Международный научный журнал
"Спектральные и эволюционные задачи"

Том 22 (2012), с. 1 – 8.

УДК 512.562, 519.1
MSC2000: 06A07, 60C05, 05D40

С. И. Гуров

СЛУЧАЙНЫЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

В рамках вероятностного подхода к решению задач алгебры и комбинаторики рассматриваются различные модели частично упорядоченных (ч.у.) множеств. Вводятся необходимые понятия, определения структурных элементов, числовых характеристик ч.у. множеств и приводятся некоторые известные оценки их значений. Статья представляет собой переработанный вариант обзора, сделанного автором на КРОМШ-2012.

In the framework of the probabilistic approach to solving problems of algebra and combinatorics various models of poses are under consideration. Introduce the necessary concepts, definitions, structural elements, numerical characteristics poset sets and are known by some litereture estimates of their values. The paper is a revised version of the review made by the author on KROMSH 2012.

Введение. Основные понятия

Частично упорядоченным (ч.у.) множеством называют пару $\mathbf{P} = (P, \leqslant)$, где P — непустое множество (носитель $\mathbf{P}$), а $\leqslant$ — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное однородное отношение на нём или (*частичный*) *порядок* в инфексной записи. Если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, то пишем $x < y$ ($<$ — *строгий порядок*). Если для $x, y \in P$ имеет место $x \leqslant y$ (x *предшествует, содержится в* y, y *следует за, содержит* x) или $y \leqslant x$, то эти элементы *сравнимы*, иначе они *несравнимы* (символически $x \sim y$ и $x \nsim y$). Альтернативное обозначение: $\mathbf{P} = (P, O)$, и предшествование x элементу y означает $(x, y) \in O$.

Графом сравнимости данного ч.у. множества называют граф с тем же носителем P и рёбрами, соединяющими сравнимые вершины. Пусть $\mathrm{inc}(\mathbf{P})$ — множество несравнимых упорядоченных пар элементов из P; если $\mathrm{inc}(\mathbf{P}) = \varnothing$, то $\mathbf{P}$ — *цепь*, а P — *линейный порядок*. Элемент u носителя ч.у. множества $\mathbf{P} = (P, \leqslant)$ называют *максимальным*, если $u \leqslant x \Rightarrow u = x$ и *наибольшим*, если $x \leqslant u$ для любых $x \in P$; аналогично определяют *минимальный* и *наименьший* элементы.

Далее мы будем рассматривать только конечные ($|P| < \infty$) ч.у. множества и пользоваться обозначением $[n]$ для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Для изображений конечных ч.у. множеств используются *диаграммы Хассе*: каждому элементу соответствует вершина диаграммы, если $x < y$, то x рисуем ниже y и соединяем их линией, если x *непосредственно предшествует* y (т.е. нет такого z, что $x < z$ и $z < y$). Заметим, что неизоморфные диаграммы Хассе соответствуют непомеченным ч.у. множествам и каждому n-вершинному непомеченному ч.у. множеству соответствует $n!$ помеченных.

Если все элементы подмножества X носителя ч.у. множества несравнимы, то X есть *антицепь*, а если все они сравнимы, то X — *цепь*. *Высота* $h(\mathbf{P})$ ч.у. множества $\mathbf{P}$ есть число элементов в его самой длинной (наибольшей) цепи, а *ширина* $w(\mathbf{P})$ —

число элементов в его самой длинной (наибольшей) антицепи. Цепь в ч.у. множестве *насыщена*, если при присоединении к ней любого нового элемента она перестаёт быть цепью. Ч.у. множество *ранжировано*, если любая насыщенная цепь — наибольшая (подробнее см., например, [14]).

Определение 1. Если $\mathbf{P} = (P, \leqslant)$ — ч.у. множество, то линейный порядок L на P называется линейным расширением (л.р.) $\mathbf{P}$, если $x \leqslant y$ влечёт $(x, y) \in L$.

По классической теореме Шпильрайна (E. Szpilrajn, 1930) каждый порядок может быть продолжен до линейного. Число всех л.р. ч.у. множества $\mathbf{P}$ обозначим $e(\mathbf{P})$.

Набор $\mathcal{R}$ линейных расширений ч.у. множества $\mathbf{P} = (P, \leqslant)$ называется его *реализатором*, если $\leqslant = \bigcap_{L \in \mathcal{R}} L$. Допуская некоторую вольность, будем иногда говорить, что ч.у. множество совпадает с пересечением цепей, его реализующих и применять соответствующую запись. Ясно, что $\mathcal{R}$ — реализатор $\mathbf{P}$ если и только если $\forall x, y : x \nsim y \;\Rightarrow\; \exists L_1, L_2 \in \mathcal{R} : (x, y) \in L_1 \;\&\; (y, x) \in L_2$. Обычно мощность реализатора значительно меньше числа всех л.р. данного ч.у. множества.

Определение 2. *Размерность* ч.у. множества $\mathbf{P}$ (символически $\dim(\mathbf{P})$) есть минимальная мощность его реализаторов.

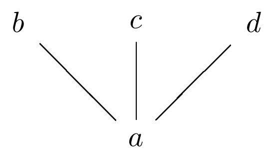

Рис. 1. Диаграмма Хассе ч.у. множества $\mathbf{P}$.

Пример 1. Для четырёхэлементного ч.у. множества $\mathbf{P}$, изображённого на рис. 1 имеем: $\mathcal{R} = \{\,[\,a, b, c, d],\ [\,a, b, d, c\,],\ \dots\}$, $e(\mathbf{P}) = 6$, $\mathbf{P} = [\,a, b, c, d] \cap [\,a, d, c, b\,]$, $\dim(\mathbf{P}) = 2$.

Обозначим через $\deg_{\mathbf{P}}(x)$ количество элементов $\mathbf{P}$, сравнимых с элементом $x \in P$, которое назовём его степенью. Далее, пусть $\Delta(\mathbf{P})$ — максимальное значение степени в $\mathbf{P}$.

Определение 3. Трёхслойное n-элементное ч.у. множество состоит из трёх непересекающихся антицепей X_1, X_2 и X_3, причём

- X_1 и X_3 содержат приблизительно по $n/4$ элементов;
- для всех $a \in X_1$, $c \in X_3$ имеет место $a < c$ (т.е. все элементы из X_3 содержат все элементы X_1);
- если $a \in X_i$, $b \in X_j$ и $a < b$, то $i < j$.

Вероятность события будем обозначать $\mathsf{P}[\cdot]$, математическое ожидание — $\mathsf{E}[\cdot]$.

1. Вероятностный метод

В ряде работ начиная с середины прошлого века Полом Эрдёшем был предложен неконструктивный подход для доказательства существования математических объектов заданного вида названный *вероятностным методом.* Метод нашёл широкое применение не только в комбинаторике, но и в других областях математики, таких как теория чисел, линейная алгебра, математический анализ, а также в компьютерных науках. Идея метода основана на очевидном утверждении, что если каждый объект некоторой рассматриваемой совокупности не обладает данным свойством, то вероятность p того, что случайно выбранный из этой совокупности объект данным свойством обладает, равна нулю. Обратим это утверждение и тогда факт $0 < p$

является доказательством наличия в рассматриваемой совокупности хотя бы одного объекта с данным свойством (при этом, очевидно, не имеет значения величина p, лишь бы она была строго положительной). Аналогично, факт $p < 1$ используется для доказательства существования объекта, данным свойством не обладающего. Вероятностный метод активно использует такие утверждения как неравенство Маркова, оценки Чернова, локальная лемма Ловаса и др. Имеется фундаментальная монография, посвящённая вероятностному методу [1].

Исследования по приложениям вероятностного методов для ч.у. множеств идут по двум направлениям. Первое связано с построением моделей случайных ч.у. множеств. Второе концентрируется на адаптации вероятностного метода для изучения ч.у. множеств общего вида. В данной работе мы сосредоточимся на первом направлении[1]. Она представляет собой переработанный вариант доклада, сделанного автором на КРОМШ-2012 [5]. Обзор результатов, полученных к 1997 г. в рамках второго подхода дан в [8].

На основе вероятностного метода разработаны различные модели случайных графов [2, 3, 4]. Классической здесь является модель $G_{n,p}$ Эрдёша–Реньи случайного неориентированного графа: каждое из всех $n(n-1)/2$ ребер полного n-вершинного графа с вероятностью p принадлежит $G_{n,p}$ независимо от присутствия/отсутствия в нём других рёбер. Однако прямое перенесение данного подхода для построение моделей ч.у. множеств наталкивается на трудности, связанные с необходимостью учитывать транзитивность отношения порядка на диаграммах Хассе.

Важным и интересным свойством случайных графов является выполнение для них *закона 0 и 1*: для любого выразимого на языке первого порядка свойства ч.у. множеств σ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left[G_{n,p} \text{ обладает свойством } \sigma\right] \in \{0, 1\}$$

(результат доказан Фагином, см. [17]). Аналогичный результат для ч.у. множеств в общем случае места не имеет (см. ниже).

В данной работе рассмотрены различные модели ч.у. множеств и представлены результаты по определению их характеристик, полученные в рамках этих моделей: включены результаты, представленные в [6, 7], а также полученные в последнее время.

Введём несколько важных понятий. *Модель случайного ч.у. множества* есть семейство дискретных вероятностных пространств $\Omega(n)$, элементами которых являются конечные ч.у. множества обычно (но не всегда) содержащие n элементов или, чаще, $\Omega(n, s)$, где s — параметр пространства; обычно это значение вероятности некоторых событий, участвующих в определении пространства. Обозначения различных модели будут различаться индексами у символа Ω. Случайный элемент пространства Ω обычно будем обозначать либо просто как $\mathbf{P}$, либо $\mathbf{P}(n)$ или $\mathbf{P}_s(n)$, когда надо подчеркнуть его зависимость от параметров n (основного) и s (вспомогательного). Если f — параметр ч.у. множества, то его значение $f(\mathbf{P}(n))$ на элементе $\mathbf{P}(n) \in \Omega(n)$ есть случайная величина F_n. Обычно интересуются поведением случайной величины F_n при $n \to \infty$. Мы говорим, что модель Ω *почти наверное* (или *с вероятностью 1*) обладает некоторым свойством $\mathcal{A}$ ч.у. множества, если вероятность того, что случайный элемент из $\Omega(n)$ обладает $\mathcal{A}$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Обычно не удаётся определить распределение значения величины F_n и поэтому приходится удовлетворяться определением значения её математического ожидания $\mathsf{E}[F_n]$), что, как правило, проще, тем более когда ищутся лишь его приближённые оценки.

Также важной информацией о распределении F_n является верхняя граница вероятности того, что F_n лежит далеко от своего среднего. Целью здесь является

[1] Чтобы излишне не раздувать списка литературы в нём приведены лишь основные работы по данной теме, и поэтому для некоторых результатов указаны лишь их авторы и год опубликования. При необходимости найти точные ссылки не составит труда.

получение результата в форме

$$\mathsf{P}\Big[\big|F_n - \mathsf{E}[F_n]\big| > \lambda\sigma(n)\Big] \leqslant c(\lambda)e^{-\lambda^2},$$

где $\sigma(n)$ будет представлять собой верхнюю границу стандартного отклонения для F_n, а $c(\lambda)$ — константа или функция от λ такая, что $c(\lambda)e^{-\lambda^2}$ убывает с ростом λ. Если вышеописанная оценка получена, то говорят, что величина F_n *плотно концентрируется* около своего среднего. Обычно такие результаты получают используя неравенства Хёфдинга, Азумы, Талаграна и др. (см. [1]).

В литературе известны несколько моделей случайных помеченных ч.у. множеств общего вида. Выделяют модели двудольных ч.у. множеств и ч.у. множеств данной размерности.

2. Двудольные случайные ч.у. множества

При рассмотрении ч.у. множеств с двудольной диаграммой Хассе вопрос с транзитивным замыканием отношения снимается.

2-модель $\mathbf{\Omega_2(n, p)}$: для каждого натурального n составляют всевозможные ч.у. множества с минимальными элементами $a_1, \ldots, a_n$, максимальными элементами $b_1, \ldots, b_n$ и с вероятностью p, независящей от $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ содержащие отношение $a_i < b_j$.

В работе Эрдёша, Кирстеда и Троттера [9] найдены оценки для нижней границы $\dim(\mathbf{P})$, $\mathbf{P} \in \Omega_2(n,p)$ при некоторых ограничениях на значение p. Оценки эти довольны громоздки и, видимо, практически наиболее важным здесь является следующий результат, оформленный авторами как

Следствие. *Для каждого* $0 < \varepsilon$ *найдётся такое* $0 < \delta$, *что*

$$n^{-1+\varepsilon} < p \leqslant \frac{1}{\log n} \;\Rightarrow\; \dim(\mathbf{P}) > \delta\Delta(\mathbf{P})\log n$$

для почти всех $\mathbf{P} \in \Omega_2(p,n)$.

Техника, использованная авторами перестаёт работать, когда $p = o(\log n/n)$. Это связано с тем, что в этом случае нельзя утверждать, что максимальная степень вершины есть $O(pn)$.

Некоторые верхние оценки для $\dim(\mathbf{P})$ для $\mathbf{P} \in \Omega_2(n,p)$ даны в [10]. Приведём наиболее «обозримую» из них, также оформленную автором как

Следствие. *Для любого данного* $p \in (0,1)$ *найдётся положительная константа* $c = c(p)$ *такая, что для почти всех* $\mathbf{P} \in \Omega_2(p,n)$

$$\dim(\mathbf{P}) \;<\; n\Big(1 - \frac{c}{\log n}\Big).$$

для почти всех $\mathbf{P} \in \Omega_2(p,n)$.

В работе Фюреди и Кана (Z. Füredi and J. Kahn, 1986) определена верхняя граница для размерности случайного двудольного ч.у. множества из $\Omega_2(p,n)$: $\dim\mathbf{P} \leqslant 50\Delta\log^2\Delta$.

3. Случайные ч.у. множества размерности t

В серии опубликованных в журнале Order с 1985 по 1991 гг. работ П. Винклера (P. Winkler) введена модель случайного ч.у. множества размерности t. Модель мы обозначим $\mathbf{\Omega_t(n)}$, а полученное с её помощью случайное ч.у. множество — $\mathbf{P}_t(n)$. Далее t — фиксированное натуральное число. Модель представлена в дух версиях.

Т-модель (вариант А). Генерируется t независимых случайных перестановок множества $[n]$ и берётся их пересечение.

Случайные ч.у. множества полученные описанным способом носят названия *взаимозаменяемых* (exchangeable).

Т-модель (вариант B). Генерируется n случайных точек $x = (x_1, \ldots, x_t)$ в единичном кубе $[0,1]^t \subseteq \mathbb{R}^t$, которые рассматриваются как элементы строящегося ч.у. множества. Порядок не нём есть пересечение естественных порядков по всем координатам: $x \leqslant y$ если $x_i \leqslant y_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$.

Если брать $t \ll n$, то почти всегда размерность полученных по данным моделям ч.у. множеств равна t, поэтому их называют *случайными ч.у. множествами размерности* t. Пусть $\mathcal{R}$ — совокупность всевозможных t-элементных наборов $(L_1, \ldots, L_t)$ линейных порядков на $[n]$. Ясно, что $|\mathcal{R}| = (n!)^t$ и разным таким t-элементным наборам может соответствовать одно и тоже ч.у. множество $\mathbf{P}_t(n)$ по варианту A; аналогично для варианта B.

Важным свойством данных моделей является их пригодность: модель $\mathbf{\Omega_t(n)}$ содержит копию любого n-элементного неслучайного ч.у. множества размерности не более t.

В рамках данных моделей наиболее интенсивно изучался вопрос о высоте ч.у. множества (длине наибольшей цепи); при $t = 2$ это задача носит название «проблемы Улама». Высказанное в конце 1960-х гг. предположение, что $\mathsf{E}\big[h(\mathbf{P}_2(n))\big] \approx 2\sqrt{n}$ при достаточно больших n, впоследствии было доказано усилиями ряда исследователей (ссылки см. в [10]).

Теорема 1 (Bolobás, Winkler [13])**.** *Для любого $t \geqslant 2$ найдётся такая константа $c_t > 0$, что $\mathsf{E}\big[h(\mathbf{P}_t(n))\big] \sim c_t\sqrt[t]{n}$. Более того, $c_t \leqslant e$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_t = e$.*

Определение величины c_t, $t > 2$ остаётся открытой проблемой.

В рамках данных моделей можно показать, что [10]:

- $\mathbf{P}_t(n)$ размерности 2 почти всегда не содержит ранжированного подмножества с более чем $4e\sqrt{n}$ элементами;
- с вероятностью, стремящейся к 1 для каждого $t \geqslant 2$ граф сравнимости $\mathbf{P}_t(n)$ связен;
- вероятность того, что $\mathbf{P}_t(n)$ содержит несравнимую пару элементов «минимальный-максимальный», при $t = 2$ стремится к $3/4$, а при $t \geqslant 3$ — к 1.

Также показано, что высота, ширина и логарифм числа л.р. $\mathbf{P}_t(n)$ плотно концентрируются относительно своих математических ожиданий.

Например, для высоты справедливы следующая теорема.

Теорема 2 (Bolobás, Brightwell, [16])**.** *Для любого целого $t \geqslant 2$ найдётся константа C_t такая, что для достаточно больших n*

$$\mathsf{P}\left[\,\Big|\, h(\mathbf{P}_t(n)) - C_t\sqrt[t]{n}\,\Big| > \frac{\lambda C_t n^{\frac{1}{2}t}\log^{3/2} n}{\log\log n}\,\right] \leqslant e^{-\lambda^2}$$

для всех $\lambda \in (2,\, n^{\frac{1}{2}t}/\log\log n)$.

И более того, дисперсия величины $h(\mathbf{P}_2(n))$ не превосходит $const \cdot \sqrt{n}$. Имеется предположение, что $\mathsf{D}(h(\mathbf{P}_t(n))) \leqslant const \cdot \sqrt[t]{n}$.

Приведённые далее результаты этого пункта получены Г. Брайтвеллом (G. R. Brightwell, [15]).

Теорема 3. (1) *Вероятность того, что $\mathbf{P}_t(n)$ есть антицепь не превосходит*

$$\left(\frac{\sqrt[t]{2}t^{(t+1)/(t-1)}}{\sqrt[t-1]{n}}\right)^n.$$

(2) $\mathsf{E}\big[e(\mathbf{P}_t(n))\big] \leqslant \Big(2tn^{1-1/t}\Big)^n$.

Кроме того, показано, что $e(\mathbf{P}_t(n)) \geqslant \left(\frac{t^{1-1/t}}{e^2}\right)^n$ почти всегда. и дана оценка плотной концентрации для ширины случайного ч.у. множества в рассматриваемой модели:

Теорема 4. *Для каждого целого $t \geqslant 2$ найдётся константа D_k такая, что при достаточно больших n справедливо*

$$\mathsf{P}\Big[\,\big|w(\mathbf{P}_t(n)) - \mathsf{E}[w(\mathbf{P}_t(n))]\,\big| > \frac{\lambda D_k n^{1/2-1/2k\log n}}{\log\log n}\,\Big] \leqslant 4\lambda^2 e^{-\lambda^2}$$

для любого значения λ из диапазона $(2,\ n^{1/2-1/2k\log n}/\log\log n)$.

Следствием этой теоремы является оценка $\mathsf{E}[w(\mathbf{P}_t(n)] \leqslant 4tn^{1-1/t}$.

Поведение числа л.р. описывают следующая

Теорема 5. *Для любых t, n и действительного λ справедливо*

$$\mathsf{P}\Big[\,\big|\log e(\mathbf{P}_t(n)) - \mathsf{E}[\log e(\mathbf{P}_t(n))]\,\big| > \lambda\sqrt{n}\log n\,\Big] \leqslant 2e^{-\lambda^2/2}\,.$$

Заметим, что для ч.у. множеств из рассматриваемой модели выполняется закон 0 и 1.

4. Модели ч.у. множеств общего вида

U-модель $\mathbf{\Omega_U(n)}$ составляют все помеченные n-элементные ч.у. множества, $\mathbf{P}_U(n)$ есть результат равновероятного выбора элемента из него.

Недостатком модели является трудность конструктивного описания семейства $\Omega_U(n)$.

Частным случаем U-модели является модель $\mathbf{\Omega_U(n,\,d)}$. Это семейство ч.у. множеств с $\mathbf{P} = (P, O)$ с параметрами $|P| = n$ и $|O| = dn^2$, в которой случайное ч.у. множество $P_{n,d}$ — также результат равновероятного выбора.

Было показано, что почти наверное $P_{n,d}$ в диапазоне $1/8 \leqslant p \leqslant 3/16$ трёхслойно, а в диапазоне $0 \leqslant d \leqslant 1/8$ — двудольно (работы Д. Дара (D. Dhar, 1978) и Клейтмана и Ротшильда (D. J. Kleitman and B. L. Rothschild, 1979) соответственно).

В U-модели получен следующий важный результат.

Теорема 6 (Erdős, Kierstead, Trotter [9]). *Существуют такие абсолютные константы $c_1, c_2 > 0$, что*

$$\frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_1}{\log n}\right) < \dim(\mathbf{P}) < \frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_2}{\log n}\right)$$

для прочти всех $\mathbf{P} \in \Omega_U(n)$.

Доказательство этой теоремы базируется на следующем результате, полученным Д. Дж. Клейтманом и Б. Л. Ротшильдом [12]:

Теорема 7. *Почти все ч.у. множества $\mathbf{P} \in \Omega_U(n)$ обладают следующими свойствами:*

(1) *мощности множеств минимальных A и максимальных A'' элементов лежат в диапазоне $\dfrac{n}{4} \pm n^{2/3}$;*
(2) *$A < A''$;*
(3) *$A' = P - A - A''$ — антицепь в $\mathbf{P}$.*

Отметим важный и парадоксальный результат Клейтмана и Ротшильда [12], полученный в U-модели ещё в 1975 г.:

Теорема 8. *При $n \to \infty$ с вероятностью 1 все n-элементные ч.у. множества являются трёхслойными.*

Относительно данной теоремы известный исследователь Г. Брайтвел пишет: «[Теорема 8], как многие считают, является отрицательным результатом. Она утверждает, что высота почти каждого частичный порядка равна трём и более того, он ранжирован, т.е. все насыщенные цепи имеют одинаковую длину (а именно три). Это как-то не вяжется с представлениями математиков-практиков, как должен выглядеть «типичный» частичный порядок.» [6].

Следствие. *Число всех помеченных n-элементных ч.у. множеств равно*

$$2^{\frac{n^2}{4}+\frac{3n}{2}+O(\log_2 n)}.$$

Также отметим, что для ч.у. множеств из рассматриваемой модели выполняется закон 0 и 1.

G-модель $\mathbf{\Omega_G(n, p)}$. Рассматривается случайный граф с вершинами из $[n]$ и имеющий с вероятностью p (независимой от наличия/отсутствия других дуг) дугу (i, j), если $i < j$. Случайное ч.у. множество есть результат транзитивного замыкания рассмотренного графа.

Ч.у. множество из $\mathbf{\Omega_G(n, p)}$ носит название *графовый случайный порядок* и по аналогии со случайным графом в модели Эрдёша-Реньи его обозначают $P_{n,p}$. Программа генерации случайных ч.у. множеств в данной модели приведена в [11].

Теорема 9 (Brightwell [6])**.** *Для произвольных констант $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ и $0 < \varepsilon$ справедлива оценка*

$$(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\log n}{\log(1/q)}} \leqslant \dim(P_{n,p}).$$

При $p = 1/2$ имеет место концентрация высоты ч.у. множества около величины, линейно зависящей от числа его элементов.

Теорема 10 (Albert, Frieze [17])**.** *Существует константа c, $0.565 < c < 0.610$ такая, что*

(1) *для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеет место*

$$\mathsf{P}\left[\left|h\left(P_{n,\frac{1}{2}}\right) - cn\right| \geqslant \varepsilon n\right] = O\left(e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{72\log^2 n}}\right);$$

(2) $\mathsf{P}\left[\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h\left(P_{n,\frac{1}{2}}\right)}{n} = c\right] = 1.$

Теорема 11 (Bollobás, Brightwell, [16])**.** *При $p \geqslant \frac{\log^2 n}{n}$ число сравнимых пар в $P_{n,p}$ есть $\binom{n}{2} - o(n^2)$.*

Так же, как и у классической модели случайного графа, рассмотрение $P_{n,p}$ при постоянном значении p не представляет особого интереса. Значительно более важным является случай линейной или убывающей зависимости p от n.

Интересно отметить, что закон 0 и 1 в данной модели не выполняется. Например, вероятность существования в случайном порядке $P_{n,p}$ наименьшего элемента при $n \to \infty$ стремится не к 0, а приблизительно к 0,2888. При этом, например, вероятности наличия у $P_{n,p}$ узла и существования для каждого фиксированного k ровно k элементов удовлетворяющим отношению строгого порядка стремятся к 1 (что является доказательством т.н. *1/3-2/3 гипотезы* для случайных порядков в данной модели). Вопрос о существовании вообще каких-либо приделов для первопорядковых свойств ч.у. множеств $P_{n,p}$ при $n \to \infty$ остаётся открытым.

Обобщением данной G-модели является следующая

S-модель $\mathbf{\Omega_S(n, p)}$. На начальном шаге $P_0 = \{0\}$; на шагах $n = 1, 2, \ldots$ ч.у. множество P_n получается присоединением к P_{n-1} элемента n в предположении, что он содержит некоторые элементы P_{n-1} и проведении транзитивного замыкания (классическая последовательная модель роста).

Здесь мы отсылаем читателя к результатам Н. Джорджа [18, 19], базирующихся на работе [20].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-00751-а, 12-01-00938-а.

Список литературы

[1] Н. Алон, Дж. Спенсер. *Вероятностный метод* (2-е изд.). — New York: Wiley-Interscience, 2000; М: БИНОМ, 2007.
[2] B. Bolobás. *Random graphs.* — London: Academic Press, 1985.
[3] В. Ф. Колчин. *Случайные графы* (2-е изд.). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
[4] А. М. Райгородский. *Модели случайных графов.* — М.: МЦНМО, 2011.
[5] С. И. Гуров. *Случайные частично упорядоченные множества: модели и результаты* // International Conference KROMSH-2012. Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-29, 2012. Сборник тезисов. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, 2012. – С. 19.
[6] G. R. Brightwell. Models of random partial orders, in *Surveys in Combinatorics* (K. Walker, ed.) — Cambridge University Press, 1993. – pp. 53-83.
[7] P. Winkler. *Random Orders* // Order (1985) **1**, pp. 317-331.
[8] W. T. Trotter. Applications of the probabilistic method to partially ordered sets, in *The mathematics of Paul Erdös II* (R. L. Graham and J. Nešetřil, eds.), Algoritheoremrs and Combinatorics // Springer-Verlag, 1997,. – V. 14, pp. 214-228.
[9] P. Erdős, H. Kierstead, W. T. Trotter. *The dimension of random ordered sets* // Random Structures and Algoritheoremrs, 1991. — V. 2, pp. 253-275.
[10] W. T. Trotter. *Combinatorics and partially ordered sets: dimension theory* // Baltimore and Loondon: The Johnes Hopkins University Press, 1992.
[11] J. Jezek, V. Slavik. *Random posets, lattices, and lattices terms* // Mathematica Bohemica (2000) **2**, pp. 129-133.
[12] D. J. Kleitman, B. L. Rotshild. *Asimptotic enumeration of partial orders on a finite sets* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — No. 205. — pp. 205-220.
[13] B. Bolobás, P. Winkler. *The longest chain among random points in Euclidian space* // Proc. Amer. Math. Soc. (1988) **103**, No. 2, pp. 374-353.
[14] С. И. Гуров. *Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: определения, свойства, примеры.* — М.: КРАСАНД. — 2012.
[15] G. R. Brightwell. *Random k-Dimensional Orders: Width and Number of Linear Extensions* // Order (1992) **9**, pp 333-342.
[16] B. Bollobás and G. R. Brightwell. *The height of randon partial order: concentration of measure* // Ann. Appl. Prob. (1992) **2**, pp. 1009-1018.
[17] Michael H. Albert and Frieze. *Random graph orders* // Department of Mathematical Sciences (1988). Paper 324. http://repository.cmu.edu/math/324
[18] N. Georgiou. *A random binary order: a new model of random partial orders* // London School of Economics. CDAM Research Report LSE-CDAM-2003-17
[19] N. Georgiou. *Random Structures for Partially Ordered Sets* // London School of Economics and Political Science. Thesis for Doctor of Philosophy.
[20] D. P. Rideout and R. D. Sorkin. *Classical sequential growth dynamics for causal sets* // Phys. Rev. D (3) 61 (2000), **2**, 024002, 16 pp.

Гуров Сергей Исаевич,

119991, Россия, г. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, ф-т Вычислительной математики и кибернетики

E-mail: `sgur@cs.msu.ru`