

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ



С.А. Магницкий, Д. Н. Фроловцев

**Квантовая оптическая томография
поляризационных состояний бифотонов**

Учебное пособие

Москва, 2022

УДК 535.8, 53.082.55

С.А.Магницкий, Д.Н.Фроловцев

Квантовая оптическая томография поляризационных состояний бифотонов: учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2022. — 130 с.

ISBN 978-5-8279-0217-1

Учебное пособие посвящено одному из ключевых разделов современной квантовой оптики — квантовой томографии запутанных состояний фотонов. На примере поляризационных бифотонных состояний обсуждается понятие запутанности, его свойства и отличия от обычных незапутанных квантовых состояний. Рассмотрены математические критерии, позволяющие дать количественную характеристику запутанности, такие как Запутанность (Concurrence), Сцепленность (Tangle) и Перепутывание формирования. Особое внимание в пособии уделено экспериментальным методам измерения запутанности. Описан созданный авторами квантовый томограф и методика измерения квантовых состояний бифотонов, генерируемых бифотонным источником на основе спонтанного параметрического рассеяния света.

На физическом факультете авторы пособия читают следующие лекции по тематике пособия: "Введение в современную оптику" (С.А.Магницкий); «Введение в квантовую нелинейную оптику» (С.А.Магницкий) «Программирование квантовых вычислительных систем, современные средства разработки программного обеспечения для специализированных квантовых вычислителей» (С.А.Магницкий, Д.Н.Фроловцев, П.П.Гостев).

Пособие предназначено для бакалавров, магистров, аспирантов физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и других профильных вузов. Пособие также может быть полезно преподавателям и научным сотрудникам, интересующимися проблемами квантовой оптики и современными квантовыми оптическими технологиями.

Рекомендовано учебно-методической комиссией физического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов естественно-научных факультетов, специализирующихся в области квантовой оптики

Рецензенты:

д. ф.-м. н. А.В.Белинский,

к. ф.-м. н. Е.А.Мамонов

МГУ им. М.В. Ломоносова

ISBN 978-5-8279-0217-1

© Физический факультет

МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022

© Магницкий С.А., 2022

© Фроловцев Д.Н., 2022

Оглавление

1	Квантовые поляризационные состояния одиночных фотонов и фотонных пар	11
1.1	Квантовые поляризационные состояния одиночных фотонов	11
1.2	Квантовые поляризационные состояния за- путанных фотонных пар	15
1.3	Характеристики квантового состояния . . .	20
1.3.1	Характеристики чистоты состояния .	20
1.3.1.1	Энтропия фон Неймана . .	20
1.3.1.2	Линейная энтропия	21
1.3.2	Характеристики запутанности состояния	21
1.3.2.1	Запутанность (Concurrence)	23
1.3.2.2	Сцепленность (Tangle) . . .	24
1.3.2.3	Перепутывание форми- рования (Entanglement of formation)	25
1.3.3	Фиделити (Fidelity)	26

2	Генерация бифотонов в нелинейном кристалле в процессе спонтанного параметрического рассеяния света	27
2.1	Физические принципы получения бифотонов с помощью спонтанного параметрического рассеяния света	29
2.2	СПР-источник бифотонов 1-го типа .	33
2.2.1	СПР-источник незапутанных по поляризации бифотонов	33
2.2.2	СПР-источник запутанных по поляризации бифотонов	38
3	Принципы квантовой томографии поляризационных состояний фотонов	41
3.1	Томографическая оценка матрицы плотности поляризационных состояний фотонов .	43
3.1.1	Томографически полная система измерений и линейная реконструкция матрицы плотности однофотонного поляризационного состояния	43
3.1.2	Томографически полная система измерений и линейная реконструкция матрицы плотности двухфотонного поляризационного состояния	47
3.2	Томографическая оценка матрицы плотности методом максимального правдоподобия	53
3.2.1	Анализ источников ошибок измерений	62
3.2.2	Расчет погрешностей определения элементов матрицы плотности	70

3.2.3	Расчет характеристик квантового состояния и их погрешностей	71
3.2.3.1	Энтропия фон Неймана . . .	71
3.2.3.2	Линейная энтропия	72
3.2.3.3	Запутанность	72
3.2.3.4	Сцепленность	73
3.2.3.5	Перепутывание формирова- ния	74
3.3	Расчет погрешности определения Фидели- ти	75
4	Экспериментальная реализация квантовой томографии поляризационных состояний бифотонов	77
4.1	Установка для измерения запутанных по- ляризационных состояний бифотонов с по- мощью квантового томографа	77
4.2	Протокол работы с квантовым томографом	89
4.3	Экспериментальная реализация томогра- фии квантового состояния поляризации би- фотонов	91
4.3.1	Результаты квантовой томографии фотонных пар с длиной волны 1064 нм	92
4.3.1.1	Квантовая томография фо- тонных пар, находящихся в факторизованном поля- ризационном состоянии . . .	92

4.3.1.2	Квантовая томография поляризационно-запутанных фотонных пар	95
4.3.2	Результаты квантовой томографии запутанных по поляризации фотонных пар с длиной волны 810 нм . . .	98
5	Примеры применения метода квантовой томографии в задачах квантовой оптики и квантовой информатики	105
5.1	Экспериментальное исследование квантовой запутанности неортогональных состояний фотонных СПР-пар методом квантовой томографии	105
5.2	Применение параметра Фиделити для характеристики квантово-оптических протоколов	109
5.2.1	Квантовая передача ключа по протоколу BB84	112
5.2.2	Квантовая передача ключа с использованием запутанных фотонов .	113

Введение

Скорость, с которой новые технологии входят в нашу повседневную жизнь, растет с каждым десятилетием. Сегодня, в 2022-м году, человеку уже трудно полностью охватить этот процесс. Совершенно незаметно технологии, используемые в индустрии, стали квантовыми: микроэлектроника, лазеры и светодиоды, компьютеры, нано- и метаматериалы и многое другое. Однако, существующие в настоящее время квантовые технологии в подавляющем большинстве случаев имеют дело не с одиночными частицами, а с объектами, состоящими из большого числа элементарных частиц. Так, если линейный размер элемента процессора равен всего $100\overset{o}{\text{\AA}}$, то в нем содержится $\sim 10^6$ атомов. В связи с этим встает закономерный вопрос: а может ли размер технологического структурного элемента уменьшиться до размера одной частицы, и если да, то когда это произойдет? Если воспользоваться законом Мура, которому уже несколько десятилетий следуют компьютерные технологии, то это должно произойти в на рубеже 20-30-х годов нашего века, т.е. мы вплотную подошли к этому пределу. Эксперты расценивают эту дату как критическую в развитии современных высоких технологий. Именно с этого момента может начаться экспоненциальное вытеснение существую-

щих технологий квантовыми, основанными на манипуляциях с одной структурной частицей вещества, в частности, с одиночными фотонами. На первый взгляд это звучит фантастично. Однако, уже сейчас разработки однофотонных квантовых технологий ведутся полным ходом. Достаточно отметить хотя бы китайскую программу космической квантовой коммуникации, возглавляемой профессором Научно-технического университета Китая Pan Jian-Wei. Несколько лет назад китайским космическим ведомством был запущен спутник, специализированный только для научно-технологических целей [1], с помощью которого впервые в мире была осуществлена космическая квантовая связь между Китаем и Австрией [2]. Если посмотреть на состояние современных исследований в области оптических технологий, к которой напрямую относятся такие направления современной квантовой физики как квантовая оптика и квантовая информатика, включающие в себя квантовый интернет, квантовые сети, квантовые компьютеры, квантовые вычисления и квантовую криптографию и телепортацию, то мы увидим экспоненциальный рост объема исследований. И все это делается на фотонных ансамблях, содержащих один или несколько фотонов. Особую, можно даже сказать ключевую роль в квантовых оптических технологиях играют так называемые запутанные фотоны, свойства которых настолько радикально отличаются от свойств классических объектов, что позволяют создавать принципиально новые технологии, невозможные в макром мире. Следует отметить, что работы в вышеперечисленных направлениях уже начали выходить за стены научных лабораторий. Так, например, компания IDQuatique производит коммерчески доступную платформу квантового распределения ключей “Cerberis QKD Blade” [3], предназначенную для кванто-

вой передачи ключа по оптическому волокну. Расстояния, на которых удастся реализовать квантовую коммуникацию, увеличиваются с каждым годом. Так, к настоящему времени уже осуществлена квантовая телепортация и квантовое распределение ключа на расстояния в сотни километров как в свободном пространстве [4, 5, 6], так и в волоконных линиях связи [7]. В 2017 г. в Китае была введена в эксплуатацию самая протяженная квантовая коммуникационная сеть от Пекина до Шанхая, длиной ~ 2000 км, а в 2021 г. запущен самый протяженный защищенный квантовый канал связи длиной 4600 км, состоящий из наземного и космического сегментов, который объединил Шанхай и Наньшань [8]. В России в этом же 2021г. состоялся первый сеанс видеоконференцсвязи по магистральному квантовому защищенному каналу между Москвой и Санкт-Петербургом. Что касается области квантовых вычислений, то в 2019-2020 годах было достигнуто квантовое превосходство [9, 10], т.е. было продемонстрировано, что квантовый компьютер способен решать некоторые задачи быстрее, чем современные суперкомпьютеры. Так, компьютер Sycamore компании Google с 54 кубитами за несколько минут выполнил объем вычислений, который, по оценке компании, занял бы у самого мощного на сегодняшний день суперкомпьютера порядка 10 тыс. лет [9].

Международное признание новых квантовых оптических технологий требует улучшения прослеживаемости и надежности измерений на малофотонном уровне. Уже начали разрабатываться международные стандарты [11], а международное оптическое сообщество переходит от канделы к энергии фотона. [12]. Традиционно, для характеристики оптического излучения используются так называемые энергетические характеристики: поток излучения

([Вт]), энергетическая сила света ([Вт/ср]), энергетическая освещенность ([Вт/м²]), энергетическая светимость ([Вт/м²]), энергетическая яркость ([Вт/м²ср]), спектральная плотность потока излучения. Для видимого света используют пять так называемых световых (фотометрических) параметров, связанных со зрительным ощущением: сила света (кандела [кд]), яркость ([кд/м²]), световой поток (люмен [лм]), светимость ([лм/м²]), и освещенность (люкс[лк]). С появлением лазеров появилась потребность в более широкой характеристизации излучения. Для характеристизации непрерывного лазерного излучения потребовалось дополнительно ввести новые параметры: пространственную и временную когерентность, расходимость, поляризацию, спектральную ширину линии излучения. А для характеристизации лазерных импульсов еще длительность и энергию импульса, а позже, после появления соответствующих измерительных техник - параметры фазового, временного и пространственного профилей светового импульса. Все сказанное относится к световым потокам, содержащим огромное число фотонов, при этом индивидуальность каждого отдельного фотона теряется. При переходе к потокам одиночных фотонов на первый план выходят их индивидуальные специфически квантовые характеристики, называемые в квантовой физике состояниями.

Таким образом, мы видим, что одиночные фотоны и фотонные пары (бифотоны), в особенности, запутанные бифотоны, уже сейчас занимают одно из ключевых мест в цепочке квантовых технологий 21-го века, причем их роль в качестве структурного элемента квантовых технологий будет только возрастать.

Глава 1

Квантовые поляризационные состояния одиночных фотонов и фотонных пар

1.1 Квантовые поляризационные состояния одиночных фотонов

Одной из важнейших характеристик фотона является состояние его поляризации. На квантовом языке чистое состояние поляризации одиночного фотона может быть записано в виде вектора состояния

$$|\Psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle, \quad (1.1)$$

где $|H\rangle$ и $|V\rangle$ - базисные вектора двумерного гильбертова пространства, которые в случае описания квантового со-

стояния поляризации имеют ясный физический смысл горизонтальной и вертикальной поляризаций, а комплексные коэффициенты α и β удовлетворяют условию нормировки: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Формула (1.1) показывает, что одиночный фотон имеет бесконечное количество квантовых состояний поляризации, каждому из которых соответствует своя пара комплексных коэффициентов α и β . Специфика квантовых состояний отдельных фотонов заключается в том, что имея лишь один фотон, мы, в принципе, не можем измерить его квантовое состояние, т.е. найти коэффициенты α и β . Дело в том, что при любом измерении поляризации фотона он переходит в одно из базисных состояний $|H\rangle$ или $|V\rangle$. С точки зрения эксперимента это будет выглядеть следующим образом. Мы берем поляризатор, например, призму Глана, направляем на него фотон в состоянии (1.1) и пытаемся его зарегистрировать после того, как он пройдет через поляризационный делитель. В результате эксперимента мы можем получить только 2 ответа: 1) фотон будет зарегистрирован после поляризатора в состоянии $|H\rangle$ и 2) фотон будет зарегистрирован после поляризатора в состоянии $|V\rangle$. Причем такой результат будет наблюдаться при любых α и β . Однако, для фотонов, как и для других квантовых систем, существует способ, позволяющий измерить их квантовое состояние. Для этого нужно иметь поток большого числа одинаковых фотонов, находящихся в идентичных состояниях. При этом, если не ограничивать количество фотонов в потоке, то ошибку измерения можно свести к нулю. В дальнейшем мы будем понимать под измерением квантового состояния фотонов именно такую процедуру.

Следует отметить, что для измерения квантовых состояний поляризации одиночного фотона не обязательно

применять специальные квантово-механические методики, такие как квантовая томография [13], можно применить методы, развитые в классической оптике. Например, измерить параметры Стокса и по ним вычислить коэффициенты α и β . Однако, ситуация радикально меняется, если мы попытаемся создать метрологию запутанных фотонных пар. В этом случае никакие классические методы измерения не сработают и с неизбежностью придется обратиться к сугубо квантовым методам измерения.

Двухфотонное состояние должно рассматриваться в четырехмерном гильбертовом пространстве, представляющем собой тензорное произведение двумерных пространств, используемых для описания каждого из фотонов (1.1) в отдельности. В общем случае таких состояний бесконечно много, и они могут быть записаны в виде

$$|\psi\rangle = \gamma_1 |HH\rangle + \gamma_2 |HV\rangle + \gamma_3 |VH\rangle + \gamma_4 |VV\rangle \quad (1.2)$$

где коэффициенты γ_i - комплексные числа, которые удовлетворяют условию нормировки

$$|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2 + |\gamma_4|^2 = 1, \quad (1.3)$$

а 4 базисных вектора $|HH\rangle \equiv |H_1\rangle \otimes |H_2\rangle$, $|HV\rangle \equiv |H_1\rangle \otimes |V_2\rangle$, $|VH\rangle \equiv |V_1\rangle \otimes |H_2\rangle$ и $|VV\rangle \equiv |V_1\rangle \otimes |V_2\rangle$ представляют собой тензорные произведения¹ базисных векторов первого и второго фотонов, соответственно.

Если записать коэффициенты γ_k в показательной форме $\gamma_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$, то выражение (1.2) примет вид:

¹При вычислении тензорного произведения матрицы умножаются не обычным образом, а по Кронекеру (произведение Кронекера)

$$|\psi\rangle = \rho_1 e^{i\varphi_1} |HH\rangle + \rho_2 e^{i\varphi_2} |HV\rangle + \rho_3 e^{i\varphi_3} |V_1 H_2\rangle + \rho_4 e^{i\varphi_4} |V_1 V_2\rangle \quad (1.4)$$

откуда видно, что для идентификации квантового состояния фотонной пары необходимо измерить значения 6 независимых действительных чисел (с учетом нормировки вектора состояния, а также с учетом того, что состояние не зависит от общего фазового множителя перед вектором состояния, т.е. от глобальной фазы). Состояния (1.2) и (1.4) представляют собой так называемые чистые состояния.

Среди всех чистых состояний (1.4) существуют такие, которые не могут быть представлены в виде тензорного произведения двумерных состояний составляющих систему подсистем. Такие состояния называются запутанными. Примером такого состояния может служить одно из состояний Белла

$$|\Psi\rangle = \frac{|HH\rangle + |VV\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.5)$$

где $|H\rangle$ и $|V\rangle$ - как и раньше, горизонтальная и вертикальная поляризации, причем первые символы относятся к первому фотону, а вторые - ко второму. Запись $|HH\rangle$ обозначает тензорное произведение поляризационных состояний 1-го и 2-го фотонов $|HH\rangle \equiv |H_1\rangle \otimes |H_2\rangle$. Тоже относится и к записи $|VV\rangle$.

1.2 Квантовые поляризационные состояния запутанных фотонных пар

Как уже отмечалось выше, измерение квантового состояния можно произвести только над потоком фотонов. Поэтому чистое состояние может быть надежно идентифицировано лишь в случае идеального источника, генерирующего абсолютно идентичные фотонные пары, каждая из которых находится в состоянии (1.2). Однако в реальности источник неидеален и генерирует фотонные пары в так называемом смешанном состоянии. Другими словами, с вероятностью p_1 источник генерирует пары в состоянии $|\psi_1\rangle$, а с вероятностью p_2 – в состоянии $|\psi_2\rangle$ и т.д. Такое смешанное состояние фотонных пар описывается оператором плотности и записывается в виде:

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (1.6)$$

где каждая из $|\psi_j\rangle$ имеет вид (1.2). Запись оператора плотности в каком либо представлении (т.е. в базисе) в матричном виде называется матрицей плотности.

Точное знание квантового состояния является важным для многих квантовых операций. Например, для того, чтобы провести квантовые вычисления, сначала необходимо инициализировать начальные квантовые состояния фотонов, подаваемых на вход оптического квантового компьютера, так как поведение фотонных пар, находящихся в разных квантовых состояниях может существенно отличаться.

Для иллюстрации только что высказанного утверждения

проанализируем поведение фотонных пар, находящихся в различных квантовых состояниях. Пусть имеются два источника источника света, генерирующих поток бифотонов с помощью спонтанного параметрического рассеяния света (СПР), подробное описание которых приведено в Главе 2. Один из них «идеален» и в случайные моменты времени испускает фотонные пары в одном и том же чистом состоянии. Другой источник испускает половину пар в состоянии $|HH\rangle$ и половину пар в состоянии $|VV\rangle$, причем генерируемые источником фотонные пары по времени перемешаны случайным образом. Пусть квантовое состояние пар первого источника является Белловским и описывается выражением (1.5). Состояние пар второго источника может быть описано с помощью следующего оператора плотности:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \{ |HH\rangle \langle HH| + |VV\rangle \langle VV| \} \quad (1.7)$$

Каждый из источников создает два пространственно разделенных потока одиночных фотонов, которые будем обозначать как поток 1 и поток 2. Так как потоки разделены в пространстве, мы можем работать с каждым потоком независимо. Поставим в оба потока по поляризатору, например, призмы Глана, и будем наблюдать, какая часть фотонов потока пройдет через поляризаторы. Сначала установим поляризаторы параллельно базисным векторам каждого из фотонов. Для определенности, пусть поляризаторы параллельны базисным векторам $|H\rangle_1$ и $|H\rangle_2$ для обоих фотонов. Квантовая теория может предсказать вероятности фотонам пройти через поляризаторы. Для первого источника вероятность P того, что оба фотона одновременно пройдут через такие поляризаторы равна $P = |\langle HH | \chi_{\text{изм}} \rangle|^2$, где $|\chi_{\text{изм}}\rangle = |HH\rangle$ — так называемое

измерительное состояние. В рассматриваемом случае

$$P_{HH} = |\langle HH | \chi_{\text{изм}} \rangle|^2 = |\langle HH | \frac{|HH\rangle + |VV\rangle}{\sqrt{2}} \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Для второго источника вероятность того, что оба фотона пройдут через также установленные поляризаторы, равна:

$$P_{HH} = \langle HH | \hat{\rho} | HH \rangle = \langle HH | \frac{1}{2} \{ |HH\rangle \langle HH| + |VV\rangle \langle VV| \} | HH \rangle = \frac{1}{2},$$

т.е. тоже равна $\frac{1}{2}$.

Точно такая же вероятность $\frac{1}{2}$ совместного обнаружения фотонов будет и для поляризаторов, направленных вдоль $|V\rangle$. Таким образом, на первый взгляд кажется, что рассматриваемые потоки фотонов не различаются. Однако это не так. Предположим, что мы установили первый поляризатор под углом η к горизонтальному направлению поляризации 1-го фотона пары, а второй – под углом ξ к горизонтальному направлению поляризации 2-го фотона, и хотим, как и в предыдущем случае, выяснить вероятность одновременного прохождения фотонов через установленные таким образом поляризаторы. В этом случае измерительные состояния для первого и второго фотонов будут:

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \cos \eta |H_1\rangle + \sin \eta |V_1\rangle \\ |\chi_2\rangle &= \cos \xi |H_2\rangle + \sin \xi |V_2\rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

Согласно правилам квантовой механики, искомая вероятность для 1-го источника, генерирующего фотоны в

чистом состоянии, может быть вычислена как $P_{\chi_1\chi_2}^{(1)} = |\langle \chi_1\chi_2 | \psi \rangle|^2$. Подставляя вместо $|\psi\rangle$ его явный вид (1.5), после несложных преобразований получаем зависимость искомой вероятности от углов поворота поляризаторов η и ξ :

$$P_{\chi_1\chi_2}^{(1)} = |\langle \chi_1\chi_2 | \psi \rangle|^2 = \frac{\cos^2(\eta - \xi)}{2} \quad (1.9)$$

Трехмерный график зависимости вероятности $P_{\chi_1\chi_2}^{(1)}$ от η и ξ представлен на рис. 1.1

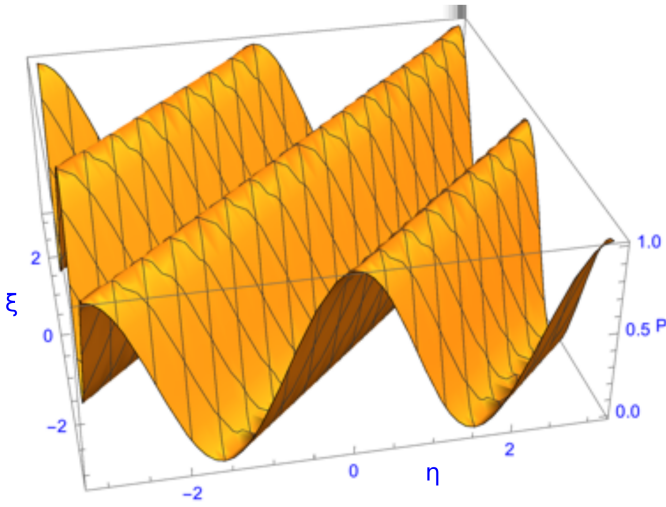


Рис. 1.1: Зависимость вероятности одновременной регистрации пары фотонов, прошедших через поляризаторы, повернутые на углы η и ξ для источника чистых состояний Бэлла

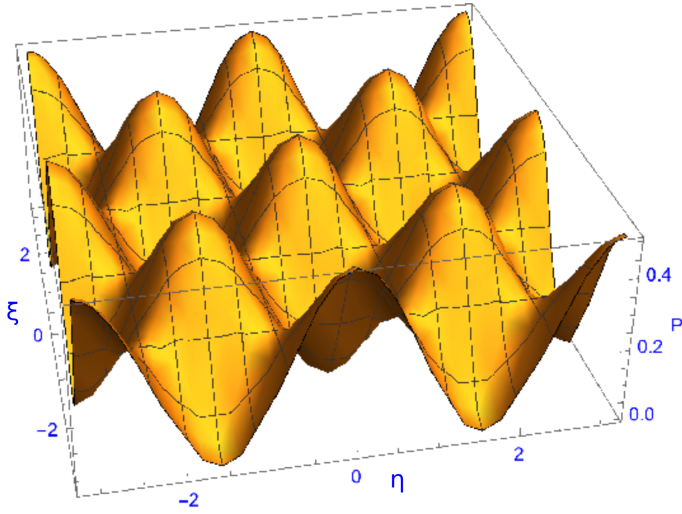


Рис. 1.2: Зависимость вероятности одновременной регистрации пары фотонов, прошедших через поляризаторы, повернутые на углы η и ξ для источника фотонных пар, находящегося в смешанном состоянии

Искомая вероятность для 2-го источника, генерирующего смешанные состояния, также может быть легко вычислена: $P_{\chi_1\chi_2}^{(2)} = \langle \chi_1\chi_2 | \hat{\rho} | \chi_1\chi_2 \rangle$. Как и в предыдущем случае, подставляя в последнюю формулу явные выражения для χ_1 , χ_2 и $\hat{\rho}$, после несложных преобразований получаем, что

$$P_{\chi_1\chi_2}^{(2)} = \frac{1}{2} [\cos^2(\eta) \cos^2(\xi) + \sin^2(\eta) \sin^2(\xi)] = \frac{1}{4} (\cos^2(\eta - \xi) + \cos^2(\eta + \xi)) \quad (1.10)$$

Трехмерный график вероятности $P_{\chi_1\chi_2}^{(2)}$ от η и ξ , рассчитанный по формуле (1.10) представлен на рис. 1.2.

Из приведенных выше графиков ясно видно, что поведение фотонных пар радикально зависит от их квантовых состояний. Легко можно найти области, где вероятность регистрации обоих фотонов для одного источника равна 0, а для другого имеет максимальное значение.

1.3 Характеристики квантового состояния

Для того, чтобы охарактеризовать источник фотонов в каком-либо состоянии, необходимо иметь критерии того, насколько точно источник «воспроизводит» некоторое заданное состояние, которое мы ожидаем получить, насколько полученное состояние чистое и, что особенно важно для источников запутанных частиц, иметь количественные характеристики запутанности состояния. Ниже приведены некоторые из таких характеристик и критериев.

1.3.1 Характеристики чистоты состояния

1.3.1.1 Энтропия фон Неймана

Энтропией фон Неймана, называемой так же мерой «неопределенности» квантовой системы, называется величина [14]

$$S_N(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad (1.11)$$

где p_i — i -е собственное значение матрицы плотности $\hat{\rho}$, n — число степеней свободы системы. Энтропия фон Неймана принимает значение 0 в случае чистого состояния. Максимальное значение энтропии фон Неймана зависит от количества степеней свободы. Так, для максимально смешанного квантового состояния поляризации одиночного фотона ($n = 2$) максимальное значение энтропии фон Неймана равно 1, а для случая поляризационных степеней свободы пары фотонов ($n = 4$) максимальное значение энтропии фон Неймана равно 2.

1.3.1.2 Линейная энтропия

Линейной энтропией S_L называется величина

$$S_L(\hat{\rho}) = \frac{n}{n-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2)] , \quad (1.12)$$

где n — количество степеней свободы системы. Линейная энтропия, как и энтропия фон-Неймана, служит характеристикой "чистоты" системы. В случае чистого состояния линейная энтропия принимает значение 0, а в случае максимально смешанного — 1.

1.3.2 Характеристики запутанности состояния

Состояние n частиц называется запутанным, если n -частичная волновая функция $|\Psi\rangle$ системы частиц не представима в виде произведения одночастичных волновых функций $|\psi_i\rangle$ (не факторизуема):

$$|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \quad (1.13)$$

Для смешанного состояния под запутанным квантовым состоянием системы n частиц понимается квантовое состояние, которое нельзя представить в следующем виде [14]

$$\hat{\rho}_n \neq \sum_i p_i \hat{\rho}_1^{(i)} \otimes \hat{\rho}_2^{(i)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n^{(i)}, \quad (1.14)$$

где $\hat{\rho}_n$ — n -частичная матрица плотности, $\hat{\rho}_i$ — матрица плотности i -той частицы, $p_i \geq 0$, для $\forall i$, и $\sum_i p_i = 1$. Существует множество характеристик запутанности квантового состояния, ниже приведены некоторые из них. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случая двух частиц. От каждой характеристики запутанности требуется, чтобы ее значения лежали в диапазоне от 0 до 1, причем для незапутанных состояний они принимали значение 0, а в случае полностью запутанных состояний принимали значение 1. Примером полностью запутанных поляризационных состояний могут служить состояния Белла:

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle &= \frac{|HH\rangle \pm |VV\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Psi^\pm\rangle &= \frac{|HV\rangle \pm |VH\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

К сожалению, на сегодняшний день в русском языке не существует устоявшихся названий для характеристик, количественно характеризующих квантовую запутанность. В данном пособии мы будем использовать следующие названия: «Concurrence» — запутанность, «Tangle»

– сцепленность, «Entanglement of formation» – перепутывание формирования. Ниже описаны эти характеристики для случая поляризационного состояния двух фотонов.

1.3.2.1 Запутанность (Concurrence)

Для чистого состояния *запутанность* (англ. «Concurrence») вводится следующим образом. Для волновой функции $|\psi\rangle$ проводится преобразование «переворота спинов»[15]

$$|\tilde{\psi}\rangle = \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 |\psi^*\rangle, \quad (1.16)$$

где $\hat{\sigma}_2$ — одна из матриц Паули, «*» означает комплексное сопряжение. *Запутанность* определяется как «близость» состояния, полученного путем переворота всех спинов на противоположные, к исходному:

$$C(\psi) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right| \quad (1.17)$$

В случае смешанного состояния величина *запутанности* определяется следующим образом. Исследуемую матрицу плотности представляют через сумму матриц плотности чистых состояний следующим образом:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

Заметьте, что таких разложений бесконечно много! После этого рассматривается сумма вида $\sum_i p_i C(\psi_i)$. *Запутанность* для смешанного состояния определяется как

минимум этой суммы среди всех возможных разложений $\hat{\rho}$ через ψ_i :

$$C(\hat{\rho}) = \min \sum_i p_i C(\psi_i), \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) не удобно для вычислений, т.к. предполагает решение вариационной задачи в многомерном пространстве. Оказывается, *запутанность* можно вычислить с помощью решения задачи на собственные значения. Делается это следующим образом.

В случае смешанного состояния матрица плотности, полученная путем переворота всех спинов, имеет вид

$$\hat{\hat{\rho}} = (\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2) \hat{\rho}^* (\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2). \quad (1.19)$$

Для нее вводится неэрмитова матрица

$$\hat{R} = \hat{\rho} \hat{\hat{\rho}}, \quad (1.20)$$

и *запутанность* определяется как

(3.44)

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (1.21)$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\hat{R}$ (1.20), упорядоченные в невозрастающем порядке.

1.3.2.2 Сцепленность (Tangle)

Сцепленность (англ. «Tangle») имеет схожий с *запутанностью* смысл, и определяется как

$$\begin{aligned} T(\psi) &= [C(\psi)]^2 \\ T(\hat{\rho}) &= [C(\hat{\rho})]^2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

где $C(\psi)$ и $C(\hat{\rho})$ определяются согласно формулам (1.17, 1.21). *Сцепленность* удобнее использовать для состояний с запутанностью близкой к 1, чем *запутанность*, т.к. *сцепленность* в этой области изменяется сильнее.

1.3.2.3 Перепутывание формирования (Entanglement of formation)

В случае чистого состояния *перепутывание формирования* часто определяют как энтропию фон Неймана подсистемы

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_B \log_2 \hat{\rho}_B), \tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A &= \text{Tr}_B(|\psi\rangle \langle \psi|), \\ \hat{\rho}_B &= \text{Tr}_A(|\psi\rangle \langle \psi|) \end{aligned} \tag{1.24}$$

— матрицы плотности первой и второй подсистемы, соответственно. В случае смешанного состояния *перепутывание формирования* вводится как

$$E(\hat{\rho}) = \min \sum_i p_i E(\psi_i), \tag{1.25}$$

где минимум берется по всем возможным разложениям матрицы плотности в виде $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$. *Перепутывание формирования* можно выразить через *запутанность* следующим образом [15]

$$E(\hat{\rho}) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C(\hat{\rho})^2}}{2}\right), \text{ где} \quad (1.26)$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$$

1.3.3 Фиделити (Fidelity)

Фиделити (от англ. *Fidelity* — точность) — мера "близости" получаемого состояния к некоторому заданному. В настоящее время отсутствует устоявшийся перевод этого термина на русский язык. В дальнейшем мы будем использовать термин *Фиделити*. Также в литературе используются термины *Надёжность*, *Верность*. В случае чистого состояния *Фиделити* вводится как

$$F(\psi, \psi_0) = |\langle \psi_0 | \psi \rangle|^2, \quad (1.27)$$

где $|\psi_0\rangle$ — "эталонное" состояние, которое мы задались получить, а $|\psi\rangle$ — состояние, даваемое источником. Обобщение на случай смешанных состояний имеет вид [16]

$$F(\hat{\rho}, \hat{\rho}_0) = \left| \text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_0} \hat{\rho} \sqrt{\hat{\rho}_0}} \right) \right|^2. \quad (1.28)$$

Отметим, что в литературе иногда встречается определение *Фиделити* без возведения в квадрат (1.27, 1.28).

Глава 2

Генерация бифотонов в нелинейном кристалле в процессе спонтанного параметрического рассеяния света

Источники фотонов, основанные на СПР, являются одними из самых надежных и простых источников коррелированных фотонных пар в смысле их технического исполнения. Фотонные пары, испускаемые такими источниками, демонстрируют высокую степень корреляции по времени их рождения. Испускаемые ими фотонные пары могут быть также запутанными по частоте, поляризации и угловому моменту. В настоящее время СПР-источники коррелированных и запутанных фотонов заслуженно заняли подобающее им место в современных оптических технологиях.

Эффект спонтанного параметрического рассеяния света, на который впервые указал в 1966 Д.Н.Клышко [17, 18] был экспериментально обнаружен сразу в 3-х экспериментальных группах [19, 20, 21]. Впервые теоретическое объяснение эффекта было дано в 1967-1968 году [18, 22], за которыми последовал целый ряд теоретических работ по исследованию квантовых свойств фотонных СПР пар [23, 24, 25]. Квантовые свойства СПР фотонов были впервые исследованы экспериментально в 1970 [26], тогда же была продемонстрирована одновременность генерации фотонов при СПР.

После появления СПР источников перед физиками открылись большие возможности. С помощью этих источников выполнены многочисленные эксперименты, внесшие существенный вклад в квантовую оптику и позволившие значительно продвинуть вперед эту новую область знаний. С их помощью удалось провести абсолютную калибровку фотодетекторов [27, 28], показать возможность коммуникации на слабых сигналах ниже уровня шума [29, 30], что явилось толчком для развития современных схем криптографии [31], которая была впервые экспериментально продемонстрирована в 1992 [32]. Запутанные СПР фотоны сыграли также значительную роль в развитии квантовых вычислений и квантовой информации [14, 33], телепортации [34, 35] и в развитии фундаментальных представлений квантовой оптики. Были исследованы: фундаментальные квантовые свойства фотонов [36, 37, 38], квантовое клонирование [39], запутанность и квантовая нелокальность [40, 41, 42], включая теорему Белла [43, 44], трех-фотонное запутывание [45, 46], однофотонные Фоковские состояния [47]. Ряд интересных фактов о роли СПР фотонов в развитии квантовой оптики можно найти в книгах [48, 49].

Источники запутанных бифотонов [50], созданные на основе эффекта СПР, имеют уникальные свойства. Наряду с конструктивной простотой, они позволяют получить фотоны с высокой степенью запутанности, [51], обладая при этом, большой яркостью [52], а также позволяют управлять частотными и пространственными характеристиками бифотонного поля.

2.1 Физические принципы получения бифотонов с помощью спонтанного параметрического рассеяния света

Феноменологически спонтанное параметрическое рассеяние света — эффект распада фотона накачки на пару фотонов [19, 18], называемых сигнальным (фотон с большей частотой) и холостым, за счет рассеяния на нулевых флуктуациях электромагнитного вакуума в среде с квадратичной нелинейностью. При прохождении когерентного лазерного излучения через нелинейный кристалл фотоны приобретают малую, но конечную вероятность распада на два фотона. При этом распад является параметрическим, и выполняются законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_s + \omega_i \\ \vec{k}_p &= \vec{k}_s + \vec{k}_i,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\omega_{p,s,i}$ и $\vec{k}_{p,s,i}$ — соответственно частоты и волновые вектора накачки, сигнальной и холостой волн.

Условия фазового синхронизма $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$ для СПР технически могут быть реализованы двумя способами [53]: по схеме 1-го ($e \rightarrow oo$) [52] либо 2-го ($e \rightarrow oe$) [54, 55] типа параметрического взаимодействия.

Источники 1-го типа способны излучать запутанные фотоны в состоянии

$$|\Psi\rangle = \frac{|HH\rangle + e^{i\delta}|VV\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.2)$$

Источники же 2-го типа могут генерировать запутанные фотоны в состоянии

$$|\Psi\rangle = \frac{|HV\rangle + e^{i\delta}|VH\rangle}{\sqrt{2}},$$

где $|H\rangle$, $|V\rangle$ обозначают горизонтальную и вертикальную поляризации, а δ – относительная фаза между запутываемыми состояниями.

В данном пособии мы ограничимся рассмотрением только источников 1-го типа. Обычно в таких источниках используется неколлинеарное взаимодействие в силу того, что генерируемые источником пары легче пространственно разделить (рис.2.1).

При синхронизме типа $e \rightarrow oo$ излучение накачки является необыкновенной волной, а рассеянное излучение — обыкновенной. Поляризация обыкновенной волны [53] направлена перпендикулярно главной плоскости — плоскости, в которой лежит оптическая ось кристалла и волновой вектор излучения. Большинство схем параметрической генерации используют излучение, распространяющееся вдоль лучей ОА и ОВ. При этом накачка имеет

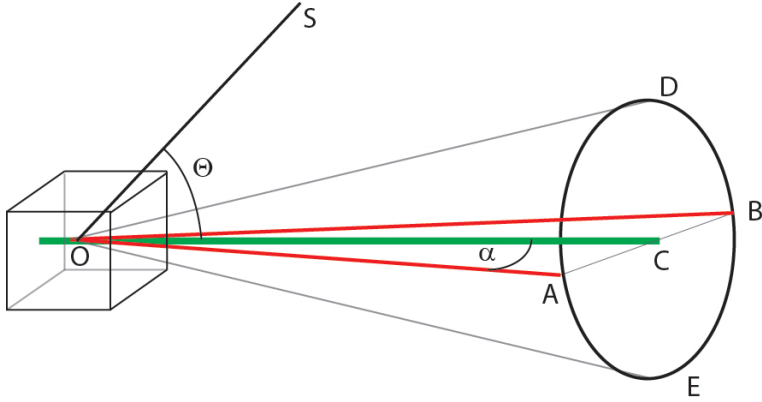


Рис. 2.1: Направления распространения СПР излучения при синхронизме 1-го типа. OS - оптическая ось кристалла; OC - луч накачки; ADBE - сечение конуса, вдоль образующих которого распространяется СПР излучение на выделенных условиях синхронизма частотах: $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ и углах: $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$, где $\omega_p, \omega_s, \omega_i$ - частоты накачки, сигнальной и холостой волн, соответственно, а $\vec{k}_p, \vec{k}_s$ и $\vec{k}_i$ — их волновые вектора.

вертикальную поляризацию, а одиночные фотоны — горизонтальную.

С помощью однокристалльной схемы СПР 1-го типа можно получать коррелированные по времени фотонные пары даже в случае непрерывной накачки, но получить запутанные по поляризации состояния фотонов невозможно. Для этого используется двухкристалльная схема. Двухкристалльная схема генерации запутанных по поляризации бифотонов для СПР 1-го типа впервые предложена П.Г. Квятом с соавторами [52]. В схеме используются (рис. 2.2) два идентичных нелинейных кристалла, вырезанных под 1-й тип синхронизма и повернутых друг

относительно друга на 90° вокруг направления распространения накачки.

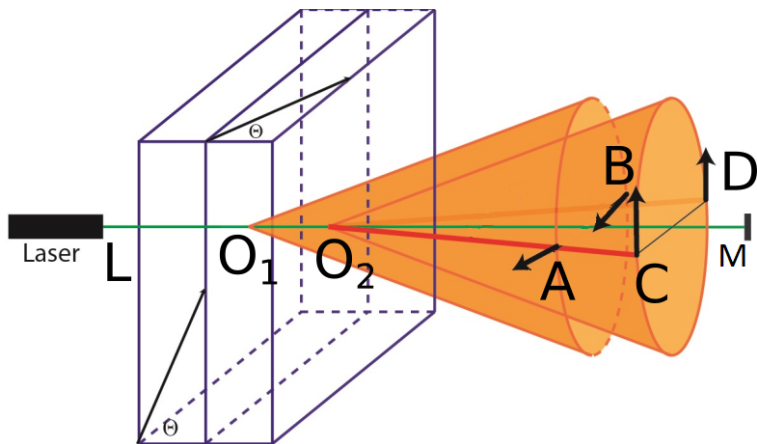


Рис. 2.2: Двухкристальная схема получения запутанных по поляризации бифотонов.

Луч накачки (линия LM), поляризованный под углом 45° к горизонтальному направлению, распадаясь на обыкновенно и необыкновенно поляризованные волны, накачивает одновременно оба кристалла, генерируя излучение СПР в первом кристалле (лучи O_1A и O_1B , что соответствует лучам OA и OB на рис.2.1) и во втором кристалле (лучи O_2C и O_2D). Если квантовые состояния бифотонов, рождаемых в нелинейных кристаллах, ничем кроме поляризации не различаются, то поляризационные квантовые состояния бифотонов интерферируют (когерентно складываются, с учетом фазы). В первом приближении можно считать, что первый из кристаллов генерирует поле, поляризованное вдоль горизонтального направления $|H\rangle$, а второй — вдоль вертикального $|V\rangle$, и при равной величине амплитуд бифотонного поля такая пара кристал-

лов будет генерировать состояние (2.2). Фаза δ возникает из-за того, что бифотонное поле начинает генерироваться в кристаллах 1 и 2 с разной фазой, определяемой фазой накачки и различными фазовыми набегам при распространении СПР фотонов и накачки в кристаллах. При компенсации фазы δ с помощью эллиптичности накачки можно получать бифотоны в квантовом состоянии Белла $|\Phi^\pm\rangle$ (1.15).

Читатель, интересующийся деталями техники компенсации, может обратиться к оригинальным работам [56, 57].

2.2 СПР-источник бифотонов 1-го типа

Ниже будет описан СПР источник бифотонов, который создает коррелированные по времени фотонные пары с длиной волны 1064 нм. Он может работать в двух режимах: 1) в режиме генерации незапутанных и 2) запутанных по поляризации бифотонов.

2.2.1 СПР-источник незапутанных по поляризации бифотонов

Одна из возможных схем установок, реализующая режим генерации и регистрации незапутанных по поляризации бифотонов¹ изображена на рис.2.3.

Наклонными линиями показаны два луча, вдоль которых распространяются коррелированные по времени фотоны. Положение оптической оси кристалла по отноше-

¹в терминологии квантовой информатики — двухкубитового незапутанного состояния

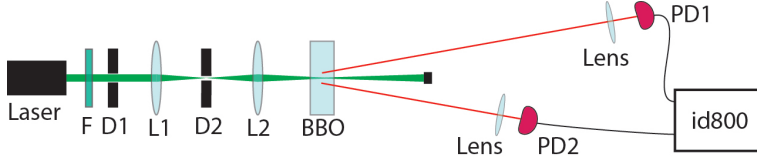


Рис. 2.3: Сема установки, реализующая режим генерации и регистрации незапутанных по поляризации бифотонов. $D1$, $D2$ — диафрагмы; F — фильтр СЗС-21; $L1$, $L2$ — коллимирующие линзы; BBO — нелинейный кристалл BBO ; $Lens$ — объективы; $PD-1$ и $PD-2$ — лавинные фотодиоды idQuantique id400, работающие в режиме счета фотонов; IF — интерференционные светофильтры Thorlabs FLN051064-8; id800 — время-цифровой преобразователь idQuantique id800

нию к волновому вектору накачки соответствует рис.2.1. В данном варианте работы схемы накачка, рассеиваясь в одиночном кристалле, генерирует бифотоны в состоянии

$$|\Psi_{hh}\rangle = |H\rangle \otimes |H\rangle, \quad (2.3)$$

Состояние (2.3) является факторизованным (незапутанным), и его количественные характеристики запутанности должны быть равны 0. Томографическое измерение этого состояния показало, что характеристики запутанности равны 0 с точностью до погрешности, что позволило нам убедиться в корректности работы экспериментальной системы квантовой топографии, описанной в Главе 3.

Приведем основные характеристики источника незапутанных фотонов. Для возбуждения СПР используется твердотельный лазер с диодной накачкой “АТС 53-350”

с внутрирезонаторным удвоением частоты, работающий в непрерывном режиме. Значение длины волны лазера, измеренное с помощью монохроматора МДР-3 (решетка 1200 штр/мм), составило 532.0 ± 0.2 нм. Максимальная мощность лазерного излучения составляет 350 мВт. Модовый состав — TEM_{00} . Диаметр выходного пучка $D \sim 0.5$ мм, расхожимость пучка $\phi \sim 3$ мрад. Стабильность углового положения светового пятна не хуже 0.23 мрад. Стабильность выходной мощности за 1 час не хуже $\pm 5\%$. Выходное излучение обладает линейной поляризацией 100 : 1, направленной под углом 45° к вертикали. Выходное лазерное излучение помимо компоненты с длиной волны 532 нм содержит также остаточное излучение на длине волны 1064 нм, которое блокируется светофильтром СЗС-21 (F). До и после фильтра располагаются диафрагмы с диаметрами отверстий 1 мм и 0.8 мм, которые осуществляют пространственную фильтрацию излучения накачки. Длина когерентности лазера накачки составляет 3 мм.

Для получения фотонных пар используется одиночный кристалл ВВО ($\beta - BaB_2O_4$), размером $5 \times 5 \times 3$ мм, вырезанный под первый тип синхронизма. Угол неколлинеарности в вырожденном по частоте режиме на длине волны 1064 нм составляет 3° .

Для регистрации фотонов в рассматриваемом источнике используются фотодетекторы id400 фирмы idQuantique. Мертвое время детектирования — 10 мкс, вероятностный уровень детектирования — 30%.

Объективы перед фотодетекторами обеспечивают передачу изображения пятна СПР на кристалле на фоточувствительную площадку фотодетектора с уменьшением 1 : 10. Непосредственно перед объективом также рас-

положен широкополосный фильтр ИКС – 7, блокирующий излучение с длиной волны менее 900 нм и узкополосный интерференционный фильтр с центральной длиной волны 1064 нм и с шириной 8 нм.

Для организации совместного счета фотонов с двух фотодетекторов используется время-цифровой преобразователь id800 фирмы idQuantique с дискретностью обработки данных 81 пс.

Источник способен надежно работать при достаточно низких уровнях накачки порядка нескольких мВт. Так, при мощности накачки 10 мВт количество фотоотсчетов достигает 30 тысяч в секунду, что уже довольно близко к техническому пределу скорости счета лавинных фотодиодов, работающих в гейгеровском режиме, равному $\sim 10^5 \text{ с}^{-1}$, определяемому их мертвым временем (для описываемых детекторов 10 мкс).

Пространственная структура излучения СПР, полученная с помощью CCD-камеры, представлена на рис.2.4 (а,б). Объектив камеры настроен на бесконечность. Перед камерой поставлен полосовой интерференционный светофильтр на 1064 нм с шириной полосы пропускания 8 нм. Камера установлена сразу после кристалла ВВО. Между камерой и кристаллом также установлен дополнительный ИКС-светофильтр. При небольших (в пределах градуса) поворотах кристалла вокруг “вертикальной” оси, что соответствует изменению угла Θ (рис.2.1), размер кольца быстро изменяется. При небольших поворотах вокруг двух других осей изображение практически не изменяется. Характерные пространственные профили излучения СПР при двух различных значениях углов Θ представлены на рис.2.4а,б. Изменение мощности лазера

приводит к пропорциональному изменению яркости картины.

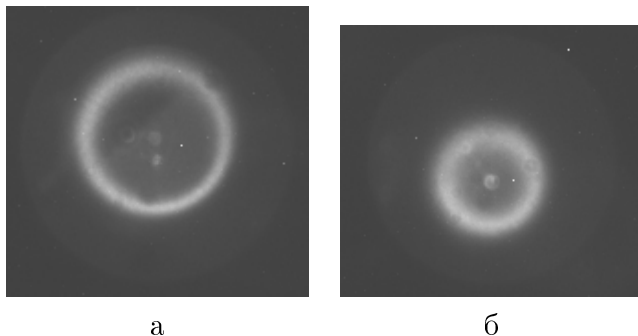


Рис. 2.4: Уменьшение угла расходимости излучение СПР при изменении угла Θ

Гистограмма совместного счета фотонов, т.е. зависимость количества одновременной регистрации двух импульсов фотоотсчетов с двух выходов время-цифрового преобразователя idQuantique id800 от величины временного интервала между этими импульсами, представлена на рис.2.5(d). Ширина приведенного распределения составляет приблизительно 1 нс. Т.к. известно, что два фотона из одной пары рождаются одновременно с точностью порядка 100 фс, [37], то полученная ширина гистограммы демонстрирует довольно небольшой с экспериментальной точки зрения джиттер нашей аппаратуры.

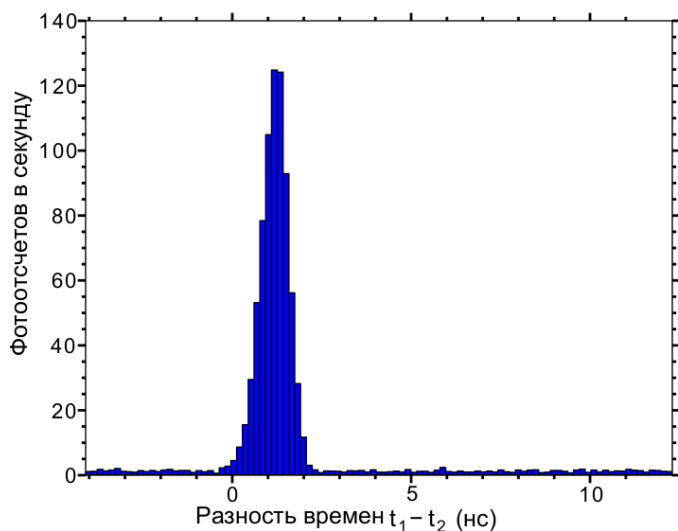


Рис. 2.5: Гистограмма совместного счета фотонов СПР с помощью детектора idQuantique id400 и время-цифрового преобразователя id800

2.2.2 СПР-источник запутанных по поляризации бифотонов

Схема источника запутанных по поляризации бифотонов изображена на рис. 2.6.

В качестве накачки используется непрерывный лазер "АТС 53-350", такой же как и в схеме СПР источника незапутанных бифотонов. В пучке накачки находятся призма Глана (ПГ), которая увеличивает поляризационный контраст излучения накачки до уровня $\approx (10^4 - 10^5) \div 1$. Для улучшения пространственных характеристик излучения и блокирования флуоресценции из приз-

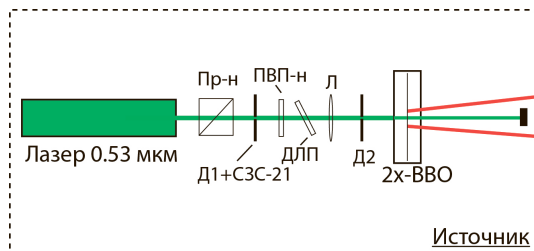


Рис. 2.6: Схема источника поляризационно запутанных фотонных пар: Пр-н — призма Глана; Д1+СЗС-21 — диафрагма и фильтр из цветного стекла серии СЗС-21; ПВП-н и ДЛП — двулучепреломляющие пластинки; Л - линза; Д2 - диафрагма; 2х-ВВО — двойной нелинейный кристалл ВВО

мы Глана и остаточного излучения из лазера на длине волны 1064 нм лазерное излучение на длине волны 532 нм проходит через диафрагму и стеклянный светофильтр СЗС — 21. Полуволновая пластинка ($\lambda/2$) преобразует линейно поляризованное излучение в излучение, поляризованное под углом 45° к горизонтали. Двулучепреломляющая пластинка ДВП, регулирующая эллиптичность накачки без изменения ориентации главной оси эллипса поляризации ориентирована так, что ее оптическая ось направлена горизонтально. Эффективная толщина пластинки регулируется изменением угла ее наклона по отношению к лучу накачки. Коллимирующая система, состоящая из линзы Л и диафрагмы Д2, обеспечивает диаметр перетяжки пучка ≈ 1 мм на поверхности нелинейного преобразователя, который представляет собой два одинаковых кристалла ВВО 5×5 мм. Каждый из кристаллов имеет длину 0.5 мм. Кристаллы вырезаны под первый тип синхронизма $e \rightarrow oo$ для вырожденного по частоте неколлинеарного режима. Угол неколлинеарно-

сти в воздухе составляет 3° , угол между направлением распространения накачки и оптической осью кристалла $\Theta = 24.1^\circ$. Кристаллы повернуты друг относительно друга на 90° , как показано на рис.2.2.

При мощности накачки 10 мВт скорость регистрации коррелированных фотоотсчетов составляет несколько тысяч в секунду. Что касается квантового состояния генерируемых бифотонов, то оно может быть измерено с помощью квантовой томографии, которая описана в следующей главе.

Глава 3

Принципы квантовой томографии поляризационных состояний фотонов

Для экспериментального определения квантового состояния потока фотонов обычно используется метод квантовой томографии, сущность которого заключается в следующем. По известной матрице плотности $\hat{\rho}$ с помощью т.н. проекционного постулата (постулата фон Неймана) можно получить математическое ожидание измеряемой наблюдаемой $\hat{A}$ (см., например, [58])

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \hat{A} \hat{\rho} \quad (3.1)$$

Матрица плотности $\hat{\rho}$ обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^\dagger &= \hat{\rho} \\
\text{Tr} \hat{\rho} &= 1 \\
\lambda_n &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

где λ_n – собственные значения $\hat{\rho}$, а $n = 1, 2, \dots, K$ при размерности матрицы плотности $K \times K$.

С помощью квантовой томографии решается следующая задача — нахождение матрицы плотности по результатам измерений набора наблюдаемых $\{\hat{A}_\nu\}$. Т.к. элементы матрицы плотности являются эрмитово сопряженными и $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, то количество независимых действительных чисел, определяющих матрицу плотности, равно $K^2 - 1$. Учитывая также, что каждая наблюдаемая должна удовлетворять уравнению (3.1), приходим к выводу, что все элементы матрицы плотности могут быть определены, если будет найден набор, состоящий из $K^2 - 1$ наблюдаемых, такой, что он образует в некотором базисе систему линейно независимых уравнений

$$\langle \hat{A}_\nu \rangle = \text{Tr} \hat{A}_\nu \hat{\rho},
\tag{3.3}$$

где $\nu = 1, 2, \dots, K^2 - 1$. Действительно, операторное уравнение (3.1), записанное в некотором базисе, является линейным алгебраическим уравнением относительно элементов матрицы плотности ρ_{ij} , записанной в этом базисе. Такой метод нахождения элементов матрицы плотности называется методом линейной реконструкции, а система наблюдаемых $\{\hat{A}_\nu\}$ называется *томографически полной системой измерений*. При этом, матрица плотности, полученная в результате решения выше рассмотренной системы уравнений, называется линейной оценкой матрицы плотности.

При реальных измерениях величины $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ измеряются с некоторой погрешностью, в результате чего линейная оценка матрицы плотности может не удовлетворять 3-му условию (3.2), $\lambda_n \geq 0$. Этот недостаток может быть скорректирован, например, с помощью метода максимального правдоподобия, о котором речь пойдет ниже, а полученная с помощью этого метода матрица плотности называется наивероятнейшей оценкой матрицы плотности.

3.1 Томографическая оценка матрицы плотности поляризационных состояний фотонов

Под томографической оценкой матрицы плотности будем понимать матрицу плотности, полученную из экспериментальных данных с помощью того или иного метода восстановления. В данном пособии мы ограничимся рассмотрением двух методов: метода линейной реконструкции и метода максимального правдоподобия.

3.1.1 Томографически полная система измерений и линейная реконструкция матрицы плотности однофотонного поляризационного состояния

В этом разделе будет показано, как с помощью метода линейной реконструкции можно определить матрицу плотности однофотонного поляризационного состояния. Как

было замечено выше, ключевым моментом при реализации метода квантовой томографии является нахождение томографически полной системы измерений.

Естественной томографически полной системой измерений является набор параметров Стокса. Действительно, в случае классических полей поляризацию лазерного пучка можно описать набором т.н. *параметров Стокса* S_0, S_1, S_2, S_3 [59], определить которые можно, исходя из серии измерений интенсивности в различных поляризационных базисах.

$$\begin{aligned} S_0 &= I_H + I_V = I_0 \\ S_1 &= I_H - I_V \\ S_2 &= I_D - I_A \\ S_3 &= I_R - I_L \end{aligned} \quad , \tag{3.4}$$

где нижние индексы у интенсивностей I означают остаточные интенсивности измеряемого света после прохождения измерителя поляризации, пропускающего одну из поляризаций: горизонтальную или вертикальную (I_H, I_V); диагональную, т.е. линейную под углом 45° (I_D) или 135° (I_A) к H ; и круговую правую I_R и левую I_L поляризации. I_0 означает полную интенсивность светового пучка (измерение без поляризатора). Измерения величин, входящих в (3.4), производятся следующим образом. В пучок света вставляется поляризатор, пропускающий соответствующую поляризацию, а за ним устанавливается фотодетектор. Этот же подход оказывается весьма продуктивным и в квантовой оптике в случае однофотонного поляризационного состояния. Начнем рассмотрение с простейшего случая измерения квантового состояния поляризации одиночного фотона. В этом случае параметры

Стокса $\mathcal{S}_i$ удобно рассматривать как вероятность фотона пройти через измеритель поляризации. Математически эта вероятность равна $p_\nu = \langle \nu | \hat{\rho} | \nu \rangle$, где $|\nu\rangle$ — измерительное состояние, т.е. состояние поляризации, которую будет иметь фотон на выходе измерителя поляризации. При такой трактовке вместо (3.4) для однофотонного случая можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= \langle H | \hat{\rho} | H \rangle + \langle V | \hat{\rho} | V \rangle \\ \mathcal{S}_1 &= \langle H | \hat{\rho} | H \rangle - \langle V | \hat{\rho} | V \rangle \\ \mathcal{S}_2 &= \langle D | \hat{\rho} | D \rangle - \langle A | \hat{\rho} | A \rangle \\ \mathcal{S}_3 &= \langle R | \hat{\rho} | R \rangle - \langle L | \hat{\rho} | L \rangle\end{aligned}\quad (3.5)$$

Выберем параметры Стокса (3.5) в качестве наблюдаемых, входящих в систему уравнений (3.3) в виде свободных членов, и покажем, что выбранная система является томографически полной. Для того, чтобы решить эту систему линейных уравнений и построить линейную реконструкцию матрицы плотности, имеющую размерность 2×2 , заметим, что в пространстве эрмитовых матриц 2×2 можно ввести базис из матриц Паули:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (c_0 \hat{\sigma}_0 + c_1 \hat{\sigma}_1 + c_2 \hat{\sigma}_2 + c_3 \hat{\sigma}_3), \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.7)$$

При этом матрицы $\hat{\sigma}_0 \dots \hat{\sigma}_3$ являются базисными элементами соответствующего линейного евклидова пространства $\mathcal{E}$, в котором скалярное произведение $\{\cdot, \cdot\}$ задано выражением

$$\{\hat{M}_1, \hat{M}_2\} = \text{Tr} \left(\hat{M}_1 \hat{M}_2 \right), \quad (3.8)$$

где $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ – элементы пространства $\mathcal{E}$.

Множитель $\frac{1}{2}$ в (3.6) учитывает тот факт, что $\text{Tr} \hat{\sigma}_i^2 = 4$ и служит для нормировки базисных элементов на единицу.

Теперь перейдем в выражениях (3.5) к циркулярному базису $|R\rangle$, $|L\rangle$, который связан с лабораторным следующими формулами $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$, $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$. Проведя это элементарное преобразование, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \langle R|\hat{\rho}|R\rangle + \langle L|\hat{\rho}|L\rangle \\ \mathcal{S}_1 &= \langle R|\hat{\rho}|L\rangle + \langle L|\hat{\rho}|R\rangle \\ \mathcal{S}_2 &= i(\langle R|\hat{\rho}|L\rangle - \langle L|\hat{\rho}|R\rangle) \\ \mathcal{S}_3 &= \langle R|\hat{\rho}|R\rangle - \langle L|\hat{\rho}|L\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из полученного выражения следует, что

$$\mathcal{S}_i = \text{Tr} (\hat{\sigma}_i \hat{\rho}) \quad (3.10)$$

Отсюда получаем, что в выражении (3.6) коэффициенты

$$c_i = \{\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}\} = \text{Tr} (\hat{\sigma}_i \hat{\rho}) = \mathcal{S}_i, \quad (3.11)$$

где фигурные скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $\mathcal{E}$. Заметим, что в силу условия $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, $c_0 = 1$.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что линейная реконструкция матрицы плотности может быть выражена через параметры Стокса следующим образом:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \mathcal{S}_i \hat{\sigma}_i, \quad (3.12)$$

Полученная в (3.12) матрица плотности представляет собой линейную реконструкцию матрицы плотности, т.к. выражена через значения набора наблюдаемых. Полученная матрица записана в базисе правой и левой циркулярной поляризации. С помощью преобразования базиса она может быть преобразована к любому другому базису, например, лабораторному базису с линейной горизонтальной и вертикальной поляризацией в качестве базиса.

Таким образом, мы построили линейную реконструкцию матрицы плотности, а это значит, что наблюдаемые $\mathcal{S}_i$, через которые выражается линейная реконструкция матрицы плотности, являются томографически полной системой наблюдаемых.

3.1.2 Томографически полная система измерений и линейная реконструкция матрицы плотности двухфотонного поляризационного состояния

Как указывалось выше, для проведения квантовой томографии необходимо найти набор измеряемых величин,

при измерении которых можно восстановить все элементы матрицы плотности. Т.к. у матрицы плотности, описывающей двухфотонные поляризационные состояния, имеется 15 независимых элементов, то для их определения необходимо знание того же количества наблюдаемых $\gamma_\nu = \langle \hat{A}_\nu \rangle$. Но, т.к. в эксперименте величина потока фотонов, требуемая для нормировки измерений с целью вычисления вероятностей, неизвестна, то для ее экспериментального определения требуется еще одно дополнительное измерение, которое в совокупности с основными измерениями дало бы возможность вычислить нормировочную константу $\bar{N}_o$, которая представляет собой среднее количество фотоотсчетов в случае отсутствия поляризационной фильтрации. Выбранные таким образом 16 независимых измерений также будем называть томографически полной системой измерений. При этом экспериментально измеренное значение γ_ν будем обозначать как $\gamma_\nu^{exp} = \frac{N_\nu}{N_o}$.

Одна из томографически полных систем, состоящая из 16 факторизуемых (незапутанных) измерительных состояний, предложена в работе [60]. Процедура измерений проводится следующим образом. В каждый из пучков одиночных фотонов вносятся поляризационные элементы, образующие так называемый «измеритель поляризации», а также детектор одиночных фотонов. Измеритель поляризации пропускает квантовое состояние фотона в заданной поляризации (например, в горизонтальной $|H\rangle$, вертикальной $|V\rangle$, линейной, направленной под углом $\pm 45^\circ$ к $|H\rangle$, т.е. линейной диагональной $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ или антидиагональной $|A\rangle = (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$, циркулярной правой и левой — $|L\rangle$, $|R\rangle$). Измеритель поляризации состоит из призмы Глана, полуволновой пластинки и чет-

вертьволновой пластинки (Рис. 4.1). Список измерений, составляющих томографически полную систему и дополнительное измерение для нормировки, а так же соответствующие положения волновых пластинок, представлен в Табл. 3.1¹

Операторы измеряемых наблюдаемых, приведенных в Табл. 3.1, равны $\hat{A}_\nu = |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu|$, где $\nu = 1, 2, \dots, 16$, где $|\psi_\nu\rangle = |\varphi_\nu^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_\nu^{(2)}\rangle$ — двухфотонные измерительные состояния. Здесь $|\varphi_\nu^{(1,2)}\rangle$ — измерительные состояния измерителей поляризаций 1-го и 2-го фотонов.

¹В качестве дополнительного 16-го измерения можно рассматривать любое из первых 4-х, т.к. их сумма равна N_o

Таблица 3.1: Состояния поляризации, регистрируемой «измерителем поляризации», а также соответствующие положения волновых пластинок при различных томографических измерениях двухфотонного поляризационного состояния

№ ν измерительного состояния	$ \nu\rangle = \frac{ \varphi_\nu^{(1)}\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{ \varphi_\nu^{(2)}\rangle}{\sqrt{2}}$	Состояние поляризации в первом пучке	Состояние поляризации во втором пучке	Угол поворота полуволновой пластинки в первом пучке	Угол поворота четвертьволновой пластинки в первом пучке	Угол поворота полуволновой пластинки во втором пучке	Угол поворота четвертьволновой пластинки во втором пучке
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	$ H\rangle$	45°	0°	45°	0°
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	$ V\rangle$	45°	0°	0°	0°
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	$ V\rangle$	0°	0°	0°	0°
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	$ H\rangle$	0°	0°	45°	0°
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	0°	45°	0°
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	0°	0°	0°
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	45°	0°	0°
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	45°	45°	0°
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	$ R\rangle$	22.5°	45°	22.5°	0°
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	45°	22.5°	45°
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	0°	22.5°	45°
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	$ D\rangle$	45°	0°	22.5°	45°
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	$ D\rangle$	0°	0°	22.5°	45°
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	$ L\rangle$	0°	0°	22.5°	90°
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	$ L\rangle$	45°	0°	22.5°	90°
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	$ L\rangle$	22.5°	0°	22.5°	90°

Для того, чтобы показать, что система измерений двух-фотонного поляризационного состояния, представленная в Табл. 3.1, является томографически полной, достаточно показать, что с помощью этих измерений можно построить матрицу плотности, т.е. выразить все элементы матрицы плотности через результаты томографических измерений.

Предположим, что измерения производятся абсолютно точно, т.е. $\bar{n}_\nu = \gamma_\nu$. Тогда, решая систему из 16 уравнений (3.1) относительно ρ_{mn} при известных γ_ν , можно получить [60], что

$$\hat{\rho} = \sum_{\nu=1}^{16} \gamma_\nu \hat{M}_\nu, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{M}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -(1-i) & -(1+i) & 1 \\ -(1+i) & 0 & i & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(1-i) & 0 & 1 \\ -(1+i) & 2 & i & -(1+i) \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -(1-i) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & -(1+i) \\ 0 & -i & 0 & -(1-i) \\ 1 & -(1-i) & -(1+i) & 2 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(1+i) & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ -(1-i) & -i & 2 & -(1-i) \\ 1 & 0 & -(1+i) & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & -(1+i) \\ 0 & 0 & (1-i) & 0 \\ -2i & (1+i) & 0 & 0 \\ -(1-i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1+i) \\ 0 & 0 & (1-i) & 2i \\ 0 & (1+i) & 0 & 0 \\ -(1-i) & -2i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1+i) \\ 0 & 0 & -(1-i) & 2 \\ 0 & -(1+i) & 0 & 0 \\ -(1-i) & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_8 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -(1+i) \\ 0 & 0 & -(1-i) & 0 \\ 2 & -(1+i) & 0 & 0 \\ -(1-i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{12} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -(1+i) \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-i) & 0 & 0 \\ -(1-i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{13} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1+i) \\ 0 & 0 & -(1+i) & 0 \\ 0 & -(1-i) & 2 & 2 \\ -(1-i) & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{14} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1-i) \\ 0 & 0 & (1-i) & 0 \\ 0 & (1+i) & 0 & -2i \\ -(1+i) & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{15} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & -(1-i) \\ 2i & 0 & (1-i) & 0 \\ 0 & (1+i) & 0 & 0 \\ -(1+i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{M}_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что матрица плотности может быть выражена через представленный в таблице (3.1) набор наблюдаемых и, соответственно, этот набор наблюдаемых является томографически полной системой измерений

3.2 Томографическая оценка матрицы плотности методом максимального правдоподобия

В предыдущем разделе рассматривалась теоретическая возможность восстановления матрицы плотности по набору наблюдаемых, представляющих собой томографически полную систему измерений. При этом неявно предполагалось, что значения наблюдаемых $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ являются истинными значениями этих наблюдаемых, т.е., если перейти на язык измерений, предполагалось, что значения наблюдаемых измерены абсолютно точно.

Однако, экспериментальные значения измеряемых наблюдаемых $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ могут быть получены лишь с определенной точностью. Погрешности измерений приводят к тому, что может так случиться, что матрица плотности, полученная методом линейной реконструкции по формуле (3.13), будет не удовлетворять условиям (3.2), которым должна удовлетворять истинная матрица плотности измеряемого света.

Проиллюстрируем на примере поляризационного состояния одиночного фотона, что погрешности в $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ при использовании метода линейной реконструкции могут при-

водить к получению отрицательных собственных значений $\hat{\rho}$. Действительно, пусть имеется матрица $\hat{\rho}$, описывающая поляризационное состояние фотона. Запишем комплексные элементы этой матрицы в виде действительных и мнимых частей

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho'_{12} + i\rho''_{12} \\ \rho'_{12} - i\rho''_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

где $'$ означает действительную часть, а $''$ означает мнимую часть матричного элемента. Уравнение на собственные значения имеет вид: $\hat{\rho}|\chi\rangle = \lambda|\chi\rangle$, где $|\chi\rangle$ — собственный вектор, а λ — собственное значение. Собственные значения λ можно определить из характеристического уравнения, которое в нашем случае имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda(\rho_{11} + \rho_{22}) - (\rho'^2_{12} + \rho''^2_{12}) + \rho_{11}\rho_{22} = 0, \quad (3.15)$$

Его решения можно записать в виде

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4[(\rho'^2_{12} + \rho''^2_{12}) - \rho_{11}\rho_{22}]}}{2} \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) видно, что одно из собственных значений будет отрицательным, если величина $[(\rho'^2_{12} + \rho''^2_{12}) - \rho_{11}\rho_{22}] > 0$. Наиболее чувствительными в этом отношении к ошибкам измерений являются чистые состояния, для которых, как известно, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, что соответствует условию $[(\rho'^2_{12} + \rho''^2_{12}) - \rho_{11}\rho_{22}] = 0$. Поэтому, даже самые незначительные погрешности в измерении элементов матрицы плотности могут привести к положительности этого выражения и, как следствие,

к отрицательности одного собственного значения, т.е. к нарушению 3-го из свойств (3.2), которым должна удовлетворять матрица плотности любой реально существующей физической системы.

Для того, чтобы обойти эту проблему и найти решение для матрицы плотности, лежащее в области допустимых решений, определяемых (3.2), на основе неточно измеренных наблюдаемых $\langle \hat{A}_\nu \rangle$, можно использовать метод максимального правдоподобия. Реализация метода состоит из двух этапов – параметризации множества допустимых матриц плотности и построения вероятностного алгоритма нахождения «максимально правдоподобного» решения. Параметризация позволяет выделить из всего множества возможных $\hat{\rho}$, удовлетворяющих полученному в эксперименте набору значений (в нашем случае – набору количества фотоотсчетов $\{N_\nu\}$), подмножество матриц $\hat{\rho}_0$, удовлетворяющее условиям (3.2). Вероятностный алгоритм, основанный на статистической вероятностной модели, позволяет выбрать из подмножества $\hat{\rho}_0$, единственную матрицу $\hat{\rho}_{lh}$, удовлетворяющую критерию максимального правдоподобия, т.е. такую $\hat{\rho}_{lh}$, для которой вероятность получения экспериментальных значений полного набора наблюдаемых будет максимальной. Приближенная матрица $\hat{\rho}_{lh}$, полученная таким способом, называется наивероятнейшей оценкой матрицы плотности и представляет собой одну из ее томографических оценок.

Перейдем к параметризации. В однофотонном случае множество матриц $\hat{\rho}_0$ может быть параметризовано следующим образом

$$\hat{\rho}_0 = \hat{T}^\dagger \hat{T}, \quad (3.17)$$

где $\hat{T} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ t_3 + it_4 & t_2 \end{pmatrix}$, а t_i — действительные числа.

Покажем, что параметризованная таким образом матрица удовлетворяет условиям (3.2) и параметризует все физически возможные матрицы плотности.

Действительно, т.к. $\hat{T}^\dagger = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 - it_4 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$, то

1) эрмитовость матриц $\hat{\rho}_0$ очевидна из их определения, т.к. $\hat{\rho}_0 = \hat{T}^\dagger \hat{T} = \begin{pmatrix} t_1^2 + t_3^2 + t_4^2 & t_2 t_3 - it_2 t_4 \\ t_2 t_3 + it_2 t_4 & t_2^2 \end{pmatrix}$

2) для выполнения второго условия потребуем дополнительно, чтобы $\text{Tr} \hat{T}^\dagger \hat{T} = 1$, т.е. $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = 1$, т.к. $\text{Tr} \hat{\rho}_0 = 1$.

3) покажем, что матрица $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ квазиположительно определена, т.е. все ее собственные значения неотрицательны. В самом деле, пусть $|\chi\rangle$ — её собственный вектор, а λ — соответствующее собственное значение. С одной стороны $\langle \chi | \hat{T}^\dagger \hat{T} | \chi \rangle = \lambda \langle \chi | \chi \rangle$. С другой стороны, обозначив $\hat{T} | \chi \rangle = | \chi' \rangle$, и учитывая, что $\langle \chi | \hat{T}^\dagger = \langle \chi' |$, получим

$$\lambda \langle \chi | \chi \rangle = \langle \chi | \hat{T}^\dagger \hat{T} | \chi \rangle = \langle \chi' | \chi' \rangle \geq 0, \quad (3.18)$$

откуда $\lambda \geq 0$.

Осталось доказать, что $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ однозначно параметризует $\hat{\rho}_0$. Расписывая (3.17) поэлементно

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho'_{12} + i\rho''_{12} \\ \rho'_{12} - i\rho''_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^2 + t_3^2 + t_4^2 & t_2 t_3 - it_2 t_4 \\ t_2 t_3 + it_2 t_4 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

получим

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_1^2 + t_3^2 + t_4^2 & = & \rho_{11} \\ t_2 t_3 & = & \rho'_{12} \\ -t_2 t_4 & = & \rho''_{12} \\ t_2^2 & = & \rho_{22} \end{array} \right.$$

Т.к. $\rho_{22} \geq 0$, то $t_2 = \pm\sqrt{\rho_{22}}$, $t_3 = \pm\frac{\rho'_{12}}{\sqrt{\rho_{22}}}$, $t_4 = \mp\frac{\rho''_{12}}{\sqrt{\rho_{22}}}$ и

$$t_1 = \pm \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22} - [(\rho'_{12})^2 + (\rho''_{12})^2]}}{\sqrt{\rho_{22}}}.$$

Как было показано выше, из условия неотрицательности собственных значений следует, что подкоренное выражение в формуле для t_1 должно быть неотрицательно и, следовательно, t_1 оказывается действительным числом. Из полученных выражений, с учетом того, что все величины, входящие в эти формулы являются действительными числами, видно, что для параметризации достаточно в каждом из выражений оставить только один знак.

В итоге, приходим к заключению, что t_1, t_2, t_3, t_4 могут быть выбраны в виде

$$t_1 = \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22} - [(\rho'_{12})^2 + (\rho''_{12})^2]}}{\sqrt{\rho_{22}}}, t_2 = \sqrt{\rho_{22}}, t_3 = \frac{\rho'_{12}}{\sqrt{\rho_{22}}}, t_4 = -\frac{\rho''_{12}}{\sqrt{\rho_{22}}} \quad (3.19)$$

При этом t_1 и t_2 лежат в диапазоне $[0, 1]$, а t_3 и t_4 – в диапазоне $[-1, 1]$. Из формул (3.19) непосредственно следует, что между матрицами $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ и $\hat{\rho}_0$ имеется взаимно однозначное соответствие. Таким образом мы доказали, что матрицы $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ параметризуют подмножество матриц $\hat{\rho}_0$, удовлетворяющих условиям (3.2).

Теперь перейдем к построению вероятностного алгоритма нахождения «максимально правдоподобного» решения. Статистическая модель, в рамках которой находится $\hat{\rho}_{th}$, должна учитывать физические механизмы, приводящие к возникновению погрешностей. Если ограничиться только учетом статистических погрешностей, то в нашем случае погрешности, возникающие при измерении значения наблюдаемой $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ (её экспериментальной оценке), обусловлены квантовой природой фотодетектирования.

Отметим, что экспериментально величина $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ может быть измерена лишь с конечной точностью, т.е. может быть найдена только её оценка, для нахождения которой производится измерение количества зарегистрированных за время измерения T фотоотсчетов N_ν в присутствии или отсутствии поляризационной фильтрации. Для этого сперва производится «нормировочное» измерение, в ходе которого определяется количество зарегистрированных фотоотсчетов за время измерения T без применения поляризационной фильтрации (нормировочной постоянной N_0). Затем измеряется количество зарегистрированных за время измерения T фотоотсчетов при применении поляризационной фильтрации. В случае поляризационных состояний величина наблюдаемой $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ равна вероятности прохождения фотона через поляризатор и, соответственно, оценка экспериментальной оценки величины наблюдаемой $\langle \hat{A}_\nu \rangle$ производится по формуле:

$$\langle \hat{A}_\nu \rangle_{\text{exper}} = p_\nu = \frac{N_\nu}{N_0}, \quad (3.20)$$

где p_ν – экспериментальная оценка вероятности фотона пройти через измеритель поляризации, пропускающий

поляризацию $|\nu\rangle$, а N_ν – количество фотоотсчетов, зарегистрированных за время измерения T в случае, когда измеритель поляризации пропускает фотоны в состоянии поляризации $|\nu\rangle$.

При условии $N_\nu \gg 1$, распределение $P(N_\nu)$ близко к распределению Гаусса, в котором среднее и стандартное отклонение равно $\bar{\lambda}_\nu$:

$$P(N_\nu) \approx \frac{1}{\bar{\lambda}_\nu \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(N_\nu - \bar{\lambda}_\nu)^2}{2\bar{\lambda}_\nu^2} \right\}. \quad (3.21)$$

где $\bar{\lambda}_\nu$ – средние значения N_ν , т.е. математические ожидания при измерении N_ν .

Т.к. построение вероятностного алгоритма нахождения «максимально правдоподобного» решения для однофотонного и двухфотонного случаев аналогично, то мы не будем специально останавливаться на нахождении $\hat{\rho}_{lh}$ для одного фотона, а сразу перейдем к решению задачи нахождения томографической оценки матрицы плотности методом максимального правдоподобия для двухфотонного поляризационного состояния.

В случае поляризации двух фотонов множество допустимых решений – это множество матриц 4×4 , удовлетворяющих условиям (3.2) – эрмитовости, нормировки и неотрицательной определенности. С технической точки зрения удобнее параметризовать множество допустимых решений – выразить все множество допустимых матриц через 16 действительных чисел $(t_1, t_2, \dots, t_{16})$. Параметризацию можно провести следующим образом. Представим матрицу плотности $\hat{\rho}_{lh}$ в виде:

$$\hat{\rho}_{lh} = \frac{\hat{T}^\dagger \hat{T}}{\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T})}, \quad (3.22)$$

где

$$\hat{T}(t) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 + it_6 & t_2 & 0 & 0 \\ t_{11} + it_{12} & t_7 + it_8 & t_3 & 0 \\ t_{15} + it_{16} & t_{13} + it_{14} & t_9 + it_{10} & t_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Можно показать, что $\hat{\rho}_{lh}$ удовлетворяет (3.2). С другой стороны, значения параметров t_i можно получить из $\hat{\rho}_{lh}$ [60]:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\mathcal{M}_{11}^{(1)}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{M}_{12}^{(1)}}{\sqrt{\mathcal{M}_{11}^{(1)} \mathcal{M}_{11,22}^{(2)}}} & \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{11}^{(1)}}{\mathcal{M}_{11,22}^{(2)}}} & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{M}_{12,23}^{(2)}}{\sqrt{\rho_{44}} \sqrt{\mathcal{M}_{11,22}^{(2)}}} & \frac{\mathcal{M}_{11,23}^{(2)}}{\sqrt{\rho_{44}} \sqrt{\mathcal{M}_{11,22}^{(2)}}} & \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{11,22}^{(2)}}{\rho_{44}}} & 0 \\ \frac{\frac{\rho_{41}}{\sqrt{\rho_{44}}}}{\sqrt{\rho_{44}}} & \frac{\frac{\rho_{42}}{\sqrt{\rho_{44}}}}{\sqrt{\rho_{44}}} & \frac{\frac{\rho_{43}}{\sqrt{\rho_{44}}}}{\sqrt{\rho_{44}}} & \sqrt{\rho_{44}} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

где $\Delta = \det \hat{\rho}_{lh}$, $\mathcal{M}_{ij}^{(1)}$ – минор первого порядка, т.е. определитель матрицы 3×3 , полученной из $\hat{\rho}_{lh}$ путем вычеркивания i -той строки и j -того столбца, $\mathcal{M}_{ij,kl}^{(2)}$ – минор второго порядка (определяет матрицу, полученной из $\hat{\rho}_{lh}$ путем вычеркивания строк i и k и столбцов j и l при $i \neq k$ и $j \neq l$).

Как отмечалось выше, статистику количества фотоотсчетов в ν -том измерении приближенно можно считать гауссовой с математическим ожиданием $N_\nu = N_0 \langle \psi_\nu | \hat{\rho}_{lh} | \psi_\nu \rangle$ и дисперсией $\sigma_\nu = \sqrt{N_\nu}$, где N_0 – как и ранее, количество

фотоотсчетов за время наблюдения в случае отсутствия поляризационной фильтрации, а $N_\nu \gg 1$, $\nu = 1, \dots, 16$. Нормировочную постоянную можно выразить как

$$N_0 = \sum_{\nu=1}^4 N_\nu, \quad (3.25)$$

т.е. N_0 численно равна сумме первых четырех томографических измерений из Табл. 3.1. Кроме того, будем считать, что различные томографические измерения являются независимыми. В этом случае вероятность того, что в результате томографических измерений будут получены значения $\{N_1, N_2, \dots, N_{16}\}$ равна

$$P(N_1, N_2, \dots, N_{16}) = \frac{1}{N_0} \prod_{\nu=1}^{16} \exp \left[-\frac{(N_\nu - \bar{N}_\nu)^2}{2\sigma_\nu^2} \right] \quad (3.26)$$

Наивероятнейшая оценка матрицы плотности – это оценка матрицы плотности $\hat{\rho}_p(t_1^0, t_2^0, \dots, t_{16}^0)$, реализующая максимум вероятности (3.26):

$$P(N_1, N_2, \dots, N_{16}) = \frac{1}{N_0} \prod_{\nu=1}^{16} \exp \left[-\frac{[N_0 \langle \psi_\nu | \hat{\rho}_p(t_1, t_2, \dots, t_{16}) | \psi_\nu \rangle - N_\nu]^2}{2N_0 \langle \psi_\nu | \hat{\rho}_p(t_1, t_2, \dots, t_{16}) | \psi_\nu \rangle} \right] \rightarrow \max \quad (3.27)$$

Логарифмируя (3.27), получим задачу на минимум

$$L(t_1, t_2, \dots, t_{16}) = N_0 \sum_{\nu=1}^{16} \frac{[\langle \psi_\nu | \hat{\rho}_p(t_1, t_2, \dots, t_{16}) | \psi_\nu \rangle - p_\nu]^2}{2 \langle \psi_\nu | \hat{\rho}_p(t_1, t_2, \dots, t_{16}) | \psi_\nu \rangle} \rightarrow \min, \quad (3.28)$$

где функция $L(t_1, \dots, t_{16})$ называется функцией правдоподобия. Решение задачи (3.28) реализовано в программном обеспечении [61] для нахождения наивероятнейшей оценки матрицы плотности, которая входит в состав квантового томографа, описание которого приведено в главе 4. Заметим, что минимум выражения (3.28) не зависит от N_0 .

Следует отметить, что наивероятнейшее приближение в рассматриваемом случае учитывает погрешность томографических измерений, вызванную дробовым шумом, и не учитывает погрешность, обусловленную конечной точностью установки фазовых пластинок при проведении этих измерений. Однако, элементы матрицы плотности, полученные с помощью методов линейной реконструкции и наивероятнейшего приближения, должны совпадать с точностью до их погрешностей, и внесение дополнительных степеней свободы в функцию правдоподобия лишь усложнит вычислительную процедуру, не улучшив существенно результат.

3.2.1 Анализ источников ошибок измерений

С теоретической точки зрения для получения элементов матрицы плотности должны быть измерены лишь величины N_ν , представляющие собой количество фотоотсчетов, зарегистрированных фотодетектором, после прохождения фотонов через измеритель поляризации, установленный в состояние ν . Схема измерения N_ν приведена на рис.3.1. Методика измерения основана на схеме совпадений. Каждый из фотонов бифотонной пары после прохождения поляризационного фильтра поступает на

свой счетчик одиночных фотонов. С выхода счетчиков импульсы фотоотсчетов поступают на схему совпадений, где с помощью время-цифрового преобразователя регистрируется время их появления. Результаты сводятся в таблицу, изображенную на рис.3.1.

Смысл схемы совпадений заключается в том, что при обработке результатов измерений мы учитываем только те результаты, в которых одновременно сработали оба счетчика, т.е. были зарегистрированы импульсы фотоотсчетов в одно и тоже время. При использовании методики совпадений процедура измерений осуществляется следующим образом. Задаются измерительный интервал T , т.е. время, в течение которого происходит накопление фотоотсчетов, и временное окно τ , при попадании в которое импульсы фотоотсчетов с 1-го и 2-го счетчиков считаются совпадающими, т.е. инициированными фотонами от одной фотонной пары. Все несовпадающие фотоотсчеты игнорируются. Если обратиться к рис.3.1, то при обработке результатов измерения будут учтены только результаты, зарегистрированные в моменты времени t_1, t_4, t_7 .

Такая методика позволяет радикальным образом подавить как оптические, так и темновые шумы, естественным образом возникающие при измерениях на уровне счета одиночных фотонов, а также дает возможность устранить влияние одного из самых серьезных недостатков режима счета фотонов, связанного с неидеальностью счетчиков, выражающегося в том, что квантовые эффективности счетчиков $\eta < 1$. Отличие квантовой эффективности счетчиков от 1 приводит к тому, что при попадании коррелированной пары фотонов на счетчики один

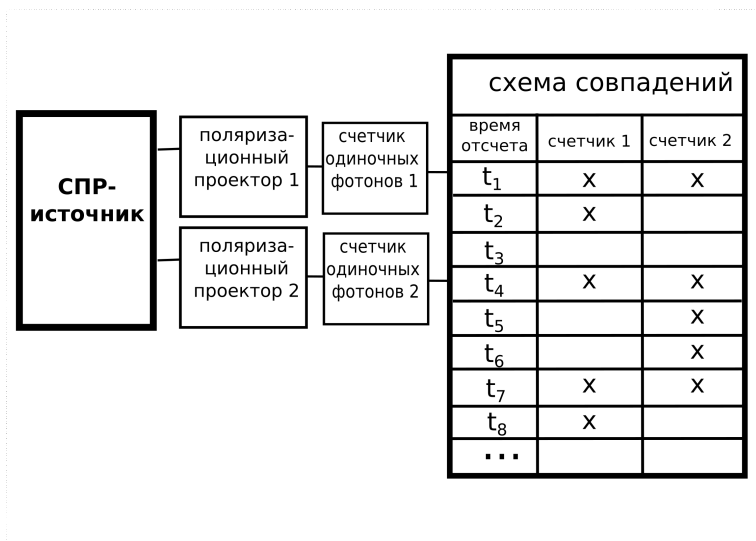


Рис. 3.1: Блок-схема применения схемы совпадений при обработке данных с фотодетекторов

счетчик срабатывает (появляется импульс фотоотсчета), а второй нет.

В этом разделе мы сосредоточим свое внимание на статистических ошибках, связанных с квантовыми флуктуациями света, которые становятся значительными при однофотонном режиме. Конечно, остаются инструментальные ошибки, например, систематические ошибки, обусловленные нестабильностью мощности лазера накачки и температуры в помещении, ошибки, связанные с наличием темновых и оптических шумов в однофотонных детекторах, ошибки, связанные с неточностью установки поляризационных элементов и т.п. Однако, все указанные источники ошибок могут быть снижены до необходимого уровня путем улучшения качества регистрирующей аппаратуры. В противоположность этому статистические ошибки,

связанные с квантовыми флуктуациями, не могут быть устранены с помощью улучшения аппаратуры. Кроме того, такие источники ошибок являются нетипичными для сложившейся метрологии классических источников света и, на наш взгляд, требуют специального рассмотрения.

Рассмотрим пример, когда для накачки СПР-источника используется непрерывный лазер. Как следует из физического механизма СПР, времена появления фотонных пар на выходе такого источника будут случайными, а их средняя частота генерации будет пропорциональна интенсивности накачки. При этом вероятность p появления фотонных пар в результате СПР в единицу времени будет постоянной, не зависящей от времени величиной. Как известно из теории случайных процессов, статистика случайного процесса с вышеперечисленными условиями является Пуассоновской, т.е. вероятность P_n появления n бифотонов в течение измерительного интервала T задается выражением:

$$P_n = \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} \quad (3.29)$$

где $\lambda = pT$ — среднее количество фотонов, появляющихся в течение времени T .

При проведении любого из 16-ти томографических измерений, представленных в табл. (3.1), каждый из фотонов пары проходит через один из проекторов П1 и П2, и затем регистрируются детекторами одиночных фотонов Д1 и Д2. Напомним, что проектор и детектор вместе составляют измеритель поляризации, о котором шла речь в разделе 3.1.2. При k — м томографическом измерении проекторы пропускают фотонные пары в состоянии

$|\psi_k\rangle = |\psi_k^1\rangle \otimes |\psi_k^2\rangle$, где $|\psi_k^{1,2}\rangle$ – квантовые состояния поляризации, пропускаемой первым и вторым проекторами, соответственно. Т. е. фотоны оказываются в факторизованном состоянии. При этом вероятность того, что оба фотона из пары пройдут через проекторы одновременно, равна $p_k = \langle \psi_k | \hat{\rho} | \psi_k \rangle$. Если оба фотона прошли через проекторы, то они попадают на детекторы, при этом первый фотон регистрируется с эффективностью η_1 , а второй — с эффективностью η_2 . Таким образом, вероятность одновременной регистрации двух фотоотсчетов $\zeta_k = p_k \eta_1 \eta_2$. В соответствии с томографической процедурой только эти фотоотсчеты учитываются при вычислении элементов матрицы плотности. Все остальные исходы считаются неуспешными.

Теперь перейдем к нахождению статистики совпадающих по времени фотоотсчетов при условии, что эффективность регистрации фотонной пары $\zeta_k < 1$. Т.к. фотоны после прохождения проекторов П1 и П2 не запутаны, то процесс регистрации фотонной пары детекторами Д1 и Д2 может быть сведен [62] к стандартной классической задаче теории вероятностей: имеется n фотонных пар, независимо падающих на детекторы, при этом с вероятностью ζ_k оба детектора сработают. Требуется найти вероятность того, что после попадания на фотодетектор n бифотонов, будет зарегистрировано m срабатываний обоих детекторов. Как известно, такая условная вероятность определяется биномиальным распределением $Q(m|n) = C_n^m \zeta_k^m (1 - \zeta_k)^{n-m}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент. Тогда безусловное распределение количества фотоотсчетов Q_m , зарегистрированных за время T , будет определяться сверткой распределения P_n с $Q(m|n)$:

$$Q_m = \sum_{n \geq m} C_n^m \zeta_k^n (1 - \zeta_k)^{n-m} P_n \quad (3.30)$$

Величина измерительного интервала T входит в формулу (3.30) через вероятности P_n .

Заметим, что при ограниченной эффективности регистрации фотонов $\eta < 1$ статистика фотоотсчетов при произвольном P_n не будет повторять статистику фотонов.

Нашей целью является вычисление относительной ошибки при определении среднего количества фотоотсчетов, обусловленной конечностью выборки. Для вычисления относительной ошибки $\delta = \frac{\sigma}{\langle m \rangle}$ необходимо определить среднее значение $\langle m \rangle$ количества фотоотсчетов за время T и стандартное отклонение σ распределения фотоотсчетов, заданное формулой (3.30).

Известно [63] (см. также [62]), что при биномиальном преобразовании (3.30) распределения P_n факториальные моменты распределений Q_m и P_n связаны следующим образом:

$$\langle m^{(l)} \rangle = \zeta_k^l \langle n^{(l)} \rangle, \quad (3.31)$$

где $\langle m^{(l)} \rangle = \langle m(m-1) \dots (m-l+1) \rangle$ — факториальный момент l -го порядка распределения Q_m , а $\langle n^{(l)} \rangle$ — факториальный момент l -го порядка распределения P_n . В соответствии с (3.31) получаем, что $\langle m \rangle = \zeta_k \langle n \rangle$ и $\sigma_m^2 = \zeta_k^2 \sigma_n^2 + \langle n \rangle (\zeta_k - \zeta_k^2)$. Учитывая, что в нашей задаче распределение фотонов является пуассоновским, для которого $\langle n \rangle = \lambda$, $\sigma_n^2 = \lambda$, окончательно получаем, что $\sigma_m^2 = \zeta_k \lambda$.

Последнее соотношение дает возможность в явном виде получить выражение для относительной ошибки, связанной с квантовыми флуктуациями светового поля. Действительно, т.к. $\langle m \rangle = \langle m^{(1)} \rangle$ и $\langle n \rangle = \lambda$, получаем, что
$$\delta = \frac{\sigma_m}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{\zeta_k \lambda}}{\zeta_k \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_k \lambda}}.$$

Учитывая, что $\lambda = pT$ и $\zeta_k = p_k \eta_1 \eta_2$, получаем для статистической ошибки количества совпадений следующую формулу:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{p_k \eta_1 \eta_2 p T}}. \quad (3.32)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что относительная статистическая ошибка количества совпадений, связанная с квантовыми флуктуациями светового поля, может быть снижена до любого желаемого уровня за счет увеличения времени T , т.к. все остальные величины, входящие в формулу для δ , являются константами. Действительно, в конкретном эксперименте вероятность появления фотонной пары p является константой, зависящей, в частности, от мощности накачки и эффективности нелинейного преобразования фотонов в процессе СПР. Эффективности детектирования η_1, η_2 также являются константами, зависящими от квантовых выходов фотодиодов, эффективности заведения излучения в детекторы и параметров электронных схем счетчиков, а p_k определяется измеряемым квантовым поляризационным состоянием фотонных пар, а также номером томографического измерения.

Учитывая, что $\eta_1 \eta_2 p p_k T = \langle N_k \rangle$ формулу (3.32) для ошибки можно переписать в виде, в котором она в дальнейшем будет использована для обработки экспериментальных данных:

$$\delta_k = \frac{1}{\sqrt{N_k}}, \quad (3.33)$$

где положено $\langle N_k \rangle \approx N_k$, что выполняется для наших измерений, т.к. экспериментально измеренные значения количества совпадений $N_k \gg 1$. Примеры значений N_k , полученные в серии томографических измерений, приведены в табл. 4.5, из которой также видно, что минимальная абсолютная статистическая ошибка $\Delta_{gc} = N_k \delta_k = 3, 6$.

Из всех инструментальных ошибок, которые существенно влияют на погрешность томографических измерений в нашей экспериментальной конфигурации, выделяется лишь одна — инструментальная ошибка при установке волновых пластинок, которая приводит к тому, что в k -м измерении измеряется проекция не на состояние, заданное в табл. 4.5, а на искаженное состояние. Что, естественно, искажает и N_k . Стандартное отклонение N_k , вызванное неточностью установки волновых пластинок Проекторов, можно представить в виде [60]

$$\Delta N_k^{(wp)} = \sqrt{\sum_{s=1}^4 \sum_{\epsilon, \lambda=1}^{16} f_{k,\epsilon}^{(s)} f_{k,\lambda}^{(s)} N_\epsilon N_\lambda}, \quad (3.34)$$

где $f_{\nu,\mu}^{(s)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_s} \langle \psi_\nu | \right\} \hat{M}_\mu | \psi_\nu \rangle + \langle \psi_\nu | \hat{M}_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_s} | \psi_\nu \rangle \right\}$, $|\psi_\nu\rangle = |\psi_\nu(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\rangle$ — как и раньше, квантовое состояние, пропускаемое проекторами в ν -том измерении, при этом учтена зависимость этого состояния от углов установки волновых пластинок θ_s . Четвертьволновые и полуволновые пластинки Проекторов пронумерованы индексом s .

В наших экспериментах погрешность установки волновых пластинок составляла $\Delta_\theta \sim 1^\circ$. Величина вносимой в томографические измерения инструментальной ошибки приведена в табл. 4.5, из которой видно, что этот вид ошибки сопоставим с статистической ошибкой.

Вклад остальных инструментальных ошибок, вызываемых оптическими и темновыми шумами фотодетекторов, несущественен. Действительно, количество случайных совпадений, вызванных шумами, можно оценить сверху как $N_{rc} = R_1 R_2 \tau T$, где N_{rc} — количество случайных совпадений, $R_{1,2}$ — скорости счета первого и второго фотодетекторов, τ и T — как и раньше, ширина временного окна и длительность измерительного интервала. В нашем случае $R_1 \approx R_2 \sim 1,5 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\tau = 8 \text{ нс}$, $T = 30 \text{ с}$, откуда $\langle N_{rc} \rangle \sim 0,54$, что намного меньше как статистической ошибки, так и ошибки, связанной с неточностью установки пластинок.

3.2.2 Расчет погрешностей определения элементов матрицы плотности

Погрешность определения элементов матрицы плотности определяется выражениями [60]

$$\begin{aligned} (\Delta \text{Re} \hat{\rho}_{ij})^2 &= \sum_{\nu=1}^{16} ((\text{Re} \hat{M}_\nu)_{ij})^2 \Lambda_\nu, \\ (\Delta \text{Im} \hat{\rho}_{ij})^2 &= \sum_{\nu=1}^{16} ((\text{Im} \hat{M}_\nu)_{ij})^2 \Lambda_\nu, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\Lambda_\nu = \left[\frac{s_\nu}{N_0} + \sum_{i=1}^4 \sum_{\epsilon, \lambda=1}^{16} f_{\nu, \epsilon}^{(i)} f_{\nu, \lambda}^{(i)} s_\epsilon s_\lambda (\Delta\theta)^2 \right], \quad (3.36)$$

$$f_{\nu,\mu}^{(i)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_{\nu,i}} \langle \psi_\nu | \right\} \hat{M}_\mu |\psi_\nu\rangle + \langle \psi_\nu | \hat{M}_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_{\nu,i}} |\psi_\nu\rangle \right\}, \quad (3.37)$$

а $s_\nu = N_\nu/N_0$, i нумерует фазовые пластинки универсальных поляризаторов. Вычисляемые погрешности учитывают ошибку при установке фазовых пластин квантового томографа ($\Delta\theta$) и наличие дробового шума.

3.2.3 Расчет характеристик квантового состояния и их погрешностей

На основании вычисленной наивероятнейшей оценки матрицы плотности могут быть вычислены характеристики квантового состояния, описанные в главе 1, а так же погрешности их вычисления, возникающие из-за наличия дробового шума и конечной точности установки фазовых пластин универсальных поляризаторов.

3.2.3.1 Энтропия фон Неймана

Энтропия фон Неймана $S_N(\hat{\rho})$ для двухфотонного состояния может быть вычислена в соответствии с формулой

$$S_N(\hat{\rho}) = - \sum_{a=1}^4 p_a \log_2 p_a, \quad (3.38)$$

где p_a – собственные значения матрицы плотности. Погрешность определялась в соответствии с выражением

$$(\Delta S_N)^2 = \sum_{\nu=1}^{16} \left(\sum_{a=1}^4 \langle \phi_a | \hat{M}_\nu | \phi_a \rangle \frac{1 + \ln p_a}{\ln 2} \right)^2 \Lambda_\nu \quad (3.39)$$

3.2.3.2 Линейная энтропия

Линейная энтропия S_L для двухфотонного состояния может быть вычислена в соответствии с формулой

$$S_L(\hat{\rho}) = \frac{4}{3}(1 - \sum_{a=1}^4 p_a^2) \quad (3.40)$$

При этом погрешность определения энтропии вычислялась согласно

$$(\Delta S_L)^2 = \sum_{\nu=1}^{16} \left(\frac{8}{3} \sum_{\mu=1}^{16} \text{Tr}\{\hat{M}_\mu \hat{M}_\nu\} s_\mu \right)^2 \Lambda_\nu \quad (3.41)$$

3.2.3.3 Запутанность

описана в разделе 1.2.1.

Характеристика *запутанности* может быть определена в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [15]. Сначала на основе матрицы плотности вычисляется матрица плотности, полученная путем переворота всех спинов. Она имеет вид

$$\hat{\rho} = (\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2) \hat{\rho}^* (\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2). \quad (3.42)$$

Для нее вводится неэрмитова матрица

$$\hat{R} = \hat{\rho} \hat{\rho} \quad (3.43)$$

При этом *запутанность* равна

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (3.44)$$

где λ_i — собственные значения $\hat{R}$ (1.20), упорядоченные в невозрастающем порядке.

Погрешность определения *запутанности* вычисляется согласно выражению

$$(\Delta C)^2 = \sum_{\nu=1}^{16} \left[\sum_{a=1}^4 \sum_{\mu=1}^{16} \text{sign}\left(\frac{3}{2} - a\right) \frac{1}{2\sqrt{r_a}} \langle \xi_a | \hat{q}_{\mu\nu} s_{\mu} | \zeta_a \rangle \right]^2 \Lambda_{\nu}, \quad (3.45)$$

где $\text{sign}(x) = 1$ при $x \geq 0$; $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mu\nu} &= \hat{M}_{\mu} \hat{\Sigma} \hat{M}_{\nu}^T \hat{\Sigma} + \hat{M}_{\nu} \hat{\Sigma} \hat{M}_{\mu}^T \hat{\Sigma}, \\ \hat{\Sigma} &\equiv \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

а $\langle \xi_a |$, $| \zeta_a \rangle$ и r_a — левые и правые собственные векторы и собственные значения матрицы $\hat{R}$, по определению равные

$$\begin{aligned} \langle \xi_a | \hat{R} &= r_a \langle \xi_a | \\ \hat{R} | \zeta \rangle &= r_a | \zeta_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.2.3.4 Сцепленность

По определению $T(\hat{\rho}) = C(\hat{\rho})^2$. Погрешность определения *сцепленности* есть

$$\Delta T = 2C\Delta C \quad (3.48)$$

3.2.3.5 Перепутывание формирования

Перепутывание формирования $E(\hat{\rho}) = \min \sum_i p_i E(\psi_i)$ можно выразить через *запутанность* (1.26). Это дает возможность после расчета *запутанности* по формуле (1.26) рассчитать *перепутывание формирования*. Погрешность определения *перепутывания формирования* определяется выражением

$$\Delta E = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} h' \left(\frac{1 + \sqrt{1-C^2}}{2} \right) \Delta C \quad (3.49)$$

3.3 Расчет погрешности определения Фиделити

Одной из важных задач квантовой оптики при переходе к индустриальному этапу развития квантовых технологий является сертификация малофотонных источников света. Для характеристики источника подходит параметр *Фиделити* (F), который может быть вычислен по формуле (1.27) или (1.28). Погрешность экспериментального определения *Фиделити* по результатам процедуры квантовой томографии оценивается следующим образом. Пусть источник должен генерировать состояние $|\Psi\rangle$, разложение которого по базисным векторам имеет вид

$$|\Psi\rangle = \sum_i C_i |\phi_i\rangle, \quad (3.50)$$

где $|\phi_i\rangle$ – базисные вектора. Полученную матрицу плотности так же можно выразить через базисные вектора

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} \rho_{ij} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| \quad (3.51)$$

Тогда *Фиделити* можно выразить как [64]

$$F = \langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle = \sum_{ij} C_i \rho_{ij} C_j^* = \sum_{ij} \sigma_{ji} \rho_{ij}, \quad (3.52)$$

где введена эрмитова матрица $\sigma_{ij} = C_i^* C_j$. *Фиделити* при этом можно выразить через действительные и мнимые части матриц σ_{ij} и ρ_{ij} . Перекрестные члены, состоящие из произведений действительной части на мнимую, сокращаются из-за эрмитовости матриц σ_{ij} и ρ_{ij} . А результате имеем

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{ij} (\text{Re}\sigma_{ij}\text{Re}\rho_{ji} - \text{Im}\sigma_{ij}\text{Im}\rho_{ji}) \\
&= \sum_k \text{Re}\sigma_{kk}\text{Re}\rho_{kk} + 2 \sum_{i>j} (\text{Re}\sigma_{ij}\text{Re}\rho_{ji} - \text{Im}\sigma_{ij}\text{Im}\rho_{ji}).
\end{aligned}
\tag{3.53}$$

Отсюда нетрудно получить выражение для погрешности *Фиделити*

$$(\Delta F)^2 = \sum_{ij} (2 - \delta_{ij}) [(\text{Re}\sigma_{ij})^2 (\Delta \text{Re}\rho_{ij})^2 + (\text{Im}\sigma_{ij})^2 (\Delta \text{Im}\rho_{ij})^2],
\tag{3.54}$$

где $\Delta \text{Re}\rho_{ij}$ и $\Delta \text{Im}\rho_{ij}$ – погрешности действительной и мнимой частей элементов матрицы плотности, соответственно.

Глава 4

Экспериментальная реализация квантовой томографии поляризационных состояний бифотонов

4.1 Установка для измерения запутанных поляризационных состояний бифотонов с помощью квантового томографа

Схема установки для измерения поляризационных квантовых состояний бифотонов представлена на рис.4.1. В установке, кроме квантового томографа (Измерителя квантовых состояний) имеется так же источник запутан-

ных по поляризации фотонных пар (Источник коррелированных по времени фотонных пар), состояние которого измеряется квантовым томографом.

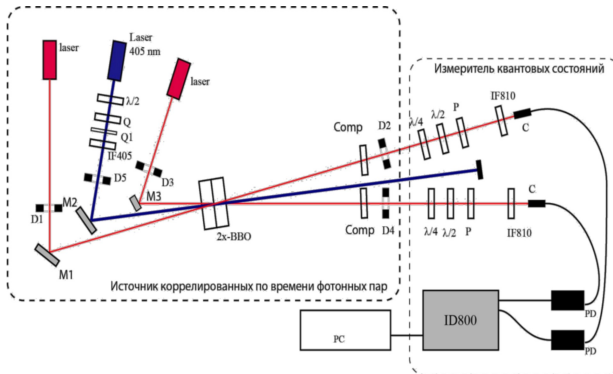


Рис. 4.1: Схема квантового томографа для измерения поляризационных состояний бифотонов. Laser – юстировочный лазер, Laser 405nm – лазер накачки, M1, M2, M3 – зеркала, Q, Q1 – кварцевые компенсационные кристаллы, D1 – D5 – ирисовые диафрагмы, Comp – компенсационные кристаллы, 2x – BBO – двойной кристалл BBO, λ/2, λ/4 – полу- и четвертьволновые пластинки, P – поляризатор, IF405 и IF810 – интерференционные полосовые светофильтры с центральной длиной волны пропускания 405 нм и 810 нм, соответственно, C – коллиматор, PD – детектор одиночных фотонов, ID800 – время-цифровой преобразователь idQuantique id800, PC – компьютер. Пунктирной линией выделены: Источник коррелированных по времени фотонных пар и Измеритель квантовых состояний (квантовый томограф).

Источник коррелированных по времени фотонных пар состоит из лазера (Laser 405 nm), излучающего на длине волны 405 нм и имеющего мощность 30 мВт в постоянном режиме, полуволновой пластинки $\lambda/2$, служащей для поворота плоскости поляризации лазера накачки, кварцевой компенсационной пластинки Q , вносящей относительную групповую задержку для горизонтальной и вертикальной составляющей поляризации лазера накачки, тонкой кварцевой пластинки $Q1$, регулирующей фазовую задержку между горизонтальной и вертикальной составляющими накачки при её повороте вокруг вертикальной оси, интерференционного светофильтра $IF405$ и двойного нелинейного кристалла BBO (Newlightphotonics PABBO5050-405(I)-HA3). Двойной нелинейный кристалл состоит из двух одинаковых нелинейных кристаллов BBO , в которых реализован синхронизм первого типа ($e-oo$), т.е. в котором волна накачки, имеющая необыкновенную поляризацию, распадается на две волны, имеющие обыкновенную поляризацию и условно называемые сигнальной волной (с большей частотой), и холостой (с меньшей частотой). Накачка имеет длину волны 405 нм, а сигнальная и холостая волны – 810 нм, при этом угол рассеяния составляет 3° . Отметим, что в случае равенства длин волн и углов рассеяния сигнальной и холостой волн, сигнальная и холостая волны полностью идентичны, и выбор, какую волну считать холостой, а какую сигнальной, произволен. В двойном нелинейном кристалле главные плоскости нелинейных кристаллов ортогональны друг другу, причём одна из главных плоскостей совпадает с горизонтальной плоскостью (составляющая накачки в синхронизме имеет

горизонтальную поляризацию), а другая главная плоскость расположена вертикально (составляющая накачки, находящаяся в синхронизме, имеет вертикальную поляризацию). В первом кристалле рождаются фотонные пары, в которых каждый из фотонов имеет вертикальную поляризацию; фотонные пары, рожденные во втором кристалле, имеют горизонтальную поляризацию. Согласно законам оптики анизотропных сред, накачка, падая на нелинейные кристаллы, распадается на две волны – обыкновенную и необыкновенную. В первом нелинейном кристалле горизонтальная составляющая накачки является необыкновенной волной, и находится в синхронизме, а вертикальная составляющая не находится в синхронизме. При распространении через второй кристалл наоборот, вертикальная составляющая накачки находится в синхронизме, а горизонтальная – нет. При повороте полуволновой пластинки $\lambda/2$ плоскость поляризации лазера накачки изменяет свое направление, тем самым накачивая нелинейные кристаллы с разной интенсивностью. Так, если перед нелинейным кристаллом поляризация накачки горизонтальная или вертикальная, то накачивается первый или второй нелинейный кристалл, соответственно, и рождаются фотонные пары в состоянии $|VV\rangle$ или $|HH\rangle$, соответственно. Если поляризация лазера направлена между горизонталью и вертикалью, то генерируются фотонные пары в запутанном квантовом состоянии. Оптическая ось тонкой кварцевой пластинки Q1 ориентирована в горизонтальной плоскости, и при её повороте вокруг вертикальной оси вертикальная и горизонтальная составляющая накачки приобретают различную фазу друг относительно друга, а значит, изменяется и фаза между $|VV\rangle$ или $|HH\rangle$. При распространении внутри кристалла поляризационные составляющие накачки,

а также излученные фотонные пары в состоянии $|VV\rangle$ или $|HH\rangle$ приобретают различную групповую задержку («цуги» $|VV\rangle$ и $|HH\rangle$ могут стать не совпадать в пространстве). Толстая кварцевая пластинка Q вносит групповую задержку с обратным знаком, тем самым компенсируя этот нежелательный эффект. Подробнее об этой технике компенсации можно прочитать в [56, 57, 65, 51]. Источник снабжен юстировочными лазерами, показывающими направление распространения фотонных пар.

Измеритель квантовых состояний состоит из двух измерителей поляризации, детекторов одиночных фотонов, время-цифрового преобразователя и ПК. Каждый измеритель поляризации позволяет пропустить фотоны в произвольном заданном поляризационном состоянии и поглотить в фотоны в ортогональном заданному квантовом состоянии. Измеритель поляризации состоит из четвертьволновой пластинки $\lambda/4$, полуволновой пластинки $\lambda/2$ и призмы Глана. Призма Глана пропускает фотоны, поляризация которых линейная и ориентирована вертикально. Квантовое состояние, пропускаемое измерителем поляризации, задается положением пластинок $\lambda/2$ и $\lambda/4$. Например, если оптические оси пластинок ориентированы вертикально или горизонтально, то измеритель поляризации пропускает фотоны с вертикальной поляризацией, а если пластинку $\lambda/4$ повернуть на 45° вокруг направления распространения излучения, а положение пластинки $\lambda/2$ не изменять, то измеритель поляризации будет пропускать фотоны с циркулярной (т.е. круговой) поляризацией. Мнемонически определить, какое поляризационное состояние пропускает измеритель поляризации, можно следующим образом. Нужно отталкиваться от поляризационного состояния, которое пропускает призма Глана (в нашем случае – состояние вертикальной поля-

ризации). После этого мысленно направим луч с соответствующей поляризацией от призмы Глана в сторону источника. Наш воображаемый луч должен пройти последовательно полуволновую и четвертьволновую пластинки, и согласно правилам поляризационной оптики нужно определить, как модифицируется квантовое состояние луча полуволновой и четвертьволновой пластинками. Полученное состояние поляризации будет пропускаться измерителем поляризации. В самом деле, если на измеритель поляризации падает поток фотонов в вычисленном нами квантовом состоянии поляризации, то это состояние при прохождении четвертьволновой и полуволновой пластинок будет модифицировано как раз в квантовое состояние вертикальной поляризации, пропускаемое призмой Глана. Список используемых при проведении процедуры квантовой томографии конфигураций волновых пластин измерителей поляризации квантового томографа и соответствующих измерительных состояний представлен в табл. 3.1

После измерителей поляризации расположены полосовые интерференционные светофильтры Thorlabs FBH810-10, центральная длина волны пропускания которых — 810 нм, а ширина полосы пропускания (по уровню $1/2$ интенсивности) — 10 нм. Интерференционный светофильтр, с одной стороны, позволяет ограничить ширину спектра излучения СПР, а с другой стороны — позволяет уменьшить нежелательную засветку детекторов одиночных фотонов от внешних источников света (например, от монитора ПК). При этом все измерения происходят при выключенном свете в лаборатории, а окна закрыты непрозрачным материалом. Одиночные фотоны, прошедшие через измерители поляризации, собираются коллиматорами С в многомодовое оптическое волокно

(диаметр сердцевины 50 мкм, числовая апертура волокна — 0.20. Многомодовое волокно затем подсоединяется к волоконному входу детектора одиночных фотонов SPC-6 (диаметр многомодового волокна волоконного входа детектора — 105 мкм, а апертура — 0.22. Дополнительное волокно между выходом коллиматора С и волоконным входом детектора требуется для целей юстировки. При этом в качестве «дополнительного» волокна для минимизации потерь и обеспечения стабильности коэффициента пропускания излучения на стыке волокон важно выбрать такое волокно, чтобы его диаметр и апертура были меньше таковых у волокна-входа в детектор одиночных фотонов. Иначе при любом движении дополнительного волокна будет заметно, что скорость счета детектора одиночных фотонов изменяется, и эксперимент продолжать будет нельзя. При регистрации одиночного фотона детектор формирует цифровой электрический импульс в формате TTL, который подается на время-цифровой преобразователь idQuantique id800, который вычисляет время прихода электрического импульса, и строит временную корреляционную гистограмму (рис. 3.1). На гистограмме отложено количество электрических импульсов, зарегистрированных время-цифровым преобразователем, в зависимости от задержки времени прихода между каналами. При заданном времени накопления T регистрируется количество импульсов, зарегистрированных одновременно с точностью до ширины корреляционного окна τ . Это число запоминается на ПК. Измерения производятся для каждой конфигурации измерителя квантовых состояний. Затем на ПК производится обработка измерений, вычисление линейной реконструкции и наивероятнейшей оценки матрицы плотности, характеристик квантового состояния (энтро-

пии фон Неймана, линейной энтропии, *Запутанности* Concurrence, *Сцепленности* Tangle, *Перепутывания формирования*). Для тестирования работы квантового томографа был использован двухкристальный источник запутанных по поляризации фотонных пар, собранный на основе двухкристальной схемы [52].

Юстировка установки по квантовой томографии поляризационных состояний бифотонов производится следующим образом.

На первом этапе на оптическом столе устанавливаются лазер накачки и юстировочные лазеры. С помощью регулировочных элементов добиваются того, чтобы излучение всех лазеров распространялось параллельно плоскости оптического стола на одинаковой высоте. Добиться этого можно следующим образом. Выбирается ирисовая диафрагма, отверстие которой будет служить «эталонной высоты» над оптическим столом. Затем для каждого лазера производится следующая процедура. Диафрагма устанавливается в непосредственной близости от выходного отверстия лазера, а высота лазера устанавливается таким образом, чтобы излучение лазера проходило через диафрагму. Затем диафрагма устанавливается на некотором расстоянии от лазера (достаточно 50–100 см), и регулировкой держателя лазера по углу добиваются прохождения излучения лазера через диафрагму. После этого диафрагма снова устанавливается возле лазера, и процедура повторяется (юстировка по высоте). После нескольких итераций излучение лазера будет направлено параллельно плоскости оптического стола и распространяться на нужной высоте.

После начальной установки лазеров, устанавливается один из юстировочных лазеров. Этот лазер удобно уста-

новить таким образом, чтобы его излучение распространялось вдоль одной из сторон оптического стола (вдоль ряда с резьбовыми отверстиями в стандартном оптическом столе). В месте предполагаемого расположения нелинейного кристалла устанавливается диафрагма. Затем потребуются ещё три диафрагмы, установленные на той же высоте. На расстоянии 1 м от кристалла устанавливаются дополнительные диафрагмы – диафрагмы $D2$ и $D4$, а также диафрагма между ними в луче накачки, которая на рис. 4.1 убрана. Диафрагмы устанавливаются так, чтобы угол между юстировочными лучами и лучом накачки составлял 3° . По этим диафрагмам устанавливаются лазеры накачки и второй юстировочный лазер. При этом излучение этих лазеров удобно направить в диафрагмы не «напрямик», а через дополнительное зеркало для удобства юстировки (зеркала $M1$, $M2$, $M3$ на рис. 4.1). При этом применяется процедура юстировки лазера «по двум диафрагмам» (вспомните, через две точки можно провести единственную прямую!). Эта процедура осуществляется следующим образом. Сперва с помощью юстировки лазера по углу добиваются его прохождения через диафрагму, расположенную на месте кристалла, а с помощью юстировки зеркала по углу добиваются попадания лазера в «дальнюю» диафрагму. При этом лазер перестает попадать на «ближнюю» диафрагму, но отклоняется на меньшее расстояние. С помощью регулировки лазера по углу снова добиваются попадания луча лазера в «ближнюю» диафрагму, а с помощью регулировки зеркала – в «дальнюю» диафрагму. Такая процедура юстировки повторяется нужное количество раз до прохождения излучения лазера через две диафрагмы. Отметим, что скорость «схождения» процедуры юстировки зависит от расстояния между зеркалом и лазером – имеет смысл

сделать его больше в разумных пределах.

После того, как юстировочные лазеры и лазер накачки установлены, заводят излучение юстировочных лазеров в коллиматоры. Коллиматор устанавливают на четырехкоординатную подвижку (два угла и две координаты) и подключают к нему дополнительное волокно. Наблюдая за интенсивностью излучения юстировочных лазеров, выходящего из волокна, добиваются максимальной интенсивности. При этом юстировочный лазер должен падать в центральную часть апертуры коллиматора.

Для дальнейшей юстировки понадобятся два поляризационных кубика, расположенных в держателях. Первый поляризационный кубик устанавливают таким образом, чтобы отраженный в бок луч распространялся параллельно плоскости оптического стола. При этом прошедший через поляризационный кубик пучок будет иметь горизонтальную поляризацию, а отраженный – вертикальную. Второй поляризационный кубик устанавливают так, чтобы он не пропускал излучение, прошедшее через первый кубик, а отражал его полностью. При этом он будет пропускать излучение, поляризованное вертикально. Пара поляризационных кубиков (вместо них можно взять две призмы Глана) является системой из двух скрещенных поляризаторов и позволяет ориентировать главные плоскости пластинок из двулучепреломляющих материалов строго вертикально или горизонтально. Для этого юстируемый элемент устанавливают примерно в желаемое положение, устанавливают между скрещенных поляризаторов и изменяют его угол поворота плавно, добиваясь того, чтобы через систему «скрещенные поляризаторы + юстируемые элемент» не проходило излучение юстировочного лазера. Так юстируют двойной нелинейный

кристалл $2x - BBO$, пластинки Q и $Q1$, и элементы измерителей поляризации (волновые пластинки и призмы Глана).

Отъюстированный таким образом кристалл BBO устанавливают вместо временно расположенной на его месте диафрагмы, следя за тем, чтобы лучи юстировочных лазеров и лазера накачки пересекались на поверхности кристалла. Устанавливают интерференционные светофильтры так, как показано на рис. 4.1. На данном этапе на оптическом столе установлены: лазер накачки, двойной кристалл BBO , интерференционные светофильтры и коллиматоры.

Затем обеспечивают защиту от засветок детекторов одиночных фотонов, после чего включают детекторы. Устанавливают вертикальную поляризацию накачки и настраивают один из нелинейных кристаллов в синхронизм – вращая винт, регулирующий угол установки нелинейных кристаллов по вертикали, добиваются максимального количества коррелированных фотоотсчетов. После этого устанавливают горизонтальную поляризацию накачки и настраивают другой нелинейный кристалл, поворачивая винт юстировки по углу вдоль горизонтали. Таким образом, оба нелинейных кристалла настроены оптимально, обеспечено выполнение условий фазового синхронизма.

Выключают детекторы одиночных фотонов, включают юстировочные лазеры, и устанавливают призмы Глана и полуволновые пластинки, являющиеся деталями измерителей поляризации. Также устанавливают в накачку пластинки Q и $Q1$. Поляризацию накачки устанавливают примерно на 45° , путем поворота соответствующей полуволновой пластинки на 22.5° от положения, при кото-

ром поляризация была вертикальной (или горизонтальной). Выключают юстировочные лазеры и включают детекторы одиночных фотонов. Универсальные поляризаторы устанавливают на пропускание горизонтально поляризованных фотонов, и записывают количество коррелированных фотоотсчетов, зарегистрированных в течение заданного времени. Затем устанавливают поляризаторы на пропускание вертикально поляризованных фотонов, и записывают количество коррелированных фотоотсчетов. Если количества коррелированных фотонов не равны, то плавно изменяют положение полуволновой пластинки (обычно не более нескольких градусов), добиваясь одинакового количества фотоотсчетов при горизонтальной и вертикальной поляризациях фотонных пар.

Следующим шагом устанавливают измерители поляризации на пропускание линейной поляризации под 45° к горизонтали и вертикали. При этом измерительным состоянием является состояние $|DD\rangle$, а количество коррелированных фотоотсчетов

$$N_{DD} \propto \left| \langle DD | \frac{|HH\rangle + e^{i\phi} |VV\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{1 + e^{i\phi}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{\cos^2 \frac{\phi}{2}}{2} \quad (4.1)$$

При плавном повороте пластинки $Q1$ изменяется фаза ϕ . Поворотом пластинки $Q1$ добиваются максимума количества коррелированных фотоотсчетов, устанавливая фазу $\phi = 0$. Поворачивают волновую пластинку одного из измерителей поляризации на 45° и убеждаются, что количество коррелированных фотоотсчетов минимально. На этом процедура юстировки источника запутанных по поляризации фотонных пар завершается.

Если требуется источник, генерирующий фотонные пары в факторизованном квантовом состоянии ($|HH\rangle$ или $|VV\rangle$), то устанавливают вертикальную или горизонтальную поляризацию накачки, соответственно. При этом шаг юстировки источника по углу ϕ можно пропустить.

Для окончательной сборки томографа устанавливают четвертьволновые пластинки измерителей поляризации.

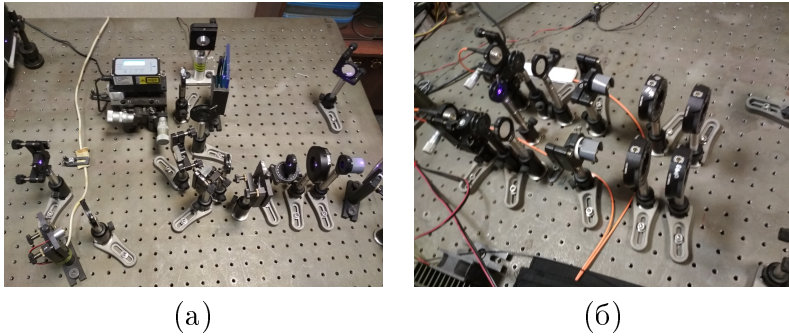


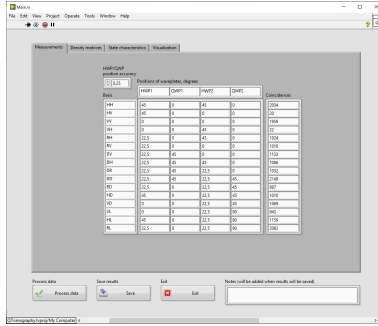
Рис. 4.2: Общий вид установки для измерений поляризационных квантовых состояний бифотонов: (а) характеризуемый источник запутанных по поляризации фотонных пар; (б) оптическая часть квантового томографа.

4.2 Протокол работы с квантовым томографом

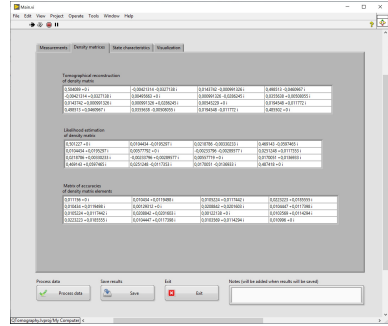
Для проведения томографических измерений необходимо измерить количество коррелированных фотоотсчетов за время измерения T при 16 различных положениях волновых пластинок измерителей поляризации. Для установки различных положений волновых

пластинок, обработки, визуализации и сохранения результатов томографических измерений применяется программа QTomography¹. Программа написана в среде LabView. В графической оболочке программы имеются несколько вкладок: Measurements, Density matrices, State Characteristics и Visualization (Рис. 4.3). В них описаны положения волновых пластинок измерителей поляризации, соответствующие 16 различным томографическим измерениям; также можно ввести экспериментальные данные, сделать обработку томографических измерений (Рис. 4.3, а) и получить следующие выходные данные (Рис. 4.3, б): томографическую и наиболее вероятную оценки матрицы плотности, погрешности измерения элементов матрицы плотности. Дополнительно в программе вычисляются характеристики измеряемого квантового состояния (Рис. 4.3, в): чистота (линейная энтропия и энтропия фон Неймана) и меры запутанности (*Запутанность* «Concurrence», *Сцепленность* «Tangle» и *Перепутывание формирования* «Entanglement of formation»). Так же линейная реконструкция и наиболее вероятная оценки матрицы плотности приведены в графическом виде (Рис. 4.3, г), что позволяет оценить степень их отличия визуально.

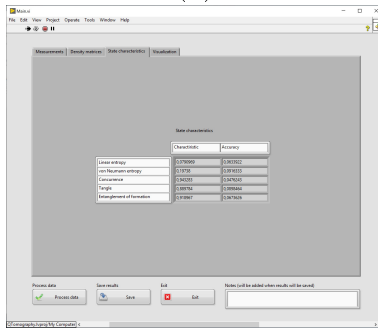
¹за экземпляром программы можно обратиться к авторам пособия



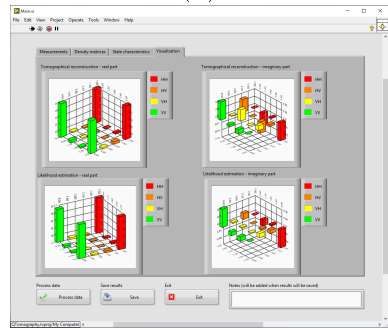
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 4.3: Программа QTomography

4.3 Экспериментальная реализация томографии квантового состояния поляризации бифотонов

Описанный выше квантовый томограф обладает значительной степенью универсальности. В частности, он способен измерять как запутанные, так и незапутанные по

поляризации состояния фотонов, находящихся как в чистых, так и в смешанных состояниях. Кроме того, квантовый томограф может измерять состояния фотонов в достаточно широком диапазоне длин волн от 400 нм до 1.5 мкм. Для осуществления перестройки по длине волны нужно заменить оптические элементы, чувствительные к длине волны: четвертьволновые и полуволновые пластики, интерференционные светофильтры и, в случае значительного изменения длины волны, может понадобиться замена счетчиков одиночных фотонов. Сигнальный и холостой фотоны могут даже иметь разные длины волн.

4.3.1 Результаты квантовой томографии фотонных пар с длиной волны 1064 нм

4.3.1.1 Квантовая томография фотонных пар, находящихся в факторизованном поляризационном состоянии

В этом параграфе будут представлены результаты квантовой томографии незапутанных поляризационных состояний бифотонов, генерируемых однокристалльным вырожденным по частоте СПР источником 1-го типа с накачкой непрерывным лазером на длине волны 532 нм. В таком режиме оба фотона будут иметь одинаковые длины волн 1064 нм.

Схема установки для измерения квантового состояния таких фотонных пар представлена на рис. 4.4. Результаты эксперимента сведены в табл.4.1.

После применения алгоритмов восстановления матрицы плотности из экспериментальных данных, которые опи-

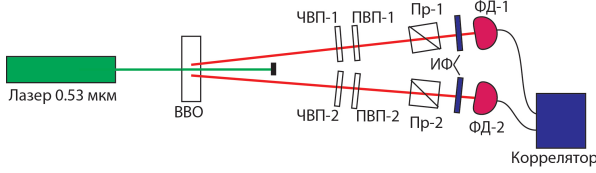


Рис. 4.4: Схема установки по квантовой томографии незапутанных по поляризации состояний бифотонов. сплошными линиями показаны два луча, вдоль которых распространяются фотоны. ЧВП – 1 и ЧВП – 2 — четвертьволновые пластинки, ПВП – 1 и ПВП – 2 — полуволновые пластинки, Пр – 1 и Пр – 2 — призмы Глана, ФД – 1 и ФД – 2 — лавинные фотодиоды idQuantique id400, работающие в режиме счета фотонов, ИФ — интерференционные светофильтры Thorlabs FLN051064-8, Коррелятор — время цифровой преобразователь idQuantique id800. Непрерывный лазер с длиной волны 532 нм накачивает кристалл ВВО ($\beta - BaB_2O_4$), вырезанный под невырожденный по частоте неколлинеарный синхронизм I типа.

саны в теоретических разделах, получены следующие результаты:

матрица плотности, полученная методом линейной реконструкции

$$\hat{\rho}_{tomogr} = \begin{pmatrix} 0.00156 & 0.0150 - 0.00293i & 0.0062 - 0.0034i & 0.034 + 0.053i \\ 0.0150 + 0.00293i & 0.0817 & 0.044 - 0.099i & 0.2315 - 0.1106i \\ 0.0062 + 0.0034i & 0.044 + 0.099i & 0.0244 & 0.1670 - 0.0501i \\ 0.034 - 0.053i & 0.2315 + 0.1106i & 0.1670 + 0.0501i & 0.8923 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

наивероятнейшая оценка матрицы плотности

$$\hat{\rho}_{likelihood} = \begin{pmatrix} 0.00185 & 0.0122 + 0.0027i & 0.0066 - 0.0003i & 0.040 - 0.007i \\ 0.0122 - 0.0027i & 0.0847 & 0.044 - 0.012i & 0.2538 - 0.1045i \\ 0.0066 + 0.0003 & 0.044 + 0.012i & 0.0241 & 0.1450 - 0.0189i \\ 0.040 + 0.007i & 0.2538 + 0.1045i & 0.1450 + 0.0189 & 0.8894 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Погрешности определения элементов матрицы плотности (действительных и мнимых частей), записанные в виде матрицы оказались следующими

$$\delta\hat{\rho}_{tomogr,likelihood} = \begin{pmatrix} 0.00037 & 0.0033 + 0.0030i & 0.0017 + 0.0014i & 0.013 + 0.013i \\ 0.0033 + 0.0030i & 0.0038 & 0.012 + 0.014i & 0.0089 + 0.0093i \\ 0.0017 + 0.0014i & 0.012 + 0.014i & 0.0017 & 0.0084 + 0.0099i \\ 0.013 + 0.013i & 0.0089 + 0.0093i & 0.0084 + 0.0099i & 0.0084 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

При вычислении погрешностей учитывалась точность установки фазовых пластинок, которая для описываемого эксперимента была оценена как 0.2° .

В табл. 4.2 приведены оценки характеристик чистоты и запутанности полученного квантового состояния. Видно, что эти характеристики равны 0 в пределах погрешностей.

Это говорит о том, что измеряемое состояние — чистое и незапутанное.

Измерение чистого незапутанного состояния может быть использовано для первичного тестирования томографа. Действительно, квантовое поляризационное состояние бифотонов, генерируемых таким СПР-источником, предсказуемо с высокой степенью вероятности. Это связано с

тем, что состояние бифотонов в этом случае определяется только физикой процесса СПР и практически не зависит от ошибок экспериментатора. Т.к. накачка поляризована горизонтально, то генерируемое состояние может быть записано в виде

$$|\Psi_{hh}\rangle = \hat{S}(\alpha) |V\rangle \otimes \hat{S}(\alpha) |V\rangle. \quad (4.5)$$

Здесь $\hat{S}(\alpha)$ — матрица поворота на угол α , который представляет собой угол между направлением поляризации фотонов генерируемых в кристалле и базисом $\{|V\rangle, |H\rangle\}$, выбранном в томографе в качестве измерительного. Никакие другие неточности в юстировках не сказываются на генерируемом состоянии. А угол α может быть легко скомпенсирован путем поворота нелинейного кристалла вокруг луча накачки на такой же угол в противоположном направлении. Отметим, что состояние (4.5) является чистым незапутанным состоянием при любых α , и его теоретические характеристики чистоты (энтропии фон Неймана, линейной энтропии) и запутанности (*Запутанности*, *Сцепленности* и *Перепутывания формирования*) равны 0.

4.3.1.2 Квантовая томография поляризационно-запутанных фотонных пар

В этом параграфе представлены результаты томографического исследования бифотонного излучения, генерируемого источником, описанным в параграфе 2.2.2. Экспериментальная процедура заключалась в следующем. Для различных положений волновых пластинок проводилось измерение количества коррелированных фотоотсчетов во

временном интервале около 8 нс. Результаты приведены в табл. (4.3).

Таблица 4.3: Количество коррелированных фотоотсчетов при томографических измерениях

№ измерения	Проецируемое состояние	Количество коррелированных фотоотсчетов
1	$ HH\rangle$	2034
2	$ HV\rangle$	20
3	$ VV\rangle$	1959
4	$ VH\rangle$	22
5	$ RH\rangle$	1024
6	$ RV\rangle$	1010
7	$ DV\rangle$	1133
8	$ DH\rangle$	1086
9	$ DR\rangle$	1032
10	$ DD\rangle$	2148
11	$ RD\rangle$	897
12	$ HD\rangle$	1010
13	$ VD\rangle$	1069
14	$ VL\rangle$	943
15	$ HL\rangle$	1159
16	$ RL\rangle$	2064

Матрица плотности, полученная методом линейной реконструкции, равна

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0.504 & -0.004 - 0.033i & 0.014 - 0.001i & 0.0499 - 0.046i \\ -0.004 + 0.033i & 0.005 & 0.001 - 0.029i & 0.036 + 0.005i \\ 0.014 + 0.001i & 0.001 + 0.029i & 0.005 & 0.019 + 0.012i \\ 0.499 + 0.046i & 0.036 - 0.005i & 0.019 - 0.012i & 0.486 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

В результате процедуры квантовой томографии получена следующая наивероятнейшая оценка матрицы плотности

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0.501 & 0.010 - 0.020i & 0.022 - 0.003i & 0.469 - 0.060i \\ 0.010 + 0.020i & 0.005 & -0.002 - 0.003i & 0.025 + 0.012i \\ 0.022 + 0.003i & -0.002 + 0.003i & 0.006 & 0.017 + 0.014i \\ 0.469 + 0.060i & 0.025 - 0.012i & 0.017 - 0.014i & 0.487 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

а для погрешностей получены следующие значения, которые для удобства представлены в виде такой же матрицы как и матрица $\hat{\rho}$.

$$\delta\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0.011 & 0.017 + 0.028i & 0.017 + 0.028i & 0.037 + 0.042i \\ 0.017 + 0.028i & 0.002 & 0.036 + 0.043i & 0.017 + 0.028i \\ 0.017 + 0.028i & 0.036 + 0.043i & 0.002 & 0.017 + 0.028i \\ 0.037 + 0.042i & 0.017 + 0.028i & 0.017 + 0.028i & 0.011 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Здесь действительная часть некоторого элемента матрицы $\delta\hat{\rho}$ означает погрешность действительной части соответствующего элемента матрицы плотности $\hat{\rho}$, а мнимая – погрешность мнимой части.

Остальные «выходные» количественные характеристики измеренного квантового состояния представлены в Табл. 4.4.

Параметр	Значение
Линейная энтропия	0.08 ± 0.06
Энтропия фон Неймана	0.20 ± 0.09
<i>Запутанность</i>	0.94 ± 0.05
<i>Сцепленность</i>	0.89 ± 0.09
<i>Перепутывание формирования</i>	0.92 ± 0.07

Таблица 4.4: Характеристики чистоты и запутанности тестируемого квантовым томографом источника запутанных по поляризации фотонных пар

Из таблицы видно, что измеряемые состояния довольно хорошо запутаны (параметр *Запутанность* близок к 1). Фиделити $F = 0,99 \pm 0,02$

4.3.2 Результаты квантовой томографии запутанных по поляризации фотонных пар с длиной волны 810 нм

Квантовое поляризационное состояние источника, описанного в разделе 4.1, работающего в режиме генерации запутанных по поляризации фотонных пар, было измерено с помощью квантового томографа. Результаты измерений приведены в табл. 4.5. В таблице также приведены погрешности определения количества коррелированных фотоотсчетов – статистическая погрешность, связанная с квантовой природой фотодетектирования, и инструментальная, связанная с неточностью в установке волновых пластинок измерителей поляризации.

№ ν измерительного состояния $ \nu\rangle = \left \varphi_{\nu}^{(1)} \right\rangle \otimes \left \varphi_{\nu}^{(2)} \right\rangle$	Состояние поляризации в первом пучке	Состояние поляризации во втором пучке	Количество коррелированных фотоотсчетов	Статистическая δ_k погрешность	Инструментальная погрешность ΔN_k
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	2896	50	9
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	15	4	12
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	2423	50	13
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	13	4	11
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	1475	40	130
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	1172	34	120
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	1065	33	90
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	1260	35	90
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	534	23	80
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	2241	50	80
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	478	22	80
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	1110	33	90
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	1327	36	90
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	1038	32	120
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	1554	40	130
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	2357	50	15

Таблица 4.5: Результаты томографических измерений и оценка статистической δ_k и инструментальной ΔN_k погрешностей

На основе этих данных вычислена линейная реконструкция матрицы плотности

$\hat{\rho}_{tomogr} =$

$$\begin{pmatrix} 0.542 & -0.065 - 0.018i & -0.036 + 0.004i & 0.425 - 0.261i \\ -0.065 + 0.018i & 0.003 & 0.023 - 0.011i & -0.029 + 0.009i \\ -0.036 - 0.004i & 0.023 + 0.011i & 0.002 & 0.020 + 0.034i \\ 0.425 + 0.261i & -0.029 - 0.009i & 0.020 - 0.034i & 0.453 \end{pmatrix}$$

Наивероятнейшая оценка матрицы плотности оказалась равной

$\hat{\rho}_{likelihood} =$

$$\begin{pmatrix} 0.542 & -0.040 - 0.002i & -0.018 - 0.014i & 0.385 - 0.276i \\ -0.040 + 0.002i & 0.004 & 0.001 - 0.0005i & -0.026 + 0.015i \\ -0.018 + 0.014i & 0.001 + 0.0005i & 0.003 & 0.003 + 0.023i \\ 0.385 + 0.276i & -0.026 - 0.015i & 0.003 - 0.023i & 0.450 \end{pmatrix}.$$

При этом погрешности определения элементов матрицы плотности (действительных и мнимых частей), записанных в виде матрицы оказались следующими

$\delta\hat{\rho}_{tomogr,likelihood} =$

$$\begin{pmatrix} 0.010 & 0.019 + 0.027i & 0.019 + 0.026i & 0.037 + 0.037i \\ 0.019 + 0.027i & 0.002 & 0.036 + 0.038i & 0.018 + 0.023i \\ 0.019 + 0.026i & 0.036 + 0.038i & 0.002 & 0.019 + 0.024i \\ 0.037 + 0.037i & 0.018 + 0.023i & 0.019 + 0.024i & 0.010 \end{pmatrix}$$

Остальные «выходные» количественные характеристики измеренного квантового состояния представлены в табл. 4.6. Из таблицы видно, что измеряемые состояния довольно хорошо запутаны (параметр *Запутанность* близок к 1).

Параметр	Значение
Линейная энтропия	0.06 ± 0.09
Энтропия фон Неймана	0.16 ± 0.18
<i>Запутанность</i>	0.94 ± 0.06
<i>Сцепленность</i>	0.89 ± 0.12
<i>Перепутывание формирования</i>	0.92 ± 0.09

Таблица 4.6: Характеристики чистоты и запутанности тестируемого квантовым томографом источника запутанных по поляризации фотонных пар

Интересно сравнить экспериментально полученную матрицу плотности состояния, генерируемого тестируемым источником, с матрицей плотности $\hat{\rho}_0$ эталонного состояния $|\Phi^+\rangle$, которое теоретически должен генерировать идеальный источник такого типа. Для состояния $|\Phi^+\rangle$ матрица $\hat{\rho}_0 = |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$ имеет вид:

$$\hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Визуальное сравнение матриц $\hat{\rho}_{exp}$ и $\hat{\rho}_0$ показывает, что измеряемое состояние несильно отличается от эталонного, т.к. угловые элементы матрицы $\hat{\rho}_{exp}$ близки к 0.5, а остальные элементы близки к 0. Интересно появление относительно большой мнимой части в элементах ρ_{14} и ρ_{41} . Фаза этих комплексных чисел является фазой между векторами $|HH\rangle$ и $|VV\rangle$, которая определяется эллиптичностью поляризации накачки, т.е. источник отъюстирован неточно.

Очевидно, что для практических целей, в частности, для создания томографического метрологического стенда, визуального сравнения состояний недостаточно. Нужен количественный критерий, в качестве которого может быть выбран введенный выше критерий *Фиделити* (*Fidelity*) [16], с помощью которого может быть количественно определена близость измеренного квантового состояния $\hat{\rho}_{exp}$ к эталонному состоянию (в наших экспериментах $|\Phi^+\rangle$). Параметр *Фиделити*, лежащий в диапазоне $[0, 1]$, вычисляется по формуле

$$F = \langle \Phi^+ | \hat{\rho}_{exp} | \Phi^+ \rangle. \quad (4.9)$$

В матричном представлении $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, где символ T означает транспонирование, и, соответственно, $\langle \Phi^+ | = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В случае $F = 1$ сравниваемые состояния тождественны, а если $F = 0$, то сравниваемые состояния ортогональны. Для тестируемого источника выражение (4.9) дает $F = 0,92 \pm 0,04$.

Следует отметить области технического применения оценок матрицы плотности методом линейной реконструкции и методом наивероятнейшего приближения. Так, значение *Фиделити* может быть вычислено как на основе линейной реконструкции, так и на основе наивероятнейшей оценки матрицы плотности. Здесь мы использовали линейную реконструкцию матрицы плотности. Однако величины линейной энтропии, энтропии фон Неймана, *Запутанности*, *Сцепленности* и *Перепутывания формирования* при их вычислении требуют использования собственных значений матрицы плотности, и могут быть адекватно рассчитаны только на основе наивероятнейшей оценки матрицы плотности.

Таблица 4.1: Количество коррелированных фотоотсчетов, полученных в рамках процедуры квантовой томографии бифотонного состояния: n — номер измерения из табл. 3.1; Кол. фот. отсч. — количество зарегистрированных коррелированных фотоотсчетов за время измерения T .

n	Количество коррелированных фотоотсчетов
1	23
2	1199
3	13090
4	358
5	141
6	5522
7	10540
8	282
9	6136
10	7313
11	3823
12	831
13	9174
14	7459
15	654
16	3147

Таблица 4.2: Характеристики "тестового" состояния

Характеристика	значение
Энтропия фон Неймана	0.00008 ± 0.00939
Линейная энтропия	0.00015 ± 0.01736
<i>Запутанность</i> ("Concurrence")	0.031 ± 0.073
<i>Сцепленность</i> ("Tangle")	0.00097 ± 0.00468
<i>Перепутывание формирования</i> «Entanglement of formation»	0.003 ± 0.014

Глава 5

Примеры применения метода квантовой томографии в задачах квантовой оптики и квантовой информатики

5.1 Экспериментальное исследование квантовой запутанности неортогональных состояний фотонных СПР-пар методом квантовой томографии

В этом разделе будут представлены результаты экспериментов по томографированию квантовых состояний, ге-

нерируемых двухкристальным СПР-источником 1-го типа в необычной конфигурации. Схема установки, позволяющая измерять запутанность в зависимости от фазы при интерференции двух неортогональных квантовых состояний, генерируемых в процессе СПР в двух последовательно расположенных нелинейных кристаллах, показана на рис. 5.1. Квантовая интерференция возникает между двумя состояниями, в которых фотонная пара может родиться в состоянии $|DD\rangle$ в первом нелинейном кристалле, где $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, или в состоянии $|VV\rangle$ во втором нелинейном кристалле (в лабораторном базисе). Для случая $\theta = \pi/4$ была исследована фазовая зависимость *Запутанности* от ϕ_0 .

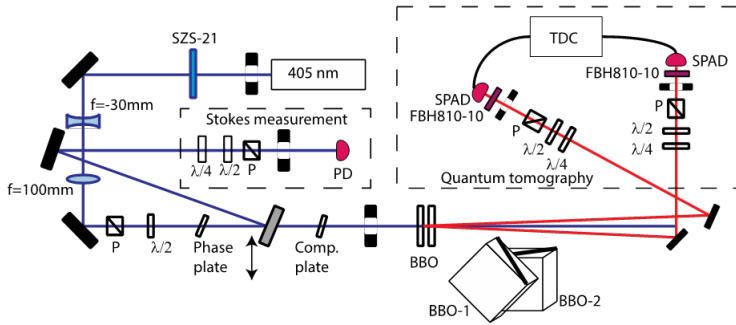


Рис. 5.1: Схема экспериментальной установки по исследованию квантовой запутанности неортогональных состояний СПР-пар методом квантовой томографии

Установку на рис. 5.1 можно схематично разделить на две части – схему приготовления и схему измерения квантового состояния.

Схема приготовления квантового состояния состоит в следующем. Поляризационные состояния $|DD\rangle$ и $|VV\rangle$

получаются с помощью СПР в двух последовательно расположенных одинаковых нелинейных кристаллах. Накачка осуществлялась непрерывным излучением на длине волны 405 нм с помощью лазера (Ondax LM-405-PLR-40). Угол неколлинеарности СПР был установлен 0.78° . При этом в первом нелинейном кристалле в СПР участвовала поляризация накачки $|A\rangle = (-|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, а во втором — $|H\rangle$. Двулучепреломляющая пластинка Comp plate использовалась для компенсации двулучепреломления в первом нелинейном кристалле. Фаза ϕ_0 между интерферирующими состояниями $|DD\rangle$ и $|VV\rangle$ регулируется состоянием накачки — перед нелинейными кристаллами накачка находится в поляризационном состоянии $\propto |A\rangle + e^{i\phi_0} |H\rangle$. При этом ориентация оси эллипса поляризации накачки совпадает с биссектрисой $|A\rangle$ и $|H\rangle$, а ориентация оптической оси двулучепреломляющей пластинки Phase plate перпендикулярна оси эллипса поляризации накачки. Путем поворота Phase plate изменялось значение ϕ_0 .

При каждой установке угла ϕ_0 производилось измерение квантового состояния, генерируемого схемой приготовления квантового состояния, вычислялось значение матрицы плотности, *Запутанности*, а также *Фиделити* измеренного квантового состояния и квантового состояния, вычисляемого теоретически.

Экспериментальные результаты приведены на рис. 5.2.

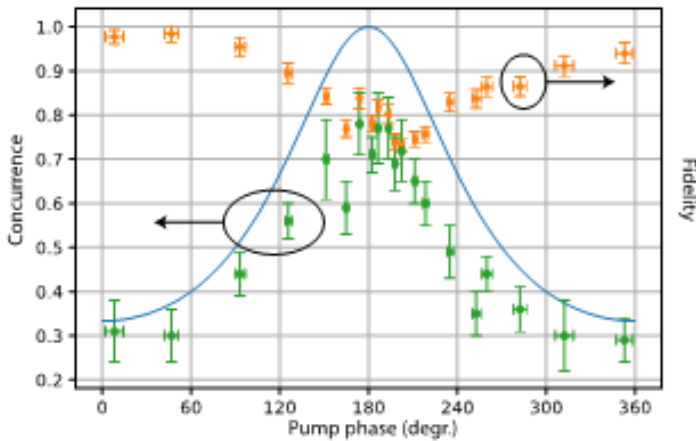


Рис. 5.2: Зависимость *Запутанности* от фазы при квантовой интерференции квантовых состояний $|DD\rangle$ и $|VV\rangle$. Также показано значение *Фиделити* измеренного квантового состояния и квантового состояния, рассчитанного теоретически.

Из рисунка видно, что *Запутанность* зависит от фазы между интерферирующими состояниями. Существует оптимальное значение фазы $\phi_0 = \pi$, при котором запутанность в 2.7 раза больше, чем для неоптимальных значений. Некоторое уменьшение запутанности по сравнению с максимально возможным объясняется действием механизма декогеренции. Экспериментальные данные подтверждают зависимость запутанности от фазы между интерферирующими состояниями.

5.2 Применение параметра Фиделити для характеристики квантово-оптических протоколов

Данный раздел посвящен проблеме измерения квантовых состояний запутанных по поляризации фотонных пар и их метрологической сертификации для использования в приложениях. Источники одиночных фотонов и фотонных пар являются базовым элементом современных квантовых оптических информационных систем. При этом ключевую роль в развитии таких ключевых направлений квантовой информатики, как квантовые вычисления [66] и квантовая криптография [67] играют источники, генерирующие коррелированные по времени фотонные пары (бифотоны), находящиеся в запутанном состоянии.

В настоящее время квантовые оптические технологии [68] вышли из стадии лабораторных исследований и к концу двадцатых годов готовятся занять ключевое место в информационной индустрии; эта тенденция поддерживается на государственном уровне во многих странах [69, 70, 71, 72], в том числе и в России [73, 74, 75]. В связи с этим, актуальной становится задача сертификации основных элементов оптических квантовых систем, ведь без единых стандартов нельзя говорить о совместимости продуктов разных производителей, т.е. без стандартов невозможно развитие индустрии [76]. Процесс создания стандартов уже начался - в 2016 году Европейским институтом телекоммуникационных стандартов (ETSI) был выпущен первый предварительный стандарт [77], в котором определены методы сертификации основных элементов

квантово-оптических криптографических систем. Сертификация СПР-источников бифотонов в этом документе не затрагивается, хотя и является одной из важнейших задач будущих стандартов.

В данном разделе описывается метод для сертификации однофотонных СПР-источников. Предлагаемый метод основан на применении параметра близости квантовых состояний – *Фиделити*. Показано, что параметр *Фиделити* влияет на уровень ошибки при использовании источников одиночных фотонов и фотонных пар для задач квантовой криптографии. Установка для измерения *Фиделити* представляет собой квантовый томограф, описанный в разделе 3.1.

Критерий *Фиделити* [16] (далее F) позволяет установить близость реального квантового состояния поляризации бифотонов, генерируемых тестируемым СПР-источником, к квантовому состоянию, заявляемому производителем источника. Так же он является, как будет показано ниже, критерием применимости источников одиночных фотонов в квантовых приложениях, что дает основание предложить критерий *Фиделити* в качестве стандарта квантового состояния СПР-источников.



Рис. 5.3: Блок-схема методики характеризации поляризационного квантового состояния СПР-источников

Методика характеристики СПР-источников по параметру *Фиделити* заключается в следующем (рис. (5.3)). Поток пар фотонов из источника направляется в квантовый томограф [73, 60, 78], который измеряет генерируемое источником поляризационное состояние бифотонов. Квантовый томограф позволяет определить матрицу плотности попадающего в него излучения. После этого вычисляется величина F , которая количественно характеризует близость двух квантовых состояний. В общем случае величина F может быть вычислена по формуле [16]

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\hat{\rho}_0^{\frac{1}{2}} \hat{\rho} \hat{\rho}_0^{\frac{1}{2}}} \right)^2, \quad (5.1)$$

где $\hat{\rho}$ и $\hat{\rho}_0$ - матрица плотности, полученная в результате тестирования источника, и заявленная производителем, соответственно. Наиболее часто в квантовых приложениях требуются чистые состояния, и $\hat{\rho}_0 = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|$. *Фиделити* в этом случае записывается как

$$F = \langle \Psi_0 | \hat{\rho} | \Psi_0 \rangle, \quad (5.2)$$

В обоих случаях величина F может изменяться в диапазоне от 0 до 1, причем значение 1 свидетельствует о том, что состояния $\hat{\rho}_0$ и $\hat{\rho}$ тождественно совпадают.

Величина *Фиделити* дает оценку для ошибки в таких приложениях квантовых технологий, как квантовая криптография и квантовые вычисления. Рассмотрим некоторые примеры.

5.2.1 Квантовая передача ключа по протоколу BB84

Впервые идея квантовой криптографии была предложена Ч. Беннеттом и Ж. Brassardом в 1984 году [79]. Протокол, предложенный авторами для распределения случайной битовой последовательности (шифровального ключа) без возможности несанкционированного прослушивания (протокол BB84), состоит в следующем. Предполагается, что абонент А (называемый Алисой) посылает абоненту В (называемому Бобом) одиночные фотоны в различном состоянии поляризации. Алиса может приготовить фотоны в лабораторном базисе в состоянии горизонтальной $|H\rangle$ поляризации (соответствующей “0” в шифровальном ключе) или в состоянии вертикальной $|V\rangle$ поляризации (кодирующей “1” в ключе). Так же она может приготавливать фотоны в диагональном базисе, т.е. фотоны, имеющие поляризацию $\pm 45^\circ$ к горизонтали, а именно $|D\rangle = \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}$, соответствующей “0”, и $|A\rangle = \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}$, соответствующей “1”. Алиса посылает подготовленные фотоны по т.н. квантовому каналу Бобу, который производит измерение их поляризации в случайно выбранном базисе. Затем абоненты по открытому каналу сообщают друг другу, в каких базисах (лабораторном или диагональном) они проводили измерения, и оставляют у себя только результаты в совпадающем базисе. В случае, если используемые ими приборы идеальны и отсутствует подслушивание, они должны получить две совпадающие битовые последовательности. Наличие же ошибок в созданном ключе может говорить о прослушивании. Так, если некоторый объект (называемый Евой) непрерывно ведет прослушивание, проводя измерения в случайно выбранном базисе и передавая Бобу вместо изначального

фотона результат своих измерений, то Алиса и Боб должны зарегистрировать возрастание ошибки до 25%. Если Ева измеряет не каждый фотон, а только часть из потока, посылаемого Алисой Бобу, то величина вносимой ошибки тоже уменьшается, хотя Ева узнает меньше информации о ключе. Допустимым количеством информации, принципиально доступной злоумышленникам, и определяется максимально допустимый уровень ошибки.

Ошибки при генерировании ключа возникают и в силу других причин: из-за неизбежной неидеальности оборудования, искажений, вносимых квантовым каналом. Например, если Алиса готовит фотоны с какой-либо погрешностью, то Боб с некоторой вероятностью будет получать ошибочные биты. А именно, вероятность ошибки в случае приготовления фотона в состоянии $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ вместо фотона в состоянии $|H\rangle$ равна вероятности того, что Боб при измерении поляризации получит $|V\rangle$, т.е. $|\langle V|\Psi\rangle|^2 = |\beta|^2 = 1 - F$, где $F = |\langle H|\Psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$ — *Фиделити*. Аналогичные зависимости имеют место и при приготовлении остальных состояний. Таким образом, при уменьшении *Фиделити* увеличивается вероятность ошибки.

5.2.2 Квантовая передача ключа с использованием запутанных фотонов

В квантовой криптографии широко используются поляризационно-запутанные фотонные пары [80]. Рассмотрим работу схемы, предложенной в [81].

Алиса и Боб получают по одному из запутанных по поляризации фотонов в состоянии $|\Phi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$. Источник запутанных фотонов может быть внешним, или

же находиться у одного из абонентов. Так же у каждого из абонентов имеется измеритель, работающий в режиме измерения поляризации в лабораторном (результат измерения – поляризация $|H\rangle$ или $|V\rangle$) или диагональном базисе ($|D\rangle$ или $|A\rangle$). Абоненты, получив фотон, проводят измерение его поляризации в случайно выбранном базисе. Аналогично тому, как действовали Алиса и Боб в протоколе BB84, они сообщают друг другу базис, в котором были произведены измерения. При этом, если используются идеальные приборы в отсутствие прослушивания, результаты поляризационных измерений в совпадающих базисах должны полностью совпасть. Результаты измерения в несовпадающих базисах не используются.

Ошибки в созданном ключе появляются из-за прослушивания, а так же в случае использования некачественного источника запутанных фотонов, генерирующего фотонные пары в отличающемся от $|\Phi^{(+)}\rangle$ состоянии, задаваемом матрицей плотности $\hat{\rho}$. Проанализируем ошибки, возникающие из-за отклонения квантового состояния фотонов от $|\Phi^{(+)}\rangle$.

Матрица плотности представима в виде

$$\hat{\rho} = F |\Phi^{(+)}\rangle \langle \Phi^{(+)}| + (1 - F) \hat{\rho}_{\perp}, \quad (5.3)$$

где $F = \langle \Phi^{(+)} | \hat{\rho} | \Phi^{(+)} \rangle$ есть величина *Фиделити*, а $\hat{\rho}_{\perp}$ удовлетворяет условию $\langle \Phi^{(+)} | \hat{\rho}_{\perp} | \Phi^{(+)} \rangle = 0$. В случае измерений в лабораторном базисе ошибка состоит в измерении состояний $|HV\rangle$ и $|VH\rangle$. При этом ее величина составит

$$p(|HV\rangle) + p(|VH\rangle) = \langle HV | \hat{\rho} | HV \rangle + \langle VH | \hat{\rho} | VH \rangle$$

$$= (1 - F)(\langle HV | \hat{\rho}_\perp | HV \rangle + \langle VH | \hat{\rho}_\perp | VH \rangle) \leq (1 - F), \quad (5.4)$$

т.к. $\text{Tr } \hat{\rho}_\perp = 1$. Аналогичный результат верен и для измерений в диагональном базисе. В итоге для вероятности ошибки получается выражение

$$P_{err} \leq 1 - F \quad (5.5)$$

Параметр *Фиделити* определяет так же и минимально возможный уровень ошибки. Чтобы это увидеть, запишем матрицу плотности состояния в виде $\hat{\rho}_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Каждое состояние $|\psi_i\rangle$ можно записать в базисе из состояний Белла как $|\psi_k\rangle = \alpha_1 |\Phi^{(+)}\rangle + \alpha_2 |\Phi^{(-)}\rangle + \alpha_3 |\Psi^{(+)}\rangle + \alpha_4 |\Psi^{(-)}\rangle$. *Фиделити* для этой реализации есть просто $F_k = |\alpha_1|^2$. Учитывая, что состояния, дающие ошибку, в базисе состояний Белла записываются как

$$\begin{aligned} |HV\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^{(+)}\rangle + |\Psi^{(-)}\rangle) \\ |VH\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^{(+)}\rangle - |\Psi^{(-)}\rangle) \\ |AD\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^{(+)}\rangle + |\Psi^{(-)}\rangle) \\ |DA\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^{(+)}\rangle - |\Psi^{(-)}\rangle), \end{aligned} \quad (5.6)$$

можно получить, что вероятность ошибки

$$P_{err}^k = \frac{p(HV) + p(VH) + p(DA) + p(AD)}{2} = \frac{1 - F_k + \alpha_4^* \alpha_4}{2} \geq \frac{1 - F}{2} \quad (5.7)$$

Усредняя по всему смешанному состоянию можно получить, что $P_{err} \geq \frac{1-F}{2}$. Таким образом, величина *Фиделити* задает диапазон, в котором может лежать ошибка при создании квантового ключа:

$$\frac{1 - F}{2} \leq P_{err} \leq 1 - F \quad (5.8)$$

Следует отметить, что вероятность ошибки для данного *Фиделити* зависит от явного вида “примесного” состояния $\hat{\rho}_\perp$. Рассмотрим некоторые примеры.

- $\hat{\rho}_\perp = |\Psi^{(-)}\rangle \langle \Psi^{(-)}|$, где $|\Psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - |VH\rangle)$. В этом случае величина ошибки принимает максимум: и при измерении в лабораторном базисе, и при измерении в диагональном, ошибка равна $P_{err} = 1 - F$
- При $\hat{\rho}_\perp = |\Phi^{(-)}\rangle \langle \Phi^{(-)}|$, где $|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle - |VV\rangle)$. В лабораторном базисе ошибки не возникают, а при измерении в диагональном базисе они имеют максимальное значение. Итоговая вероятность ошибки в этом находится на минимальном уровне $P_{err} = \frac{1-F}{2}$.
- При $\hat{\rho}_\perp = |\Psi^{(+)}\rangle \langle \Psi^{(+)}|$, где $|\Psi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)$. Ошибки в лабораторном базисе происходят с максимально возможной вероятностью, а в диагональном не происходят. Итоговая вероятность ошибки, аналогично предыдущему случаю, равна $P_{err} = \frac{1-F}{2}$.

- При $\hat{\rho}_\perp = |HV\rangle\langle HV|$ вероятность ошибки при измерении в лабораторном базисе составляет $1 - F$, а при измерениях в диагональном базисе она составит $\frac{1-F}{2}$, что в итоге приведет к вероятности получить неправильный бит в «сыром» ключе $P_{err} = \frac{3}{4}(1 - F)$

Таким образом, использование критерия *Фиделити* в качестве стандарта квантового состояния, генерируемого источником запутанных фотонов является целесообразным.

Более подробно о научных и технологических достижениях, полученных с одиночными фотонами можно ознакомиться в [78].

Заключение

В учебном пособии изложены теоретические и экспериментальные основы квантовой томографии поляризованных состояний фотонов и фотонных пар. Отметим, что, хотя изложение велось исключительно для поляризованной степени свободы фотонов, изложенные результаты имеют более широкую область применимости. Интересующийся читатель по аналогии с изложенным материалом может теоретически рассчитать и экспериментально реализовать, например, квантовую томографию фотонов, имеющих орбитальный угловой момент. Изложенные идеи применимы ко всем квантовым системам, имеющим конечное число степеней свободы. В этом случае говорят о *дискретных переменных*. Спектральная степень свободы (длина волны фотона), пространственная степень свободы (например, область в поперечном сечении пучка, в

которой фотон был зарегистрирован), оптическое изображение и т.д., приводят нас к идее квантовой томографии в непрерывных переменных. Идейно, квантовая томография в непрерывных переменных и квантовая томография в дискретных переменных имеют много общего. Есть и ряд существенных особенностей — количество степеней настолько велико, что все степени свободы измерить точно невозможно. Читатель, заинтересовавшийся квантовой томографией в непрерывных переменных, может обратиться к книге [13].

Работы в области квантовой физики и квантовых технологий активно ведутся в России [82] — в частности, в Квантовом центре МГУ [83, 84, 85, 86, 87], Российском квантовом центре [88, 89, 90], Казанском квантовом центре [91, 92], университете ИТМО [93, 94, 95], НИТУ МИСИС [96].

Авторы пособия выражают искреннюю благодарность коллективу лаборатории Экспериментальной и теоретической квантовой оптики каф. Общей физики и волновых процессов Физического факультета МГУ за многочисленные плодотворные обсуждения изложенных в пособии идей. Особую благодарность авторы выражают проф. А.С. Чиркину за ценные замечания и советы.

Учебное пособие было создано за счет средств гранта РНФ №21-12-00155.

Список литературы

- [1] E. Gibney. “Chinese satellite is one giant step for the quantum internet”. В: *Nature News* 535.7613 (2016), с. 478.
- [2] Sheng-Kai Liao и др. “Satellite-relayed intercontinental quantum network”. В: *Physical review letters* 120.3 (2018), с. 030501.
- [3] “Cerberis QKD Blade”. В: <http://www.idquantique.com/quantum-safe-crypto/qkd-blade-server/> ().
- [4] Y. He и др. “Quantum state transfer from a single photon to a distant quantum-dot electron spin”. В: *Physical review letters* 119.6 (2017), с. 060501.
- [5] Sheng-Kai Liao и др. “Long-distance free-space quantum key distribution in daylight towards inter-satellite communication”. В: *Nature Photonics* 11.8 (2017), с. 509—513.
- [6] Xiao-Song Ma и др. “Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward”. В: *Nature* 489.7415 (2012), с. 269—273.
- [7] Shuang Wang и др. “2 GHz clock quantum key distribution over 260 km of standard telecom fiber”. В: *Optics letters* 37.6 (2012), с. 1008—1010.

- [8] Yu-Ao Chen и др. “An integrated space-to-ground quantum communication network over 4,600 kilometres”. В: *Nature* 589.7841 (2021), с. 214—219.
- [9] Frank Arute и др. “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor”. В: *Nature* 574.7779 (2019), с. 505—510.
- [10] Han-Sen Zhong и др. “Quantum computational advantage using photons”. В: *Science* 370.6523 (2020), с. 1460—1463.
- [11] Richard Pitwon и Bernard HL Lee. “Harmonising international standards to promote commercial adoption of quantum technologies”. В: *Quantum Technology: Driving Commercialisation of an Enabling Science II*. Т. 11881. SPIE. 2021, с. 53—62.
- [12] Joanne C Zwinkels и др. “Photometry, radiometry and ‘the candela’: evolution in the classical and quantum world”. В: *Metrologia* 47.5 (2010), R15.
- [13] G Mauro D’Ariano, Matteo GA Paris и Massimiliano F Sacchi. “Quantum tomography”. В: *Advances in Imaging and Electron Physics* 128 (2003), с. 206—309.
- [14] D Bouwmeester, A Ekert и A Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer, Berlin, 2000.
- [15] William K Wootters. “Entanglement of formation and concurrence.” В: *Quantum Information & Computation* 1.1 (2001), с. 27—44.
- [16] Richard Jozsa. “Fidelity for mixed quantum states”. В: *Journal of modern optics* 41.12 (1994), с. 2315—2323.
- [17] Клышко Д.Н. “Когерентный распад фотонов в нелинейной среде”. В: *Всесоюзное совещание по свойствам нелинейных сред*. 1966.

- [18] Д.Н. Клышко. “Когерентный распад фотонов в нелинейной среде”. В: *Письма ЖЭТФ* 6.1 (1967), с. 490—492.
- [19] СА Ахманов и др. “Квантовые шумы в параметрических усилителях света”. В: *Письма в ЖЭТФ* 6.4 (1967), с. 575.
- [20] S E Harris, M K Oshman и R L Byer. “Observation of tunable optical parametric fluorescence”. В: *Physical Review Letters* 18.18 (1967), с. 732.
- [21] Douglas Magde и Herbert Mahr. “Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16 000 Å”. В: *Physical Review Letters* 18.21 (1967), с. 905.
- [22] TG Giallorenzi и CL Tang. “Quantum theory of spontaneous parametric scattering of intense light”. В: *Physical Review* 166.2 (1968), с. 225.
- [23] CK Hong и L Mandel. “Theory of parametric frequency down conversion of light”. В: *Physical Review A* 31.4 (1985), с. 2409.
- [24] Adel Joobeur, Bahaa EA Saleh и Malvin C Teich. “Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion”. В: *Physical Review A* 50.4 (1994), с. 3349.
- [25] BR Mollow. “Photon correlations in the parametric frequency splitting of light”. В: *Physical Review A* 8.5 (1973), с. 2684.
- [26] David C Burnham и Donald L Weinberg. “Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs”. В: *Physical Review Letters* 25.2 (1970), с. 84.

- [27] D. N. Klyshko. “Use of two-photon light for absolute calibration of photoelectric detectors”. B: *Soviet Journal of Quantum Electronics* 10.9 (1980), с. 1112.
- [28] AA Malygin, AN Penin и AV Sergienko. “Absolute calibration of the sensitivity of photodetectors using a biphotonic field”. B: *JETP Lett* 33.10 (1981).
- [29] Chung K Hong, Stephen R Friberg и Leonard Mandel. “Optical communication channel based on coincident photon pairs”. B: *Applied optics* 24.22 (1985), с. 3877—3882.
- [30] L Mandel. “Proposal for almost noise-free optical communication under conditions of high background”. B: *JOSA B* 1.1 (1984), с. 108—110.
- [31] Hoi-Kwong Lo, Marcos Curty и Kiyoshi Tamaki. “Secure quantum key distribution”. B: *Nature Photonics* 8.8 (2014), с. 595—604.
- [32] С. Н Bennett и др. “Experimental quantum cryptography”. B: *Journal of cryptology* 5.1 (1992), с. 3—28.
- [33] Michael A Nielsen и Isaac Chuang. *Quantum computation and quantum information*. 2002.
- [34] Dik Bouwmeester и др. “Experimental quantum teleportation”. B: *Nature* 390.6660 (1997), с. 575.
- [35] Mikhail Yu Saygin, Anatoly S Chirkin и Mikhail I Kolobov. “Quantum holographic teleportation of entangled two-color optical images”. B: *JOSA B* 29.8 (2012), с. 2090—2098.
- [36] P. Grangier, G. Roger и A. Aspect. “Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences”. B: *EPL (Europhysics Letters)* 1.4 (1986), с. 173.

- [37] Chong-Ki Hong, Zhe-Yu Ou и Leonard Mandel. “Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference”. В: *Physical review letters* 59.18 (1987), с. 2044.
- [38] CK Hong и Leonard Mandel. “Experimental realization of a localized one-photon state”. В: *Physical Review Letters* 56.1 (1986), с. 58.
- [39] Daniele Pelliccia и др. “Contextual realization of the universal quantum cloning machine and of the universal-NOT gate by quantum-injected optical parametric amplification”. В: *Physical Review A* 68.4 (2003), с. 042306.
- [40] Lucien Hardy. “Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states”. В: *Physical Review Letters* 71.11 (1993), с. 1665.
- [41] Jian-Wei Pan и др. “Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted”. В: *Physical Review Letters* 80.18 (1998), с. 3891.
- [42] YH Shih и Carroll O Alley. “New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion”. В: *Physical Review Letters* 61.26 (1988), с. 2921.
- [43] D. M. Greenberger и др. “Bell’s theorem without inequalities”. В: *American Journal of Physics* 58.12 (1990), с. 1131—1143.
- [44] ZY Ou и L Mandel. “Violation of Bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment”. В: *Physical review letters* 61.1 (1988), с. 50.

- [45] D. Bouwmeester и др. “Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement”. В: *Physical Review Letters* 82.7 (1999), с. 1345.
- [46] J.-W. Pan и др. “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement”. В: *Nature* 403.6769 (2000), с. 515.
- [47] Alexander I Lvovsky и др. “Quantum state reconstruction of the single-photon Fock state”. В: *Physical Review Letters* 87.5 (2001), с. 050402.
- [48] George Greenstein и Arthur Zajonc. *The quantum challenge: modern research on the foundations of quantum mechanics*. Jones & Bartlett Learning, 2006.
- [49] A. Zeilinger. *Dance of the photons: from Einstein to quantum teleportation*. Farrar, Straus и Giroux, 2010.
- [50] Keiichi Edamatsu. “Entangled photons: generation, observation, and characterization”. В: *Japanese Journal of Applied Physics* 46.11R (2007), с. 7175.
- [51] Radhika Rangarajan, Michael Goggin и Paul Kwiat. “Optimizing type-I polarization-entangled photons”. В: *Optics express* 17.21 (2009), с. 18920—18933.
- [52] Paul G Kwiat и др. “Ultrabright source of polarization-entangled photons”. В: *Physical Review A* 60.2 (1999), R773.
- [53] Г. Г. Гурздян, В. Г. Дмитриев и Д. Н. Никогосян. *Нелинейно-оптические кристаллы: Свойства и применение в квантовой электронике: Справочник*. Радио и связь, 1991.

- [54] Taehyun Kim, Marco Fiorentino и Franco NC Wong. “Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization Sagnac interferometer”. В: *Physical Review A* 73.1 (2006), с. 012316.
- [55] Paul G Kwiat и др. “New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs”. В: *Physical Review Letters* 75.24 (1995), с. 4337.
- [56] GM Akselrod и др. “Phase-compensated ultra-bright source of entangled photons: erratum”. В: *Optics Express* 15.8 (2007), с. 5260—5261.
- [57] J. B Altepeter, E. R. Jeffrey и P. G. Kwiat. “Phase-compensated ultra-bright source of entangled photons”. В: *Optics Express* 13.22 (2005), с. 8951—8959.
- [58] А.В. Белинский. *Квантовые измерения*. Litres, 2014.
- [59] С. А. Ахманов и С. Ю. Никитин. *Физическая оптика. Учебник*. Московский государственный университет имени МВ Ломоносова, 2004.
- [60] DFV James и др. “Measurement of qubits”. В: *Physical Review A* 64.5 (2001), с. 052312.
- [61] D. Frolovstev. github.com/frolovstev/quantum-tomography-2q.
- [62] Гостев П.П., Магницкий С.А. и Чиркин А.С. *Обратная задача статистики фотоотсчетов*. Москва: Физический факультет МГУ, 2020.
- [63] Магницкий С.А. и Чиркин А.С. *Статистика фотоотсчетов классических и квантовых световых полей*. Москва: Физический факультет МГУ, 2019.

- [64] Benjamin Schumacher. “Quantum coding”. В: *Physical Review A* 51.4 (1995), с. 2738.
- [65] Dmitry Frolovтsev и Sergey Magnitskiy. “A double-crystal scheme with full compensation of the Migdall effect”. В: *EPJ Web of Conferences*. Т. 220. EDP Sciences. 2019, с. 03016.
- [66] Pieter Kok и др. “Linear optical quantum computing with photonic qubits”. В: *Reviews of Modern Physics* 79.1 (2007), с. 135.
- [67] Nicolas Gisin и Rob Thew. “Quantum communication”. В: *Nature photonics* 1.3 (2007), с. 165.
- [68] Jeremy L O’Brien, Akira Furusawa и Jelena Vučković. “Photonic quantum technologies”. В: *Nature Photonics* 3.12 (2009), с. 687.
- [69] Christopher Monroe, Michael G Raymer и Jacob Taylor. “The US National Quantum Initiative: From Act to action”. В: *Science* 364.6439 (2019), с. 440—442.
- [70] Max Riedel и др. “Europe’s Quantum flagship initiative”. В: *Quantum Science and Technology* 4.2 (2019), с. 020501.
- [71] Ben Sussman и др. “Quantum Canada”. В: *Quantum Science and Technology* 4.2 (2019), с. 020503.
- [72] Y. Yamamoto, M. Sasaki и H. Takesue. “Quantum information science and technology in Japan”. В: *Quantum Science and Technology* 4.2 (2019), с. 020502.

- [73] Д.Н. Фроловцев, С.А. Магницкий и А.В. Демин. “Квантовый томограф для измерения и характеристики квантовых состояний бифотонных источников”. В: *Измерительная техника* 4 (2020), с. 2—26.
- [74] Магницкий С.А. и др. “Метрология одиночных фотонов для квантовых информационных технологий”. В: *Измерительная техника* 3 (2017), с. 24—29.
- [75] SA Magnitskii и др. “Metrology of single photons for quantum information technologies”. В: *Measurement Techniques* 60.3 (2017), с. 235—241.
- [76] Michael G Raymer и Christopher Monroe. “The US National Quantum Initiative”. В: *Quantum Science and Technology* 4.2 (2019), с. 020504.
- [77] European Telecommunications Standards Institute (ETSI). *Quantum Key Distribution (QKD); Component characterization: characterizing optical components for QKD systems*. 2016.
- [78] S Magnitskiy и др. “A SPDC-based source of entangled photons and its characterization”. В: *Journal of Russian Laser Research* 36.6 (2015), с. 618—629.
- [79] C. H. Bennett и G. Brassard. “An update on quantum cryptography”. В: *Workshop on the Theory and Application of Cryptographic Techniques*. Springer. 1984, с. 475—480.
- [80] Artur K Ekert. “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”. В: *Physical review letters* 67.6 (1991), с. 661.

- [81] A Poppe и др. “Practical quantum key distribution with polarization entangled photons”. В: *Optics Express* 12.16 (2004), с. 3865—3871.
- [82] AK Fedorov и др. “Quantum technologies in Russia”. В: *Quantum Science and Technology* 4.4 (2019), с. 040501.
- [83] Yong Siah Teo и др. “Benchmarking quantum tomography completeness and fidelity with machine learning”. В: *New Journal of Physics* 23.10 (2021), с. 103021.
- [84] A.D. Moiseevskiy и др. “Experimental adaptive quantum state tomography based on rank-preserving transformations”. В: *Laser Physics Letters* 17.10 (2020), с. 105210.
- [85] Adriano Macarone Palmieri и др. “Experimental neural network enhanced quantum tomography”. В: *npj Quantum Information* 6.1 (2020), с. 1—5.
- [86] K.S. Kravtsov, A.K. Zhutov и S.P. Kulik. “Spatial quantum state tomography with a deformable mirror”. В: *Physical Review A* 102.2 (2020), с. 023706.
- [87] G.I. Struchalin и др. “Adaptive quantum tomography of high-dimensional bipartite systems”. В: *Physical Review A* 98.3 (2018), с. 032330.
- [88] V.I. Manko и L.A. Markovich. “Quantum tomography of time-dependent nonlinear hamiltonian systems”. В: *Reports on Mathematical Physics* 83.1 (2019), с. 87—106.
- [89] I. A. Fedorov и др. “Tomography of a multimode quantum black box”. В: *New Journal of Physics* 17.4 (2015), с. 043063.

- [90] A. Fedorov. “Feynman integral and perturbation theory in quantum tomography”. В: *Physics Letters A* 377.37 (2013), с. 2320—2323.
- [91] Yu. I. Bogdanov, B.I. Bantysh и A.A. et al Kalinkin. “Optical polarization echo: Manifestation and study by methods of quantum tomography of states and processes”. В: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 118.6 (2014), с. 845—855.
- [92] АЕ Mihailov и др. “Polarization tomography of a narrow-band biphoton field”. В: *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics* 75.12 (2011), с. 1658—1663.
- [93] Francesco Lenzini и др. “Quantum tomography of a nonlinear photonic circuit by classical sum-frequency generation measurements”. В: *Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim*. Optical Society of America. 2017, s1214.
- [94] G.P. Miroshnichenko. “CQED quantum tomography of a microwave range”. В: *arXiv preprint arXiv:1510.03155* (2015).
- [95] E. Koreshin и др. “Emulating interacting waveguide quantum electrodynamics with wire metamaterials”. В: (2021).
- [96] I. S. Besedin и др. “Superconducting qubits in Russia”. В: *Quantum Electronics* 48.10 (2018), с. 880.

Учебное издание

Подписано в печать 10.04.2022. Формат 60х88/16

Печать офсетная. Бумага офс. №1

Объем 130 стр. Тираж 100 экз. Заказ № _____

Физический факультет МГУ

Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова

Тел. (495)939-5494

Интернет: <http://publish.phys.msu.su>

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова