ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2013, том 77, № 12, с. 1791–1794

УДК 517.958:53

ДИНАМИКА ВЕКТОРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДЛИННЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН

© 2013 г. С. В. Сазонов[1], Н. В. Устинов[2]

E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Исследовано распространение продольно-поперечного импульса в статически деформированном кристалле, содержащем парамагнитные примеси и находящемся во внешнем магнитном поле. Показано, что при неравновесном распределении населенностей спиновых подуровней парамагнитных примесей возможно достижение условий эффективного взаимодействия между продольной (длинноволновой) и поперечными (коротковолновыми) компонентами импульса.

DOI: 10.7868/S036767651312020X

ВВЕДЕНИЕ

Впервые задача о нелинейном взаимодействии длинных и коротких волн, в результате которого возможно образование связанных длинно-коротковолновых состояний, была рассмотрена в физике плазмы [1]. Выведенная при этом система двух нелинейных волновых уравнений получила название уравнений Захарова. В случае, когда волны распространяются только в одном направлении, эта система сводится к системе Ядзимы–Ойкавы. Как оказалось [2], последняя система уравнений интегрируема методом обратной задачи рассеяния [3–5]. Это обстоятельство позволило существенно продвинуться в понимании совместной нелинейной динамики длинных и коротких волн. В частности, солитонные решения этой системы, соответствующие дискретной части данных рассеяния, обладают свойством структурной устойчивости: солитон восстанавливает свою форму после взаимодействия с другими солитонами, а также с локализованными (и даже нелокализованными) возмущениями.

В дальнейшем системы уравнений, описывающие взаимодействие длинных и коротких волн, появлялись в гидродинамике [6], теории ферромагнетизма [7], оптике [8], нелинейной акустике [9], оптоакустике [10]. Сравнительно недавно при рассмотрении квазирезонансного взаимодействия оптических импульсов с несимметричными квантовыми объектами была получена система уравнений, обобщающая систему Ядзимы–Ойкавы на случай двух коротковолновых компонент [11]. Важная особенность этой векторной системы Ядзимы–Ойкавы: она тоже оказалась интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Ее солитонные решения были подробно исследованы в [12].

Прикладной аспект исследования взаимодействия коротких и длинных волн наиболее четко просматривается в развитии оптических методов генерации терагéрцевого излучения [13], которые находят применения в биомедицине, системах безопасности, формирования изображений и т.д. [14, 15]. В этом случае оптический импульс является коротковолновым, а генерируемый терагéрцевый сигнал – длинноволновым.

Довольно часто нелинейные оптические явления находят с течением времени свои аналоги при рассмотрении задач нелинейной акустики [13, 16, 17]. В соответствии с логикой поиска оптико-акустических соответствий представляет несомненный интерес постановка вопроса о нахождении физической реализации интегрируемого векторного обобщения системы Ядзимы–Ойкавы в акустической задаче. Ответу на этот вопрос посвящена настоящая работа.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в кубическом кристалле содержатся парамагнитные примеси, обладающие эффективным спином $S = 1$. Будем считать, что вдоль оси z, совпадающей с одной из его осей симметрии четвертого порядка, к кристаллу приложены внешние статическая деформация величиной ε_0 и магнитное поле $\vec{B}$. Рассмотрим случай, когда параллельно этой же оси распространяется продольно-поперечный упругий импульс, взаимодействующий за счет спин-фононной связи с парамагнитными приме-

[1] Федеральное государственное бюджетное учреждение Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва.

[2] Калининградский филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования Московского государственного университета путей сообщения "МИИТ".

сями. Обычно такую конфигурацию называют геометрией Фарадея. Соответствующий гамильтониан H_a поля деформации имеет вид

$$H_a = \int\left\{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\rho} + \frac{\rho a_{\|}^2}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho a_{\perp}^2}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\vec{r}, \quad (1)$$

где u_j и p_j $(j = x, y, z)$ — декартовы компоненты векторов $\vec{u}$ смещений узлов кристаллической решетки и соответствующих им плотностей импульсов $\vec{p}$, ρ — средняя плотность среды, $a_{\|}$ и $a_{\perp}$ — скорости продольного и поперечного звуков соответственно в отсутствие примесей; интегрирование в (1) ведется по всему объему кристалла.

Дополним (1) оператором Гамильтона $\hat{H}_s$, связывающим эффективный спин с магнитным полем, статической деформацией ε_0 кристалла и компонентами тензора динамической деформации:

$$\hat{H}_s = \hbar\omega_z\hat{S}_z + G_{\|}\hat{S}_z^2\varepsilon_0 + G_{\|}\hat{S}_z^2\frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ + \frac{G_{\perp}}{2}\left[\left(\hat{S}_x\hat{S}_z + \hat{S}_z\hat{S}_x\right)\frac{\partial u_x}{\partial z} + \left(\hat{S}_y\hat{S}_z + \hat{S}_z\hat{S}_y\right)\frac{\partial u_y}{\partial z}\right]. \quad (2)$$

Здесь ω_z — частота зеемановского расщепления спиновых подуровней, снимающего вырождение по проекции S_z эффективного спина на ось z, $G_{\|}$ и $G_{\perp}$ — постоянные спин-фононного взаимодействия, связывающие эффективный спин соответственно с компонентами тензора продольной и поперечной деформации, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ — спиновые матрицы.

Будем считать, что основной вклад в расщепление спиновых подуровней вносит квадрупольный штарк-эффект, снимающий вырождение по модулю проекции S_z (второе слагаемое в правой части (2)). При этом зеемановское расщепление (первое слагаемое там же), при котором снимается вырождение по S_z, вносит небольшое возмущение.

Для исследования самосогласованной динамики акустического поля и эффективных спинов будем использовать полуклассический подход. В соответствии с ним поведение эффективных спинов описывается уравнением для соответствующей матрицы плотности $\hat{\rho}$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}_s, \hat{\rho}\right], \quad (3)$$

а динамика полей упругости — классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta\vec{p}}\left(H_a + \left\langle\hat{\bar{H}}_s\right\rangle\right), \quad \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = -\frac{\delta}{\delta\vec{u}}\left(H_a + \left\langle\hat{\bar{H}}_s\right\rangle\right), \quad (4)$$

где $\left\langle\hat{\bar{H}}_s\right\rangle = n\int\left\langle\hat{H}_s\right\rangle d\vec{r}$, n — плотность парамагнитных примесей, $\left\langle\hat{H}_s\right\rangle = \mathrm{Sp}\left(\hat{\rho}\hat{H}_s\right)$ — квантовое среднее гамильтониана (2).

Чтобы упростить систему (3), (4), представим комплексную поперечную компоненту поля акустического импульса $\Omega = \dfrac{G_{\perp}}{\hbar}\dfrac{\varepsilon_{xz} + i\varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}}$, где ε_{xz} и ε_{yz} — поперечные компоненты тензора деформации, и недиагональные элементы матрицы плотности в виде

$$\Omega = \psi_+\,\mathrm{e}^{i\omega_+(t-z/a_{\perp})} - \psi_-\,\mathrm{e}^{i\omega_-(t-z/a_{\perp})}, \quad \rho_{13} = R_{13}\,\mathrm{e}^{i\omega_+(t-z/a_{\perp})}, \\ \rho_{12} = R_{12}\,\mathrm{e}^{i\omega_-(t-z/a_{\perp})}, \quad \rho_{23} = R_{23}\,\mathrm{e}^{i(\omega_+-\omega_-)(t-z/a_{\perp})}. \quad (5)$$

Здесь ψ_+, ψ_-, R_{13}, R_{12}, R_{23} — медленно меняющиеся огибающие. Подстановка (5) с учетом (1), (2) в (3) и (4) дает после усреднения систему материальных уравнений для огибающих

$$\frac{\partial R_{13}}{\partial t} = i\left(\Delta_{31} + U\right)R_{13} - i\psi_+\left(\rho_{33} - \rho_{11}\right) + i\psi_- R_{23}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial t} = i\left(\Delta_{21} + U\right)R_{12} - i\psi_-\left(\rho_{22} - \rho_{11}\right) + i\psi_+ R_{23}^*, \quad (7)$$

$$\frac{\partial R_{23}}{\partial t} = i\left(\Delta_{31} - \Delta_{21}\right)R_{23} + i\psi_+ R_{12}^* - i\psi_-^* R_{13}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial z} + \frac{1}{a_{\perp}}\frac{\partial\psi_+}{\partial t} = i\frac{nG_{\perp}^2\omega_+}{8\hbar\rho a_{\perp}^3}R_{13}, \\ \frac{\partial\psi_-}{\partial z} + \frac{1}{a_{\perp}}\frac{\partial\psi_-}{\partial t} = i\frac{nG_{\perp}^2\omega_-}{8\hbar\rho a_{\perp}^3}R_{12}, \quad (9)$$

где $\Delta_{31} = \omega_{31} - \omega_+$, $\Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_-$ — отстройки несущих компонент акустического поля от частот разрешенных квантовых переходов $\omega_{31} = G_{\|}\varepsilon_0/\hbar + \omega_z$ и $\omega_{21} = G_{\|}\varepsilon_0/\hbar - \omega_z$, $U = G_{\|}\varepsilon_{zz}/\hbar$, ε_{zz} — продольная компонента тензора деформации. При этом для диагональных элементов матрицы плотности и продольной компоненты поля упругости получим уравнения

$$\frac{\partial\rho_{33}}{\partial t} = i\left(\psi_+ R_{13}^* - \psi_+^* R_{13}\right), \\ \frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} = i\left(\psi_- R_{12}^* - \psi_-^* R_{12}\right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a_{\|}^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{nG_{\|}^2}{\hbar\rho}\frac{\partial^2\rho_{11}}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Система (6)–(11) описывает нелинейное взаимодействие продольно-поперечного акустического импульса с парамагнитными примесями, содержащимися в кубическом кристалле. В рассматриваемой здесь геометрии Фарадея две противоположно вращающиеся циркулярно поляризованные поперечные компоненты ψ_+ и ψ_- акустического импульса вызывают квантовые переходы и являются коротковолновыми, а продольная компонента U динамически, за счет квадрупольного эффекта Штарка, смещает частоты переходов и является длинноволновой.

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА ЯДЗИМЫ–ОЙКАВЫ

Пусть отстройки Δ_{31} и Δ_{21} несущих частот акустического импульса таковы, что выполняются условия квазирезонанса [18, 19]

$$\left(\Delta_{31}\tau_p\right)^{-1} \sim \left(\Delta_{21}\tau_p\right)^{-1} \ll 1, \qquad (12)$$

где τ_p – длительность импульса. Физически смысл условий (12) состоит в том, что спектральная ширина импульса мала в сравнении с отстройками его несущих частот от резонанса. Следовательно, взаимодействие с парамагнитными примесями будет слабым, и из полученной системы уравнений можно исключить диагональные элементы матрицы плотности и огибающие недиагональных элементов с помощью квазирезонансного приближения (см., например, [12]). Считая, кроме того, что $\Delta_{31} = \Delta_{21} = \Delta$, в результате такого исключения получим систему уравнений

$$\begin{gathered} i\left(\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial z} + \frac{1}{\upsilon_g}\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial t}\right) = \beta\frac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial t^2} + \\ + \alpha U\Phi_\pm + 2\beta\left(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2\right)\Phi_\pm, \qquad (13) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\parallel^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2a_\parallel b\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2\right), \end{gathered}$$

где $\Phi_\pm = \psi_\pm \exp(-i\alpha_\pm\Delta z)$. Использованы обозначения $\alpha_\pm = \dfrac{nG_\perp^2\omega_\pm}{8\hbar\rho a_\perp^3}\dfrac{w_2 - w_1}{\Delta^2}$, $\alpha = \dfrac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} = \dfrac{nG_\perp^2\omega}{8\hbar\rho a_\perp^3}\dfrac{w_2 - w_1}{\Delta^2}$, $\omega = \dfrac{\omega_+ + \omega_-}{2}$, $\beta = \dfrac{\alpha}{\Delta}$, $b = \dfrac{nG_\parallel^2}{2\hbar\rho a_\parallel^3}\dfrac{w_2 - w_1}{\Delta^2}$, w_1 и w_2 – начальные населенности основного и возбужденного спиновых подуровней, а линейная групповая скорость поперечных компонент импульса определяется выражением

$$\upsilon_g = a_\perp\left(1 - \frac{nG_\perp^2\omega}{8\hbar\rho a_\perp^2}\frac{w_2 - w_1}{\Delta^2}\right)^{-1}. \qquad (14)$$

Система (13) описывает распространение продольно-поперечного акустического импульса в твердом теле в режиме нелинейного взаимодействия между его поперечными (коротковолновыми) и продольной (длинноволновой) составляющими. Из нее видно, что продольная компонента U может быть генерирована поперечными составляющими ψ_+ и ψ_-. В то же время продольная акустическая компонента неспособна породить поперечную, если последняя отсутствует на входе в кристалл. Кроме того, из (13) следует, что $a_\parallel$ имеет смысл фазовой скорости длинноволновой компоненты, а υ_g – групповой скорости коротковолновой составляющей.

В кристаллах скорость поперечного звука значительно меньше скорости продольного звука: $a_\perp < a_\parallel$ [20]. В случае термодинамически равновесной начальной населенности спиновых подуровней ($w_1 > w_2$) групповая скорость υ_g становится меньше $a_\perp$, а ее отличие от $a_\parallel$ становится больше (см. выражение (14)). В таких условиях взаимодействие между продольным и поперечным звуками будет слабым и образование связанных состояний длинно-коротковолнового типа невозможно. При этом система (13) переходит в хорошо известную систему Манакова [4].

Если же среда находится в термодинамически неравновесном состоянии ($w_1 < w_2$), то можно добиться выполнения условия $\upsilon_g = a_\parallel$ (условие резонанса Захарова–Бенни [1, 6]), при котором взаимодействие между продольной и поперечными компонентами поля упругости будет наиболее эффективным, и возможно образование связанных длинно-коротковолновых состояний. В этом случае при выполнении условия $|U| \gg 2\left(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2\right)/|\Delta|$ систему (13) удается свести с помощью приближения однонаправленного распространения [4] к двухкомпонентной системе Ядзимы–Ойкавы

$$\begin{gathered} i\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial z} = \beta\frac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial\tau^2} + \alpha U\Phi_\pm, \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -b\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2\right), \end{gathered} \qquad (15)$$

где $\tau = t - z/\upsilon_g$. Эквивалентные ей системы были выведены ранее в оптических задачах [11, 12]. Если одна из коротковолновых компонент отсутствует ($\Phi_+ = 0$ или $\Phi_- = 0$), система (15) переходит в обычную систему Ядзимы–Ойкавы.

Система уравнений (15) интегрируема в рамках метода обратной задачи рассеяния [11]. Ее односолитонное решение, записанное в лабораторной системе координат, имеет вид

$$\begin{gathered} \Phi_\pm = \frac{2\beta}{\tau_p}q_\pm\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha b}}\frac{\exp[-i(\vartheta_I + \varphi_\pm)]}{\mathrm{ch}(\vartheta_R)}, \\ U = \frac{2}{\Delta\tau_p^2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\vartheta_R)}, \end{gathered} \qquad (16)$$

где $\vartheta_R = (t - z/\upsilon)/\tau_p + c$, $\vartheta_I = \Omega(t - z/\upsilon_g) + \beta(\tau_p^{-2} - \Omega^2)z$, $\upsilon = \upsilon_g/(1 + 2\beta\upsilon_g\Omega)$, $q_+ = \cos\gamma$, $q_- = \sin\gamma$. Это решение имеет шесть вещественных свободных параметров: τ_p, Ω, γ, c и $\varphi_\pm$.

Параметры τ_p и Ω определяют длительность векторного солитона и сдвиг несущих частот его поперечных акустических компонент. Так как $\alpha b > 0$, то, как видно из (16), $\Omega > 0$, поэтому акустические компоненты испытывают уменьшение несущей частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано распространение векторного продольно-поперечного акустического импульса в кристалле, содержащем парамагнитные примеси. При равновесной начальной населенности спиновых подуровней между продольной и поперечными составляющими импульса отсутствует эффективное взаимодействие вследствие того, что групповая скорость υ_g поперечных волн оказывается меньше фазовой скорости $a_{||}$ продольной волны. Однако, если парамагнитные примеси до акустического воздействия приготовлены в неравновесном состоянии, возникает принципиальная возможность удовлетворить условию резонанса Захарова–Бенни $\upsilon_g = a_{||}$. Тогда, при подаче на вход среды двух разночастотных поперечных компонент происходит генерация продольной акустической составляющей с последующим распространением всех трех компонент в синхронном режиме. Показано, что этот процесс описывается двухкомпонентной системой Ядзимы–Ойкавы. Как и обычная система Ядзимы–Ойкавы, эта система уравнений интегрируема методом обратной задачи рассеяния, а ее импульсные решения являются солитонами в строгом смысле.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №13-02-00199а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
2. *Yadjima N., Oikawa M.* // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. No. 6. P. 1719.
3. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
4. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
5. *Фаддеев Л.Д.* // Успехи физ. наук. 2013. Т. 183. С. 487.
6. *Benney D.J.* // Studies Appl. Math. 1977. V. 56. P. 81.
7. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987.
8. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* // ЖЭТФ. 2003. Т. 123. С. 1160.
9. *Bugay A.N., Sazonov S.V.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 066608.
10. *Сазонов С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 81. № 5. С. 259.
11. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. № 8. С. 651.
12. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. № 5. С. 842.
13. *Сазонов С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 96. № 4. С. 281.
14. *Крюков П.Г.* Фемтосекундные импульсы. М.: Физматлит, 2008.
15. *Kitaeva G. Kh.* // Laser Phys. Lett. 2008. V. 5. P. 559.
16. *Голенищев-Кутузов В.А., Самарцев В.В., Соловаров Н.К., Хабибуллин Б.М.* Магнитная квантовая акустика. М.: Наука, 1977.
17. *Бункин Ф.В., Кравцов Ю.А., Ляхов Г.А.* // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149. С. 391.
18. *Crisp M.D.* // Phys. Rev. A, 1973. V. 8. P. 2128.
19. *Башаров А.М., Маймистов А.И.* // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88. С. 428.
20. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Физматлит, 1963.