

МГУ ИМ.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи  
УДК 539.3

Машихин Антон Евгеньевич

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА  
И СФЕРЫ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

Специальность 01.02.04 —  
«Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Мовчан Андрей Александрович

Москва — 2017

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Сплавы с памятью формы</b> . . . . .	10
1.1 Свойства СПФ . . . . .	10
1.2 Применение СПФ . . . . .	12
1.2.1 Промышленное применение . . . . .	12
1.2.2 Медицина . . . . .	18
1.3 Определяющие соотношения . . . . .	20
1.3.1 Положение об активных процессах пропорционального нагружения . . . . .	22
1.4 Краевые задачи для СПФ . . . . .	24
1.4.1 Цилиндр и сфера . . . . .	26
<b>Глава 2. Цилиндр</b> . . . . .	29
2.1 Постановка задачи . . . . .	29
2.2 Решение . . . . .	31
2.3 Пренебрежение упругими деформациями . . . . .	34
2.3.1 Случай внешнего давления . . . . .	38
2.3.2 Сравнение постановок с учетом и без учета упругих деформаций . . . . .	40
2.4 Плоская деформация . . . . .	48
2.4.1 Сравнение решений для цилиндра в случае плоской деформации и в случае нулевой осевой силой . . . . .	50
2.5 Предельные условия . . . . .	53
2.5.1 Случай действия продольной силы . . . . .	53
2.5.2 Случай плоской деформации . . . . .	58
2.6 Обратное превращение . . . . .	62
2.6.1 Постановка задачи . . . . .	62
2.6.2 Вывод разрешающих соотношений . . . . .	64
2.6.3 Приближенное решение . . . . .	68

<b>Глава 3. Сфера</b> . . . . .	73
3.1 Постановка задачи . . . . .	73
3.2 Решение . . . . .	74
3.3 Пренебрежение упругими деформациями . . . . .	76
3.4 Предельные нагрузки . . . . .	82
<b>Глава 4. Равномерное распределение температуры</b> . . . . .	85
4.1 Вывод разрешающей системы . . . . .	85
4.2 Алгоритм решения . . . . .	89
4.3 Анализ полученных решений . . . . .	92
4.3.1 Цилиндр . . . . .	93
4.3.2 Сфера . . . . .	107
4.3.3 Сравнение постановок . . . . .	113
<b>Заключение</b> . . . . .	128
<b>Список сокращений и условных обозначений</b> . . . . .	130
<b>Список литературы</b> . . . . .	131

## Введение

Сплавы с памятью формы (СПФ) представляют собой класс металлических материалов, обладающих уникальными термомеханическими свойствами. Экспериментальным исследованиям термомеханического поведения СПФ и теоретическому моделированию соответствующих эффектов и явлений посвящены работы Г.В.Курдюмова, Л.Г. Хандроса, В.А. Лихачева, В.Г. Малинина, С. Абдрахманова, А.Е. Волкова, Г.А. Малыгина, Baumgart F., Jorde J., Reiss H.–G., Falk F., Bertram A., Achenbach M., Muller I., Tanaka K., Liang C., Rogers C.A., Brinson L.S., Huang M.S., Graesser E. J., Cozzarelli F.A., Ivshin Y., Pence T.J., Boyd J.G., Lagoudas D.C., Leclercq S. L'excellent C., Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. A. и др.

Значительно меньше работ посвящено решению краевых задач термомеханики для СПФ. Здесь можно упомянуть работы таких авторов, как Лихачев В.А., Роговой А.А., Шляхов С.А., Какулия Ю.Б., Шарыгин А.М., Волков А.Е., Кухарева А.С., Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A., Herdman T., Ren J., Melnik R.V.N., Pettinger A., и др. Большинство решений краевых задач для СПФ получены численными методами (конечных разностей и конечных элементов). Результаты аналитических решений неизотермических тестовых задач термомеханики для СПФ при неоднородных напряженно-деформированных и фазовых состояниях, по которым можно было бы установить адекватность численных алгоритмов и достоверность получаемых с их помощью результатов, практически отсутствуют. Толстостенные цилиндры и сферы являются классическими объектами для получения аналитических решений механики деформируемого твердого тела. Для упруго-пластических тел такие решения получены Л.М. Качановым, В.В. Соколовским, А.А. Ильюшиным, П.М. Огибаловым и др. Для СПФ такого типа аналитические решения ранее получены не были.

**Целью** данной работы является построение аналитических, численно-аналитических и численных методов решения осесимметричных и центрально-симметричных задач термомеханики для элементов из СПФ в различных постановках и получение соответствующих решений, которые можно было бы использовать для тестирования конечно-элементных алгоритмов и пакетов прикладных программ, в которых анонсируется возможность решения задач для СПФ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Сформулировать ряд таких постановок осесимметричных или центрально-симметричных краевых задач термомеханики для СПФ, которые позволяли бы получать аналитические решения.
2. В предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по радиальной координате в условиях пренебрежения упругими деформациями получить аналитические решения связной задачи, описывающие изменение напряженно-деформированного состояния и температуры для толстостенных цилиндров (сфер) из СПФ, материал которых претерпевает прямое фазовое превращение под действием постоянных внешнего и внутреннего давления и осевой силы (постоянных внешнего и внутреннего давления). Сформулировать общие свойства полученных решений.
3. Сформулировать критерии предельного деформирования для элементов из СПФ и получить аналитические формулы для соответствующих предельных нагрузок.
4. Решить аналогичные задачи для случая монотонного нагружения тех же объектов в режиме мартенситной неупругости.
5. Разработать метод решения задачи об обратном мартенситном превращении для толстостенной трубы из СПФ, находящейся под действием неизвестных заранее контактных усилий со стороны упругого контртела. Решить задачу, моделирующую создание термомеханического соединения с использованием муфты из СПФ.
6. Разработать метод решения задачи о прямом превращении толстостенных сферы и цилиндра под действием постоянного внутреннего давления в предположении о равномерном распределении температуры по материалу.
7. Сравнить между собой решения вышеуказанных задач в различных постановках с целью определения области применимости каждого из них и оценки достоверности полученных решений.

**Научная новизна:**

1. Впервые в рамках определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях были решены связные задачи для толстостенной трубы во время прямого пре-

вращения под действием постоянного внешнего и внутреннего давления в различных постановках (плоская деформация/учет осевой силы; учет/неучет упругих деформаций; независимость значения параметра фазового состава/температуры от радиуса).

2. Впервые в рамках определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ была решена задача об обратном превращении в трубе из СПФ при контакте с упругой трубой.
3. Впервые в рамках определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ была решена связная задача для сферы во время прямого превращения под действием постоянного напряжения с учетом упругих деформаций в различных постановках (независимость распределения фазового состава/температуры по радиусу)
4. Впервые доказано, что, в предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по материалу и в условиях пренебрежения упругими деформациями, напряжения в толстостенных сфере и цилиндре из СПФ при прямом превращении под действием постоянных внешнего и внутреннего давления (и осевой силы для цилиндра) не зависят от параметра фазового состава, т.е. не происходит перераспределения напряжений по сечению рассматриваемых тел.
5. Впервые доказано, что в тех же условиях деформации и смещения каждой точки рассматриваемых тел изменяются пропорционально изменению параметра фазового состава.
6. Впервые установлено, что при обратном мартенситном превращении муфт из СПФ в контакте с упругим трубопроводом максимальные значения напряжений могут наблюдаться не в конечной точке обратного превращения, а при некотором промежуточном значении объемной доли мартенситной фазы.
7. Впервые в рамках жестко-фазово-структурного анализа введено понятие о предельной деформируемости элементов из СПФ и получены аналитические формулы для предельных нагрузок для толстостенных сферы и цилиндра из СПФ.

**Практическая значимость.** В настоящее время наиболее известным вариантом использования СПФ в аэрокосмической промышленности является создание термомеханических соединений трубопроводов с помощью муфт из СПФ. Общепринятым способом процесса увеличения внутреннего радиуса соедини-

тельной муфты из СПФ перед созданием термомеханического соединения является дорнирование муфты, материал которой находится в мартенситном состоянии, стальным стержнем. В данной работе моделируется процесс подготовки муфты из СПФ новым, менее повреждающим материал способом, а именно путем охлаждения под действием постоянного давления. Полученные решения задач о прямом превращении позволяют рассчитать нужные давления и температуры, необходимые для увеличения внутреннего диаметра муфты до заданной величины. Полученное решение задачи об обратном превращении муфты из СПФ, находящейся в контакте с упругой трубой, моделирует процесс монтажа термомеханического соединения. Было выполнено оригинальное исследование по расчету реально выпускаемых муфт из СПФ фирмы CryoFit.

Ряд исследований выполнен при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе применяются методы теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, численные методы решения уравнений и итерационный метод. Для получения аналитических решений используется положение об активных процессах пропорционального нагружения СПФ и следствия из него, а также полуобратный метод решения краевых задач.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Аналитические решения связанных задач о прямом превращении в толстостенных цилиндре и сфере из СПФ под действием постоянных внешнего и внутреннего давления и осевой силы (для цилиндра) в предположении о равномерном распределении доли мартенситной фазы по радиусу оболочки с учетом и без учета упругих деформаций. Положение о независимости напряжений от параметра фазового состава и пропорциональности смещений и деформаций параметру фазового состава в случае пренебрежении упругими деформациями.
2. Постановка и решение задачи о поиске предельных кривых для допустимых внешних нагрузок при прямом превращении в толстостенных цилиндре и сфере из СПФ. Аналитические формулы для предельных нагрузок.
3. Решение задачи об обратном превращении в трубе из СПФ при контакте с упругой трубой. Положение о том, что напряжения в рассматрива-

емом процессе могут достигать максимальных значений в промежуточной точке обратного превращения.

4. Решение связанных задач о прямом превращении в толстостенных цилиндрах и сфере из СПФ под действием постоянного напряжения в предположении о равномерном распределении температуры по радиусу оболочки с учетом упругих деформаций.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается использованием апробированной, физически обоснованной модели для описания функциональных свойств СПФ; строгостью постановки краевой задачи в соответствии с методами МДТТ; применением современных программных средств; сравнением с результатами, полученными с помощью альтернативных подходов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: Международной научной конференции «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, 2013); 2-я Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем» (Москва, ИПРИМ РАН, 2013); XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014 (Москва, 2014); Конференции «Сплавы с эффектом памяти формы: свойства, технологии, перспективы» (Витебск, 2014); 5-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Пленарный доклад (Казань, 2015); Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 105-летней годовщине со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 2016); Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2016» (Москва, 2016); Вторая Международная Конференция Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций (Москва, 2016); 6-я всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Москва, 2016).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в **15** печатных изданиях, **6** из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, **9** — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет

142 страницы, включая 78 рисунков. Список литературы содержит 110 наименований.

## Глава 1. Сплавы с памятью формы

### 1.1 Свойства СПФ

Сплавы с памятью формы (СПФ) представляют собой класс металлических материалов, обладающих уникальными термомеханическими свойствами. Впервые эффект сверхупругости для сплава AuCd был отмечен в 1932 году [1]. История открытия наиболее важных СПФ представлена на рисунке 1.1 [2]. В частности в 1962 году в Ливерморской лаборатории морской артиллерии (Naval Ordnance Laboratory) в США обнаружили, что твердый раствор никеля и титана с примерно равным атомарным составом проявляет свойства памяти формы. Материал в итоге назвали NiTiNOL [3]. Такие свойства NiTi, как высокое сопротивление коррозии, прочность, хорошая биосовместимость и большая способность к снятию деформаций (до 8%) сделали его наиболее предпочтительным для использования в медицинской, аэрокосмической областях, а также в гражданском строительстве [4]. Именно этот СПФ и будет рассматриваться в данной работе.

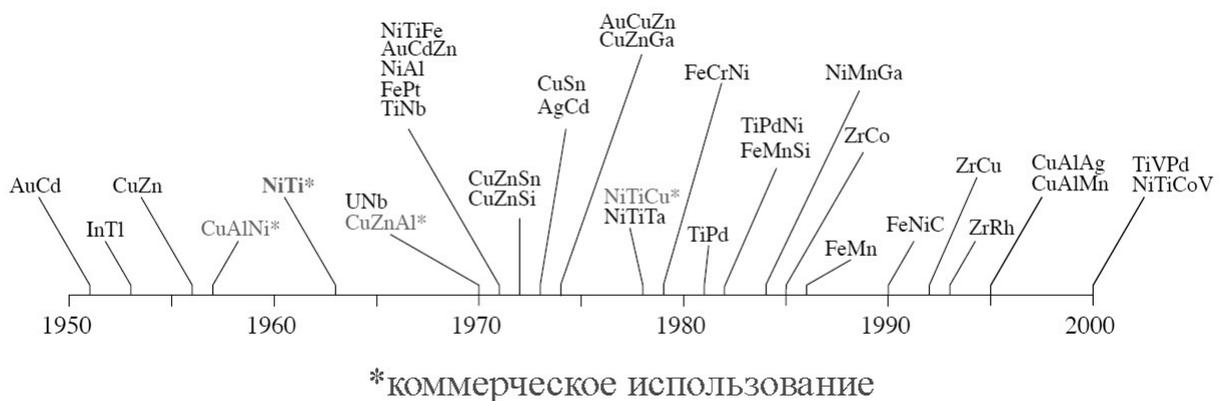


Рисунок 1.1 — История открытия важных СПФ.

Свойства СПФ, представляющие наибольший интерес в данной работе – это эффект накопления деформации во время прямого превращения (охлаждение) при постоянных напряжениях и эффект памяти формы (ЭПФ) суть явление снятия предварительной деформации при нагреве – оба этих явления представлены на рисунке 1.2. Изначально нитинол находился в высокотемпературной,

высокопрочной фазе аустенит, после чего при постоянном напряжении происходило охлаждение и в конце прямого превращения материал переходил в низкотемпературную, низкопрочную мартенситную фазу. Накопленные фазовые деформации после снятия нагрузки оставались. Далее материал нагревался и происходил, так называемый, обратный переход, в процессе которого накопленные деформации снимались.

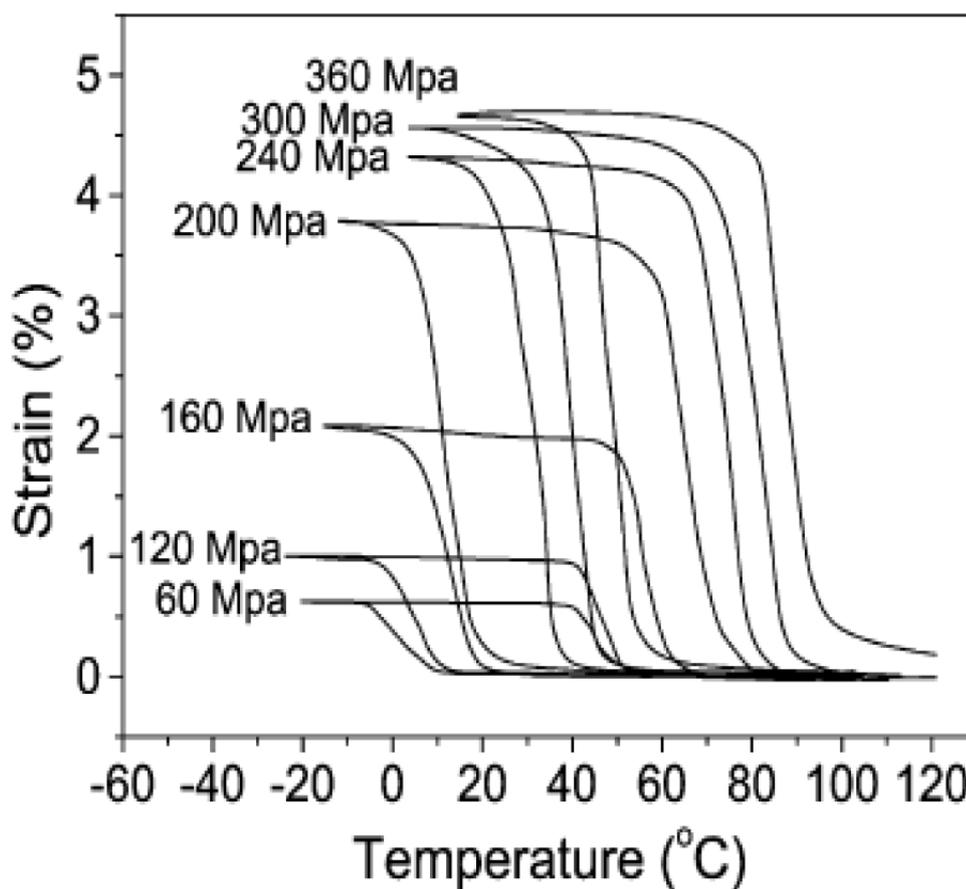


Рисунок 1.2 — График зависимости деформации от температуры для СПФ, демонстрирующий эффект накопления деформации во время прямого превращения (охлаждение) при постоянных напряжениях и эффект памяти формы (снятие деформаций при нагреве) [5].

## 1.2 Применение СПФ

### 1.2.1 Промышленное применение

#### Муфты

Исследование вселенной требует размещение различных технических объектов в условиях открытого космоса, доставка которых на орбиту технически возможна лишь частями с последующим монтажом. Существующие сегодня методы соединения деталей, используемые в массовом производстве, такие как сварка, склеивание, клепка и т.д, непригодны в условиях космоса. Помимо прочего предъявляются особые меры к обеспечению исключительно высокой техники безопасности. В виду такой специфики, в нашей стране была создана технология сборки ферменных конструкций в открытом космосе с помощью термомеханических соединений (ТМС), главную роль в которых играл материал из СПФ. Технология была впервые опробована в 1991 во время возведения 15-ти метровой несущей фермы «Софора» на внешней поверхности станции «Мир» [6].

Ферма состояла из отдельных трубчатых деталей 1 диаметром 28 мм, которые соединялись между собой с помощью муфты 2 из СПФ (рисунок 1.3). Для подготовки муфты ее изначально деформировали с помощью дорна при низкой температуре так, чтобы ее внутренний диаметр был больше наружного диаметра соединяемых элементов. После чего муфты доставлялись в космос и насаживались на соединяемые элементы. После нагрева выше температуры обратного мартенситного превращения внутренний диаметр муфты восстанавливался до того диаметра, который муфта имела перед расширением – в результате генерировались значительные обжимающие реактивные усилия и соединяемые элементы пластически деформировались, что обеспечивало их прочное соединение. В данном случае муфты использовались в качестве инструмента, пластически деформирующего обычный упруго-пластический материал.

Муфты из СПФ для термомеханического соединения труб применяются во многих конструкциях (рисунок 1.4). Впервые такие муфты были применены фирмой AeroFit [7] на американских реактивных истребителях F-14 [8] для со-

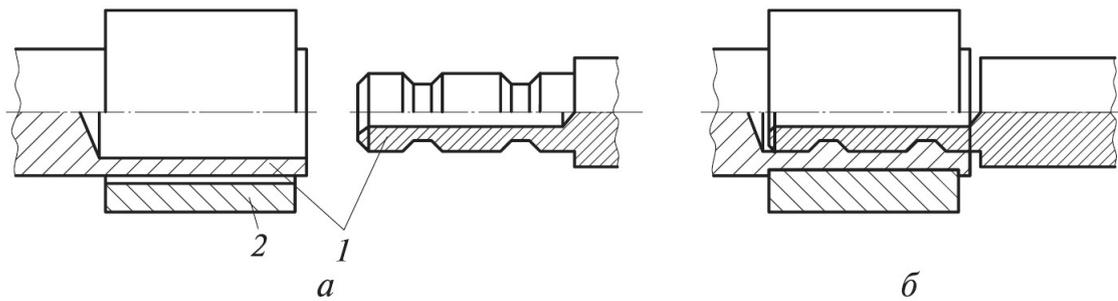


Рисунок 1.3 – Соединение трубчатых деталей 1 с помощью муфты 2 из СПФ: *а* – до сборки; *б* – после нагрева

единения трубопроводов гидросистем. Причем каких-либо аварий, связанных с утечкой масла, отмечено так и не было. Сегодня муфты такого типа применяются в двигателях самолетов [9] и в трубопроводах атомных подводных и надводных кораблей, а также есть возможность их широкого применения в системах трубопроводов нефтеперерабатывающих заводов [10], [11]. Помимо этого, муфты из СПФ применяют для ремонта трубопроводов для перекачки нефти со дна моря, причем для этих целей используют муфты большого диаметра – порядка 150мм [12]. В некоторых случаях для изготовления муфт применяют также сплав Cu-Zn-Al.

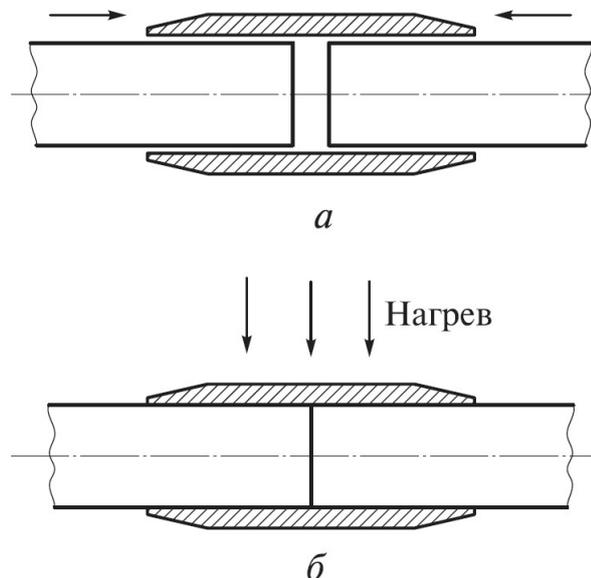


Рисунок 1.4 – Соединение труб с помощью муфты из СПФ: *а* – введение труб после расширения муфты; *б* – нагрев

Можно выделить следующие преимущества использования муфт из СПФ:

1. **Дешевизна и быстрота установки.** Для установки муфты не нужны громоздкие инструменты для сварки иликовки. Весь процесс установки, от подготовки до осмотра соединения, занимает несколько минут, что составляет лишь часть времени, нужной для сварки твердым припоем. Сам процесс не требователен к высокой квалификации монтажника. Все это приводит к резкому сокращению времени и стоимости установки муфты из СПФ.
2. **Герметичность.** Муфты из СПФ удовлетворяют высоким требованиям авиационно-космической промышленности, в том числе AS18280, AS85421, AS85720 [13]. По заявлениям компании AeroFit их муфты имеют рабочее давление до 350 бар и обеспечивают герметичное соединение.
3. **Легкий вес и меньшие размеры.** Поскольку никакие громоздкие инструменты не требуются, то отпадает необходимость в проектировании специальных карманов для инструмента, что ведет к уменьшению размеров и веса конечной конструкции. (рисунок 1.5).

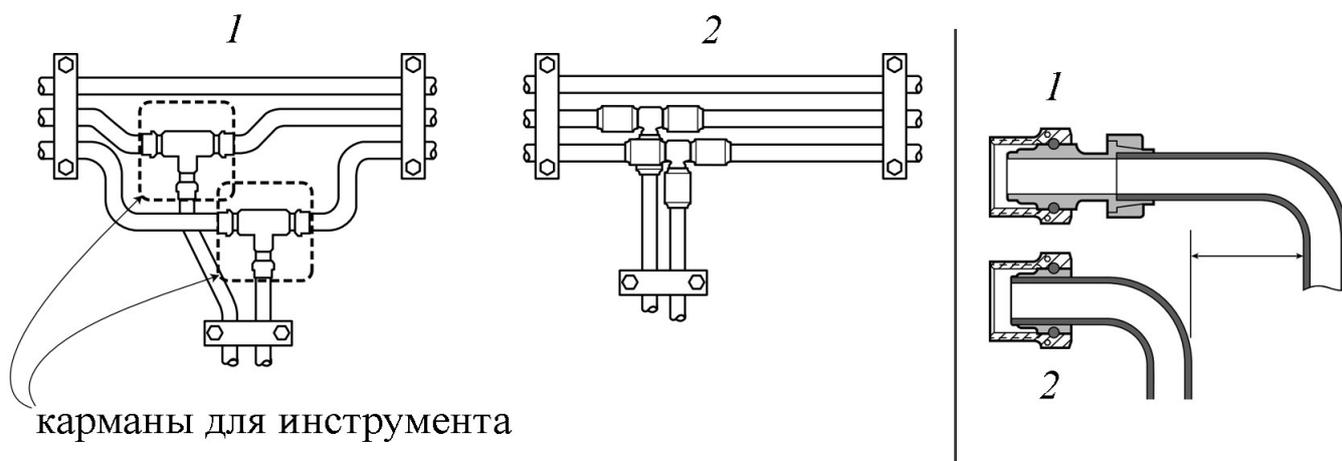


Рисунок 1.5 — Сравнение размеров конструкций с использованием обычных муфт 1 и муфт из СПФ 2.

4. **Универсальность.** Муфта из СПФ позволяет соединять разнородные трубы, поскольку не подвержена гальванической коррозии. Кроме того, муфта из СПФ позволяет соединять трубы с различными толщинами стенок.
5. **Сохранность соседних компонентов.** В отличие от сварки или пайки муфта из СПФ не представляет никакой опасности повреждения соседних компонентов от высокотемпературного нагрева.

6. **Визуальная проверка.** Для проверки надежности соединения достаточно удостовериться, что муфта установлена по заранее отмеченным меткам. Проверка не требует использования рентгеновского оборудования.
7. **Требования безопасности.** Такие муфты могут быть установлены в очень неблагоприятных условиях, таких как открытый космос, дно океана, пожаро- и взрывоопасная обстановка.

Основным недостатком является стоимость муфты.

## Актуаторы

Способность к восстановлению деформации у СПФ не может быть подавлена даже при высоком силовом воздействии. Уровень реактивных напряжений некоторых материалов из СПФ может составлять 1000 МПа, что нашло широкое применение в актуаторах. На рисунке 1.6 представлена схема обычного актуатора из СПФ [14], в котором нагревание прутка из СПФ достигается за счет электрического сопротивления. В циклических приложениях частота работы и выходная мощность актуатора ограничиваются теплоотводом, а также изменением температуры, которое необходимо для приведения актуатора в действие. Для активации ЭПФ обычно требуется изменение температуры на 15-30 градусов. Для достижения высоких напряжений требуется большее изменение температуры (около 100 градусов). Если нагрев за счет электрического сопротивления быстро достигим, то время охлаждения прутка из СПФ является главным ограничением на рабочую частоту актуатора. Максимальная частота зависит от характерного размера охлаждаемого участка, поэтому прутки должны быть как можно тоньше (в современных актуаторах радиус прутка равен 0.05 мм [15]). Актуатор с таким элементом из СПФ способен работать на частоте 0.02-7 Гц [16].

Актуаторы могут использоваться для однократного развертывания в космосе таких громоздких объектов, как солнечные батареи [18] и космические антенны [19]. Обычно антенны состоят из листа и стержня из сплава Ti-Ni, которые свернуты в виде спирали и помещены в углубление в искусственном спутнике. После выведения спутника на орбиту его антенна нагревается за счет тепла солнечного излучения (либо с помощью специального нагревателя), в ре-

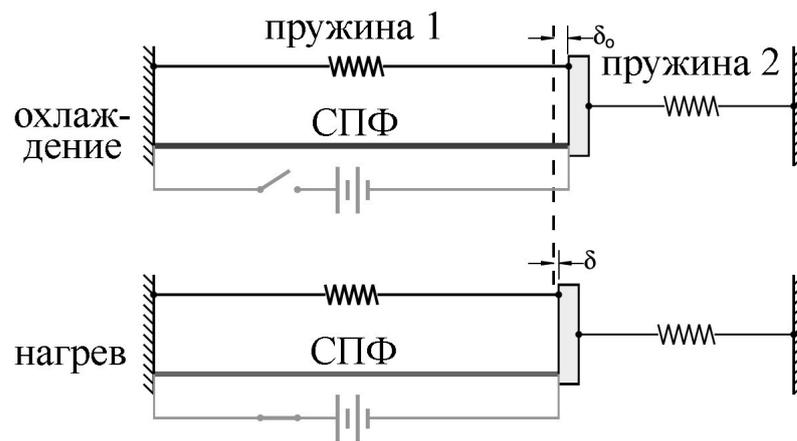


Рисунок 1.6 – Схема актуатора, приводимого в действие за счет электрического сопротивления прутка из СПФ. Пружина 1 служит механизмом сброса для циклических операций. Пружина 2 может представлять, например, роботизированную конечность [17].

зультате чего она выходит в космическое пространство [12]. Сегодня актуаторы из СПФ начали применять и в автомобильной индустрии. Самый распространенный продукт (более 5 миллионов актуаторов в год) – автоматический клапан для контроля давления в пневматическом баллоне, находящемся в кресле автомобиля, который отвечает за поясничную и боковую поддержку [20]. В 2014 в Chevrolet Corvette заменили тяжелые моторизированные актуаторы, которые открывали и закрывали вентиляционное отверстие, выпускающее воздух из багажника, на актуаторы из СПФ [21], которые приводятся в действие за счет нагрева. Можно выделить следующие преимущества актуаторов из СПФ:

- высокая надежность, по сравнению с обычными актуаторами, где много подвижных частей
- низкий звуковой шум
- электромеханическая бесшумность.
- малые размеры и вес
- малое потребление энергии

Сегодня ведутся исследования по использованию актуаторов из СПФ в передних спойлерах машин для оптимизации воздушного потока [22], [23] и в электрических генераторах, использующих тепло выхлопных газов [24], [25], [26].

## Гражданское строительство

В попытке смягчить последствия землетрясений для сооружений, инженеры-строители пытаются спроектировать всё более прочную структуру для зданий. Существующие средства «борьбы» с катаклизмом можно разделить на три категории: изоляция фундамента, активный (и полуактивный) контроль и пассивный контроль. Изоляция фундамента уже многие годы привлекает к себе внимание со стороны научного сообщества, зарекомендовав себя как самый совершенный из трех смягчающих методов. Многочисленные здания по всему миру были спроектированы и/или модернизированы на основе этого метода (например, Международный аэропорт Стамбула, здание муниципалитета городов Сан-Франциско и Окленда). Суть метода в отделении движения грунта от самой структуры за счет опорных изоляторов. Однако, несмотря на широкую распространенность и отличную сейсмостойчивость, изоляция фундамента не всегда возможна в связи с высокой стоимостью такой системы.

Альтернативами методу изоляции фундамента являются методы активного и пассивного контроля, которые основываются на внедрении специальных элементов в конструкцию самого здания. Активная и полуактивная методики контроля изменяют поведение структуры путем диссипации энергии и активных силовых устройств с внешним источником питания, которые реагируют в режиме реального времени на толчки. Напротив, пассивные методы изменяют реакцию за счет пассивного рассеивания энергии в заданных элементах, которые, при правильном проектировании, могут устранить нежелательное неупругое поведение в оставшейся части структуры и помочь распределить деформации более равномерно по высоте всей конструкции. Примерами сооружений с использованием метода пассивного контроля являются административное здание города Сан-Франциско, мост между Сан-Диего и Коронадо, здание госучреждения на западе Лос-Анжелеса. Совсем недавно начались исследования по использованию СПФ (рисунок 1.7), а именно свойства сверхупругости, в системах пассивного контроля [27], [28], [29]. Работы [30], [31] посвящены использованию пассивных элементов из СПФ при строительстве мостов.

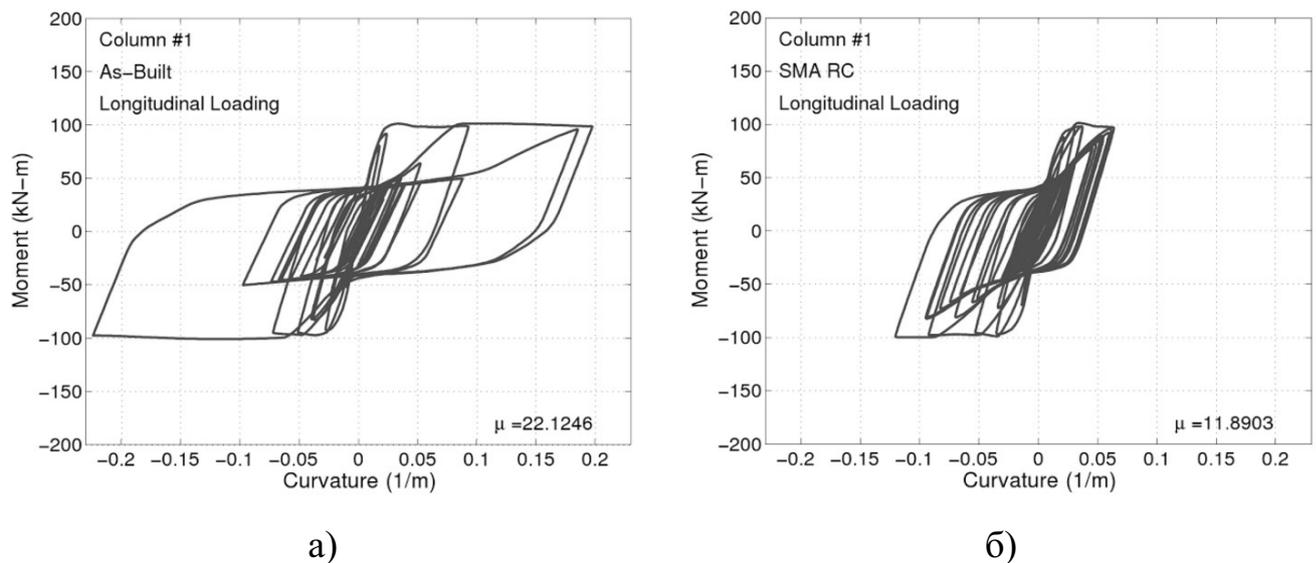


Рисунок 1.7 — Диаграмма момент/кривизна для продольного нагружения колонны; а) обычная колонна, б) колонна использованием СПФ [32].

### 1.2.2 Медицина

В 1971 году Адриесен [33] предложил использовать нитиноловую проволоку в качестве ортодонтического средства, так как она способна развивать постоянное усилие при различном уровне деформаций. Ещё один важный показатель – это отношение силы, создаваемой проволокой, к её деформации. На рисунке 1.8 показана зависимость силы от величины смещения для нержавеющей стали и СПФ [34]. Как видно из рисунка, при маленьких деформациях уровень усилий в нержавеющей проволоке более высокий по сравнению с проволокой из СПФ. Это означает, что при одинаковой деформации проволока из нитинола будет создавать меньшее, но постоянное усилие, которое не приведёт к перегрузению зубов. Таким образом, работа [33] заложила основы использования NiTi в медицинских целях.

Помимо ортодонтии сегодня нитиноловые имплантаты используются также в хирургии для сращения переломов костной ткани [35], [36]; коррекции осанки [37]; эндопротезов (протез, вживляемый внутрь человеческого организма для замены какой-либо части тела) [38], [39]; протезов костей [40], [41].

Ярким примером преимуществ использования СПФ является хирургическая операция по коррекции позвоночника с помощью стержня Харинтона. Обычно такой стержень изготавливался из коррозионно-стойкой стали. Недостатком стержня из стали является уменьшение во времени первоначального

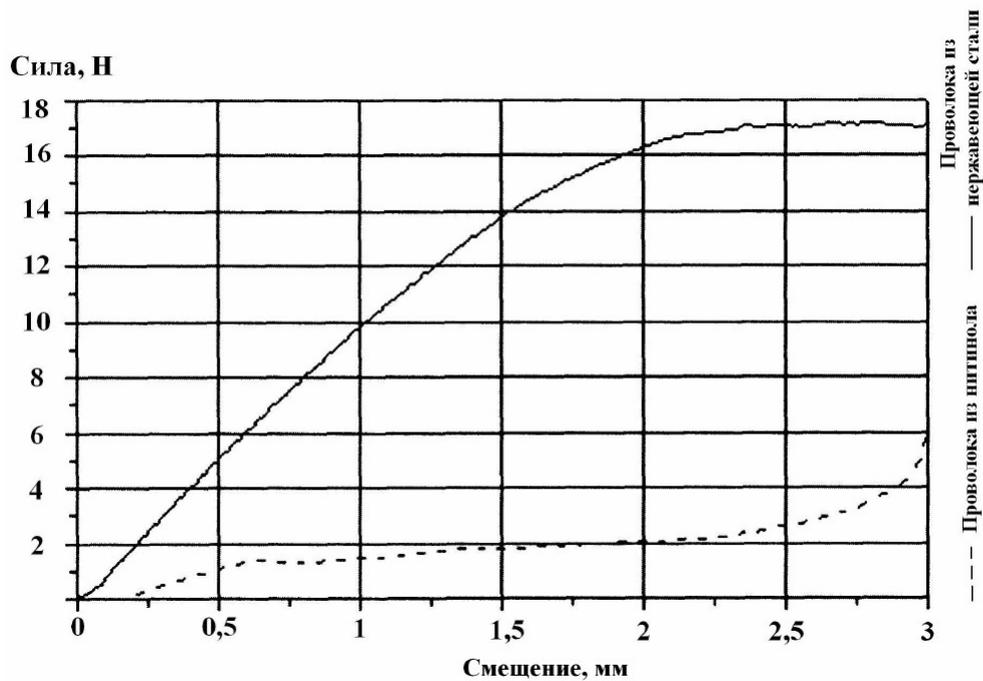


Рисунок 1.8 — Диаграмма сила-смещение для ортодонтических проволок, изготовленных из СПФ и нержавеющей сталей.

корректирующего усилия. Через 20 мин после установки корректирующая сила уменьшается на 20 %, а через 10-15 дней — до 30 % от первоначальной. Для создания дополнительного корректирующего усилия требуются повторные болезненные операции. Если же стержень Харинтона делать из СПФ [42], то установить стержень можно 1 раз, а необходимость в повторной операции отпадает. После операции для создания дополнительного корректирующего усилия достаточно лишь нагреть стержень Харинтона до температуры, несколько превышающей температуру тела. Эффективны для этой цели сплавы на основе TiNi с добавками Cu, Fe и Mo, проявляющие после восстановления формы высокую эластичность в интервале температур 35... 41°C.

В кардиологии, сердечно-сосудистой хирургии, гастроэнтерология и желудочно-кишечной хирургии применяются стенты из СПФ [43], [44], [45], [46] (стент — специальная, изготовленная в форме цилиндрического каркаса упругая металлическая или пластиковая конструкция, которая помещается в просвет полых органов и обеспечивает расширение участка, суженного патологическим процессом).

Преимущества нитиноловых стентов [47]:

– большая гибкость по сравнению со стентами из нержавеющей сталей;

- меньшая величина создаваемых напряжений, что характеризуется меньшим риском чрезмерного натяжения сосуда при расширении стента;
- биосовместимость и антикоррозийные характеристики;
- влияние на перестройку сосуда, влекущее за собой сокращение рестеноза.

### 1.3 Определяющие соотношения

Для решения задачи используется модель нелинейного деформирования СПФ [48]. Данная модель адекватно описывает такие свойства и явления, характерные для СПФ, как изменение упругих модулей при мартенситных превращениях, накопление деформации прямого превращения, ориентированное превращение, монотонная память формы, мартенситная неупругость, сверхупругость, выделение и поглощение латентного тепла фазового перехода, диссипативные явления. Определяющие соотношения для этой модели записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst} + \varepsilon_{ij}^T, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}$$

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st'}, \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (1.2)$$

$$q = \varphi(t_\sigma), \quad \varphi(t_\sigma) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad 0 \leq t_\sigma \leq 1$$

$$\varphi(t_\sigma) = 0 \quad t_\sigma \leq 0, \quad \varphi(t_\sigma) = 1 \quad t_\sigma \geq 1 \quad (1.3)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} F_2'(\sigma_i) d\sigma_i \quad d\sigma_i > 0, \quad d\varepsilon_{ij}^{st'} = 0, \quad d\sigma_i \leq 0, \quad (1.5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^\pm dq, \quad \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - f(q)q) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad dq > 0 \quad (1.6)$$

$$t_\sigma = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma_{ij}' + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, \quad (1.7)$$

$$\omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, \quad dq < 0, \quad (1.8)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M, \\ k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 + \omega_{ij}^\pm \sigma'_{ij}) \dot{q} - \rho q_{st} F'_2(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (1.9)$$

В (1.1)  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}^T$ ,  $\varepsilon_{ij}^{phst}$  – полная, упругая, температурная и фазово-структурная деформации;  $d\varepsilon_{ij}^{ph}$ ,  $d\varepsilon_{ij}^{st}$  – приращения этой деформации за счет фазового и структурного переходов;  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma_i$  – тензор и интенсивность напряжений, штрихом обозначаются компоненты девиаторов;  $K$ ,  $G$ ,  $K_M$ ,  $K_A$ ,  $G_M$ ,  $G_A$  – утроенный объемный и сдвиговой модули и их значения в мартенситном и аустенитном состоянии;  $T_0$  – отсчетная температура;  $\varepsilon_0 > 0$  – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения;  $\rho$  – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового превращения;  $q$  – объемная доля мартенситной фазы;  $q_{st}$  – часть мартенсита представительного объема, испытывающая в рассматриваемый момент структурное превращение, алгоритм определения этой величины изложен в [49];  $M_f^0$ ,  $A_f^0$  – температуры окончания соответственно прямого и обратного превращения в отсутствии напряжений (верхний индекс ноль); те же символы с верхним индексом  $\sigma$  соответствуют наличию напряжений;  $F_1(\sigma_i)$ ,  $F_2(\sigma_i)$  – материальные функции, трактуемые как функции распределения интенсивности микро-напряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное и мартенситное состояние соответственно);  $f(q)$  – материальная функция определяющая соотношение между вкладом в деформацию процессов зарождения и развития мартенситных мезоэлементов;  $k_q$ ,  $C_\sigma$ ,  $\alpha$  – коэффициент теплопроводности, теплоемкость при постоянном напряжении единицы объема, коэффициент температурного расширения;  $\Delta U_0$ ,  $\Delta S_0$  – объемные плотности энтальпии и энтропии фазового перехода.

В качестве функций распределения интенсивности микронапряжений  $F_1(\sigma_i)$  и  $F_2(\sigma_i)$  используются распределение Лапласа и Вейбулла соответственно:

$$F_1(\sigma_i) = erf\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{01}\sqrt{2}}\right), \quad erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad F_2(\sigma_i) = 1 - exp(-(\sigma_i/\sigma_{02})^2) \quad (1.10)$$

Уравнения (1.4)-(1.6) описывают прямое фазовое превращение и (или) структурное превращение; уравнения (1.7) и (1.8) – обратное превращение; со-

отношение (1.9) есть связное уравнение энергетического баланса, полученное из первого и второго законов термодинамики. В данной работе все расчеты проводятся для следующих значений параметров материала, соответствующих *NiTi* [50]:

- модуль Юнга для аустенита  $E_A = 84000$  МПа;
- модуль Юнга для мартенсита  $E_M = 28000$  МПа;
- коэффициент Пуассона для аустенита  $\nu_A = 0.3$ ;
- коэффициент Пуассона для мартенсита  $\nu_M = 0.3$ ;
- $\rho = 0.08$ ;
- $M_s^0 = 313^\circ K$ ;
- $M_f^0 = 293^\circ K$ ;
- $\varepsilon_0 = 0.001$ ;
- $k_q^A = 18$  Вт/м  $\cdot K^\circ$ ;
- $k_q^M = 8.6$  Вт/м  $\cdot K^\circ$ ;
- $C_\sigma = 500$  Дж/м<sup>3</sup>  $\cdot K^\circ$ ;
- $\alpha^A = 11 \cdot 10^{-6}/K^\circ$ ;
- $\alpha^M = 6.6 \cdot 10^{-6}/K^\circ$ ;
- $\Delta S_0 = 0.00366$  Па/ $K^\circ$ ;
- $\Delta U_0 = 15000$  Дж/кг;
- $\sigma_{01} = 176$  МПа ,  $\sigma_{02} = 350$  МПа;
- $\sigma_0 = \sigma_{01}$  (параметр обезразмеривания для напряжений).

### 1.3.1 Положение об активных процессах пропорционального нагружения

Определяющие уравнения для фазово-структурных деформаций представляют собой сложные соотношения в приращениях, которые, в общем случае, не могут быть проинтегрированы без знания пути термомеханического нагружения. В [51], [52] установлено положение об активных процессах пропорционального нагружения. Согласно этому положению в случае, если в рассматриваемом процессе происходит пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений, разгрузка отсутствует ( $d\sigma_i \geq 0$ ) и предполагается, что:

$$q_{st} = q, \quad F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i) \quad (1.11)$$

то уравнения (1.5)-(1.6) могут быть проинтегрированы независимо от пути термомеханического нагружения. В результате этого интегрирования получается следующее конечное соотношение для девиатора фазово-структурной деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2}\rho q \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F(\sigma_i) + \left( \varepsilon_{ij}^0 - \frac{3}{2}\rho q_0 \frac{\sigma_{ij}^0}{\sigma_i^0} F(\sigma_i^0) \right) \psi; \quad (1.12)$$

$$\psi(q, q_0) = \exp \left( \int_{q_0}^q f(\xi) d\xi \right), \quad \psi(q, q_0) = \frac{q}{q_0} \quad (1.13)$$

Данные соотношения отвечают начальным условиям  $\varepsilon_{ij}^{phst'}(q_0, \sigma_{ij}^0) = \varepsilon_{ij}^0$ , первая формула (1.13) соответствует прямому, а вторая – обратному фазовому превращению. Если начальные условия таковы, что выполняется равенство

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2}\rho_D q_0 \frac{\sigma_{ij}^0}{\sigma_i^0} F(\sigma_i^0) \quad (1.14)$$

то полученное соотношение существенно упрощается:

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{3}{2}\rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q F(\sigma_i), \quad \varepsilon_i^{phst} = \rho q F(\sigma_i) \quad (1.15)$$

Полученное соотношение (1.15) является конечным и существенно упрощает процесс решения краевых задач.

Условие (1.14) справедливо, в частности, для случая процесса, который начинается из полностью аустенитного состояния СПФ, либо из полностью сдвойникового мартенсита. Полученные решения позволяют доказать следующее положение. Пусть рассматриваемый процесс состоит из конечного числа фрагментов, для которых характерно прямое или обратное превращение, сопровождающиеся или нет структурными переходами, и (или) фрагментов, на которых происходит только структурный переход. Для начальной точки первого процесса выполняется соотношение (1.14), а для всего процесса в целом – сформулированные выше требования пропорциональности изменения девиатора напряжений, отсутствие разгрузки и равенства (1.11). Тогда для всего процесса в целом будет справедливо определяющее соотношение (1.15).

Отметим, что из всех предполагаемых условий для получения соотношения (1.13) наиболее ограничительным является второе равенство (1.11). Однако можно показать, что в некоторых случаях положение об активных процессах пропорционального нагружения справедливо и без выполнения этого равенства.

Так, для случая прямого превращения при постоянном значении девиатора напряжений требовать выполнение второго равенства (1.11) не нужно, а в полученных выше соотношениях следует заменить функцию  $F(\sigma_i)$  на  $F_1(\sigma_i)$ . Если же речь идет об обратном превращении в случае наличия или отсутствия структурного перехода при пропорциональном изменении компонент девиатора напряжений и отсутствии разгрузки, либо только о структурном переходе в тех же условиях, то здесь даже при нарушении второго равенства (1.11) будет справедливо решение (1.12) и последующие формулы, в которые необходимо заменить функцию  $F(\sigma_i)$  на  $F_2(\sigma_i)$ . В случае неучета температурных деформаций (1.15) с учетом (1.1) примет вид:

$$\varepsilon_{ij}' = \sigma_{ij}' \left( \frac{3}{2} \rho q \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} + \frac{1}{2G(q)} \right); \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}' \varepsilon_{ij}'} = \rho q F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{3G(q)} \quad (1.16)$$

#### 1.4 Краевые задачи для СПФ

Моделирование процесса накопления деформаций прямого превращения или мартенситной неупругости для статически неопределимых систем требует решения соответствующих краевых задач, которые могут быть сформулированы в различных постановках [53]. Простейшими такими проблемами являются задачи изгиба [54], [55], [56] и кручения элементов из СПФ [57], [58], [59], [60], аналог задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы из СПФ и аналогичная проблема для толстостенной сферы, находящихся под действием внутреннего и (или) внешнего давления. Теория конечных деформаций для сплавов с памятью формы представлена в [61], и на ее основе рассмотрены связанные краевые задачи для СПФ в [62], [63], [64], [65].

В общем случае определяющие соотношения (1.1)-(1.9) в силу их связанности, не могут рассматриваться ни по отдельности, ни последовательно, а должны анализироваться одновременно. Однако возможны некоторые упрощенные постановки краевых задач для СПФ. В частности, если в уравнениях (1.4), (1.7) пренебречь влиянием действующих напряжений и накопленных деформаций на характерные температуры фазовых переходов, а также диссипативными слагаемыми и термоупругой связностью в соотношении (1.9), то температурная

задача сводится к обобщенному уравнению теплопроводности

$$k_q \Delta T = C(T) \dot{T}, \quad C(T) = C_\sigma + \frac{\pi}{2} \Delta U \sin(\pi t) \quad (1.17)$$

где  $t$  разное для прямого и обратного превращения. В данном случае температурная задача (1.17) решается независимо, после чего по формуле (1.3) определяется значение параметра фазового состава и далее независимо же с использованием уравнений (1.1), (1.2) находится напряженно-деформированное состояние. Такая постановка задачи определяется как несвязная.

Кроме того, возможен вариант однократно связной постановки. В такой постановке температурный режим считается заданным (например, предполагается равномерное распределение температур по материалу, что соответствует весьма медленным процессам). В этом случае уравнение (1.9) не решается, а соотношения (1.1)-(1.8) рассматриваются совместно с учетом влияния действующих напряжений и накопленных деформаций на параметр фазового состава. Помимо этого, возможен альтернативный вариант однократно связной задачи, в рамках которого принимается гипотеза о равномерном распределении по материалу значения параметра  $q$  и его заданное изменение со временем (возрастание при прямом и убывание при обратном фазовом переходе) [66], [67], [68], [69]. В этом случае на первом этапе решается связная задача при совместном использовании уравнений (1.1)-(1.8) и все неизвестные (напряжения, деформации, смещения) находятся как функции координат и параметра фазового состава  $q$ . Далее, исходя из (1.3) определяется температура  $T$  как функция параметра  $q$ , напряжений и деформаций, также зависящих от  $q$ :

$$T = M_s^\sigma - \frac{M_s^0 - M_f^0}{\pi} \arccos(1 - 2q), \quad T = A_f^\sigma - \frac{A_f^0 - A_s^0}{\pi} \arccos(1 - 2q) \quad (1.18)$$

здесь первое соотношение соответствует прямому превращению, а второе – обратному.

В особый класс следует выделить задачи, решаемые в рамках «жестко-фазово-структурного» анализа [70], когда можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с фазово-структурными. Такое предположение позволяет существенно упростить и ускорить процедуру решения.

Наконец постановку начально-краевых задач термомеханики для СПФ, в рамках которой учитываются в связанной форме все определяющие соотношения (1.1)-(1.9) можно назвать дважды связанной. Здесь можно выделить класс статически определимых задач при фиксированных нагрузках. В этом случае

уравнение энергетического баланса существенно упрощается и может в некоторых случаях решаться независимо.

### 1.4.1 Цилиндр и сфера

Как было показано в главе 1.2.1 муфты из СПФ сегодня широко применяются в различных областях техники для создания надежного и герметичного соединения. Для изготовления муфты выбирается СПФ, температура начала прямого термоупругого фазового превращения которого при наличии достаточно высоких (эксплуатационных) напряжений существенно меньше, чем температура эксплуатации изделия. Муфта в простейшем случае имеет форму полого кругового цилиндра, внутренний диаметр которого при аустенитном фазовом состоянии материала имеет значение, меньшее (обычно на величину около 4%) внешнего диаметра соединяемых цилиндрических элементов. При достаточно низкой температуре, соответствующей мартенситному состоянию СПФ, происходит увеличение внутреннего диаметра («раздача») муфты (как правило, путем дорнирования, однако возможны менее повреждающие операции активного изотермического нагружения монотонно возрастающим внутренним давлением или использование эффекта накопления фазовых деформаций прямого превращения под действием постоянного внутреннего давления). В результате внутренний диаметр муфты становится равным или несколько превышает внешний диаметр соединяемых деталей. Муфта одевается на соединяемые детали и нагревается через интервал температур обратного мартенситного превращения. За счет явления памяти формы внутренний диаметр муфты становится меньше внешнего диаметра соединяемых деталей и образуется достаточно прочное соединение.

Численному моделированию термомеханического поведения толстостенной трубы из СПФ в рамках структурно-аналитической теории поведения этих материалов посвящены работы [71], [72], [73], [74], [75], [76]. Используется как метод конечных разностей [75], так и метод конечных элементов [76]. Аналитические решения осесимметричных задач о плоскости с круговым отверстием, нагруженной внутренним давлением и задачи Ляме для СПФ в рамках модели линейного деформирования этих материалов при фазовых превращени-

ях [77], [78], [79] с использованием преобразования Лапласа по величине объемной доли мартенситной фазы получены в [80], [81].

Рассмотрены случаи термоупругих фазовых превращений при условии независимости значения параметра фазового состава от радиальной координаты. Показано, что в рамках такой постановки напряжения не зависят от параметра фазового состава и их распределение по радиальной координате совпадает с аналогичным распределением в упругой задаче. Ограничение, связанное с независимостью параметра фазового состава от радиальной координаты снято в численном решении задачи Ляме в рамках тех же моделей [77], [78], [79], полученном методом конечных разностей в [82]. Возможность структурного перехода и явление мартенситной неупругости (связанное с этим переходом) в решениях [80], [81], [82] не учитывались. Кроме того, пренебрегалось нелинейностью зависимости деформации полного прямого превращения под действием постоянного напряжения от величины этого напряжения. Численное решение соответствующей задачи в рамках микроструктурной модели поведения СПФ [83] получено в [84], [85].

Моделирование процесса «раздачи» муфты из СПФ как путем активного деформирования с использованием явления мартенситной неупругости, так и с помощью явления прямого мартенситного превращения при постоянном внутреннем давлении без учета упругих деформаций приведено в [86]. В [87], [88] рассмотрена задача о контакте упругого цилиндра и муфты из СПФ в процессе обратного превращения. В [89], [90], [91] получено решение однократно-связной осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии длинного толстостенного кругового цилиндра из сплава с памятью формы, претерпевающего прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение под действием постоянных внутреннего и внешнего давления и постоянной осевой силы. В [92] рассматривался вопрос о предельных условиях для цилиндра из СПФ.

Широко распространенный в настоящее время способ «раздачи» муфт из СПФ – дорнирование стальным стержнем муфты в мартенситном состоянии в среде жидкого азота, может привести к нежелательной деформации, а, следовательно, повлиять на дальнейшую герметичность и несущую способность термомеханического соединения (ТМС) трубопроводов. На герметичность и несущую способность ТМС также влияет скорость дорнирования муфты [93]. В [94] показано влияние релаксирующих напряжений на прочность ТМС, в частности в измеряемом интервале времени (1–2500 ч) в начальный период времени (1–50 ч)

наблюдается некоторое снижение прочности ТМС, затем прочность стабилизируется.

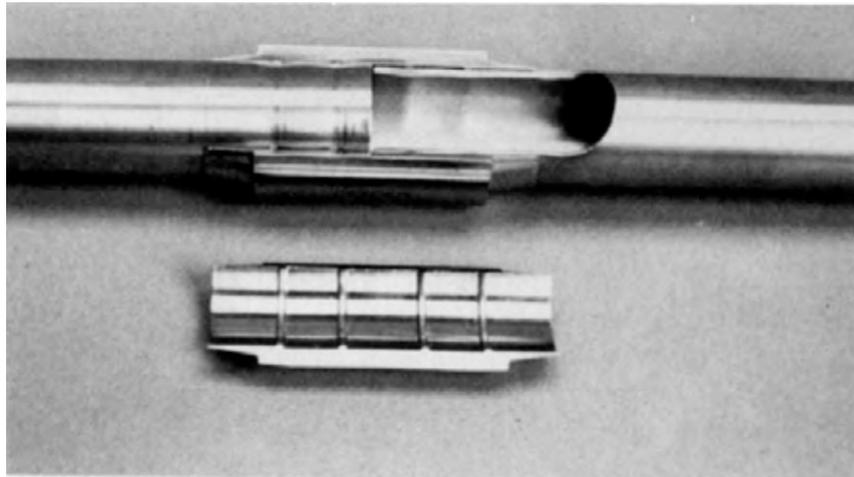


Рисунок 1.9 – Фотография разрезанной муфты CryoFit [7].

Решения задач об упруго - пластическом равновесии полого шара приведены в [95], [96]. Численные решения задачи о поведении тонкостенной сферы из СПФ при прямом термоупругом фазовом превращении в рамках модели линейного поведения СПФ при фазовых превращениях [77], [80], [81] и геометрически нелинейной постановке получены в [97], [98], [99]. В данной работе получены приближенные аналитические решения задач о деформировании толстостенной сферы из СПФ в режиме прямого термоупругого мартенситного фазового превращения или мартенситной неупругости в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [51], [52], [49], [100], [101].

Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления рассмотрена в [102] но без учета упругих деформаций. В [103] приведено сравнение результатов аналитических решений задач о напряженно деформируемом состоянии толстостенных цилиндра и сферы. В [104] решена задача о генерировании реактивных напряжений в опыте на ориентированное превращение, последняя фаза которого (прямое превращение после снятия напряжений) происходит в заневоленном состоянии.

## Глава 2. Цилиндр

### 2.1 Постановка задачи

Рассматривается толстостенный цилиндр из СПФ с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ . Используется цилиндрическая система координат с осью  $z$ , направленной вдоль оси цилиндра, радиальной координатой  $r$  и кольцевой координатой  $\phi$ . К внутренней цилиндрической поверхности приложено постоянное давления  $p_a$ , а к внешней поверхности – постоянное давление  $p_b$ . К торцам цилиндра приложена постоянная осевая сила  $P$  (рисунок 2.1).

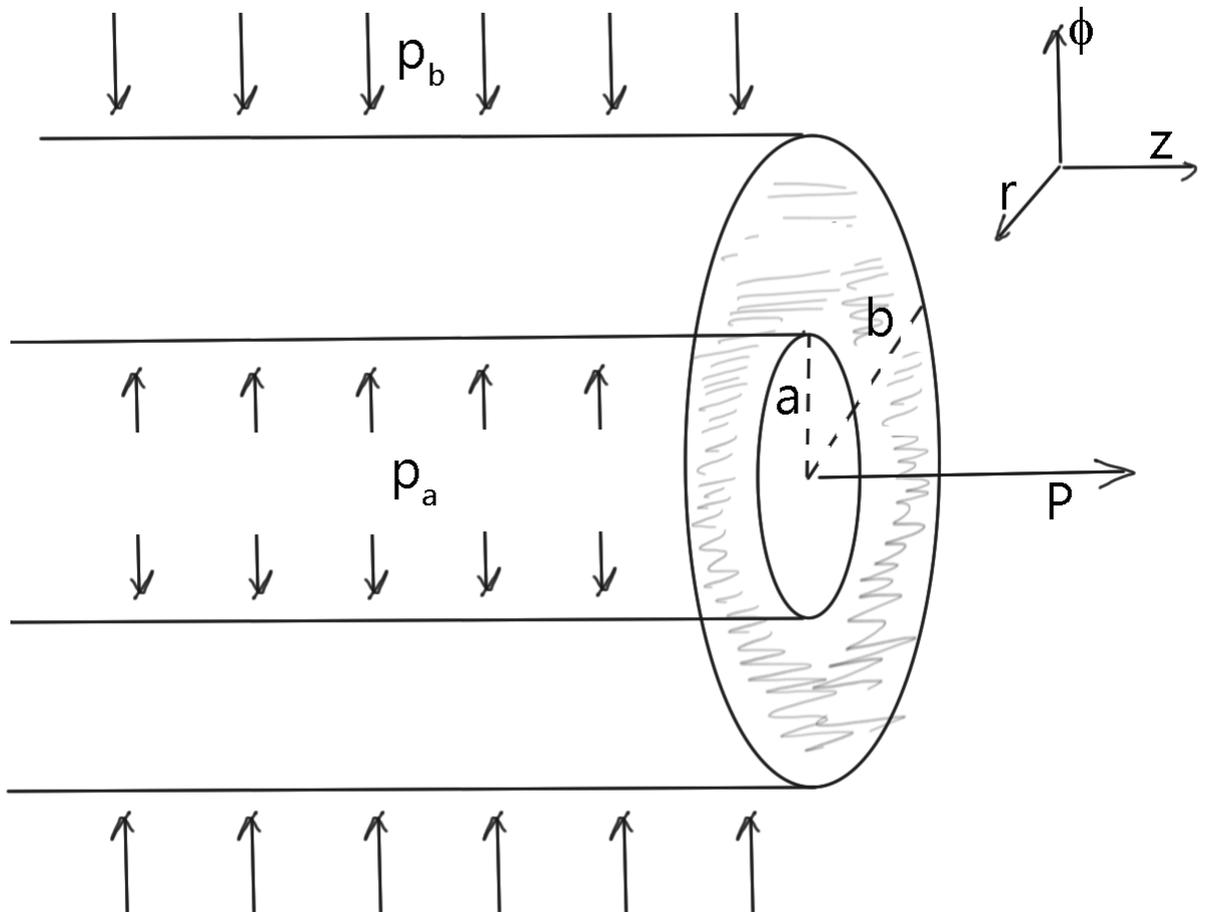


Рисунок 2.1 — Цилиндр из СПФ с радиусами  $a$  и  $b$  под действием внутреннего давления  $p_a$ , внешнего давления  $p_b$  и постоянной осевой силы  $P$ .

Считается, что напряжения и деформации от координат  $z$  и  $\phi$  не зависят. Относительно осевой деформации  $\varepsilon_z$  предполагается, что она не зависит от координат, но, вообще говоря, может меняться при изменении параметра фазового состава

– объемной доли мартенситной фазы  $q$ . При охлаждении цилиндра в материале происходит прямое фазовое мартенситное превращение, в процессе которого величина  $q$  возрастает от 0 до 1. Предполагается, что величина  $q$  в каждый момент времени одинакова для всех точек цилиндра. Рассматривается осесимметричная задача и все искомые величины зависят от двух переменных  $r$  и  $q$ . Зависимость решения от  $q$  отличает данную проблему от соответствующих упруго-пластических задач [105]. Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r} \quad (2.1)$$

$$\int_a^b \sigma_z r dr = \frac{P}{2\pi} \quad (2.2)$$

Деформации выражаются через радиальное перемещение по формуле:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r}; \quad (2.3)$$

и удовлетворяют условию совместности:

$$\frac{d\varepsilon_\phi}{dr} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\phi}{r} \quad (2.4)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r(a) = -p_a; \quad \sigma_r(b) = -p_b \quad (2.5)$$

и соответствуют случаю нагружения внутренним и внешним давлением. При решении задачи используется модель нелинейного деформирования СПФ (1.1)-(1.9). В рамках этой модели будут использованы следующие допущения:

– осевая деформация трубы не зависит от радиуса  $r$  и координаты  $z$ :

$$\varepsilon_z = \hat{\mu}(q) \quad (2.6)$$

– пренебрегается температурными деформациями в (1.1)

– параметр фазового состава  $q$  не зависит от радиуса  $r$

– справедливы положения об активных процессах пропорционального нагружения

– упругие деформации несжимаемы

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_\phi^e + \varepsilon_z^e = 0 \quad (2.7)$$

справедливость выполнения положения об активных процессах пропорционального нагружения будет проверяться из готового решения.

## 2.2 Решение

Из (1.2), (2.3), (2.6) и (2.7) имеем:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \hat{\mu}(q) = 3\varepsilon_0 q \quad (2.8)$$

Решая дифференциальное уравнение, получаем:

$$u = \frac{C(q)}{r} + \frac{r}{2} [3\varepsilon_0 q - \hat{\mu}(q)] \quad (2.9)$$

выражения для деформаций примут следующий вид:

$$\varepsilon_r = -\frac{C(q)}{r^2} + \frac{1}{2} [3\varepsilon_0 q - \hat{\mu}(q)]; \quad \varepsilon_\phi = \frac{C(q)}{r^2} + \frac{1}{2} [3\varepsilon_0 q - \hat{\mu}(q)]; \quad \varepsilon_z = \hat{\mu}(q) \quad (2.10)$$

для девиаторов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= -\frac{C(q)}{r^2} - \frac{1}{2}\mu(q); & \varepsilon_\phi' &= \frac{C(q)}{r^2} - \frac{1}{2}\mu(q); \\ \varepsilon_z' &= \mu(q); & \mu(q) &= \hat{\mu}(q) - \varepsilon_0 q \end{aligned} \quad (2.11)$$

переходя к  $\mu(q)$  в формулах (2.9) и (2.10), получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{C(q)}{r} - \frac{r}{2} [\mu(q) - 2\varepsilon_0 q]; & \varepsilon_r &= -\frac{C(q)}{r^2} - \frac{1}{2} [\mu(q) - 2\varepsilon_0 q]; \\ \varepsilon_\phi &= \frac{C(q)}{r^2} - \frac{1}{2} [\mu(q) - 2\varepsilon_0 q]; & \varepsilon_z &= \mu(q) + \varepsilon_0 q; \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны, из (1.16) и (2.11) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= \varepsilon_r' [f(\sigma_i, q)]^{-1}; & \sigma_\phi' &= \varepsilon_\phi' [f(\sigma_i, q)]^{-1}; \\ \sigma_z' &= \varepsilon_z' [f(\sigma_i, q)]^{-1}; & f(\sigma_i, q) &= \frac{3}{2} \rho q \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} + \frac{1}{2G(q)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\rho q F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{3G(q)} = \frac{2}{3} \theta(r, q); \quad \theta(r, q) = \sqrt{\frac{3}{r^4} C^2(q) + \frac{9}{4} \mu(q)^2} \quad (2.14)$$

Или

$$f(\sigma_i, q) \sigma_i = \theta(r, q) \quad (2.15)$$

Выражение (2.14) представляет собой уравнение для нахождения  $\sigma_i(r, q)$ . При этом функции  $\mu(q)$  и  $C(q)$  нам неизвестны.

Рассмотрим разность компонент тензора напряжений с учетом (2.13) и (2.15):

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \sigma_\phi' - \sigma_r' = \frac{2C(q)}{r^2} [f(\sigma_i, q)]^{-1} = \frac{2C(q)}{r^2} \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \quad (2.16)$$

Тогда уравнение равновесия (2.1) записывается следующим образом:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2C(q)}{r^3} \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \quad (2.17)$$

которое при интегрировании с граничными условиями (2.5) примет вид:

$$2C(q) \int_a^b \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \frac{dr}{r^3} = p_a - p_b \quad (2.18)$$

Как видно из уравнения (2.18) знак функции  $C(q)$  зависит от знака разности  $(p_a - p_b)$ . Поэтому если рассматривается случай, когда есть только внутренне давление, а внешнее давление равно нулю, то функция  $C(q)$  всегда положительна, в обратном случае нужно принять  $C(q)$  отрицательной. Уравнения (2.14) и (2.18) представляют собой систему для нахождения неизвестных  $\sigma_i$ ,  $C(q)$  и  $\mu(q)$ . Для замыкания системы нужно еще одно уравнение. Его можно получить из уравнения равновесия (2.2). Из вырожденности первого инварианта девиаторов тензора напряжений, имеем:

$$2\sigma_r' + \sigma_\phi' = \sigma_r' - \sigma_z' = \sigma_r - \sigma_z$$

следовательно,

$$\sigma_z = \sigma_r - 2\sigma_r' - \sigma_\phi' \quad (2.19)$$

Из (2.17) следует:

$$\sigma_r = -p_a + 2C(q) \int_a^r \frac{\sigma_i(y, q)}{\theta(y, q)} \frac{dy}{y^3} \quad (2.20)$$

Заменяя в правой части (2.19) слагаемые с учетом (2.13), (2.15) и (2.20), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z = -p_a + 2C(q) \int_a^r \frac{\sigma_i(y, q)}{\theta(y, q)} \frac{dy}{y^3} + 2 \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} + \frac{1}{2} \mu(q) \right) \\ - \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} - \frac{1}{2} \mu(q) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Упрощая (2.21), получаем:

$$\sigma_z = -p_a + 2C(q) \int_a^r \frac{\sigma_i(y, q)}{\theta(y, q)} \frac{dy}{y^3} + \frac{\sigma_i(r, q)}{\theta(r, q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} + \frac{3}{2} \mu(q) \right) \quad (2.22)$$

Наконец, подставляя (2.22) в уравнение равновесия (2.2), имеем:

$$\int_a^b \left[ -p_a + 2C(q) \int_a^r \frac{\sigma_i(y,q) dy}{\theta(y,q) y^3} + \frac{\sigma_i(r,q)}{\theta(r,q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} + \frac{3}{2}\mu(q) \right) \right] r dr = \frac{P}{2\pi} \quad (2.23)$$

или, если перенести в правую часть проинтегрированную величину  $p_a$ :

$$\int_a^b \left[ 2C(q) \int_a^r \frac{\sigma_i(y,q) dy}{\theta(y,q) y^3} + \frac{\sigma_i(r,q)}{\theta(r,q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} + \frac{3}{2}\mu(q) \right) \right] r dr = \frac{p_a}{2} (b^2 - a^2) + \frac{P}{2\pi} \quad (2.24)$$

Таким образом, система, составленная из (2.14), (2.18) и (2.24), представляет собой три уравнения для трех неизвестных функций  $\sigma_i(r,q)$ ,  $C(q)$  и  $\mu(q)$ . После этого деформации и радиальное смещение определяются по формуле (2.12), интенсивность напряжений – путем решения уравнения (2.14), радиальное напряжение с помощью (2.20), кольцевое – с помощью (2.16), осевое – исходя из (2.22).

Величина  $q$  входит в уравнения системы (2.14), (2.18) и (2.24) как параметр. Для описания явления прямого превращения эти уравнения должны решаться для заданных значений  $q \in [0,1]$ . Решение для  $q = 0$  соответствует упругой задаче с аустенитными значениями модулей, для которой

$$C(0) = \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{2G_A (b^2 - a^2)}; \quad \mu(0) = \frac{P}{3G_A \pi (b^2 - a^2)} + \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{3G_A (b^2 - a^2)}$$

Если необходимо моделировать процессы, происходящие при нагружении монотонно возрастающими напряжениями в режиме мартенситной неупругости, то в приведенных выше уравнениях необходимо положить  $q = 1$ , а величины  $C$  и  $\mu$  считать функциями  $P$ ,  $p_a$ ,  $p_b$ .

Для упрощения анализа решений удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \beta &= b/a; \quad \tilde{r} = r/a; \quad \tilde{C}(q) = C(q)/a^2; \quad \tilde{P} = P/(\sigma_0 a^2); \\ \tilde{p}_a &= p_a/\sigma_0; \quad \tilde{p}_b = p_b/\sigma_0; \quad \tilde{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_0; \\ \tilde{G}(q) &= G(q)/\sigma_0; \quad \tilde{G}_M = G_M/\sigma_0; \quad \tilde{G}_A = G_A/\sigma_0; \end{aligned} \quad (2.25)$$

опуская для простоты индекс тильда, получим из (2.14), (2.18) и (2.24) следующую систему :

$$\theta(r,q) = \frac{3}{2} \rho q F[\sigma_i(r,q)] + \frac{\sigma_i(r,q)}{2G(q)} \quad (2.26)$$

$$2C(q) \int_1^\beta \frac{\sigma_i(r,q) dr}{\theta(r,q) r^3} = p_a - p_b \quad (2.27)$$

$$\int_1^\beta \left[ 2C(q) \int_1^r \frac{\sigma_i(y,q) dy}{\theta(y,q) y^3} + \frac{\sigma_i(r,q)}{\theta(r,q)} \left( \frac{C(q)}{r^2} + \frac{3}{2}\mu(q) \right) \right] r dr = \frac{p_a}{2} [\beta^2 - 1] + \frac{P}{2\pi} \quad (2.28)$$

$$\theta(r,q) = \sqrt{\frac{3}{r^4} C^2(q) + \frac{9}{4} \mu(q)^2} \quad (2.29)$$

Система (2.26)-(2.29) подлежит решению для нахождения неизвестных параметров задачи  $C(q)$ ,  $\mu(q)$ ,  $\sigma_i(r, q)$ .

Отметим, что система (2.26)-(2.29) для нахождения напряженно-деформированного состояния цилиндра под действием постоянного давления ( $p_a, p_b$ ) и продольной силы  $P$  была получена при условии, что параметр фазового состава  $q$  не зависит от радиальной координаты  $r$ . Покажем, что приведенное выше решение является решением связной задачи при допущении о независимости параметра фазового состава  $q$  от радиальной координаты  $r$ . Для этого найдем такое точное распределение температур, чтобы напряженно-деформированное состояние и поле температур удовлетворяли условиям однократно связной задачи [106].

Для нахождения температурных полей воспользуемся формулой (1.18), которая примет вид:

$$T = M_s^0 + \frac{\rho \sigma_i F(\sigma_i(r,q))}{\Delta S_0} - \frac{M_s^0 - M_f^0}{\pi} \arccos(1 - 2q) \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что значение температуры полностью определяется значением интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , которое уже известно из готовых решений, полученных выше.

### 2.3 Пренебрежение упругими деформациями

Упругие деформации в СПФ типа нитинола для одинаковых значений напряжений многократно уступают по величине фазово-структурным деформациям. Ниже приводятся разрешающие соотношения для случая пренебрежения

упругими деформациями. При этом первое уравнение (2.26) принимает вид:

$$\theta(r, q) = \frac{3}{2} \rho q F(\sigma_i) \quad (2.31)$$

Согласно (2.31) функция  $\theta(r, q)$  пропорциональна  $q$ . Этому условию можно удовлетворить, если искать решение для  $C(q)$  и  $\mu(q)$  в форме:

$$C(q) = \frac{3}{2} \rho \lambda q, \quad \mu(q) = \frac{3}{2} \rho \delta q \quad (2.32)$$

где  $\lambda$  и  $\delta$  от  $q$  не зависят. Тогда

$$\theta(r, q) = \frac{3}{2} \rho q \Theta(r); \quad \Theta(r) = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{R^4} + \frac{9}{4}\delta^2} \quad (2.33)$$

и вместо (2.31) можно записать

$$F(\sigma_i) = \Theta(r) \quad (2.34)$$

В результате удается получить явное выражение для  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = F^{-1}(\Theta(r)) \quad (2.35)$$

а уравнения для определения параметров  $\lambda$  и  $\delta$  принимают в соответствии с (2.26), (2.28) вид:

$$2\lambda \int_1^\beta \frac{F^{-1}(\Theta(r))}{\Theta(r)} \frac{dr}{r^3} = p_a - p_b \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_1^\beta \left[ \int_1^r \frac{F^{-1}(\Theta(y))}{\Theta(y)} \frac{dy}{y^3} \right] r dr + \int_1^\beta \frac{F^{-1}(\Theta(r))}{\Theta(r)} \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{3}{2}\delta \right) r dr \\ = \frac{p_a}{2} [\beta^2 - 1] + \frac{P}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Таким образом, из разрешающей системы уравнений величина  $q$  исчезла. Поэтому напряженное состояние при решении задачи в такой постановке не зависит от  $q$ , т.е. не меняется при фазовом переходе. Следовательно, условия справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения выполнены, и использование в данном случае определяющих уравнений в форме конечных соотношений (1.16) законно.

В рамках модели, не учитывающей упругие деформации, следуя соотношениям (2.32) и (2.9)-(2.11) все компоненты деформаций и смещения в фиксированной точке меняются пропорционально  $q$ . Согласно решениям, полученным с

учетом упругих деформаций зависимость смещений и деформаций от  $q$  с большой степенью точности может быть аппроксимирована линейными функциями. Значения этих функций для  $q = 0$  соответствуют упругому решению. Для получения приближенного решения задачи о прямом превращении достаточно найти из системы (2.26)-(2.29) значения величин  $C$  и  $\mu$  для  $q = 1$  и далее вычислить все искомые величины для выражений

$$C(q) = C(0) + q [C(1) - C(0)]; \quad \mu(q) = \mu(0) + q [\mu(1) - \mu(0)] \quad (2.38)$$

Расчеты показывают, что тангенсы углов наклона прямых (2.38) к оси  $q$  весьма мало отличаются от параметров  $\lambda$  и  $\delta$ , полученных для решения той же задачи с пренебрежением упругими деформациями. Для просчитанных вариантов эта разница не превосходила 3%. Поэтому, в первом, достаточно хорошем приближении при решении с учетом упругих деформаций можно воспользоваться формулами

$$C(q) = C(0) + \lambda q; \quad \mu(q) = \mu(0) + \delta q \quad (2.39)$$

Для уточнения полученного решения найденные с помощью (2.39) значения  $C(q)$  и  $\mu(q)$  можно использовать как начальные приближения для соответствующих величин при решении системы (2.26)-(2.29) (скорость сходимости решения системы (2.26)-(2.29) существенно зависит от точности начального приближения для  $C$  и  $\mu$ ).

Правомерность использования положения об активных процессах пропорционального нагружения и следующих из этого положения определяющих соотношений (1.16) при решении задачи в условии пренебрежения упругими деформациями следует из свойств полученного решения (напряжения не зависят от параметра фазового состава  $q$ , а, значит, речь идет о прямом превращении из полностью аустенитного состояния под действием постоянных напряжений). Возникает вопрос о выполнении условий справедливости этого положения для решений, полученных с учетом упругих деформаций. Здесь напряжения уже меняются с ростом параметра фазового состава  $q$ . Поэтому проверялось условие пропорциональности изменения компонент девиатора напряжений. На рисунке 2.2 изображены графики зависимостей от  $q$  отношений  $\sigma_z'/\sigma_i$  (верхняя линия),  $\sigma_\phi'/\sigma_i$  (средняя линия) и  $\sigma_r'/\sigma_i$  (нижняя линия). Как видно, условие пропорциональности изменения компонент девиатора напряжений нарушается для малых значений  $q$ , однако эти нарушения незначительны, и в первом приближении ими можно пренебречь.

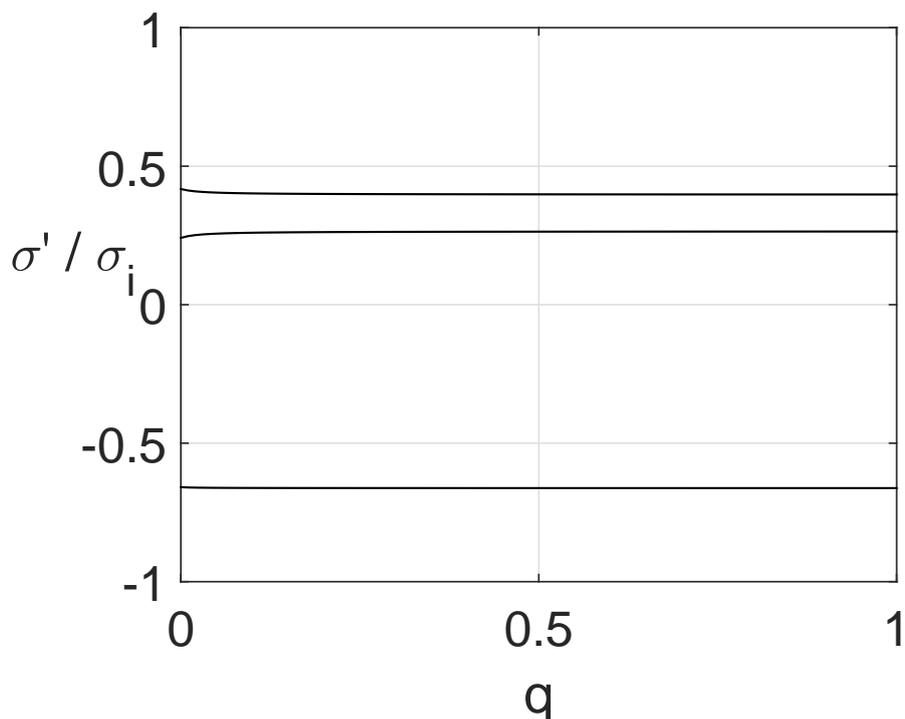


Рисунок 2.2 — Проверка выполнения условия пропорциональности девиаторов в положении об активных процессах пропорционального нагружения – графики зависимостей от  $q$  отношений  $\sigma'_z/\sigma_i$  (верхняя линия),  $\sigma'_\phi/\sigma_i$  (средняя линия) и  $\sigma'_r/\sigma_i$  (нижняя линия).

Результаты расчетов, проведенных с учетом упругих деформаций свидетельствуют о том, что интенсивность напряжений меняется при изменении  $q$ , как на внутренней поверхности цилиндра, так и на внешней (рисунок 2.3). В таком случае для применения ПАПН необходимо равенство функций распределения интенсивности микронапряжений  $F_1(\sigma_i)$  и  $F_2(\sigma_i)$ , которое может не выполняться.

Согласно кривой 2 на рисунке 2.3 а) интенсивность напряжений убывает с ростом  $q$  в случае когда внутреннее давление мало, а осевая сила достаточно большая, т.к. цилиндр испытывает растяжение вдоль оси. Действительно, построим соответствующие графики для кольцевых деформаций для внутренней и внешней стороны цилиндра (рисунок 2.4). Как видно из рисунка 2.4 цилиндр в случае, который соответствует кривой 2, вместо увеличения внутреннего радиуса испытывает продольное растяжение. В случае кривых 1 и 3, цилиндр испытывает увеличение внутреннего диаметра, но как видно из рисунка 2.3 б), на внешней стороне интенсивность напряжений убывает с ростом  $q$ , т.е. присутствует разгрузка. Таким образом, условия положения об активных процессах

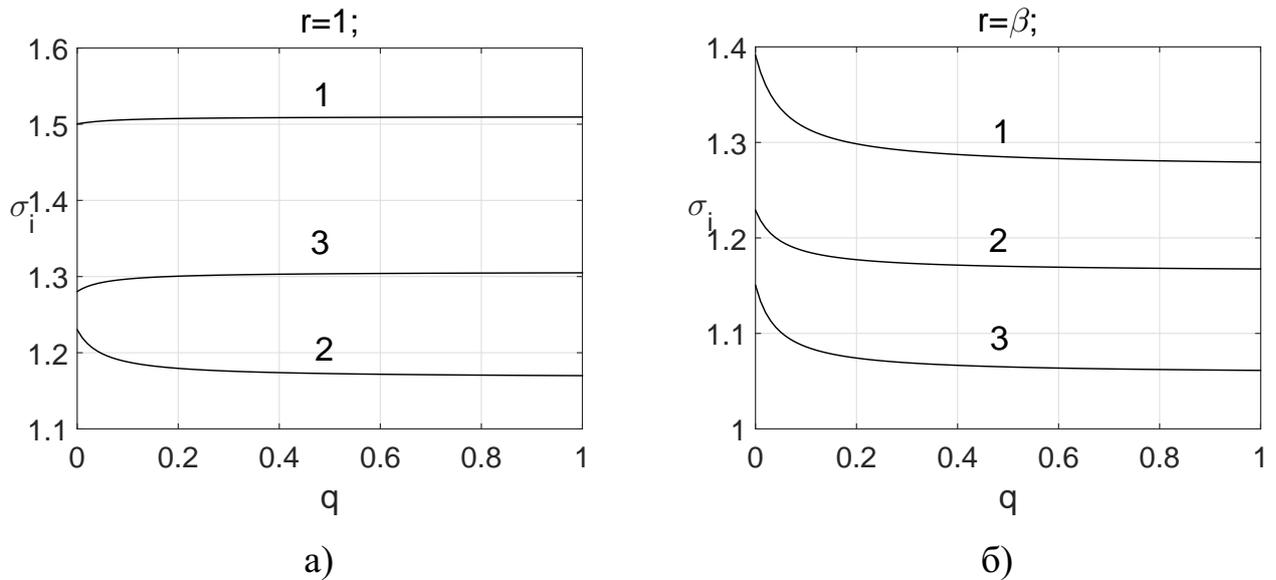


Рисунок 2.3 — Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от  $q$  для цилиндра с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  а) на внутренней и б) на внешней стороне. Кривая 1 соответствует  $P = 1$ ,  $p_a = 0.1$ , кривая 2 –  $P = 0.8$ ,  $p_a = 0.01$ , кривая 3 –  $P = 0.8$ ,  $p_a = 0.1$ ).

пропорционального нагружения в случае постановки с учетом упругих деформации не выполняются. И, для решения задачи с учетом упругих деформаций, корректно говорить о том, что оно получено в рамках определяющих уравнений в форме конечных соотношений (1.16), не связывая их с уравнениями в приращениях (1.2)-(1.6).

### 2.3.1 Случай внешнего давления

Одна из главных целей данной работы – моделирование процесса «раздачи» муфты в классическом понимании, т.е. когда муфта из СПФ насаживается на внешнюю сторону упругого трубопровода. На самом деле, на основании полученной системы можно смоделировать процесс «раздачи» муфты за счет внешнего давления. Такая муфта может применяться для последующего образования ТМС при установке на внутреннюю сторону упругого трубопровода, когда установка с внешней стороны не представляется возможной.

Ниже на рисунке 2.5 представлены графики зависимости напряжений от радиальной компоненты  $r$  для толстостенного цилиндра под действием внутрен-

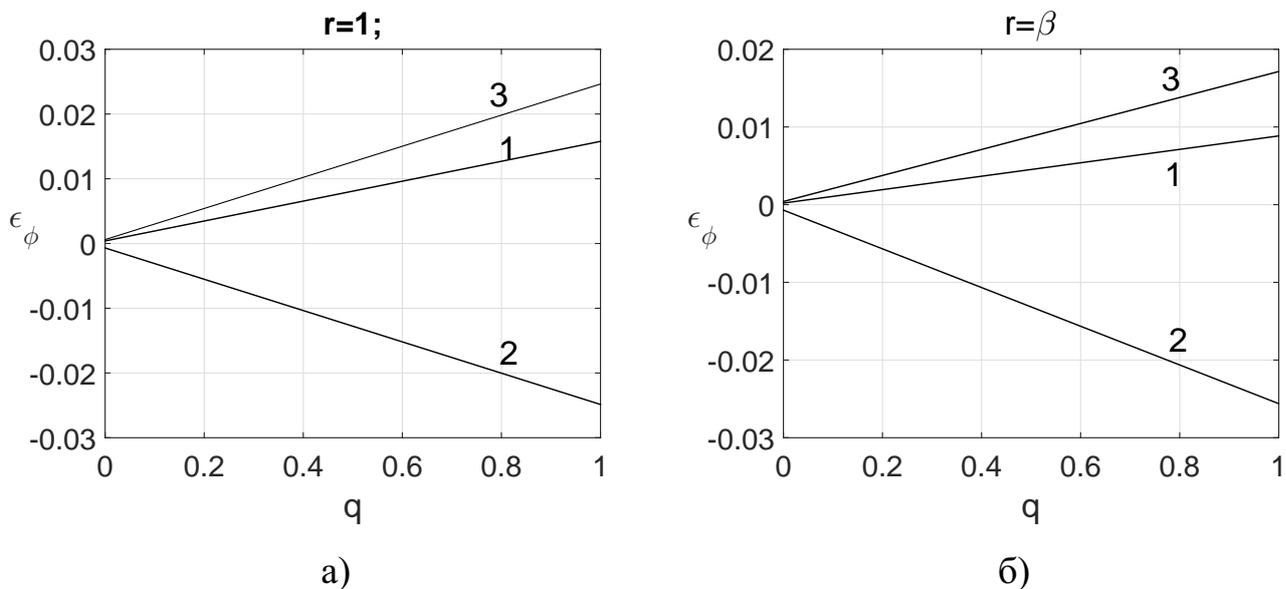


Рисунок 2.4 — Зависимость кольцевых деформаций  $\epsilon_\phi$  от  $q$  для цилиндра с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  а) на внутренней и б) на внешней стороне. Кривая 1 соответствует  $P = 1$ ,  $p_a = 0.1$ , кривая 2 —  $P = 0.8$ ,  $p_a = 0.01$ , кривая 3 —  $P = 0.8$ ,  $p_a = 0.1$ ).

него и внешнего давления. Кривые для осевого напряжения  $\sigma_z$  в обоих случаях

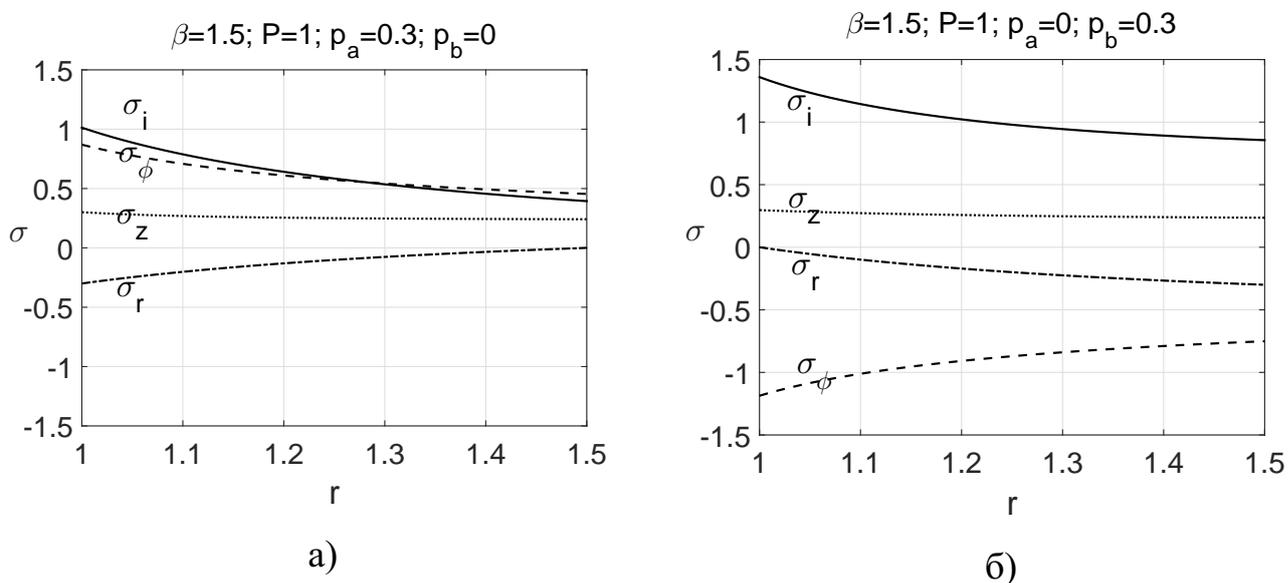


Рисунок 2.5 — Сравнение зависимости напряжений ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_z$  и  $\sigma_i$ ) от радиальной компоненты  $r$  в случае внешнего а) и внутреннего б) давлений.

ведут себя одинаково — убывают с ростом радиуса. Тем не менее, они не являются идентичными. Как видно, в случае внешнего давления интенсивность напряжений выше, что незамедлительно сказывается на поле температур. На рисунке 2.6 представлены графики зависимости температуры  $T$  от параметра фазового состава  $q$  для двух случаев, рассмотренных выше. Три кривые на каждом

графике соответствуют трем сечениям: внутреннему, срединному и внешнему. Как видно, за счет того, что интенсивность напряжений во втором случае (когда приложено внешнее давление) больше, температуры также оказываются выше во втором случае.

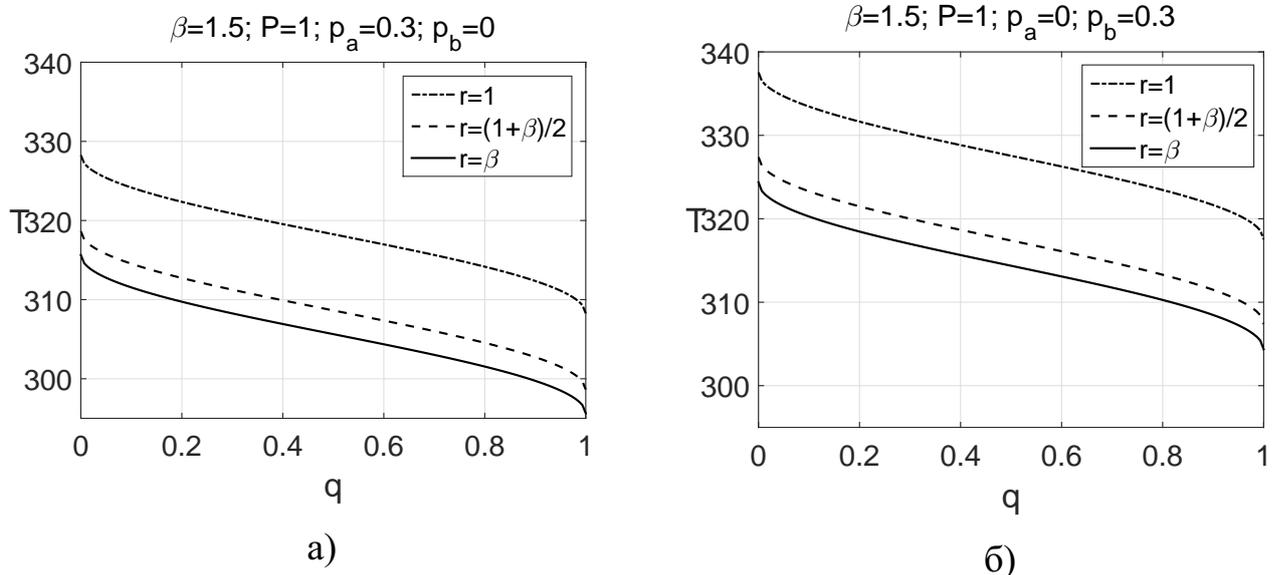


Рисунок 2.6 — Сравнение зависимости температур  $T$  от параметра фазового состава  $q$  в случае внутреннего а) и внешнего б) давлений для внутреннего, срединного и внешнего сечений.

Соответствующие температурные кривые, но в зависимости от радиальной компоненты  $r$  для начала, середины и конца фазового перехода представлены на рисунке 2.7. Как видно из рисунков 2.6 и 2.7 кривые для температур подобны и могут быть получены одна из другой сдвигом по оси ординат.

### 2.3.2 Сравнение постановок с учетом и без учета упругих деформаций

Преимущество рассмотрения задачи в постановке без упругих деформаций в том, что решение в такой постановке является точным аналитическим, а компьютерное время для его нахождения в десятки раз меньше в сравнении с постановкой с учетом упругих деформаций.

Здесь и далее мы будем рассматривать решения для цилиндра под действием внутреннего давления. На рисунке (2.8) представлены графики зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с

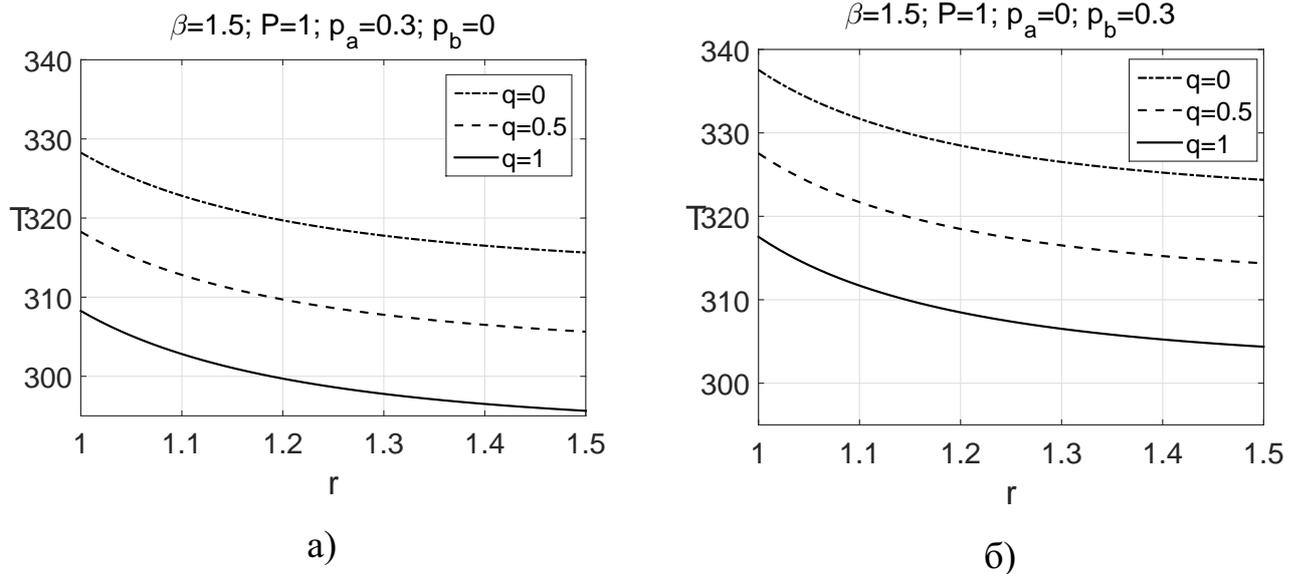


Рисунок 2.7 — Сравнение зависимости температур  $T$  от радиальной компоненты  $r$  в случае внутреннего а) и внешнего б) давлений для внутреннего, срединного и внешнего сечений.

учетом и без учета упругих деформаций в случае разных значений параметра фазового состава  $q$  для разных граничных условий в случае цилиндра с толщиной  $\beta = 1.1$  (граничные условия подобраны так, чтобы были примеры кривых как для маленьких нагрузок ( $p_a = 0.05$ ,  $P = 0.8$ ), так и для больших ( $p_a = 0.13$ ,  $P = 1$ ) (понятие маленькие и большие нагрузки условное и определяется по отношению к предельным нагрузкам, о которых будет рассказано позже). Как видно из графиков кривая без учета упругих деформаций практически не отличается от кривых с учетом упругих деформаций в конце прямого превращения (т.е. для  $q > 0.5$ ) в независимости от приложенных нагрузок. В то время как в начале прямого превращения разница между кривыми наиболее различима и тем больше, чем выше нагрузки.

Кроме того, на всех графиках, что особенно видно для больших нагрузок, значения кольцевых напряжений в конце прямого превращения ( $q = 1$ ) несколько выше кольцевых напряжений в середине прямого перехода ( $q = 0.5$ ) на внутренней стороне цилиндра и меньше на внешней стороне. Для лучшей иллюстрации построим аналогичные графики для кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  но в зависимости от параметра фазового состава  $q$  для разных сечений цилиндра (внешнего, срединного и внутреннего) – рисунок 2.9. Из графиков на рисунке 2.9 видно, что в начале фазового перехода ( $q = 0$ ) кольцевые напряжения на внутренней стороне возрастают, а на внешней – убывают, что сказывается на

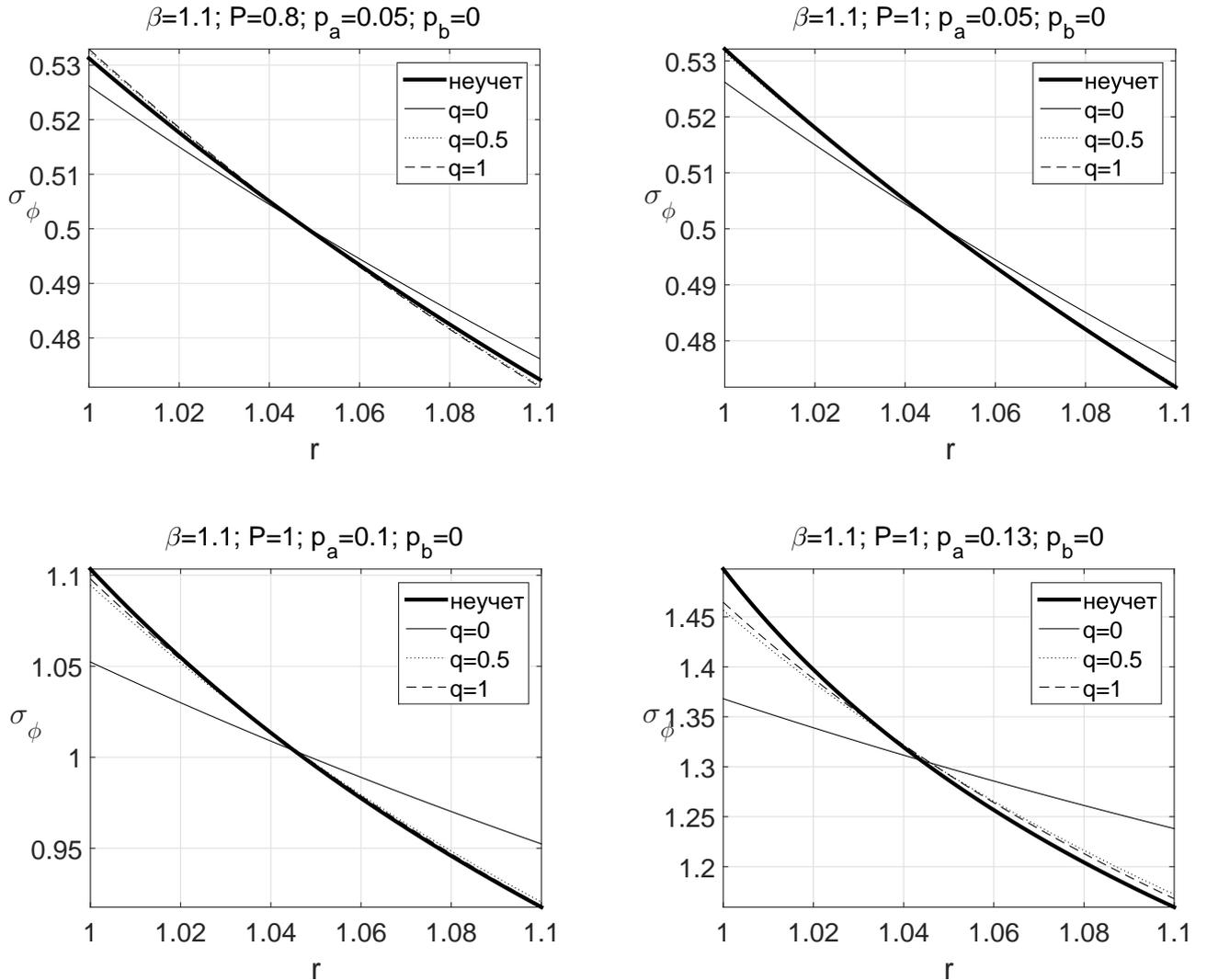


Рисунок 2.8 – Сравнение зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета (толстые кривые) упругих деформаций. Три кривые для постановки с учетом упругих деформаций соответствуют началу, середине и концу фазового перехода. В случае  $\beta = 1.1; P = 1; p_a = 0.05$  все кривые, за исключением  $q = 0$ , практически неразличимы в масштабах рисунка

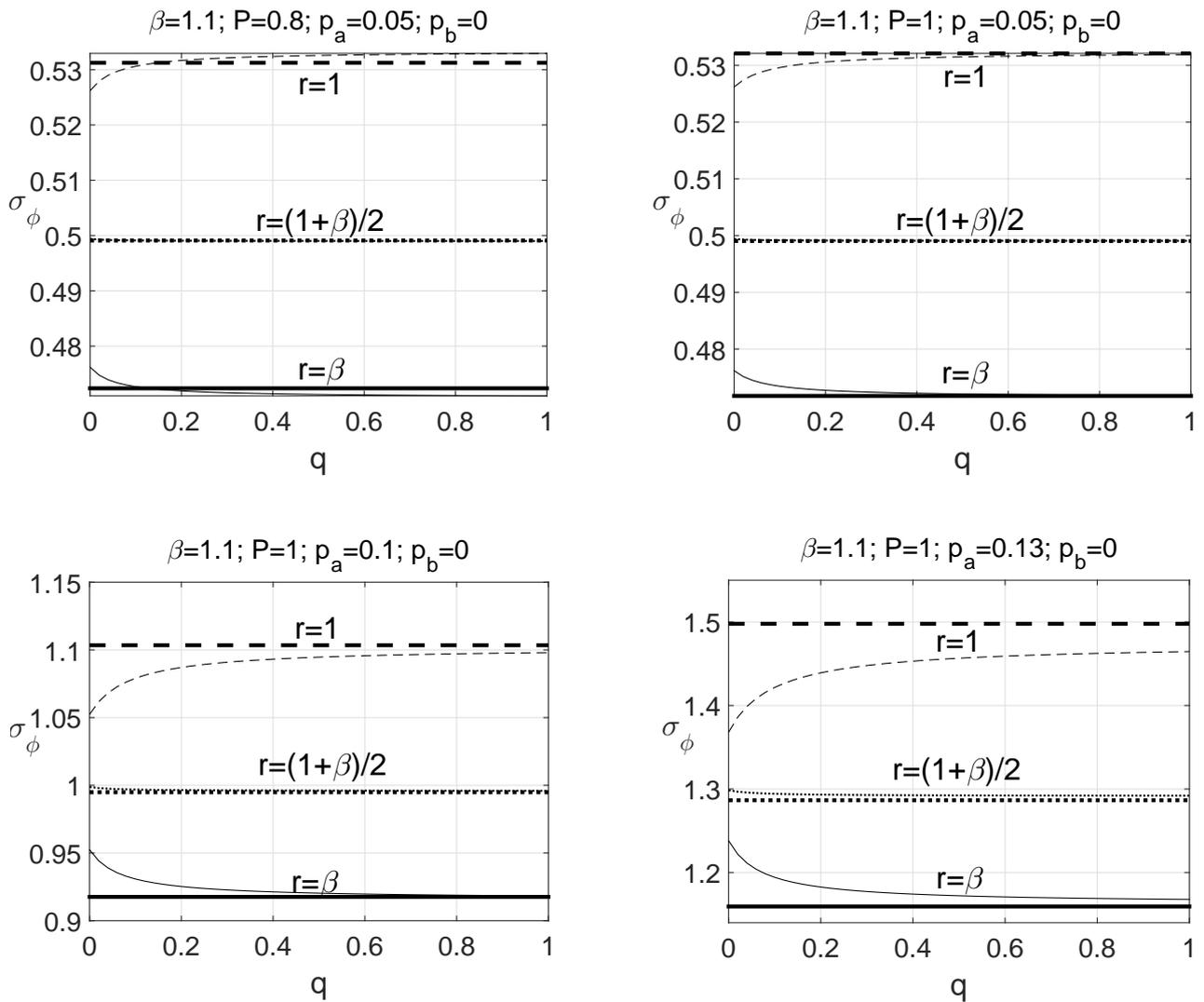


Рисунок 2.9 — Сравнение зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета (толстые кривые) упругих деформаций на трех сечениях цилиндра: внутреннем, срединном и внешнем. Кривые на срединном сечении практически неразличимы в масштабах рисунка.

интенсивности напряжений, которая, как было показано на рисунке 2.3, убывает на внешней стороне цилиндра во время прямого превращения и тем самым не позволяет применять положение об активных процессах пропорционального нагружения. Кроме того, разница между кривыми с учетом и без учета упругих деформаций тем выше, чем выше приложенные нагрузки и особенно заметна в конце прямого превращения. В случае высоких нагрузок кольцевые напряжения на внутренней стороне цилиндра в постановке без учета упругих деформаций всегда превосходят кольцевые напряжения с учетом упругих деформаций.

Построим соответствующие графики для зависимости радиальных деформаций  $\varepsilon_r$  от радиальной компоненты  $r$  (рисунок 2.10). Толстые кривые соот-

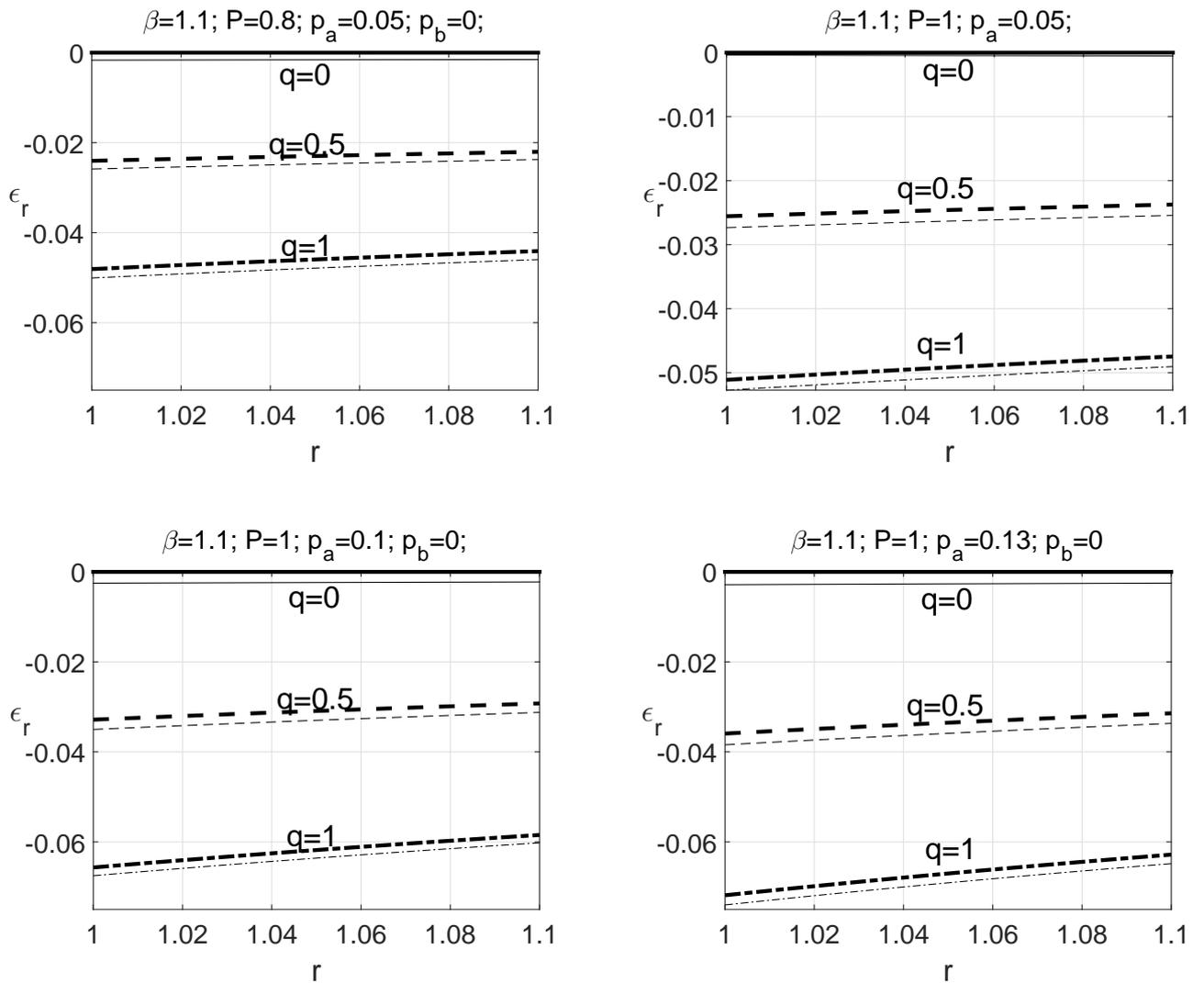


Рисунок 2.10 — Сравнение зависимости радиальных деформаций  $\epsilon_r$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета упругих деформаций (толстые кривые) для разных значений  $q$ . В случае  $\beta = 1.1; P = 1; p_a = 0.05$ ; кривые для двух постановок при  $q = 0$  практически неразличимы в масштабах рисунка.

ветствуют постановке с неучетом упругих деформаций, тонкие – с учетом. Как следует из рисунков, абсолютные значения радиальных деформаций для случая учета упругих деформаций всегда превосходят соответствующие значения, построенные без учета упругих деформаций. Тем не менее, разница для двух постановок между радиальными деформациями, приведенными на рисунке 2.10, составляет не более 3%.

Графики зависимости  $\epsilon_r$  от  $q$  для разных сечений цилиндра строить смысла не имеет, ввиду близости кривых друг к другу, поэтому приведем графики зависимости деформаций от  $q$  для внутреннего сечения цилиндра  $r = 1$  (рисунок 2.11). Как видно из рисунка интенсивность деформаций в постановке с уче-

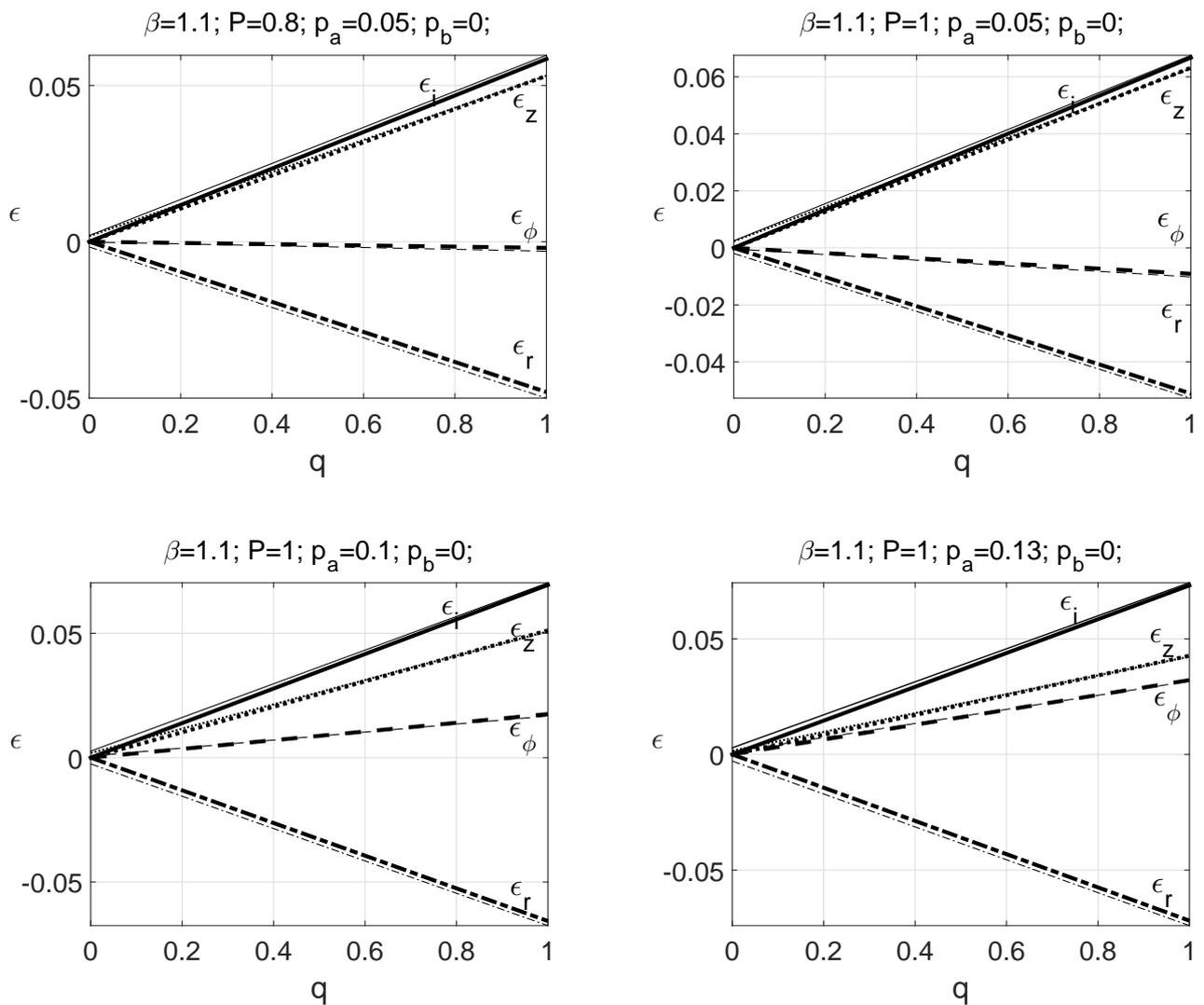


Рисунок 2.11 — Сравнение зависимости деформаций (радиальных  $\epsilon_r$ , кольцевых  $\epsilon_\phi$ , осевых  $\epsilon_z$  и интенсивности деформаций  $\epsilon_i$ ) от  $q$  для внутреннего сечения цилиндра  $r = 1$ . Тонкие кривые соответствуют постановке с учетом упругих деформаций, толстые кривые – без учета упругих деформаций. Кольцевые и осевые деформации практически всегда неотличимы в масштабах рисунка.

том упругих деформаций всегда превышает интенсивность деформаций в случае неучета упругих деформаций. Непараллельность соответствующих кривых для деформаций для двух постановок объясняется различным тангенсом (который в случае неучета упругих деформаций несколько больше) угла наклона линейной функции  $C(q)$  для обеих постановок. Непараллельность функций  $C(q)$  для двух постановок связана с переменностью модуля  $G(q)$  для задачи с учетом упругих деформаций.

Построим температурные поля для обеих постановок в зависимости от  $r$  (рисунок 2.12) и  $q$  (рисунок 2.13). Как видно из графиков, температуры для постановки без учета упругих деформаций выше температур для постановки с

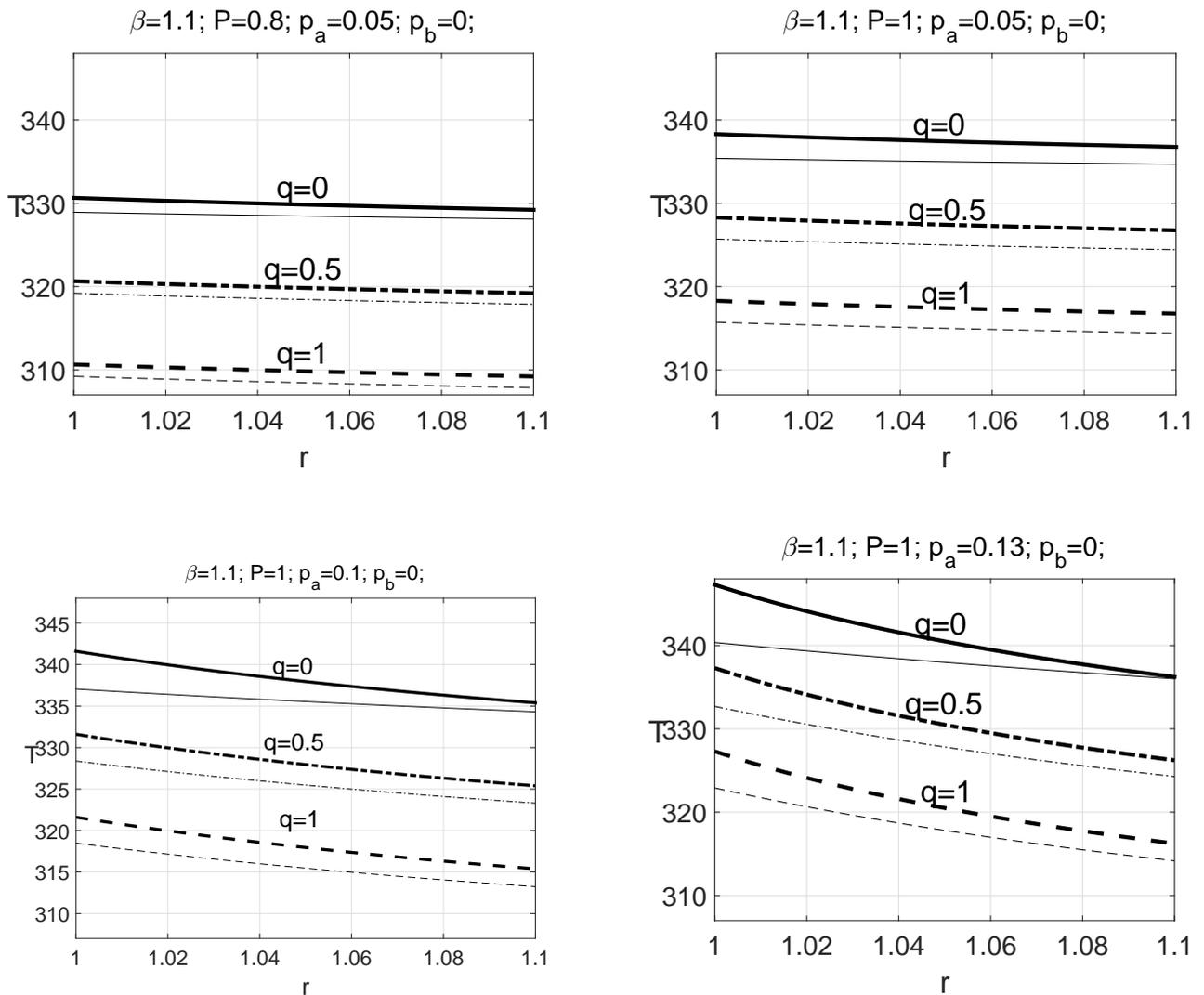


Рисунок 2.12 — Сравнение зависимости температур  $T$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета упругих деформаций (толстые кривые) для разных значений  $q$ .

учетом упругих деформаций. Особенно разница очевидна на внутренней стороне цилиндра. Кроме того, кривые без учета упругих деформации в зависимости от  $r$  имеют больший угол наклона к оси абсцисс, т.е. цилиндр в постановке без учета упругих деформаций испытывает больший перепад температур между внутренним и внешним сечениями. Как было показано выше температуры в задачах с такими постановками полностью определяются значением параметра  $q$  и интенсивностью напряжений, наибольший вклад в которую дают кольцевые напряжения. И, как и в случае кольцевых напряжений, наибольшая разница между двумя постановками для температур наблюдается при больших нагрузках на внутреннем сечении цилиндра.

Таким образом, разница в результатах между постановками с учетом (постановка №1) и без учета (постановка №2) упругих деформаций безусловно

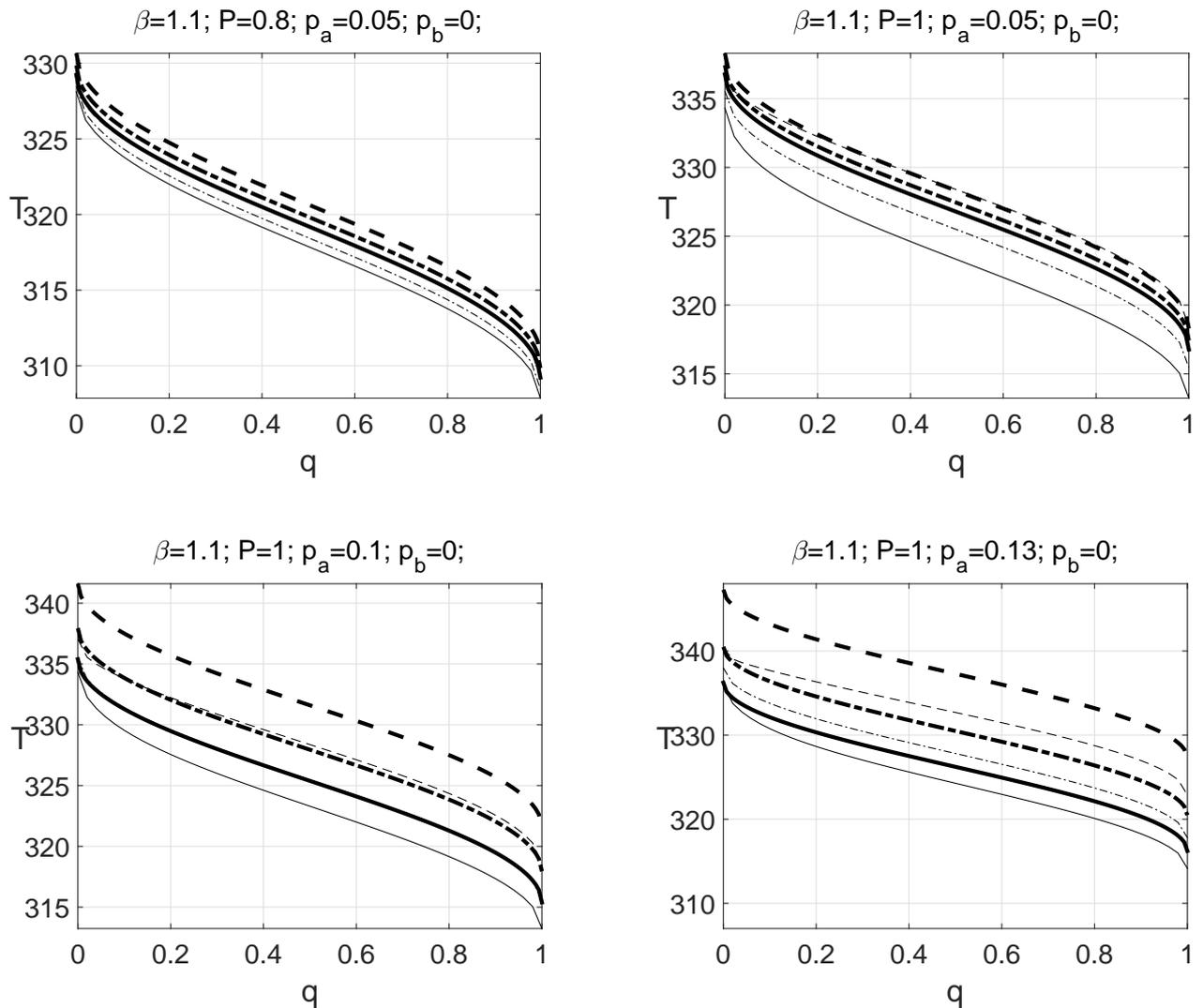


Рисунок 2.13 — Сравнение зависимости температур  $T$  от радиальной компоненты  $q$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета упругих деформаций (толстые кривые) для разных значений  $r$ . На каждом графике для каждой постановки сверху вниз идут кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра соответственно. В случае  $\beta = 1.1; P = 0.8; p_a = 0.05$  толстая кривая для  $r = \beta$  практически неразличима в масштабах рисунка с тонкой кривой для  $r = 1$ ; в случае  $\beta = 1.1; P = 1; p_a = 0.1$  толстая кривая для  $r = \beta$  практически неразличима в масштабах рисунка с тонкой кривой для  $r = (\beta + 1)/2$ .

присутствует и наиболее заметна на внутреннем сечении цилиндра. Для деформаций она не превышает 3%, для напряжений 10%, для температур не более 10 градусов. При этом если для напряжений разница тем больше, чем выше приложенные нагрузки, то для деформаций разница между постановками практически нечувствительна к величине приложенных нагрузок. Ввиду специфики поставленной задачи, где нужно рассчитать значения нагрузок и диапазон температур охлаждения для «раздачи» муфты до определенного диаметра, нас не столько интересуют напряжения (главное чтобы они не были предельными – о чем пойдет речь далее), сколько величина «раздачи» муфты и температуры. И если для деформаций разница в 3% приемлема, то для температур разница в 10 градусов слишком большая, учитывая, что для расстраиваемого NiTi температуры конца и начала прямого перехода без нагрузок отличаются на 20 градусов. Поэтому пользоваться решением без учета упругих деформаций имеет смысл, когда приложены низкие нагрузки, либо для подбора начального приближения для решения задачи с учетом упругих деформаций.

## 2.4 Плоская деформация

Рассмотрим постановку, в которой рассматривается задача о плоской деформации в цилиндре, т.е. осевая деформация тождественно равна нулю:

$$\varepsilon_z = \hat{\mu}(q) = 0 \quad (2.40)$$

Дополнительно считается, что объемный эффект реакции не учитывается, тогда из (2.10) имеем выражения для деформаций и их девиаторов:

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_r = -\frac{C(q)}{r^2}; \quad \varepsilon_\phi' = \varepsilon_\phi = \frac{C(q)}{r^2}; \quad \varepsilon_z' = \varepsilon_z = 0 \quad (2.41)$$

из последнего соотношения (2.41) с учетом (2.13) имеем:

$$\sigma_z' = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\phi}{2} \quad (2.42)$$

и выражение для интенсивности напряжений и девиаторов напряжений принимает вид:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_\phi - \sigma_r|; \quad \sigma_r' = \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{2} = -\sigma_\phi' \quad (2.43)$$

Тогда система (2.26)-(2.29) переписется в виде системы из двух уравнений:

$$\frac{|C(q)|}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho q F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{2\sqrt{3}G(q)} \quad (2.44)$$

$$\int_1^\beta \frac{\sigma_i}{r} dr = \frac{\sqrt{3}}{2} |p_a - p_b| \quad (2.45)$$

Система (2.44)-(2.45) представляет собой систему уравнений для задачи в постановке с плоской деформацией. Отметим, что из (2.43) следует пропорциональность девиаторов напряжений. Для проверки условия отсутствия разгрузки построим графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от параметра фазового состава  $q$  для внутреннего (рисунок 2.14 а)) и внешнего сечений 2.14 б)) цилиндра для разных значений внутреннего давления  $p_a$ . Как следует из рисунка

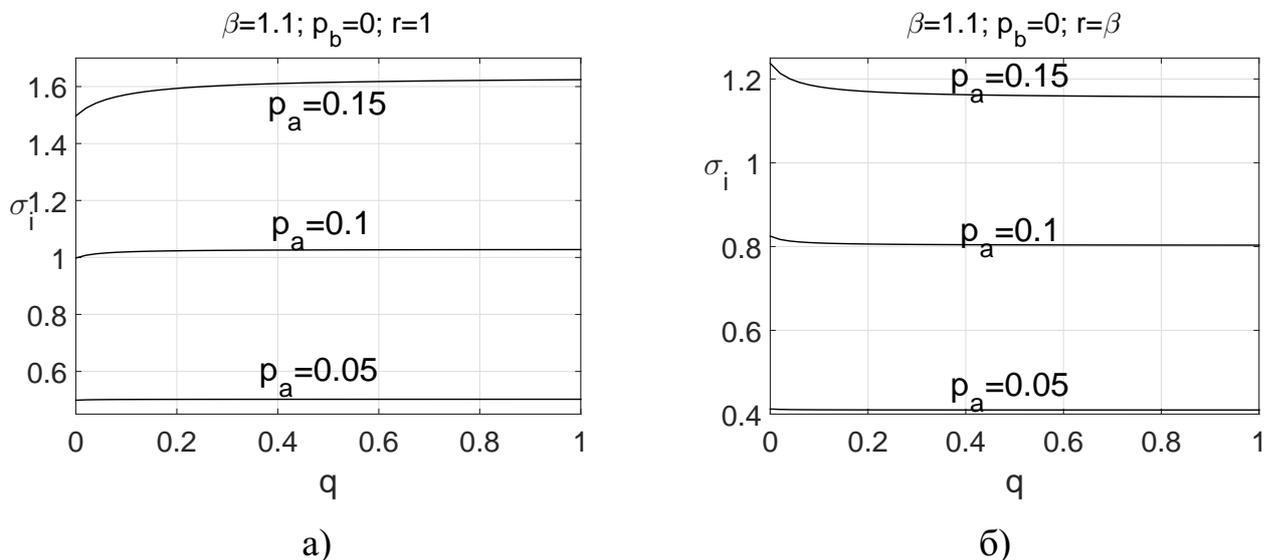


Рисунок 2.14 — Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от параметра фазового состава  $q$  для внутреннего а) и внешнего сечений б) для разных значений внутреннего давления  $p_a$ .

2.14) б) интенсивность напряжений на внешней стороне убывает с ростом  $q$ , т.е. как и в случае цилиндра с продольной силой положение об активных процессах пропорционального нагружения не выполнено.

**Неучет упругих деформаций.** В случае неучета упругих деформаций интенсивность напряжений из (2.44) примет вид:

$$\sigma_i = F^{-1} \left( \frac{|\lambda|\sqrt{3}}{r^2} \right) \quad (2.46)$$

где  $C(q)$  связано с  $\lambda$  по соотношению (2.32). Из системы (2.44)-(2.45) получаем:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{\beta} F^{-1} \left( \frac{|\lambda| \sqrt{3}}{r^2} \right) \frac{dr}{r} = |p_a - p_b| \quad (2.47)$$

Как видно из (2.46) и (2.47) значение интенсивности напряжений  $\sigma_i$  определяется лишь модулем разности внешнего  $p_a$  и внутреннего  $p_b$  давлений. Во-первых, отсюда следует, что интенсивность напряжений будет одинакова в обоих случаях: когда приложено только внутренне давление и когда приложено только внешнее давление (с точно таким же значением). Во-вторых, решение задачи для интенсивности напряжений в случае, когда приложены оба ненулевых давления можно свести к решению задачи, в которой одно из давлений надо положить равным нулю, а другое – равным модулю разности этих давлений. Впрочем, такой подход не приведет к убыстрению вычислений (равно как и к их замедлению). В случае если есть продольная сила данные соображения неверны.

#### 2.4.1 Сравнение решений для цилиндра в случае плоской деформации и в случае нулевой осевой силой

Интерес вызывает сравнение результатов, полученных при решении задач в двух постановках: плоская деформация и нулевая осевая сила. Результаты расчетов, приведённых ниже, выполнены для цилиндра под действием внутреннего давления с параметрами  $\beta = 1.5$ ,  $p_a = 0.3$ ,  $p_b = 0$  и  $P = 0$  (в случае второй постановки). На рисунке 2.15 а) представлены графики зависимости напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_z$  от радиальной компоненты  $r$ . Кроме того, для постановки с нулевой осевой силой построена зависимость для продольного напряжения  $\sigma_z$ . Кривые  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  для обеих постановок неразличимы в масштабах данного рисунка.

Получено, что интенсивность напряжений для постановки с нулевой осевой силой всегда не меньше интенсивности напряжений для постановки с плоской деформацией. Действительно, для случая нулевой осевой силы:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2} = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\phi)^2 + \sigma_r \sigma_\phi} \quad (2.48)$$

Сравнивая (2.48) с интенсивностью напряжений для случая плоской деформации (2.43) и проводя арифметические операции можно получить:

$$\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 \quad ? \quad - 2\sigma_r \sigma_\phi \quad (2.49)$$

Как видно левая часть (2.49) всегда не меньше правой. Кроме того, в случае постановки с нулевой продольной силой, интенсивность напряжений всегда превосходит кольцевое напряжений, что неверно для случая плоской деформации. Из рисунка 2.15 а) видно, что осевые напряжения  $\sigma_z$  отличны от нуля. Тем не

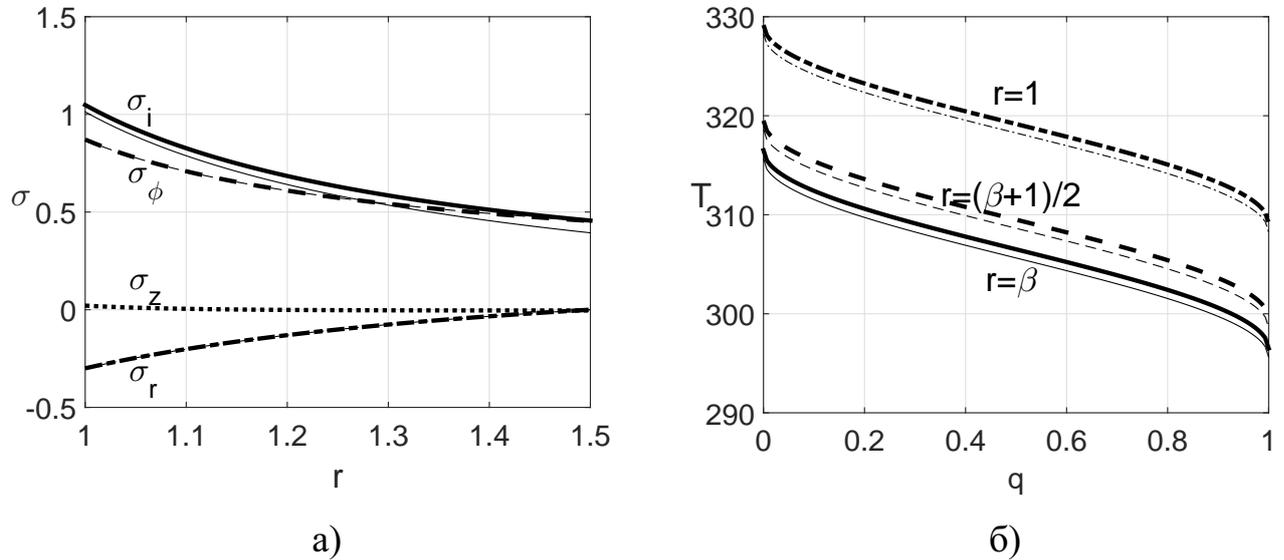


Рисунок 2.15 — Сравнение двух постановок: плоская деформация (тонкие кривые) и нулевая осевая сила (толстые кривые). Расчеты выполнены для цилиндра под действием внутреннего давления с параметрами  $\beta = 1.5$ ,  $p_a = 0.3$ ,  $p_b = 0$  и  $P = 0$  (в случае второй постановки). На рисунке а) зависимости напряжений от радиальной компоненты  $r$  (кривые для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  практически неразличимы в масштабах рисунка; кривая  $\sigma_z$  построена только для случая нулевой продольной силы); на б) зависимость температуры  $T$  от параметра фазового состава  $q$  для трех сечений: внутреннее, срединное и внешнее (кривые сверху вниз соответственно).

менее, из-за того, что получающаяся функция  $\sigma_z$  меняет знак – интеграл уравнения равновесия от  $\sigma_z$  получается равным нулю. На рисунке 2.15 б) представлены соответствующие графики зависимости температуры  $T$  от параметра фазового состава  $q$  для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра. Ввиду того, что температуры зависят от интенсивности напряжений, то экстремальные значения температуры как на внутренней стороне цилиндра, так и на внешней в постановке с осевой нулевой силой несколько выше, чем в постановке с плоской деформацией, но незначительно – порядка 0.3%.

Аналогичные графики (рисунок 2.16) можно построить для случая, когда вместо внутреннего давления приложено внешнее  $p_b = 0.3$ ,  $p_a = 0$ . Как и в

случае внутреннего давления кривые  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  для обеих постановок неразличимы в масштабе данного рисунка. Но разница между интенсивностями напряжений для двух постановок больше, чем в случае внутреннего давления – это связано с тем, что в случае нулевой осевой силы интенсивность напряжений для случая внешнего давления выше, чем для внутреннего, ввиду соотношения (2.48) (где первое слагаемое одинаковое для двух случаев, а второе – имеет разный знак), а в случае плоской деформации интенсивности напряжений равны для обоих случаев.

Несмотря на такую высокую разницу в интенсивностях напряжений – графики температуры  $T(q)$  на рисунке 2.16 б) для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра очень похожи, и экстремальные значения  $T$  для двух постановок отличаются не более чем на 2%.

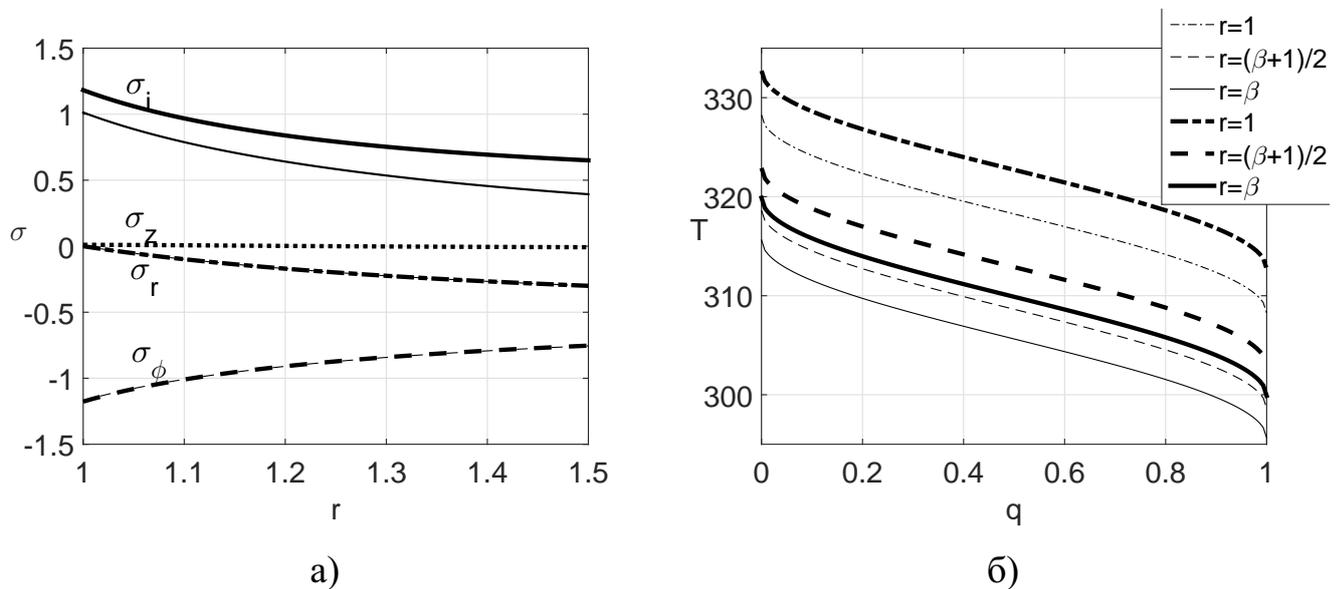


Рисунок 2.16 – Сравнение двух постановок: плоская деформация (тонкие кривые) и нулевая осевая сила (толстые кривые). Расчеты выполнены для цилиндра под действием внешнего давления с параметрами  $\beta = 1.5$ ,  $p_a = 0$ ,  $p_b = 0.3$  и  $P = 0$  (в случае второй постановки). На рисунке а) зависимости напряжений от радиальной компоненты  $r$  (кривые для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  практически неразличимы в масштабах рисунка; кривая  $\sigma_z$  построена только для случая нулевой продольной силы); на б) зависимость температуры  $T$  от параметра фазового состава  $q$  для трех сечений: внутреннее, срединное и внешнее (кривые сверху вниз соответственно).

Таким образом, различие между двумя постановками (с нулевой продольной силой и с плоской деформацией) не приводит к различным видам кривых

или к совершенно другим диапазонам значений. Наоборот, решения очень схожи, особенно для случая внутреннего давления (где максимальная разница между интенсивностями напряжений не превосходит 15%). В случае внешнего давления разница между интенсивностями напряжений на внешней стороне высокая, но это не приводит к значительным различиям для температурных кривых. Получено, что интенсивность напряжений в случае нулевой осевой силы всегда не меньше интенсивности напряжений в случае плоской деформации при прочих равных условиях.

## 2.5 Предельные условия

### 2.5.1 Случай действия продольной силы

Возникает вопрос о допустимых значениях нагрузок  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $P$  для трубы из СПФ. Исходя из двух уравнений равновесия в данной задаче удастся найти предельные нагрузки в случае действия  $p_a$  и  $P$ , (то есть когда  $p_b = 0$ ), или в случае действия  $p_b$  и  $P$ , (т.е. когда  $p_a = 0$ ). Известно, что для сохранения функциональных свойств СПФ, напряжения в этих материалах не должны превышать дислокационный предел текучести  $\sigma_s$ :

$$\sigma_i \leq s \quad (2.50)$$

где  $s = \sigma_s/\sigma_0$ . Поскольку левая часть первой формулы (2.26) монотонно возрастает с ростом  $\sigma_i$ , то условие (2.50) на основании (2.26) можно записать в виде

$$\frac{3C^2(q)}{r^4} + \frac{9}{4}\mu^2(q) \leq \frac{9}{4}\gamma^2(s,q), \quad \gamma(s,q) = \rho q F(s) + \frac{s}{3G(q)} \quad (2.51)$$

Правая часть неравенства (2.50) от  $r$  не зависит, а левая убывает с ростом  $r$ . Поэтому надо требовать выполнения (2.50) для минимально возможного значения  $r$ , т.е. для  $r = 1$ . В результате область допустимых значений на плоскости  $(C, \mu)$  для фиксированного значения  $q$  занимает площадь эллипса с уравнением

$$\frac{C^2(q)}{(0.5\sqrt{3}\gamma(s,q))^2} + \frac{\mu^2(q)}{\gamma^2(s,q)} = 1 \quad (2.52)$$

Множество предельных значений  $C(q)$  и  $\mu(q)$  можно представить в виде

$$C(q) = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma(s,q) \cos \chi, \quad \mu(q) = \gamma(s,q) \sin \chi \quad (2.53)$$

где  $\chi$ - произвольное значение в интервале  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ . Подставляя функции  $C(q)$  и  $\mu(q)$  (2.53) в (2.26) для фиксированной величины  $q$  и значений  $r \in [1, \beta]$ , можно найти функцию  $\theta(q,r)$  (2.26) с параметрами  $s$  и  $\chi$ :

$$\theta(r,q) = \frac{3}{2}\gamma(s,q)\xi(r), \quad \xi(r) = \sqrt{\sin^2\chi + r^{-4}\cos^2\chi} \quad (2.54)$$

После этого решение уравнения (2.26) дает для каждой пары значений  $(q, \chi)$  функцию  $\sigma_i = \sigma_i(r, q)$ . Пусть сначала  $p_b = 0$ . Подстановка этой функции в левую часть соотношения (2.27) и интегрирование по  $r$  дает предельное значение  $p_a(q, \chi)$ . Величину давления  $p_a$  естественно считать положительной. Поэтому эти вычисления следует проводить для  $\chi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , где, согласно (2.53)  $C(q) \geq 0$ . Значение  $P = P(q, \chi)$  определяется по формуле (2.28).

Если же рассматривается задача о прямом превращении под действием внешнего давления  $p_b \geq 0$  при нулевом внутреннем  $p_a = 0$ , то предельное значение  $p_b(q, \chi)$  определится из того же соотношения (2.27), причем здесь имеет смысл вести расчеты для  $\chi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ , где  $C(q) \leq 0$ . Значение  $P = P(q, \chi)$  определяется по формуле (2.28), в которой следует положить  $p_a = 0$ .

Получающиеся таким образом соотношения  $p_a = p_a(q, \chi)$ ,  $P = P(q, \chi)$  или  $p_b = p_b(q, \chi)$ ,  $P = P(q, \chi)$  для каждого значения  $q$  представляют собой параметрические уравнения предельной кривой на плоскостях  $(p_a, P)$  или  $(p_b, P)$ . Предельная кривая для всего процесса должна быть внутренней огибающей для всей совокупности кривых, построенных для  $q \in [0, 1]$ . Расчеты показывают, что кривые для больших значений  $q$  содержатся внутри кривых, соответствующие меньшим значениям  $q$ . Поэтому реальная предельная кривая соответствует  $q = 1$ . На рисунке 2.17 толстыми линиями изображены предельные кривые, соответствующие  $\beta = 1.2$ ,  $q = 1$ ,  $p_b = 0$  для значений  $s = 0.5, 1, 2, 3$ .

Формы предельных кривых для случаев действия внутреннего  $p_a$  или внешнего  $p_b$  давления различаются. Этот факт иллюстрируется на 2.18, где изображены 3 пары предельных кривых, соответствующих  $\beta = 1.4$  (пара №1),  $\beta = 1.2$  (пара №2) и  $\beta = 1.1$  (пара №3). Верхняя кривая каждой пары соответствует действию внутреннего давления, нижняя - действию внешнего давления. Решение получено для  $s = 1$ ,  $q = 1$ . Как видно, линии, соответствующие внутреннему и внешнему давлению несимметричны относительно оси  $P = 0$  (точки

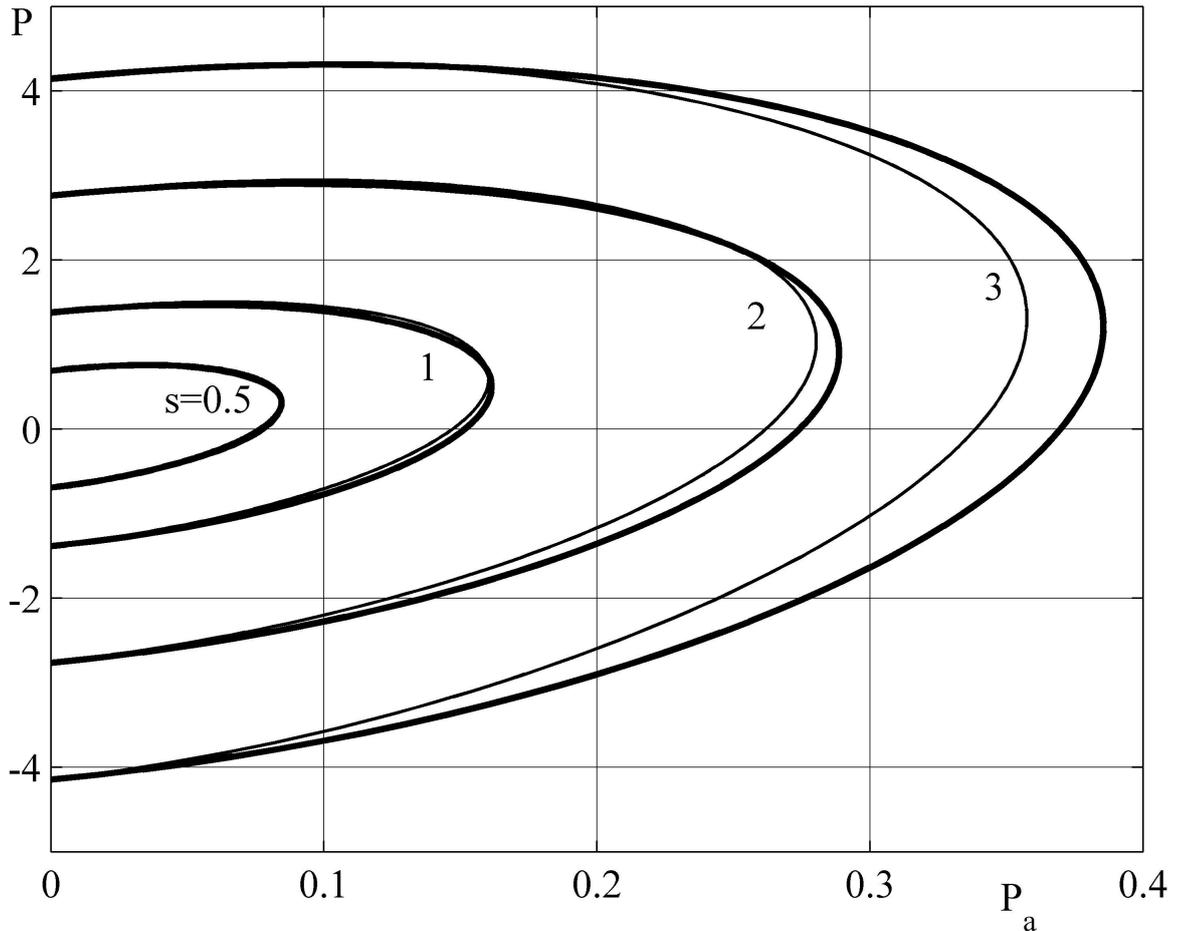


Рисунок 2.17 — Предельные кривые для  $\beta = 1.2$ ,  $q = 1$ ,  $p_b = 0$  для значений  $s = 0.5, 1, 2, 3$ . Толстые линии соответствуют случаю учета упругих деформаций, тонкие - случаю неучета упругих деформаций.

их пересечения смещены вниз с этой оси), причем эта несимметрия возрастает с ростом толщины трубы. Возможность потери устойчивости трубы из СПФ под действием внешнего давления или осевой сжимающей силы в данной работе не рассматривается.

В случае пренебрежения упругими деформациями построение предельных кривых упрощается, поскольку при этом не надо численно решать алгебраических уравнений и величину  $q$  можно исключить из рассмотрения. Необходимые и достаточные условия выполнения предельного ограничения (2.50) в этом случае имеют вид:

$$\sqrt{3C^2(q) + \frac{9}{4}\mu^2(q)} = \rho q F(s) \quad (2.55)$$

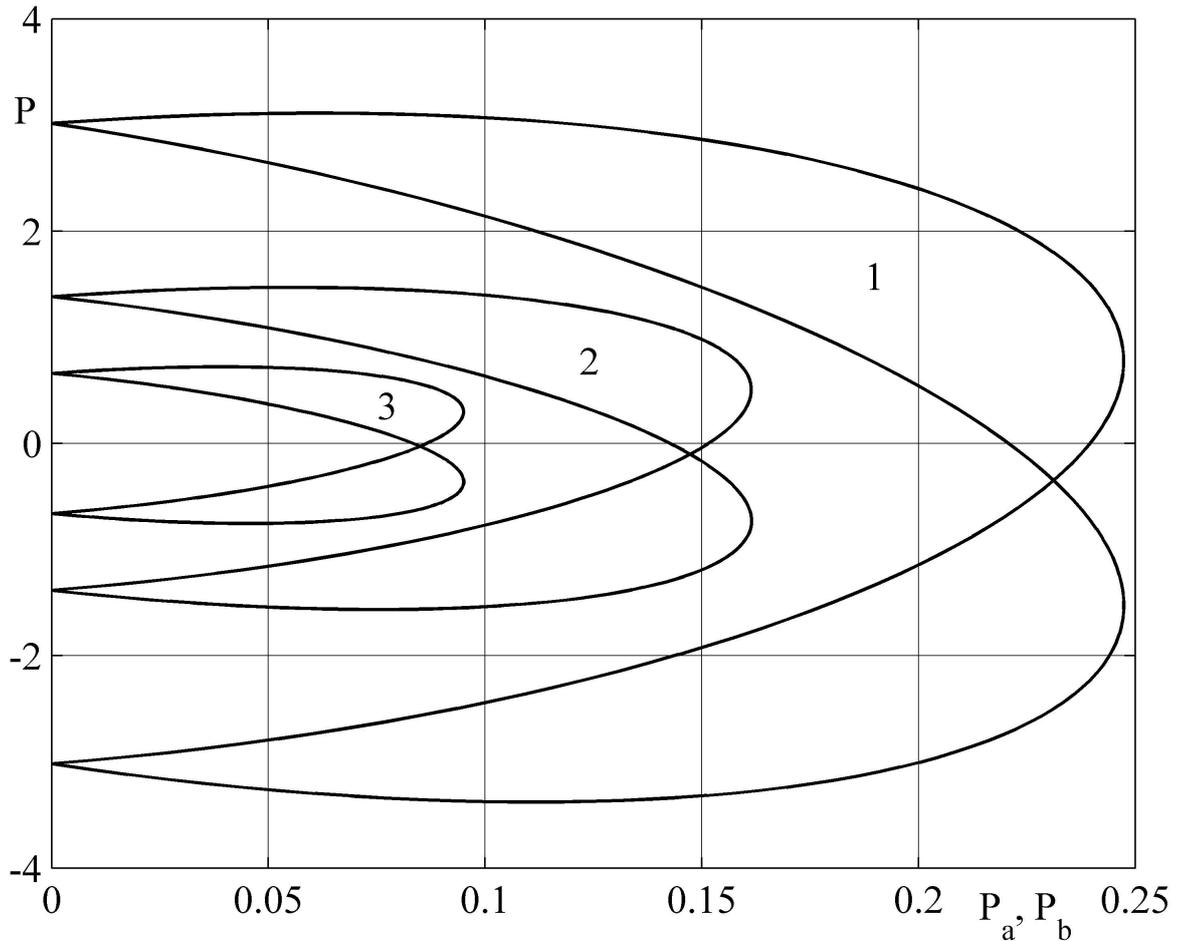


Рисунок 2.18 – Формы предельных кривых для случаев действия внутреннего  $p_a$  и внешнего  $p_b$  давления:  $\beta = 1.4$  (пара №1),  $\beta = 1.2$  (пара №2) и  $\beta = 1.1$  (пара №3). Верхняя кривая каждой пары соответствует действию внутреннего давления, нижняя - действию внешнего давления.

или с учетом (2.32)

$$\sqrt{3\lambda^2 + \frac{9}{4}\delta^2} = F(s) \quad (2.56)$$

Условие (2.56) выполнится, если принять

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}F(s) \cos \chi, \quad \delta = \frac{2}{3}F(s) \sin \chi, \quad \chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (2.57)$$

Подставляя (2.57) в (2.33) получаем

$$\theta(r) = F(s)\xi(r) \quad (2.58)$$

Подставляя (2.58) в (2.35) находим

$$\sigma_i(s, r) = F^{-1} [F(s)\xi(r)] \quad (2.59)$$

Подстановка (2.57), (2.58) и (2.59) в формулу (2.36) при  $p_b = 0$  дает

$$p_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \chi \int_1^\beta \frac{F^{-1} [F(s)\xi(r)]}{\xi(r)} \frac{dr}{r^3} \quad (2.60)$$

Подставляя в (2.37) выражение (2.60) и приведенные выше формулы для  $\mu(q)$ ,  $C(q)$ ,  $\theta(r,q)$ ,  $\sigma_i$  для  $P$ , получаем

$$P = 2\pi \left\{ \int_1^\beta \left\{ p_a(s,r) + \frac{\sin \chi + \cos \chi / (\sqrt{3}r^2)}{\xi(r)} F^{-1} [F(s)\xi(r)] \right\} r dr - \frac{\beta^2 - 1}{2} p_a \right\} \quad (2.61)$$

Согласно приведенным параметрическим уравнениям предельных кривых (2.60), (2.61) их форма не зависит от параметра материала  $\rho$  и в безразмерных координатах  $(p_a, P)$  определяется только значениями безразмерных величин  $\beta$  и  $s$ .

Тонкими линиями на рисунке 2.17 изображены предельные кривые, построенные по формулам (2.60), (2.61) без учета упругих деформаций для тех же, что и для толстых кривых, значений всех параметров. Как видно, предельные кривые, построенные с учетом и без учета упругих деформаций, различаются мало, особенно для малых значений  $s$  (для  $s = 0.5$  различия между этими кривыми в масштабах рисунка 2.17 вообще не заметны).

Величина функции распределения  $F(s)$  монотонно возрастает с ростом  $s$  и стремится к 1 при  $s \rightarrow \infty$ . Подставляя в (2.59), (2.60), (2.61) максимальное значение  $F(s) = 1$ , можно получить предельные значения величин  $P_a$ ,  $P$ , соответствующие критерию исчерпания возможности деформирования СПФ по фазово-структурному механизму. В этом случае, согласно (2.59), (2.60), (2.61) будет:

$$\sigma_i(\infty, r) = F^{-1} [\xi(r)] \quad (2.62)$$

$$p_a(\infty, \beta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \chi \int_1^\beta \frac{F^{-1} [\xi(r)]}{\xi(r)} \frac{dr}{r^3} \quad (2.63)$$

$$P = 2\pi \int_1^\beta \left\{ p_a(\infty, r) + \frac{\sin \chi + \cos \chi / (\sqrt{3}r^2)}{\xi(r)} F^{-1} [\xi(r)] \right\} r dr - \pi(\beta^2 - 1)p_a(\infty, \beta) \quad (2.64)$$

На внутренней поверхности цилиндра, т.е. при  $r = 1$  получается  $\sigma_i(\infty, 1) = \infty$ , т.е. интенсивность напряжений обращается в бесконечность. Легко видеть, что интенсивность деформаций на той же поверхности будет при этом равна  $\rho$ , т.е. максимальному возможному значению для фазово-структурной деформации. Интеграл в (2.63) является несобственным (подынтегральная функция стремится к бесконечности при  $r \rightarrow 1$ ). Тем не менее, для всех значений  $\chi$  он сходится, давая конечное значение величины  $p_a(\infty, \beta)$ .

Интеграл, входящий в выражение для  $P$  (2.64) также является несобственным на нижнем пределе. Он сходится для всех значений  $\chi$ , кроме  $\chi = \pi/2$  и  $\chi = 3\pi/2$ . Для  $\chi \rightarrow \pi/2$  (одноосное растяжение цилиндра) согласно (2.63)  $P \rightarrow +\infty$ , а для  $\chi \rightarrow 3\pi/2$  (одноосное сжатие) согласно (2.63) будет  $P \rightarrow -\infty$ . Ось  $P$  является вертикальной асимптотой для предельной кривой, соответствующей  $F(s) = 1$ . Предельные кривые для любого конечного значения  $s$  ограничены в том числе и в направлении оси  $P$  и находятся внутри предельной кривой для  $F(s) = 1$ . Этот факт иллюстрируется на рисунке 2.19, где приведены предельные кривые, полученные без учета упругих деформаций для  $\beta = 1.1$  и значений  $s = 1$  (кривая 1),  $s = 5$  (кривая 2),  $s = 10$  (кривая 3) и  $s = +\infty$  (кривая 4).

Интересно отметить, что в точке  $\chi = 0$ , соответствующей состоянию плоской деформации зависимость  $p_a$  от  $P$  имеет стационарное значение. Для небольших толщин  $\beta < 1.92$  это точка соответствует максимальному значению относительного увеличения внутреннего диаметра цилиндра при прямом превращении (см. кривая 4 на рисунке 2.19). Для больших толщин эта точка становится точкой локального минимума  $p_a$ , а максимального значения эта величина достигает при значениях  $P$  положительных или отрицательных, существенно превосходящих по модулю значение, необходимое для обеспечения условий плоской деформации.

### 2.5.2 Случай плоской деформации

Рассмотрим вопрос о предельных нагрузках для цилиндра в случае плоской деформации (материал считается несжимаемым). Аналогично приведенным

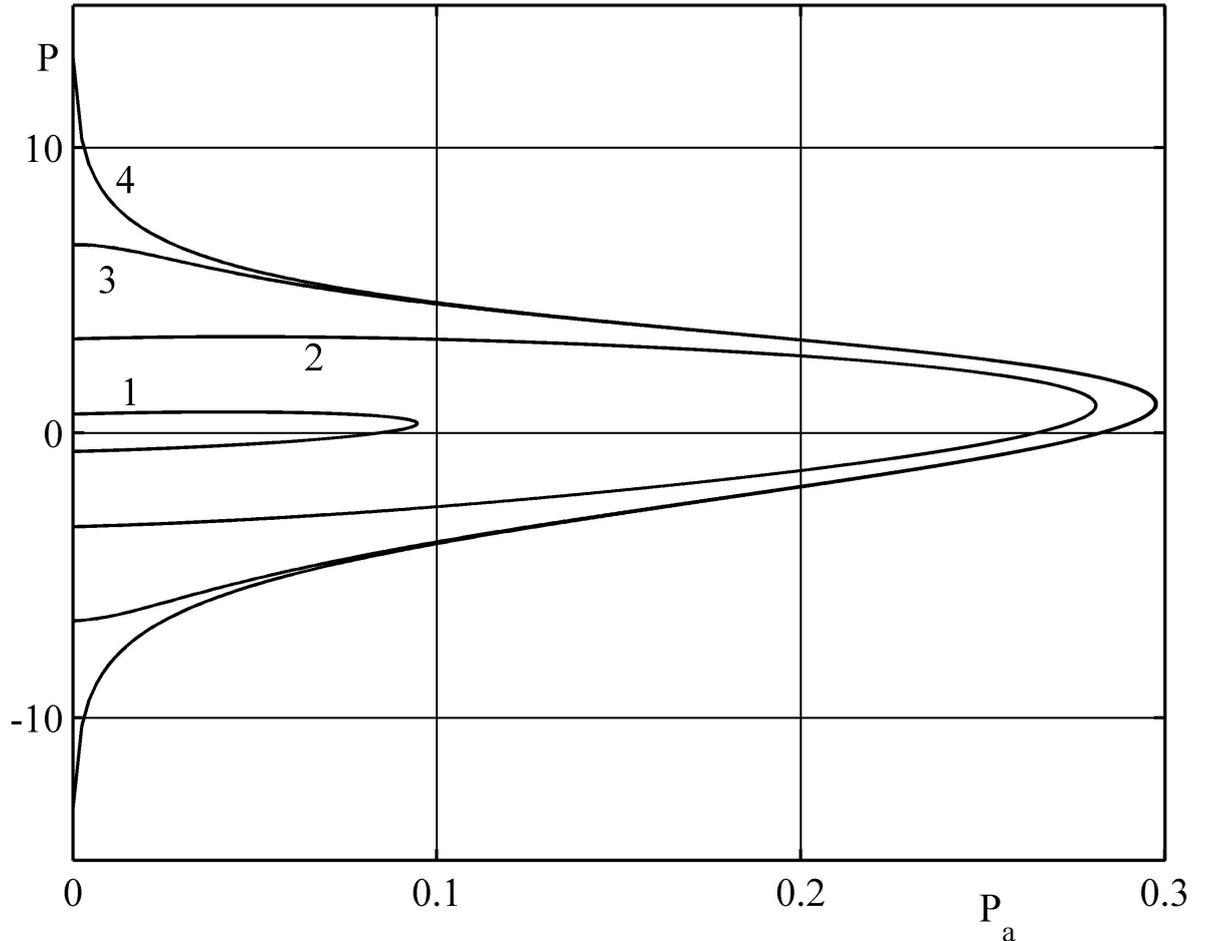


Рисунок 2.19 — Предельные кривые, полученные без учета упругих деформаций для  $\beta = 1.1$  и значений  $s = 1$  (кривая 1),  $s = 5$  (кривая 2),  $s = 10$  (кривая 3) и  $s = +\infty$  (кривая 4)

выше рассуждениям из (2.44) получим:

$$|C(q)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \rho q F(s) + \frac{s}{2\sqrt{3}G(q)} \quad (2.65)$$

Расчеты показывают, что максимальное значение интенсивности напряжений достигается при  $q = 1$ . В результате предельное значение  $C^*$  для функции  $C(q)$  в точке  $q = 1$  вычисляется по формуле:

$$|C^*| = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho F(s) + \frac{s}{2\sqrt{3}G_M} \quad (2.66)$$

Для определенности будем считать, что возможны варианты, когда действует только внутреннее или только внешнее давление.

**Неучет упругих деформаций.** В случае пренебрежения упругими деформациями из (2.66) с учетом (2.32) получим формулу для нахождения предельного

параметра  $\lambda^*$ :

$$|\lambda^*| = \frac{F(s)}{\sqrt{3}} \quad (2.67)$$

Значение предельного давления  $p^*$  (где  $p = p_a - p_b$ ) с учетом (2.47) и (2.67) может быть найдено по формуле:

$$|p^*| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^\beta F^{-1} \left( \frac{F(s)}{r^2} \right) \frac{dr}{r} \quad (2.68)$$

В силу монотонного возрастания как функции  $F$ , так и  $F^{-1}$  предельная нагрузка  $p^*$  монотонно возрастает с ростом  $s$ . Как видно из формулы предельные значения  $|p^*|$  для случая внешнего и случая внутреннего давления совпадают. Отметим, в случае если  $s \rightarrow \infty$ , то  $F(s) \rightarrow 1$  и из (1.16) следует, что:

$$\varepsilon_i = \rho q \quad (2.69)$$

и максимальное значение интенсивности деформаций  $\varepsilon_i^*$ , достигаемое при  $q = 1$ , равняется  $\rho$ , т.е. максимально возможной интенсивности кристаллографической деформации прямого превращения. Таким образом, при  $s \rightarrow \infty$  рассматривается деформационный критерий нахождения предельных нагрузок, при которых максимальная деформация не может превышать максимально возможную кристаллографическую деформацию.

На рисунке 2.20 а) представлены графики зависимости предельного давления  $p^*$  от относительной толщины  $\beta$  для разных значений предела текучести  $s$ . В случае больших  $\beta > 15$  графики будут выходить на горизонтальную асимптоту. Как видно из рисунка кривая для  $s = 3$  почти совпадает с кривой  $s = \infty$ . Отметим, однако, что для нагрузок  $s = \infty$  материал цилиндра в любом случае будет испытывать кроме фазово-структурных еще и обычные пластические деформации.

**Учет упругих деформаций.** В случае учета упругих деформаций функцию  $C^*(q)$  найти не удастся. Действительно, даже если аппроксимировать  $C^*(q)$  линейной функцией, то для проведения прямой нужно знать значение  $C^*(q)$  во второй точке, например  $C^*(0)$ , что не представляется возможным, т.к. интенсивность напряжений  $\sigma_i$  уже не будет равна пределу текучести  $s$ .

В то же время для нахождения  $p^*$  необязательно знать всю функцию  $C^*(q)$ , а достаточно знать ее значение в точке  $q = 1$ , которое суть формула (2.66). Воспользуемся обратным методом, будем решать задачу о прямом превращении в цилиндре для разных значений  $p$  до тех пор, пока интенсивность напряжений на

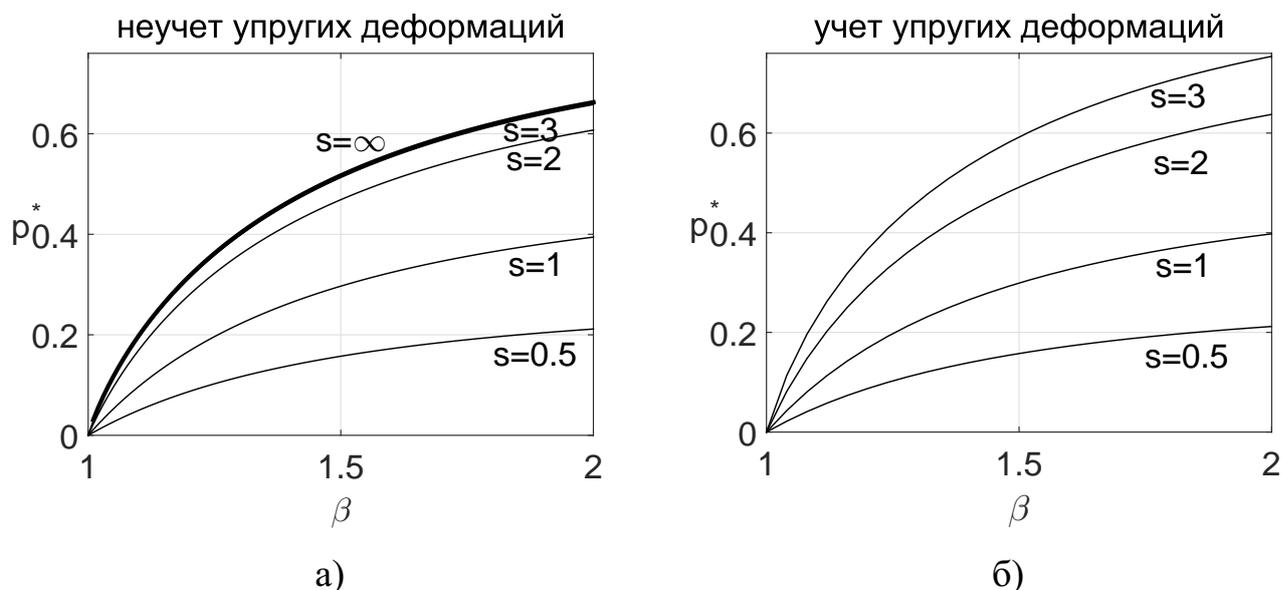


Рисунок 2.20 — Зависимость предельного давления  $p^*$  от относительной толщины  $\beta$  для разных значений предела текучести  $s$  в случае пренебрежения упругими деформациями а) (кривые для  $s = \infty$  и  $s = 3$  практически неразличимы в масштабах рисунка) и в случае учета упругих деформаций – б).

внутренней стороне сферы при  $q = 1$  не станет равной  $s$ , т.е. будет выполняться равенство:

$$C(1) = C^* \quad (2.70)$$

Отметим, что в отличие от случая пренебрежения упругими деформациями, в данном случае значение  $C^*$  сверху неограниченно и  $C^* \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ .

На рисунке 2.20 б) представлены графики зависимости предельного давления  $p^*$  от относительной толщины  $\beta$  для разных значений предела текучести  $s$ . При больших значениях  $\beta > 15$  кривые выходят на горизонтальную асимптоту. Графики иллюстрируют тот факт, что поле допустимых нагрузок для постановки с учетом упругих деформаций содержит в себе поле допустимых нагрузок для случая пренебрежения упругими деформациями.

## 2.6 Обратное превращение

### 2.6.1 Постановка задачи

После «раздачи» муфты из СПФ она устанавливается на упругий трубопровод и нагревается для создания надежного ТМС. Исследуется задача, где на упругий цилиндр 1 с внутренним радиусом, равным  $c$ , и внешним радиусом  $a$  насажен цилиндр 2 из СПФ с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$  (рисунок 2.21). При этом внутренний диаметр цилиндра из СПФ уже был предварительно увеличен под действием постоянной нагрузки в случае прямого превращение или монотонно возрастающей нагрузкой в полностью мартенситном состоянии в режиме мартенситной неупругости (соответствующие выкладки приведены выше). Начальное значение внутреннего радиуса второго цилиндра (до «раздачи») равно  $d$ . После «раздачи» внутреннее давление на муфту из СПФ убирается и в то же самое время она одевается на упругий трубопровод. За счет снятия давления и упругих деформаций уже в мартенситном состоянии муфта из СПФ начинает давить на упругий трубопровод. Далее происходит нагревание муфты из СПФ в результате чего она «вспоминает» исходную форму и образуется прочное соединение.

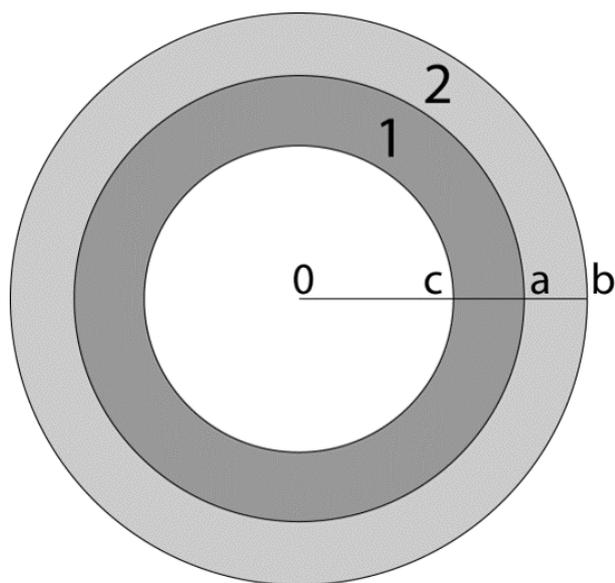


Рисунок 2.21 — На упругий цилиндр 1 с внутренним радиусом, равным  $c$ , и внешним радиусом  $a$  насажена муфта 2 из СПФ с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ .

Используется цилиндрическая система координат  $(r, \phi, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра,  $r, \phi$  - радиальная и кольцевая координаты. Рассматривается состояние плоской деформации, когда

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.71)$$

Материал цилиндра считается упруго несжимаемым, а объемный эффект реакции не учитывается:

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 0$$

Задача предполагается осесимметричной, поэтому уравнение равновесия имеет вид:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\phi = 0 \quad (2.72)$$

Деформации выражаются через радиальное перемещение по формулам

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (2.73)$$

Граничные условия принимают следующий вид:

$$u^{(1)}(a) = u^{(2)}(a) \quad (2.74)$$

Следует отметить, что смещения, входящие в (2.74), отсчитываются от различных начальных состояний.

$$\sigma_r^{(1)}(a) = \sigma_r^{(1)}(a) = -p_a; \quad \sigma_r^{(1)}(c) = -p_c; \quad \sigma_r^{(2)}(b) = -p_b \quad (2.75)$$

здесь давление  $p_a$  заранее неизвестно. В дальнейшем для простоты мы считаем, что внешние силы отсутствуют, поэтому в (2.75) надо положить  $p_c$  и  $p_b$  равными нулю. Для упругого цилиндра учитываются лишь упругие деформации, которые также происходят без изменения объема. Для цилиндра из СПФ учитываются фазово-структурные и упругие деформации. Температурными деформациями в обоих случаях пренебрегается.

Вместо исходных определяющих соотношений для СПФ (1.1)-(1.8) мы будем пользоваться положением об активных процессах пропорционального нагружения (1.16). Легко видеть, что для случая обратного фазового превращения положение об активных процессах пропорционального нагружения справедливо и без выполнения требования равенства функции распределения микронапряжений в аустенитном и мартенситном состояниях. Что же касается условий пропорциональности изменения компонент девиатора напряжений, то их справедливость может быть непосредственно проверена по готовому решению, после его

получения по формулам (1.16). В качестве функции распределения интенсивности микронапряжений  $F(\sigma_i)$  в (1.16) в данной постановке мы будем использовать функцию распределения Вейбулла:

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2) \quad (2.76)$$

В силу вышесказанного, задача решается в рамках системы определяющих соотношений (1.16) для фазово-структурных деформаций в СПФ. Кроме того, принимается предположение о том, что величина  $q$  в каждый момент времени не зависит от радиуса  $r$ .

### 2.6.2 Вывод разрешающих соотношений

В силу использования положения об активных процессах пропорционального нагружения и, в частности формулы (1.16), которая также была применена для моделирования процесса прямого превращения выше, полная система для моделирования процесса обратного превращения в данной постановке может быть получена из системы (2.26)-(2.29). Единственные отличия заключается в том, что в данной постановке отсутствует продольная сила  $P$  (следовательно уравнение (2.28) нужно исключить из системы) и осевая деформация равна нулю (т.е.  $\hat{\mu} = 0$ ). Исходя из этого, система уравнений (2.26)-(2.29) для цилиндра 2 в данной постановке примет вид:

$$\frac{|C^{(2)}(q)|}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \rho q F(\sigma_i^{(2)}) + \frac{\sigma_i^{(2)}}{3G^{(2)}(q)} \right) \quad (2.77)$$

$$\text{sign} [C^{(2)}(q)] \int_1^\beta \frac{\sigma_i^{(2)}}{r} dr = \frac{\sqrt{3}}{2} p_a \quad (2.78)$$

Отметим, что в данной постановке правая часть (2.78) положительна, кроме того интеграл в левой части (2.78) также положителен, поэтому  $\text{sign} [C^{(2)}(q)] > 0$ . Исходя из этого, знак модуля в (2.77) может быть опущен и система (2.77)-(2.78) может быть записана в виде:

$$\frac{C^{(2)}(q)}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \rho q F(\sigma_i^{(2)}) + \frac{\sigma_i^{(2)}}{3G^{(2)}(q)} \right), \quad \int_1^\beta \frac{\sigma_i^{(2)}}{r} dr = \frac{\sqrt{3}}{2} p_a \quad (2.79)$$

Неизвестными функциями, подлежащими определению в системе (2.79), являются  $\sigma_i^{(2)}$  и  $C^{(2)}(q)$ . После их нахождения перемещения, деформации и напряжений в соответствии с (2.12), (2.20) и (2.16) могут быть найдены по формулам:

$$u^{(2)} = \frac{C^{(2)}(q)}{r}; \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = -\varepsilon_r^{(2)} = \frac{C(q)}{r^2}; \quad (2.80)$$

$$\sigma_r^{(2)} = -p_a + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^r \frac{\sigma_i^{(2)}}{y} dy; \quad \sigma_\phi^{(2)} = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i^{(2)} \quad (2.81)$$

Для упругого цилиндра 1 учитываются лишь упругие деформации, поэтому систему (2.79) можно также записать и для упругого цилиндра 1 – для этого в системе (2.79) нужно положить  $q = 0$ , в первом уравнении не рассматривать слагаемое, связанное с СПФ, и функцию  $C^{(1)}$  считать постоянной  $C^{(1)} = const$ . В итоге имеем систему для упругого цилиндра 1:

$$\frac{C^{(1)}}{r^2} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{2\sqrt{3}G^{(1)}(q)}, \quad \int_\kappa^1 \frac{\sigma_i^{(1)}}{r} dr = -\frac{\sqrt{3}}{2} p_a \quad (2.82)$$

где  $\kappa = \frac{c}{a}$ .

Для второго уравнения систем (2.79) и (2.82) необходимо получить значение давления  $p_a$ . Для упругого цилиндра 1 перемещение  $u^{(1)}$  отсчитываются от недеформированного состояния. В то время как для второго цилиндра из СПФ перемещение отсчитывается от состояния, полученного после «раздачи». Для смещения цилиндра 2, отсчитываемого от начального состояния выполняется:

$$u^{(1)} = u^{(2)} - u_{ext} \quad (2.83)$$

где  $u_{ext}$  суть перемещение цилиндра 2, полученное после «раздачи». Тогда граничное условие (2.74) можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_\phi^{(1)} a = \varepsilon_\phi^{(2)} d - \varepsilon_{ext} a, \quad r = a \quad (2.84)$$

или с учётом того, что параметр фазового состава  $q$  не зависит от радиуса  $r$ :

$$\varepsilon_\phi^{(1)} = \varepsilon_\phi^{(2)} \frac{d}{a} - \varepsilon_{ext} \quad (2.85)$$

где  $\varepsilon_{ext}$  - есть известная константа, которая находится из решения задачи о прямом превращении. При этом под  $\varepsilon_{ext}$  понимается изменение внутреннего радиуса муфты из СПФ в процессе предварительной «раздачи», отнесенное к конечному значению внутреннего радиуса муфты  $a$  в мартенситном состоянии до

снятия давления «раздачи». Далее для простоты величина  $\varepsilon_{ext}$  будет называться предварительной «раздачей». Запишем (2.85) в виде:

$$C^{(1)} = C^{(2)}(q) \frac{d}{a} - \varepsilon_{ext} \quad \Leftrightarrow \quad C^{(1)} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{ext}} C^{(2)}(q) - \varepsilon_{ext} \quad (2.86)$$

Из первого, второго уравнения системы (2.82) и условия (2.86) имеем:

$$p_a(q) = 2G^{(1)} [1 - \kappa^{-2}] \left( \frac{1}{1 - \varepsilon_{ext}} C^{(2)}(q) - \varepsilon_{ext} \right) \quad (2.87)$$

Таким образом, (2.79) и (2.87) представляют собой полную систему для решений задачи в данной постановке. Для определенности в дальнейшем будем считать, что трубопровод имеет упругие постоянные, характерные для алюминиевых сплавов (расчеты приведены для сдвигового модуля алюминия, равного  $G_{Al} = 25500$  МПа).

На рисунке 2.22 представлены значения кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  в зависимости от параметра фазового состава  $q$  на внутренней поверхности муфты из СПФ для одного и того же упругого трубопровода с  $\kappa = 0.9$  (где  $\frac{1}{\kappa}$  его относительная толщина) и разных значений толщин муфты из СПФ и предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext}$ . На рисунке 2.22 а) две верхние кривые (соответствующие предварительной «раздаче»  $\varepsilon_{ext}$  3% и 4%) соответствуют большим кольцевым напряжениям в конце обратного превращения, что приводит к пластическим деформациям и заметным ухудшениям функциональных свойств материала из СПФ. Поэтому решать задачу в такой постановке для трубопровода и муфты примерно одинаковых толщин можно лишь для значений предварительной «раздачи», не превышающей 2%.

На рисунке 2.22 б) муфта из СПФ заметно толще упругой трубы вследствие чего кольцевые напряжения тоже заметно ниже. При этом при величине предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext}$ , равной 2% и больше, на графике зависимости  $\sigma_\phi$  от  $q$  наблюдается внутренний максимум вблизи  $q = 0.1$ . При дальнейшем уменьшении  $q$  значения кольцевых напряжений падают. Т.е. максимальные кольцевые напряжения достигаются вовсе не в полностью аустенитном состоянии, а несколько раньше. Это явление проиллюстрировано на рисунке 2.23, где представлены графики распределения по радиальной координате  $r$  кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  в муфте из СПФ для различных значений  $q$ , указанных на рисунке. Решение получено для упругой трубы с  $\kappa = 0.9$  и муфты из СПФ с относительной толщиной  $\beta = 1.5$  (предварительная «раздача»  $\varepsilon_{ext} = 2\%$ ). Линии для  $q = 0$

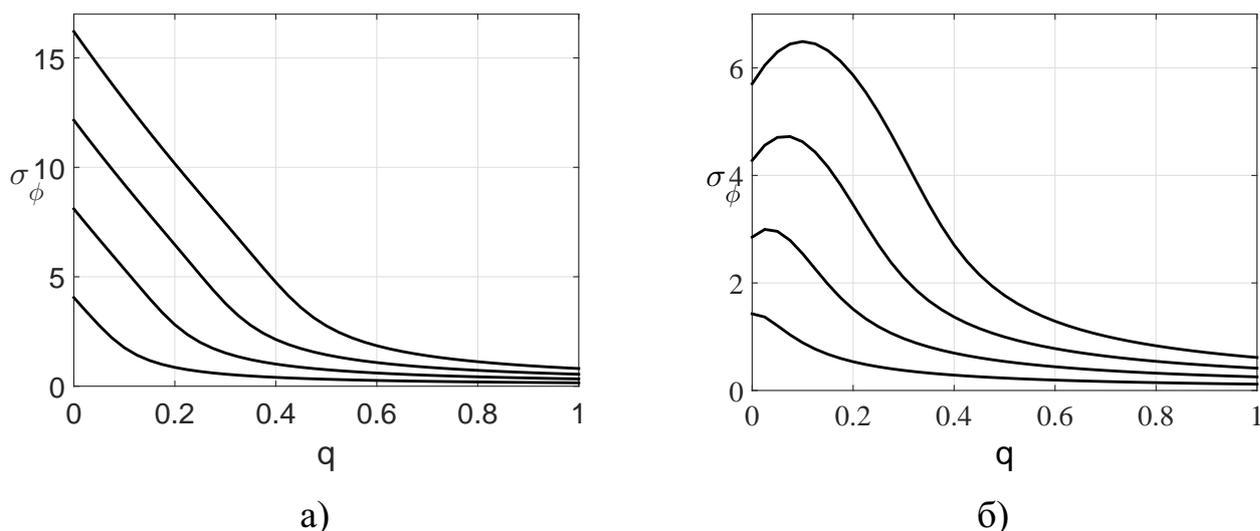


Рисунок 2.22 — Зависимость кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  на внутренней поверхности муфты из СПФ для одного и того же упругого трубопровода с  $\kappa = 0.9$  и разных значений толщин муфты из СПФ и предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext}$ : а) соответствует муфте из СПФ с  $\beta = 1.1$ ; б) соответствует муфте из СПФ  $\beta = 1.5$ . Снизу вверх идут кривые, соответствующие значениям предварительной «раздачи»

$$\varepsilon_{ext} = 1\%; \quad 2\%; \quad 3\%; \quad 4\%; \text{ соответственно.}$$

и  $q = 0.05$  пересекаются и для  $r = 1$  кольцевые напряжения при  $q = 0.05$  выше, чем при  $q = 0$ .

В случае если рассматривается толстый упругий трубопровод и тонкая муфта из СПФ, то кривые выглядят аналогично представленным на рисунке 2.22 а) с той лишь разницей, что значения напряжений несколько выше. Внутреннего максимума на графике зависимости кольцевого напряжения от  $q$  в этом случае не наблюдается. Таким образом, можно говорить, что внутренний максимум для кольцевых напряжений возникает лишь в случае, когда муфта из СПФ заметно толще упругой трубы, а величина предварительной «раздачи» достаточно велика.

Некоторые результаты решения задачи об обратном превращении представлены на рисунках 2.24-2.26 для упругого трубопровода с  $\kappa = 0.9$  и двух муфт из СПФ с относительными толщинами  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  в случае предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext} = 2\%$ . На рисунке 2.24 представлены кривые зависимости кольцевых деформаций  $\varepsilon_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  на внутренней стороне муфты: верхний график соответствует муфте с относительной толщиной  $\beta = 1.1$ , а нижний – с  $\beta = 1.5$ . На рисунке 2.25 представлены кривые

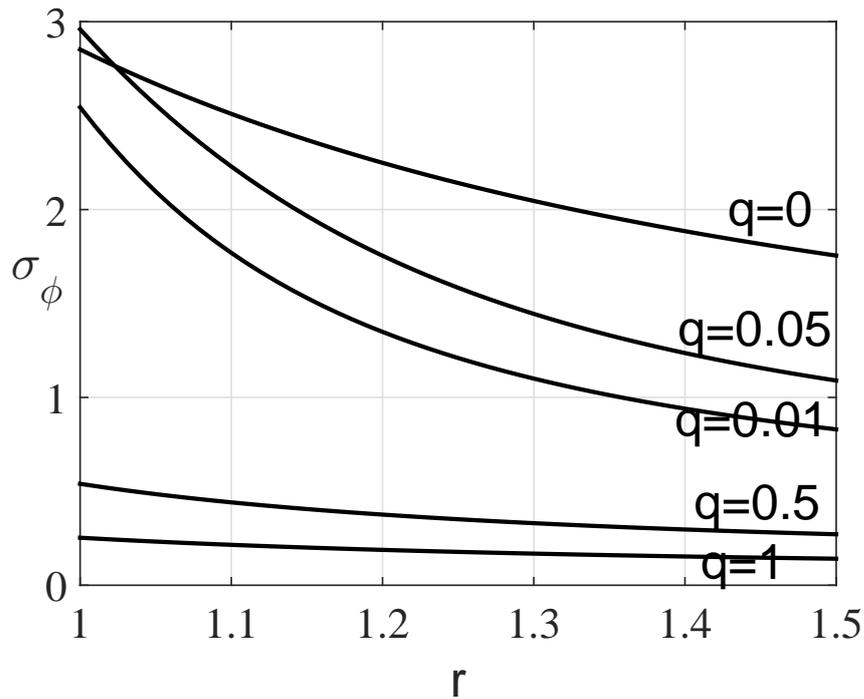


Рисунок 2.23 — Распределение по радиальной координате  $r$  кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  в муфте из СПФ для различных значений  $q$ , указанных на рисунке (упругая труба с  $\kappa = 0.9$ , муфта из СПФ с  $\beta = 1.5$ ).

зависимости напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  на внутренней стороне муфты: первый и третий сверху – это графики для  $\beta = 1.1$ , а второй и четвёртый -  $\beta = 1.5$ . На рисунке 2.26 представлены а) кольцевые деформации и б) радиальные и кольцевые напряжения в зависимости от координаты  $r$  для муфты с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  в полностью аустенитном состоянии и упругой трубы с  $\kappa = 0.9$ . Из рисунка 2.26 б) видно, что, как и в случае упругой трубы, кольцевые напряжения гораздо больше радиальных.

### 2.6.3 Приближенное решение

При малых значениях напряжений функция распределения интенсивности микронапряжений (2.76) может быть разложена в ряд с точностью до членов первого порядка — тогда первое уравнение (2.79) представляет собой линейное уравнение относительно интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и система, полученная в предыдущем пункте, допускает аналитическое решение. Действительно, первое

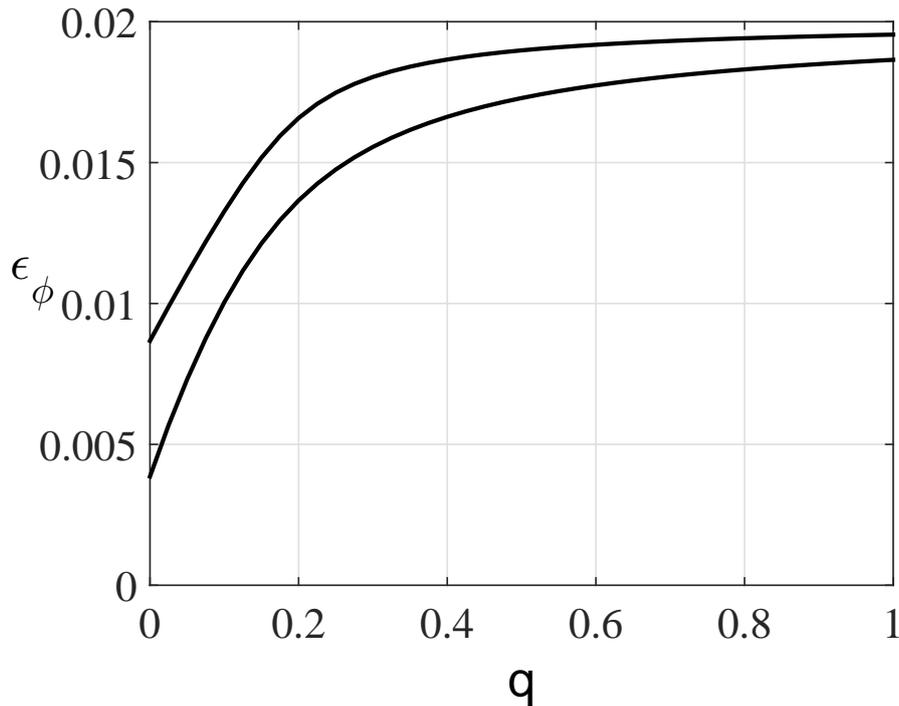


Рисунок 2.24 — Зависимость кольцевых деформаций  $\varepsilon_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  на внутренней стороне муфты: верхний график соответствует муфте с относительной толщиной  $\beta = 1.1$ , а нижний — с  $\beta = 1.5$  (упругий трубопровод с  $\kappa = 0.9$ ).

уравнение (2.79) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_i^{(2)} = \frac{C^{(2)}(q)}{r^2 A(q)}, \quad A(q) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \rho q + \frac{1}{3G^{(2)}(q)} \right) \quad (2.88)$$

Тогда второе уравнение системы (2.79) можно явно проинтегрировать и получить:

$$\frac{C^{(2)}(q)}{2A(q)} (1 - \beta^{-2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} p_a(q) \quad (2.89)$$

И, наконец, подставляя (2.87) в (2.89), получим явное соотношение для  $C^{(2)}(q)$ :

$$C^{(2)}(q) = B \varepsilon_{ext} \left( \frac{B}{1 - \varepsilon_{ext}} - \frac{1 - \beta^{-2}}{2A(q)} \right)^{-1}; \quad B = \sqrt{3} G^{(1)} (1 - \kappa^{-2}) \quad (2.90)$$

Аналогично можно получить соответствующие формулы для напряжений, для этого нужно подставить (2.88) в (2.81):

$$\sigma_r^{(2)} = -p_a + C^{(2)}(q) \frac{1 - r^{-2}}{A(q) \sqrt{3}}; \quad \sigma_\phi^{(2)} = \sigma_r^{(2)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i^{(2)} \quad (2.91)$$

где  $p_a$  — давление на контакте из (2.87).

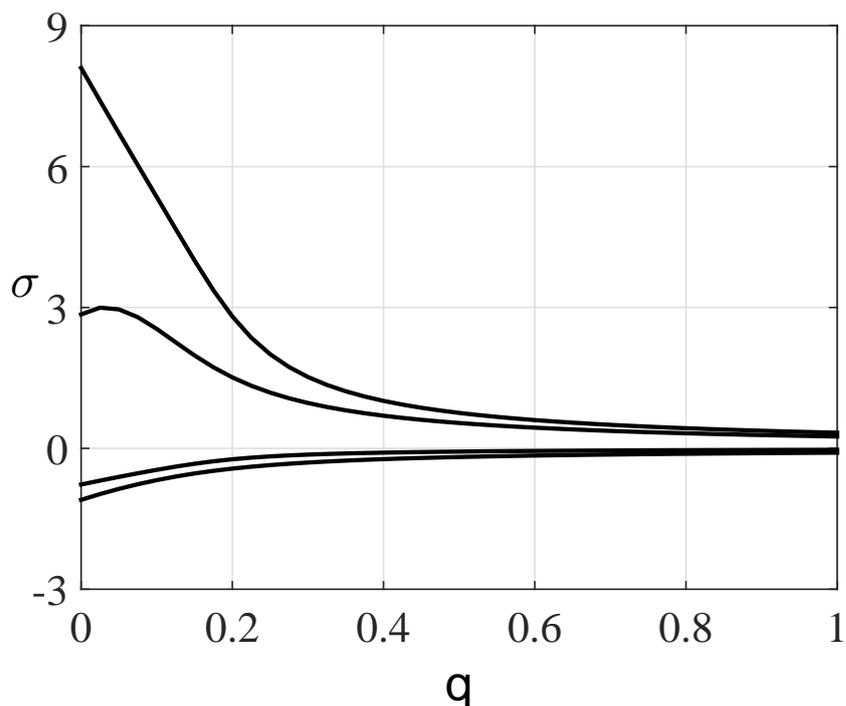
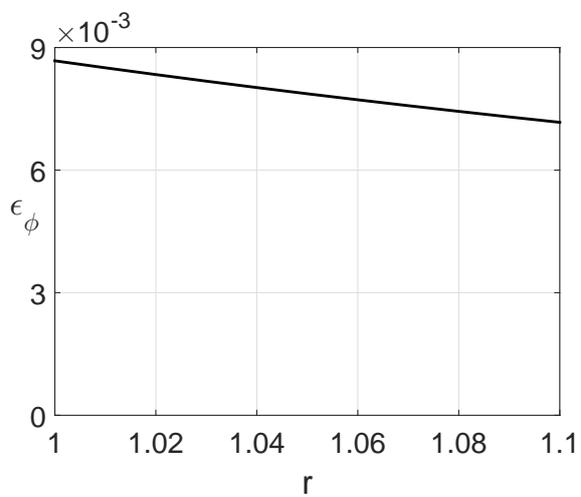
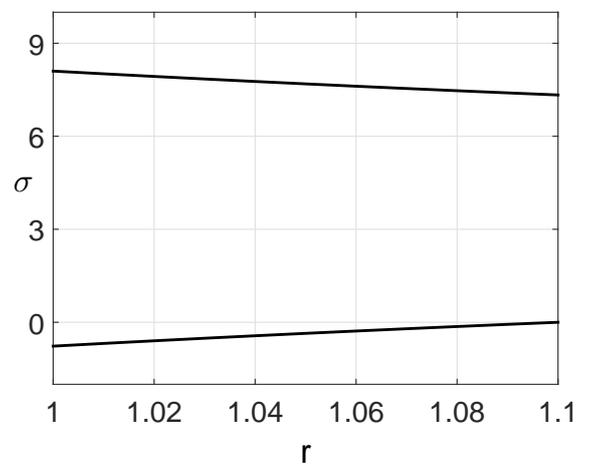


Рисунок 2.25 — Зависимость напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  на внутренней стороне муфты: первый и третий сверху – это графики для  $\beta = 1.1$ , а второй и четвёртый -  $\beta = 1.5$  (упругий трубопровод с  $\kappa = 0.9$ ).

На рисунке 2.27 представлено сравнение значений кольцевых напряжений на внутренней поверхности муфт в случае полного решения и приближенного решения для упругого трубопровода с  $\kappa = 0.9$  и двух муфт из СПФ с относительными толщинами  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  с одинаковыми значениями предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext} = 2\%$ . Первый и третий сверху от левого края – это графики полного решения для муфт с относительными толщинами  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  соответственно; второй и четвертый – приближенное решение для  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  соответственно. При этом получается, что в аустенитном состоянии значения напряжений для разных решений приблизительно совпадают, однако для промежуточных значений  $q$  различия весьма существенны. В частности, в приближенном решении для случая достаточно толстой муфты промежуточный максимум для кольцевых напряжений отсутствует.



а)



б)

Рисунок 2.26 — а) Кольцевые деформации и б) радиальные и кольцевые напряжения в зависимости от координаты  $r$  для муфты с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  в полностью аустенитном состоянии и упругой трубы с  $\kappa = 0.9$ .

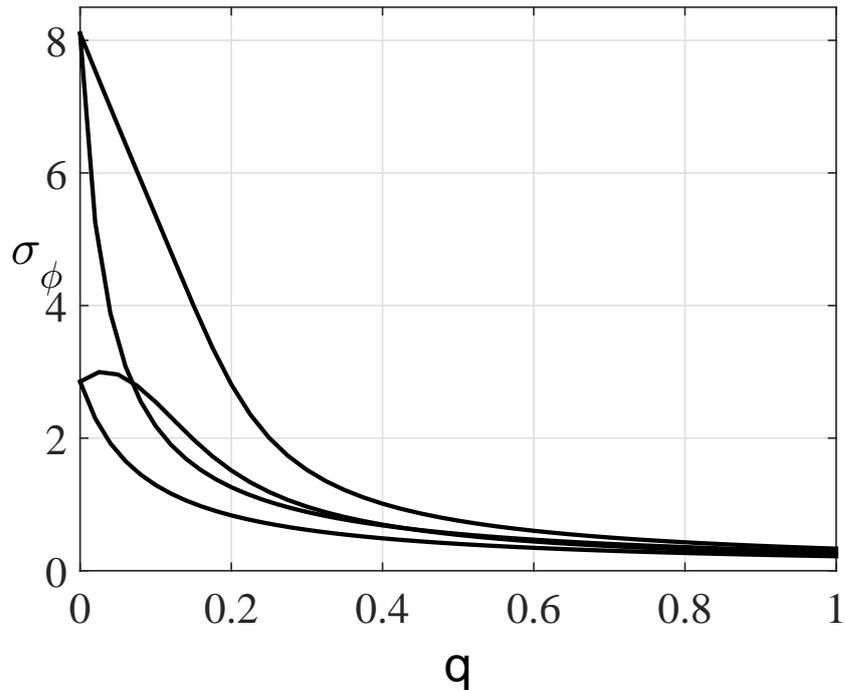


Рисунок 2.27 – Сравнение значений кольцевых напряжений на внутренней поверхности муфт в случае полного решения и приближенного решения для упругого трубопровода с относительной толщиной  $\kappa = 0.9$  и двух муфт из СПФ с относительными толщинами  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  с одинаковыми значениями предварительной «раздачи»  $\varepsilon_{ext} = 2\%$ . Первый и третий сверху от левого края – это графики полного решения для муфт с относительными толщинами  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  соответственно; второй и четвертый – приближенное решение для  $\beta = 1.1$  и  $\beta = 1.5$  соответственно.

### Глава 3. Сфера

В отличие от цилиндра, где решение задачи о прямом и обратном превращении необходимо для моделирования процесса подготовки муфты и создания термомеханического соединения, решение задачи о прямом превращении полого шара из СПФ не несет в себе такой же практической ценности. Пока нет ни одного упоминания об использовании сфер из СПФ в технике. Тем не менее, сегодня полые сферы начинают применять в композиционных материалах – так называемых «hollow-sphere-composite» (HSC) [107]. Первоначально композиты HSC задумывались как альтернатива бериллию (который является токсичным и дорогим) в качестве конструкционного материала для зеркал в аэрокосмической промышленности. В таких композитах до 80% объема занимают полые сферы, которые соединяются друг с другом эпоксидной смолой. Такие композиты являются относительно недорогими, легкими, жесткими и обрабатываемыми.

Полые сферы обычно изготавливаются из керамики, силикатов, пластиков или металлов и могут быть покрыты металлом для улучшения определенной характеристики будущего композита, например, для защиты от космической радиации или электромагнитных помех, для уменьшения коэффициента теплового расширения, для изменения теплоемкости и теплопроводности [108]. Типичные характеристики композита HSC следующие: плотность 1.2-1.7 г/см<sup>3</sup> (плотность бериллия 1,85 г/см<sup>3</sup>), а модуль упругости может достигать 170 ГПа [109]. Что же касается полых сфер из СПФ пока можно лишь чисто гипотетически рассуждать об их будущем использовании в композитах HSC. Помимо этого, возможно гипотетическое использование сфер из СПФ в роботизированных суставах конечностей.

#### 3.1 Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная задача о прямом превращении для полого толстостенного шара в сферической системе координат  $(r, \phi, \chi)$  с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , находящегося под действием одинакового для всех точек внутренней поверхности давления  $p_a$  и одинакового для всех

точек внешней поверхности давления  $p_b$ . Температурными деформациями пренебрегается. Материал считается упруго несжимаемым (в случае постановки с учетом упругих деформаций). Также считается, что параметр фазового состава  $q$  не зависит от радиальной компоненты  $r$ . Здесь и далее используются безразмерные величины, которые были обезразмерены аналогично задаче с цилиндром. В силу симметрии геометрии тела и действующей нагрузки напряженно-деформированное состояние тела является также сферически симметричным и выполняется:

$$\sigma_\phi = \sigma_\chi, \quad \varepsilon_\phi = \varepsilon_\chi, \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{r\chi} = \sigma_{\phi\chi} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{r\chi} = \varepsilon_{\phi\chi} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_i = |\sigma_\phi - \sigma_r|; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_\phi - \varepsilon_r| \quad (3.2)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (3.3)$$

Из (3.3) с учетом (3.2) получается

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm 2\frac{\sigma_i}{r} \quad (3.4)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует выполнению неравенства  $\sigma_\phi \geq \sigma_r$ , а нижний - случаю  $\sigma_\phi < \sigma_r$ . Из всех компонент смещений отлично от нуля только радиальное смещение  $u$ , причем компоненты деформации связаны с  $u$  соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\chi = \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (3.5)$$

Как и для цилиндра будем пользоваться ПАПН (1.16), а выполнение его условий будем проверять по готовому решению.

### 3.2 Решение

Аналогично выкладкам для цилиндра (2.8) имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = 3\varepsilon_0 \quad (3.6)$$

общее решение которого для  $u = u(q, r)$  записывается в виде:

$$u = rq\varepsilon_0 + \frac{C(q)}{r^2}, \quad \varepsilon_r = q\varepsilon_0 - \frac{2C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_\phi = \varepsilon_\chi = q\varepsilon_0 + \frac{C(q)}{r^3} \quad (3.7)$$

Здесь  $C(q)$  – произвольная функция параметра фазового состава, подлежащая определению из других условий. Для компонент девиатора деформаций и интенсивности деформаций из (3.4), (3.7) получается:

$$\varepsilon_{\chi}' = \varepsilon_{\phi}' = \frac{C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_r' = -\frac{2C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_i = \frac{2|C(q)|}{r^3} \quad (3.8)$$

из (3.8) с учетом упругих деформаций имеем:

$$\frac{|2C(q)|}{r^3} = \rho q F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{3G(q)} \quad (3.9)$$

где функции  $C(q)$  и  $\sigma_i(q,r)$  заранее неизвестны и подлежат определению. Для замыкания системы уравнений воспользуемся проинтегрированным уравнением равновесия (3.4) и граничными условиями для радиального напряжения:

$$\int_1^{\beta} \sigma_i \frac{dr}{r} = \frac{|p_a - p_b|}{2} \quad (3.10)$$

Как видно из уравнения (3.10) знак функции  $C(q)$  зависит от знака разности  $(p_a - p_b)$ . Поэтому если рассматривается случай, когда  $p_a > p_b$ , то функция  $C(q)$  всегда положительна, в обратном случае  $(p_a < p_b)$  нужно принять  $C(q)$  отрицательной. Уравнения (3.9)-(3.10) представляют собой систему для нахождения неизвестных  $\sigma_i(q,r)$  и  $C(q)$ . Решение такой системы принципиально ничем не отличается от решения соответствующей системы для цилиндра.

После решения системы неизвестные деформации и перемещения находятся из (3.7), а явные формулы для напряжений исходя из (3.2)-(3.4) имеют вид:

$$\sigma_r = -p_a \pm 2 \int_1^r \frac{\sigma_i}{\xi} d\xi; \quad \sigma_{\phi} = \sigma_{\chi} = \sigma_r \pm \sigma_i \quad (3.11)$$

Как и в случае цилиндра для нахождения температурных полей для сферы используется формула (2.30).

Отметим, что пропорциональность девиаторов для сферы автоматически следует из (3.1)-(3.2). Проверим выполненность условия отсутствия разгрузки. Для этого построим графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от параметра фазового состава  $q$  для внутренней (рисунок 3.1 а)) и внешней (рисунок 3.1 б)) сторон сферы. Как видно из графиков интенсивность напряжений, как и в случае цилиндра (с продольной силой / с плоской деформацией), падает с ростом  $q$  на внешней стороне. Поэтому положение об активных процессах пропорционального нагружения для сферы с учетом упругих деформаций не выполнено

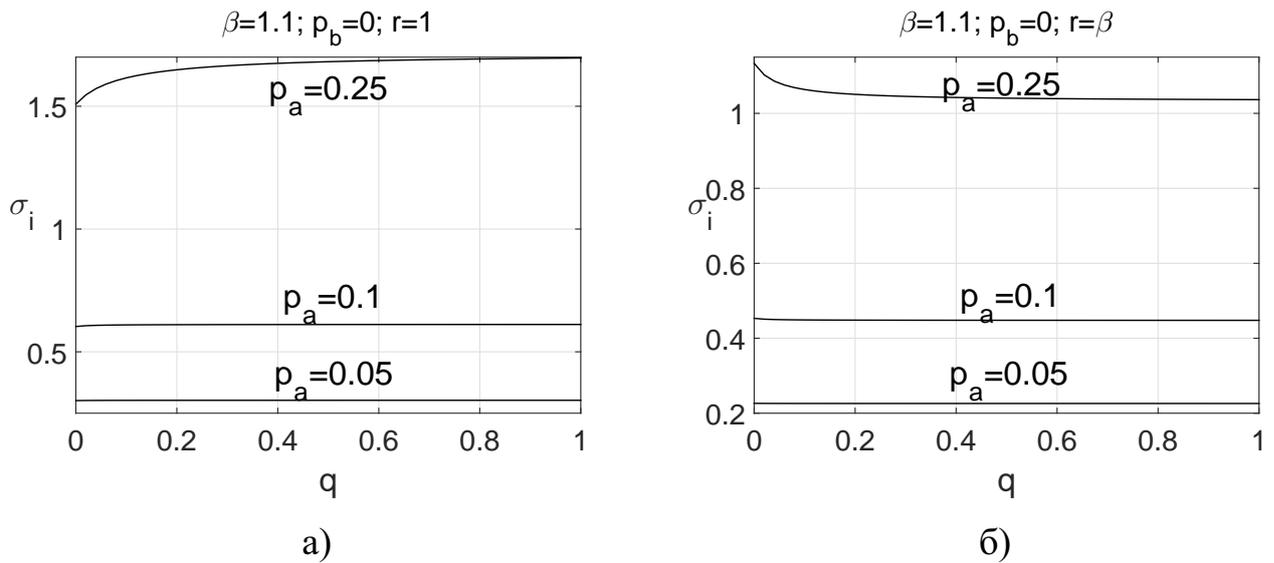


Рисунок 3.1 — Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от параметра фазового состава  $q$  для внутренней а) и внешней б) сторон цилиндра для разных значений внутреннего давления  $p_a$ .

и корректнее говорить, что полученное решение справедливо лишь в рамках конечных соотношений ПАПН (1.15).

### 3.3 Пренебрежение упругими деформациями

В случае неучета упругих деформаций в первом уравнении системы (3.9)-(3.10) нужно пренебречь упругим слагаемым в правой части и получившаяся система запишется в виде:

$$\int_1^\beta F^{-1} \left( \frac{3|\lambda|}{r^3} \right) \frac{dr}{r} = \frac{|p_a - p_b|}{2} \quad (3.12)$$

где  $C(q)$  связано с  $\lambda$  по соотношению (2.32). Отметим, что система за исключением степени радиальной компоненты  $r$  и числового коэффициента ничем не отличается от системы для цилиндра в предположении о плоской деформации (2.47) без учета упругих деформаций. Кроме того, как и в случае цилиндра без учета упругих деформаций, напряженное состояние сферы в такой постановке не зависит от параметра фазового состава  $q$ , что позволяет говорить о справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения.

В случае сферы система из двух уравнений для постановки с учетом упругих деформаций, в отличие от системы из трех уравнений для цилиндра с про-

дольной силой и учетом упругих деформаций, относительно не чувствительна к начальным приближениям. Тем не менее интересно сравнить результаты для сферы в случае постановки с учетом упругих деформаций и без учета упругих деформаций.

На рисунке 3.2 представлены графики зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом и без учета упругих деформаций в случае разных значений параметра фазового состава  $q$  для разных граничных условий и толщин сферы. Граничные условия и толщины подобраны так, чтобы были примеры кривых как для маленьких нагрузок ( $\beta = 1.5$ ,  $p_a = 0.1$ ), так и для больших ( $\beta = 1.5$ ,  $p_a = 0.6$ ) (понятие маленькие и большие нагрузки условное и определяется по отношению к предельным нагрузкам, о которых будет рассказано позже). Тонкие кривые построены для задачи с учетом упругих деформаций для разных значений  $q$ ; толстые кривые – для задачи без учета упругих деформаций (на каждом графике всего одна толстая кривая, т.к. напряженное состояние в постановке без учета упругих деформаций не зависит от  $q$ ). Как видно из графиков кривая без учета упругих деформаций практически не отличается от кривых с учетом упругих деформаций для малых нагрузок во время всего фазового перехода. Разница возникает в окрестности  $q = 0$  и тем больше, чем выше нагрузки. В то время как в конце прямого превращения ( $q = 1$ ) разница между кривыми наименее различима. Графики сравнения для сферы принципиально ничем не отличаются от соответствующих графиков для цилиндра (2.8).

Построим аналогичные графики для кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  но в зависимости от параметра фазового состава  $q$  для разных сечений цилиндра (внешнего, срединного и внутреннего) – рисунок 3.3.

Из графиков на рисунке 3.3 видно, что в начале фазового перехода ( $q = 0$ ) кольцевые напряжения на внутренней стороне убывают, а на внешней – возрастают, что сказывается на интенсивности напряжений, которая, как было показано на рисунке 3.1, также убывает. Кроме того, разница между кривыми с учетом и без учета упругих деформаций тем выше – чем выше приложенные нагрузки и особенно заметна в начале прямого превращения. В случае высоких нагрузок кольцевые напряжения на внутренней стороне сферы в постановке без учета упругих деформаций всегда превосходят кольцевые напряжения для постановки с учетом упругих деформаций.

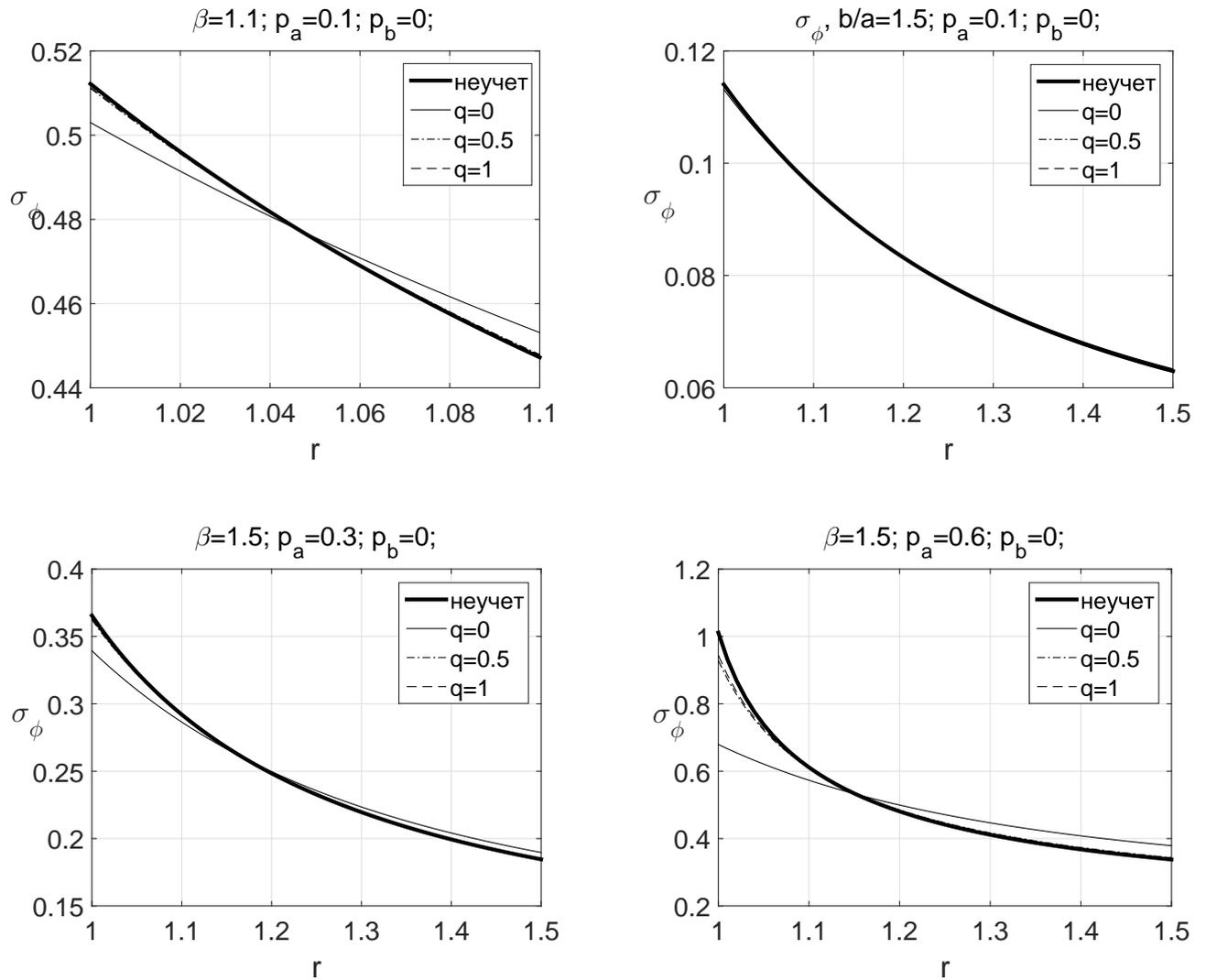


Рисунок 3.2 — Сравнение зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета (толстые кривые) упругих деформаций. Три кривые для постановки с учетом упругих деформаций соответствуют началу, середине и концу фазового перехода. Кривые для середины и конца фазового перехода практически неразличимы в масштабах рисунка, и они практически идентичны в масштабах рисунка кривой в постановке без учета упругих деформаций, за исключением последнего графика.

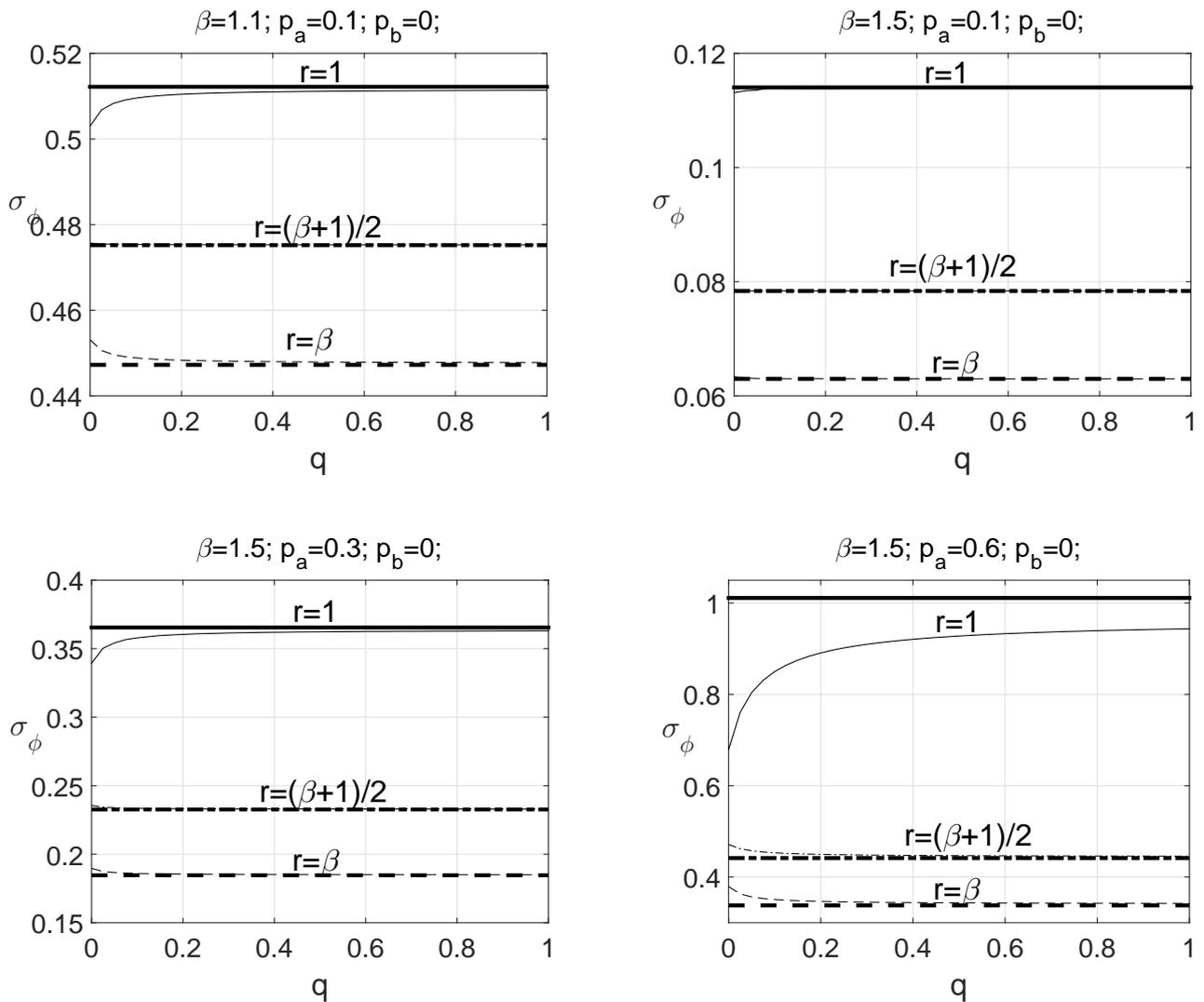


Рисунок 3.3 — Сравнение зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от параметра фазового состава  $q$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета (толстые кривые) упругих деформаций на трех сечениях цилиндра: внутреннем, срединном и внешнем. Кривые для внутреннего сечения практически неразличимы в масштабах рисунков (за исключением последнего графика).

Как и в случае с цилиндром радиальные деформации  $\varepsilon_r$  по модулю и интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  в постановке с учетом упругих деформаций всегда превосходят соответствующие значения для постановки без учета упругих деформаций. Построим температурные поля для обеих постановок в зависимости от  $r$  (рисунок 3.4) и  $q$  (рисунок 3.5). Как видно из рисунка 3.4, в отличие от цилиндра, графики температур практически идентичны даже для средних нагрузок и только для высоких нагрузок ( $\beta = 1.5, p_a = 0.6$ ) наблюдается «непараллельность» кривых для двух постановок при  $q = 0$ . Как было показано выше температуры в задачах с такими постановками полностью определяются параметром фазового состава  $q$  и интенсивностью напряжений, наибольший вклад в

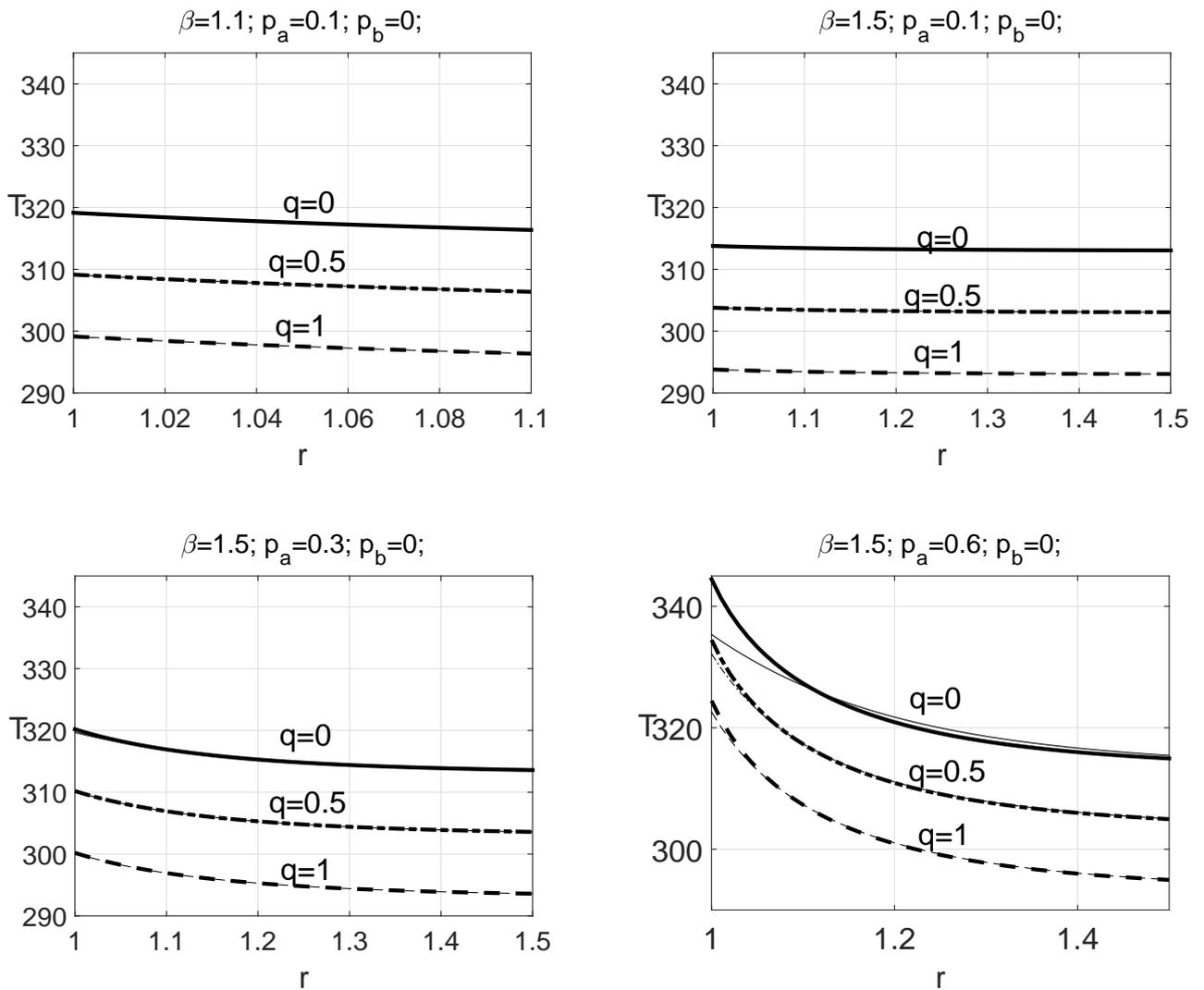


Рисунок 3.4 — Сравнение зависимости температур  $T$  от радиальной компоненты  $r$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета упругих деформаций (толстые кривые) для разных значений  $q$ . За исключением последнего графика, кривые для двух постановок практически неразличимы в масштабах рисунков.

которую дают кольцевые напряжения. И, как и в случае кольцевых напряжений, наибольшая разница между двумя постановками для температур наблюдается при больших нагрузках на внутреннем сечении сферы.

Как следует из рисунка 3.5 для зависимости  $T(q)$ , при высоких нагрузках на внутренней стороне сферы в постановке с учетом упругих деформаций прямое превращение начинается с ростом температуры – что чем-то похоже на явление сверхупругости, правда там происходит изотермическое нагружение. Рост температуры с ростом  $q$  возможен, если второе слагаемое соотношения (2.30) растет быстрее, чем убывает последнее – как раз такой случай и показан на рисунке. Для тонкостенных сфер такого явления не наблюдается. Такой же эффект

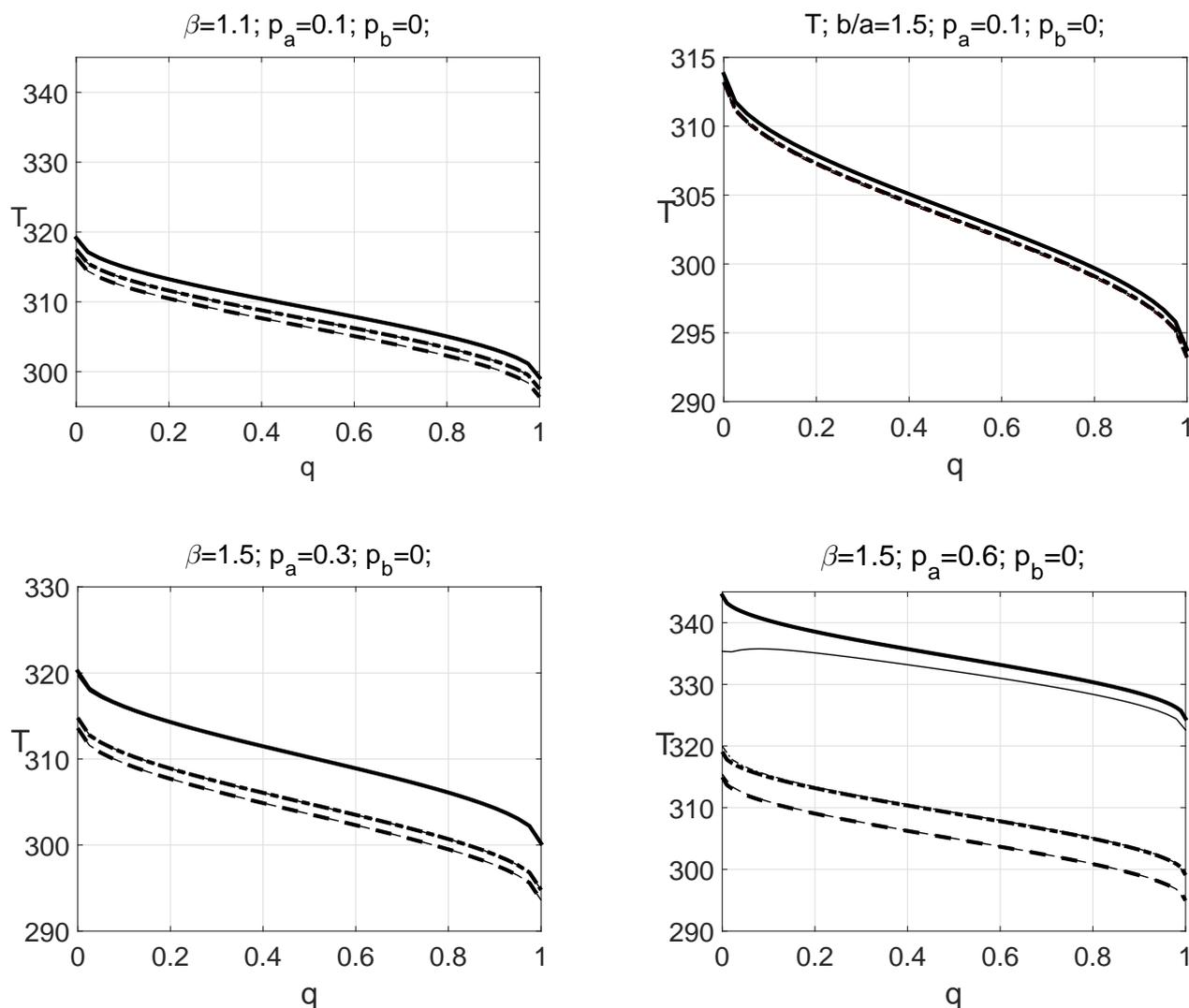


Рисунок 3.5 — Сравнение зависимости температур  $T$  от параметра фазового состава  $q$  для двух постановок: с учетом (тонкие кривые) и без учета упругих деформаций (толстые кривые) для разных значений  $r$ . На каждом графике для каждой постановки сверху вниз идут кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра соответственно. За исключением последнего графика, кривые для двух постановок практически неразличимы в масштабах рисунков.

имеет место быть в случае толстостенного цилиндра при высоких нагрузках (например  $\beta = 1.5; p_a = 0.45$ ).

Таким образом, разница в результатах между постановками с учетом и без учета упругих деформаций для сферы меньше, чем для цилиндра. Если в случае кольцевых напряжений, как и для цилиндра, наблюдается большая разница между кривыми на внутренней стороне сферы в начале прямого перехода, то, в отличие от цилиндра для сферы графики температур для двух постановок практически идентичны в масштабах рисунков для малых и средних нагрузок.

Для обеих толстостенных оболочек в постановке с учетом упругих деформаций верно, что на внутренней стороне оболочки при больших нагрузках прямое превращение может начинаться с ростом температуры.

### 3.4 Предельные нагрузки

Как и в случае цилиндра для сферы можно построить кривые предельных нагрузок, под которыми мы понимаем нагрузки, при которых интенсивность напряжений становится равной пределу текучести материала. Как и в случае цилиндра, условие на допустимые нагрузки записывается в виде:

$$\sigma_i \leq s \quad (3.13)$$

отметим, что левая часть первой формулы (3.9) монотонно возрастает с ростом  $\sigma_i$ , поэтому условие (3.13) на основании (3.9) можно записать в виде

$$\frac{|2C(q)|}{r^3} \leq \rho q F(s) + \frac{s}{3G(q)} \quad (3.14)$$

правая часть этого равенства от  $r$  не зависит, а левая убывает с ростом  $r$ . Поэтому надо требовать выполнение (3.13) для минимально возможного значения  $r$ , т.е.  $r = 1$ . Кроме того расчеты показывают, что максимальное значение интенсивности напряжений достигается при  $q = 1$ . В результате получаем значение функции  $C(q)$  в точке  $q = 1$ , отвечающее максимально возможным предельным нагрузкам:

$$|C^*| = \frac{1}{2} \rho F(s) + \frac{s}{6G_M} \quad (3.15)$$

Для простоты будем считать, что возможны варианты либо, когда действует только внутреннее давление (и тогда модуль раскрывается со знаком плюс), либо только внешнее (модуль раскрывается со знаком минус).

**Неучет упругих деформаций.** Рассмотрим случай неучета упругих деформаций [102]. В такой постановке функция предельных значений  $C^*(q)$  является линейной:

$$C^*(q) = C^* q \quad (3.16)$$

Т.к. упругие деформации не учитываются, то в правой части (3.9) упругое слагаемое не рассматривается, и функция интенсивности напряжений выражается

явно как:

$$\sigma_i^* = F^{-1} \left( \frac{|2C^*|}{\rho r^3} \right) \quad (3.17)$$

Остается подставить получившуюся функцию интенсивности напряжений в (3.10), чтобы получить значение предельной нагрузки ( $p = p_a - p_b$ ):

$$|p^*| = 2 \int_1^\beta F^{-1} \left( \frac{F(s)}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.18)$$

В силу монотонного возрастания как функции  $F$ , так и функции  $F^{-1}$  предельная нагрузка  $|p^*|$  монотонно возрастает с ростом  $s$ . Как следует из формулы предельные значения давления  $|p^*|$  для случая внутреннего и для случая такого же внешнего давления совпадают.

На рисунке 3.6 построены графики зависимости предельных давлений  $p^*$  от относительной толщины сферы  $\beta$  для разных значений пределов текучести  $s = 0.5, 1, 2, 5$ . При высоких значениях  $\beta > 20$  кривые выходят на горизонтальную асимптоту.

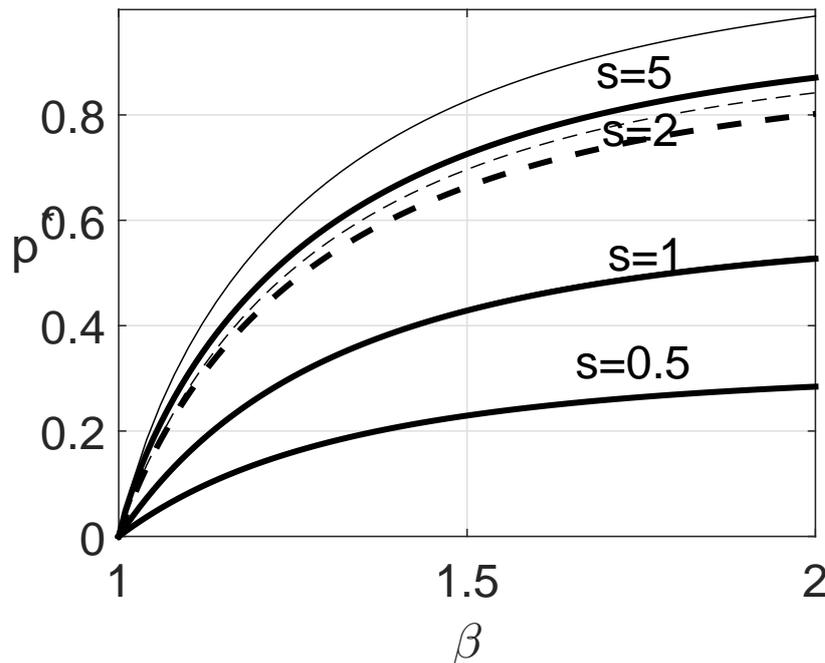


Рисунок 3.6 — Зависимость предельных давлений  $p^*$  от толщины сферы  $\beta$  для разных значений пределов текучести  $s = 0.5, 1, 2, 5$  в постановке без учета упругих деформаций (тонкие кривые) и с учетом упругих деформаций (толстые кривые). Кривые для  $s = 0.5$  и  $s = 1$  практически неразличимы в масштабах рисунка.

**Учет упругих деформаций.** В случае учета упругих деформаций найти предельную нагрузку похожим способом не удастся – ведь даже если аппрокси-

мировать функцию  $C^*(q)$  линейной функцией, то для проведения прямой нужна вторая точка, например  $C^*(0)$ , значение которой найти невозможно, т.к. интенсивность напряжений на внутренней стороне цилиндра уже не будет равна пределу текучести. Воспользуемся обратным методом – будем решать задачу о прямом превращении (3.9)-(3.10) для разных значений нагрузок  $p$  до тех пор пока интенсивность напряжений  $s$  на внутренней стороне сферы в конце прямого превращения  $q = 1$  не станет равна пределу текучести ( $\sigma_i(q = 1; r = 1) = s$ ), т.е. найденная при решении системы (3.9)-(3.10) функция  $C(q)$  должна удовлетворять условию:

$$C(1) = C^* \quad (3.19)$$

где  $C^*$  находится из (3.15). Таким образом для нахождения предельных давлений для сферы в постановке с учетом упругих деформаций необходимо решить систему уравнений (3.9)-(3.10) для  $q = 1$  с учетом (3.19), где неизвестной искомой функцией является  $p$ .

На рисунке 3.6 также представлены графики зависимости предельных давлений  $p^*$  от относительной толщины сферы  $\beta$  для разных значений пределов текучести  $s = 0.5, 1, 2, 5$  в случае постановки с учетом упругих деформаций. Как видно из рисунка 3.6, начиная с некоторых значений пределов текучести  $s$ , в интервале между 1 и 2 предельные кривые для постановки с учетом упругих деформаций лежит выше кривых, построенных в постановке без учета упругих деформаций. В то же время для относительно низких значений  $s$  кривые неразличимы в масштабе рисунка. Это следует учитывать при выборе постановки задачи для решения вопроса о прочности сферы.

## Глава 4. Равномерное распределение температуры

Предположение о независимости распределения параметра фазового состава  $q$  по радиусу цилиндра/сферы в общем случае является несколько искусственным. В данной главе рассматривается однократно-связная задача, когда поле температур равномерно распределено по радиусу оболочки, что соответствует медленному процессу охлаждения.

### 4.1 Вывод разрешающей системы

Предполагается, что в каждый момент времени температура всех точек трубы/сферы одинакова. Рассматривается упрощенный вариант определяющих соотношений для прямого превращения в СПФ (1.1)-(1.6), в рамках которого

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_1(\sigma_i) \quad (4.1)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho \sigma_i F_1(\sigma_i)}{\Delta S}, \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} = t + \frac{\rho \sigma_i F_1(\sigma_i)}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \quad (4.2)$$

В (4.2) пренебрегается влиянием переменности упругих модулей и объемного эффекта реакции прямого фазового превращения на температуры перехода. Данное упрощение имеет чисто технический характер для сокращения конечных выкладок. Из (1.3) имеем:

$$\delta q = \pi \sqrt{q(1-q)} \left[ \delta t + \frac{\rho_D (F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i))}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \delta \sigma_i \right] = M \delta t + N \delta \sigma_i \quad (4.3)$$

$$M = \pi \sqrt{q(1-q)} = M(q), \quad N = M \frac{\rho_D (F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i))}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} = M(q) f_3(\sigma_i)$$

$$f_3(\sigma_i) = \frac{\rho (F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i))}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \quad (4.4)$$

Из (1.2) получаем:

$$\delta\varepsilon_{ij}' = \frac{\delta\sigma_{ij}'}{2G(q)} + A_{ij}\delta q + B_{ij}\delta\sigma_i \quad (4.5)$$

$$A_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} f_1(\sigma_i), \quad f_1(\sigma_i) = \frac{\Delta G \sigma_i}{3G_A G_M} + \rho F_1(\sigma_i), \quad B_{ij} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q F_2'(\sigma_i) \quad (4.6)$$

Для простоты будем рассматривать оболочку под действием постоянно-го внутреннего давления. Материал цилиндра/сферы считается несжимаемым и упруго-несжимаемым, в случае цилиндра рассматривается задача о плоской деформации:

$$\varepsilon_z = 0; \quad \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 0 \quad (4.7)$$

и из определяющих соотношений следует  $\sigma'_z = 0$ . Для остальных компонент верны следующие соотношения:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_\phi - \sigma_r|; \quad \sigma'_\phi = a_\phi \sigma_i; \quad \sigma'_r = a_r \sigma_i; \quad a_\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} = -a_r \quad (4.8)$$

В случае сферы, в виду осесимметричности, имеем:

$$\sigma_i = |\sigma_\phi - \sigma_r|; \quad \sigma'_\phi = a_\phi \sigma_i; \quad \sigma'_r = a_r \sigma_i; \quad a_\phi = \frac{1}{3}; \quad a_r = -\frac{2}{3}; \quad (4.9)$$

В таком случае для приращений верно:

$$\delta\sigma'_\phi = a_\phi \delta\sigma_i; \quad \delta\sigma'_r = a_r \delta\sigma_i; \quad (4.10)$$

и соотношение (4.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_k &= a_k (X(\sigma_i, q) \delta\sigma_i + Y(\sigma_i, q) \delta t) \\ X(\sigma_i, q) &= \frac{1}{2G(q)} + \frac{3}{2} \rho q F_2'(\sigma_i) + N(\sigma_i, q) Z(\sigma_i) \\ Y(\sigma_i, q) &= M(q) Z(\sigma_i); \quad Z(\sigma_i) = \frac{\Delta G}{2G_A G_M} \sigma_i + \frac{3}{2} \rho F_1(\sigma_i) \end{aligned} \quad (4.11)$$

где индекс  $k$  принимает либо значение компоненты  $r$ , либо  $\phi$ .

С другой стороны, из условия несжимаемости имеем:

$$u = \frac{C(t)}{r^n}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{C(t)}{r^{n+1}} \quad (4.12)$$

где  $n = 1$  для цилиндра и  $n = 2$  для сферы. Записывая (4.12) для приращений, имеем:

$$\delta u = \frac{\delta C(t)}{r^n}, \quad \delta\varepsilon_\phi = \frac{\delta C(t)}{r^{n+1}} \quad (4.13)$$

Для приращений интенсивности напряжений  $\delta\sigma_i$  в некоторой точке  $(t, r)$  верно:

$$\delta\sigma_i(t, r) = \sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \delta t, r) \quad (4.14)$$

где  $(t - \delta t)$  – предыдущий слой по  $t$ , на котором задача уже решена. Подставляя (4.13) и (4.14) в первое соотношение (4.11) для компоненты  $\phi$ , находим:

$$\frac{\delta C(t)}{a_\phi r^{n+1}} = X(\sigma_i(t, r), q) [\sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \delta t, r)] + Y(\sigma_i(t, r), q) \delta t \quad (4.15)$$

Функция  $q$  в полученном соотношении (4.15) есть функция от  $t$  и  $\sigma_i$ :

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t_\sigma)); \quad t_\sigma = t + \frac{\rho\sigma_i F_1(\sigma_i)}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \quad (4.16)$$

Правая часть соотношения (4.15) зависит только от независимых переменных  $r$  и  $t$  и неизвестной функции  $\sigma_i$ , т.е по сути (4.15) есть неявное задание функции  $\sigma_i$  от параметра  $\delta C(t)$  в некоторой точке  $(r, t)$ :

$$\sigma_i(t, r) = I(t, r, \delta C(t), \sigma_i(t - \delta t, r)) \quad (4.17)$$

Т.к. решение ищется в сетке по  $t$  с фиксированным шагом  $\delta t$ , то значение интенсивности  $\sigma_i(t - \delta t, r)$  из предыдущего слоя по  $t$  уже известно, а  $\delta C(t)$  является константой на данном слое по  $t$ . Таким образом (4.17) для фиксированного  $t$  задает зависимость функции  $\sigma_i$ , с постоянным параметром  $\delta C(t)$ , от  $r$ . Для замыкания системы используется проинтегрированное уравнение равновесия (2.45) (для цилиндра) и (3.10) (для сферы):

$$\int_1^\beta \sigma_i(t, r) \frac{dr}{r} = K |p_a - p_b| \quad (4.18)$$

где  $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$  для цилиндра и  $K = \frac{1}{2}$  для сферы. Подставляя интенсивность напряжений (4.17) для текущего слоя по  $t$  в (4.18) можно найти значение  $\delta C(t)$  для данного  $t$ . Таким образом, система (4.15) и (4.18) служит для нахождения неизвестных функций  $\sigma_i$  и  $\delta C(t)$ , через которые выражаются все неизвестные параметры задачи.

Для определения момента начала фазового превращения, т.е. начального значения  $t = t_0$ , решается упругая задача об оболочке под действием заданного внутреннего давления (внешнее давление для простоты не учитывается). Определяется значение  $\sigma_i^0 = \sigma_i(a)$  на внутренней поверхности оболочки, где интенсивность напряжений максимальна. Тогда начальное значение  $t_0$  определяется

из условия  $T = M_s^\sigma(a)$ , или:

$$t_0 = -\frac{\rho\sigma_i^0 F_1(\sigma_i^0)}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \quad (4.19)$$

В виду того, что в данной постановке  $q$  зависит от  $r$ , задача осложняется тем, что в первой части процесса на части отрезка  $[a, r_1]$  происходит прямое превращение, а на части  $[r_1, b]$  происходит упругое деформирование и справедливы упругие определяющие соотношения (4.20):

$$\frac{C(t_0)}{a_\phi r^{n+1}} = \frac{\sigma_i}{2G_A} \quad (4.20)$$

Координата границы начала фазового превращения  $r_1$  заранее неизвестна и должна находиться в процессе решения задачи. На последнем этапе процесса появляется зона  $[a, r_2]$ , где фазовый переход уже завершен и может происходить при определенных условиях, помимо упругого деформирования, структурный переход и справедливо определяющее соотношение (4.21), полученное из (4.15) путем подстановки  $q = 1$ :

$$\frac{\delta C(t)}{a_\phi r^{n+1}} = \delta\sigma_i \left( \frac{1}{2G_M} + \frac{3}{2}\rho F_2'(\sigma_i) \right) \quad (4.21)$$

тогда как на оставшейся части  $[r_2, b]$  фазовый переход еще продолжается. Наконец, возможна ситуация, когда существуют одновременно все три области  $[a, r_2]$ ,  $[r_2, r_1]$ ,  $[r_1, b]$ . Расчеты показывают, что для рассматриваемых в данной работе толщин, случай, когда на внутренней стороне оболочки фазовый переход уже прошел, а на внешней еще не начинался, не наступает. И такой случай возможен лишь для очень толстых оболочек. Поля температур, перемещений и радиальных напряжений непрерывны в точках  $r_1$  и  $r_2$ . По определению в точках  $r_1$  и  $r_2$  также непрерывна функция  $q$ . Из (4.16) следует, что в точках  $r_1$  и  $r_2$  непрерывна интенсивность напряжений и кольцевые напряжения.

Решение задачи также осложнено тем, что для каждой точки оболочки и для каждого слоя по  $t$  нужно проверять условия на возможность структурного перехода. В случае, если они не выполняются, нужно пренебречь последним слагаемым с  $B_{ij}$  в (4.5). В качестве условия для возможности структурного перехода в некоторой точке оболочки будем рассматривать следующий критерий:

$$\delta\sigma_i > 0 \quad \& \quad \sigma_i = \sigma_i^{(max)} \quad (4.22)$$

где  $\sigma_i^{(max)}$  – максимальное значение интенсивности напряжений за все время существования рассматриваемого мартенситного объема.

## 4.2 Алгоритм решения

Решение искалось в сетке по  $t$  с фиксированным шагом  $\delta t$  и в сетке по  $r$  с фиксированным шагом, разбивающим отрезок  $[1; \beta]$  на 50 равных отрезков (столько шагов достаточно, что графики выглядели «гладко»). Сначала для  $t = t_0$  (4.19) решается упругая задача и находятся все неизвестные величины. Далее на каждом слое по  $t$  решается задача определения координат начала и конца фазового перехода из условий  $t_\sigma = 0$  и  $t_\sigma = 1$  соответственно и после этого находятся все неизвестные параметры задачи на данном слое. Т.к. координаты фронта распространения фазового перехода находятся из интенсивности напряжений, которая заранее неизвестна, то применяется метод итераций для вычисления координат фронта. Рассмотрим алгоритм решения на некотором слое  $t_i$  ( $i \geq 1$ ) для некоторой ( $k$ )-ой итерации:

1. Взять интенсивности напряжений  $\sigma_i^{(k-1)}(t_i, r)$ , где  $(k-1)$  – предыдущая итерация для данного  $t_i$ . Если для данного  $t_i$  еще не было итераций, то в качестве  $\sigma_i^{(k-1)}(t_i, r)$  берется интенсивность  $\sigma_i(t_{i-1}, r)$  из предыдущего слоя  $t_{i-1}$ .
2. Для каждой координаты из сетки  $r$  вычислить значение  $t_\sigma$  (4.16) по напряжениям из предыдущей итерации  $\sigma_i^{(k-1)}(t_i, r)$ . Далее для каждой координаты  $r$  нужно выбрать разрешающее уравнение, согласно правилам:
  - если для данной координаты  $r$  получается, что  $t_\sigma \in (0, 1)$ , то рассматривается определяющее уравнение (4.15).
  - если для данной координаты  $r$  получается, что  $t_\sigma \leq 0$ , то вместо (4.15), рассматривается определяющее уравнение (4.20).
  - если для данной координаты  $r$  получается, что  $t_\sigma \geq 1$ , то вместо (4.15), рассматривается определяющее уравнение (4.21).
3. Для каждой координаты из сетки  $r$  на данном слое  $t_i$  нужно подставить в разрешающее уравнение, описанное выше, в качестве интенсивности напряжений из предыдущего слоя – значение  $\sigma_i(t_{i-1}, r)$  (в случае  $q = 0$  этого делать не понадобится).
4. Для каждой координаты в сетке  $r$ , из соответствующего разрешающего уравнения выразить интенсивность напряжений. Т.е. у нас получится

некая функция  $\sigma_i^{(implicit)}$ , которая зависит от  $r$  и неизвестного параметра  $\delta C_i$ , который суть константа для данного шага  $t_i$ .

5. Решить уравнение (4.18), где в качестве подынтегральной функции интенсивности напряжений выступает  $\sigma_i^{(implicit)}$ , и найти интенсивность напряжений  $\sigma_i^{(k)}(t_i, r)$  и параметр  $\delta C_i^{(k)}$  для данного  $t_i$  на данной итерации  $(k)$ .
6. Если  $(k)$  последняя итерация для данного  $t_i$ , то найденные параметры задачи записываются в ответ как решение задачи для данного шага  $t_i$  и мы переходим к шагу  $t_{i+1}$ . Иначе мы переходим к следующей итерации  $(k + 1)$  и нужно по-новой повторить все шаги, начиная с 1).

Задача решается до тех пор, пока фазовый переход пройдет на всей поверхности оболочки, т.е. когда параметр  $t_\sigma$  на внешней стороне оболочки станет больше, либо равен единицы. Количество необходимых итераций, на каждом шаге по  $t$ , определялось экспериментально. Обычно после третьей итерации найденные интенсивности  $\sigma_i$  и параметры  $\delta C$  не изменялись при дальнейших итерациях. Для надежности, результаты, представленные ниже, были посчитаны с числом итераций, равным десяти.

Чтобы выяснить оптимальный шаг  $\delta t$  для решения задачи, приведем решения одной и той же задачи на разных сетках по  $t$ . Сетка по  $r$  везде состоит из 50 отрезков – т.к. измельчение этой сетки не влияет на поиск фронта фазового перехода. Для модельного примера была выбрана сфера с толщиной  $\beta = 1.1$ , внутренним давлением  $p_a = 0.05$  и нулевым внешним давлением. Были выбраны сетки по  $t$  со следующими шагами:  $\delta t = 0.1$ ,  $\delta t = 0.05$ ,  $\delta t = 0.03$ ,  $\delta t = 0.02$ ,  $\delta t = 0.01$ ,  $\delta t = 0.005$  и  $\delta t = 0.0025$  – что соответствует приблизительно 10, 20, 30, 50, 100, 200 и 400 шагам по  $t$ . Далее выбиралась сетка с самым мелким шагом (т.е. сетка с  $\delta t = 0.0025$ ) и на нее с помощью линейной интерполяции проектировались решения с более крупных сеток. На рисунке 4.1 представлены графики сравнения функций  $C(t)$  и интенсивности напряжений на внутренней стороне сферы  $\sigma_i(r = 1)$  для разной величины шага в сетке  $t$ .

Для количественной оценки величины различия между кривыми  $C(t)$  на рисунке 4.1 а) выделим в качестве модельной кривую, построенную для самого мелкого шага  $\delta t = 0.0025$ , и назовем ее  $f$ . Остальные кривые  $g_k$  будем сравни-

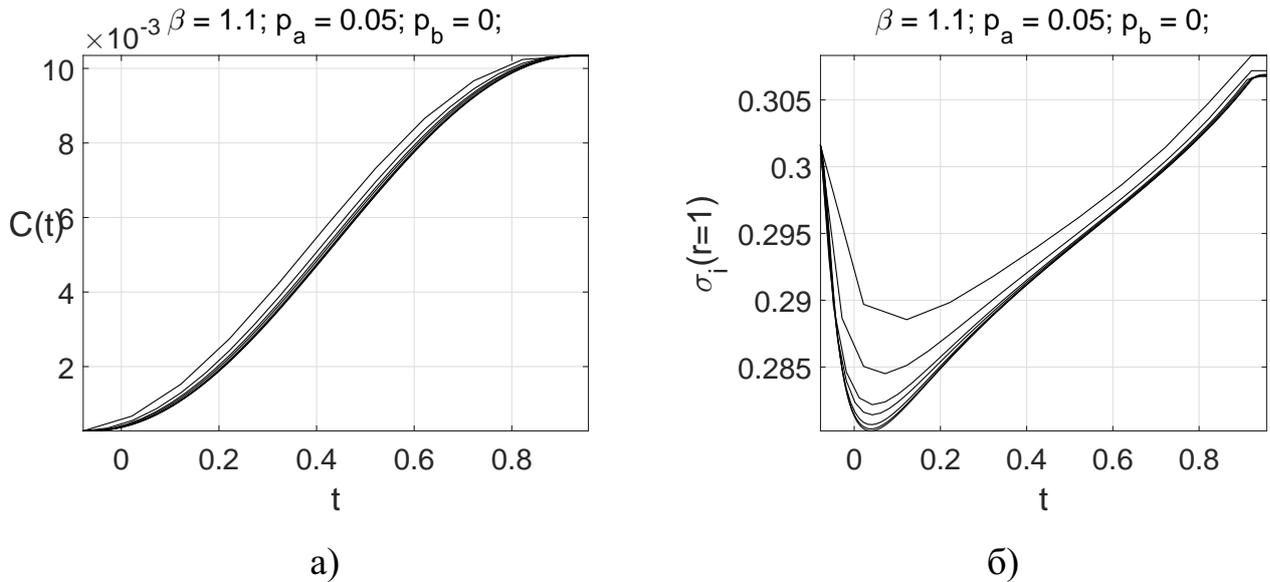


Рисунок 4.1 — Сравнение  $C(t)$  а) и интенсивности напряжений на внутренней стороне сферы  $\sigma_i(r = 1)$  б) на сетках с разным шагом – сверху вниз кривые, посчитанные на сетках с шагами  $\delta t = 0.1, \delta t = 0.05, \delta t = 0.03, \delta t = 0.02, \delta t = 0.01, \delta t = 0.005$  и  $\delta t = 0.0025$  соответственно.

вать с модельной кривой по формуле:

$$error_k = \frac{\|f(t) - g_k(t)\|}{\|f(t)\|}, \quad \|A(t)\| = \sqrt{\int_{t_0}^{t_M} [A(t)]^2 dt} \quad (4.23)$$

где  $t_M$  суть крайняя правая координата сетки  $t$ . На рисунке 4.2 построен график изменения величины относительной ошибки различия кривых  $C(t)$ , рассчитанной по формуле (4.23) для кривых  $f$  и  $g_k$ , в зависимости от количества шагов в сетке. Из графика на рисунке 4.2 видно, что при измельчении сетки в два раза, величина относительной ошибки различия кривых уменьшается более чем в два раза.

Исходя из полученных данных, можно сделать вывод, что если нужно получить очень точную кривую (под точной мы будем понимать такую кривую, что при укрупнении шага сетки этой кривой в два раза – величина относительной ошибки различия между новой кривой и точной кривой не превышала бы  $10^{-15}$ ), то необходимо взять самую мелкую сетку с  $\delta t = 0.0025$  и измельчить ее приблизительно 37.5 раз. При этом величина относительной ошибки различия кривой с сеткой  $\delta t = 0.0025$  и с сеткой, измельченной в 37.5 раз, будет меньше 0.005. Чисто эмпирически получено, что компьютерное время нужное для решения задачи, приблизительно пропорционально количеству шагов в сетке по  $t$ . Например, время, нужное для решения задачи для данной сферы с сеткой

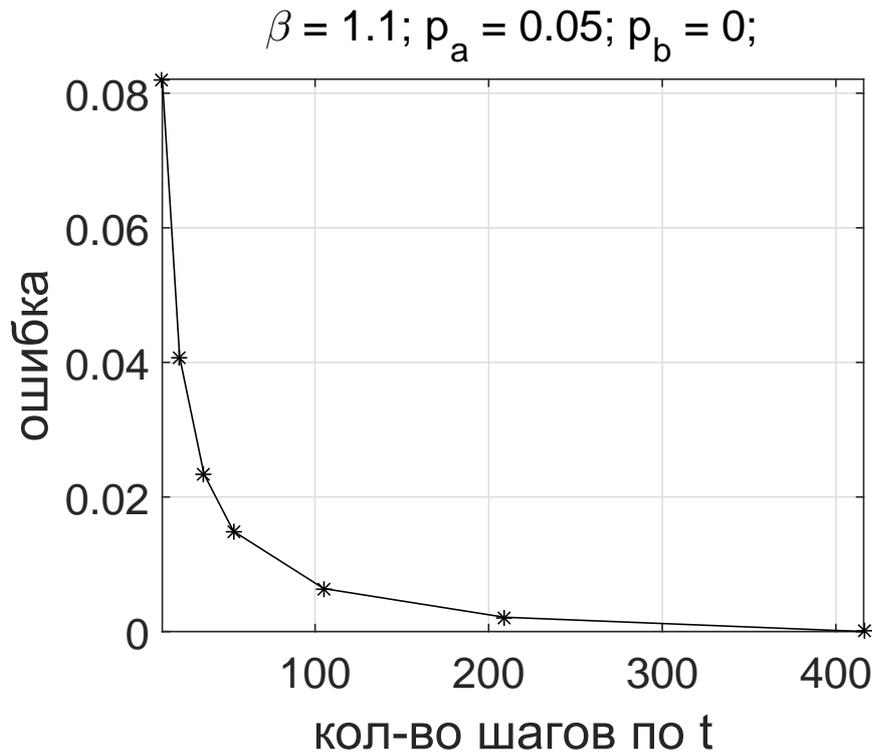


Рисунок 4.2 — Зависимость величины относительной ошибки различия кривых  $C(t)$ , рассчитанная по формуле (4.23) для кривых  $f$  и  $g_k$ , от количества шагов в сетке.

$\delta t = 0.0025$ , составляет 1,5 часа. Чисто гипотетически, время, нужное для подсчета точной кривой, составило бы более 33 миллионов лет и лишено смысла, т.к. за это время появятся более мощные компьютеры.

Все решения, представленные ниже, посчитаны на сетке с  $\delta t = 0.01$ . Как следует из рисунка 4.2, величина ошибки различия между кривой с  $\delta t = 0.01$  (100 шагов) и точной кривой не превышает 1.3%. Погрешность вычислений на такой сетке, посчитанная как относительная невязка уравнения (4.18), не превосходит 0.007% для цилиндра и 0.01% для сферы (при этом толщина оболочки в большей мере влияет на величину невязки, нежели чем приложенные нагрузки).

### 4.3 Анализ полученных решений

Ниже представлены графики решений в зависимости от  $t$  для разных значений  $r$  (внутреннее, срединное и внешнее сечение) и от  $r$  для разных значений  $t_1, \dots, t_j, \dots, t_M$ , где  $t_1$  соответствует первому шагу по  $t$  после начала фазового пе-

перехода на внутренней стороне (т.е.  $t_1 = t_0 + \delta t$ ), а  $t_M$  – окончанию фазового перехода на внешней стороне; остальные промежуточные  $t_j$  ( $j > 1, j < M$ ) выбраны так, чтобы сетка  $t_1, \dots, t_j, \dots, t_M$  была с постоянным шагом. На самих графиках нарисованы также точки, которые иллюстрируют положение координаты начала (сплошные точки) и окончания (выколотые точки) фазового перехода для данных кривых. В общем случае, для каждого фронта фазового перехода построено по 2 точки, таким образом, что фронт фазового перехода ( $t_i^{front}; r_i$ ) ( $i = 1, 2$ ) всегда находится на отрезке между этими точками. В случае если точек для соответствующего фронта фазового перехода нет на кривой – значит он либо еще не дошел, либо уже прошел. Если точка всего одна – значит точки совпадают.

### 4.3.1 Цилиндр

Для построения графиков использовались цилиндры со следующими параметрами:  $\beta = 1.1$  и относительно среднее давление  $p_a = 0.05$ ;  $\beta = 1.1$  и относительно высокое давление  $p_a = 0.1$ ;  $\beta = 1.5$  и относительно низкое давление  $p_a = 0.1$ ;  $\beta = 1.5$  и относительно высокое давление  $p_a = 0.3$ . Для понимания того, как начинается и заканчивается фазовый переход, построим графики зависимости  $t_\sigma$  от  $t$  для разных значений  $r$  и  $t_\sigma$  от  $r$  для разных значений  $t$  (рисунки 4.3 и 4.4 соответственно). Как следует из рисунка 4.3 чем толще цилиндр и чем выше приложенные нагрузки – тем больше шагов по  $t$  нужно сделать (т.е. тем больше охладить цилиндр), чтобы фронт фазового перехода начался (либо закончился) на всей поверхности цилиндра. Также видно, что в случае высоких нагрузок и толщин ближе к концу фазового перехода разброс значений  $t_\sigma$  на внутренней половине тела оболочки становится выше, чем на внешней половине. Как видно из рисунка 4.4 в точках фронта фазового перехода кривые могут терпеть излом, что связано с «переходом» от упругих определяющих соотношений к определяющим соотношениям для СПФ.

Для большей наглядности того, как именно развивается фронт фазового перехода, построим графики зависимости параметра фазового состава  $q$  от  $r$  для разных значений  $t$  (рисунок 4.5). Из рисунка 4.5 видно, что  $q(r)$  не является горизонтальной прямой (особенно это хорошо видно для толстой трубы и высоких нагрузок). При этом тангенс угла наклона кривой  $q(r)$  в начале фазового пере-

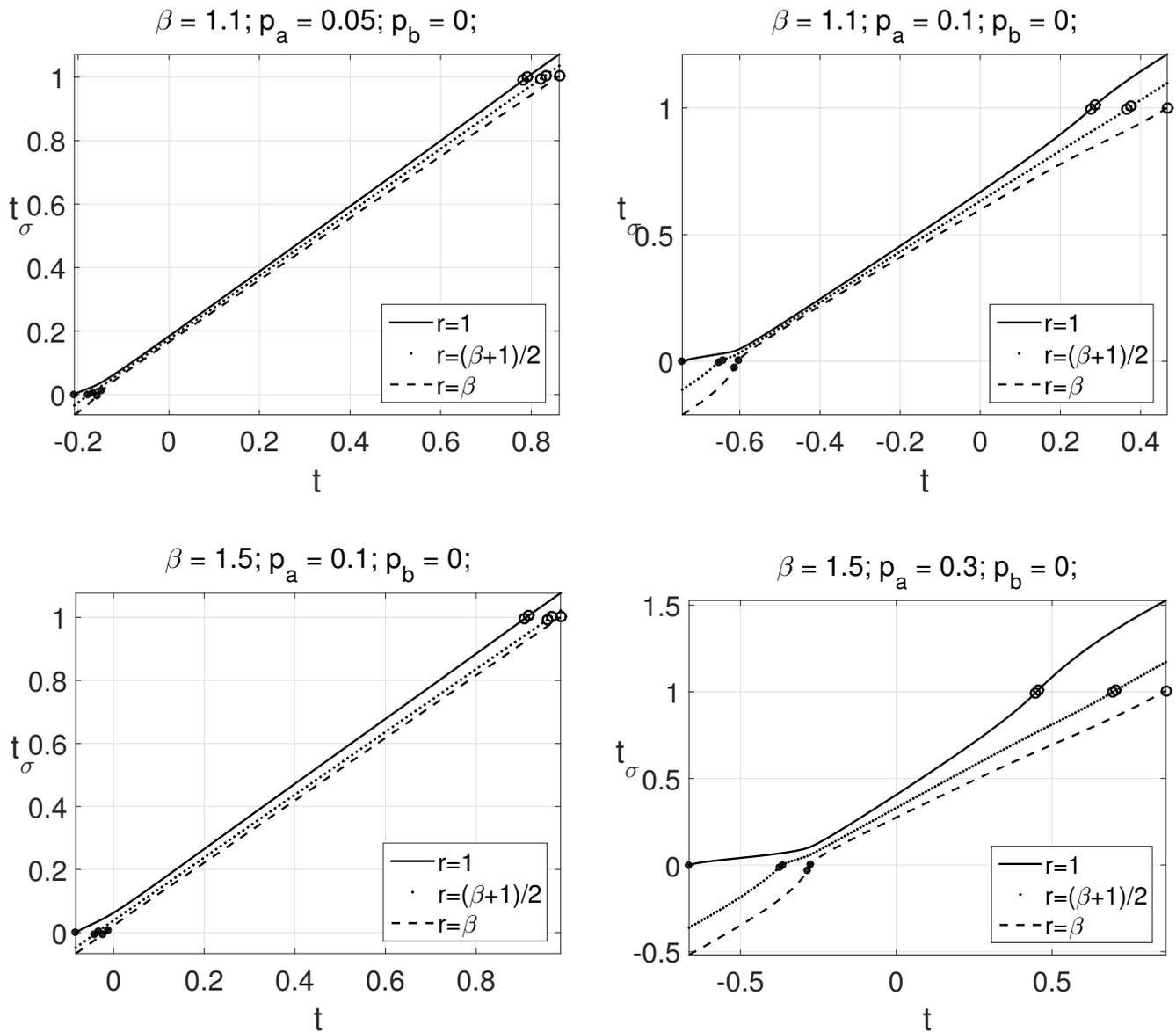


Рисунок 4.3 — Цилиндр. Зависимость параметра  $t_\sigma$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

хода близок к нулю и не равен нулю в конце фазового перехода. При этом, даже для тонкого цилиндра  $\beta = 1.1$  с относительно средним давлением  $p_a = 0.05$  и для толстого цилиндра  $\beta = 1.5$  с относительно низким давлением  $p_a = 0.1$  негоризонтальность  $q(r)$  имеет место быть. Таким образом, ожидаемо получилось, что решения задачи в двух постановках (при равномерном распределении по радиусу параметра фазового состава и температуры) дают различные результаты, которые становятся близки друг к другу для тонкостенных цилиндров и невысоких нагрузок.

В масштабах рисунка 4.5 не видно, как развивается фронт фазового перехода – построим соответствующие графики для начала фазового перехода на внутренней стороне (рисунок 4.6) и окончания фазового перехода на внешней стороне (рисунок 4.7).

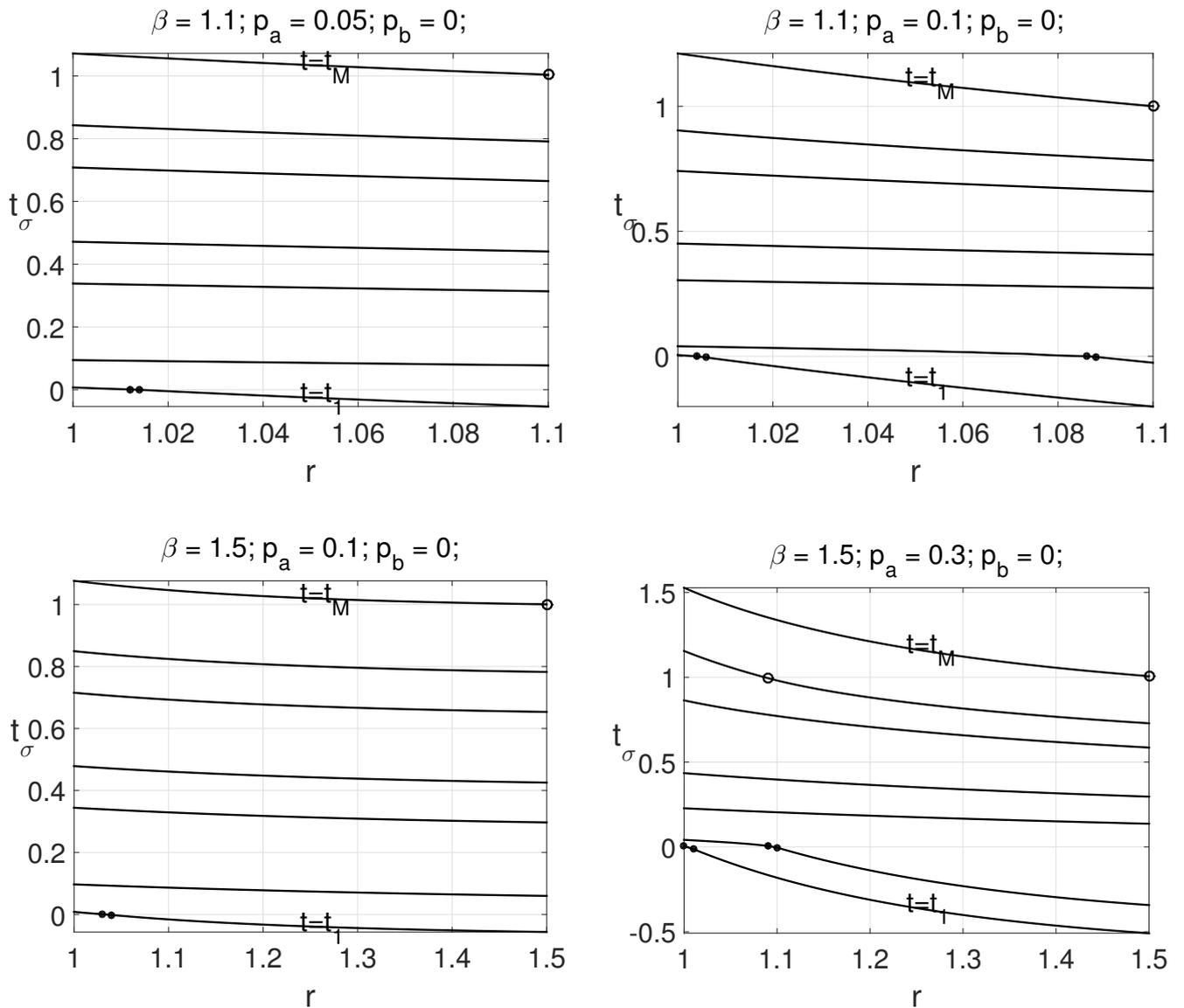


Рисунок 4.4 — Цилиндр. Зависимость параметра  $t_\sigma$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

Как следует из рисунков 4.6 и 4.7 чем выше нагрузки, тем больше шагов по  $t$  нужно взять, чтобы фазовый переход начался/закончился на всей поверхности цилиндра. Кроме того, на внешней стороне цилиндра кривые для тонкого цилиндра  $\beta = 1.1$  имеют выпуклость вверх, чего нельзя сказать о кривых для толстого цилиндра  $\beta = 1.5$ .

Построим графики зависимости параметра фазового состава  $q$  от  $t$  для разных значений  $r$  (рисунок 4.8). Как видно из графиков на рисунке 4.8  $q$  является монотонной функцией  $t$ , при этом для цилиндра  $\beta = 1.5$  и  $p_a = 0.3$  особенно хорошо видно, что по ходу развития фазового перехода возрастает разница по доле мартенситной фазы между сечениями цилиндра (это связано с поведением функции  $t_\sigma$ , представленной выше). Кроме того, для толстостенного цилиндра  $\beta = 1.5$  с относительно низким давлением  $p_a = 0.1$  значения  $q$  на внутрен-

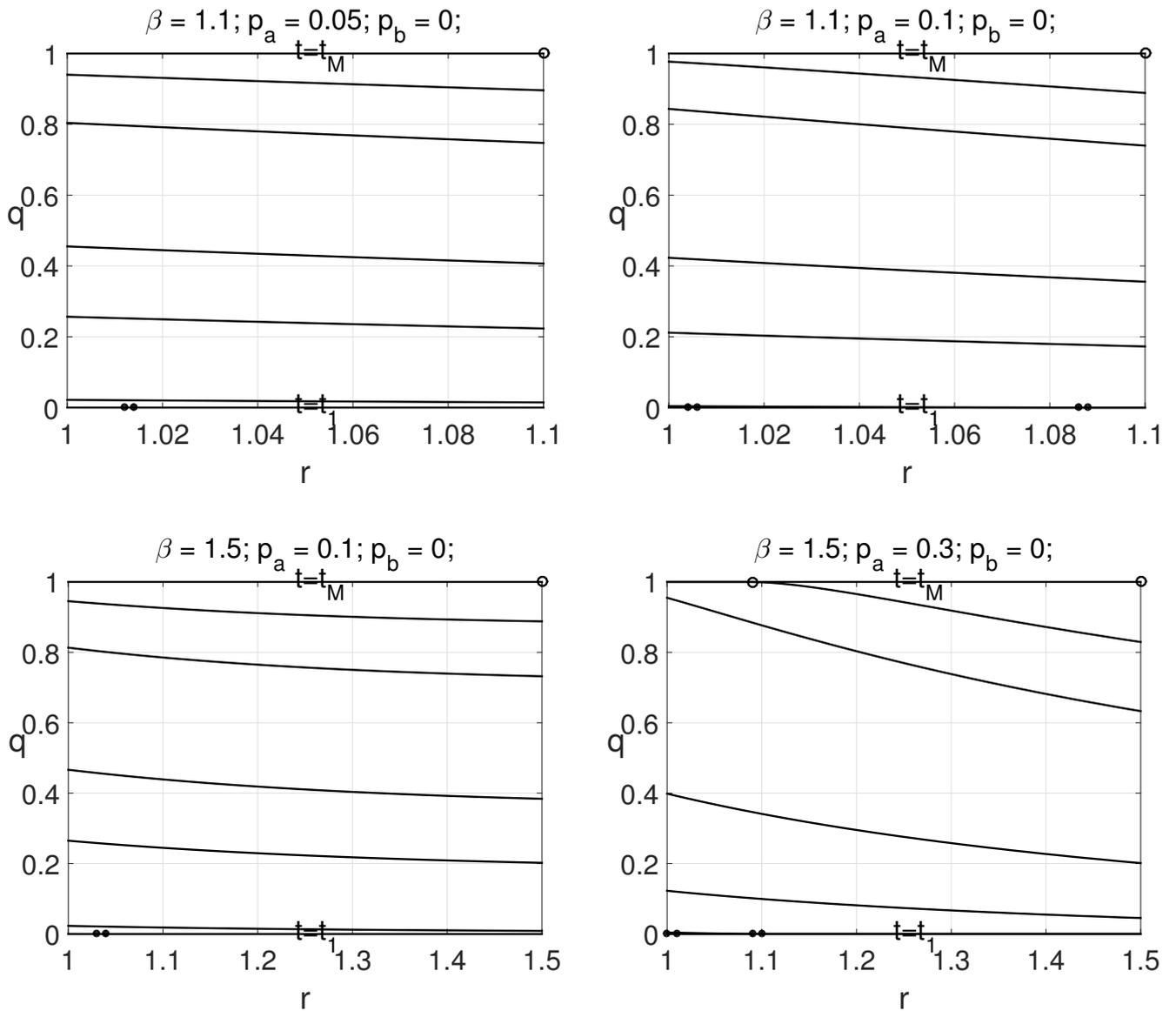


Рисунок 4.5 — Цилиндр. Зависимость фазового состава  $q$  от  $r$  для разных значений  $t$  (чем больше  $t$ , тем выше кривая).

ней стороне цилиндра отличаются от значений  $q$  на срединном сечении гораздо больше, нежели отличаются соответствующие значения между срединным и внешним сечениями.

Построим графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от  $t$  для разных значений  $r$  (рисунок 4.9). Как видно из рисунка 4.9 интенсивность напряжений не является монотонной функцией и применять ПАПН для данной постановки нельзя. Кроме того, на срединном сечении наблюдается горб, который возникает в начале фазового перехода на срединном сечении и его появление связано с «переходом» от определяющих соотношений для упругого тела к определяющим соотношениям для СПФ. Величина и высота горба зависит от толщины цилиндра и приложенных нагрузок, на данных графиках он имеет «вы-

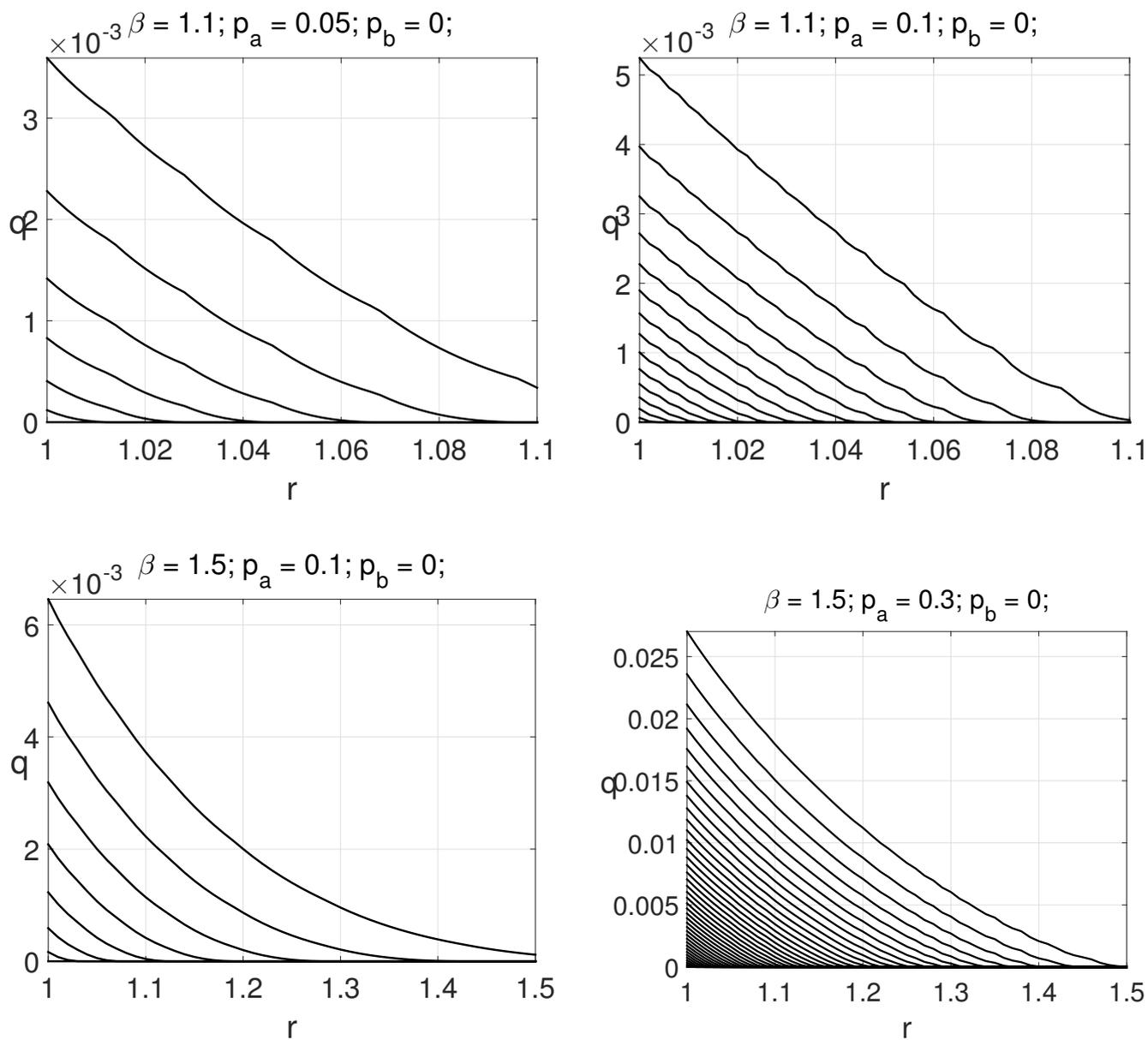


Рисунок 4.6 — Цилиндр. Развитие фронта фазового перехода на внутренней стороне (чем больше  $t$ , тем выше кривая). Разница между  $t$  для соседних кривых равна  $\delta t$ .

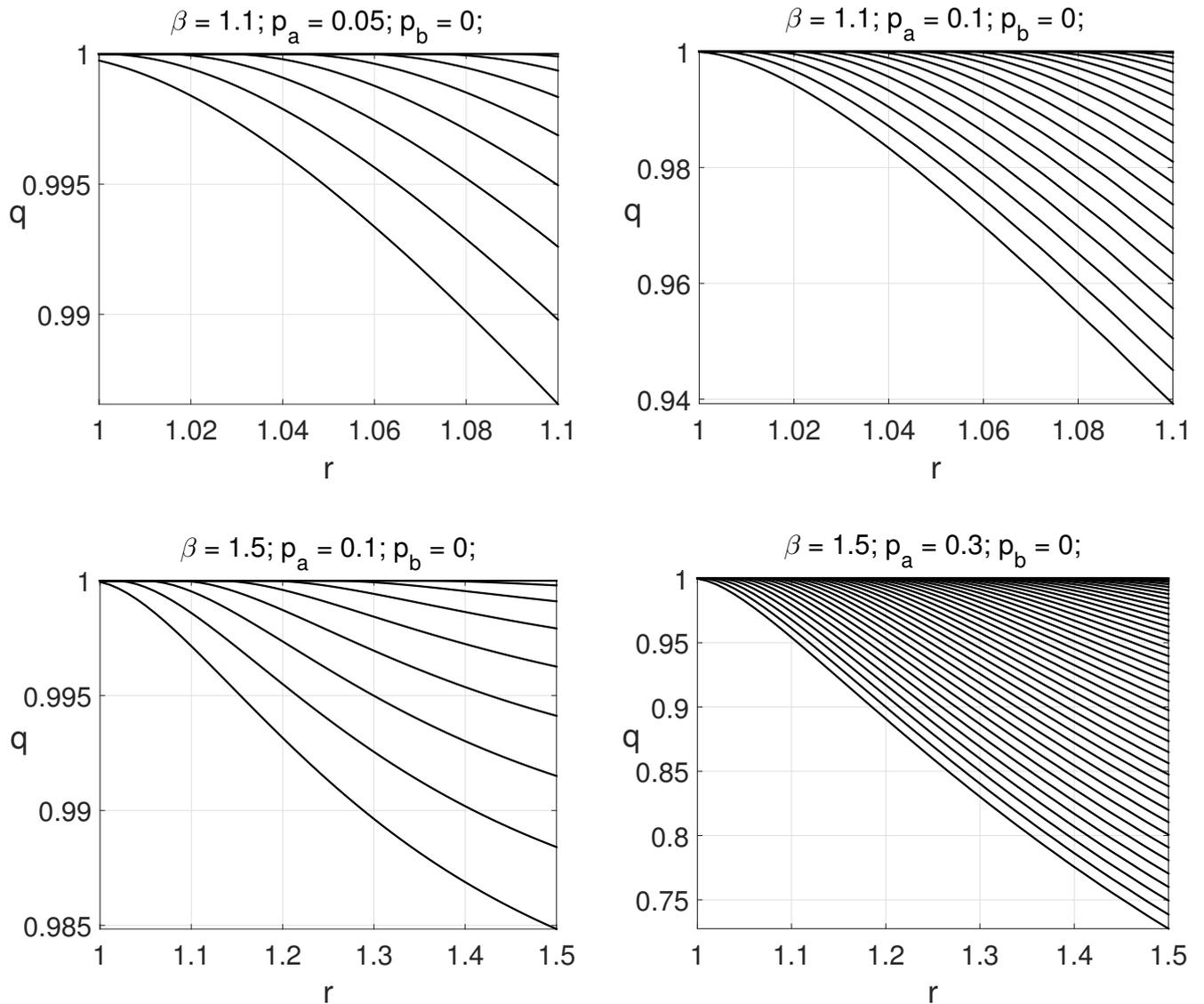


Рисунок 4.7 — Цилиндр. Окончание фазового перехода на внешней стороне (чем больше  $t$ , тем выше кривая). Разница между  $t$  для соседних кривых равна  $\delta t$ .

пуклость» вверх. Из рисунка 4.9 видно, что значения интенсивности напряжений на внутренней, срединной и внешней цилиндрических поверхностях различаются не сильно.

Построим графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от  $r$  для разных значений  $t$  (рисунок 4.10). Как видно из рисунка 4.10 интенсивность напряжений всегда убывает по радиусу. Излом кривых на рисунке связан с фронтом фазового перехода.

Построим графики зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $t$  для разных значений  $r$  (рисунок 4.11). Как видно из рисунка 4.11 кольцевые напряжения на внутренней стороне резко падают в начале прямого перехода, при этом относительная величина провала тем выше, чем больше толщина цилиндра. Т.к. кольцевые напряжения находятся из интенсивности напряжений, то здесь так-

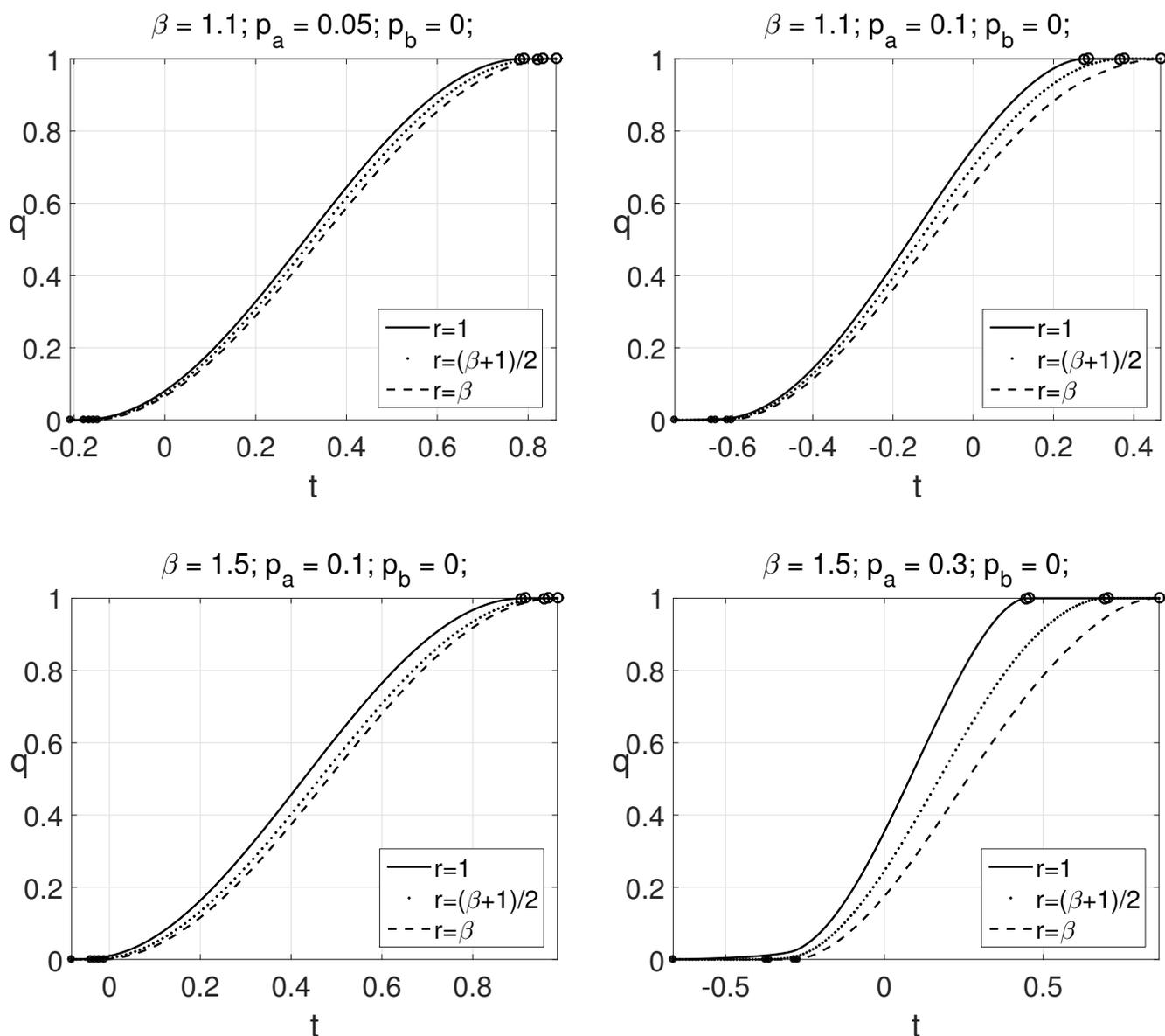


Рисунок 4.8 — Цилиндр. Зависимость фазового состава  $q$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

же присутствует горб фазового перехода на срединном сечении. Кроме того, в отличие от интенсивности напряжений, кольцевые напряжения для внешнего и внутреннего сечений могут пересекать кривую для срединного сечения. Более того, в некоторый момент кольцевые напряжения на внутренней стороне становятся меньше кольцевых напряжений на внешней стороне. Этого не наблюдается только для случая толстостенного цилиндра  $\beta = 1.5$  и относительно низкого давления  $p_a = 0.1$ .

На рисунке 4.12 представлены графики зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $r$  для разных значений  $t$ . Как видно из рисунка 4.12 максимальное значение кольцевых напряжений для данных муфт либо равно, либо превосходит на незначительный процент кольцевое напряжение на внутренней стороне

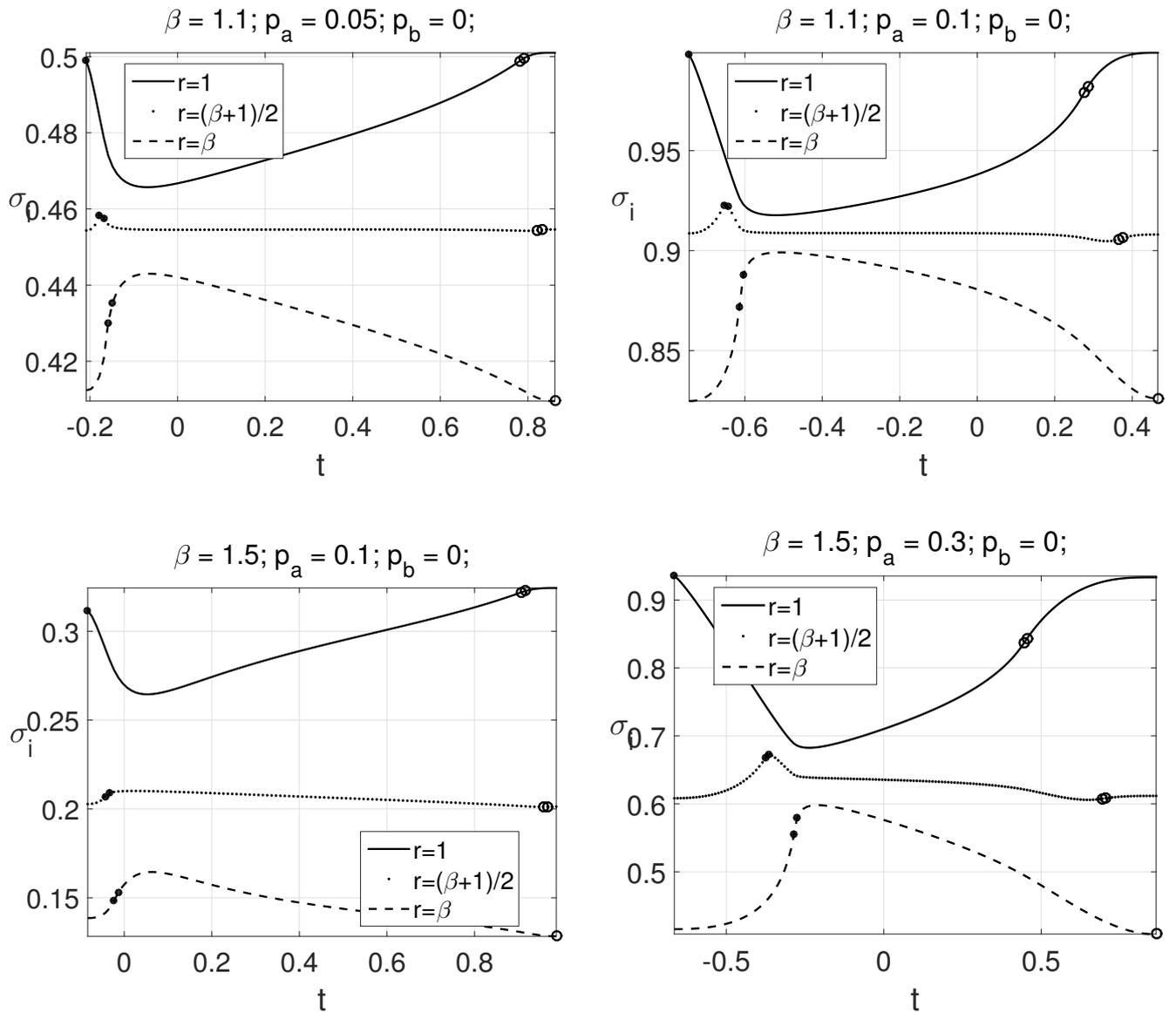


Рисунок 4.9 — Цилиндр. Кривые  $\sigma_i$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

цилиндра в момент  $t = t_M$ . При этом в отличие от интенсивности напряжений, кольцевые напряжения необязательно являются убывающими функциями по  $r$ .

На рисунках 4.13 и 4.14 построены графики зависимости температуры  $T$ , посчитанные через напряжения по формулам (1.4) с учетом (4.2), от  $r$  для разных значений  $t$  и от  $t$  для разных значений  $r$  соответственно. Как видно из графиков 4.13 и 4.14 (кривые на данном рисунке совпадают) температура  $T$  не меняется по  $r$  и является линейной функцией от  $t$ , что подтверждает правильность полученных результатов.

Построим графики зависимости радиальной деформаций  $\varepsilon_r$  от  $t$  для разных значений  $r$  (рисунок 4.15). Как видно из графиков на рисунке 4.15 радиальные деформации являются монотонной функцией от  $t$  и их вид принципиально ничем не отличается от соответствующих кривых в постановке, когда  $q$  не за-

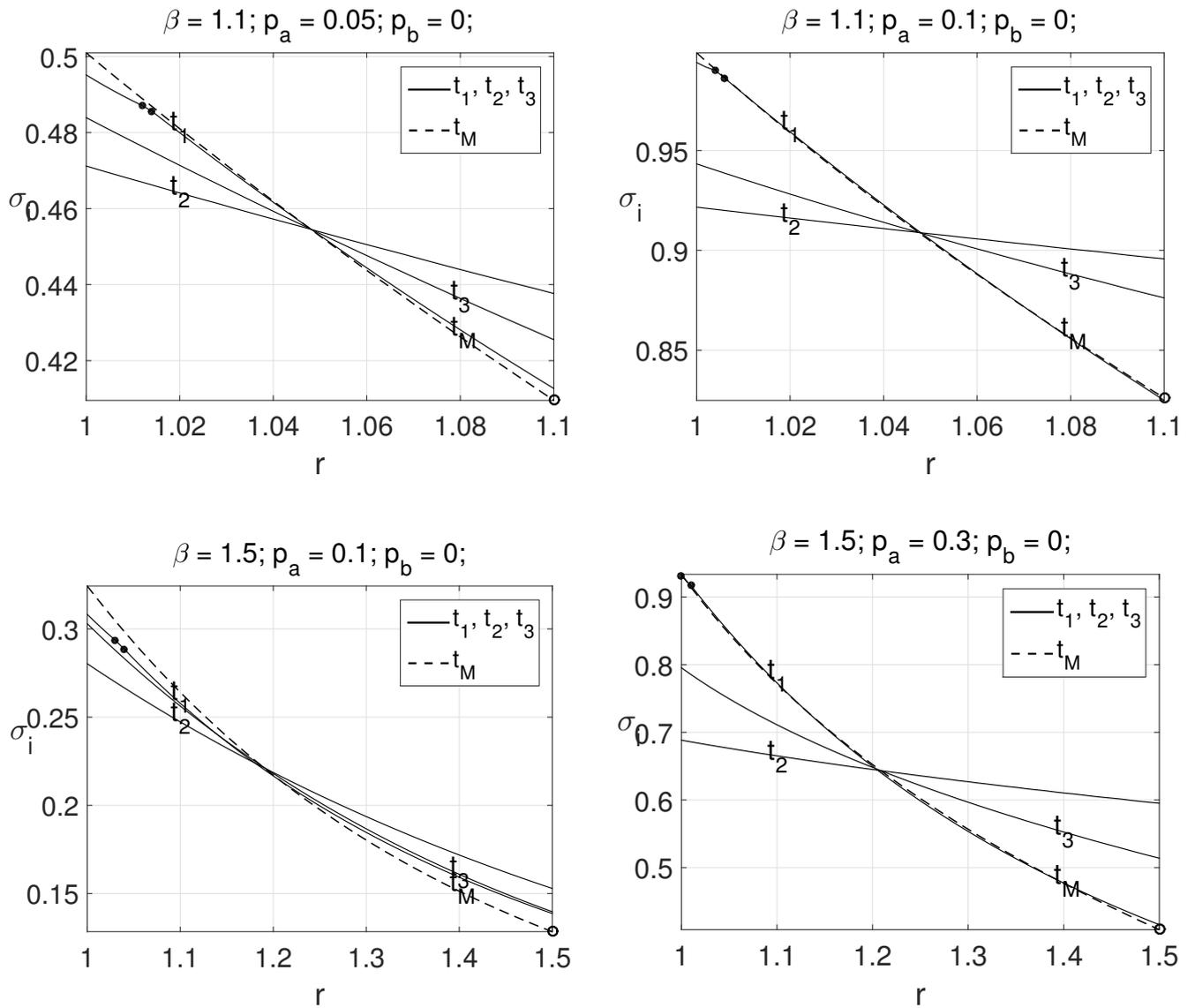


Рисунок 4.10 — Цилиндр. Кривые  $\sigma_i$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

висит от  $r$ . Кроме того с ростом нагрузок (и толщин) растет величина горизонтального участка в начале фазового перехода, т.е. растет задержка в «раздаче» цилиндра.

На рисунке 4.16 построены графики зависимости радиальной деформации  $\varepsilon_r$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

### Практические расчеты

Как было описано в первой главе коммерческим производством муфт из нитинола сегодня занимается американская компания AeroFit [7], выпускающая

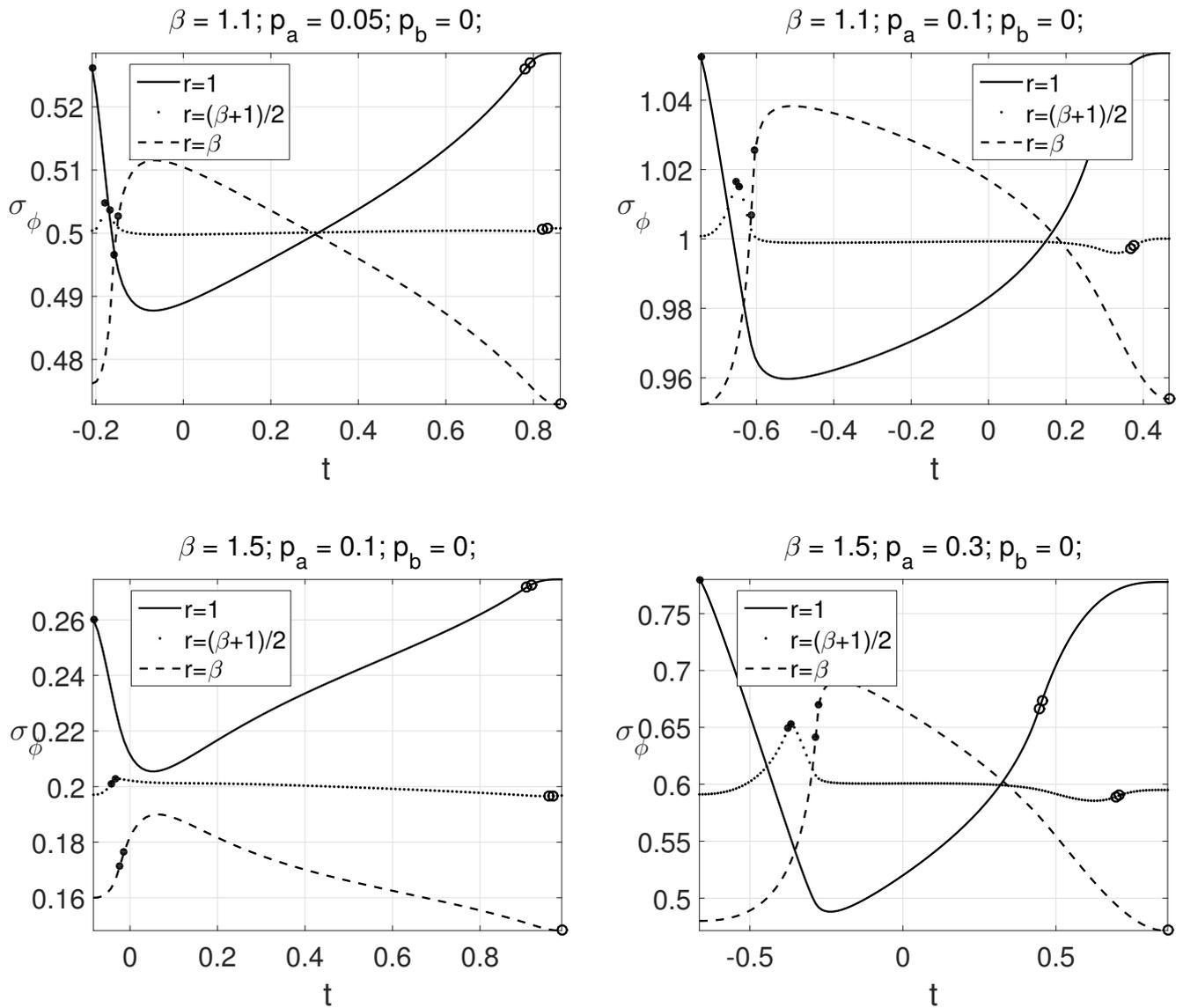


Рисунок 4.11 — Цилиндр. Кривые зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

муфты для труб диаметром от 1/4 до 1.5 дюймов. Рассмотрим, к примеру, муфты модели *4PHS111*, которые используются в американском стратегическом военно-транспортном самолёте «Boeing» C-17, английском штурмовике вертикального взлёта и посадки «Harrier II», среднем самолёте бизнес-класса «Cessna» Model 750. Согласно каталогу производителя, такие муфты имеют рабочее давление до 4000 psi (приблизительно 27,5 МПа) и должны устанавливаться на трубы из нержавеющей стали марки 21Cr-6Ni-9Mn. Рабочий диапазон температур такого ТМС составляет от 220°K до 408°K. Муфта *4PHS111* согласно каталогу производителя, имеет следующие размеры:

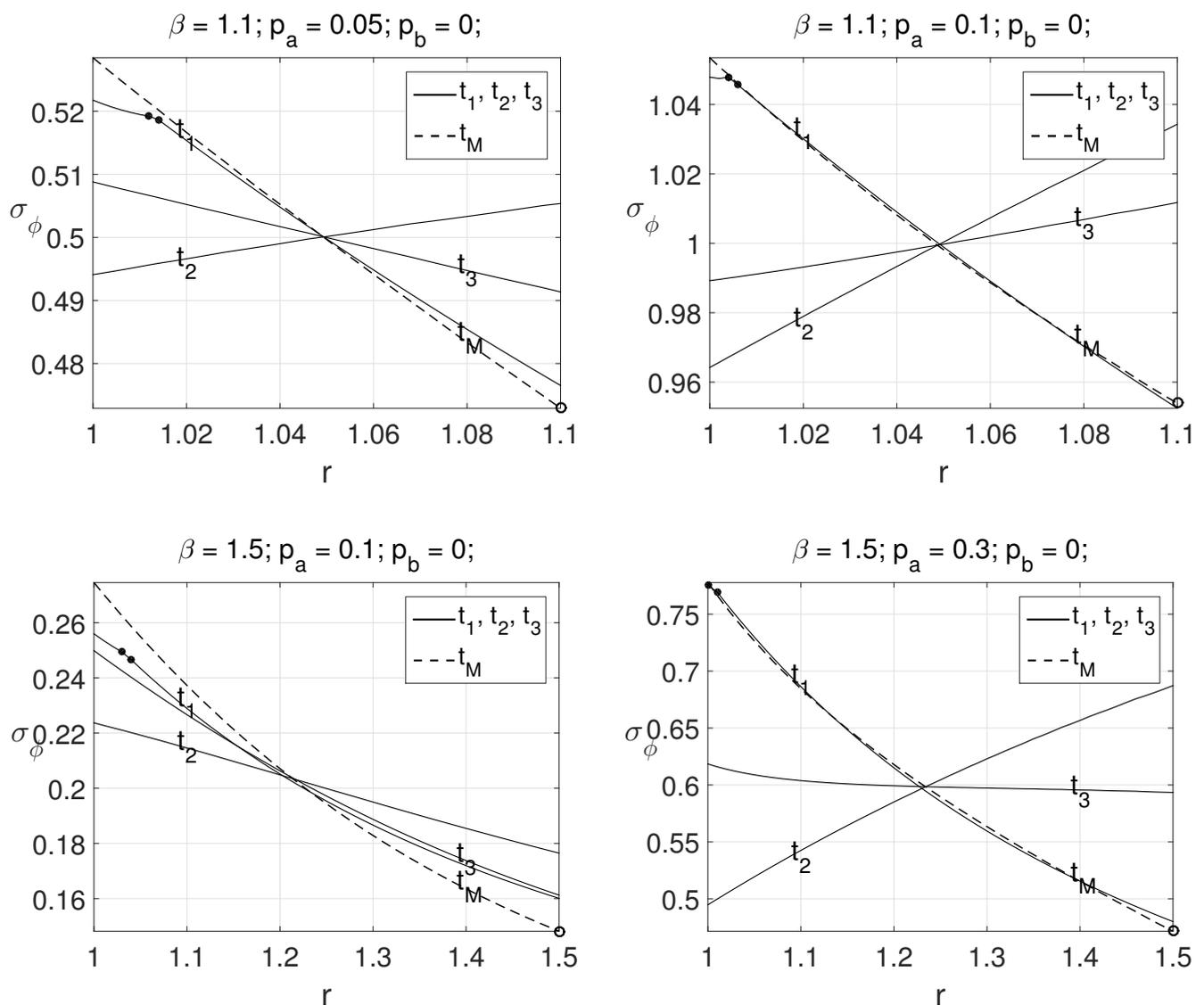


Рисунок 4.12 — Цилиндр. Кривые зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

- внутренний диаметр муфты после «раздачи» составляет 1.009 дюйм и она должна насаживаться на упругую трубу со внешним диаметром 1 дюйм
- внешний диаметр после обратного превращения равен 1.275 дюйм.

Для простоты будем считать, что муфта имеет постоянную толщину с внутренним диаметром 1 дюйм и внешним – 1.275 дюйм (т.е.  $\beta = 1.275$ ). А предварительная «раздача» составляет 4%. Кроме того, в каталоге нет упоминания из какого конкретно нитинола сделаны муфты, поэтому расчеты будем проводить для сплава  $Ti_{50}Ni_{47}Fe_3$ , который подходит для данных эксплуатационных температур ( $M_s = 150^\circ K$ ,  $M_f = 100^\circ K$ ,  $A_s = 195^\circ K$ ,  $A_f = 220^\circ K$  [110]). Требуется определить давление  $p_a^{ext}$ , необходимое для предварительной «раздачи» муфты и решить задачу о прямом превращении в этой муфте.

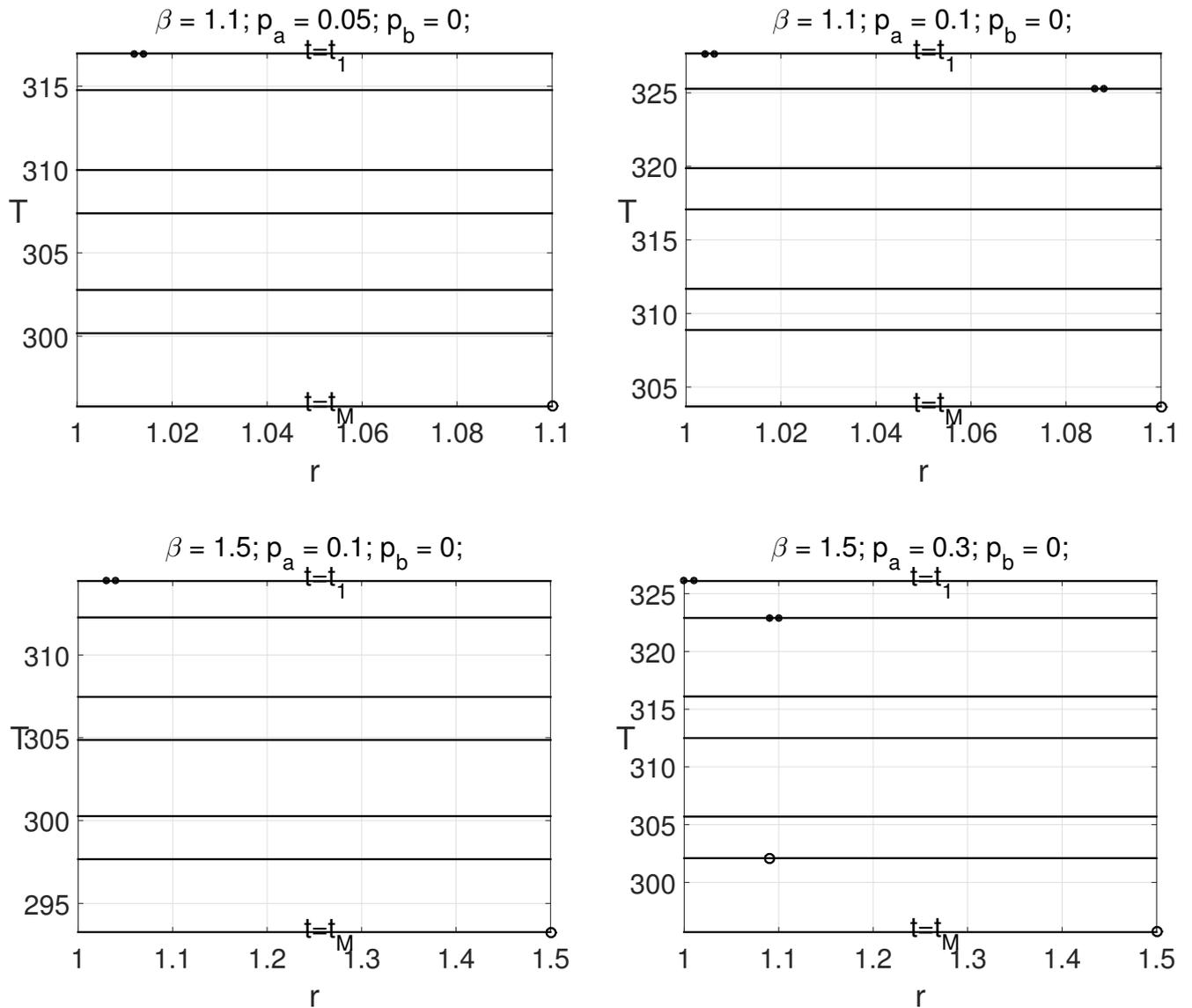


Рисунок 4.13 — Цилиндр. Зависимость температуры  $T$  от  $r$  для разных значений  $t$  (чем больше  $t$ , тем ниже кривая).

Рассматривается толстостенный цилиндр в постановке с плоской деформации, равномерным распределением температуры  $T$  по радиусу  $r$ , с учетом упругих деформаций, материал считается несжимаемым и упруго несжимаемым, внешнее давление  $p_b$  не учитывается. Для нахождения необходимого давления «раздачи» муфты необходимо решать исходную задачу о поиске неизвестных полей напряжений и деформаций для произвольных значений  $p_a$  до тех пор, пока радиальная деформация на внутренней стороне муфты в момент, когда только что закончился фазовый переход на внешней стороне муфты, не станет равной 4%. Для ускорения этого процесса необходимо найти начальное приближение давления «раздачи»  $p_a^{ext_0}$  — для этого решим аналогичную задачу для цилиндра в самой простой постановке, когда  $q$  не зависит от  $r$ , материал

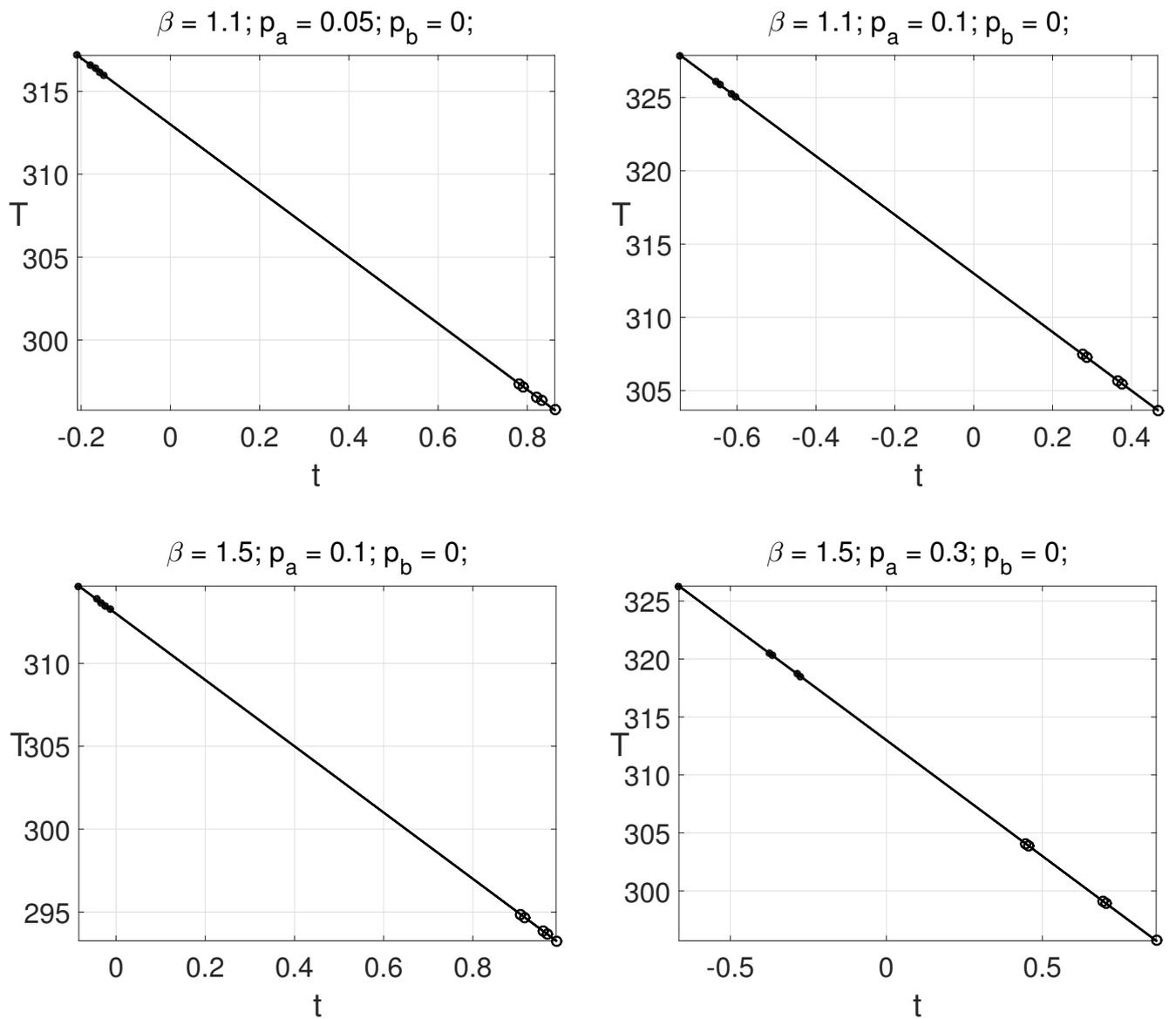


Рисунок 4.14 – Цилиндр. Зависимость температуры  $T$  от  $t$  для разных значений  $r$  (кривые совпадают).

несжимаемый, упругие деформации не учитываются и рассматривается задача о плоской деформации. В этом случае справедливо:

$$\varepsilon_\phi(q = 1, \quad r = 1) = 0.04 \quad (4.24)$$

тогда функция  $C(q)$  из (2.12), ввиду линейности имеет вид:

$$C(q) = \Lambda q = 0.04q \quad (4.25)$$

Из (2.26) следует, что

$$\sigma_i = F^{-1} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Lambda}{r^2 \rho} \right] \quad (4.26)$$

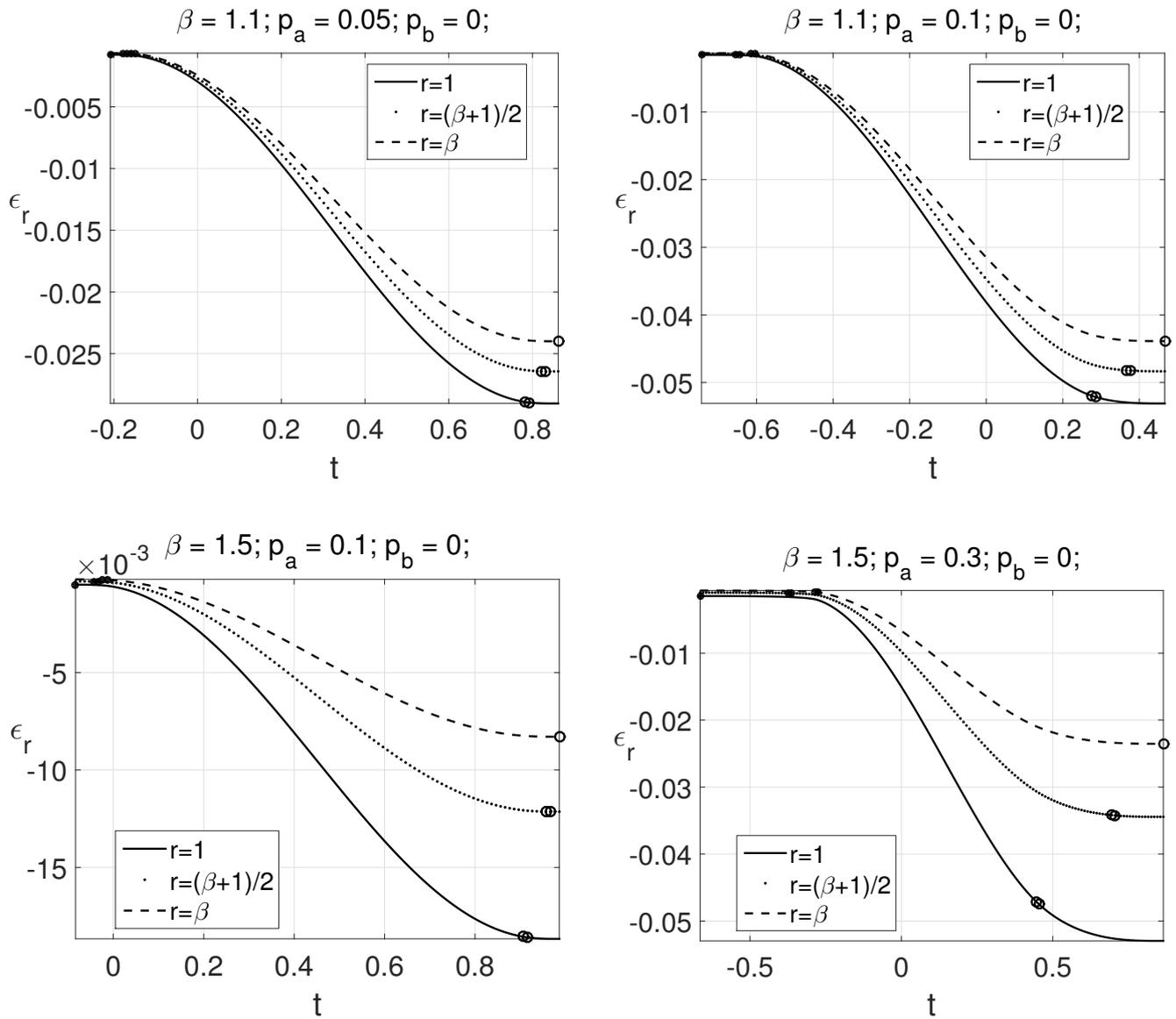


Рисунок 4.15 — Цилиндр. Зависимость радиальной деформаций  $\epsilon_r$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

и давление «раздачи»  $p_a^{ext_0}$  будет определяться по формуле из (2.27):

$$p_a^{ext_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^\beta \frac{\sigma_i}{r} dr \quad (4.27)$$

Из (4.27) получаем  $p_a^{ext_0} = 0.18$ . С использованием этого начального приближения находим, что значение давления для предварительной «раздачи» в 4% должно составлять  $p_a^{ext} = 0.1758$ , что в размерных величинах составляет 31 МПа. В итоге получено, что муфту под действием внутреннего давления в 31 МПа необходимо охлаждать со  $160^\circ K$  до  $105^\circ K$ . Получено, что интенсивность напряжений в трубе не превышает 125 МПа, что допустимо, учитывая, что дислокационный предел текучести для мартенсита составляет около 400 МПа.

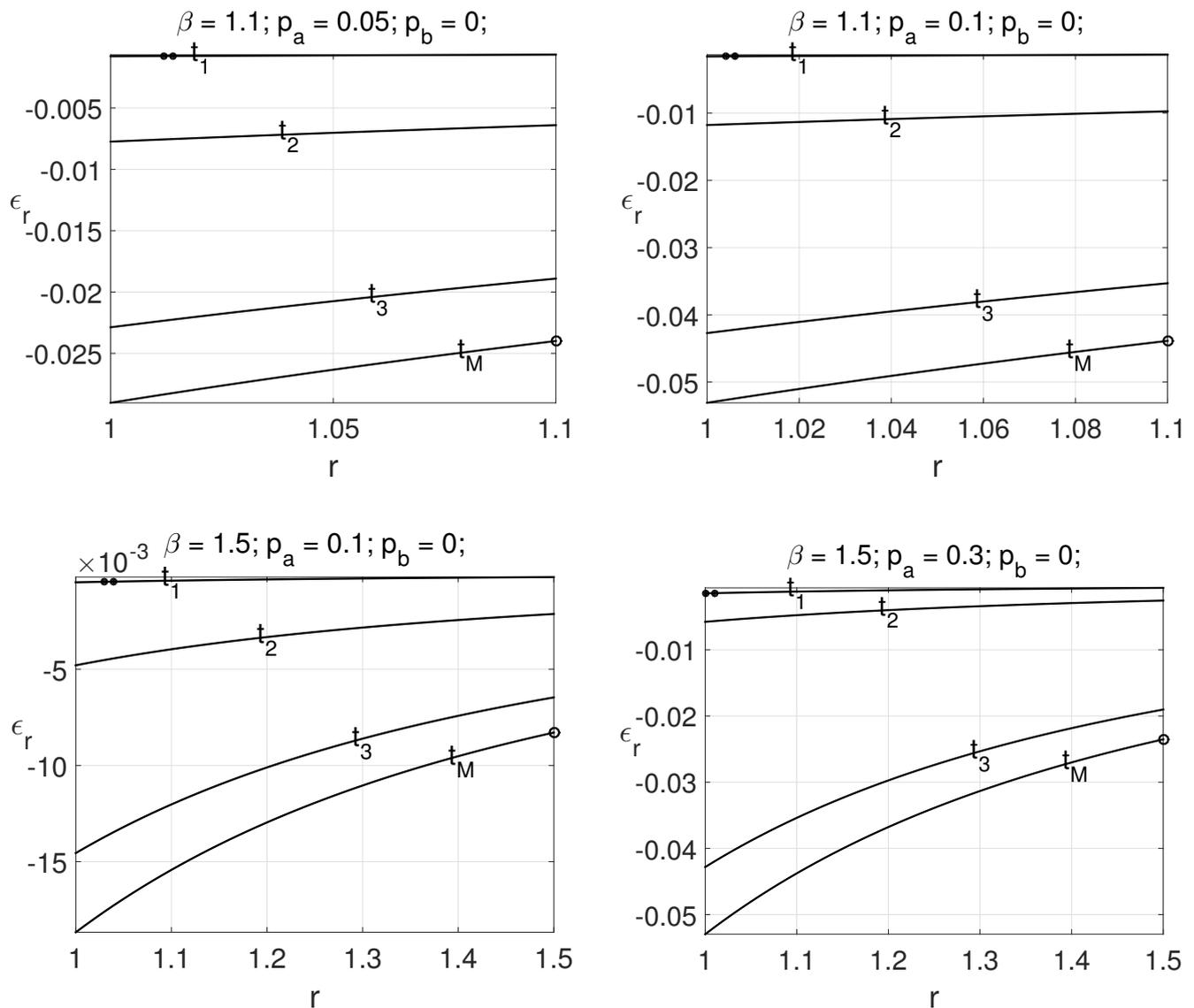


Рисунок 4.16 — Цилиндр. Зависимость радиальной деформаций  $\epsilon_r$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

### 4.3.2 Сфера

Аналогичные графики можно построить и для сферы. Как мы увидим далее, поведение кривых на графиках для сферы отличается от соответствующих кривых на графиках для цилиндра весьма незначительно, что естественно, ввиду схожих разрешающих соотношений.

Для построения графиков использовались сферы со следующими параметрами:  $\beta = 1.1$  с относительно средним давлением  $p_a = 0.1$ ;  $\beta = 1.5$  с относительно низким давлением  $p_a = 0.1$ , относительно средним давлением  $p_a = 0.3$  и относительно высоким давлением  $p_a = 0.45$ . Также, как и для цилиндра, сплош-

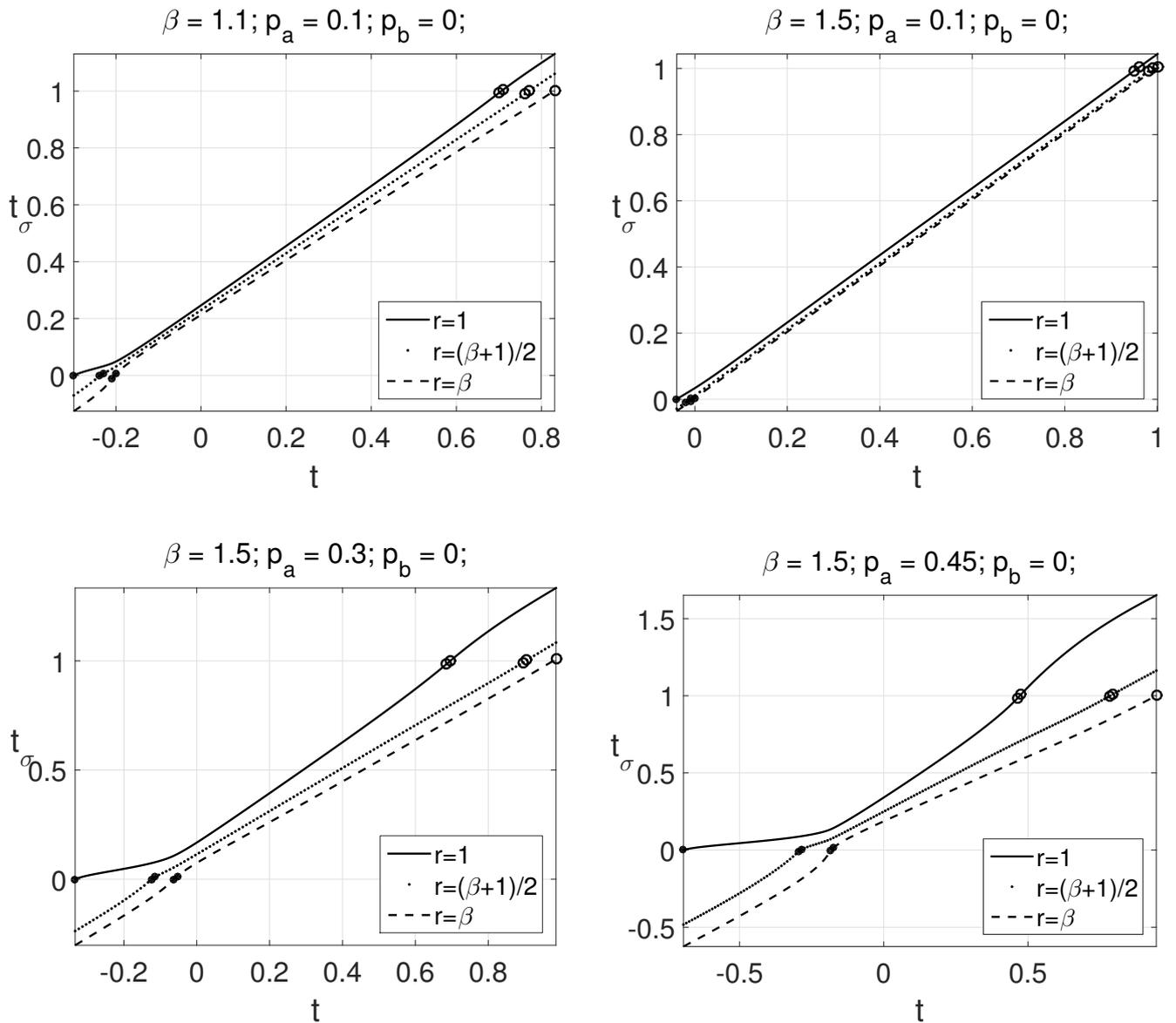


Рисунок 4.17 — Сфера. Зависимость параметра  $t_\sigma$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

ные точки означают начало фазового перехода, а выколотые – его конец. На рисунках 4.17 и 4.18 представлены кривые зависимости  $t_\sigma$  от  $t$  и  $r$  соответственно.

На рисунках 4.19, 4.21 и 4.20 представлены кривые зависимости  $q$  от  $r$  во время всего прямого превращения, в начале фазового превращения на внутренней стороне и в конце фазового превращения на внешней стороне соответственно.

Построим графики зависимости  $q$  от  $t$  для внутреннего, срединного и внешнего сечений (рисунок 4.22). Как следует из графиков на рисунке 4.22 чем дальше по  $t$  происходит процесс прямого перехода, тем больше разница по  $q$  между сторонами сферы.

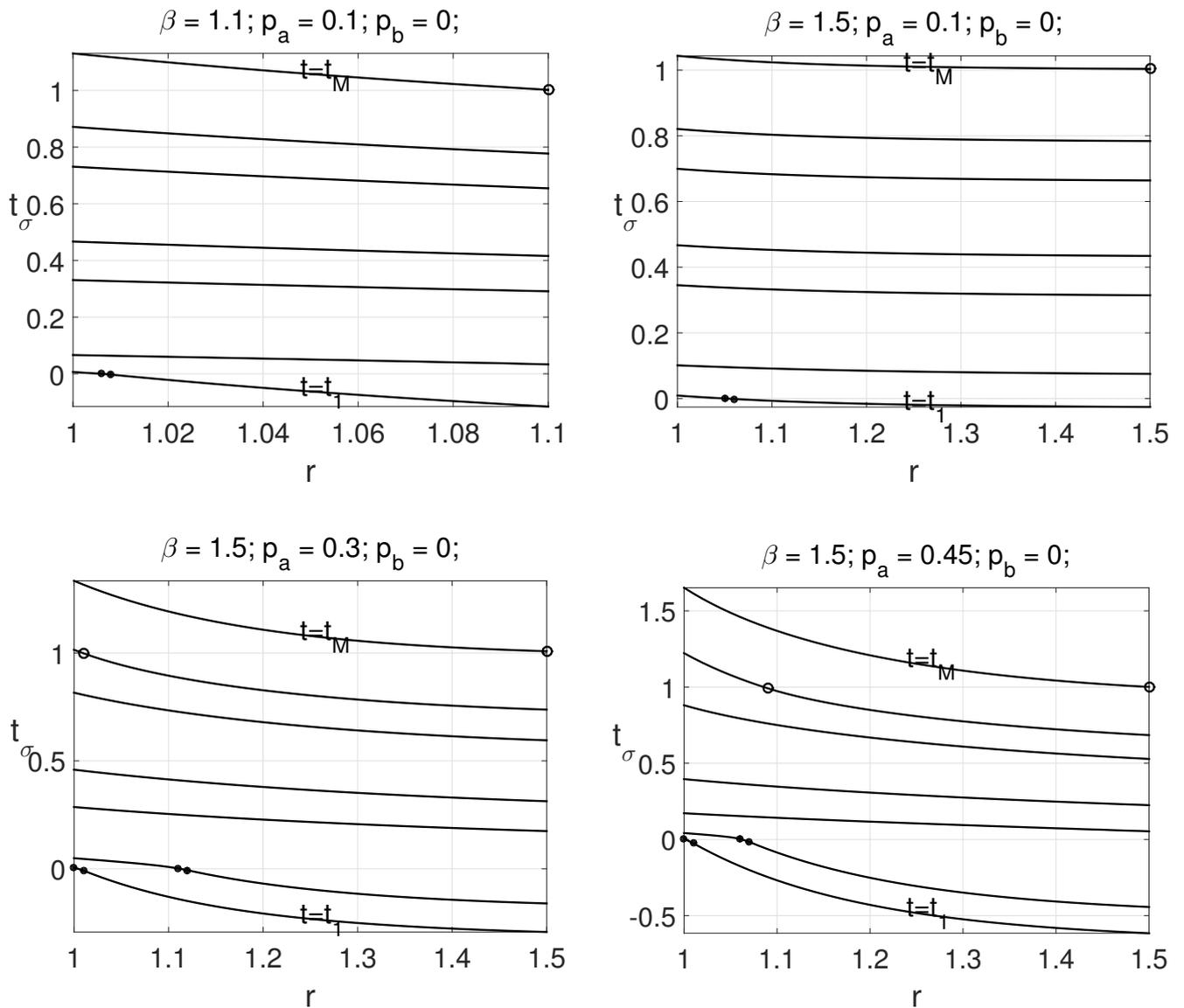


Рисунок 4.18 — Сфера. Зависимость параметра  $t_\sigma$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

Построим графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от  $r$  и  $t$  (рисунки 4.23 и 4.24 соответственно).

Как видно из рисунков 4.23 и 4.24 в сфере на срединном сечении также наблюдается горб фазового перехода, который исчезает лишь для случая низких давлений. Также, как и в цилиндре кривые интенсивности напряжений для внутреннего и внешнего сечений не пересекают кривую для срединного сечения, и значения напряжений на внутреннем, срединном и внешнем сечении приблизительно совпадают в крайних точках оси абсцисс. Также, как и для цилиндра, интенсивность напряжений всегда убывает по  $r$ .

Построим графики зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $t$  и  $r$  (рисунки 4.25 и 4.26).

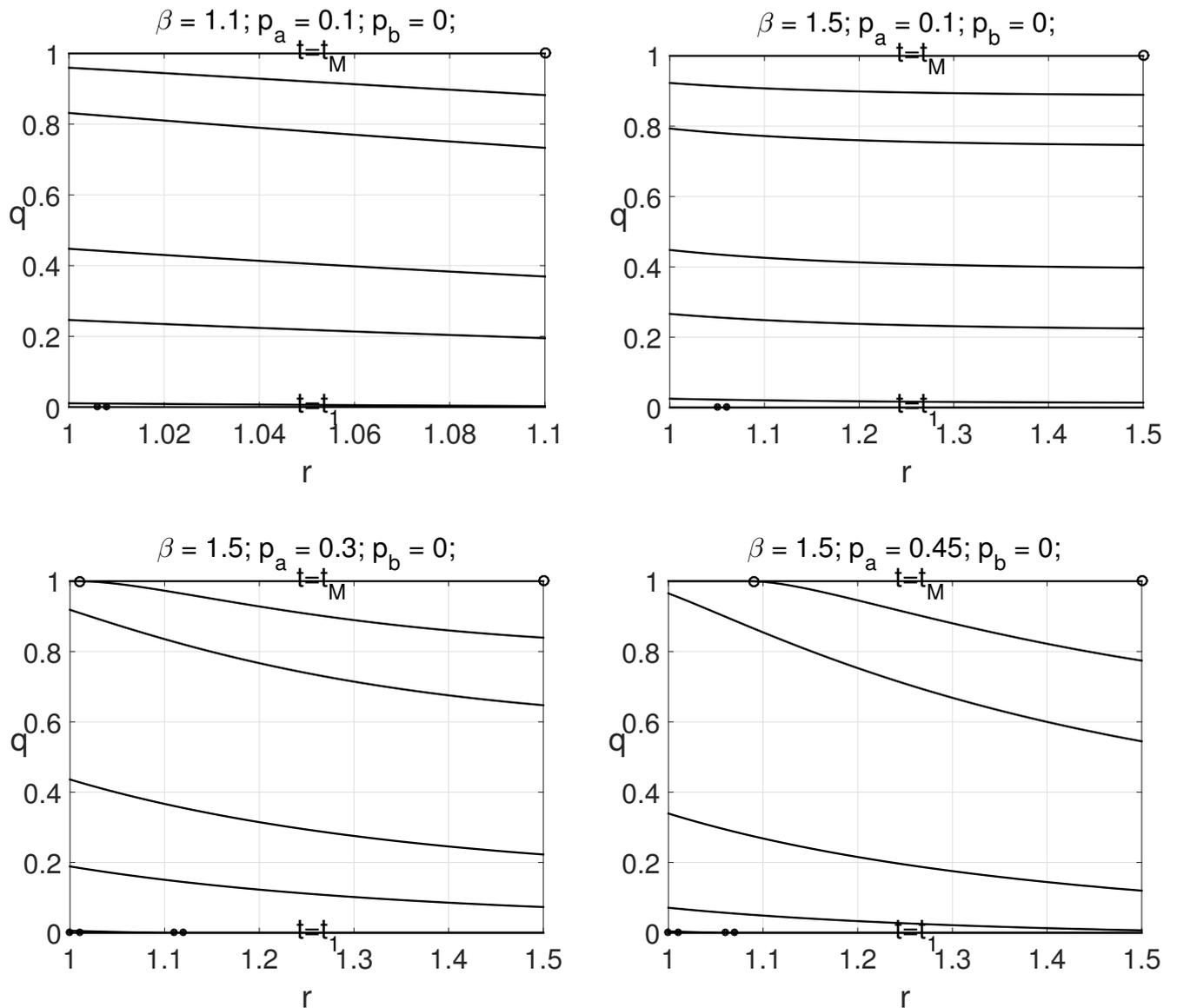


Рисунок 4.19 — Сфера. Зависимость параметра фазового состава  $q$  от  $r$  для разных значений  $t$  (чем больше  $t$ , тем выше кривая).

Как видно из рисунков 4.25 и 4.26, также, как и в цилиндре, кривые для внутреннего и внешнего сечений могут пересекать кривую для срединного сечения. Но в отличие от цилиндра, в сфере максимальное значение кольцевых напряжений могут достигаться на внешней стороне в процессе фазового перехода.

Как и в случае цилиндра, можно построить графики для температуры и убедиться, что она равномерно распределена по радиусу сферы.

Построим графики зависимости радиальной деформаций  $\varepsilon_r$  от  $t$  и  $r$  (рисунки 4.27 и 4.28).

Как видно из рисунков 4.27 и 4.28, как и в случае цилиндра, в сфере задержка по  $t$  развития деформации «раздачи» тем выше, а разница между ради-

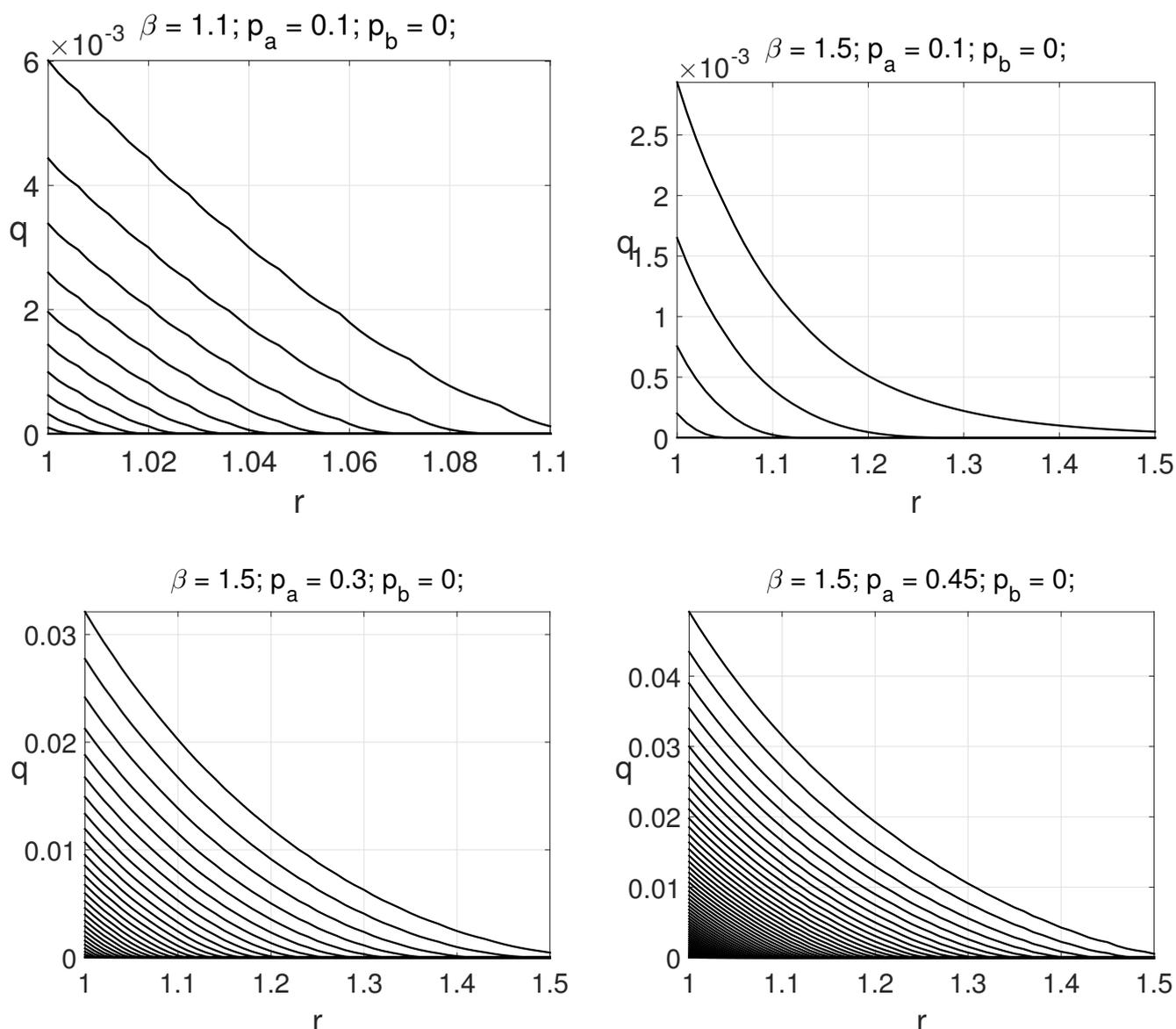


Рисунок 4.20 — Сфера. Развитие фронта фазового перехода на внутренней стороне (чем больше  $t$ , тем выше кривая). Разница между  $t$  для соседних кривых равна  $\delta t$ .

альными деформациями на внутренней стороне и внешней стороне тем значительнее, чем больше толщина сферы и выше приложенное давление. При этом в сфере внешняя сторона оболочки деформируется более «неохотно» в сравнении с цилиндром.

Таким образом, построено решение однократной связной задачи о прямом превращении в цилиндре и сфере под действием постоянного внутреннего давления в предположении о независимости распределения температуры по радиусу оболочки (постановка №2). Данное решение применимо для оболочек любых толщин при условии, что процесс «раздачи» происходит очень медленно. Решение такой же задачи, но в постановке, когда доля мартенситной фазы равномерно

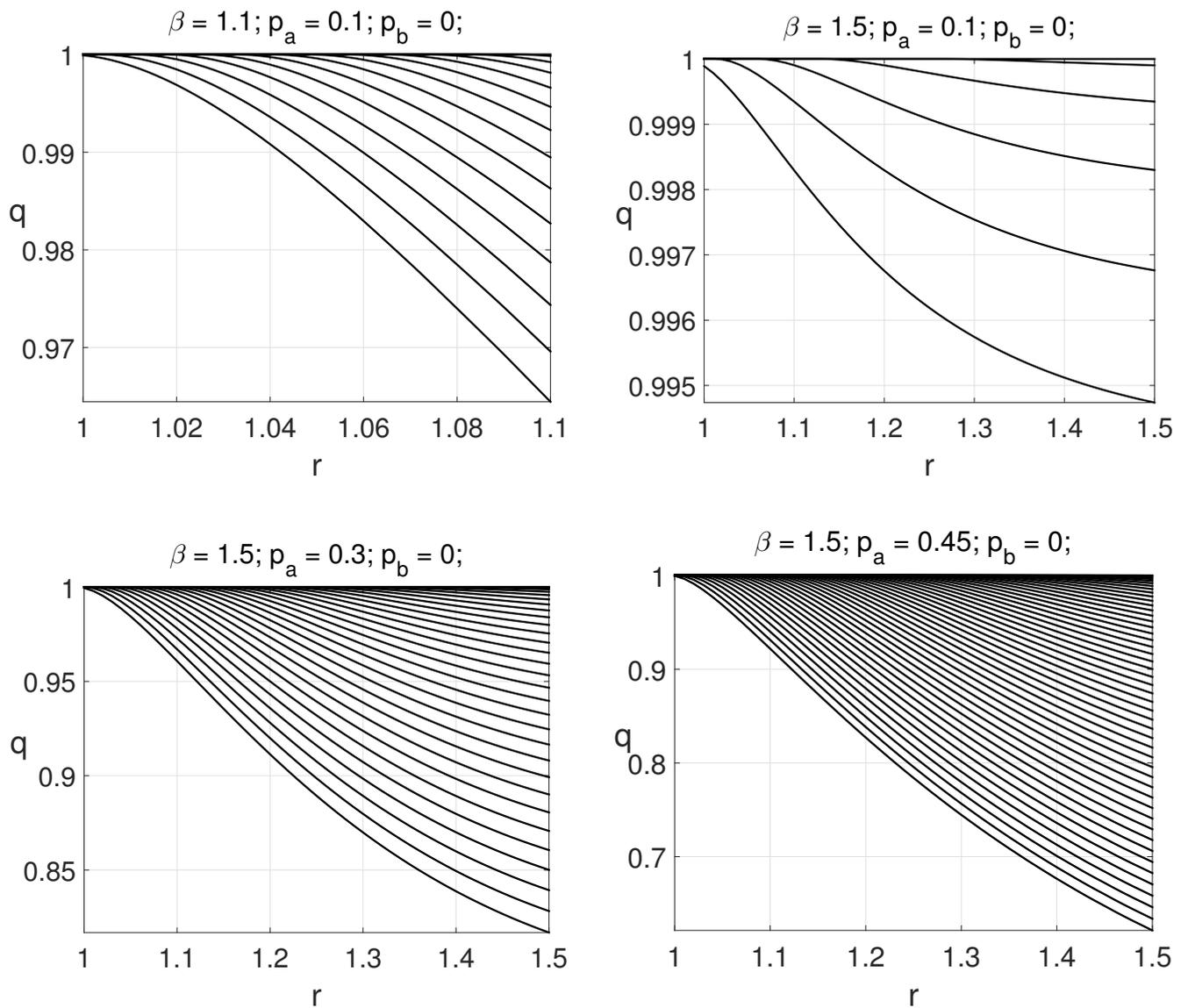


Рисунок 4.21 — Сфера. Окончание фазового перехода на внешней стороне (чем больше  $t$ , тем выше кривая). Разница между  $t$  для соседних кривых равна  $\delta t$ .

распределена по радиусу оболочки (постановка №1), можно рассматривать как частный случай решения задачи в постановке №2, при условии, что оболочка является тонкостенной. Получающиеся поля деформаций и температур, в таком случае, для двух постановок очень схожи, а именно эти параметры и необходимо знать, чтобы подобрать температуру охлаждения и необходимые давления для «раздачи» муфты на определенную величину. Плюсом рассмотрения задачи в постановке №1 является в десятки раз меньшее компьютерное время, нужное для нахождения решения.

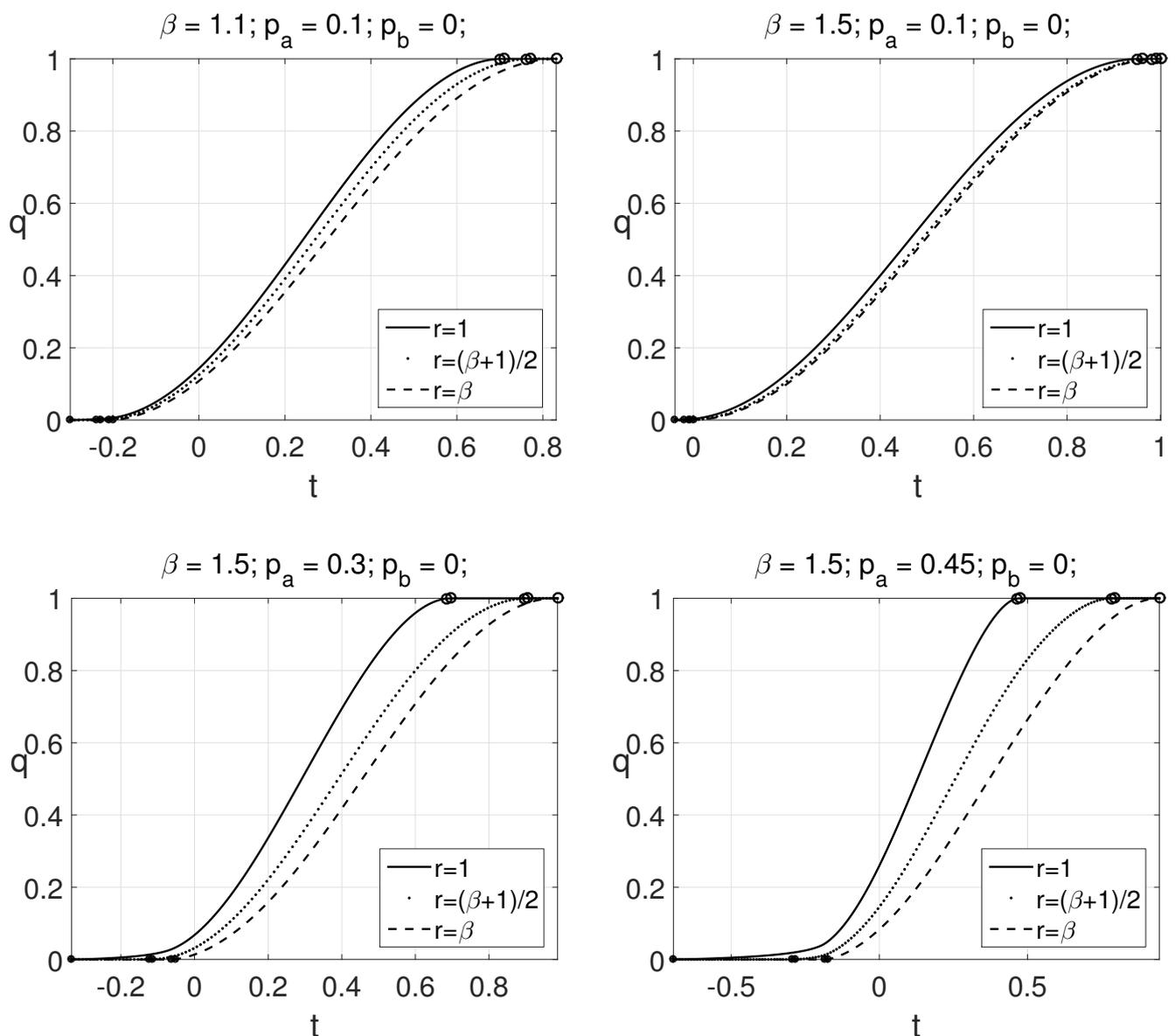


Рисунок 4.22 — Сфера. Зависимость параметра фазового состава  $q$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

### 4.3.3 Сравнение постановок

Ниже представлены результаты сравнения решений в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) и когда  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) для тонкостенных цилиндра и сферы. На рисунках 4.29 и 4.30 приведены графики сравнения решений для тонкостенных цилиндра ( $\beta = 1.05$  и  $p_a = 0.025$ ) и сферы ( $\beta = 1.05$  и  $p_a = 0.05$ ) для двух данных постановок на разных сечениях оболочек: кривые со штриховым пунктиром соответствуют постановке №1, сплошные кривые – постановке №2. Для того, чтобы сравнение было корректным, кривые для постановки №2 перестроены в зависимости от  $q$ .

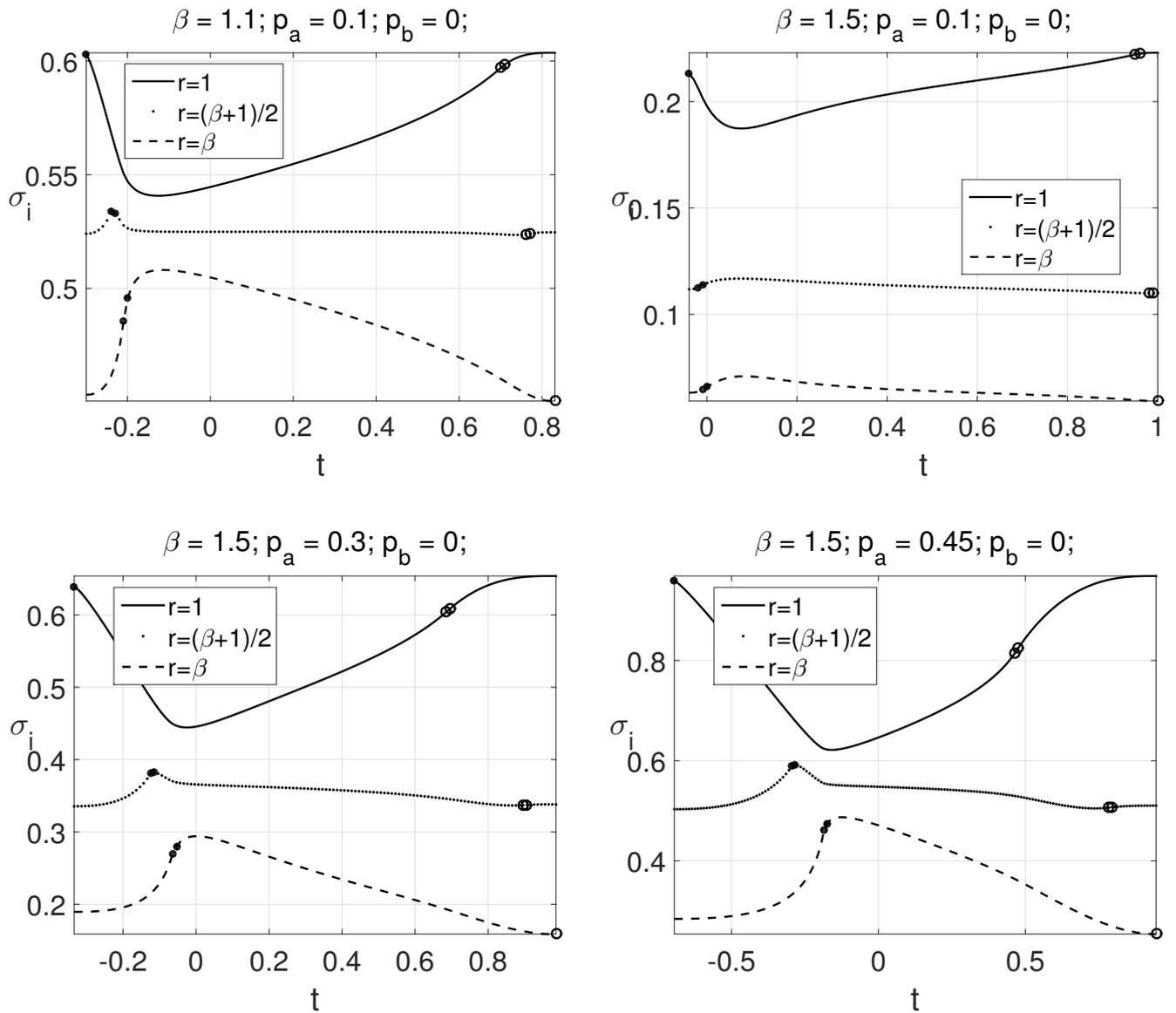


Рисунок 4.23 — Сфера. Кривые  $\sigma_i$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

Для проверки достоверности полученного решения в постановке №2 на рисунках 4.29 и 4.30 также представлены кривые с точечным пунктиром, которые соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. В случае большого значения  $\Delta S_0$  из определяющих уравнений следует, что  $t = t_\sigma$ , а значит параметр фазового состава  $q$  (1.3) не зависит от  $r$ , что в точности суть постановка №1.

Как видно из рисунков 4.29 и 4.30, кривые для напряжений на внутреннем и внешнем сечении для поставки №1 и оригинальной постановки №2 имеют различную форму, но практически не отличимы на срединном сечении в масштабах рисунка. При этом, экстремальные значения для напряжений, температур и деформаций в обеих постановках очень близки. Можно отметить, что в постановке

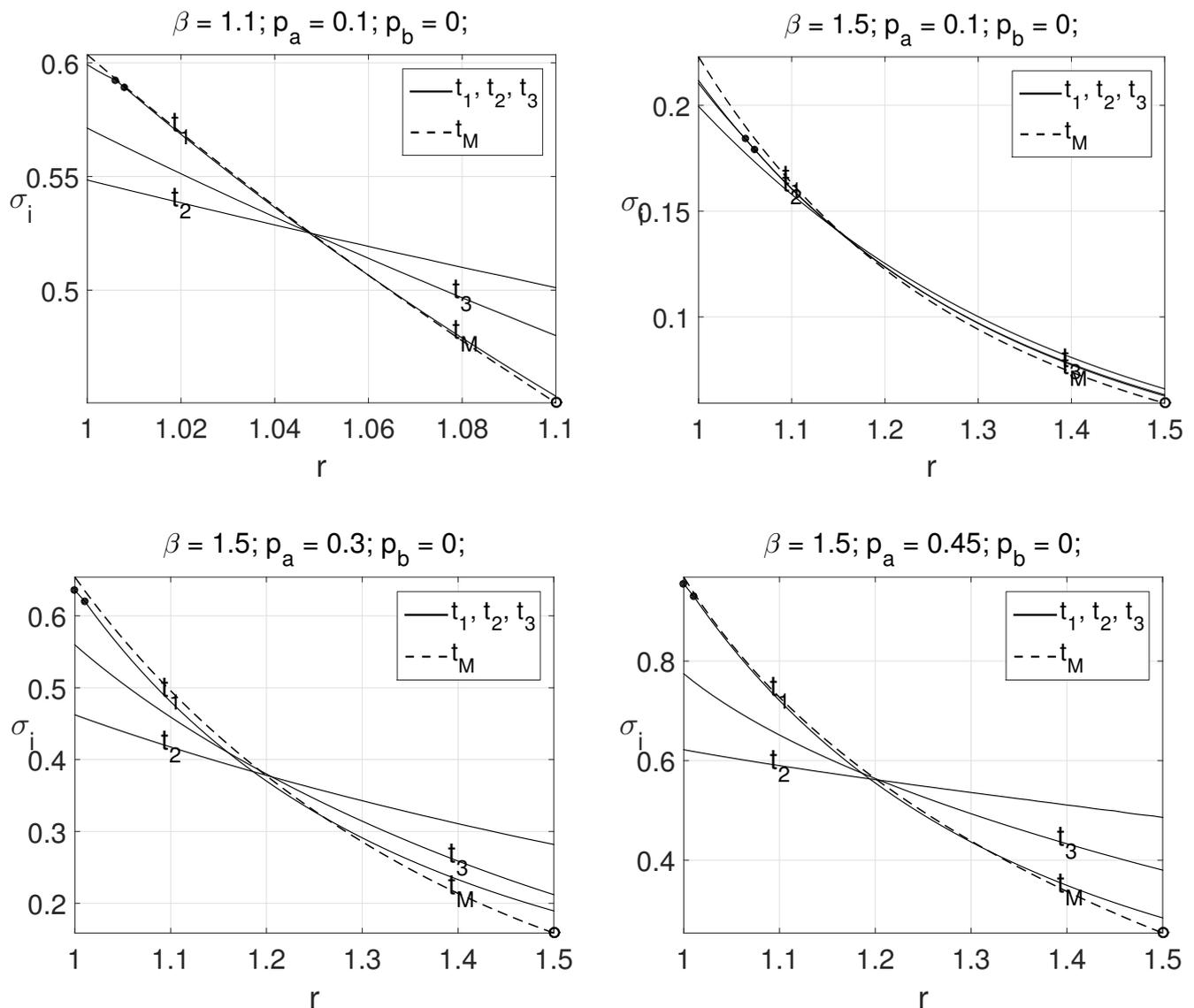


Рисунок 4.24 — Сфера. Кривые  $\sigma_i$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

№1 перепад температур между сторонами несколько выше, чем в оригинальной постановке №2.

Кроме того, из рисунков 4.29 и 4.30 для графиков напряжений видно, что с увеличением  $\Delta S_0$  на сторонах обеих оболочек точечные кривые «стремятся» к кривым из постановки №1. При этом, точечная кривая для значения  $\Delta S_0$ , увеличенного в  $10^{20}$  раз, хоть и близка к кривой для постановки №1, но с ней полностью не совпадает. Это связано с тем, что решение для постановки №1 получено не из исходных определяющих соотношений в приращениях, а из конечных соотношений положения об активных процессах пропорционального нагружения. При этом, как видно из рисунков, температуры для точечных кривых всегда получаются ниже, чем в оригинальных постановках, что следует из (1.4), где второе слагаемое второго соотношения тем меньше, чем больше значение  $\Delta S_0$ .

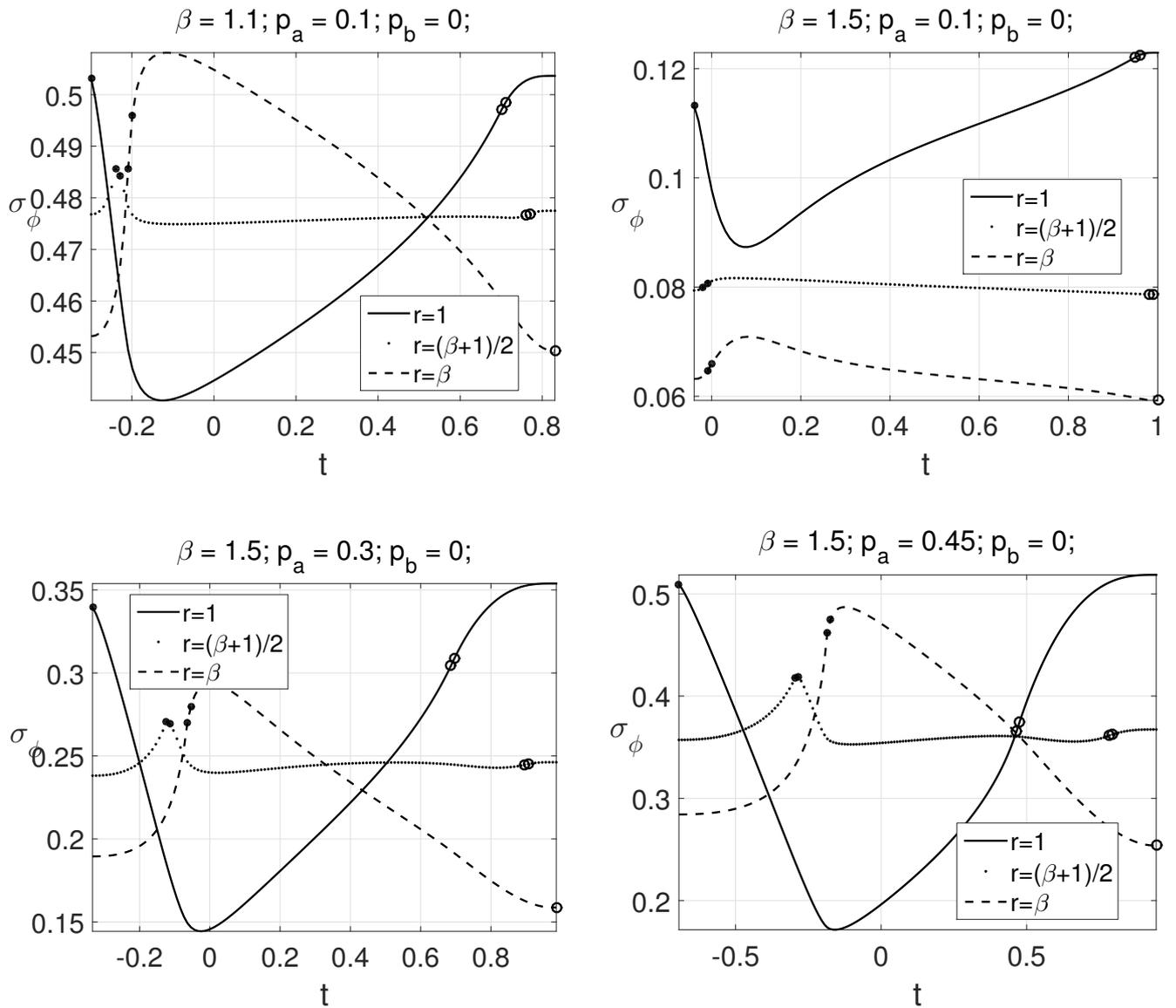


Рисунок 4.25 — Сфера. Кривые зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

Для наглядности приведем аналогичные сравнения на цилиндрах и сферах потолще (где как мы видели выше, вообще говоря,  $q$  явно меняется по  $r$ ): цилиндр с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  под действием относительно высоких нагрузок  $p_a = 0.1$  (рисунок 4.31),  $\beta = 1.5$  под действием относительно низких нагрузок  $p_a = 0.1$  (рисунок 4.32) и  $\beta = 1.5$  под действием относительно высоких нагрузок  $p_a = 0.3$  (рисунок 4.33); сфера с относительной толщиной  $\beta = 1.1$  под действием относительно невысоких нагрузок  $p_a = 0.1$  (рисунок 4.34),  $\beta = 1.5$  под действием относительно низких нагрузок  $p_a = 0.1$  (рисунок 4.35) и  $\beta = 1.5$  под действием относительно высоких нагрузок  $p_a = 0.45$  (рисунок 4.36):

Как видно из рисунков 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35 и 4.36 перепад температур и деформаций между внешней и внутренней сторонами обеих оболочек

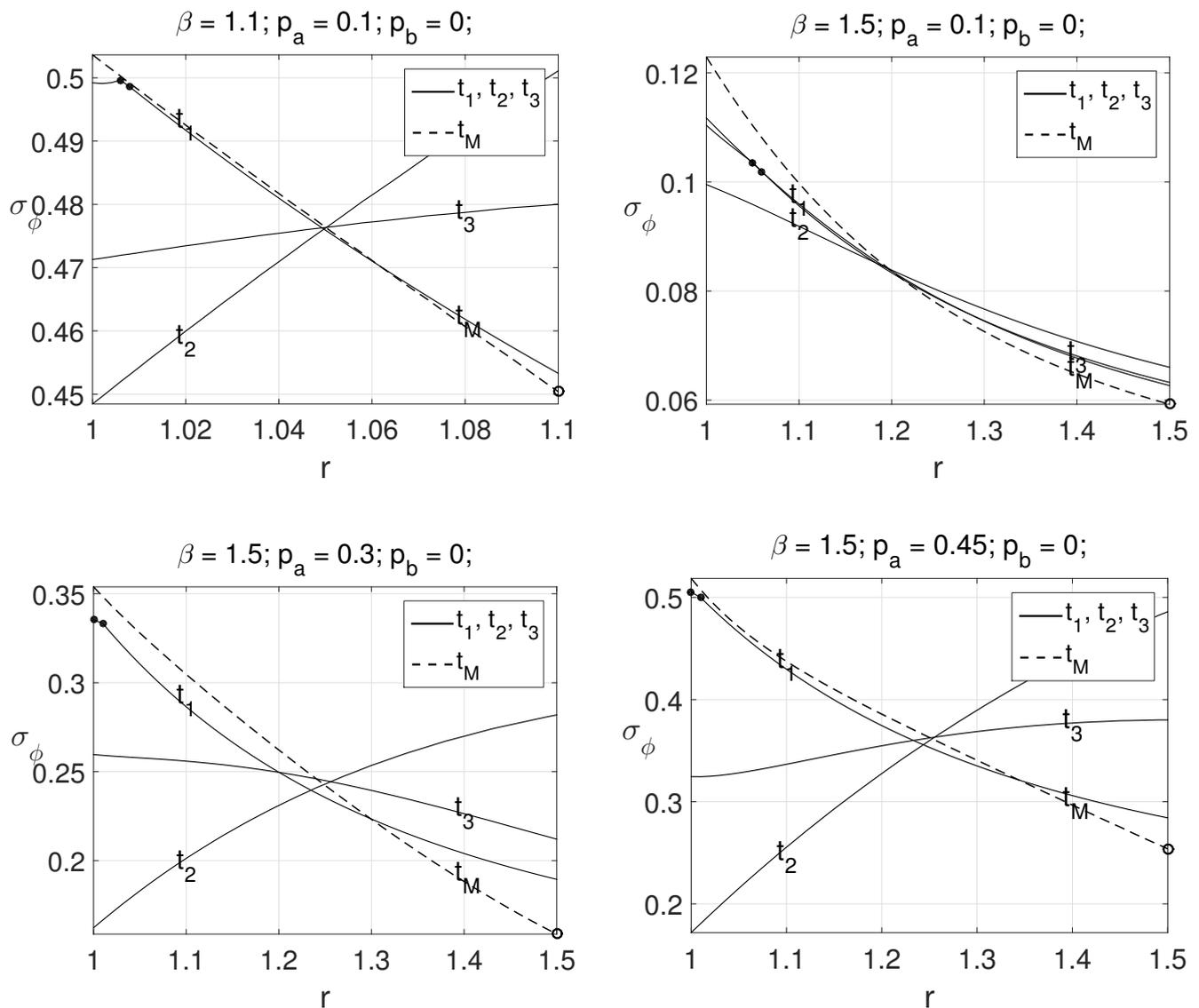


Рисунок 4.26 — Сфера. Кривые зависимости кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

для постановки №1 обычно всегда выше и сильнее зависит от приложенных нагрузок, чем в оригинальной постановке №2. Кроме того, оба решения дают по сути один и тот же диапазон температур и деформаций. Также видно, что с ростом толщины и нагрузок растет разница в величине «раздачи» между двумя постановками.

Таким образом, несмотря на принципиальную разницу между решениями для напряжений между двумя постановками (№1 и №2), диапазон значений для температур и деформаций очень схож. При этом, в случае тонкостенных оболочек и относительно невысоких нагрузок кривые температур и деформаций для двух решений лежат достаточно близко, а напряжения на срединном сечении практически идентичны. Суммируя выше сказанное, в случае, когда нужно найти поля температур и деформаций во время прямого перехода (а именно это

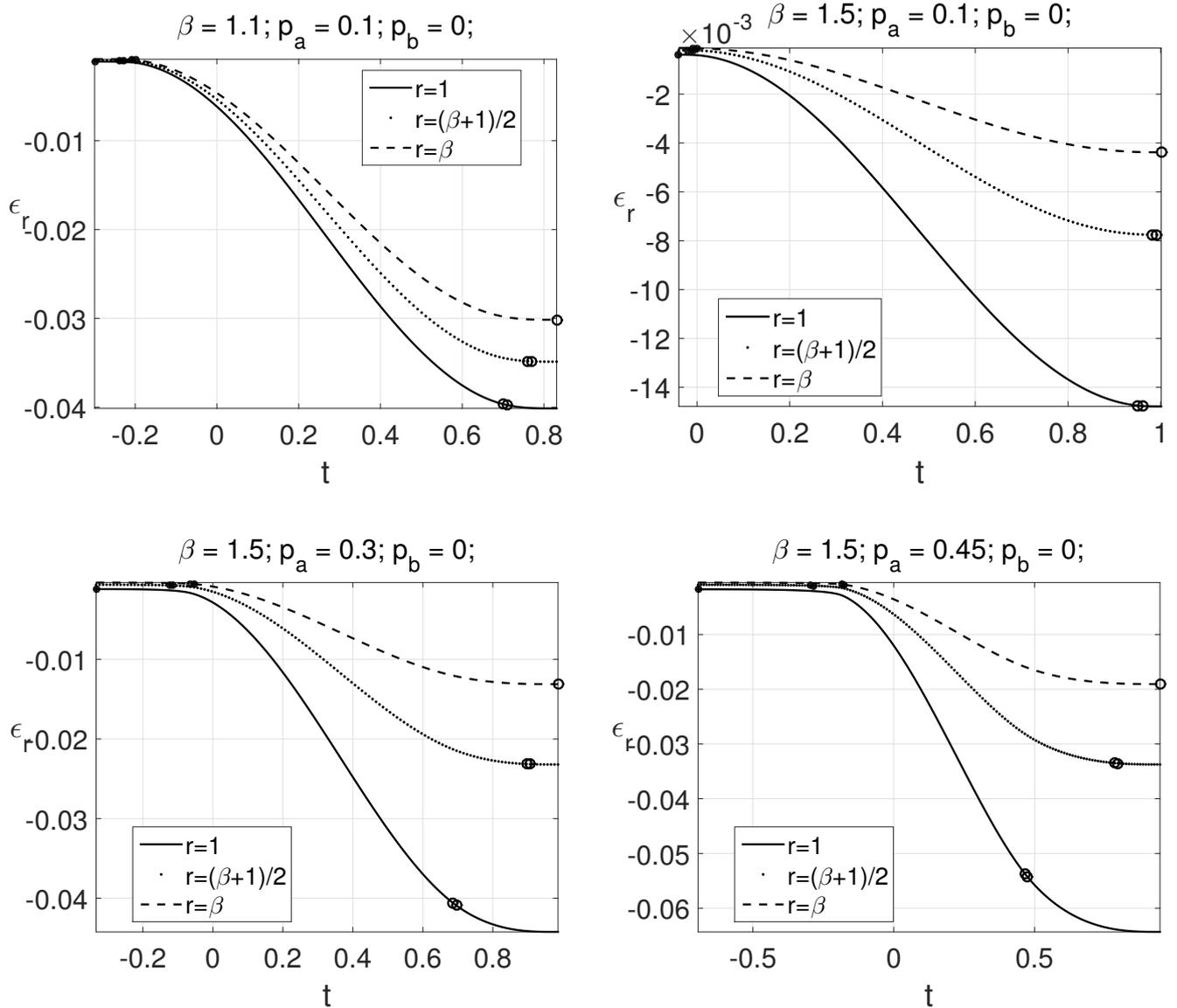


Рисунок 4.27 — Сфера. Зависимость радиальной деформаций  $\epsilon_r$  от  $t$  для разных значений  $r$ .

и нужно знать для «раздачи» оболочки до заданной величины) и максимальные значения напряжений, и оболочка является тонкостенной – имеет смысл решать задачу в более простой постановке, в которой  $q$  не зависит от  $r$ . Если же дополнительно необходимо найти поля напряжений и оболочка не является тонкостенной – то лучше решать задачу в постановке, когда  $T$  не зависит от  $r$ . В случае если необходимо найти только температурные и деформационные поля при относительно низких давлениях, – можно решать задачу в постановке, когда  $q$  не зависит от  $r$  и для толстостенных оболочек.

Также можно заключить, что стремление точечных кривых с увеличением  $\Delta S_0$  к кривым в постановке №1, для обеих оболочек демонстрирует достоверность полученных результатов решения задачи в оригинальной постановке №2.

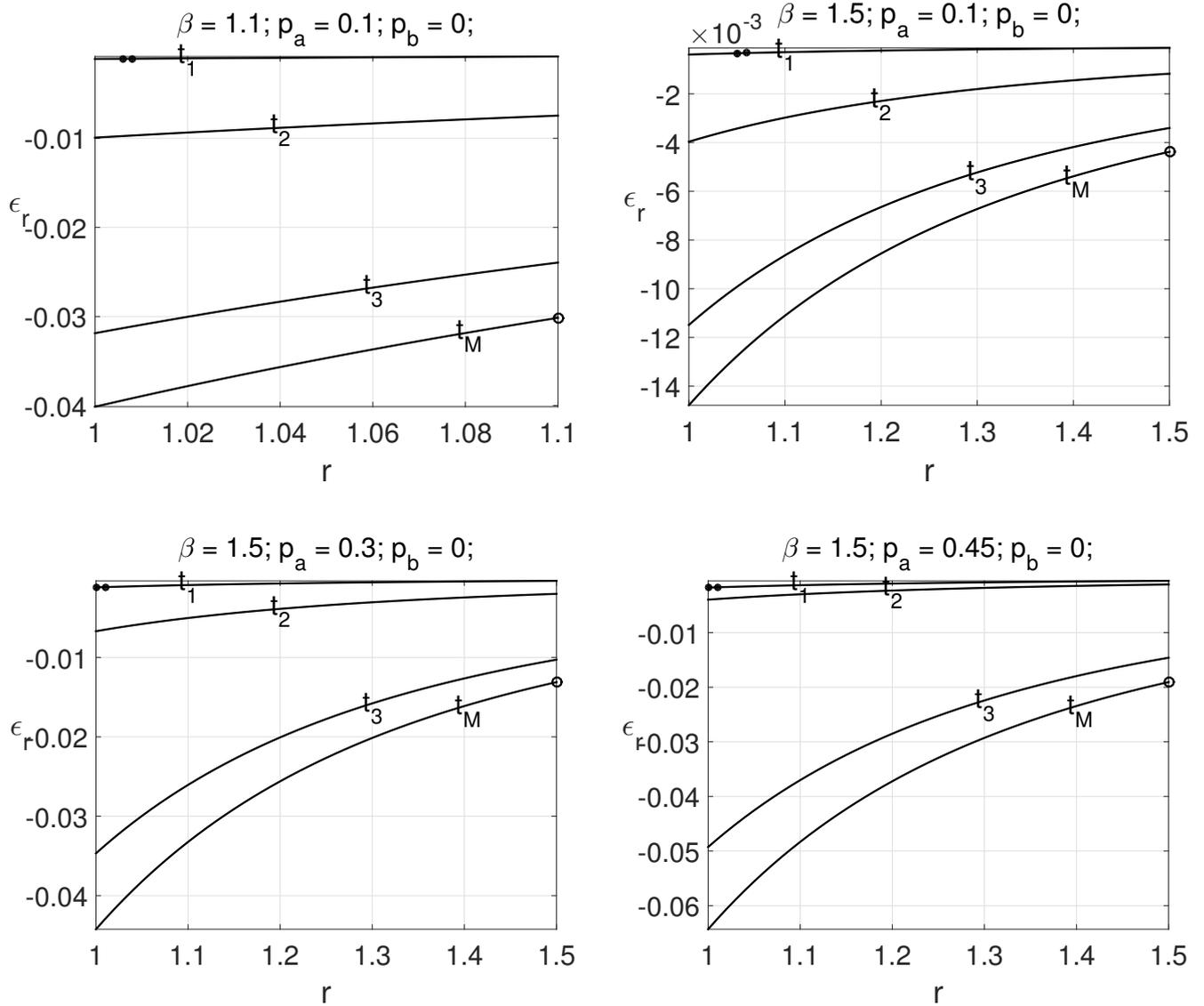


Рисунок 4.28 — Сфера. Зависимость радиальной деформаций  $\epsilon_r$  от  $r$  для разных значений  $t$ .

Решение в постановке №2 с высоким значением  $\Delta S_0$  по сути является решением задачи в постановке, когда  $q$  не зависит от  $r$ , и является корректным (т.к. получено из исходных определяющих соотношений в приращениях). В то же время, решение задач из главы 2 и главы 3 (для цилиндра и сферы соответственно), когда  $q$  не зависит от  $r$ , можно рассматривать как приближенное решение для напряжений и деформаций этого корректного решения (т.к. эти решения получены не из исходных определяющих соотношений).

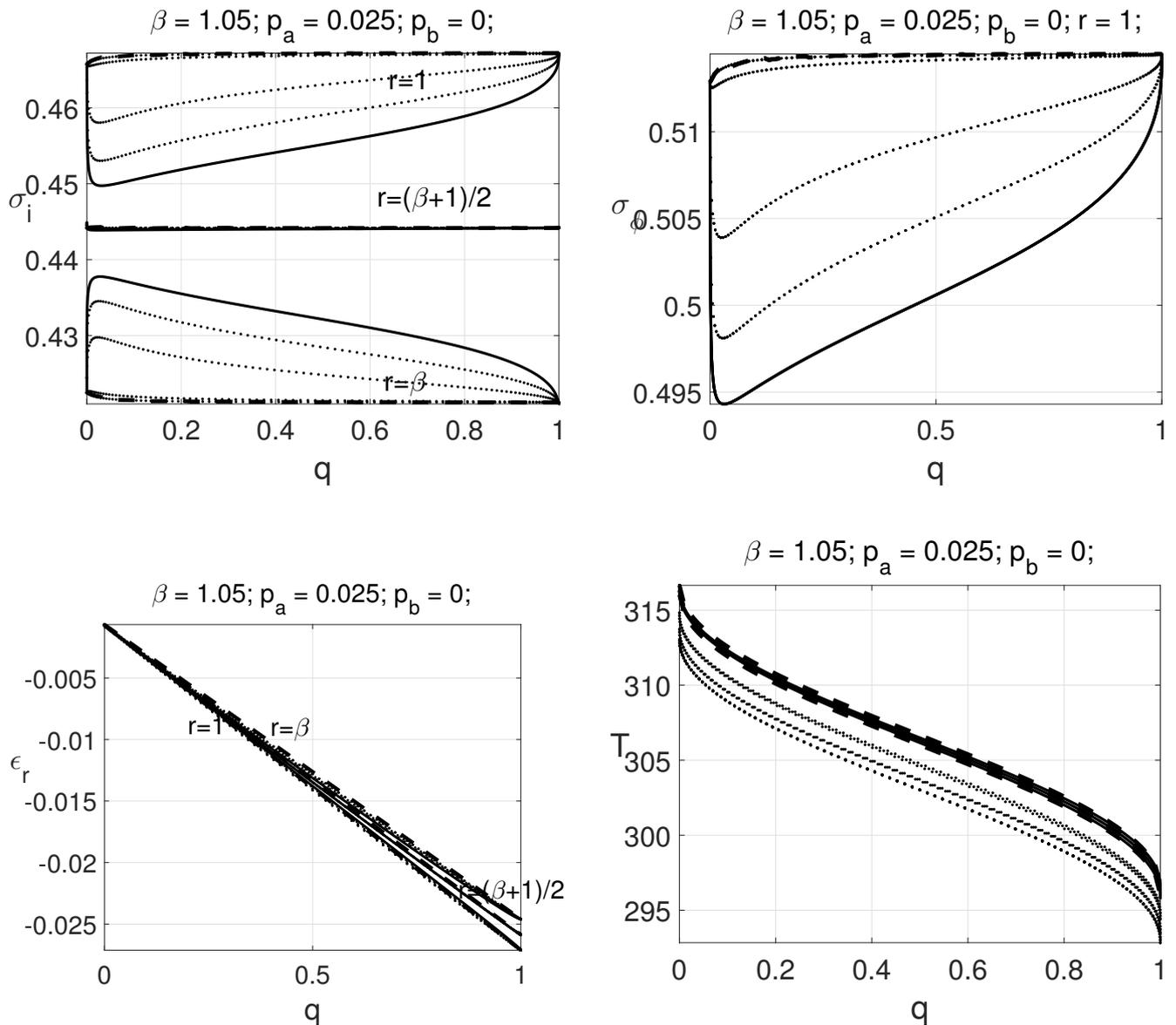


Рисунок 4.29 — Цилиндр. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

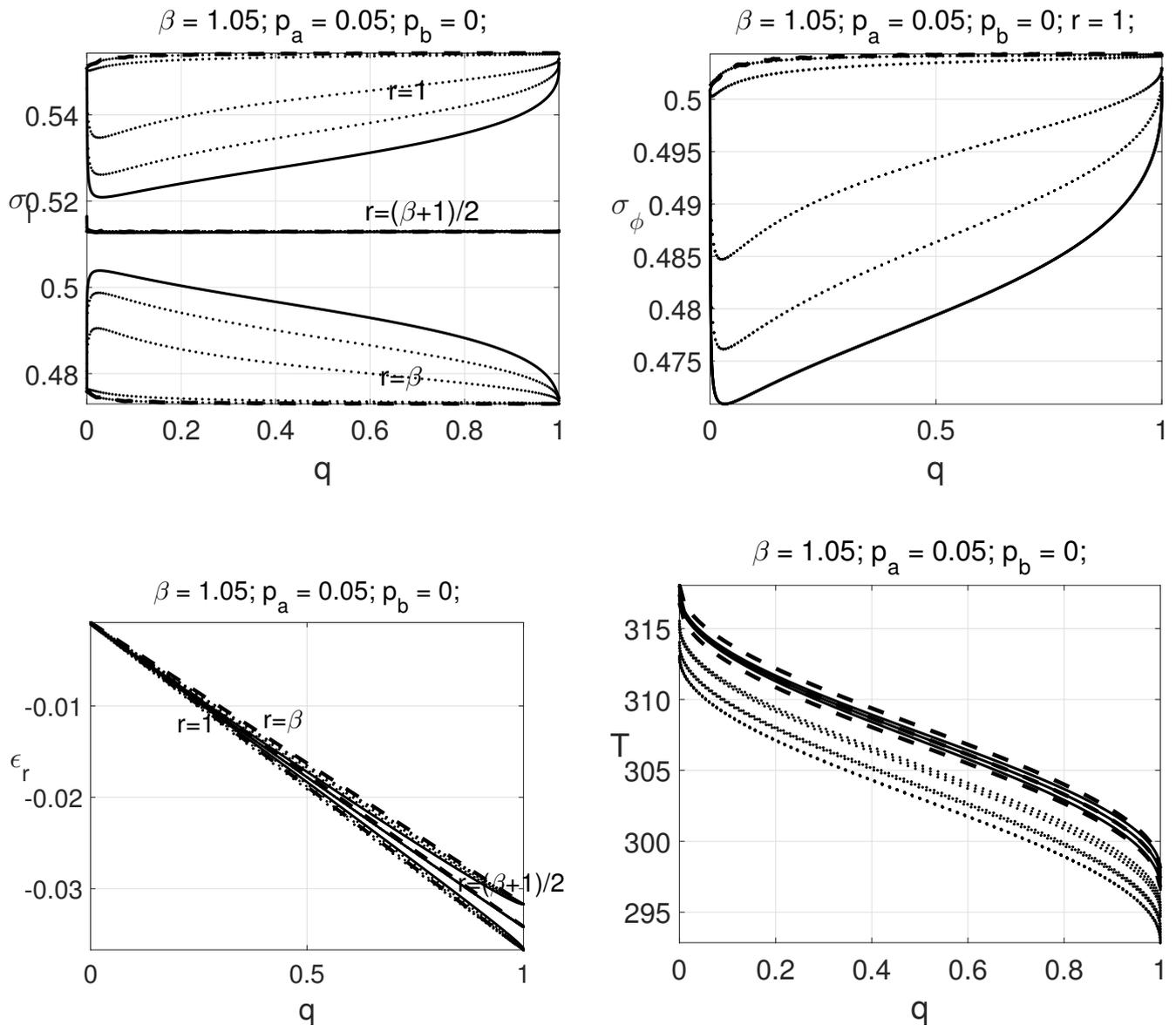


Рисунок 4.30 — Сфера. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

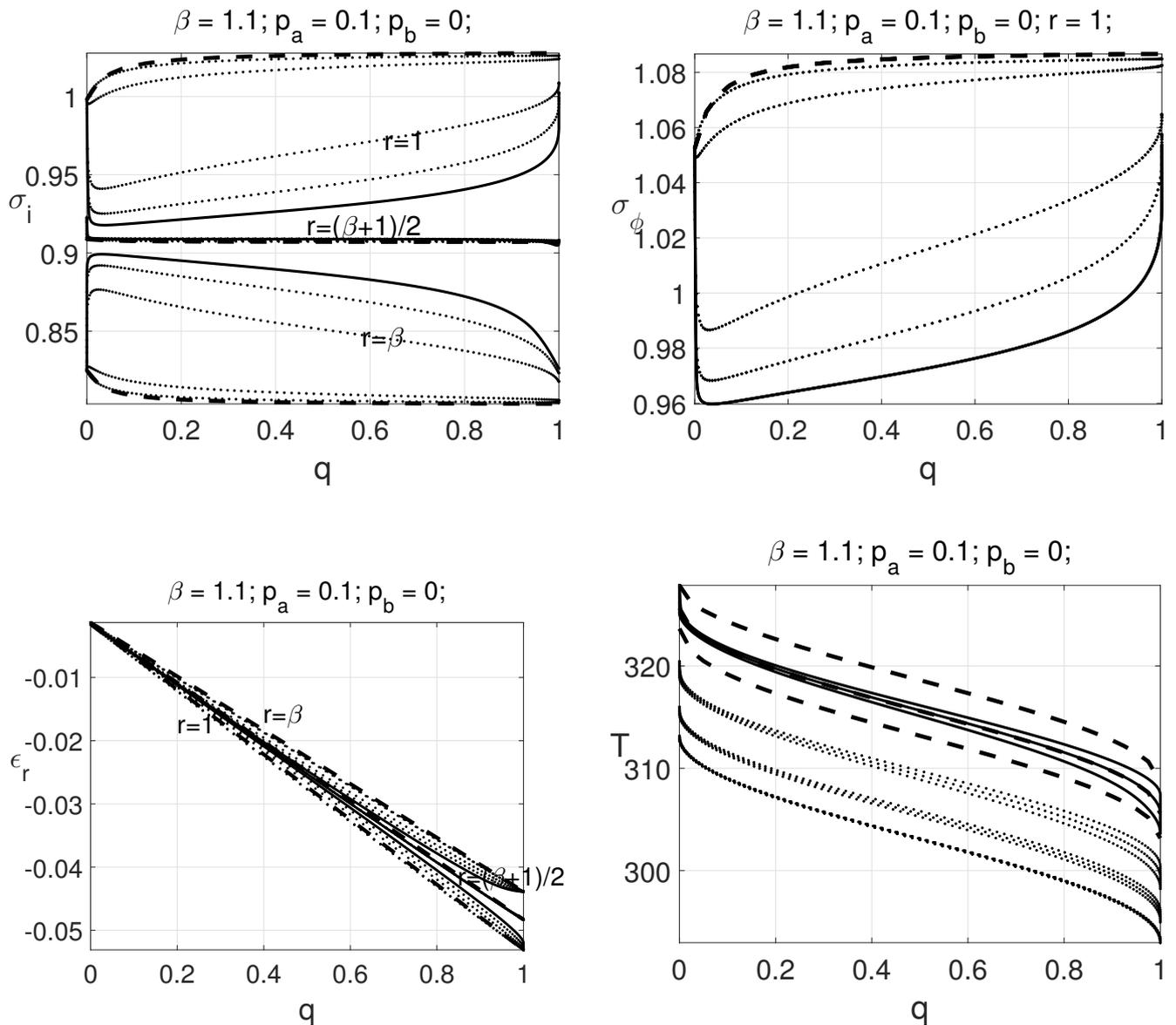


Рисунок 4.31 — Цилиндр. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

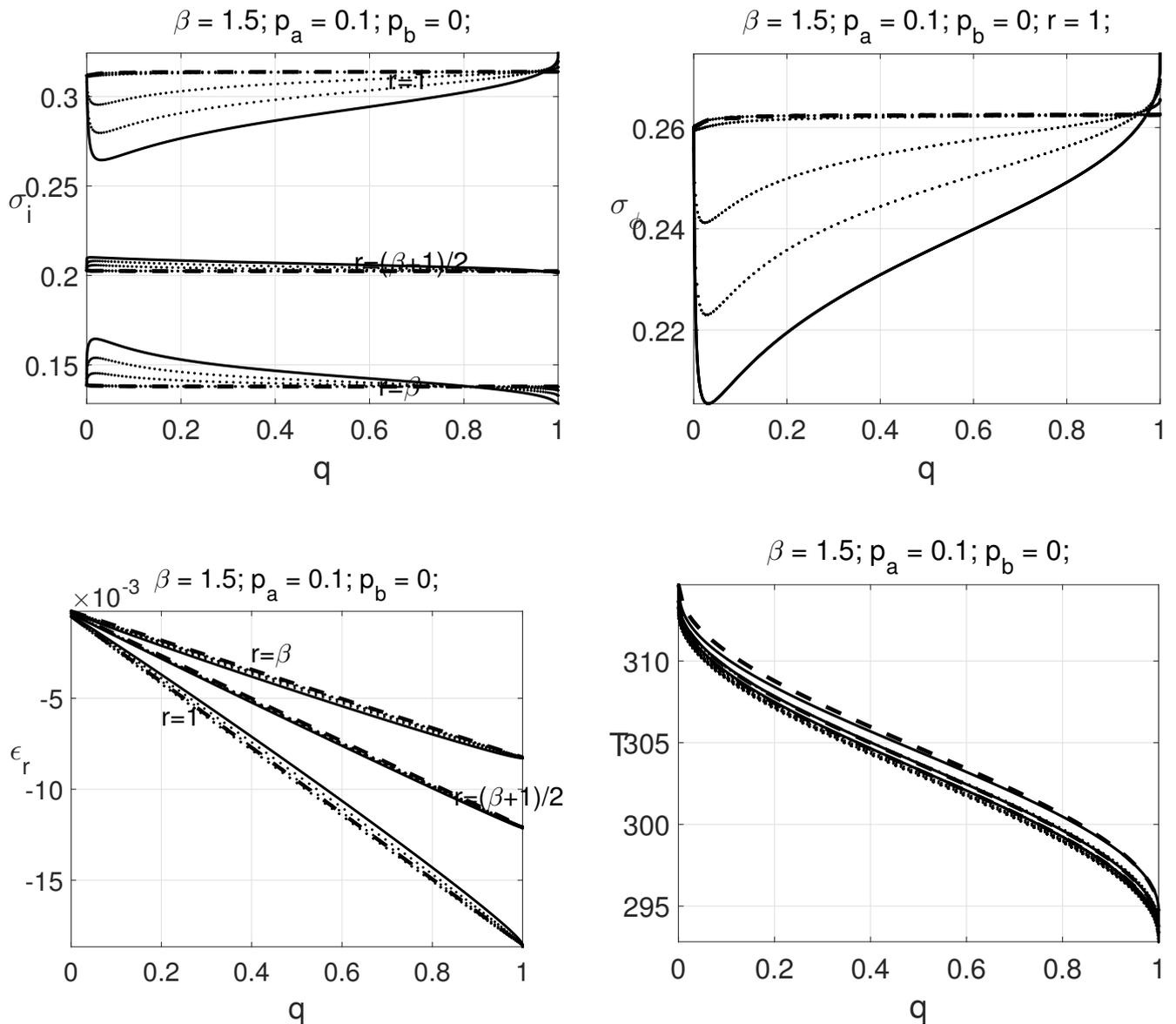


Рисунок 4.32 — Цилиндр. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

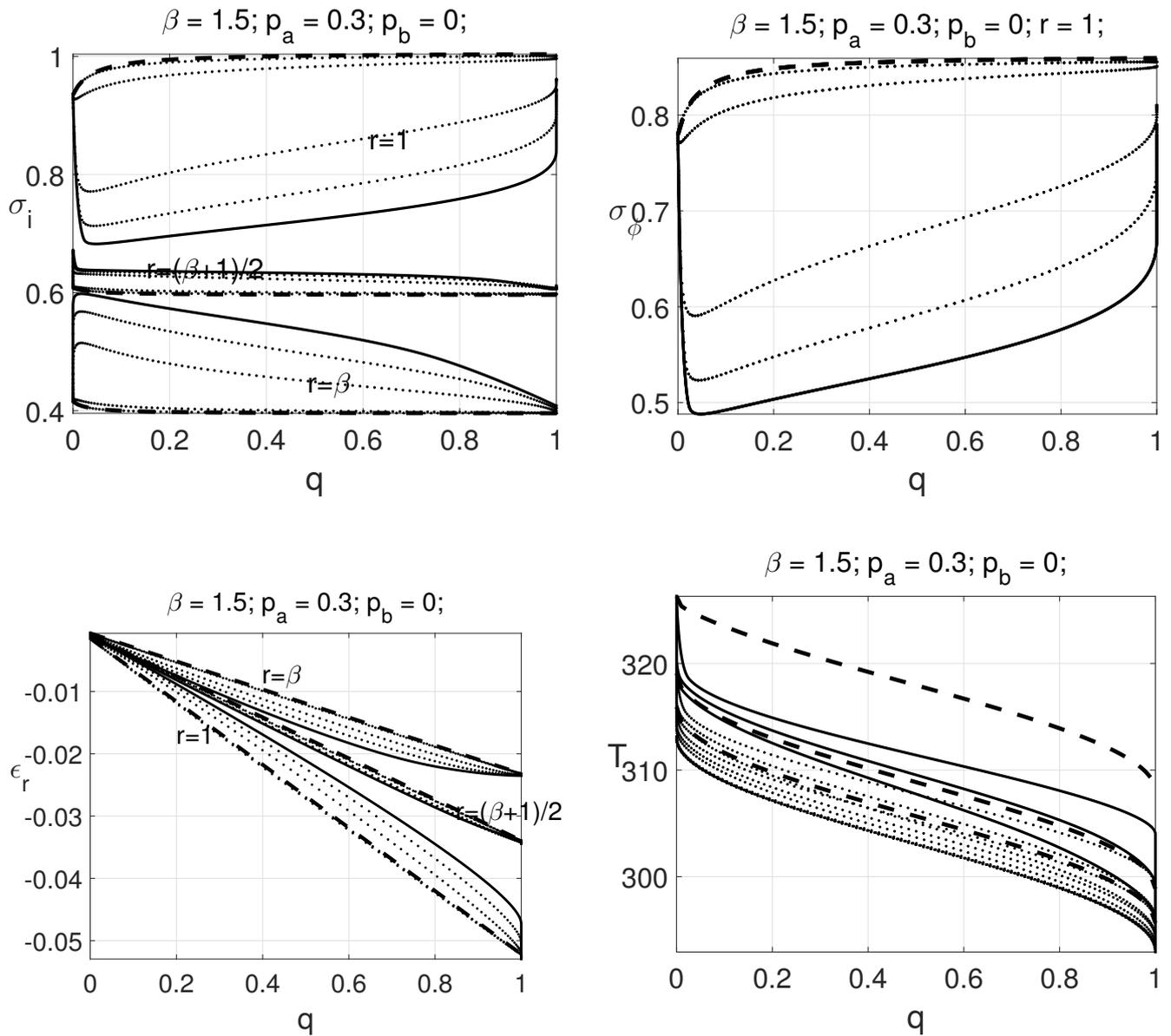


Рисунок 4.33 — Цилиндр. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

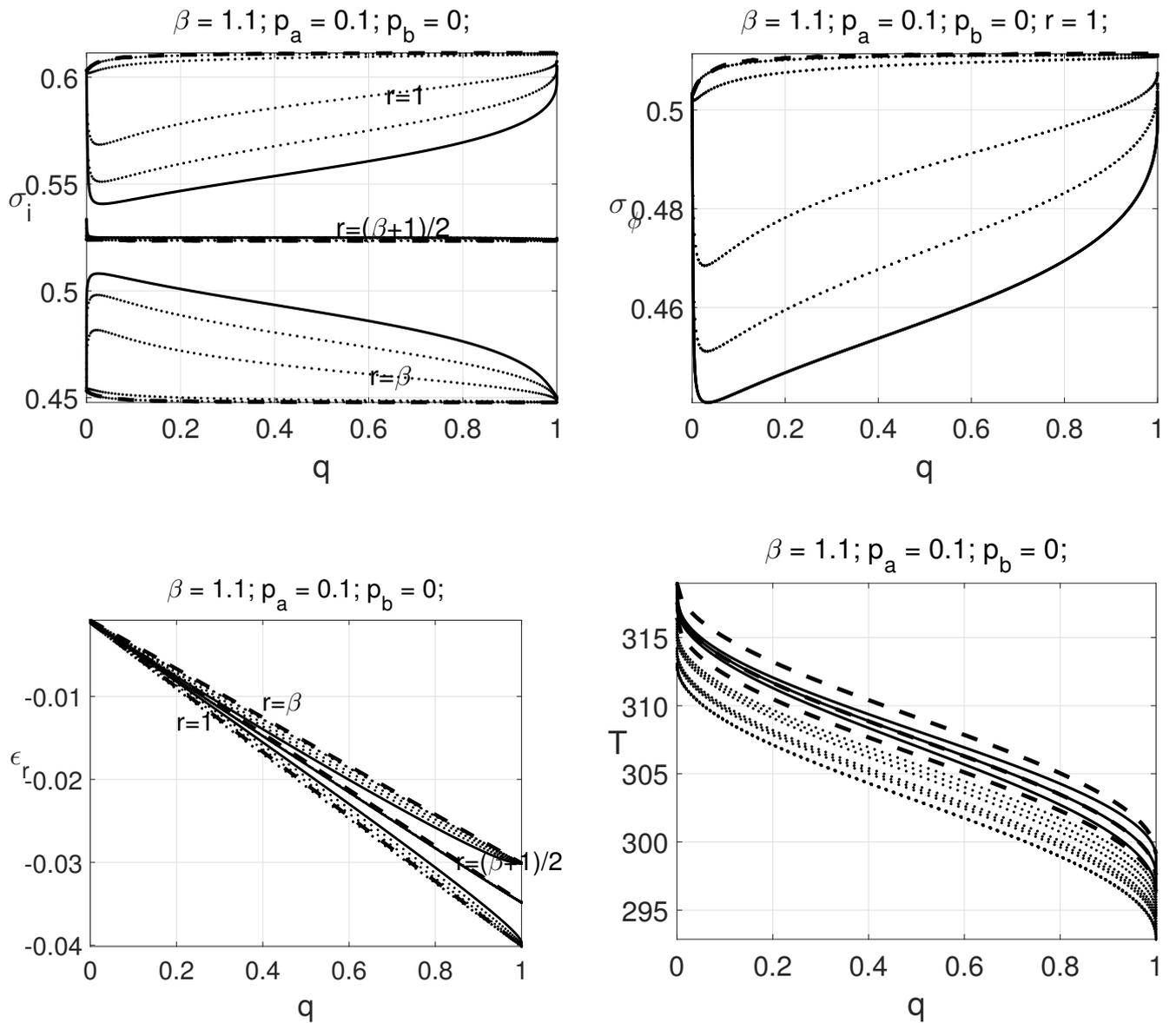


Рисунок 4.34 — Сфера. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

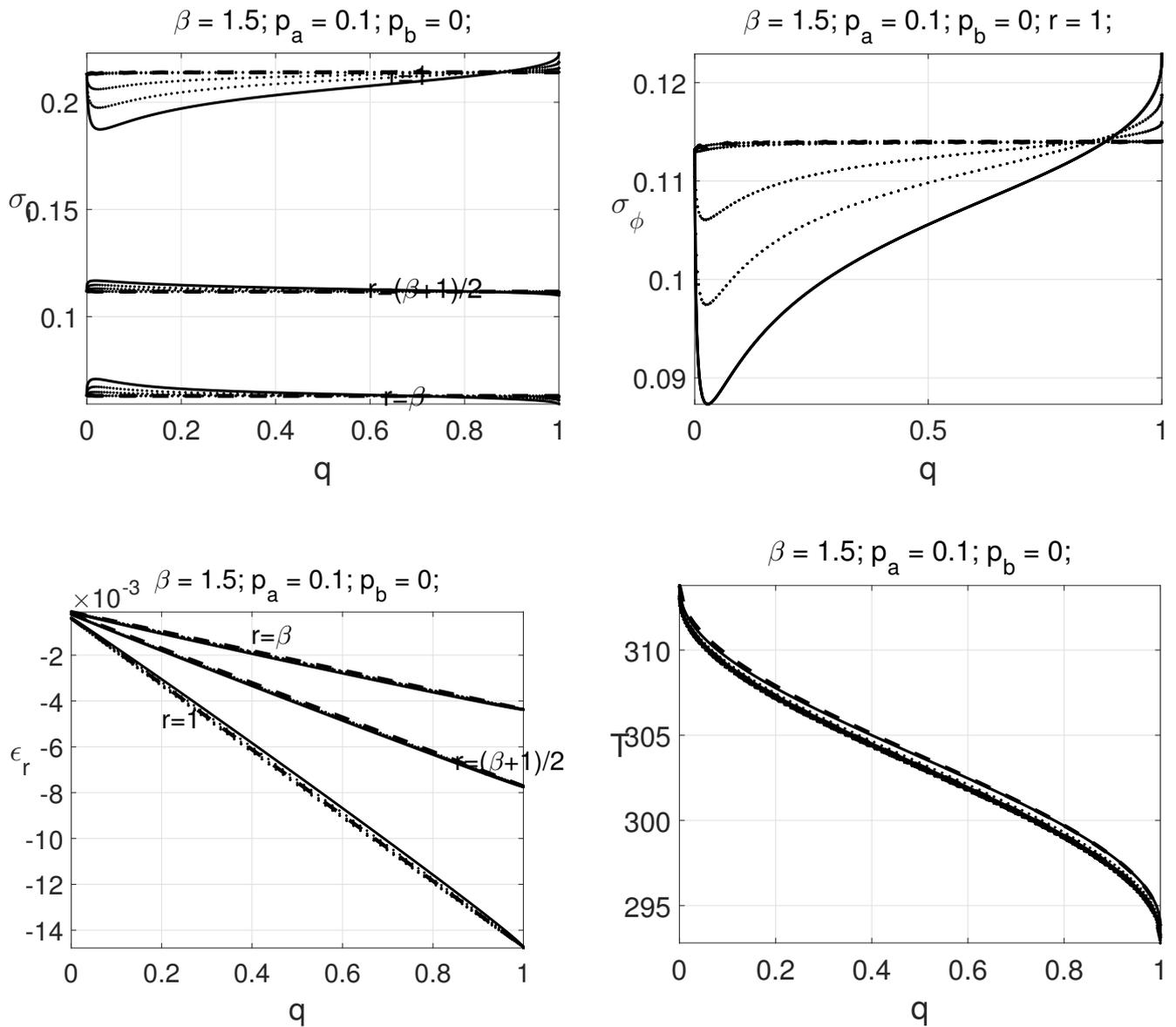


Рисунок 4.35 — Сфера. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\epsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

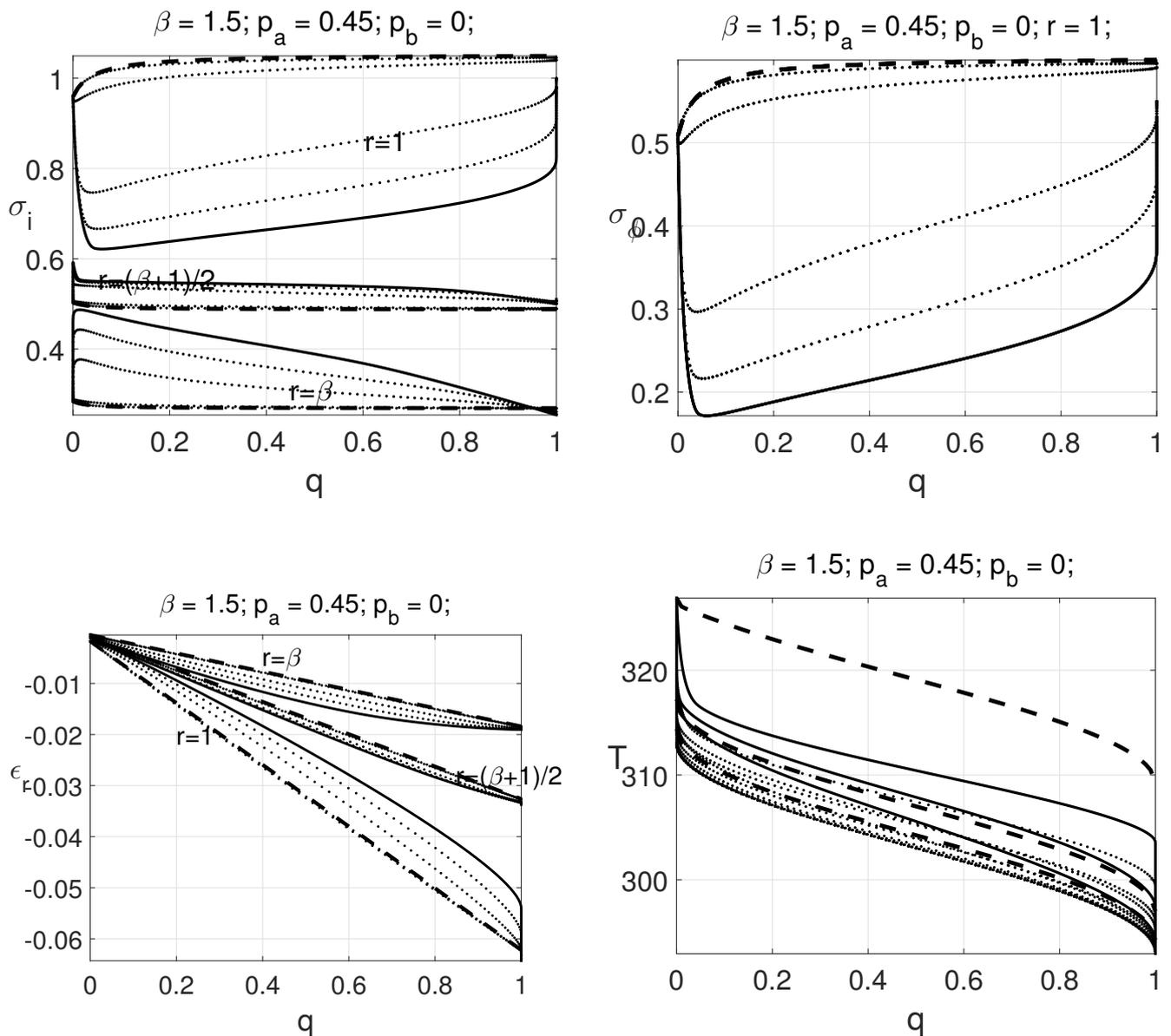


Рисунок 4.36 — Сфера. Поля интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , кольцевых напряжений  $\sigma_\phi$ , радиальных деформаций  $\varepsilon_r$  и температур  $T$  в зависимости от  $q$  для разных  $r$  (для кольцевых напряжений кривые только для  $r = 1$ , чтобы не загромождать рисунок) в постановках, когда  $q$  не зависит от  $r$  (постановка №1) – кривые со штриховым пунктиром; и  $T$  не зависит от  $r$  (постановка №2) – сплошные кривые. Температурные кривые для внутреннего, срединного и внешнего сечений лежат сверху вниз соответственно. Кривые с точечным пунктиром соответствуют четырем решениям задачи в постановке №2, при условии, что объемная плотность энтропии фазового перехода  $\Delta S_0$  была увеличена в 2, 5, 100 и  $10^{20}$  раз соответственно. Кривые с точечным пунктиром везде, кроме графиков для температур, расположены так, что чем больше значение  $\Delta S_0$ , тем ближе кривая с точечным пунктиром к кривой из постановки №1. Для графиков температур кривые с точечным пунктиром тем ниже, чем больше  $\Delta S_0$ .

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получено решение связной задачи о прямом превращении в цилиндре и в сфере под действием постоянных внутреннего и внешнего давлений, в предположение о независимости распределения доли мартенситной фазы по радиусу оболочки. В случае неучета упругих деформаций полученные решения являются точными аналитическими, напряженное состояние не зависит от доли мартенситной фазы, а поля деформаций и перемещений пропорциональны доле мартенситной фазы. В случае учета упругих деформаций решение получено не из исходных определяющих соотношений в приращениях, а из конечных соотношений, следующих из положения об активных процессах пропорционального нагружения, а поля деформаций и перемещений хорошо аппроксимируются линейными функциями по доле мартенситной фазы.
2. Получены выражения для предельных нагрузок, достижение которых означает начало деформирования по механизму дислокационной пластичности. В случае, если действуют только давления – критические нагрузки возрастают с ростом толщины сферы, асимптотически стремясь к некоторым конечным значениям при стремлении толщины к бесконечности. В случае, если для цилиндра в рассмотрение добавить продольную силу, то предельные кривые на плоскости, где по оси ординат отложены давления, а по оси абсцисс – продольная сила, являются эллипсами, которые несимметричны относительно оси абсцисс. В случае неучета упругих деформаций введен деформационный критерий, который является предельным случаем критерия по пределу текучести.
3. Получено решение задачи о контакте упругой трубы и муфты из СПФ во время обратного превращения, моделирующее процесс создания термомеханического соединения. Установлено, что в случае толстостенных муфт при величине предварительной раздачи более 2% кольцевые напряжения достигают своих максимальных значений не в самом конце обратного превращений, а в некоторый момент до этого.
4. Получено решение однократно связной задачи о прямом превращении в цилиндре и в сфере под действием постоянного давления, в предполо-

жение о независимости распределения температуры по радиусу оболочки. Данное решение справедливо для любых толщин оболочек и соответствует медленному процессу раздачи муфты из СПФ. Установлено, что в большинстве случаев на срединном сечении оболочки для кольцевых напряжений и интенсивности напряжений возникает «горб», олицетворяющий фронт фазового перехода. Установлено, что кольцевые напряжения на внутренней стороне оболочки в середине фазового перехода могут становиться меньше кольцевых напряжений на внешней стороне оболочки, а для сферы в некоторых случаях максимум кольцевых напряжений достигается на внешней стороне. Получено, что в случае толстостенных оболочек при очень высоких нагрузках прямое превращение на внутренней стороне может начинаться с ростом температуры. Установлено, что решение в данной постановке при высоком значении плотности энтропии фазового перехода есть точное решение задачи в постановке, когда доля мартенситной фазы равномерно распределена по толщине оболочки.

**Список сокращений и условных обозначений**

- СПФ** сплавы с памятью формы
- ЭПФ** эффект памяти формы
- ТМС** термомеханическое соединение
- ПАПН** положение об активных процессах пропорционального нагружения

## Список литературы

1. *Otsuka K., Wayman C.M.* Shape Memory Materials. — Cambridge univ pr, 1999. — P. 298.
2. *Schwartz M.* Encyclopedia of Smart Materials, 2 Volume Set. — John Wiley & sons inc, 2002. — P. 1176.
3. *Jackson C., Wagner H., Wasilewski R.* 55-Nitinol - The Alloy With a Memory: Its Physical Metallurgy, Properties, and Applications. — 1972.
4. *Klaput J.* Studies of selected mechanical properties of nitinol – shape memory alloy // *Archives of Foundry Engineering*. — 2010. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 155–158.
5. *Wu X.D., Sun G.J., Wu J.S.* The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol // *Materials Letters*. — 2003. — Vol. 57. — Pp. 1334–1338.
6. Опыт применения сплавов с эффектом памяти формы при сооружении крупногабаритных конструкций в открытом космосе. / Ю.Д. Кравченко, В.А. Лихачев, А.И. Разов и др. // *Журнал технической физики*. — 1996. — Т. 66, № 11. — С. 153–161.
7. Aerofit, LLC. — URL: <http://www.aerofit.com/sma.html>.
8. *Huber J. E., Fleck N. A., Ashby M. F.* The selection of mechanical actuators based on performance indices // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1997. — oct. — Vol. 453, no. 1965. — Pp. 2185–2205.
9. *Чернов Д.Б., Паперский А.П., Дасьянов У.* Термомеханические соединения элементами с памятью формы // *Авиационная промышленность*. — 1984. — № 6. — С. 63–68. — 1984. — № 6. — С. 63–68.
10. Рациональные технологии создания термомеханических соединений / В.А. Хохлов, А.Л. Саруев, А.С. Закусов, А.А. Судницкий // Проблемы геологии и освоения недр: Тр. XII Междунар. симпозиума. Томск. — 2007. — С. 67–68.

11. *Максак В.И., Хохлов В.А., Зитов А.И.* Методика и оборудование для исследования свойств тяжело нагруженного контакта тел из материалов с ПФ // Сб. исследований по строительной механике и строительным конструкциям. — Том. гос. архит.-строит. акад., 1990. — С. 79–86.
12. *Рогов В. А., Позняк Г.Г.* Современные машиностроительные материалы и заготовки. — Издательский центр Академия, 2008. — С. 336.
13. SAE International. — URL: <http://standards.sae.org/as18280/>.
14. *Shaw J.A., Churchill C.B.* A reduced-order thermomechanical model and analytical solution for uniaxial shape memory alloy wire actuators // *Smart Materials and Structures*. — 2009. — apr. — Vol. 18, no. 6.
15. Dynalloy, Inc. — URL: <http://www.dynalloy.com>.
16. Elastic properties, damping capacity and shape memory alloys // *Smithells Metals Reference Book* / Ed. by W.F. Gale, T.C. Totemeier. — Elsevier BV, 2004. — Pp. 15–1–15–45.
17. Shape Memory Alloys as Linear Drives in Robot Hand Actuation / G. Lange, A. Lachmann, A. Hakim et al. // *Procedia Computer Science*. — 2015. — Vol. 76. — Pp. 168–173.
18. A shape memory alloy actuator for solar array deployments / V. Barbet, L. D’Abrigeon, F. Champandard, C. Jacopini // *Proceedings of the 11th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*. Lucerne, Switzerland. — 2005. — Pp. 337–339.
19. *Huang W., Pellegrino S., Bashford D. P.* Shape memory alloy actuators for deployable structures // *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Engineering, Proceedings of the Conference held by ESA, CNES and DARA in Noordwijk*. — 1996. — P. 53.
20. Shape Memory Alloy Valves / Ed. by A. Czechowicz, S. Langbein. — Springer International Publishing, 2015. — Pp. 186–187.
21. *Phillip C.R.* 2014 Chevrolet Corvette C7 Smart Metal - Down To The Wire. — 2013. — URL: <http://www.superchevy.com/features/1307-2014-chevrolet-corvette-c7-smart-metal/>.

22. Shape Memory Alloy Actuated Vertical Deploy Air Dam: Part 1 — Performance Requirements and Design / Alan L. Browne, Nancy L. Johnson, Hanif Muhammad, Jeffrey Brown. — ASME International, 2012. — sep. — Pp. 295–304.
23. *Butlin A.H.* Folding air dam. US Patent 20130341110 A1. — 2013.
24. *Kirkpatrick S.R., Siahmakoun A., Adams T.M.D., Wang Z.* Shape memory alloy MEMS heat engine. US Patent 7444812 B2. — 2008.
25. *Buehler W.J., Goldstein D.M.* Conversion of heat energy to mechanical energy. US Patent 3403238. — 1968.
26. *S. Warren K.* Compound Memory Engine. US Patent 4086769. — 1978.
27. *Dolce M., Cardone D., Marnetto R.* SMA recentering devices for seismic isolation of civil structures // *Smart Structures and Materials 2001: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways*, Newport Beach, CA, USA. — 2001.
28. Experimental and analytical studies of structural control system using shape memory alloy / M. Higashino, S. Aizawa, P. W. Clark at al. // *Second International Workshop on Structural Control*. Hong Kong. — 1996.
29. Testing of Superelastic Recentering Pre-Strained Braces for Seismic Resistant Design / P. Lafortune, J. McCormick, R. DesRoches, P. Terriault // *Journal of Earthquake Engineering*. — 2007. — may. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 383–399.
30. *DesRoches R., Delemont M.* Seismic retrofit of simply supported bridges using shape memory alloys // *Engineering Structures*. — 2002. — mar. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 325–332.
31. *Andrawes B., DesRoches R.* Unseating prevention for multiple frame bridges using superelastic devices // *Smart Materials and Structures*. — 2005. — Vol. 14, no. 3. — P. 60.
32. *Berg B.A.* SMST-2006: Proceedings of the International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies. — ASM International, 2008. — Pp. 534–538.
33. *Andreasen G. A., Brady P.* A used hypothesis for 55 nitinol wire for orthodontics // *J.A.D.A.* — 1971. — Vol. 42. — Pp. 172–177.

34. *Wichelhaus Andrea*. NiTi Alloys in Orthodontics // Shape Memory Implants / Ed. by L. Yahia. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000. — Pp. 194–209.
35. *Negri A*. Prospective evaluation of a new sternal closure method with thermoreactive clips // *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*. — 2002. — oct. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 571–575.
36. Skin wound closure with a novel shape-memory alloy fixator / Y. Ng, S. M. Shimi, N. Kernohan et al. // *Surgical Endoscopy*. — 2005. — dec. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 311–315.
37. Zur dwyerschen skoliosenoperation mittels drahten aus memory-legierungen / F. Baumgart, G. Bensmann, J. Haasters et al. // *Archives of Orthopaedic and Traumatic Surgery*. — 1978. — Vol. 91, no. 1. — Pp. 67–75.
38. *Plant S., Grant D., Leach L*. Behaviour of human endothelial cells on surface modified NiTi alloy // *Biomaterials*. — 2005. — sep. — Vol. 26, no. 26. — Pp. 5359–5367.
39. Morphological characterization and in vitro biocompatibility of a porous nickel–titanium alloy / O. Prymak, D. Bogdanski, M. Köller et al. // *Biomaterials*. — 2005. — oct. — Vol. 26, no. 29. — Pp. 5801–5807.
40. Bioactive NiTi shape memory alloy used as bone bonding implants / M.F. Chen, X.J Yang, R.X. Hu et al. // *Materials Science and Engineering: C*. — 2004. — jun. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 497–502.
41. *Titanium in Medicine* / M.B. Donald, P. Tengvall, M. Textor, Thomsen.P. — Springer, 2013.
42. Temporary use of shape memory spinal rod in the treatment of scoliosis / Y. Wang, G. Zheng, X Zhang, d. others // *European Spine Journal*. — 2010. — jul. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 118–122.
43. *Rachev A., Stergiopulos N., Meister J*. Theoretical study of dynamics of arterial wall remodeling in response to changes in blood pressure // *Journal of Biomechanics*. — 1996. — may. — Vol. 29, no. 5. — Pp. 635–642.

44. *Taber Larry A. Biomechanics of Growth, Remodeling, and Morphogenesis // Applied Mechanics Reviews. — 1995. — Vol. 48, no. 8. — P. 487.*
45. Сплавы с памятью формы в медицине / В.Э. Гюнтер, В.В. Котенко, М.З. Миргазизов и др. — Томск: Издательство Томского университета, 1986.
46. *Зиганьшин Р.В., Гюнтер В.Э., Гиберт Б.К.* Новая технология создания компрессионного анамостоza в желудочно-кишечной хирургии сверхэластичными имплантатами с памятью формы. — Томск: STT, 2000. — С. 176.
47. *Лохов В.А., Няшин Ю.И., Кучумов А.Г.* Сплавы с памятью формы: применение в медицине. Обзор моделей, описывающих их поведение. // *Российский журнал биомеханики.* — 2007. — Т. 11, № 3. — С. 9–27.
48. Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы - микромеханика, феноменология, термодинамика / А.А. Мовчан, Л.Г. Сильченко, С.А. Казарина, Т.З. Аунг // *Ученые записки Казанского университета.* — 2010. — Т. 152, № 4. — С. 180–194.
49. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием монотонно меняющихся напряжений // *Известия РАН. МТТ.* — 2014. — № 1. — С. 37–53.
50. *Урвачев В.П., Кочетков В.В., Горина Н.Б.* Ювелирное и художественное литье по выплавляемым моделям сплавов меди. — Челябинск: Металлургия, 1991. — С. 168.
51. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л.* Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // *Известия РАН. МТТ.* — 2011. — № 2. — С. 44–56.
52. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Известия РАН. МТТ.* — 2010. — № 3. — С. 118–130.
53. *Мовчан А.А.* Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // *Известия РАН. МТТ.* — 1998. — № 1. — С. 79–90.

54. Мовчан А.А., Аунг Т.З., Мовчан И.А. Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях. // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 422–436.
55. On superelastic bending of shape memory alloy beams / R. Mirzaeifar, R. DesRoches, A. Yavari, K. Gall // *International Journal of Solids and Structures*. — 2013. — may. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 1664–1680.
56. Yang S., Xu M. Finite element analysis of 2D SMA beam bending // *Acta Mechanica Sinica*. — 2011. — sep. — Vol. 27, no. 5. — Pp. 738–748.
57. Мовчан А.А. Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // *Известия РАН. МТТ*. — 2000. — № 6. — С. 143–154.
58. Мовчан А.А., Аунг Т.З. Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2009. — Т. 15, № 4. — С. 591–600.
59. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 454–468.
60. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 663–674.
61. Роговой А.А., Столбова О.С. Термомеханика фазовых переходов в ферромагнитных сплавах с памятью формы при конечных деформациях // *Прикладная математика и вопросы управления*. — 2016. — С. 15–24.
62. Столбова О.С., Роговой А.А. Моделирование термомеханических процессов в ферромагнитных сплавах с памятью формы при конечных деформациях // *Прикладная математика, механика и процессы управления*. — 2014. — С. 71–72.

63. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // *Прикладная механика и техническая физика.* — 2013. — С. 148–162.
64. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Термо-упруго-неупругие процессы при конечных деформациях в материалах с памятью формы. Связанная задача // *Вестник пермского университета. серия: математика. механика. информатика.* — 2011. — С. 167–170.
65. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Моделирование термомеханических процессов в ферромагнитных сплавах с памятью формы при конечных деформациях // *Прикладная математика и вопросы управления.* — 2014. — С. 27–38.
66. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан, С.А. Казарина, А.Е. Машихин и др. // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки.* — 2015. — Т. 157, № 3. — С. 97–110.
67. *Машихин А.Е., Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Краевые задачи механики деформируемого твердого тела для сплавов с памятью формы // Тезисы докладов Международной научной конференции "Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений". Одесса. — 2013. — С. 90–91.
68. Краевые задачи механики деформируемого твердого тела для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан, И.В. Мишустин, А.Е. Машихин, Е.Б. Саганов // *Материалы международной конференции "Сплавы с эффектом памяти формы : свойства, технологии, перспективы".* Беларусь, Витебск. — 2014. — С. 92–94.
69. Краевые задачи термомеханики для сплавов с памятью формы. / А.А. Мовчан, С.А. Казарина, А.Е. Машихин и др. // *Сборник докладов участников XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Пленарный доклад (на секции III).* Казань. — 2015. — С. 2601–2604.
70. Жестко-фазово-структурный анализ для элементов из сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан, С.А. Казарина, А.Е. Машихин и др. // *Сборник тру-*

дов симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летней годовщине со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. — 2016. — С. 100–104.

71. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно – аналитическая теория прочности. — Санкт-Петербург. «Наука», 1993. — С. 471.
72. *Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А.* Расчет напряженно-деформированного состояния при термическом ударе толстостенной трубы, изготовленной из материала с памятью формы. // Материалы с новыми функциональными свойствами. Новгород; Боровичи. — С. 155–158.
73. *Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А.* Численное моделирование эволюции напряженного состояния толстостенного цилиндра из материала, испытывающего мартенситные превращения при силовом воздействии // Прогнозирование механического поведения материалов : XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Новгород. — Т. 1. — 1991. — С. 135–139.
74. *Волков А.Е., Лихачев В.А., Ю.Ф. Слуцкер.* Расчет термомеханического соединения методами структурно-аналитической теории // Функционально-механические свойства сплавов с мартенситным каналом неупругости: Материалы XXVII Межреспубл. семинара «Актуальные проблемы прочности». Ухта. — 1992. — Рр. 31–36.
75. *Likhachev V. A., I. Razov A., E. Volkov A.* Finite difference simulation of a thermomechanical coupling // Proceedings of the Second International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97, Asilomar Conference Center, Pacific Grove, California, USA. — 1997. — Рр. 335–340.
76. *Какулия Ю.Б., Шарыгин А.М.* Численное моделирование напряжений и деформаций в толстостенной трубе из материала с памятью формы. // *Журнал функциональных материалов.* — 2007. — № 8. — С. 303–313.
77. *Мовчан А.А.* Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы. // *Журнал прикладной механики и технической физики.* — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 181–189.

78. Мовчан А. А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // *Известия РАН. МТТ.* — 1996. — № 4. — С. 136–144.
79. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* — 1994. — № 6. — С. 47–53.
80. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // *Прикладная механика и техническая физика.* — 1995. — Т. 36, № 2. — С. 173–181.
81. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // *Известия РАН. МТТ.* — 1995. — № 1. — С. 197–205.
82. Кузнецов А.В. Численное решение связанной осесимметричной задачи о прямом превращении для сплавов с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций.* — 1996. — Т. 3-4, № 71.
83. Волков А.Е., Кухарева А.С. Моделирование термомеханических соединений труб тонкостенными и толстостенными муфтами из никелида титана // XLVII Международная конференция «Актуальные проблемы прочности», Нижний Новгород. — 2008. — С. 54–56.
84. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // *Изв. Академии Наук. Сер. Физическая.* — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1290–1297.
85. Волков А.Е., Кухарева А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния в бесконечном цилиндре из сплава с памятью формы при охлаждении и нагреве с различными скоростями // *Механика композиционных материалов и конструкций.* — 2009. — Т. 15, № 1. — С. 19–27.
86. Мовчан А.А, Машихин А.Е. Деформирование кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении // *Механика композиционных материалов и конструкций.* — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 235–247.

87. *Машихин А.Е.* Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 624–636.
88. *Машихин А.Е.* Процесс обратного превращения в трубе из сплава с памятью формы, находящейся в контакте с упругой трубой // XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014. Москва. — 2014.
89. *Машихин А.Е., Мовчан А.А.* Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы // *Изв. РАН. МТТ*. — 2016. — № 3. — С. 100–114.
90. *Машихин А.Е.* Температурные поля в связных задачах о прямом превращении в сфере и цилиндре из сплава с памятью формы // Сборник трудов 6-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 2016. — С. 132–140.
91. *Машихин А.Е.* Температурные поля в связных задачах о прямом превращении в цилиндре и сфере из сплавов с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 602–617.
92. *Мовчан А.А., Машихин А. Е., Саганов Е.Б.* Задачи предельного деформирования для элементов из сплавов с памятью формы // 2-я Всероссийская научная конференция "Механика наноструктурированных материалов и систем". Москва, ИПРИМ РАН. — 2013.
93. Влияние скорости дорнования муфт, изготовленных из сплавов с памятью формы системы Ti-Ni-Nb, на герметичность и несущую способность термомеханического соединения трубопроводов / Н.Н. Попов, В.Ф. Ларькин, Д.В. Пресняков и др. // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. — 2013. — № 5. — С. 39–45.
94. *Хохлов В.А., Потехаев А.И., Галсанов С.В.* Исследование релаксации напряжений в термомеханических соединениях на основе никелида титана и методы повышения их надежности // *Известия Томского политехнического университета. Физика*. — 2013. — Т. 323, № 2. — С. 85–90.
95. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. — М.: "Наука 1969. — С. 420.

96. *Ильюшин А.А.* Пластичность. — ОГИЗ, 1948. — С. 376.
97. *Шкутин Л.И.* Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // *ПМТФ*. — 2007. — Т. 48, № 2. — С. 163–171.
98. *Шкутин Л.И.* Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений // *ПМТФ*. — 2008. — Т. 49, № 2. — С. 204–210.
99. *Шкутин Л.И.* Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. — Новосибирск. Изд-во СО РАН. — С. 138.
100. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях / *А.А. Мовчан, С.А. Казарина, И.В. Мишустин, И.А. Мовчан* // *Деформации и разрушение материалов*. — 2009. — № 8. — С. 2–9.
101. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач //.- 2012.- Т. 15. № 1.- С. 105-116. Физическая мезомеханика // *Физическая мезомеханика*. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 105–116.
102. *Мовчан А.А., Левин А.С.* Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 221–236.
103. *Машихин А.Е.* Аналитическое решение связанных осесимметричных и центрально-симметричных задач о прямом превращении в толстостенных сферах и цилиндре из сплава с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных гетерогенных сред. Сборник материалов Всероссийской научной конференции*. Москва. — 2015. — С. 196–198.
104. *Машихин А.Е., Казарина С.А., Мовчан А.А.* Генерация реактивных напряжений в опыте на ориентированное превращение в заневоленном состоянии сплава с памятью формы // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. — 2016. — Т. 21, № 3. — С. 1152–1155.

105. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Упруго-пластические деформации полых цилиндров. — Москва: Изд.-во МГУ. — С. 227.
106. *Машихин А.Е.* Задачи о прямом превращении в сфере и цилиндре из сплава с памятью формы в случае связанных постановок // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016». — 2016.
107. *Baumeister E., Klaeger S., Kaldos A.* Lightweight, hollow-sphere-composite (HSC) materials for mechanical engineering applications // *Journal of Materials Processing Technology*. — 2004. — nov. — Vol. 155-156. — Pp. 1839–1846.
108. *Oechsner A., Augustin C.* Multifunctional Metallic Hollow Sphere Structures. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 257.
109. *Baker D.M.* Metal-Matrix/Hollow-Ceramic-Sphere Composites // *NASA report*. — 2011.
110. *Miyazaki S., Otsuka K.* Mechanical behaviour associated with the premartensitic rhombohedral-phase transition in a Ti 50 Ni 47 Fe 3 alloy // *Philosophical Magazine A*. — 1985. — mar. — Vol. 50, no. 3. — Pp. 393–408.