}^{2s} выполнено

$$\begin{aligned} & \sum_{u,v=1}^{2s} c_u^* \operatorname{Tr} \{ \rho (R_u - \langle R_u \rangle) (R_v - \langle R_v \rangle) \} c_v = \operatorname{Tr} \left\{ \rho \sum_{u,v=1}^{2s} c_u^* (R_u - \langle R_u \rangle) (R_v - \langle R_v \rangle) c_v \right\} = \\ & = \operatorname{Tr} \left\{ \rho \sum_{u=1}^{2s} c_u^* (R_u - \langle R_u \rangle) \sum_{v=1}^{2s} c_v (R_v - \langle R_v \rangle) \right\} = \operatorname{Tr} \{ \rho A^\dagger A \} \geq 0, \end{aligned}$$

так как операторы $A^\dagger A \geq 0$ и $\rho \geq 0$. А из неотрицательной определенности матрицы с элементами $(\operatorname{Tr} \{ \rho (R_u - \langle R_u \rangle) (R_v - \langle R_v \rangle) \})_{uv}$ следует неотрицательная определенность матрицы $B - \frac{i}{2} \Delta$, так как в силу (47)

$$\begin{aligned} B - \frac{i}{2} \Delta &= \left(\operatorname{Tr} \left\{ \rho \frac{(R_u - \langle R_u \rangle) (R_v - \langle R_v \rangle) + (R_v - \langle R_v \rangle) (R_u - \langle R_u \rangle)}{2} \right\} \right)_{uv} + \\ &+ \left(\operatorname{Tr} \left\{ \rho \frac{[R_u - \langle R_u \rangle, R_v - \langle R_v \rangle]}{2} \right\} \right)_{uv} = \\ &= (\operatorname{Tr} \{ \rho (R_u - \langle R_u \rangle) (R_v - \langle R_v \rangle) \})_{uv} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы матрица B являлась матрицей ковариаций некоторого состояния, необходимо выполнение условия

$$B \geq \frac{i}{2} \Delta. \quad (56)$$

Как в классическом случае, компоненты вектора средних значений и матрицы ковариаций, как и моменты более высоких порядков матрицы плотности квантового состояния, можно выразить через производные характеристической функции этого состояния. Например, для вектора средних значений справедливо:

$$m^T z := \sum_u \operatorname{Tr} \{ R_u \rho \} = -i \left. \frac{d}{dt} \chi(tz) \right|_{t=0}. \quad (57)$$

2.3 Гауссовские состояния

Состояние $\rho \geq 0$ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция $\chi(z) = \operatorname{Tr} \{ \rho W(z) \}$ является гауссовской функцией:

$$\chi(z) = e^{im^T z - \frac{1}{2} z^T B z}, \quad (58)$$

где m – вещественный $(2s)$ -компонентный вектор, B – вещественная симметрическая $(2s) \times (2s)$ -матрица. Причём m является вектором средних значений, а B – матрицей ковариаций состояния ρ . Таким образом, гауссовские состояния полностью характеризуются первыми и вторыми моментами матрицы плотности состояния.

Предположим нам дана функция $\chi(z)$ вида (58). Согласно [31], если матрица B удовлетворяет условию (56), то функция $\chi(z)$ является характеристической функцией

некоторого квантового состояния, то есть (56) является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы функция вида (58) определяла некоторое квантовое состояние.

2.3.1 Примеры гауссовских состояний и гауссовских унитарных преобразований

В этом разделе рассмотрим унитарные преобразования, которые переводят гауссовские состояния в гауссовские. Такие преобразования $U = \exp\{-iH\}$ генерируются гамильтонианами H , являющимися полиномами второго порядка по канонически сопряженным операторам q_k, p_k . В терминах операторов рождения $\mathbf{a}^\dagger := (a_1^\dagger \ a_2^\dagger \ \dots \ a_s^\dagger)$ и уничтожения $\mathbf{a} := (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_s)^T$ гамильтониан можно записать в виде

$$H = i \left(\mathbf{a}^\dagger h + \mathbf{a}^\dagger F \mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger G \mathbf{a}^{\dagger T} \right) + \text{H.c.}, \quad (59)$$

где $h \in \mathbb{C}^s$, F и G – комплексные матрицы размера $s \times s$, а «H.c.» обозначает эрмитово сопряжение. В представлении Гейзенберга, преобразование посредством унитарного оператора U приводит к преобразованию Боголюбова операторов рождения и уничтожения:

$$\mathbf{a} \rightarrow U^\dagger \mathbf{a} U = A \mathbf{a} + B \mathbf{a}^{\dagger T} + h, \quad (60)$$

где $s \times s$ комплексные матрицы A и B удовлетворяют условиям $AB^T = BA^T$ и $AA^\dagger = BB^\dagger + I$. В терминах квадратурных операторов это преобразование имеет более простой вид:

$$R \xrightarrow{U_{S,d}} RS + d^T, \quad (61)$$

где $d \in \mathbb{R}^{2s}$ и вещественная $2s \times 2s$ матрица S должна быть симплектической: $S^T \Delta S = \Delta$, чтобы преобразование (61) сохраняло коммутационные соотношения (47). Преобразование $U_{S,d}$ всегда можно представить в виде композиции $U_S W(\Delta^T d)$, где оператор Вейля $W(\Delta^T d)$ соответствует преобразованию $R \rightarrow R + d^T$, а каноническое унитарное преобразование U_S порождается симплектическим преобразованием $R \rightarrow RS$.

Если подействовать преобразованием $U_{S,d}$ на гауссовское состояние с вектором средних значений m и матрицей ковариаций B , то последние преобразуются согласно

$$m \rightarrow S^T m + d, \quad B \rightarrow S^T B S. \quad (62)$$

Перейдем теперь к рассмотрению примеров гауссовских унитарных преобразований и естественным образом порождаемых ими гауссовских состояний.

Случай одной моды

Характеристическая функция **вакуумного состояния**, являющегося собственным состоянием оператора уничтожения с собственным значением равным 0, по определе-

нию (53) равна

$$\chi_{\text{vac}}(z) = e^{-\frac{1}{4}z^T z}, \quad z \in \mathbb{R}^2. \quad (63)$$

Вакуумное состояние является гауссовским с нулевым вектором средних значений и матрицей ковариаций равной $\frac{1}{2}\mathbb{I}$.

Тепловое состояние с средним числом квантов N тоже является гауссовским с нулевым средним и матрицей ковариаций $(N + \frac{1}{2})\mathbb{I}$:

$$\chi_{\text{th}}(z) = e^{-\frac{1}{2}(N + \frac{1}{2})z^T z}, \quad z \in \mathbb{R}^2. \quad (64)$$

Когерентные состояния, как уже было упомянуто, порождаются из вакуумного состояния с помощью операторов сдвига (38) $\mathcal{D}(\alpha)$. Было показано (52), что оператор сдвига $\mathcal{D}(\alpha)$ является не чем иным, как оператором Вейля $W(\sqrt{2}\text{Im } \alpha, -\sqrt{2}\text{Re } \alpha)$, и значит соответствует гауссовскому унитарному преобразованию U_{I, d_α} с вектором смещения $d_\alpha = (\sqrt{2}\text{Re } \alpha, \sqrt{2}\text{Im } \alpha)^T$. Таким образом, когерентные состояния являются гауссовскими со смещенным относительно нуля вектором средних значений $(\sqrt{2}\text{Re } \alpha, \sqrt{2}\text{Im } \alpha)^T$ и с матрицей ковариаций такой же как вакуумного состояния: $\frac{1}{2}\mathbb{I}$.

Случай двух мод

В случае двух бозонных мод одним из важнейших примеров канонических унитарных преобразований является преобразование **светоделителя**, порождаемое гамильтонианом $i\theta(a^\dagger b - ab^\dagger)$, где a, b - операторы уничтожения первой и второй моды, а θ определяет коэффициент прохождения по интенсивности: $\tau = \cos^2 \theta \in [0, 1]$. В представлении Гейзенберга операторы a, b преобразуются согласно

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \\ -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (65)$$

из чего следует, что такое каноническое унитарное преобразование порождается симплектическим преобразованием $R \rightarrow RT_\tau$ с симплектической матрицей

$$T_\tau = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau}\mathbb{I} & -\sqrt{1-\tau}\mathbb{I} \\ \sqrt{1-\tau}\mathbb{I} & \sqrt{\tau}\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Другим важным примером является генерация двухмодовых сжатых состояний в результате спонтанного параметрического рассеяния. В параметрическом приближении (неистопаемая накачка) процесс описывается гауссовским унитарным преобразованием, порождаемым гамильтонианом $ir(ab - a^\dagger b^\dagger)/2$. Такое преобразование называется двухмодовым сжатием с параметром сжатия $r > 0$. Оно порождается симплектическим преобразованием $R \rightarrow RT_r$ с симплектической матрицей

$$T_r = \begin{pmatrix} \cosh r\mathbb{I} & \sinh r\sigma_z \\ \sinh r\sigma_z & \cosh r\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Если подействовать таким преобразованием на вакуумное состояние, получится **двухмодовый сжатый вакуум**

$$|r\rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n |n, n\rangle, \quad (68)$$

где $\lambda = \tanh r \in [0, 1)$. Двухмодовый сжатый вакуум является гауссовским состоянием с нулевым вектором средних значений и матрицей ковариаций

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh(2r)\mathbb{I} & \sinh(2r)\sigma_z \\ \sinh(2r)\sigma_z & \cosh(2r)\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Если взять частичный след по второй подсистеме в состоянии $|r\rangle\langle r|$, получится тепловое состояние со средним числом квантов равным $\sinh^2 r$. При заданном среднем числе квантов тепловое состояние обладает максимальной энтропией, поэтому состояние $|r\rangle$ является максимально перепутанным для заданного среднего числа квантов в состоянии.

Глава 3

Бозонные гауссовские каналы

3.1 Открытые бозонные системы

Рассмотрим взаимодействие бозонной системы с бозонным окружением. Пусть составная система эволюционирует из начального состояния $\rho_1 \otimes \rho_{E_1}$ согласно каноническому унитарному преобразованию U_T . Обозначим характеристические функции состояний системы до и после взаимодействия как $\chi_1(z_1)$ и $\chi_2(z_2)$ соответственно. А характеристические функции состояний окружения как $\chi_{E_1}(z_{E_1})$ и $\chi_{E_2}(z_{E_2})$, где каждое из z_k принадлежит соответствующему симплектическому пространству $Z_k = (\mathbb{R}^{2s_k}, \Delta_k)$, причём

$$Z_1 \oplus Z_{E_1} = Z_2 \oplus Z_{E_2} = Z. \quad (70)$$

Пусть T - симплектическое преобразование в Z , которому отвечает преобразование U_T , а именно:

$$U_T^\dagger R U_T = R T \quad \text{и} \quad U_T^\dagger W(z) U_T = W(Tz), \quad (71)$$

где R - канонические наблюдаемые в пространстве системы и окружения, $z \in Z$. Тогда, используя (70), можно представить T в блочно-матричном виде [31]:

$$T = \begin{pmatrix} K & L \\ K' & L' \end{pmatrix}, \quad (72)$$

где

$$K : Z_2 \rightarrow Z_1, \quad L : Z_{E_2} \rightarrow Z_1, \quad K' : Z_2 \rightarrow Z_{E_1}, \quad L' : Z_{E_2} \rightarrow Z_{E_1}.$$

Выразим теперь характеристическую функцию системы после взаимодействия через характеристические функции состояний системы и окружения перед взаимодействием:

$$\begin{aligned} \chi_2(z_2) &= \text{Tr}\{U_T(\rho_1 \otimes \rho_{E_1})U_T^\dagger(W(z_2) \otimes I_{E_2})\} = \\ &= \text{Tr}\{(\rho_1 \otimes \rho_{E_1})U_T^\dagger W((z_2 \ 0)^T) U_T\} = \text{Tr}\{(\rho_1 \otimes \rho_{E_1})W(T(z_2 \ 0)^T)\} = \\ &= \text{Tr}\{(\rho_1 \otimes \rho_{E_1})[W(Kz_2) \otimes W(K'z_2)]\} = \chi_1(Kz_2)\chi_{E_1}(K'z_2). \end{aligned} \quad (73)$$

Преобразование (73) задает квантовый канал, то есть вполне положительное сохра-

няющее след отображение. Каналы, преобразующие состояния согласно формуле (73) называются **линейными бозонными каналами**.

3.2 Определение гауссовского канала

Предположим теперь, что начальное состояние окружения было гауссовским с вектором средних значений m_E и матрицей ковариаций B_E . Тогда

$$\chi_{E_1}(K'z_2) = \exp \left\{ im_E^T K'z_2 - \frac{1}{2} z_2^T K'^T B_E K'z_2 \right\} := \exp \left\{ il^T z_2 - \frac{1}{2} z_2^T M z_2 \right\},$$

и канал, действующий согласно (73) будет переводить гауссовские состояния в гауссовские. Такой линейный бозонный канал называют **гауссовским** с параметрами (K, l, M) .

Из формул (71) и (72) получаем, что $R_2 = R_1 K + R_{E_1} K'$, а значит $\Delta_2 = K^T \Delta_1 K + K'^T \Delta_{E_1} K'$. Так как B_E – матрица ковариаций некоторого состояния окружения, должно быть выполнено условие $B_E \geq \frac{i}{2} \Delta_E$, а значит $K'^T B_E K' \geq \frac{i}{2} K'^T \Delta_{E_1} K'$ и

$$M \geq \frac{i}{2} (\Delta_2 - K^T \Delta_1 K). \quad (74)$$

Согласно [31], условие (74) является необходимым и достаточным для того, чтобы формула

$$\chi_{\text{вых}}(z) = \chi_{\text{вх}}(Kz) e^{il^T z - \frac{1}{2} z^T M z}, \quad z \in Z_{\text{вых}} \quad (75)$$

задавала действие квантового гауссовского канала с параметрами (K, l, M) . Заметим, что с помощью формулы (75) можно определить действие гауссовских каналов, не используя рассмотренное выше взаимодействие системы с бозонным окружением.

Для заданного K минимальное M_0 , удовлетворяющее условию (74), представляет собой пороговый гауссовский шум, который необходимо добавить к $\chi_{\text{вх}}(Kz)$, чтобы преобразование (75) было вполне положительным. Если K – симплектическая матрица, то $M_0 = 0$, и гауссовский канал с параметрами $(K, l, 0)$ соответствует унитарному преобразованию.

Отметим следующее свойство гауссовских каналов: композиция двух гауссовских каналов с параметрами (K_1, l_1, M_1) и (K_2, l_2, M_2) является гауссовским каналом с параметрами

$$K = K_1 K_2, \quad (76)$$

$$l = K_2^T l_1 + l_2, \quad (77)$$

$$M = K_2^T M_1 K_2 + M_2. \quad (78)$$

Действительно, после прохождения первого канала:

$$\chi_1(z) = \chi_0(K_1 z) e^{il_1^T z - \frac{1}{2} z^T M_1 z}, \quad z \in Z_1,$$

и после второго:

$$\chi_2(z) = \chi_1(K_2 z) e^{i l_2 z - \frac{1}{2} z^T M_2 z} = \chi_0(K_1 K_2 z) e^{i l_1^T K_2 z - \frac{1}{2} z^T K_2^T M_1 K_2 z} e^{i l_2 z - \frac{1}{2} z^T M_2 z}, \quad z \in Z_2,$$

что и требовалось доказать.

3.3 Одномодовые гауссовские каналы

В квантовой теории информации одномодовые гауссовские каналы являются одним из основных способов описания эволюции открытых одномодовых бозонных систем. Произвольный одномодовый гауссовский канал полностью описывается одним вещественным двумерным вектором l и двумя вещественными 2×2 матрицами K и M , которые удовлетворяют условию

$$M \geq \frac{i}{2} (\Delta - K^T \Delta K), \quad (79)$$

или, эквивалентно:

$$M = M^T \geq 0 \quad \text{и} \quad \det M \geq \frac{1}{4} (\det K - 1)^2, \quad (80)$$

что следует из (74) для случая одной моды.

Согласно [31] произвольный одномодовый гауссовский канал $\Phi(K, l, M)$ можно привести к простейшему виду путем специально подобранных симплектических унитарных преобразований на входе и выходе канала:

$$\Phi[\rho] = U_{T_2} \mathcal{C}[U_{T_1} \rho U_{T_1}^\dagger] U_{T_2}^\dagger, \quad (81)$$

где так называемая каноническая форма \mathcal{C} – это упрощенный гауссовский канал с параметрами $(K_c, 0, M_c)$, где матрицы K_c, M_c имеют диагональный вид. Используя преобразование смещения можно получить $l = 0$, поэтому в дальнейшем будем считать вектор средних значений равным нулю. С помощью (76) легко установить связь параметров исходного гауссовского канала с параметрами его канонической формы:

$$K = T_1 K_c T_2 \quad \text{и} \quad M = T_2^T M_c T_2. \quad (82)$$

Вид K_c и M_c полностью определяется рангами и детерминантами матриц K и M , так как при преобразовании (82) эти величины не меняются.

В оставшейся части работы мы будем рассматривать те гауссовские каналы, для которых

$$\kappa := \det K > 0 \quad \text{и} \quad r := \min\{rg(K), rg(M)\} = 2. \quad (83)$$

Эти два параметра определяют класс канонической формы. Среди каналов, параметры

которых удовлетворяют (83), выделяют три класса в зависимости от значения κ :

$$\kappa = 1 : \text{ канал с классическим шумом } B_2(\mu), \quad (84)$$

$$\kappa \in (0, 1) : \text{ аттенюатор } C_1(\kappa, \mu), \quad (85)$$

$$\kappa > 1 : \text{ усилитель } C_2(\kappa, \mu), \quad (86)$$

канонической формой в каждом из этих классов может являться гауссовский канал с параметрами $(\sqrt{\kappa}\mathbb{I}, 0, \mu\mathbb{I})$, где введено обозначение

$$\mu := \sqrt{\det M} \geq \frac{1}{2}|\kappa - 1|, \quad (87)$$

что следует из (80).

3.3.1 Физический смысл аттенюатора и усилителя

Запишем действие одномодового гауссовского канала с параметрами $(\sqrt{\kappa}\mathbb{I}, 0, \mu\mathbb{I})$, где $0 < \kappa \neq 1$, и μ удовлетворяет условию (87), в представлении Стайнспринга. Такой гауссовский канал можно расширить до линейной динамики открытой бозонной системы, эволюционирующей вместе с окружением согласно некоторому унитарному преобразованию U_T , которое отвечает симплектическому преобразованию T .

Рассмотрим в качестве окружения одномодовую гауссовскую систему, находящуюся изначально в тепловом состоянии $\rho_{\text{th}}(\bar{n})$ с $\bar{n} = \frac{\mu}{|\kappa-1|} - \frac{1}{2}$. В качестве матрицы T рассмотрим

$$T = \begin{cases} T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa}\mathbb{I} & -\sqrt{1-\kappa}\mathbb{I} \\ \sqrt{1-\kappa}\mathbb{I} & \sqrt{\kappa}\mathbb{I} \end{pmatrix}, & \text{если } \kappa \in (0, 1), \\ T_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa}\mathbb{I} & \sqrt{\kappa-1}\sigma_z \\ \sqrt{\kappa-1}\sigma_z & \sqrt{\kappa}\mathbb{I} \end{pmatrix}, & \text{если } \kappa > 1, \end{cases} \quad (88)$$

которая по построению является симплектической. Тогда согласно (72) и (73) канал

$$\Phi[\rho] = \text{Tr}_E \left\{ U_T \rho \otimes \rho_{\text{th}}(\bar{n}) U_T^\dagger \right\} \quad (89)$$

преобразует характеристическую функцию состояния ρ по формуле

$$\chi_{\text{вых}}(z) = \chi_{\text{вх}}(\sqrt{\kappa}z) e^{-\frac{1}{2}|\kappa-1|(\bar{n}+\frac{1}{2})z^T z}, \quad z \in Z_{\text{вых}},$$

так как характеристическая функция теплового состояния $\chi_{\text{th}}(z) = \exp\{-\frac{1}{2}(\bar{n} + \frac{1}{2})z^T z\}$. Подставляя сюда выбранное значение \bar{n} , получим, что канал Φ является гауссовским с параметрами $(\sqrt{\kappa}\mathbb{I}, 0, \mu\mathbb{I})$.

Заметим, что матрица T_1 (88) совпадает с матрицей симплектического преобразо-

вания светоделителя (66). Это означает, что действие фазонечувствительного аттенюатора с параметрами $(\sqrt{\kappa}\mathbb{I}, 0, \mu\mathbb{I})$ на оптический сигнал можно представить как взаимодействие этого сигнала с модой окружения в тепловом состоянии с средним числом фотонов $\bar{n} = \mu|\kappa - 1|^{-1} - \frac{1}{2}$ посредством делителя пучка с коэффициентом прохождения κ .

В случае же, когда канал является фазонечувствительным усилителем, он будет действовать на оптический сигнал точно так же как при двухмодовом сжатии этого сигнала и моды окружения в тепловом равновесии, так как матрица T_2 (88) совпадает с матрицей симплектического преобразования двухмодовой операции сжатия (67) с коэффициентом сжатия $r = \operatorname{arccosh}\sqrt{\kappa}$.

Глава 4

Бозонные гауссовские каналы в формализме когерентных состояний

4.1 Канал с минимальным шумом

В этой главе одномодовые гауссовские каналы Φ с параметрами $(\sqrt{\kappa}\mathbb{I}, 0, \mu\mathbb{I})$ будем для простоты обозначать $\Phi(\kappa, \mu)$, а множество всех таких каналов обозначим как \mathcal{C} . Такие каналы преобразуют характеристическую функцию согласно

$$\chi_{\text{вых}}(z) = \chi_{\text{вх}}(\sqrt{\kappa}z)e^{-\frac{1}{2}\mu z^T z}, \quad z \in (\mathbb{R}^2, \Delta), \quad (90)$$

что соответствует одномодовым фазонечувствительным усилителю ($\kappa > 1$) и аттенюатору ($\kappa \in (0, 1)$) или добавлению классического шума ($\kappa = 1$). Параметры κ и μ должны быть связаны условием

$$\mu \geq \frac{1}{2}|\kappa - 1|, \quad (91)$$

вытекающем из полной положительности канала $\Phi(\kappa, \mu)$. Из этого следует, что для заданного κ минимальный шум, привносимый в канале, равен

$$\mu_{\text{QL}} = \frac{1}{2}|\kappa - 1| \quad (92)$$

и соответствует так называемому QL-каналу (от англ. “quantum-limited”), который мы будем обозначать $\Phi_{\text{QL}}(\kappa)$. Отметим, что для случая $\kappa = 1$ минимальный шум равен 0, и в этом случае QL-канал является просто тождественным каналом.

Для удобства так же будем использовать обозначение

$$a = \mu - \mu_{\text{QL}} \geq 0, \quad (93)$$

определяющее дополнительный шум в канале.

Заметим, что гауссовский канал $\Phi(\kappa, \mu)$, у которого $a > 0$, можно представить как композицию гауссовского QL-канала и классического канала с шумом: $\Phi(\kappa, \mu) = \Phi(1, a) \circ \Phi_{\text{QL}}(\kappa)$, что легко проверить используя формулы (76).

4.2 Композиция каналов с минимальным шумом

Заметим, что любой канал из \mathcal{C} можно представить как композицию QL-аттенюатора и QL-усилителя. Действительно, пусть η – коэффициент ослабления ($0 < \eta \leq 1$) аттенюатора $\Phi_{\text{QL}}(\eta)$, и пусть τ – коэффициент усиления ($\tau \geq 1$) канала $\Phi_{\text{QL}}(\tau)$. Тогда параметры канала $\Phi_{\text{QL}}(\tau) \circ \Phi_{\text{QL}}(\eta)$ определяются по формуле (76) и равны

$$K = \sqrt{\eta\tau}\mathbb{I} \quad \text{и} \quad M = \left\{ \tau \frac{1-\eta}{2} + \frac{\tau-1}{2} \right\} \mathbb{I}.$$

А значит действие произвольного канала $\Phi(\kappa, \mu)$ из \mathcal{C} можно представить как

$$\Phi(\kappa, \mu) = \Phi_{\text{QL}}(\tau) \circ \Phi_{\text{QL}}(\eta), \quad (94)$$

где η и τ определяются по формуле

$$\tau = \mu + \frac{\kappa + 1}{2} \geq 1, \quad \eta = \frac{\kappa}{\tau} \in (0, 1], \quad (95)$$

или, выражая через параметр дополнительного шума a ,

$$\eta = \frac{\kappa}{\tau}, \quad \tau = \begin{cases} a + 1, & \kappa \in (0, 1), \\ a + \kappa, & \kappa \geq 1. \end{cases} \quad (96)$$

Мы будем использовать это свойство каналов из \mathcal{C} для того чтобы записать их действие в виде операторной суммы, так как в случае QL-канала операторы Крауса имеют более простой вид.

4.3 Интегральное представление Крауса

Действие квантового канала Φ на состояние ρ можно представить в виде операторной суммы:

$$\Phi[\rho] = \sum_l K_l \rho K_l^\dagger, \quad \sum_l K_l^\dagger K_l = \mathbb{I}, \quad (97)$$

где в случае бозонной системы операторы K_l действуют в пространстве Фока состояний системы.

Пусть нам известны операторы Крауса (97) $\{K_l^{(1)}\}$ и $\{K_m^{(2)}\}$ каналов Φ_1 и Φ_2 . Тогда действие канала $\Phi_2 \circ \Phi_1$ можно записать как

$$\Phi_2 \circ \Phi_1[\rho] = \sum_{l,m} \left(K_m^{(2)} K_l^{(1)} \right) \rho \left(K_m^{(2)} K_l^{(1)} \right)^\dagger = \sum_{l,m} K_{ml} \rho K_{ml}^\dagger. \quad (98)$$

Таким образом, чтобы записать действие произвольного канала из \mathcal{C} в виде операторной суммы, учитывая (94), достаточно знать операторы Крауса QL каналов из \mathcal{C} .

В работе [20] было найдено явное выражение для операторов Крауса в базисе фоковских состояний как для QL каналов из \mathcal{C} , так и для каналов с дополнительным шумом с помощью представления композицией (94) и формулы (98). Так, операторы Крауса QL-аттенюатора с коэффициентом ослабления η в фоковском базисе принимают вид

$$B_l(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{C_{m+l}^l} (1-\eta)^{\frac{l}{2}} \eta^{\frac{m}{2}} |m\rangle\langle m+l|. \quad (99)$$

Аналогично, операторы Крауса для QL-усилителя с коэффициентом усиления τ равны

$$A_l(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{C_{m+l}^l} (1-\tau^{-1})^{\frac{l}{2}} \tau^{-\frac{m}{2}} |m+l\rangle\langle m|. \quad (100)$$

Действие же этих каналов на произвольное состояние запишется как

$$\Phi_{\text{QL}}(\eta)[\rho] = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(\eta) \rho B_l^\dagger(\eta), \quad \sum_{l=0}^{\infty} B_l^\dagger(\eta) B_l(\eta) = \mathbb{I}, \quad (101)$$

$$\Phi_{\text{QL}}(\tau)[\rho] = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(\tau) \rho A_l^\dagger(\tau), \quad \sum_{l=0}^{\infty} A_l^\dagger(\tau) A_l(\tau) = \mathbb{I}. \quad (102)$$

Для работы с когерентными состояниями удобнее записывать действие этих каналов в интегральной форме:

$$\Phi_\eta[\rho] = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \tilde{B}_\beta(\eta) \rho \tilde{B}_\beta^\dagger(\eta) \quad \text{и} \quad \Phi_\tau[\rho] = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \tilde{A}_\alpha(\tau) \rho \tilde{A}_\alpha^\dagger(\tau), \quad (103)$$

где α, β – комплексные числа, и $d^2\alpha = d(\text{Re } \alpha)d(\text{Im } \alpha)$. Найдём с помощью уже известных операторов Крауса (99) и (100) явный вид операторов $\tilde{B}_\beta(\eta)$ и $\tilde{A}_\alpha(\tau)$ в базисе когерентных состояний.

Используя свойство полноты $\int \frac{d^2\sigma}{\pi} |\sigma\rangle\langle\sigma| = \mathbb{I}$ когерентных состояний и выражение для скалярного произведения $\langle m|\sigma\rangle = e^{-\frac{|\sigma|^2}{2}} \frac{\sigma^m}{\sqrt{m!}}$, можно выразить операторы Крауса (99) в терминах когерентных состояний:

$$\begin{aligned} B_l(\eta) &= \iint \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(m+l)!}{m!l!}} (1-\eta)^{\frac{l}{2}} \eta^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{|\sigma_1|^2}{2} - \frac{|\sigma_2|^2}{2}} \frac{\sigma_1^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{\sigma_2^{m+l}}{\sqrt{(m+l)!}} |\sigma_1\rangle\langle\sigma_2| = \\ &= (1-\eta)^{\frac{l}{2}} \iint \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \frac{\sigma_2^l}{\sqrt{l!}} e^{-\frac{|\sigma_1|^2}{2} - \frac{|\sigma_2|^2}{2} + \sqrt{\eta}\sigma_1^*\sigma_2} |\sigma_1\rangle\langle\sigma_2|. \end{aligned}$$

Используя выражение для скалярного произведения двух когерентных состояний $\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \alpha^*\beta\}$, можно заметить, что

$$\int \frac{d^2\sigma_1}{\pi} |\sigma_1\rangle e^{-\frac{|\sigma_1|^2}{2} - \eta\frac{|\sigma_2|^2}{2} + \sqrt{\eta}\sigma_1^*\sigma_2} = \int \frac{d^2\sigma_1}{\pi} |\sigma_1\rangle \langle\sigma_1|\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle = |\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle. \quad (104)$$

Этот факт позволяет взять интеграл по σ_1 в выражении для B_l , тем самым упрощая

его:

$$B_l(\eta) = (1 - \eta)^{\frac{l}{2}} \int \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \frac{\sigma_2^l}{\sqrt{l!}} e^{-\frac{|\sigma_2|^2}{2}(1-\eta)} |\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|.$$

Действие канала $\Phi_{\text{QL}}(\eta)$, таким образом, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{QL}}(\eta)[\rho] &= \iint \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \frac{d^2\sigma_2}{\pi} e^{-\frac{|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2}{2}(1-\eta)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{((1-\eta)\sigma_1^*\sigma_2)^l}{l!} |\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle\langle\sigma_2| \rho |\sigma_1\rangle\langle\sqrt{\eta}\sigma_1| = \\ &= \iint \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \left\langle \sqrt{1-\eta}\sigma_1 \left| \sqrt{1-\eta}\sigma_2 \right\rangle |\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle\langle\sigma_2| \rho |\sigma_1\rangle\langle\sqrt{\eta}\sigma_1|. \end{aligned}$$

Для того чтобы привести это выражение к виду (103), нужно разделить переменные интегрирования. Это сделать легко, используя свойство полноты когерентных состояний:

$$\Phi_{\eta}[\rho] = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \overbrace{\int \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \left\langle \beta \left| \sqrt{1-\eta}\sigma_2 \right\rangle |\sqrt{\eta}\sigma_2\rangle\langle\sigma_2| \rho \tilde{B}_{\beta}^{\dagger}(\eta) \right.}^{\tilde{B}_{\beta}(\eta)}.$$

Таким образом, операторы $\tilde{B}_{\beta}(\eta)$ равны

$$\tilde{B}_{\beta}(\eta) = \int \frac{d^2\sigma}{\pi} \left\langle \beta \left| \sqrt{1-\eta}\sigma \right\rangle |\sqrt{\eta}\sigma\rangle\langle\sigma|. \quad (105)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и при нахождении операторов в интегральном представлении действия QL-усилителя:

$$\tilde{A}_{\alpha}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int \frac{d^2\sigma}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\sigma|^2 + \frac{1}{2}|\sqrt{\tau^{-1}}\sigma + \sqrt{1-\tau^{-1}}\alpha|^2} \left| \sqrt{\tau^{-1}}\sigma + \sqrt{1-\tau^{-1}}\alpha \right\rangle\langle\sigma|. \quad (106)$$

Или в более простом виде:

$$\tilde{A}_{\alpha}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int \frac{d^2\sigma}{\pi} \left\langle \sqrt{1-\tau^{-1}}\sigma \left| \alpha \right\rangle \left| \sigma \right\rangle\langle\sqrt{\tau^{-1}}\sigma \right|.$$

Теперь, получив явные выражения в базисе когерентных состояний для операторов в интегральном представлении (103) QL-аттенюатора и QL-усилителя, мы можем найти интегральное представление для произвольного канала из \mathcal{C} .

Действительно, как уже было показано, произвольный фазонечувствительный усилитель или аттенюатор с шумом $\Phi(\kappa, \mu) \in \mathcal{C}$ можно представить как композицию (94) QL-аттенюатора и QL-усилителя. А с помощью уже известного интегрального представления последних легко записать действие $\Phi(\kappa, \mu)$ как

$$\Phi(\kappa, \mu)[\rho] = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} \tilde{K}_{\alpha\beta}\rho\tilde{K}_{\alpha\beta}^{\dagger}, \quad (107)$$

где операторы

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int \frac{d^2\sigma}{\pi} \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\sigma|^2}{2} + \sigma\beta^* \sqrt{1-\eta} + \frac{|\alpha\sqrt{\tau-1} + \sigma\sqrt{\eta}|^2}{2\tau} \right\} \times \\ \times \left| \alpha\sqrt{1-\tau^{-1}} + \sigma\sqrt{\eta\tau^{-1}} \right\rangle \langle \sigma | \quad (108)$$

зависят от параметров канала κ и μ через η, τ (95). Формулы (107, 108) доказываются легко, так как $\Phi(\kappa, \mu)[\rho] = \Phi_\tau \circ \Phi_\eta[\rho] = \pi^{-2} \iint d^2\alpha d^2\beta \tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta \rho \tilde{B}_\beta^\dagger \tilde{A}_\alpha^\dagger$ и

$$\tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \iint \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \langle \sqrt{1-\tau^{-1}}\sigma_1 | \alpha \rangle \langle \beta | \sqrt{1-\eta}\sigma_2 \rangle | \sigma_1 \rangle \langle \sqrt{\tau^{-1}}\sigma_1 | \sqrt{\eta}\sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | = \\ = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int \frac{d^2\sigma_2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\sigma_2|^2) + \sqrt{1-\eta}\sigma_2\beta^* \right\} \times \\ \times \left(\int \frac{d^2\sigma_1}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}|\sigma_1|^2 + \sigma_1^* \left(\sqrt{1-\tau^{-1}}\alpha + \sqrt{\eta\tau^{-1}}\sigma_2 \right) \right\} | \sigma_1 \rangle \right) \langle \sigma_2 |,$$

что после интегрирования по σ_1 завершает доказательство.

4.4 Действие канала на когерентные состояния и операторные обобщения когерентных состояний

С помощью интегрального представления (107) легко найти действие произвольного канала $\Phi(\kappa, \mu) \in \mathcal{C}$ на когерентное состояние $|\gamma\rangle\langle\gamma|$. А используя этот результат, можно найти действие этого канала на произвольное состояние ρ , записав оператор плотности в диагональном представлении $\rho = \int d^2\gamma P(\gamma) |\gamma\rangle\langle\gamma|$, где $P(\gamma)$ – так называемое P -распределение Глаубера-Сударшана [24]. В дальнейшем, нам понадобится найти действие Φ на состояния с оператором плотности, представляющем из себя сумму операторов вида $|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|$, поэтому найдем общий вид $\Phi[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|]$, из которого уже будет легко получить действие Φ на произвольное когерентное состояние, и в том числе на вакуумное состояние.

Так как $\Phi(\kappa, \mu)[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|] = \pi^{-2} \iint d^2\alpha d^2\beta \tilde{K}_{\alpha\beta} |\gamma_k\rangle\langle\gamma_l| \tilde{K}_{\alpha\beta}^\dagger$, найдем для начала как оператор Крауса $\tilde{K}_{\alpha\beta}$ действует на когерентное состояние $|\gamma_k\rangle$:

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} |\gamma_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma_k|^2}{2} + \gamma_k\beta^* \sqrt{1-\eta} + \frac{|\alpha\sqrt{\tau-1} + \gamma_k\sqrt{\eta}|^2}{2\tau} \right\} \times \\ \times \left| \alpha\sqrt{1-\tau^{-1}} + \gamma_k\sqrt{\eta\tau^{-1}} \right\rangle. \quad (109)$$

Чтобы найти $\langle\gamma_l| \tilde{K}_{\alpha\beta}^\dagger$, нужно эрмитово сопрячь выражение (109) и сделать замену $k \rightarrow l$. Теперь можно легко проинтегрировать по β выражение $\pi^{-2} \iint d^2\alpha d^2\beta \tilde{K}_{\alpha\beta} |\gamma_k\rangle\langle\gamma_l| \tilde{K}_{\alpha\beta}^\dagger$ и

определить, как действует канал Φ на оператор $|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|$:

$$\Phi [|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|] = \tau^{-1} \int \frac{d^2\sigma}{\pi} C_{kl}(\sigma) \left| \gamma_k \sqrt{\frac{\eta}{\tau}} + \sigma \sqrt{\frac{\tau-1}{\tau}} \right\rangle \left\langle \gamma_l \sqrt{\frac{\eta}{\tau}} + \sigma \sqrt{\frac{\tau-1}{\tau}} \right|, \quad (110)$$

где введено обозначение

$$C_{kl}(\sigma) = \exp \left\{ -\frac{|\gamma_k|^2 + |\gamma_l|^2}{2} \left(1 - \frac{\eta}{\tau}\right) + \gamma_k \gamma_l^* (1 - \eta) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{|\sigma|^2}{\tau} + \frac{\sigma^* (\gamma_k + \gamma_l) + \sigma (\gamma_k + \gamma_l)^*}{2\tau} \sqrt{\eta(\tau-1)} \right\}. \quad (111)$$

Взяв $\gamma_k = \gamma_l = \gamma$ из полученного выше выражения можно найти как действует произвольный канал из \mathcal{C} на когерентное состояние $|\gamma\rangle$.

Глава 5

Динамика квантовой перепутанности

5.1 Односторонний шум

Канал Φ называется разрушающим перепутанность [18], если при действии на подсистему составной системы эта составная система переходит в распутанное (сепарабельное) состояние, т.е.

$$\Phi \otimes \text{Id}_E[\rho_{AE}] = \sum_j p_j \rho_B^j \otimes \rho_E^j \quad (112)$$

для любого оператора плотности ρ_{AE} . (Здесь правая часть равенства означает выпуклую сумму факторизованных операторов плотности, т.е. сепарабельное (распутанное) состояние.) Из определения видно, что рассматриваемый случай описывает действие **одностороннего** шума, что практически никогда не выполняется на практике.

Для случая одностороннего усиления или ослабления $\Phi(\kappa, \mu) \otimes \text{Id}$ известно [31], что перепутанность **любого** двухмодового состояния не сохранится после прохождения такого канала (т.е. канал $\Phi(\kappa, \mu)$ является разрушающим перепутанность) тогда и только тогда, когда выполнено

$$a \geq \min\{1, \kappa\}, \quad (113)$$

где a определяется по формуле (93). Если условие (113) не выполнено, то существует параметр сжатия r такой, что гауссовское состояние двухмодового сжатого вакуума сохранит перепутанность при действии канала $\Phi(\kappa, \mu)$ на одну из мод.

5.2 Двусторонний шум: постановка задачи

Однако усиление/ослабление не обязательно должно быть односторонним. Проблема определения предельно допустимого шума при действии двустороннего шума восходит к работе [22] и имеет полное решение для двухкубитного случая [10, 11]. Для бозонных гауссовских каналов проблема полностью не решена. В данном исследовании делается новый шаг в этом направлении.

Для несимметричного случая $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$ в работе [12] было показано, что перепутанность **любого** двухмодового гауссовского состояния после прохождения

такого канала разрушится тогда и только тогда, когда

$$\kappa_1\mu_2 + \kappa_2\mu_1 \geq \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (114)$$

В той же работе было продемонстрировано, что перепутанность негауссовских состояний может быть более устойчива к шумам. В частности, состояние $[2(1-e^{-|\gamma|^2})]^{-1/2}(|\gamma\rangle|0\rangle - |0\rangle|\gamma\rangle)$, где $|\gamma\rangle$ – когерентное состояние, в случае симметричного канала $\Phi(\kappa, \mu) \otimes \Phi(\kappa, \mu)$ после прохождения остается перепутанным в большем диапазоне шумов, чем любое двухмодовое гауссовское состояние. Однако, перепутанность такого симметричного состояния менее устойчива к асимметричным шумам при ослаблении обеих мод $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$, чем в случае гауссовского состояния.

Поэтому в настоящей работе мы предлагаем вместо симметричного состояния изучать динамику перепутанности состояния

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(|\gamma\rangle|0\rangle - |0\rangle|\delta\rangle) \quad (115)$$

при прохождении через канал $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$. Здесь $|\gamma\rangle, |\delta\rangle$ – когерентные состояния, а \mathcal{N} – постоянная нормировки, равная

$$\mathcal{N} = \left[2 \left(1 - e^{-\frac{|\gamma|^2}{2} - \frac{|\delta|^2}{2}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (116)$$

Гипотеза состоит в том, что среди класса состояний вида (115) существуют такие, которые при заданных параметрах усиления/ослабления обладают большей стойкостью к потере перепутанности при увеличении шумов по сравнению с любым гауссовским состоянием. В дальнейшем мы подтверждаем эту гипотезу и анализируем физические аспекты оптимального состояния среди класса (115).

5.3 Двусторонний шум: методы

Для установления факта перепутанности состояния на выходе из канала будем пользоваться тем же свидетелем перепутанности, что и в работе [12]. Оператор W называется **свидетелем перепутанности** перепутанного состояния ρ_{AB} , если

$$\text{Tr}\{W\rho_{AB}\} < 0, \quad (117)$$

в то время как для любого чистого сепарабельного состояния $|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ выполнено

$$\text{Tr}\{W|\phi_A\rangle\langle\phi_A| \otimes |\phi_B\rangle\langle\phi_B|\} = \langle\phi_A| \otimes \langle\phi_B| W |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \geq 0. \quad (118)$$

Рассмотрим семейство операторов

$$W_\lambda = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} e^{\lambda(|\alpha|^2+|\beta|^2)} |\alpha\rangle \langle\beta| \otimes |\beta\rangle \langle\alpha|, \quad (119)$$

где λ – действительное число, а $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ – когерентные состояния. Заметим, что при $\lambda > 0$ оператор W_λ является неограниченным, однако его среднее в состоянии на выходе из канала может иметь конечное значение. Так как для любых $|\phi_A\rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_A), |\phi_B\rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_B)$ выполнено

$$\text{Tr}\{W_\lambda |\phi_A\rangle\langle\phi_A| \otimes |\phi_B\rangle\langle\phi_B|\} = \left| \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\lambda|\alpha|^2} \langle\phi_A|\alpha\rangle \langle\alpha|\phi_B\rangle \right|^2 \geq 0, \quad (120)$$

то значение $\text{Tr}\{W\rho_{AB}\} < 0$ свидетельствует о наличии перепутанности в состоянии ρ_{AB} .

Изучим динамику перепутанности состояния (115) и найдем значения параметров $\kappa_{1,2}, \mu_{1,2}$, при которых оно остается перепутанным после прохождения канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2 \equiv \Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$. Для этого определим, при каких условиях существует λ такое, что среднее значение свидетеля перепутанности $\text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1 \otimes \Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|]\} < 0$.

Так как

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \mathcal{N}^2 \left(|\gamma\rangle\langle\gamma| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |\delta\rangle\langle\delta| - |\gamma\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle\delta| - |0\rangle\langle\gamma| \otimes |\delta\rangle\langle 0| \right), \quad (121)$$

то в силу линейности следа и канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ выполнено

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1 \otimes \Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|]\} &= \mathcal{N}^2 \left(\text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma\rangle\langle\gamma|] \otimes \Phi_2[|0\rangle\langle 0|]\} + \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|0\rangle\langle 0|] \otimes \Phi_2[|\delta\rangle\langle\delta|]\} - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma\rangle\langle 0|] \otimes \Phi_2[|0\rangle\langle\delta|]\} - \overline{\text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma\rangle\langle 0|] \otimes \Phi_2[|0\rangle\langle\delta|]\}} \right), \quad (122) \end{aligned}$$

так как из определения (119) $W_\lambda^\dagger = W_\lambda$, и $(\Phi[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|])^\dagger = \Phi[|\gamma_l\rangle\langle\gamma_k|]$, что следует из формулы (110). Поэтому определив чему равен $\text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|] \otimes \Phi_2[|\delta_k\rangle\langle\delta_l|]\}$ для произвольных $\gamma_{k,l}$ и $\delta_{k,l}$, можно легко найти чему равен след в выражении (122).

Из определения W_λ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|] \otimes \Phi_2[|\delta_k\rangle\langle\delta_l|]\} &= \\ &= \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} e^{\lambda(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \langle\beta|\Phi_1[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|]|\alpha\rangle \langle\alpha|\Phi_2[|\delta_k\rangle\langle\delta_l|]|\beta\rangle. \quad (123) \end{aligned}$$

А из формулы (110) можно найти

$$\begin{aligned} \langle\beta|\Phi[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|]|\alpha\rangle &= \frac{1}{\tau} \exp \left\{ -\frac{|\gamma_k|^2 + |\gamma_l|^2}{2} + \gamma_k \gamma_l^* (1 - \eta) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + (\alpha \gamma_l^* + \beta^* \gamma_k) \sqrt{\eta \tau^{-1}} + \alpha \beta^* (1 - \tau^{-1}) \right\}. \quad (124) \end{aligned}$$

С помощью чего после интегрирования по α и β легко вычисляется (123):

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1[|\gamma_k\rangle\langle\gamma_l|] \otimes \Phi_2[|\delta_k\rangle\langle\delta_l|]\} = \mathcal{Z}^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (|\gamma_k|^2 + |\gamma_l|^2 + |\delta_k|^2 + |\delta_l|^2) + \right. \\ \left. + \gamma_k \gamma_l^* (1 - \eta_1) + \delta_k \delta_l^* (1 - \eta_2) + \frac{\delta_k \gamma_l^*}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{\tau_1 \tau_2}} + \right. \\ \left. + (1 - \lambda) \tau_1 \tau_2 \mathcal{Z}^{-1} \left(\gamma_k \sqrt{\frac{\eta_1}{\tau_1}} + \delta_k \frac{1 - \tau_1^{-1}}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{\eta_2}{\tau_2}} \right) \left(\delta_l^* \sqrt{\frac{\eta_2}{\tau_2}} + \gamma_l^* \frac{1 - \tau_2^{-1}}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{\eta_1}{\tau_1}} \right) \right\}, \quad (125) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\mathcal{Z} = (1 - \lambda)^2 \tau_1 \tau_2 - (\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1), \quad (126)$$

а параметры τ_1, τ_2, η_1 и η_2 определяются по формуле (95) для соответствующих параметров каналов $\Phi_1 \equiv \Phi(\kappa_1, \mu_1)$ и $\Phi_2 \equiv \Phi(\kappa_2, \mu_2)$. При интегрировании возникли ограничения на λ :

$$1 - \lambda > 0, \quad (127)$$

$$(1 - \lambda)^2 \tau_1 \tau_2 - (\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1) > 0, \quad (128)$$

при несоблюдении которых интегралы расходятся. Из этих двух условий следует, что нужно рассматривать только $\lambda < \lambda_0$, где

$$\lambda_0 = 1 - \sqrt{\frac{(\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1)}{\tau_1 \tau_2}}. \quad (129)$$

Таким образом, подставляя в (123) $\gamma_{k,l}$ и $\delta_{k,l}$, соответствующие каждому члену суммы (122), получим, что

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{W_\lambda \Phi_1 \otimes \Phi_2[|\psi\rangle\langle\psi|]\} = \frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{Z}} \left(e^{-|\gamma|^2 \eta_1 \tau_1 (1 - \lambda \tau_2 (2 - \lambda)) \mathcal{Z}^{-1}} + e^{-|\delta|^2 \eta_2 \tau_2 (1 - \lambda \tau_1 (2 - \lambda)) \mathcal{Z}^{-1}} - \right. \\ \left. - e^{-\frac{1}{2} (|\gamma|^2 + |\delta|^2) + \gamma \delta^* (1 - \lambda) \sqrt{\eta_1 \eta_2 \tau_1 \tau_2} \mathcal{Z}^{-1}} - \text{к.с.} \right), \quad (130) \end{aligned}$$

где «к.с.» обозначает член, комплексно сопряженный последней написанной экспоненте в правой части уравнения.

Наша задача состоит в том, чтобы определить, при каких параметрах канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ существует $\lambda < \lambda_0$ такое, при котором след (130) принимает отрицательное значение.

При $|\gamma|, |\delta| \rightarrow 0$ разность экспонент в (130) можно записать как разность их показателей. А значит, так как $\mathcal{Z} > 0$, что следует из (126) и (128), для подтверждения перепутанности состояния на выходе должно существовать $\lambda < \lambda_0$, удовлетворяющее

условию

$$\begin{aligned}
 & - |\gamma|^2 \eta_1 \tau_1 (1 - \lambda \tau_2 (2 - \lambda)) - |\delta|^2 \eta_2 \tau_2 (1 - \lambda \tau_1 (2 - \lambda)) + \\
 & + \mathcal{Z}(|\gamma|^2 + |\delta|^2) - (\gamma \delta^* + \gamma^* \delta) (1 - \lambda) \sqrt{\eta_1 \eta_2 \tau_1 \tau_2} < 0. \quad (131)
 \end{aligned}$$

После упрощения это условие примет вид квадратного неравенства по λ :

$$\lambda^2 b_1 - 2\lambda b_2 + b_3 < 0, \quad (132)$$

где были введены обозначения

$$b_1 := |\gamma|^2 (1 - \eta_1) + |\delta|^2 (1 - \eta_2), \quad (133)$$

$$b_2 := b_1 - \frac{1}{2} (\gamma \delta^* + \gamma^* \delta) \sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{\tau_1 \tau_2}}, \quad (134)$$

$$b_3 := \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \left[(|\gamma|^2 + |\delta|^2) (\tau_1 + \tau_2 - 1) - |\gamma|^2 \eta_1 \tau_1 - |\delta|^2 \eta_2 \tau_2 - (\gamma \delta^* + \gamma^* \delta) \sqrt{\eta_1 \eta_2 \tau_1 \tau_2} \right]. \quad (135)$$

Заметим, что из определения (95) η_1 и η_2 следует, что $0 < \eta_1, \eta_2 \leq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда η_1 и η_2 не равны 1 одновременно. Тогда $b_1 > 0$, если γ и δ не равны нулю. Значит, чтобы неравенство (132) выполнялось хоть для какого-нибудь λ , необходимо, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был больше нуля:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} := b_2^2 - b_1 b_3 = b_1 \left[(|\gamma|^2 + |\delta|^2) \frac{(\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1)}{\tau_1 \tau_2} - |\gamma|^2 \eta_1 \frac{\tau_2 - 1}{\tau_2} - |\delta|^2 \eta_2 \frac{\tau_1 - 1}{\tau_1} \right] + \\
 + \frac{1}{4} (\gamma \delta^* + \gamma^* \delta)^2 \frac{\eta_1 \eta_2}{\tau_1 \tau_2} > 0. \quad (136)
 \end{aligned}$$

Помимо этого необходимо, чтобы меньший из корней уравнения $\lambda^2 b_1 - 2\lambda b_2 + b_3 = 0$ был меньше λ_0 . А так как $b_1 > 0$, меньшим из корней будет

$$\frac{b_2 - \sqrt{D/4}}{b_1} < \lambda_0, \quad (137)$$

что приводит к неравенству

$$b_1 \sqrt{(\tau_1 - 1)(\tau_2 - 1)} \leq \frac{1}{2} (\gamma \delta^* + \gamma^* \delta) \sqrt{\eta_1 \eta_2}. \quad (138)$$

Из этого неравенства уже видно, что с помощью операторов W_λ нельзя определить, будет ли после прохождения канала запутанным состояние $|\psi\rangle$, у которого $\text{Re}(\gamma \delta^*) < 0$. Так же можно заметить, что если $\text{Re}(\gamma \delta^*) = 0$, то неравенство (138) может быть выполнено (с учетом рассматриваемого случая $\eta_1, \eta_2 < 1$), только если $\tau_1 = 1$ или $\tau_2 = 1$. Пусть $\tau_1 = 1$, тогда $D/4 = -b_1 |\gamma|^2 \eta_1 (1 - \tau_2^{-1}) \leq 0$, что противоречит (136). Случай $\tau_2 = 1$ рассматривается аналогично. Получается, ни один из операторов W_λ не будет являться свидетелем перепутанности состояния с $\text{Re}(\gamma \delta^*) \leq 0$ после прохождения

канала.

Таким образом, будем предполагать, что

$$\operatorname{Re}(\gamma\delta^*) > 0. \quad (139)$$

Рассмотрим кратко случай $\eta_1 = \eta_2 = 1$. Необходимо найти условие существования $\lambda < \lambda_0$ такого, чтобы выполнялось (132) в случае $b_1 = 0$. В рассматриваемом случае (132) преобразуется в линейное неравенство $-2\lambda b_2 + b_3 < 0$. При чем с учетом (139) $-2b_2 > 0$, а значит при $\lambda \rightarrow -\infty$ условие (132) точно будет выполнено, вне зависимости от параметров канала. Рассмотренный случай канала, для которого $\eta_1 = \eta_2 = 1$, соответствует двум QL-усилителям. И полученный результат означает, что такой канал не разрушает перепутанность состояния (115, 139) ни при каких значениях усиления.

Вернемся теперь к случаю, когда $0 < \eta_1, \eta_2 < 1$. Обозначим $\delta = c\gamma$ и

$$|\psi_c\rangle = \mathcal{N}(|\gamma\rangle|0\rangle - |0\rangle|c\gamma\rangle), \quad |\gamma| \rightarrow 0, \quad (140)$$

где $\mathcal{N} = \left[2 \left(1 - e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}(1+|c|^2)}\right)\right]^{-1/2}$. Если рассматривать только те состояния, у которых $c \in \mathbb{R}$, и, с учетом (139), $c > 0$, то в системе неравенств (136,138), учитывая $\tau_1, \tau_2 \geq 1$, можно разделить переменные τ_1 и τ_2 :

$$\tau_1 < \frac{1 + c^2(1 - \eta_2)}{1 - \eta_1 + c^2(1 - \eta_2)} \quad \text{и} \quad \tau_2 < \frac{1 - \eta_1 + c^2}{1 - \eta_1 + c^2(1 - \eta_2)}, \quad (141)$$

таким образом, мы нашли условия, при соблюдении которых канал $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ гарантированно **не будет разрушать перепутанность состояния** $|\psi_c\rangle$ (140) при $c > 0$.

Неравенства (141) можно переписать в терминах дополнительного шума и параметра усиления/ослабления каналов Φ_1 и Φ_2 :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \kappa_1 < 1, \kappa_2 < 1, a_1 < \frac{\kappa_1(1 + a_2)}{(c^2 + 1)(1 + a_2) - c^2\kappa_2}, a_2 < \frac{c^2\kappa_2(1 + a_1)}{(c^2 + 1)(1 + a_1) - \kappa_1}, \\ \text{(ii)} \quad & \kappa_1 < 1, \kappa_2 \geq 1, a_1 < \frac{\kappa_1(\kappa_2 + a_2)}{\kappa_2 + (c^2 + 1)a_2}, a_2 < 1 - \frac{\kappa_2(1 + a_1 - \kappa_1)}{(c^2 + 1)(1 + a_1) - \kappa_1}, \\ \text{(iii)} \quad & \kappa_1 \geq 1, \kappa_2 \geq 1, a_1 < 1 - \frac{c^2\kappa_1a_2}{\kappa_2 + (c^2 + 1)a_2}, a_2 < 1 - \frac{\kappa_2a_1}{c^2\kappa_1 + (c^2 + 1)a_1}, \end{aligned}$$

где во всех трех случаях так же должно быть выполнено условие $a_1, a_2 \geq 0$. Эти неравенства в случае $c = 1$ полностью совпадают с полученными в работе [12].

5.4 Анализ результатов

Фиксируя κ_1 и κ_2 мы можем наблюдать на Рис. 2, как для разных значений c меняется область допустимых шумов в канале для состояния $|\psi_c\rangle$. Под областью допустимых шумов будем подразумевать такие значения a_1, a_2 , при которых состояние $|\psi_c\rangle$ остается

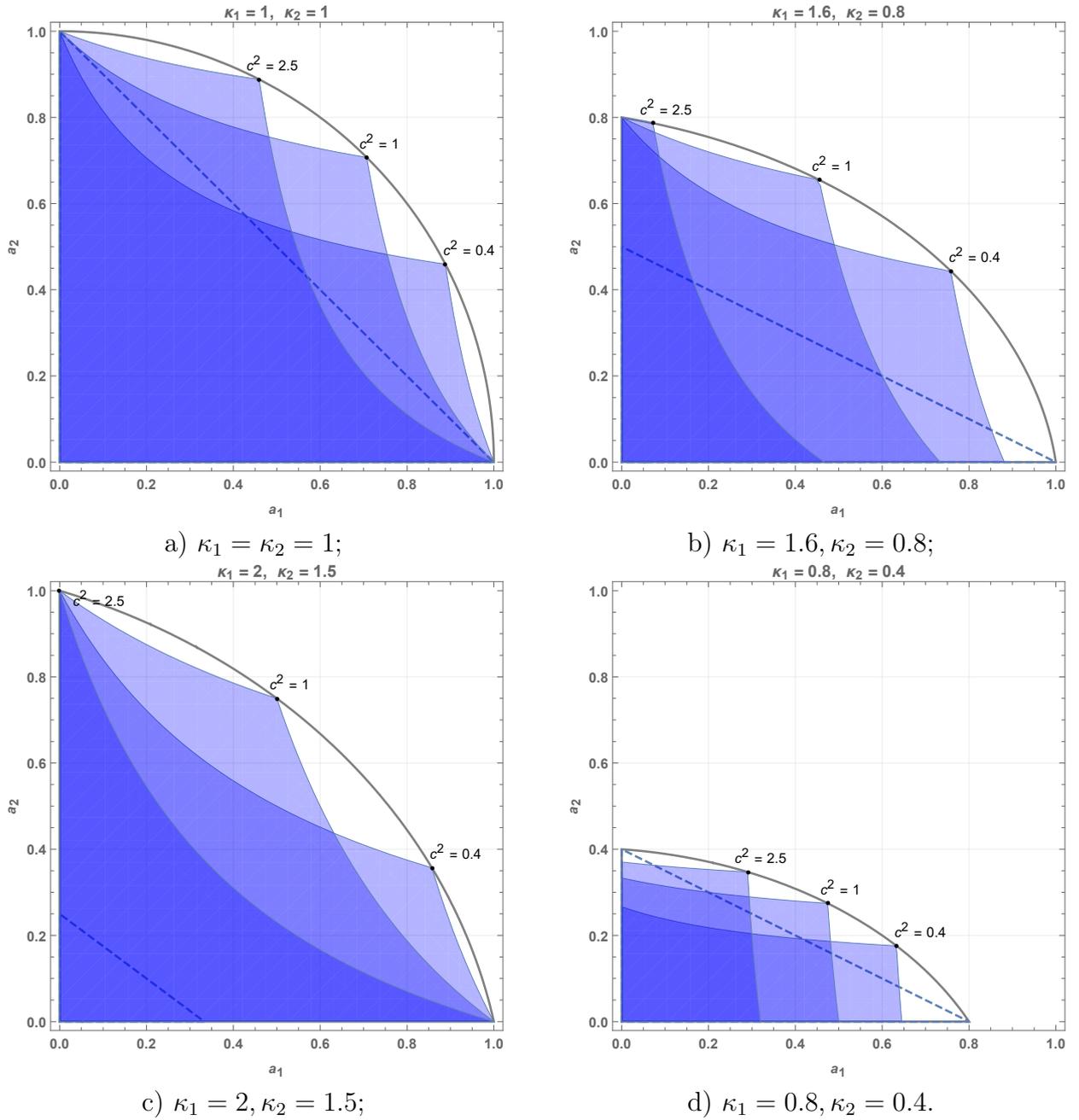


Рис. 2. Для различных фиксированных значений коэффициентов ослабления/усиления канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ синим цветом показаны области допустимых шумов для состояний $|\psi_c\rangle$ с тремя различными значениями c . Области допустимых шумов для всевозможных значений $c > 0$ не выходят за серую линию, задаваемую уравнением (143). Пунктирной линией показана граница области допустимых шумов гауссовских двухмодовых состояний (114). Для любой точки $\{a_1, a_2\}$ под этой прямой существует такое перепутанное двухмодовое гауссовское состояние, перепутанность которого сохранится после прохождения канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2$.

перепутанным после прохождения канала $\Phi_1 \otimes \Phi_2$. Эта область ограничена прямыми $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и двумя кривыми, задаваемыми уравнениями, полученными заменой знаков неравенства в (141) на знаки равенства:

$$\tau_1 = \frac{1 + c^2(1 - \eta_2)}{1 - \eta_1 + c^2(1 - \eta_2)} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{1 - \eta_1 + c^2}{1 - \eta_1 + c^2(1 - \eta_2)}. \quad (142)$$

Эти кривые пересекаются в точке $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$, зависящей от κ_1 , κ_2 и c . Исключив c^2 из системы уравнений (142), можно найти уравнение кривой, на которой лежат точки пересечения $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$ для всевозможных значений c , при фиксированных значениях κ_1 и κ_2 :

$$\Gamma_{\kappa_1\kappa_2} : \begin{cases} \kappa_2 \left(\tilde{a}_1 + \frac{1}{2}|\kappa_1 - 1| \right)^2 + \kappa_1 \left(\tilde{a}_2 + \frac{1}{2}|\kappa_2 - 1| \right)^2 = \frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1\kappa_2), \\ \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \geq 0. \end{cases} \quad (143)$$

И для каждой такой пары $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$ на кривой $\Gamma_{\kappa_1\kappa_2}$ найдется такое значение c , при котором $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$ является точкой пересечения кривых (142):

$$c^2 = \frac{\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1 + \kappa_1}{\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2 + \kappa_2}, \quad \tilde{\tau}_{1(2)} = \begin{cases} 1 + \tilde{a}_{1(2)}, & \kappa_{1(2)} \in (0, 1), \\ \kappa_{1(2)} + \tilde{a}_{1(2)}, & \kappa_{1(2)} \geq 1. \end{cases} \quad (144)$$

Таким образом, для фиксированных κ_1 и κ_2 области допустимых шумов для всевозможных состояний $|\psi_c\rangle$, $c > 0$ (140) ограничены кривой $\Gamma_{\kappa_1\kappa_2}$, зависящей только от κ_1, κ_2 . При чем для каждой точки $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$ на этой кривой можно найти такое состояние $|\psi_c\rangle$, пересечением границы области допустимых шумов которого с этой кривой будет точка $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$.

На Рис. 2 кривая $\Gamma_{\kappa_1\kappa_2}$ изображена серым цветом для четырех различных пар параметров усиления/ослабления. Также из этого рисунка видно, что для некоторого фиксированного c могут существовать такие значения шумов в канале, при котором перепутанность состояния $|\psi_c\rangle$ не сохранится, а некоторого гауссовского двухмодового состояния сохранится (например, для $\kappa_1 = 1.6$, $\kappa_2 = 0.8$, $c = 2.5$ точка $\{a_1 = 0.4, a_2 = 0.2\}$ лежит в области допустимых шумов гауссовских состояний, но вне области допустимых шумов $|\psi_{c=2.5}\rangle$). Но несмотря на это, объединение областей допустимых шумов для всех $|\psi_c\rangle$, $c > 0$ существенно превосходит область допустимых шумов гауссовских двухмодовых состояний, особенно в случае усиления обеих мод. А значит, состояния $|\psi_c\rangle$, $c > 0$ оказываются **более устойчивы** к шумам в каналах вида $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$, чем гауссовские. Ниже будет показано, какое именно состояние из набора $\{|\psi_c\rangle\}$ нужно выбрать при заданных параметрах канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$, чтобы гарантировать сохранение его перепутанности.

Полученный выше результат позволяет сделать вывод о том, что канал $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_1, \mu_2)$ **не является разрушающим перепутанность**, если выполнено условие

$$\kappa_2\mu_1^2 + \kappa_1\mu_2^2 < \frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1\kappa_2). \quad (145)$$

Действительно, если параметры канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_1, \mu_2)$ удовлетворяют условию

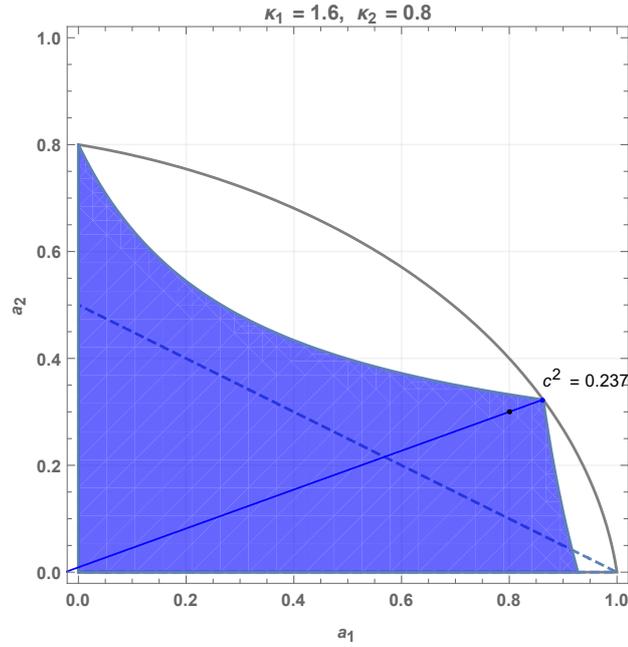


Рис. 3. При заданных параметрах канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$, которые удовлетворяют условию (145), то есть если точка $\{a_1, a_2\}$ находится под серой кривой, можно найти такое состояние $|\psi_c\rangle$, перепутанность которого после прохождения канала сохранится, то есть точка $\{a_1, a_2\}$ будет находится в области допустимых шумов (показана синим цветом) состояния $|\psi_c\rangle$. На рисунке пример $\kappa_1 = 1.6, \kappa_2 = 0.8, a_1 = 0.8, a_2 = 0.3$. Пунктиром обозначена граница допустимых шумов для гауссовских состояний, то есть канал с приведенными выше параметрами разрушает перепутанность любых двухмодовых гауссовских состояний.

(145), можно найти такие $\tilde{a}_1 = \tilde{\mu}_1 - \frac{1}{2}|\kappa_1 - 1|$ и $\tilde{a}_2 = \tilde{\mu}_2 - \frac{1}{2}|\kappa_2 - 1|$, где

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1\kappa_2)}}{\sqrt{\kappa_2\mu_1^2 + \kappa_1\mu_2^2}}, \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_2 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1\kappa_2)}}{\sqrt{\kappa_2\mu_1^2 + \kappa_1\mu_2^2}}, \quad (146)$$

которые удовлетворяют условию (143), а значит точка $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$ лежит на кривой $\Gamma_{\kappa_1\kappa_2}$. Как уже было отмечено выше, для такой точки можно найти такое состояние $|\psi_c\rangle$ (144), граница области допустимых шумов которого будет пересекать кривую $\Gamma_{\kappa_1\kappa_2}$ в точке $\{\tilde{a}_1; \tilde{a}_2\}$, см. Рис. 3. По построению точка $\{a_1; a_2\}$ будет лежать внутри области допустимых шумов состояния $|\psi_c\rangle$, а значит это состояние остается перепутанным после прохождения канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_1, \mu_2)$. Таким образом, мы доказали, что канал $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_1, \mu_2)$ не является разрушающим перепутанность, если выполнено условие (145), и описали алгоритм нахождения «оптимального» состояния, перепутанность которого сохранится после прохождения такого канала.

Отметим важное свойство построенных таким образом состояний $|\psi_c\rangle$. Из Рис. 2 видно, что, так как «оптимальное» значение c зависит от параметров усиления/ослабления канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_2, \mu_2)$, диапазон его возможных значений меняется. Интересно, что при большой разнице между κ_1 и κ_2 ($|\kappa_1 - \kappa_2| > 2$), «оптимальные» значения c либо всегда больше 1, либо всегда меньше 1, вне зависимости от параметров шума в канале.

$|\psi_{c=1}\rangle$, предложенного в работе [12], оказывается менее устойчивой к усилению одной моды при ослаблении второй.

Отметим еще одно важное наблюдение. Существуют области параметров канала $\Phi(\kappa_1, \mu_1) \otimes \Phi(\kappa_1, \mu_2)$, для которых с помощью свидетеля перепутанности W_λ можно установить наличие перепутанности некоторых состояний $|\psi_c\rangle$ (140) не только для маленьких значений $|\gamma|$, но и при произвольно большой энергии $\in (0, \infty)$. Однако, все они не превосходят результат, полученный для $|\gamma| \rightarrow 0$, т.е. состояния $|\psi_c\rangle$ с маленькой энергией обеспечивают наибольший диапазон разрешенных шумов в канале, при этом состояние $|\psi_c\rangle$ (140) переходит в

$$|\psi_c\rangle \xrightarrow{|\gamma| \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (|1\rangle |0\rangle - c |0\rangle |1\rangle). \quad (147)$$

Глава 6

Заключение

В настоящей работе исследована динамика перепутанности двухмодовых негауссовских состояний под действием локальных шумов, описываемых гауссовскими бозонными каналами ослабления или усиления. Известные ранее результаты для случаев одностороннего и симметричного воздействия были обобщены на случай произвольного несимметричного ослабления или усиления каждой из мод. Для достижения этого результата в работе подробно рассмотрены способ описания бозонных гауссовских каналов с помощью интегрального представления Крауса в терминах когерентных состояний, а также проанализирован неограниченный оператор, называемый «свидетелем перепутанности».

В работе впервые было показано существование негауссовских состояний, обладающих большей стойкостью к потере перепутанности, чем гауссовские, даже в случае несимметричных локальных шумов. При этом в случае большой разницы коэффициентов ослабления/усиления двух мод оказалось, что более устойчивыми к потере перепутанности являются те состояния, в которых энергия между двумя модами распределена контринтуитивным способом: больше энергии должно быть в той моде, которая сильнее усиливается. Устойчивость перепутанности найденных состояний позволяет расширить границы применения локально ослабленных или усиленных сигналов в протоколах квантовой информатики, основой которых является наличие перепутанности, и именно: квантовое распределение ключей, сверхплотное кодирование, увеличение классической пропускной способности при использовании ресурса перепутанности; а также в физических приложениях, таких как квантовая метрология.

Список литературы

- [1] G. S. Agarwal, S. Chaturvedi, A. Rai. “Amplification of maximally-path-entangled number states”. *Phys. Rev. A* **81** (4 2010), с. 043843. DOI: [10.1103/PhysRevA.81.043843](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.043843). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.043843>.
- [2] C. H. Bennett, S. J. Wiesner. “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”. *Phys. Rev. Lett.* **69** (20 1992), с. 2881–2884. DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.2881](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2881>.
- [3] С. Н. Беннетт и др. “Entanglement-Assisted Classical Capacity of Noisy Quantum Channels”. *Phys. Rev. Lett.* **83** (15 1999), с. 3081–3084. DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.3081](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3081). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.3081>.
- [4] S. L. Braunstein, P. van Loock. “Quantum information with continuous variables”. *Rev. Mod. Phys.* **77** (2 2005), с. 513–577. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.513](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.513). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.513>.
- [5] H. P. Breuer, F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Great Clarendon Street: Oxford University Press, 2002.
- [6] F. Caruso, V. Giovannetti, A. S. Holevo. “One-mode bosonic Gaussian channels: a full weak-degradability classification”. *New Journal of Physics* **8** 12 (2006), с. 310.
- [7] V. V. Dodonov, O. V. Man’ko, V. I. Man’ko. “Photon distribution for one-mode mixed light with a generic Gaussian Wigner function”. *Phys. Rev. A* **49** (4 1994), с. 2993–3001. DOI: [10.1103/PhysRevA.49.2993](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.2993). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2993>.
- [8] A. K. Ekert. “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”. *Phys. Rev. Lett.* **67** (6 1991), с. 661–663. DOI: [10.1103/PhysRevLett.67.661](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>.
- [9] R. Feynman. *Statistical Mechanics: A Set Of Lectures*. 2018, с. 1–354. ISBN: 9780429493034. DOI: [10.1201/9780429493034](https://doi.org/10.1201/9780429493034).
- [10] S. Filippov. “Entanglement Robustness in Trace Decreasing Quantum Dynamics”. *Quanta* **10** 1 (2021), с. 15–21. ISSN: 1314-7374. DOI: [10.12743/quanta.v10i1.163](https://doi.org/10.12743/quanta.v10i1.163). URL: <http://quanta.ws/ojs/index.php/quanta/article/view/163>.

-
- [11] S. N. Filippov, V. V. Frizen, D. V. Kolobova. “Ultimate entanglement robustness of two-qubit states against general local noises”. *Physical Review A* **97** 1 (2018), с. 012322.
- [12] S. N. Filippov, M. Ziman. “Entanglement sensitivity to signal attenuation and amplification”. *Phys. Rev. A* **90** (1 2014), с. 010301. DOI: [10.1103/PhysRevA.90.010301](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.010301). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.010301>.
- [13] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone. “Advances in quantum metrology”. *Nature Photonics* **5** 4 (2011), с. 222–229. DOI: [10.1038/nphoton.2011.35](https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35). URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35>.
- [14] V. Giovannetti и др. “Classical Capacity of the Lossy Bosonic Channel: The Exact Solution”. *Phys. Rev. Lett.* **92** (2 2004), с. 027902. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.027902](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.027902). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.027902>.
- [15] A. S. Holevo. “One-Mode Quantum Gaussian Channels: Structure and Quantum Capacity”. **43** 1 (2007). ISSN: 0032-9460. DOI: [10.1134/S0032946007010012](https://doi.org/10.1134/S0032946007010012). URL: <https://doi.org/10.1134/S0032946007010012>.
- [16] A. S. Holevo, M. Sotomiyama, O. Hirota. “Capacity of quantum Gaussian channels”. *Physical Review A* **59** 3 (1999), с. 1820.
- [17] A. S. Holevo, R. F. Werner. “Evaluating capacities of bosonic Gaussian channels”. *Phys. Rev. A* **63** (3 2001), с. 032312. DOI: [10.1103/PhysRevA.63.032312](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.032312). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.63.032312>.
- [18] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai. “Entanglement Breaking Channels”. *Reviews in Mathematical Physics* **15** 6 (2003), с. 629–641. DOI: [10.1142/S0129055X03001709](https://doi.org/10.1142/S0129055X03001709). arXiv: [quant-ph/0302031](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0302031) [quant-ph].
- [19] P. Horodecki, R. Horodecki. “Distillation and bound entanglement.” *Quantum Inf. Comput.* **1** 1 (2001), с. 45–75.
- [20] J. S. Ivan, K. K. Sabapathy, R. Simon. “Operator-sum representation for bosonic Gaussian channels”. *Phys. Rev. A* **84** (4 2011), с. 042311. DOI: [10.1103/PhysRevA.84.042311](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042311). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.042311>.
- [21] J. A. López-Saldívar, M. A. Man’ko, V. I. Man’ko. “Differential Parametric Formalism for the Evolution of Gaussian States: Nonunitary Evolution and Invariant States”. *Entropy* **22** 5 (2020). ISSN: 1099-4300. DOI: [10.3390/e22050586](https://doi.org/10.3390/e22050586). URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/22/5/586>.
- [22] L. Moravčíková, M. Ziman. “Entanglement-annihilating and entanglement-breaking channels”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **43** 27 (2010), с. 275306.
- [23] K. K. Sabapathy, J. S. Ivan, R. Simon. “Robustness of Non-Gaussian Entanglement against Noisy Amplifier and Attenuator Environments”. *Phys. Rev. Lett.* **107** (13 2011), с. 130501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.130501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.130501). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.130501>.

-
- [24] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [25] Н. Takahashi и др. “Entanglement distillation from Gaussian input states”. *Nature Photonics* **4** (2010), с. 178–181. DOI: [10.1038/nphoton.2010.1](https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.1).
- [26] U. Vazirani, T. Vidick. “Fully Device Independent Quantum Key Distribution”. *Commun. ACM* **62** 4 (2019), с. 133. ISSN: 0001-0782. DOI: [10.1145/3310974](https://doi.org/10.1145/3310974). URL: <https://doi.org/10.1145/3310974>.
- [27] C. Weedbrook и др. “Gaussian quantum information”. *Rev. Mod. Phys.* **84** (2 2012), с. 621–669. DOI: [10.1103/RevModPhys.84.621](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.621). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.621>.
- [28] M. M. Wolf, D. Pérez-García, G. Giedke. “Quantum Capacities of Bosonic Channels”. *Phys. Rev. Lett.* **98** (13 2007), с. 130501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.130501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.130501). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.130501>.
- [29] T. Yu, J. H. Eberly. “Sudden Death of Entanglement”. *Science* **323** 5914 (2009), с. 598–601. DOI: [10.1126/science.1167343](https://doi.org/10.1126/science.1167343). eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1167343>. URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1167343>.
- [30] И. А. Малкин, В. И. Манько. *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*. М.: Наука, 1979.
- [31] А. С. Холево. *Квантовые системы, каналы, информация*. М.: МЦНМО, 2014.