КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

А. В. ПОДОРОГА
ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com

УДК 532.5+004.942

Ключевые слова: *математическое моделирование, квазилинейное уравнение первого порядка, метод характеристик.*

Для квазилинейного уравнения дорожного движения средствами компьютерного моделирования решается задача о построении поля характеристик.

При математическом описании дорожного движения часто используют макроскопический подход [1]. Транспортный поток рассматривают как специфический поток сплошной среды. Основными характеристиками потока является его плотность $\rho = \rho(x, t)$ и интенсивность $q = q(x, t)$, зависящие от координаты x и времени t. Ключевую роль играет связь интенсивности и плотности

$$q = Q(\rho), \qquad 0 \le \rho \le \rho_{\max}.$$

Это соотношение называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения. Непрерывная функция $Q(\rho)$ предполагается неотрицательной и выпуклой вверх на $[0, \rho_{\max}]$, равной нулю на концах отрезка. Используя фундаментальную диаграмму, получаем по аналогии с уравнением неразрывности основное *уравнение дорожного движения*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial t} = 0, \qquad \rho = \rho(x, t).$$

Если известно начальное распределение автомобилей, то возникает задача Коши

$$\rho(x, 0) = \mu(x).$$

Решение задачи Коши выражается в виде неявной функции

$$\rho = \mu\left(x - Q'(\rho)t\right).$$

Восстановить отсюда явный вид функции $\rho = \rho(x,t)$ не всегда возможно.

Поэтому задачу Коши решают *методом характеристик* [2], [3]. Через каждую точку x_0 на оси Ox в плоскости (x,t) проводят характеристику

$$x = x_0 + Q'\left(\mu(x_0)\right) t.$$

Решение квазилинейного уравнения сохраняет свое значение вдоль характеристики. Таким образом, если линия выходит из точки x_0, то всюду на ней значение плотности $\rho(x,t)$ равно $\mu(x_0)$. Построив достаточно плотное поле характеристик, можно восстановить решение для любого начального состояния $\mu(x)$.

Правда, здесь встречаются сложности, связанные с тем, что некоторые характеристики могут пересекаться или расходиться. Если характеристики пересекаются, то образуется линия сильного разрыва – так называемая *ударная волна*, которая движется по плоскости (x,t) в соответствии с условием Рэнкина–Гюгонио (см. [1], [3]). При этом стоит учитывать, что, хотя сами характеристики суть прямые линии, возникающая ударная волна может быть достаточно сложной нелинейной кривой. Помимо пересечений, характеристики могут расходиться, образуя пустые области, в которые не попадает ни одна характеристика. Всякую такую область искусственно заполняют "веером" характеристик, формирую так называемую *волну разрежения* (см. [4], [5]).

В настоящем сообщении обсуждается компьютерная программа, которая моделирует построение поля характеристик. Программа написана на языке C# и снабжена наглядной визуализацией. Сначала ось Ox разбивают на сетку с достаточно мелким шагом. Через каждую точку x_0 построенной сетки проводят характеристику, угол наклона которой зависит от начального условия в точке x_0 и выбранной фундаментальной диаграммы. Значение плотности на такой характеристике равно $\mu(x_0)$. Величина числа $\mu(x_0)$ определяет цвет характеристики. Черный цвет соответствует максимальной плотности, белый цвет – минимальной (нулевой) плотности. При уменьшении шага сетки, характеристики все плотнее заполняют фазовую плоскость (x,t). В итоге получается "трехмерный" график плотности $\rho(x,t)$, выполненный в оттенках серого. Ударные волны будут возникать в точках пересечения характеристик, и далее формироваться в соответствии с условием Рэнкина–Гюгонио. Таким образом, геометрический подход позволяет получать графики решений задачи Коши для выбранных начальных условий при известной фундаментальной диаграмме.

Работа компьютерной модели протестирована на большой серии типичных примеров.

Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие // Гасников А. В. и др. Под ред. Гасникова А. В. Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
2. Lighthill M. J., Whitham G. B. On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 229, № 1178. P. 317–345.
3. Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. – 296 с.
4. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.
5. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

A. V. Podoroga

Simulation of the Characteristics Field for the Quasi-linear Equation of Traffic Flow.

Key words: *mathematical simulation, quasi-linear equation of traffic flow, method of characteristics.*

We discuss the problem of plotting characteristic field for quasi-linear equation of traffic flow.