Посвящается Виктору Павловичу Маслову, учителю, коллеге и другу, от благодарного ученика.

Индекс Маслова на симплектических многообразиях. С дополнением А.Т.Фоменко "Построение обобщенного класса Маслова для тотального пространства $W = \mathbb{T}^*(M)$ кокасательного расслоения".

А.С. Мищенко[*][†]

13 июля 2022 г.

Аннотация

Мы обсуждаем геометрические свойства индекса Маслова на симплектических многообразиях.

Индекс Маслова строится как гомологический инвариант на лагранжевом подмногообразии некоторого симплектического многообразия. В простейшем случае лагранжево подмногообразие $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ — это подмногообразие в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, симплектическая структура в котором задается невырожденной формой $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$, а $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ — это подмногообразие, $\dim \Lambda = n$, на котором форма ω тривиальна. В общем случае рассматривается симплектическое многообразие (W, ω) и расслоение лагранжевых грассманианов $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$. Вопрос, который нас интересует заключается в следующем: когда индекс Маслова, заданный на индивидуальном лагранжевом многообразии как одномерный класс когомологий, является образом некоторого одномерного класса когомологий тотального пространства $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов. Дается ответ для различных классов расслоений лагранжевых грассманианов. [1]

[*]Аффилиация: Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

[†]Московский центр фундаментальной и прикладной математики,

[1]Работа была инициирована дискуссиями с А.Т.Фоменко и В.Е.Назайкинским, которым я выражаю глубокую благодарность.

1 Постановка задачи

1.1 Согласованные структуры

Пусть W – симплектическое многообразие, задаваемое симплектической структурой ω, которая является (невырожденной) симплектической формой на многообразии W, $\dim W = 2n$ $d\omega = 0$. С симплектической структурой можно связать дополнительные согласованные структуры:

- эвклидову структуру $E(u, v)$ на W, $u, v \in \Gamma(TW)$, $E(u, u) > 0$
- почти комплексную структуру J: $J : TW \longrightarrow TW$, $J^2 = -1$,
- эрмитову структуру $H(u, v) = E(u, v) + i\omega(u, v)$ на W,

$$H(Ju, v) = iH(u, v), \quad H(u, v) = \overline{H(v, u)}.$$

Эти структуры имеют дополнительное согласование между собой:

- $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$,
- $E(u, v) = \omega(u, Jv)$,
- $H(u, v) = E(u, v) + iE(u, Jv)$ – эрмитова структура

Все эти структуры можно построить, стартуя от заданной симплектической формы ω. См, например, [1] Part V, Compatible Almost Complex Structures. стр. 84.

1.2 Расслоение лагранжевых грассманианов

Расслоение лагранжевых грассманианов согласно определению строится в виде тотального пространства $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ расслоения

$$\begin{array}{c} \mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{LG}} \\ W, \end{array}$$

со слоями $\pi_{LG}^{-1}(x) = \mathcal{LG}(\mathbb{T}W)_x$ над точками $x \in W$. Слой $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)_x$ является лагранжевыми грассманианом

$$\pi_{LG}^{-1}(x) = \mathcal{LG}(\mathbb{T}W)_x = \mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W)$$

симплектического пространства $\mathbb{T}_x W$, который является многообразием, состоящим из всех лагранжевых плоскостей в касательном пространстве $\mathbb{T}_x W$:

$$\mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W) = \{L \subset \mathbb{T}_x W : \dim_{\mathbb{R}} L = n,\ \omega_{|L} = 0\},$$

которые удобно формируется в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_{LG}^{-1}(x) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_{LG}^{-1}(x) \arrow[d] \\
\mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}W)_x \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_{LG}^{-1}(x) \arrow[d] \\
W & x \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] & x
\end{tikzcd} .$$

2 Определение характеристических классов Лагранжева многообразия

Дифференциал Dh порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}\Lambda \arrow[r, "Dh"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}\Lambda}"'] & \mathbb{T}W \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}W}"] \\
\Lambda \arrow[r, hook, "h"] & W,
\end{tikzcd}$$

Лагранжево подмногообразие $h : \Lambda \longrightarrow W$ — это такое подмногообразие, для которого $Dh\,(\mathbb{T}_x\Lambda) \subset \mathbb{T}_{h(x)}W$ является лагранжевой плоскостью. Дифференциал Dh порождает послойное отображение Lh Лагранжева многообразия в тотальное пространство $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "Lh"] \arrow[dr, hook, bend right, "h"'] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\
 & W,
\end{tikzcd}$$

Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(\mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Если $\alpha \in H^*(\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

будем называть характеристическим классом Лагранжева подмногообразия

$$\Lambda \xhookrightarrow[h]{} W,$$

порождаемым универсальным характеристическим классом $\alpha \in H^*(\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$.

2.1 Класс Маслова для случая $W = \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^n)$.

Имеется по крайней мере три примера характеристических классов лагранжевых многообразий. Один из них, простейший, это одномерный характеристический класс Маслова, значение которого на замкнутой кривой $\gamma \subset \Lambda$ совпадает с индексом Маслова кривой γ (см. книгу Трофимова и Фоменко [1], §63, п.3, стр.400). Класс Маслова определяется для лагранжевых многообразий в симплектическом пространстве $W = \mathbb{R}^{2n}$,

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n(p_k) \oplus \mathbb{R}^n(x^k) = \mathbb{C}^n(z^k), \quad z^k = x^k + ip_k,$$

симплектическая форма ω которого имеет вид

$$\omega = \sum dp_k \wedge dx^k,$$

и пусть комплексные координаты (z^k) задают в пространстве $\mathbb{C}^n(z^k)$ комплексный базис $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ – лагранжево подмногообразие, $h : \Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ – вложение, $Lh : \Lambda \longrightarrow \mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})$ сопоставляет каждой точке $x \in \Lambda$ касательную (лагранжеву) плоскость $Lh(x) = \mathbb{T}_x(\Lambda) \in \mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})$ как точку в лагранжевом грассманиане $\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})$ всех лагранжевых плоскостей. Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})) \stackrel{(Lh)^*}{\longrightarrow} H^*(\Lambda).$$

Если $\alpha \in H^*(\Lambda(n))$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

— это характеристический класс Лагранжева подмногообразия $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$. Пример универсального характеристического класса, класса Маслова, — это образующий элемент $\mathbf{M}^a \in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$, т.е. $\mathbf{M}^a(\Lambda) \in H^1(\Lambda)$.

Вычисление класса Маслова $\mathbf{M}^a \in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$ задается при помощи дифференциальной формы на многообразии $\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})$. Многообразие $\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})$ диффеоморфно однородному пространству $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ при помощи диффеоморфизма

$$u : \mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n),$$

который сопоставляет каждой лагранжевой плоскости $L \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $\dim_R L = n$, ортонормированный вещественный базис $(e_1, \ldots, e_n) \subset L$. Этот же базис является комплексным в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, поскольку

$$H(e_k, e_l) = E(e_k, e_l) + i\omega(e_k, e_l) = \delta_{k,l}.$$

Значит

$$(e_1, \ldots, e_n) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)U, \quad U \in \mathbb{U}(n)$$

для некоторой унитарной матрицы $U \in \mathbb{U}(n)$. Базис $(e_1, \ldots, e_n) \subset L$ можно заменить на другой ортонормированный вещественный базис

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)O \subset L, \quad O \in \mathbb{O}(n),$$

то есть
$$(e'_1,\dots,e'_n)=(\tau_1,\dots,\tau_n)UO, U\in\mathbb{U}(n),\quad O\in\mathbb{O}(n),$$
т.е. корректно определен класс смежности $u(L)\in\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$.

Композиция f отображений
$$f:\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})\overset{u}{\longrightarrow}\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)\overset{\det^2}{\longrightarrow}\mathbb{S}^1,$$
задает одномерный класс когомологий, класс Маслова
$$\mathbf{M}^a\in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})),\quad \mathbf{M}^a=f^*\left(\frac{dz}{2\pi iz}\right)\in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})).$$

2.2 Обобщенный класс Маслова для случая $W=\mathbb{T}^*(M)$.

Конструкция обобщенного класса Маслова изложена в книге Трофимова и Фоменко (1995) ([1]):

Пусть M — гладкое многообразие, а ω — симплектическая структура на тотальном пространстве $\mathbb{T}^*M$. Каждое касательное пространство $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$, $z\in\mathbb{T}^*M$, является симплектическим векторным пространством, и в нем можно взять лагранжево подпространство V_z, касательное к вертикали, т.е. состоящее из таких касательных векторов ξ, что $d\pi_z\xi=0$, где буквой π обозначена стандартная проекция $\pi:\mathbb{T}^*M\longrightarrow M$. Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на V_z, позволяющее отождествить $\mathcal{LG}(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. Это отождествление неоднозначно, но позволяет корректно определить дифференциальную форму $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$ над $\mathbb{T}^*M$, у которого слой над точкой $z\in\mathbb{T}^*M$ состоит из всех лагранжевых подпространств в $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$.

Если N — лагранжево подмногообразие в $\mathbb{T}^*M$, то для любой кривой γ на N определена естественным образом кривая на $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$. В этом случае, воспользовавшись формулой
$$l=\oint_\gamma(\det{}^2)^*\frac{dz}{2\pi iz}$$
определим целое число; таким образом, получим элемент из $H^1(N;\mathbb{Z})$, который называется *обобщенным классом Маслова* подмногообразия N. Этот класс не зависит от выбора римановой метрики.

Аккуратное доказательства корректности определения обобщенного класса Маслова для тотального пространства кокасательного расслоения произвольного многообразия приведено в дополнении, любезно представленным А.Т.Фоменко.

Вырезать:

Приведенное утверждение «Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на V_z, позволяющее отождествить $LG(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$.» вызывает сомнения.

На самом деле вызывает сомнения другое утверждение, следующее за предыдущим: «Значит, $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$—корректно определенная дифференциальная форма на расслоении $LG(\mathbb{T}^*M)$,»

Что имеется в виду? Дифференциальная форма $\mathbf{M}^a = (\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ задается не на тотальном пространстве расслоения $LG(\mathbb{T}^*M)$, а на пространстве $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$, при помощи гладкого отображения

$$\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \xrightarrow{\det^2} \mathbb{S}^1$$

Чтобы перенести эту форму на расслоение $LG(\mathbb{T}^*M)$, надо использовать пресловутое отождествление $LG(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ для каждой точке $z \in \mathbb{T}^*M$. Это отождествление надо обозначить в явном виде как отображение

$$u : LG(\mathbb{T}^*M) \longrightarrow \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n),$$

и рассмотреть композицию

$$f : LG(\mathbb{T}^*M) \xrightarrow{u} \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \xrightarrow{\det^2} \mathbb{S}^1.$$

Для этого нужно проверить, что отображение $LG(\mathbb{T}^*M) \xrightarrow{u} \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ является по крайней мере непрерывным отображением. Однако такой проверки в работе не представлено.

На самом деле пространство $LG(\mathbb{T}^*M)$, как это будет показано позже, можно представить как тотальное пространство главного расслоения со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, профакторизованное справа по подгруппе $\mathbb{O}(n)$. Наличие непрерывного отождествления каждого слоя $LG(\mathbb{T}^*_zM)$ с однородным пространством $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ возможно, если расслоение $LG(\mathbb{T}^*M)$ тривиально.

Ответ на этот вопрос достаточно деликатен (это не значит сложен), поскольку ответ надо искать в максимально возможной структурой группе, скажем в группе всех диффеоморфизмов однородного пространства $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. Если мы находимся в категории многообразий вида $\mathbb{T}^*M$, в которой структурная группа редуцируется к подгруппе $\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, то задача сводится к вопросу: когда расслоение $\mathcal{LG}(\mathbb{T}(\mathbb{T}^*M))$ будет тривиальным при расширении структурной группы $\mathbb{O}(n)$ до группы всех диффеоморфизмов однородного пространства $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. и нам неизвестен ответ на этот вопрос, но в действительности он нам и не нужен. Нам нужно ответить на белее простой вопрос: при каком условии можно корректно построить дифференциальную форму на тотальном пространстве $\mathcal{LG}(\mathbb{T}(\mathbb{T}^*M))$, совпадающую в каждом слое $LG(\mathbb{T}^*_zM)$ с формой $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$? На этот вопрос мы дадим вполне утвердительный ответ.

Во этом случае симплектическое многообразие W есть тотальное пространство кокасательного расслоения многообразия M, $W = \mathbb{T}^*(M)$. В каждой точке $z \in \mathbb{T}^*(M)$ касательное пространство $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*(M))$ имеет структуру симплектического векторного пространства с симплектической формой, которая в локальных координатах (x^i_β, p^β_j) имеют вид:

$$\omega = \sum dp^\beta_i \wedge dx^i_\beta.$$

Конец вырезания.

2.3 Класс Маслова–Трофимова. Случай произвольного симплектического многообразия (W, ω).

Рассмотрим произвольное симплектическое многообразие (W, ω). Пусть ∇ — согласованная с симплектической формой ω связность (или почти симплектическая связность), т.е. такая связность, что $\nabla\omega = 0$. В работе [1] (§63, п. 9, стр.402), показано, что на симплектическом многообразии (W, ω), $d\omega = 0$ имеется почти симплектическая связность ∇ с нулевым кручением. В этом случае почти симплектическая связность ∇ называется симплектической связностью.

Теорема 1 *Связность ∇ можно выбрать комплексно линейной, сохраняющей эрмитову структуру H. Связность ∇ задается символами Кристоффеля*

$$2\Gamma_{j;ik} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial e_k} + \frac{\partial H_{ki}}{\partial e_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial e_i},$$

где $e_j \in \Gamma(\mathbb{T}(W))$ набор базисных сечений в пространстве $\Gamma(\mathbb{T}(W))$.

Операция параллельного перенесения задает унитарное линейное преобразование $ptr(\gamma) : \mathbb{T}_{x_0}(W) \longrightarrow \mathbb{T}_{x_1}(W)$, $\gamma \in \Pi(x_0, x_1, W)$,

$$ptr : \Pi(x_0, x_1, W) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathbb{T}_{x_0}(W), \mathbb{T}_{x_1}(W)).$$

Пусть $\Pi(x_0, W)$ — множество всех замкнутых путей с началом и концом в точке $x_0 \in W$, $\Pi(x_0, W) = \Pi(x_0, x_0, W)$. Операция параллельного перенесения вдоль путей $\gamma \in \Pi(x_0, W)$ порождает группу унитарных преобразований касательного пространства $\mathbb{T}_{x_0}W$ многообразия W в точке $x_0 \in W$:

$$ptr : \Pi(x_0, W) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathbb{T}_{x_0}(W)).$$

Образ группа $\mathbf{Im}\,(ptr) \subset \mathbf{U}(\mathbb{T}_{x_0}(W))$ обозначается через $\mathbf{Hol}_{\,\nabla}(x_0, W))$ и называется группой голономии связности ∇ на многообразии W. Поскольку $\nabla\omega = 0$, группа голономии $\mathbf{\Pi}^h_\nabla(x_0, W)$ естественно продолжается до действия на лагранжевом грассманиане $\mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W)$:

$$\mathbf{Hol}_{\,\nabla}(x_0, W) \times \mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W) \longrightarrow \mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W).$$

Это действие позволяет определить так называемый приведенный лагранжев грассманиан в виде фактор пространства

$$\Pi\mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W) = \mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W)/\mathbf{Hol}_{\,\nabla}(x_0, W),$$

а, значит, и отображение лагранжева подмногообразия $N^n \subset W^{2n}$

$$ptr : N^n \longrightarrow \Pi\mathcal{LG}(\mathbb{T}_x W),$$

которое задает гомоморфизм в когомологиях

$$(ptr)^*: H^*(\Pi\mathcal{LG}(\mathbb{T}_xW))\longrightarrow H^*(N^n),$$

т.е. характеристический класс Маслова-Трофимова

$$\alpha(N^n) = (ptr)^*(\alpha) \in H^*(N^n), \quad \alpha \in H^*(\Pi\mathcal{LG}(\mathbb{T}_xW)).$$

3 Описание расслоений лагранжевых грассманианов

С учетом наличия согласованных структур предполагаем, что многообразие W снабжено почти комплексной структурой (W, J), т.е. касательное расслоение $\mathbb{T}W$ является комплексным векторным расслоением со структурной группой $\mathbb{U}(n)$. Расслоение лагранжевых грассманианов $\mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ строится следующим образом:

1) Берем главное расслоение со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, ассоциированное с касательным расслоением $\mathbb{T}W$. Это расслоение обозначатся в виде

$$\begin{tikzcd} P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{P_{\mathbb{U}(n)}}"] \\ W \end{tikzcd}$$

Тотальное пространство этого расслоения можно описать в явном виде как множество ортонормированных комплексных базисов $(e_1,\dots,e_n)$ в слоях касательного расслоения

$$P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) = \{(e_1,\dots,e_n) \subset \mathbb{T}_xW : x \in W,\, H(e_i,e_j) = \delta_{i,j}\}.$$

Полагаем $\pi_{P_{\mathbb{U}(n)}}(e_1,\dots,e_n) = x \in W$. Группа $\mathbb{U}(n)$ свободно и послойно действует справа на пространстве $P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)$ по формуле:

$$P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \times \mathbb{U}(n) \longrightarrow P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)$$

$$(e_1,\dots,e_n) \subset \mathbb{T}_xW, \quad U \in \mathbb{U}(n), \quad U = \begin{pmatrix} u_1^1, & \cdots, & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n, & \cdots, & u_n^n \end{pmatrix},$$

$$((e_1,\dots,e_n),U) \mapsto (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} u_1^1, & \cdots, & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n, & \cdots, & u_n^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{tikzcd} P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_{P_{\mathbb{U}(n)}}"] & P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{P_{\mathbb{U}(n)}}"] \\ W \arrow[r, equal] & P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)/\mathbb{U}(n) \end{tikzcd}$$

На каждой карте $U_\alpha \subset W$ имеется тривиализация расслоения $P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)$

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times \mathbb{U}(n) \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha^{P_{\mathbb{U}(n)}}"] \arrow[d] & P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \arrow[d] \\
U_\alpha \arrow[r, hook] & W,
\end{tikzcd}$$

которая порождается тривиализацией касательного расслоения $\mathbb{T}W$:

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times \mathbb{C}(n) \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha^{\mathbb{T}}"] \arrow[d] & \mathbb{T}(W) \arrow[d] \\
U_\alpha \arrow[r, hook] & W,
\end{tikzcd}$$

а функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}$ на пересечении двух карт $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ принимают значения в группе $\mathbb{U}(n)$, $\varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}(x) \in \mathbb{U}(n)$, и являются умножением слева:

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{U}(n) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[rrrr, bend left, "\varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}} = \left(\varphi_\alpha^{P_{\mathbb{U}(n)}}\right)^{-1} \varphi_\beta^{P_{\mathbb{U}(n)}}"] & U_\beta \times \mathbb{U}(n) \arrow[r, "\varphi_\beta^{P_{\mathbb{U}(n)}}"] \arrow[d] & P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W) \arrow[d] & U_\alpha \times \mathbb{U}(n) \arrow[l, "\varphi_\alpha^{P_{\mathbb{U}(n)}}"'] \arrow[d] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{U}(n) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
U_{\alpha\beta} \arrow[r, hook] & U_\beta \arrow[r, hook] & W & U_\alpha \arrow[l, hook'] & U_{\alpha\beta} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}(x, A) = (x, \varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}(x) \cdot A), \quad x \in U_{\alpha\beta}; \quad \varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}(x),\ A \in \mathbb{U}(n);$$

$$\varphi_{\alpha\beta}^{P_{\mathbb{U}(n)}}(x) = \varphi_{\alpha\beta}^{\mathbb{T}}(x), \quad x \in U_{\alpha\beta}.$$

2) Используем правое действие группы $\mathbb{U}(n)$ на тотальном пространстве $P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)$ и факторизуем пространство $P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)$ по подгруппе $\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{U}(n)$. Получаем изоморфизм расслоений:

$$\begin{tikzcd}
\left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)\right)/\mathbb{O}(n) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \arrow[d] \\
W \arrow[r, equal] & W
\end{tikzcd}$$

по формуле: для $(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathbb{T}_x W, \quad H(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, полагаем

$$f(e_1, \ldots, e_n) = L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathbb{T}_x W, \qquad \text{причем } \omega_{|L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n)} = 0.$$

Поскольку f является изоморфизмом расслоение, то имеется обратное отображение

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \arrow[r, "u=f^{-1}"] \arrow[d] & \left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)\right)/\mathbb{O}(n)\ , \arrow[d] \\
W \arrow[r, equal] & W
\end{tikzcd}$$

которое лагранжеву плоскость $L \in \mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ т.ч. $L \subset \mathbb{T}_x W$, переводит в базис $(e_1, \ldots, e_n) \subset L$,

$$u(L) = (e_1, \ldots, e_n).$$

Отображение u явно задается дифференциалом вложения $h : \Lambda \longrightarrow \mathcal{LG}(\mathbb{T}W)$ В каждой карте $U_\alpha \subset W$ этот изоморфизм f имеет вид:

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "f_\alpha"] & \left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}W)\right)/\mathbb{O}(n) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}W) \arrow[d] & \mathcal{LG}(\mathbb{T}U_\alpha) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
U_\alpha \arrow[r, hook] & W \arrow[r, equal] & W & U_\alpha \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Поскольку комплексный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ является ортонормированным, то, в частности, подпространство $L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n)$ является лагранжевой плоскостью, независимой от выбора вещественного базиса в ней. В карте U_α задаем функцию

$$\det\nolimits_\alpha^2 : \mathcal{LG}(\mathbb{T}U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\} \sim \mathbb{S}^1$$

по формуле:

$$\det\nolimits_\alpha^2(L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n)) = \det\nolimits^2 \left(f_\alpha^{-1}(L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n))\right).$$

Значение функции $\det_\alpha^2$ совпадает с индексом Маслова на каждом лагранжевом многообразии, лежащем в пространстве $\mathbb{T}U_\alpha$ (см. Васильев (2000), [2], Теорема 6.2.4, стр.72).

Полезно также рассмотреть функцию

$$\det\nolimits_\alpha^{2k} : \Lambda Gr(\mathbb{T}U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$$

по формуле:

$$\det\nolimits_\alpha^{2k}(L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n)) = \left(\det\nolimits^2 \left(f^{-1}(L_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_n))\right)\right)^k.$$

Соответствующий класс Маслова пишется в виде одномерного класса когомологий, порождаемого дифференциальной формой $\mathbf{M}^a \in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n}))$,

$$\mathbf{M}^a = f^* \left(\frac{dz^k}{2\pi i z^k}\right) = k f^* \left(\frac{dz}{2\pi i z}\right) \in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{R}^{2n})).$$

4 Построение индекса Маслова на тотальном пространстве расслоения лагранжевых грассманианов.

Задача заключается в том, чтобы найти условия на симплектическое многообразие W, при котором индекс Маслова можно построить на всем симплектическом многообразии W, т.е. когда функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора карты U_α.

Если функции склейки касательного расслоения $\mathbb{T}W$ принимают значения в ортогональной подгруппе, $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$, то в каждом слое расслоения $\Lambda Gr(\mathbb{T}W)$ функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора тривиализации:

$$\det{}^2(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x)\cdot A) = \det{}^2(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x))\cdot\det{}^2(A) = \det{}^2(A).$$

На самом деле для того, чтобы определение $\det^2_\alpha$ не зависело от тривиализации, требование $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$ является слишком обременительным. Достаточно предполагать, что структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{SU}(n) \subset \mathbb{U}(n)$. Конечно, подгруппа $\mathbb{O}(n) \not\subset \mathbb{SU}(n)$ немного выползает из подгруппы $\mathbb{SU}(n)$. Но это легко поправить: рассмотрим гомоморфизм групп

$$\det : \mathbb{U}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{U}(1)$$

и конечную подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{S}^1$, задающую точную последовательность

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbf{1}$$

Положим

$$\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det{}^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n).$$

В случае $\mathbb{H} = \mathbf{1}$, получаем $\mathbb{SU}(1)$. В случае $\mathbb{H} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$ получаем подгруппу $\mathbb{S}^{Z_2}\mathbb{U}(n) \supset \mathbb{O}(n)$. Поэтому задача о построении функции $\det^2_\alpha$, не зависящей от выбора тривиализации, сводится к следующей теореме:

Теорема 1

Функция $\det^{2k}_\alpha$ корректно определена на тотальном пространстве расслоения лагранжевых грассманианов, т.е. не зависит от выбора карты U_α, когда структурная группа комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, где $\mathbb{H} \subset \mathbb{U}(1)$ конечная подгруппа порядка k.

Доказательство теоремы 1. Если функции склейки касательного расслоения $\mathbb{T}W$ принимают значения в подгруппе $\mathbb{S}^H\mathbb{U}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{S}^H\mathbb{U}(n)$, то в каждом слое расслоения $\Lambda Gr(\mathbb{T}W)$ функция $\det^{2k}_\alpha$ не зависит от выбора тривиализации:

$$\det{}^{2k}(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x)\cdot A) = \left(\det(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x))\right)^{2k}\cdot(\det(A))^{2k} = \det{}^{2k}(A),$$

поскольку $\det(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x)) \subset H$, и, значит, $\Big(\det(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x))\Big)^{2k} = \mathbf{1}$. $\blacksquare$

Когда структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$? Ответ на этот вопрос звучит следующим образом:

Теорема 2

Структурная группа $\mathbb{U}(n)$ комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$, когда первый класс Чженя $c_1(TW) \in H^2(W, \mathbb{Z})$ имеет конечный порядок $k = \#(\mathbb{H})$.

Доказательство Теоремы 2.

Рассмотрим композицию отображений

$$\varphi_{\mathbb{H}} : \mathbb{U}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1/\mathbb{H} \approx \mathbb{S}^{\mathbb{H}} \approx \mathbb{S}^1,$$

Получаем точную последовательность

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \hookrightarrow \mathbb{U}(n) \xrightarrow{\varphi_H} \mathbb{S}^{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbf{1},$$

Поскольку касательное расслоение $\mathbb{T}(W)$ допускает структуру комплексного расслоения со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, то главное расслоение $St(\mathbb{T}W)$, ассоциированное с расслоением $\mathbb{T}(W)$, является прообразом канонического расслоения классифицирующего пространства структурной группы $\mathbb{U}(n)$:

$$\begin{tikzcd}
St(\mathbb{T}W) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "/\mathbb{U}(n)"'] & E_{\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{U}(n)"] \\
W \arrow[r, "f"'] & B_{\mathbb{U}(n)}
\end{tikzcd}$$

Если структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^H\mathbb{U}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, то это значит, что отображение f подымается до отображения g:

$$\begin{tikzcd}
St(\mathbb{T}W) \arrow[r, "f^*"] \arrow[dd, "/\mathbb{U}(n)"'] & E_{\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n)"'] \arrow[dd, bend left=60, "/\mathbb{U}(n)"] \\
 & B_{\mathbb{S}^H\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"'] \\
W \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, bend left, "s"] & B_{\mathbb{U}(n)}
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма расширяется до следующей диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
St(\mathbb{T}W) = f^*(E_{\mathbb{U}(n)}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n)"] \arrow[dd, bend right=60, "/\mathbb{U}(n)"'] & E_{\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n)"'] \arrow[dd, bend left=60, "/\mathbb{U}(n)"] \\
f^*(E_{\mathbb{U}(n)})/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"] & B_{\mathbb{S}^{H}\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"'] \\
W \arrow[r, "f"'] \arrow[u, dashed, bend left, "s'"] \arrow[ur, dashed, "s"'] & B_{\mathbb{U}(n)}
\end{tikzcd}
$$

Условие существования отображения s эквивалентно существованию сечения s' в главном расслоении ξ_W :

$$
\xi_W : \dashrightarrow_{f} \xi_{B_{\mathbb{U}(n)}} : \dashrightarrow_{g} \xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}} : .
$$

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E_{\mathbb{U}(n)})/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"] & B_{\mathbb{S}^{H}\mathbb{U}(n)} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"'] & E_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"'] \\
W \arrow[r, "f"'] \arrow[u, dashed, bend left, "s'"] & B_{\mathbb{U}(n)} \arrow[r, "g"'] & B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}
\end{tikzcd}
$$

Существование сечения s' в главном расслоении ξ_W означает, что главное расслоение ξ_W тривиально. Это значит, что отображение $g \circ f$ гомотопно тривиальному отображению. Спектральные последовательности для расслоений ξ_W, $\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}$ и $\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}$ имеют вид:

$$
\begin{array}{ll}
\xi_W : & \\
E_2^{p,q}(\xi_W) = H^p(W; H^q(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z})), & d_2^W : E_2^{0,1}(\xi_W) \longrightarrow E_2^{2,0}(\xi_W) \\
E_2^{0,1}(\xi_W) = H^1(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni a_{\mathbb{H}}, & E_2^{2,0}(\xi_W) = H^2(W; \mathbb{Z}) \ni d_2^W(a_{\mathbb{H}}),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}} : & \\
E_2^{p,q}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^p(B_{\mathbb{U}(n)}; H^q(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z})), & d_2^{B_{\mathbb{U}(n)}} : E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) \longrightarrow E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) \\
E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^1(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni a_{\mathbb{H}}, & E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^2(B_{\mathbb{U}(n)}; \mathbb{Z}) \ni d_2^{B_{\mathbb{U}(n)}}(a_{\mathbb{H}}),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}} : & \\
E_2^{p,q}(\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}) = H^p(B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}; H^q(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z})), & d_2^{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}} : E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}) \longrightarrow E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}) \\
E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}) = H^1(\mathbb{S}^{\mathbb{H}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni a_{\mathbb{H}}, & E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}) = H^2(B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni d_2^{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}(a_{\mathbb{H}}).
\end{array}
$$

Из коммутативности диаграмм расслоений ξ_W, $\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}$ и $\xi_{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}$ имеем

$$
d_2^W(a_{\mathbb{H}}) = f^*(g^*(d_2^{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}(a_{\mathbb{H}}))) = (g \circ f)^*(d_2^{B_{\mathbb{S}^{\mathbb{H}}}}(a_{\mathbb{H}})) = 0.
$$

Значит,

$$
f^*(d_2^{B_{\mathbb{U}(n)}}(a_{\mathbb{H}})) = 0.
$$

Таким образом, класс когомологий

$$d_2^{B_{\mathbb{U}(n)}}(a_{\mathbb{H}}) \in H^2(B_{\mathbb{U}(n)};\mathbb{Z})$$

выражается через первый класс Чженя следующим образом:

$$d_2^{\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}}(a_{\mathbb{H}}) = \lambda^{\mathbb{H}} \cdot c_1 \in H^2(B_{\mathbb{U}(n)};\mathbb{Z}).$$

Значит, $d_2^{\xi_W}(a_{\mathbb{H}}) = \lambda^{\mathbb{H}} \cdot c_1(TW)$.

Отсюда следует, что структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$, когда первый класс Чженя $c_1(TW) \in H^2(W,\mathbb{Z})$ имеет конечный порядок $\lambda^{\mathbb{H}}$.

Осталось проверить, что $\lambda^{\mathbb{H}} = k = \#(\mathbb{H})$.

Для этого рассмотрим два расслоения

$$\begin{tikzcd}
 & E_{\mathbb{U}}(n) \arrow[r, equal] \arrow[d, "/\mathbb{S}\mathbb{U}(n)"] & E_{\mathbb{U}}(n) \arrow[d, "/\mathbb{S}^H\mathbb{U}(n)"] & \\
\xi_1 : \arrow[rrr, dashed, bend left=60] & B_{\mathbb{S}\mathbb{U}(n)} \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "/\mathbb{S}^1"] & B_{\mathbb{S}^H\mathbb{U}(n)} \arrow[d, "/\mathbb{S}^{\mathbb{H}}"] & : \xi_{B_{\mathbb{U}(n)}} \\
 & B_{\mathbb{U}(n)} \arrow[r, equal, "h=\mathbf{Id}"] & B_{\mathbb{U}(n)} &
\end{tikzcd}$$

и соответствующие спектральные последовательности:

ξ_1 :
$E_2^{p,q}(\xi_1) = H^p(B_{\mathbb{U}(n)}; H^q(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}))$, $\quad d_2^{\xi_1} : E_2^{0,1}(\xi_1) \longrightarrow E_2^{2,0}(\xi_1)$,
$E_2^{0,1}(\xi_1) = H^1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni a_1$, $\quad E_2^{2,0}(\xi_1) = H^2(B_{\mathbb{U}(n)};\mathbb{Z}) \ni d_2^{\xi_1}(a_1) = c_1$,

$\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}$:
$E_2^{p,q}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^p(B_{\mathbb{U}(n)}; H^q(\mathbb{S}^{\mathbb{H}};\mathbb{Z}))$, $\quad d_2^{B_{\mathbb{U}(n)}} : E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) \longrightarrow E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}})$
$E_2^{0,1}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^1(\mathbb{S}^{\mathbb{H}};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni a_{\mathbb{H}}$, $\quad E_2^{2,0}(\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}) = H^2(B_{\mathbb{U}(n)};\mathbb{Z}) \ni d_2^{\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}}(a_{\mathbb{H}})$.

Отображение $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{h'} \mathbb{S}^{\mathbb{H}}$ дает $(h')^*(a_{\mathbb{H}}) = k \cdot a_1$. Поскольку диаграммы двух расслоений ξ_1 и $\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}$ коммутативны, то коммутируют их спектральные последовательности, значит

$$h^*(d_2^{\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}}(a_{\mathbb{H}})) = d_2^{\xi_1}((h')^*(a_{\mathbb{H}})),$$

$$d_2^{\xi_{B_{\mathbb{U}(n)}}}(a_{\mathbb{H}}) = d_2^{\xi_1}(k \cdot a_1) = k \cdot d_2^{\xi_1}(a_1) = k \cdot c_1.$$

Таким образом $d_2^{\xi_W}(a_{\mathbb{H}}) = k \cdot c_1(TW)$, т.е. $\lambda^{\mathbb{H}} = k = \#(\mathbb{H})$. ∎

Список литературы

[1] Ana Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Corrected 2nd printing 2008, Lecture Notes in Mathematics 1764

[2] В.А.Васильев, Лагранжевы и лежандровы характеристические классы.— М.: МЦНМО, 2000. — 312 с.

[3] Фоменко А.Т., Симплекическая геометрия. — МГУ, 1988 — 413 с.

[4] Трофимов В.В., Фоменко А.Т., Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дтфференцтальных уравнений. — «Факториал», 1995 — 446 с.

[5] В. И. Арнольд, О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функц. ана- лиз и его прил., 1967, том 1, выпуск 1, 1–14

[6] Д. Б. Фукс, О характеристических классах Маслова–Арнольда, Докл. АН СССР, 1968, том 178, номер 2, 303–306

Дополнение: А.Т.Фоменко. Построение обобщенного класса Маслова для тотального пространства $W = \mathbb{T}^*(M)$ кокасательного расслоения.

Конструкция обобщенного класса Маслова изложена в книге Трофимова и Фоменко (1995) ([1]):

Пусть M — гладкое многообразие, а ω — симплектическая структура на тотальном пространстве $\mathbb{T}^*M$. Каждое касательное пространство $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$, $z \in \mathbb{T}^*M$, является симплектическим векторным пространством, и в нем можно взять лагранжево подпространство V_z, касательное к вертикали, т.е. состоящее из таких касательных векторов ξ, что $d\pi_z\xi = 0$, где буквой π обозначена стандартная проекция $\pi : \mathbb{T}^*M \longrightarrow M$. Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на V_z, позволяющее отождествить $\mathcal{LG}(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. Это отождествление неоднозначно, но позволяет корректно определить дифференциальную форму $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$ над $\mathbb{T}^*M$, у которого слой над точкой $z \in \mathbb{T}^*M$ состоит из всех лагранжевых подпространств в $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$.

Если N — лагранжево подмногообразие в $\mathbb{T}^*M$, то для любой кривой γ на N определена естественным образом кривая на $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$. В этом случае, воспользовавшись формулой

$$l = \oint\limits_{\gamma} (\det{}^2)^* \frac{dz}{2\pi iz}$$

определим целое число; таким образом, получим элемент из $H^1(N;\mathbb{Z})$, который называется *обобщенным классом Маслова* подмногообразия N. Этот класс не зависит от выбора римановой метрики.

На самом деле пространство $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$, можно представить как тотальное пространство главного расслоения со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, профакторизованное справа по подгруппе $\mathbb{O}(n)$.

Полагаем $W = \mathbb{T}(M)$. Вводим естественную почти комплексную структуру J на многообразии W следующим образом:

$$J : \mathbb{T}(\mathbb{T}^*(M)) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathbb{T}^*(M)).$$

Локальные координаты на многообразии $W = \mathbb{T}(M)$ имеют вид

$$(x_\alpha, p^\alpha) = (x^j_\alpha, p^\alpha_k)^n_{j,k=1}.$$

Симплектическая структура задается дифференциальной формой

$$\omega = dp^\alpha \wedge dx_\alpha = \sum dp^\alpha_j \wedge dx^j_\alpha$$

Подробности см. в [2]. Эвклидова структура задается эвклидовой формой

$$G = g^{\alpha}_{j,k} dx^j_{\alpha} dx^k_{\alpha} + g^{j,k}_{\alpha} dp^{\alpha}_j dp^{\alpha}_k$$

Почти комплексная структура J задается по формуле:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j_{\alpha}}$$

При замене координат компоненты касательного пространства $\mathbb{T}(\mathbb{T}^*(M))$ меняются по тензорному закону:

$$\frac{\partial}{\partial x^j_{\alpha}} = \frac{\partial x^k_{\beta}}{\partial x^j_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^k_{\beta}}, \quad \frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_j} = \frac{\partial x^j_{\alpha}}{\partial x^k_{\beta}} \frac{\partial}{\partial p^{\beta}_k}$$

Тогда

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{\alpha}}\right) = \frac{\partial x^k_{\beta}}{\partial x^j_{\alpha}} J\left(\frac{\partial}{\partial x^k_{\beta}}\right) = \frac{\partial x^k_{\beta}}{\partial x^j_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{\beta}_k} = \frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_j}$$

т.е. оператор J не зависит от выбора карты. Это значит что расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{T}^*(M))$ является комплексным расслоением со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, которая редуцируется к подгруппе $\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{U}(n)$.

Заменяем расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{T}^*(M))$ на главное $\mathbb{U}(n)$-расслоение $P_{U(n)}(\mathbb{T}^*M)$ со слоем $\mathbb{U}(n)$. На тотальном пространстве главного $\mathbb{U}(n)$-расслоение $P_{U(n)}(\mathbb{T}^*M)$ группа $\mathbb{U}(n)$ действует справа свободно, в частности, подгруппа $\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{U}(n)$ тоже действует справа свободно. Факторизуя тотальное пространство $P_{U(n)}(\mathbb{T}^*M)$ по правому действию группы $\mathbb{O}(n)$ получаем расслоение $P\mathbb{U}(\mathbb{T}^*M)/\mathbb{O}(n)$ со слоем $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ и структурной группой $\mathbb{U}(n)$, которая действует на слое $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ при помощи левого умножения. Расслоение лагранжевых грассманианов $\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M)$ изоморфно главному расслоению $\left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}^*M)\right)/\mathbb{O}(n)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}^*M)\right)/\mathbb{O}(n) \arrow[d] \\
\mathbb{T}^*M \arrow[r, equal] & \mathbb{T}^*M
\end{tikzcd},$$

Отображение u задается эквивариантным отображением одного слоя

$$u : \Lambda(n) \longrightarrow \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n),$$

где $\Lambda(n)$ – лагранжев грассманиан $\Lambda(n) = \{L \subset \mathbb{C}^n : \omega_{|L} = 0\}$.

Поскольку структурная группа $\mathbb{U}(n)$ расслоения $\left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}^*M)\right)/\mathbb{O}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, то отображение

$$\det{}^2 : \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

продолжается до отображения тотальных пространств расслоений

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M) \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, dashed, "\det^2\cdot u"] & \left(P_{\mathbb{U}(n)}(\mathbb{T}^*M)\right)/\mathbb{O}(n) \arrow[r, "\det^2"] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 , \\
\mathbb{T}^*M \arrow[r, equal] & \mathbb{T}^*M &
\end{tikzcd}$$

Обобщенный класс Маслова строим как обратный образ при отображении $(\det^2 \cdot u)^*(dz/2\pi iz) \in H^1(\mathcal{LG}(\mathbb{T}^*M))$.

Список литературы

[1] Трофимов В.В., Фоменко А.Т., Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дтфференцтальных уравнений. — «Факториал», 1995 — 446 с.

[2] Ana Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Corrected 2nd printing 2008, Lecture Notes in Mathematics 1764